Rafał Buła
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

O TEORII SPEKULACJI I INWESTYCJI JULESA REGNAULTA

Wprowadzenie

Fluktuacje cen instrumentów finansowych były przedmiotem badań od chwili powstania współczesnego rynku finansowego. Znaczący wzrost zapotrzebowania na kapitał ze strony państwa i przedsiębiorstw wywołał gwałtowny rozwój wszystkich segmentów tego rynku. Bezpośrednim skutkiem było pojawienie się ogromnej liczby „(...) publikacji skierowanych do inwestora pochodzącego z klasy średniej: podręczników, czasopism, biuletynów i książek rozpowszechnianych przez firmy brokerskie, wydawców gazet, spekulantów (...)"[1]. Prócz informacji o wydarzeniach mogących mieć wpływ na ceny walorów, zawierały one w większości wiadomości o prawno-instytucjonalnych aspektach inwestowania w instrumenty finansowe bądź starały się pokazać, w jaki sposób osiągnąć pewny zysk. Wśród wydanych ówcześnie prac o tej tematyce podejściem naukowym wyróżnia się tylko jedna: *Calcul des Chances et Philosophie de la Bourse* autorstwa Julesa Regnaulta[2]. Jej twórca jako pierwszy w dziejach przedstawił spójną oraz zweryfikowaną empirycznie teorię kształtowania się cen obligacji. Ze względu na znaczenie rozważań Regnaulta oraz brak odniesień do jego koncepcji w krajowej literaturze przedmiotu autor uznał za wskazane przedstawienie istoty stworzonej przezeń teorii, co też jest celem niniejszego artykułu.

1. Jules Regnault – prekursor współczesnej teorii finansów

Do tej pory sądzono na ogół, że momentem początkowym w historii modelowania cen instrumentów finansowych była obrona w 1900 r. pracy doktorskiej

[1] A. Preda, Informative Prices, Rational Investors: The Emergence of the Random Walk Hypothesis and the Nineteenth-Century „Science of Financial Investments", „History of Political Economy" 2004, Vol. 36, No. 2, s. 357. Jak oszacowano w samym Paryżu, w 1881 r. ukazywało się 238 periodyków o tej tematyce (Ibid., s. 358).

[2] J. Regnault, Calcul des Chances et Philosophie de la Bourse, Mallet-Bachelier & Castel, Paris 1863.

Louisa Bacheliera, pt. *Théorie de la Spéculation*[3]. Poglądowi temu sprzeciwili się Franck Jovanovic oraz Philippe Le Gall, uznając za pierwszą pracę naukową o tej tematyce wspomniane dzieło Julesa Regnaulta, zaś za odpowiednią cezurę czasową nie rok 1900, lecz rok 1863[4]. W tej sytuacji zaistniał spór dotyczący zasadności uznania pracy Regnaulta za naukową. Alex Preda postulował, by zaliczyć *Calcul des Chances et Philosophie de la Bourse* do tzw. *vernacular economics*, tj. wyjaśnienia „(...) opartego na milczących, powszechnie przyjmowanych założeniach i wiedzy o procesach ekonomicznych", zawierającego „(...) różnorodne zestawy praktyk, techniki wiedzy praktycznej i procedury racjonalizujące (...)"[5] wspierające jednostki w podejmowaniu decyzji ekonomicznych. Jovanovic zdecydowanie odrzucił tę sugestię, dowodząc, że w rzeczywistości praca Regnaulta spełniała kryteria Predy kwalifikowania publikacji jako naukowych, a także wskazując pewne niedostatki merytoryczne argumentacji swego oponenta. Ostatecznie Preda złagodził swoje poglądy w tej kwestii[6]. O zasadności włączenia publikacji Regnaulta do kategorii prac naukowych przekonany był także Bernard Bru, stwierdzając, że w porównaniu z ówczesnymi publikacjami „książka Regnaulta jest wyjątkowa (...)"[7]. Autor podziela ów pogląd, jakkolwiek jest również zdania, że pewne piętno na omawianej pracy odcisnął także fakt wykonywania przez jej twórcę zawodu brokera i wiążący się z nim sposób postrzegania mechanizmów funkcjonowania rynku finansowego.

Jules Regnault (1834-1894) był jednym z trzech głównych reprezentantów „ekonometrii naturalnej" (do której należeli także Antoine Augustine Cournot oraz Jean Edmond Briaune)[8]. Miejscem edukacji Regnaulta była najprawdopodobniej Bruksela. Przypuszczalnie właśnie tam zapoznał się z pracami Adolphe Quételeta, bowiem później zapożyczył od niego „(...) narzędzia, hipotezę, metodę, światopogląd, jak i sposób prezentacji wyników (...)"[9]. Po przeprowadzce do

[3] Zob. np. The Random Character of Stock Market Prices, red. P. Cootner, The M.I.T. Press, Cambridge 1964, s. 1; P. Bernstein, Intelektualna historia Wall Street, WIG-Press, Warszawa 1998, s. 16 czy E. Peters, Teoria chaosu a rynki kapitałowe, WIG-Press, Warszawa 1997, s. 15.

[4] F. Jovanovic, P. Le Gall, Does God Practice a Random Walk? The „Financial Physics" of a Nineteenth-century Forerunner, Jules Regnault, „The European Journal of the History of Economic Thought" Autumn 2001, Vol. 8, No. 3, s. 332-333.

[5] A. Preda, Informative Prices..., op. cit., s. 353-354.

[6] Idem, Rational Investors, Informative Prices: The Emergence of the „Science of Financial Investments" and the Random Walk Hypothesis [w:] Pioneers of Financial Economics: Volume 1, red. G. Poitras, Edward Elgar, Cheltenham & Northampton 2006.

[7] M. Taqqu, Bachelier and his Times: A Conversation with Bernard Bru, „Finance and Stochastics" January 2001, Vol. 5, No. 1, s. 14.

[8] Jules Regnault nie powinien być mylony z Jean-Josephem Regnaultem, co czasem ma miejsce, por. F. Jovanovic, A Biography of Jules Regnault – The Father of the Modern Financial Theory, http://benhur.teluq.uquebec.ca/SPIP/fjovanovic/IMG/doc/who_is_Jules_Regnault_version_soumise_2.doc (pobrano 29.06.2013 r.), s. 11.

[9] Ibid., s. 4.

Paryża w 1860 r. został brokerem (*agent de change*) na paryskiej giełdzie papierów wartościowych[10]. Jedyną publikacją Regnaulta było dzieło pt. *Calcul des Chances et Philosophie de la Bourse*. Poza Francją pozostało ono praktycznie nieznane. Z kolei we Francji cieszyło się zainteresowaniem najprawdopodobniej prawie wyłącznie w środowisku brokerów, dealerów, aktuariuszy itp. Pracę Regnaulta najpewniej znał także twórca *Théorie de la Spéculation*. Jest wysoce prawdopodobne, że jej lektura była jednym z czynników wpływających w istotny sposób na kształt jego rozprawy doktorskiej[11]. Już ten fakt jest wystarczającym uzasadnieniem dla podjętych przez autora analiz.

2. Poglądy metodologiczne Regnaulta

Osiągnięcia nauk przyrodniczych w XIX w. sprawiły, że metody wykorzystywane przez ich przedstawicieli próbowano stosować także w naukach społecznych. Sugestię taką wysunął m.in. Pierre Simon Laplace, pisząc: „Zastosujmy w naukach politycznych i moralnych metodę opartą na obserwacji i rachunku, metodę, która tak dobrze służyła nam w naukach przyrodniczych”[12]. Wynika ona z przekonania o istnieniu wspólnych praw właściwych zarówno dla świata ludzkiego, jak i świata przyrody. Bezpośrednim skutkiem przyjęcia powyższego założenia o jedności ontologicznej jest konieczność uznania doktryny jedności nauk, tj. metodologicznego monizmu[13]. Był to jednocześnie pogląd reprezentantów „ekonometrii naturalnej” – Regnaulta, Cournota oraz Briaune’a. Przez „ekonometrię naturalną” rozumie się kierunek łączący ekonomię, matematykę, statystykę i ekonometrię, traktowane jako „(...) środki identyfikacji oraz pomiaru domniemanego naturalnego porządku rządzącego ludzkim światem”[14]. Proces poznawania oraz formułowania nowych praw w myśl zasad przedstawicieli „ekonometrii naturalnej” zaprezentowano na poniższym rysunku.

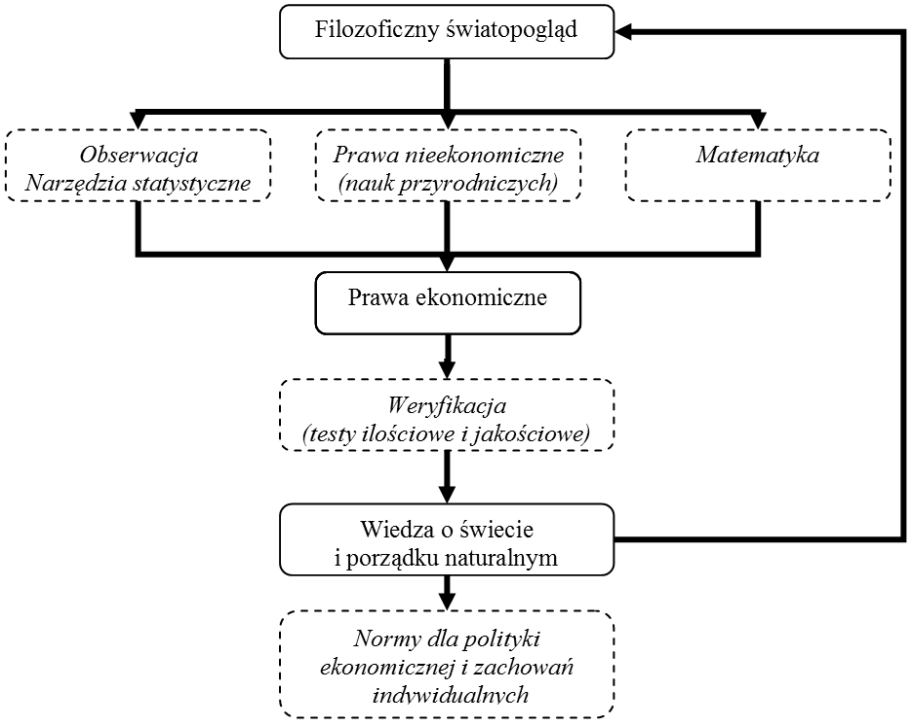
[10] Trzeba odnotować, że kiedy Regnault przybył do Paryża, był zmuszony ze względów finansowych zamieszkać w pokoju na poddaszu. Umierając, pozostawił po sobie majątek o wartości oszacowanej na ponad milion franków (tj. ok. 4,3 mln euro w cenach z 2013 r.). Ibid., s. 6.

[11] Ibid., s. 10. Jak piszą Jovanovic i Le Gall „(...) znaczna część wniosków Bacheliera pochodzi wprost od Regnaulta – wśród nich do najistotniejszych należy hipoteza błądzenia losowego” (F. Jovanovic, P. Le Gall, op. cit., s. 333).

[12] P.S. Laplace, A Philosophical Essay on Probabilities, Dover Publications, New York 1951, s. 107-108.

[13] M. Blaug, Metodologia ekonomii, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1995, s. 87-93.

[14] P. Le Gall, A History of Econometrics in France. From Nature to Models, Routledge, London & New York 2007, s. 6.



Rys. 1. Proces poznawczy w naukach ekonomicznych według przedstawicieli „ekonometrii naturalnej"

Źródło: P. Le Gall, A History of Econometrics in France. From Nature to Models, Routledge, London & New York 2007, s. 12.

Naturalną konsekwencją występowania jednakowych praw rządzących światem ludzkim i światem przyrody oraz ich matematycznej natury jest wykorzystanie narzędzi matematyczno-statystycznych w badaniu obserwowanych zjawisk. Co więcej, za celowe należy uznać analizowanie praw nauk przyrodniczych i poszukiwanie analogicznych reguł w odniesieniu do nauk ekonomicznych. Stworzone w ten sposób prawa są poddawane weryfikacji za pomocą testów ilościowych i jakościowych. Testy ilościowe opierają się na badaniu spójności teorii z danymi empirycznymi, zaś testy jakościowe – na określeniu, czy owe zależności spełniają kryteria, takie jak elegancja, prostota czy posiadanie odpowiednika w obszarze nauk przyrodniczych. Reguły uznane za prawdziwe służyły formułowaniu zaleceń odnośnie do prowadzonej polityki ekonomicznej oraz ludzkich zachowań. Działania zgodne z nimi miały „(...) prowadzić społeczeństwa do stanu stabilności i harmonii, pełnej zgodności z naturalnym

porządkiem i zamysłem Boga", kiedy „(...) zanikną odchylenia od praw natury (...)", a „(...) gospodarka stanie się systemem bezczasowym i ahistorycznym"[15].

Koncepcje Regnaulta są doskonałym przykładem wykorzystania omówionych zaleceń metodologicznych. Autor *Calcul des Chances et Philosophie de la Bourse* czerpał inspirację przede wszystkim z prac Quételeta. Posługiwał się wielkościami średnimi, gdyż ich stosowanie miało prowadzić do eliminacji wpływu czynników przypadkowych i niedoskonałości danych[16]. Regnault na wzór Quételeta oraz jego *physique sociale* miał ambicję stworzenia *physique financiére* – „nauki o Giełdzie", opisującej „nowe prawa fluktuacji Giełdy"[17]. Opisując jego poglądy, należy w pierwszej kolejności zwrócić uwagę na przekonanie o podporządkowaniu zjawisk przyrodniczych i ekonomicznych jednakim prawidłowościom stworzonym przez Boga. Regnault pisze bowiem, że „(...) świat moralny podlega tym samym prawom, co świat fizyczny", które są „prawami wspólnymi, powszechnymi i niezmiennymi"[18]. W tym przekonaniu zwraca się do Stwórcy słowami z Księgi Mądrości: „O jako dobry i słodki jest Panie, duch twój we wszystkich! (...) Aleś ty wszystko pod miarą i liczbą i wagą rozrządził"[19]. Jednocześnie cechuje go wiara w determinizm, ponieważ dowodzi, że „w naturze nie ma niczego dowolnego i nic nie dzieje się bez uprzedniej przyczyny (...)", przy czym „(...) te same przyczyny wywołują zawsze i wszędzie te same skutki"[20]. W ujęciu Regnaulta prawdopodobieństwo ma charakter subiektywny (co wynika z braku wiedzy o prawidłach rządzących światem), o czym dobitnie świadczy cytowane za Davidem Hume'em stwierdzenie, głoszące, że „nie istnieje wprawdzie na świecie nic takiego jak *przypadek*, ale nieznajomość rzeczywistej przyczyny zjawiska oddziałuje na rozum w taki sam sposób i wytwarza taki sam typ przekonań czy poglądów"[21]. Odkrywanie kolejnych deterministycznych prawidłowości (traktowanych jako jedynie naukowe) będzie, zdaniem Regnaulta, skutkowało osiągnięciem stanu harmonii społecznej, w którym żadne odstępstwa od owych praw nie będą występować.

---

[15] Ibid., s. 24.
[16] To właśnie Quételet posłużył się w swej pracy wyrażeniem *l'homme moyen* – przeciętny człowiek.
[17] J. Regnault, op. cit., s. 7. Wszelkie prezentowane tłumaczenia z języka francuskiego zostały dokonane przez p. Adrianę Tomalak. Za ich ostateczny kształt wyłączną odpowiedzialność ponosi autor.
[18] Ibid., s. 5.
[19] Ibid., s. tyt. Tłum. za: Pismo Święte Starego i Nowego Testamentu, Michał Glücksberg, Warszawa 1874, Mdr 11:21, 12:1, s. 13.
[20] J. Regnault, op. cit., s. 135.
[21] Ibid., s. 2. Tłum. za: D. Hume, Badania dotyczące rozumu ludzkiego, PWN, Warszawa 1977, s. 70.

3. Cele i założenia pracy Regnaulta

Cele swojej pracy Regnault określił, akcentując rolę rynku kapitałowego w gospodarce: „Giełda jest świątynią nowoczesnego społeczeństwa (...)" oraz „oficjalnym sanktuarium gry", a także odnotowując: „Wierzymy, że próbując przeanalizować szanse, pokazać niebezpieczeństwa związane z grą i jednocześnie odkryć cel Spekulacji, oddajemy przysługę całemu społeczeństwu"[22]. Jego zamierzeniem było nie tylko stworzenie naukowej teorii fluktuacji cen walorów, lecz także wskazanie błędów popełnianych przez inwestorów w ocenie ryzyka i stosowanych strategiach inwestycyjnych, wiodące do osiągnięcia stanu harmonii społecznej.

Założenie o efektywności informacyjnej rynku kapitałowego należy uznać za podstawę wszelkich rozważań zawartych w *Calcul des Chances et Philosophie de la Bourse*. Regnault co prawda nie posługiwał się tym pojęciem (spopularyzowanym dopiero w latach 60. XX w. przez ubiegłorocznego laureata Nagrody Banku Szwecji im. Alfreda Nobla – Eugene'a Famę[23]), lecz jego ujęcie jest niezwykle bliskie koncepcji Famy. Stwierdza on bowiem, że „(...) skutki (...) są zawarte w aktualnym kursie. Tak więc, jeśli chcemy odzwierciedlić to, co przedstawia dla nas słowo *wartość*, zobaczymy, że wartość jest i może być determinowana wyłącznie kursem (...)"[24]. Systematyczne osiąganie ponadprzeciętnej stopy zwrotu nie jest zatem możliwe. W świetle powyższych stwierdzeń za prekursora koncepcji efektywności informacyjnej rynków kapitałowych należy uznać Regnaulta[25].

---

[22] J. Regnault, op. cit., s. 1.

[23] Zob. E. Fama, Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, „The Journal of Finance" May 1970, Vol. 25, No. 2.

[24] J. Regnault, op. cit., s. 29-30. Analogiczna definicja Famy brzmi: „Na efektywnym rynku (...) ceny poszczególnych papierów wartościowych w każdym momencie odzwierciedlają informacje uzyskiwane na podstawie zdarzeń, które już miały miejsce, bieżących, jak również oczekiwanych w przyszłości" (E. Fama, Random Walks in Stock Market Prices, „Financial Analysts Journal" September-October 1965, Vol. 21, No. 5, s. 56). Pozostałe określenia noblisty pozostają zbliżone do prezentowanego pierwotnego ujęcia.

[25] Należy odnotować, że Regnault zanegował możliwość występowania warunków określonych przez Famę jako dostateczne (ale niekonieczne) dla istnienia rynku efektywnego informacyjnie, tj.:
1. Występowanie wśród uczestników rynku zgodności co do wpływu nowych informacji na bieżące ceny akcji i rozkład prawdopodobieństwa cen przyszłych.
2. Brak kosztów transakcyjnych, powszechny i nieodpłatny dostęp do wszelkich informacji dla wszystkich uczestników rynku. (E. Fama, Efficient Capital Markets..., op. cit., s. 387-388). Stwierdził on bowiem, że „to rzeczywiście różnorodność postrzegania tych samych przyczyn przez każdego indywidualnie czyni transakcje możliwymi (...). Gdyby wszyscy myśleli tak samo i postrzegali w podobny sposób te same przyczyny, niemożliwe byłoby odszukanie drugiej strony. Kupujący nigdy nie znalazłby sprzedającego ani sprzedający kupującego (...)" (J. Regnault, op. cit., s. 22). Z kolei istnienie kosztów transakcyjnych uczynił osią swoich rozważań w przypadku spekulacji krótkoterminowej, o czym będzie mowa w dalszej części.

Drugie kluczowe założenie poczynione przez autora *Calcul des Chances et Philosophie de la Bourse* głosi, że występują dwa rodzaje przyczyn wpływających na kształtowanie się cen instrumentów finansowych: przyczyny stałe oraz przyczyny przypadkowe. „Przyczyny *stałe* to te, których działanie jest ciągłe i systematyczne, prowadzące w tym samym kierunku i zawsze z równą intensywnością", natomiast „pod pojęciem przyczyn *przypadkowych* rozumiemy działania, które nie są ani ciągłe, ani systematyczne, które następują bez żadnego oczywistego prawa i pojawiają się przypadkowo, prowadząc w jednym lub drugim kierunku"[26]. Przyczyny przypadkowe będą zatem wywierały skutki w okresie krótkim, zaś stałe – w okresie długim.

Regnault dokonuje ponadto podziału transakcji dokonywanych przez uczestników rynku kapitałowego. Wyróżnia on transakcje o charakterze gry hazardowej (*jeu*): „Spekulacja, która ma na celu przewidywanie przyczyn przypadkowych nazywa się *Grą* (...)"[27]. Z kolei „(...) główny przedmiot rozważań drugiej części [pracy – przyp. R.B.], to poszukiwanie i poznawanie stałych praw fluktuacji kursów, które oferuje prawdziwa *Spekulacja*"[28]. Podział ten jest de facto odzwierciedleniem zapisów występujących w ówczesnym francuskim prawodawstwie.

Posiłkując się rozróżnieniem pomiędzy grą a spekulacją, Regnault konstruuje dwa opisy fluktuacji cen francuskich obligacji państwowych – teorię dotyczącą zachowań w okresie krótkim oraz teorię odnoszącą się do okresu długiego. W pierwszej kolejności zostanie przedstawiona teoria właściwa dla okresu krótkiego, tj. model błądzenia losowego.

4. Teoria spekulacji

Tworząc teorię spekulacji krótkoterminowej, Regnault badał jak zachowują się ceny obligacji pod wpływem przyczyn przypadkowych. Jego celem było ponadto pokazanie, w jaki sposób transakcje o charakterze gry hazardowej w sytuacji istnienia prowizji i opłat związanych z ich zawieraniem nieuchronnie muszą prowadzić do ruiny (co miało stanowić przestrogę dla potencjalnych graczy).

Badanie wpływu przyczyn przypadkowych na zmiany cen obligacji wymagało pominięcia najistotniejszej przyczyny stałej, tj. narastania odsetek oraz

[26] J. Regnault, op. cit, s. 11.
[27] Ibid., s.144.
[28] Ibid. Obecnie transakcje o charakterze gry hazardowej nazywa się za Johnem Burrem Williamsem spekulacyjnymi, zaś transakcje określane przez Regnaulta jako spekulacyjne – inwestowaniem: „Jak przewidzieć zmiany *opinii* jest istotą problemu spekulacji, tak jak przewidywanie zmian *dywidend* jest istotą problemu inwestowania" (J.B. Williams, The Theory of Investment Value, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1956, s. 34).

wypłaty kuponu[29]. Z tego powodu przedmiotem analiz Regnault uczynił kursy terminowe. Dla okresów dłuższych niż miesiąc konieczne byłoby uwzględnianie dodatkowych rozliczeń, dlatego ograniczył się do rozważania pozycji likwidowanych w terminie do jednego miesiąca. Wszelkie sformułowane przez niego prawa pozostają jednak w mocy, także gdy rozpatruje się okresy dłuższe[30].

Mimo że przewidywanie przyczyn przypadkowych nie jest możliwe[31], to w sytuacji gdy już wystąpią, ich potencjalny wpływ na ceny obligacji podlega ocenie inwestorów. Niepełna wiedza uczestników rynku sprawia, że ocena ta nie zawsze jest całkowicie poprawna, można jednak założyć, iż przeciętnie inwestorzy nie popełniają pomyłek. Oznaczając przez:

η_i – błąd popełniany przez *i*-tego uczestnika rynku w ocenie wpływu danego zdarzenia, o wartości oczekiwanej równej zero i odchyleniu przeciętnym równym d,

ξ_k – błąd popełniany przez *k* uczestników rynku w ocenie wpływu danego zdarzenia, o wartości oczekiwanej równej zero i odchyleniu przeciętnym równym d_k,

można zapisać, że[32]:

$$\xi_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} \eta_i}{k}.$$

Gdy spełnione są założenia centralnego twierdzenia granicznego Lindeberga-Levy'ego, to rozkład prawdopodobieństwa ξ_k dla dużego k jest w przybliżeniu rozkładem normalnym. Ponadto:

$$\mathrm{E}(\xi_k) = 0$$

oraz

$$d_k = \frac{d}{\sqrt{k}}.$$

Do wniosków tych Regnault doszedł, pisząc:

„Możemy dać sobie właściwe wyobrażenie o tym, co dzieje się w przypadku, kiedy jakiekolwiek zdarzenie zostaje ogłoszone, obserwując co się stanie, jeśli duża liczba osób, umieszczonych w pewnej odległości od wzniesionego budynku, do którego nie mogą się zbliżyć, byłaby odpowiedzialna za wymie-

[29] W czasach Regnaulta kwotowane ceny obligacji zawierały narosłe odsetki (w przeciwieństwie do obecnej praktyki).

[30] J. Regnault, op. cit., s. 58.

[31] Ibid., s. 143.

[32] Wszystkie wzory prezentowane w artykule są odzwierciedleniem idei Regnaulta zapisanych w postaci słownej. W jego pracy w rzeczywistości nie pojawia się żadna z przedstawionych formuł.

rzenie w przybliżeniu, za pomocą obserwacji wzrokowej, wysokości tego budynku od podstawy do wierzchołka"[33].

W jego mniemaniu większa liczba uczestników sprawia, że ocena wpływu zdarzeń przypadkowych na ceny obligacji jest bardziej poprawna, a co za tym idzie, cena w większym stopniu odzwierciedla napływające informacje[34], zaś rozkład zmian cen jest zbliżony do rozkładu de Moivre'a-Gaussa-Laplace'a[35].

Przyjęcie, że czynniki przypadkowe są nieprzewidywalne, a ich wpływ natychmiast odzwierciedlany w rynkowej cenie obligacji, skłoniło Regnaulta do uznania, iż kolejne zmiany cen są zmiennymi losowymi niezależnymi. Regnault jako pierwszy wprowadził do nauki model błądzenia losowego[36]. Zauważył, że „na Giełdzie cały mechanizm gry daje się streścić w dwóch przeciwstawnych sytuacjach: *wzroście* i *spadku*. Jedna i druga mogą zawsze zaistnieć z *równą* łatwością"[37]. Prawdopodobieństwo wzrostu ceny obligacji (rozważania dotyczą cen terminowych) jest równe prawdopodobieństwu jej spadku i wynosi ½. Stąd wynika, że „grę na zwyżkę lub zniżkę można porównać do gry w *orła* i *reszkę*. Cała różnica polega na tym, że w grze w orła i reszkę szanse są określone *a priori*, co powoduje, że nie widzimy wcześniej większej możliwości, aby doprowadzić do wyrzucenia jednej lub drugiej strony monety"[38]. Regnault wnioskuje, że nadzieja matematyczna zmiany ceny obligacji musi być równa zeru. W przeciwnym przypadku istniałaby możliwość stosowania „systemu arbitrażu"[39] umożliwiającego osiąganie ponadprzeciętnych zysków.

Można zatem odnotować, że:

$$F_{t+n,T} = F_{t,T} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{t+i} ,$$

gdzie:

$F_{t,T}$ – cena terminowa obligacji w chwili t, o terminie wykonania w chwili T,

---

[33] J. Regnault, op. cit., s. 25.

[34] Trzeba podkreślić, że duża liczba osób zawierających transakcje jest jedną z cech rynku efektywnego według Famy (E. Fama, Random Walks..., op. cit., s. 56).

[35] Jakkolwiek Regnault nie wymienia rodzaju prawa (tj. rozkładu), któremu mają podlegać zmiany cen (z jego opisu wynika jedynie, że powinien to być rozkład symetryczny), to jednak zainteresowanie pracami Bernoulliego, Quételeta oraz Laplace'a skłania do uznania za prawie pewne, że chodziło mu o rozkład dwumianowy, czy raczej jego ciągły analogon, tj. rozkład normalny. Warto także wspomnieć, że pojęciem „rozkładu normalnego" nie posługiwano się aż do lat 70. XIX w., wskazując raczej na jednego z uczonych: de Moivre'a, Gaussa bądź Laplace'a.

[36] Osiągnięcie to przeważnie przypisywano Bachelierowi.

[37] J. Regnault, op. cit., s. 34.

[38] Ibid.

[39] Ibid., s. 40.

ε_{t+i} – zmiana ceny terminowej obligacji o terminie wykonania w chwili T w dniu $t+i$, $\mathrm{E}\left(\varepsilon_{t+i}\middle|\Phi_t\right)=0$,

Φ_t – zbiór informacyjny reprezentujący wszelkie dostępne informacje w chwili t[40].

Stąd też:

$$\mathrm{E}\left(F_{t+n,T}\middle|\Phi_t\right)=F_{t,T},$$

czyli

$$\mathrm{E}\left(\Delta_n F_{t,T}\middle|\Phi_t\right)=0,$$

gdzie Δ_n odzwierciedla przyrost wielkości podczas *n* dni.

Uczestnicy rynku kapitałowego prócz nadziei matematycznej, powinni posługiwać się miernikami ryzyka inwestycji. Regnault postuluje wykorzystanie:

a) odchylenia bezpośredniego (*ècart direct*), tj. „(...) różnicy pomiędzy pierwszym i ostatnim kursem notowanym w danym okresie" ($d^D=\left|F_{t+n,T}-F_{t,T}\right|$),

b) odchylenia skrajnego (*ècart extrême*), tj. „(...) różnicy pomiędzy najwyższym a najniższym ze wszystkich odnotowanych kursów"[41] ($d^E=\max_{i=0,\ldots,n}\left(F_{t+i,T}\right)-$ $-\min_{i=0,\ldots,n}\left(F_{t+i,T}\right)$).

Dla każdej z przedstawionych wielkości można podać odchylenie przeciętne (*ècart moyen*) oraz odchylenie prawdopodobne (*ècart probable*). Odchylenie przeciętne Regnault definiuje jako otrzymane poprzez „(...) skompensowanie wszystkich wielkości lub zsumowanie odchyleń i podzielenie przez ich liczbę", zaś odchylenie prawdopodobne jako „(...) dane przez granicę, która dzieli ogół odchyleń, uporządkowanych od najmniejszego do największego, na dwie równe części"[42].

Badając fluktuacje cen obligacji, Regnault odkrył, że „(...) odchylenia są równe dla równych okresów"[43]. Określenie to nie jest jednak wystarczające do opisania odchyleń wraz ze zmianą długości horyzontu inwestycyjnego. Dalsze badania

---

[40] Właściwie należałoby stosować operator nadziei matematycznej względem funkcji gęstości prawdopodobieństwa uwzględnianej przez uczestników rynku kapitałowego $\mathrm{E}_m(.)$ oraz zbiór informacyjny Φ_t^m, którym posługują się inwestorzy. Regnault zakłada jednak, że rynek jest efektywny, dlatego $\mathrm{E}_m\left(\varepsilon_{t+i}\middle|\Phi_t^m\right)=\mathrm{E}\left(\varepsilon_{t+i}\middle|\Phi_t\right)$.

[41] J. Regnault, op. cit., s. 188-189.

[42] Ibid.

[43] Ibid., s. 49.

skłoniły Regnaulta do sformułowania prawa głoszącego, że „(...) odchylenia zmniejszają się dla okresów coraz bliższych i zwiększają się dla okresów odleglejszych”[44]. Zauważył, że czterokrotne wydłużenie okresu powoduje dwukrotne zwiększenie odchylenia, gdy tymczasem dwukrotne skrócenie okresu wywołuje zmniejszenie odchylenia w stosunku 1:1,41. Uogólniając, Regnault skonstatował, że:

„Istnieje zatem matematyczne prawo rządzące fluktuacjami i przeciętnym odchyleniem kursów na Giełdzie. Prawo to, którego nie rozważano aż do chwili obecnej, my formułujemy tutaj po raz pierwszy: ODCHYLENIE KURSÓW JEST W BEZPOŚREDNIM STOSUNKU DO PIERWIASTKA KWADRATOWEGO CZASU”[45].

Prawo to jest najważniejszym wnioskiem pracy Regnaulta. Wraz z propozycją, by zmiany cen (ewentualnie stóp zwrotu) modelować za pomocą rozkładu normalnego, stanie się ono fundamentem współczesnej teorii finansów oraz uzasadnieniem dla wykorzystania klasycznych miar ryzyka inwestycji, takich jak odchylenie standardowe, współczynnik zmienności itp. Umożliwia ono ocenę ryzyka związanego z angażowaniem środków finansowych na rynku kapitałowym dla horyzontu inwestycyjnego o dowolnej długości, bowiem „wystarczy znać odchylenie rozliczenia za pewien okres, by za pomocą tego prawa można było odtworzyć odchylenie jakiegokolwiek okresu”[46]. Można zatem zapisać, że:

$$d(n_2) = \sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\, d(n_1),$$

gdzie $d(n)$ oznacza odchylenie zmiany ceny obligacji w ciągu *n* dni.

Przedmiotem badań empirycznych Regnaulta były francuskie państwowe 3-proc. obligacje wieczyste. Dla instrumentu o nominale 100 franków miesięczne bezpośrednie odchylenie przeciętne zmiany ceny wynosiło 1,55 franka, zaś bezpośrednie odchylenie prawdopodobne – 1,10 franka. Z kolei miesięczne skrajne odchylenie przeciętne oszacowano na 2,44 franka, a miesięczne skrajne odchylenie prawdopodobne na 1,73 franka. Wykorzystując sformułowane przez siebie prawo, Regnault obliczył odchylenia dla dowolnego okresu.

[44] Ibid., s. 49-50.
[45] Ibid., s. 50.
[46] Ibid., s. 52.

Tabela 1

Odchylenia bezpośrednie i skrajne (przeciętne i prawdopodobne)
zmiany ceny terminowej francuskich państwowych 3-proc. obligacji wieczystych

Tableau des Écarts du 3 %

DE UN JOUR A UN MOIS — DE UN A DEUX MOIS

Nombre de JOURS	É. DIRECTS Probable	É. DIRECTS Moyen	É. EXTRÊMES Probable	É. EXTRÊMES Moyen	Nombre de JOURS	É. DIRECTS Probable	É. DIRECTS Moyen	É. EXTRÊMES Probable	É. EXTRÊMES Moyen
1	0,20	0,28	0,32	0,44	31	1,12	1,57	1,75	2,48
2	0,28	0,40	0,45	0,63	32	1,14	1,60	1,78	2,52
3	0,35	0,49	0,55	0,77	33	1,15	1,63	1,81	2,56
4	0,40	0,57	0,63	0,89	34	1,17	1,65	1,84	2,60
5	0,45	0,63	0,70	0,99	35	1,19	1,67	1,87	2,63
6	0,49	0,69	0,77	1,09	36	1,20	1,70	1,89	2,67
7	0,53	0,75	0,83	1,18	37	1,22	1,72	1,92	2,71
8	0,57	0,80	0,89	1,26	38	1,24	1,74	1,94	2,74
9	0,60	0,85	0,95	1,33	39	1,25	1,77	1,97	2,78
10	0,63	0,89	1	1,40	40	1,27	1,79	2	2,81
11	0,67	0,94	1,05	1,47	41	1,29	1,81	2,02	2,85
12	0,70	0,98	1,09	1,54	42	1,30	1,83	2,04	2,88
13	0,72	1,02	1,14	1,60	43	1,32	1,86	2,07	2,92
14	0,75	1,06	1,18	1,66	44	1,33	1,88	2,09	2,95
15	0,78	1,10	1,22	1,72	45	1,35	1,90	2,12	2,99
16	0,80	1,13	1,26	1,78	46	1,37	1,92	2,14	3,02
17	0,83	1,17	1,30	1,83	47	1,39	1,94	2,17	3,05
18	0,85	1,20	1,34	1,89	48	1,40	1,96	2,19	3,08
19	0,87	1,23	1,37	1,94	49	1,41	1,88	2,21	3,11
20	0,90	1,27	1,41	1,99	50	1,42	2	2,23	3,14
21	0,92	1,30	1,45	2,04	51	1,44	2,02	2,25	3,18
22	0,94	1,33	1,48	2,08	52	1,45	2,04	2,27	3,21
23	0,96	1,36	1,51	2,13	53	1,46	2,06	2,30	3,24
24	0,98	1,39	1,55	2,18	54	1,47	2,08	2,32	3,27
25	1	1,41	1,58	2,22	55	1,49	2,10	2,34	3,30
26	1,02	1,44	1,61	2,27	56	1,50	2,12	2,36	3,33
27	1,04	1,47	1,64	2,31	57	1,52	2,14	2,38	3,36
28	1,06	1,50	1,67	2,35	58	1,53	2,16	2,40	3,38
29	1,08	1,52	1,70	2,39	59	1,54	2,18	2,42	3,41
30	1,10	1,55	1,73	2,44	60	1,55	2,19	2,44	3,43

Suite du Tableau des Écarts.

DE DEUX A SEPT MOIS — DE SEPT MOIS A UN AN

Nombre de JOURS	É. DIRECTS Probable	É. DIRECTS Moyen	É. EXTRÊMES Probable	É. EXTRÊMES Moyen	Nombre de JOURS	É. DIRECTS Probable	É. DIRECTS Moyen	É. EXTRÊMES Probable	É. EXTRÊMES Moyen
65	1,62	2,28	2,54	3,58	215	2,95	4,15	4,63	6,53
70	1,68	2,37	2,64	3,72	220	2,98	4,20	4,68	6,60
75	1,74	2,45	2,73	3,85	225	3,02	4,25	4,73	6,68
80	1,80	2,53	2,82	3,97	230	3,05	4,29	4,78	6,75
85	1,85	2,61	2,91	4,10	235	3,08	4,34	4,84	6,82
90	1,90	2,68	3	4,22	240	3,11	4,38	4,89	6,89
95	1,96	2,76	3,08	4,33	245	3,15	4,43	4,94	6,96
100	2,01	2,83	3,16	4,44	250	3,18	4,47	4,99	7,03
105	2,06	2,90	3,24	4,56	255	3,21	4,52	5,04	7,10
110	2,11	2,97	3,31	4,67	260	3,24	4,56	5,09	7,17
115	2,15	3,03	3,39	4,77	265	3,27	4,61	5,14	7,24
120	2,20	3,10	3,46	4,87	270	3,30	4,65	5,18	7,31
125	2,25	3,17	3,53	4,97	275	3,33	4,70	5,23	7,38
130	2,29	3,23	3,60	5,07	280	3,36	4,74	5,28	7,44
135	2,33	3,29	3,67	5,17	285	3,39	4,78	5,33	7,51
140	2,37	3,35	3,73	5,26	290	3,42	4,82	5,37	7,58
145	2,42	3,41	3,80	5,36	295	3,45	4,86	5,42	7,64
150	2,46	3,47	3,87	5,45	300	3,48	4,90	5,46	7,70
155	2,50	3,53	3,93	5,54	305	3,51	4,94	5,51	7,77
160	2,54	3,58	3,99	5,63	310	3,54	4,98	5,55	7,83
165	2,58	3,64	4,05	5,72	315	3,57	5,02	5,60	7,90
170	2,62	3,69	4,11	5,80	320	3,59	5,06	5,64	7,96
175	2,66	3,75	4,17	5,89	325	3,62	5,10	5,69	8,02
180	2,70	3,80	4,23	5,97	330	3,65	5,14	5,73	8,08
185	2,73	3,85	4,29	6,05	335	3,67	5,18	5,78	8,14
190	2,77	3,90	4,35	6,13	340	3,70	5,22	5,82	8,20
195	2,80	3,95	4,41	6,21	345	3,73	5,26	5,86	8,26
200	2,84	4	4,46	6,29	350	3,76	5,29	5,90	8,32
205	2,88	4,05	4,52	6,37	355	3,78	5,33	5,95	8,39
210	2,91	4,10	4,57	6,45	360	3,80	5,36	6	8,45

Źródło: J. Regnault, Calcul des Chances et Philosophie de la Bourse, Mallet-Bachelier & Castel, Paris 1863, s. 191-192.

Regnault próbował także oszacować prawdopodobieństwo przekroczenia danej ceny po upływie określonego czasu. Dla ceny bieżącej równej 75 franków prawdopodobieństwo odnotowania miesięcznej zmiany ceny większej niż bezpośrednie odchylenie prawdopodobne, tj. przekroczenia ceny 76,10 franka, wynosi ¼. Regnault wykorzystuje tu wyprowadzone przez siebie przybliżenie:

$$\mathrm{P}\left(F_{t+n,T} > F_{t,T} + x \middle| \Phi_t\right) \approx \left[\frac{d_P^D(n)}{2x}\right]^2 .$$

Tabela 2

Prawdopodobieństwo przekroczenia określonej ceny terminowej obligacji na koniec miesiąca dla bieżącej ceny terminowej wynoszącej 75 franków

Prawdopodobieństwo	Cena
1:4	76,10
1:5	76,23
1:10	76,74
1:15	77,13
1:20	77,46
1:25	77,75
1:50	78,89
1:100	80,50

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Ibid., s. 61.

W analogiczny sposób analizował prawdopodobieństwo przekroczenia danej ceny w dowolnym momencie okresu:

$$\mathrm{P}\left(\max_{i=0,\ldots,n} \left(F_{t+i,T} \right) > F_{t,T} + x \middle| \Phi_t \right) \approx \left[\frac{d_P^E(n)}{2x} \right]^2 .$$

Tabela 3

Prawdopodobieństwo przekroczenia określonej ceny terminowej obligacji w ciągu miesiąca dla bieżącej ceny terminowej wynoszącej 75 franków

Prawdopodobieństwo	Cena
1:4	76,73
1:5	76,93
1:10	77,73
1:15	78,35
1:20	78,87
1:25	79,32
1:50	81,12
1:100	83,65

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Ibid.

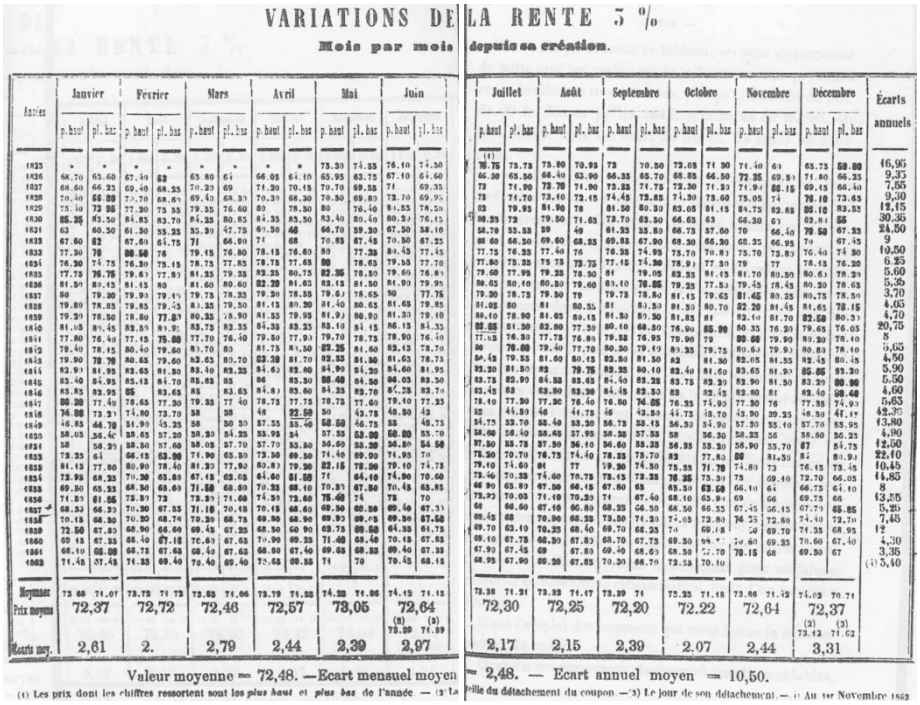
Regnault poddał procedurze weryfikacji sformułowane przez siebie prawo dotyczące odchyleń cen obligacji, co potwierdza jego w pełni naukowe podejście do analizowanego problemu. W tym celu zgodnie z metodologicznymi zaleceniami „ekonometrii naturalnej" wykorzystał testy jakościowy i ilościowy. W pierwszej kolejności próbował znaleźć analogiczne prawo w naukach przyrodniczych i stwierdził, że w przypadku „(...) ceny prawdziwej lub absolutnej, którą możemy wyobrazić sobie jako *środek* koła, którego *promień* przedstawia odchylenie mogące przemieszczać się zarówno w jednym, jak i drugim kierunku na każdy z punktów *powierzchni,* w czasie równym tej powierzchni (...). (...) wartość oddala się lub zbliża do środka, a podstawowa wiedza z geometrii wskazuje nam, że promienie czy też odchylenia są proporcjonalne do pierwiastków kwadratowych pól powierzchni lub czasu"[47].

[47] J. Regnault, op. cit., s. 51.

Regnault przeprowadził także weryfikację na podstawie danych empirycznych. Wykorzystał ceny natychmiastowe wspominanych obligacji z okresu od maja 1825 r. do października 1862 r.

Tabela 4

Miesięczne maksymalne i minimalne ceny natychmiastowe francuskich państwowych 3-proc. obligacji wieczystych w okresie od maja 1825 r. do października 1862 r.



VARIATIONS DE LA RENTE 3 %

Mois par mois — depuis sa création.

Années	Janvier p. haut	Janvier pl. bas	Février p. haut	Février pl. bas	Mars p. haut	Mars pl. bas	Avril p. haut	Avril pl. bas	Mai p. haut	Mai pl. bas	Juin p. haut	Juin pl. bas	Juillet p. haut	Juillet pl. bas	Août p. haut	Août pl. bas	Septembre p. haut	Septembre pl. bas	Octobre p. haut	Octobre pl. bas	Novembre p. haut	Novembre pl. bas	Décembre p. haut	Décembre pl. bas	Écarts annuels
1825	*	*	*	*	*	*	*	*	73.30	74.35	76.10	74.50	(1) 76.75	75.75	75.80	70.95	73	70.50	72.05	71 30	71.40	69	69.75	69.80	16,95
1826	68.70	65.60	67.40	63	65.80	64	66.05	64.10	65.95	63.75	67.10	64.60	66.30	63.50	66.40	63.90	66.35	65.70	66.85	66.30	72.35	69.80	71.80	66.35	9,35
1827	68.60	66.25	69.40	68.35	70.20	69	71.20	70.15	70.70	69.35	71	69.35	73	74.70	73.70	71.80	73.35	71.75	72.30	71.20	71.90	69.15	69.15	66.40	7,55
1828	70.40	68.80	71.70	68.65	69.45	68.80	70.30	68.30	70.50	69.80	73.70	69.95	73	74.70	73.40	72.15	74.45	73.85	74.30	73.60	75.05	74	79.10	73.65	9,30
1829	75.50	73.85	77.30	75.35	79.35	76.60	80	78.50	80	76.40	84.35	78.50	83	79.95	81.90	78	81.50	80.30	83.05	81.15	84.75	82.85	85.10	83.35	12,15
1830	85.35	83.50	84.85	83.70	84.25	80.85	84.35	83.30	83.40	80.40	80.30	76.15	80.30	72	79.30	74.65	73.70	69.30	66.65	63	66.30	63	63.85	55	30,35
1831	63	60.50	61.30	55.25	55.30	47.75	61.30	46	66.70	59.20	67.30	58.10	58.70	53.55	59	49	61.25	55.80	66.75	57.60	70	66.40	70.50	67.25	24,50
1832	67.60	62	67.80	61.75	71	66.50	71	68	70.85	67.45	70.30	67.25	68	66.50	69.60	68.85	67.90	68.30	68.30	66.20	66.35	66.95	70	67.15	9
1833	77.30	70	80.50	76	79.15	76.80	78.15	76.60	80	77.25	80.45	77.45	77.75	76.25	77.40	76	76.25	74.95	75.70	70.85	75.70	73.85	76.40	74 30	19,50
1834	76.20	74.75	76.30	75.15	78.75	77.85	78.75	77.65	80	78.65	79.35	77.70	77.80	75.35	75 75	73.75	77.15	74.30	78.9	77 30	79	77	78.15	76.20	6,35
1835	77.75	76.75	79.65	77.85	81.25	79.35	83.25	80.75	82.35	78.50	79.60	76.85	79.60	77.95	78.30	81	79.05	63.35	81.15	81.70	80.20	80.65	78.20	5,60
1836	81.30	80.15	81.15	80	81.60	80.60	82.20	81.65	83.15	81.50	81.90	79.95	80.65	80.10	80.80	79.60	83.10	78.85	79.25	77.85	79.45	78.45	80.20	78.65	5,55
1837	80	79.30	79.90	79.10	79.75	78.25	79.20	78.35	79.65	78.65	80	77.75	79.20	78	79.30	79	79.75	78.80	81.15	79.65	81.65	80.25	80.75	78.50	3,70
1838	79.80	78.85	79.85	79.45	81.25	79.50	81.15	80.20	81.40	80.65	81.65	79.85	80.55	80.10	81	80.55	81	80.50	81.50	80.70	82.20	81.45	81.65	78.15	4,05
1839	79.20	78.50	78.80	77.85	80.25	78.90	81.55	79.95	81.90	80.90	81.30	79.10	80.10	78.90	81.05	80.15	81.80	80.30	81.85	81	82.10	81.70	82.50	80.30	4,70
1840	81.05	80.45	83.80	81.95	83.75	82.35	84.35	83.25	83.10	81.15	86.15	81.35	87.05	81.30	82.80	77.20	80.10	68.80	76.90	65.00	80.35	76.20	79.65	76.05	20,75
1841	77.80	76.40	77.15	75.00	77.70	76.40	79.50	77.95	79.70	78.75	83.45	78.70	77.05	76.30	77.75	76.85	79.85	76.95	79.90	79	80.05	79.90	80.30	78.10	5
1842	79.40	78.15	80.40	79.60	83.70	80	81.75	81.50	82.25	81.60	83.15	78.70	80	78.05	79.40	77.70	80.30	79.40	80.35	79.75	80.65	79.95	80.85	78.40	5,65
1843	79.90	78.70	80.65	79.60	83.65	80.70	83.30	81.70	82.35	81.30	81.65	78.75	84.15	79.35	80.15	80.15	82.80	81.50	82	81.30	82.05	81.35	82.45	80.45	4,50
1844	83.90	81.95	83.65	81.80	83.40	83.25	84.65	83.80	84.90	84.20	84.60	81.95	83.20	81.80	82	79.75	82.25	80.10	82.40	81.60	83.65	81.90	85.05	83.20	5,90
1845	83.40	81.95	83.15	81.70	85.85	83	86	83.20	86.40	84.50	86.05	83.50	83.75	82.90	84.35	83.65	84.40	83.25	83.75	83.20	83.90	81.50	83.20	80.90	5,50
1846	83.85	82.95	85	83.65	85	83.65	84.85	83.60	84.35	83.70	84.25	83.70	83.45	82	83.80	83.30	84.45	83.50	83	82.45	82.80	81	83.40	80.60	4,60
1847	80.30	77.40	78.65	77.30	79.35	77 40	78.75	77.75	78.75	77.60	79.40	77.25	78.40	77.30	77.35	76.40	76.80	74.05	76.35	74.90	77.30	76	77.35	74.90	5,65
1848	74.00	73.20	74.80	73.70	58	38	48	22.50	30	43.75	48.80	43	52	44.80	46	44.75	46	43.80	44.75	43.70	43.90	39.25	48.80	41.10	42,25
1849	46.85	44.70	51.90	45.25	58	50 50	57.55	55.40	58.50	56.75	55	46.75	54.75	53.70	55.40	53.30	56.75	53.15	56.30	54.90	57.50	55.10	57.70	55.95	15,80
1850	58.05	56.45	58.65	57.20	58.30	54.25	55.95	54	57.35	53.90	58.80	55.70	58.60	56.40	58.65	57.95	58.35	57.55	58	56.30	58.25	56	58.80	56.25	4,90
1851	58	56.20	58.50	57.60	58.05	57.70	57.70	53.50	56.90	53.20	56.80	54.50	57.80	53.75	57.90	56.10	56.60	53.35	56.35	53.20	56.90	53.70	57	54.75	12,50
1852	73.25	64	66.15	63.90	71.90	65.30	73.30	69.30	71.40	69.90	74.95	70	73.30	70.70	76.75	74.40	78.25	73.70	83	77.80	86	81.30	84	80.90	22,10
1853	81.15	77.80	80.90	78.40	81.30	77.80	80.85	79.30	82.15	78.20	79.10	74.75	79.10	71.60	81	77	79.20	74.50	75.25	71.70	74.85	73	76.15	73.45	10,45
1854	73.95	68.25	70.20	65.80	67.15	62.05	64.60	61.55	71	64.10	74.90	70.60	73.45	70.30	74.60	70.75	75.15	73.25	76.25	73.30	75	69.40	72.70	66.05	14,85
1855	69.50	65.25	68.50	65.60	71.50	69.80	70.25	68.10	70.85	67.80	70.45	65.85	66.90	65.80	67.90	66.15	67.80	65	65.30	63.50	66.10	64	66.75	64.10	8
1856	74.85	61.85	73.80	72	73.80	71.60	74.35	72.60	75.40	74	75	70	73.20	70.05	71.10	70.20	71	67.40	68.10	65.90	69	66	69.75	66	13,25
1857	68.30	66.30	70.20	67.35	71.10	70.15	70.15	68.60	69.30	68.80	68.55	66.50	68.50	66.35	67.45	66.25	67.80	66.50	68.50	66.35	67.45	66.15	67.75	65.85	5,35
1858	70.15	68.30	70.20	68.75	70.30	68.75	69.90	68.90	69.95	69.05	69.80	67.50	68.45	67.60	68.90	68.75	69.90	68.90	71.20	70.05	72.80	70.40	72.80	71.40	7,45
1859	72.50	67.85	68.90	66.60	69.45	67.25	68.50	66 90	68.75	68.50	64.35	61.75	69.70	63.10	70.25	68.40	69.70	66.25	70	69.15	70	69.70	71.35	68.95	12
1860	69.15	67.35	68.40	67.15	70.60	67.65	70.90	69.35	71.40	68.40	70.15	67.95	69.10	67.85	68.70	67.75	69.50	68.*	70.60	69.35	70.60	67.40	70.60	67.40	4,30
1861	68.10	66.90	68.75	67.65	69.45	67.65	68.80	67.40	69.05	68.35	69.60	67.35	67.95	67.45	69	67.65	69.40	68.65	68.50	67.70	70.15	68	69.30	67	3,35
1862	71.45	67.45	71.35	69.40	72.40	69.40	70.65	69.35	71	70	70.45	68.15	68.95	67.05	70.30	68.70	72.35	70.10							(4) 5,10
Moyennes	73 66	71.07	73.73	71 72	73.83	71.06	73.79	71.82	74.35	71.86	74.13	71.13	73.38	71.21	73.33	71.17	73.39	71	73.35	71.18	73.86	71.12	74.02	70.71	
Prix moyens	72,37		72,72		72,46		72,57		73,05		72,64 (2) 73.39	(3) 71.89	72,30		72,25		72,20		72.22		72,64		72,37 (2) 73.42	(3) 71.62	
Ecarts moy.	2,61		2.		2,79		2,44		2,39		2,97		2,17		2,15		2,39		2.07		2,44		3,31		

Valeur moyenne = 72,48. — Ecart mensuel moyen = 2,48. — Ecart annuel moyen = 10,50.

(1) Les prix dont les chiffres ressortent sont les *plus haut* et *plus bas* de l'année. — (2) La veille du détachement du coupon. — (3) Le jour de son détachement. — (4) Au 1er Novembre 1862

Źródło: Ibid., s. 148-149.

Następnie Regnault obliczył skrajne odchylenia przeciętne dla okresu o długości jednego miesiąca, jednego kwartału czy jednego roku. Wyniosły one odpowiednio: 2,48 franka, 4,99 franka oraz 10,50 franka. Odchylenia te zostały jednak uzyskane dla cen natychmiastowych, tj. zawierających narosłe odsetki. W celu otrzymania odchyleń właściwych dla cen terminowych należało przedstawione wielkości odpowiednio skorygować, pomniejszając je o maksymalną sumę narosłych w danym okresie odsetek oraz powiększyć o kwotę 0,50 franka (wynikającą z zasad rozliczania transakcji terminowych). Jako że w latach 1825-1862 odsetki wypłacano co pół roku[48], maksymalna suma odsetek narosłych w ciągu

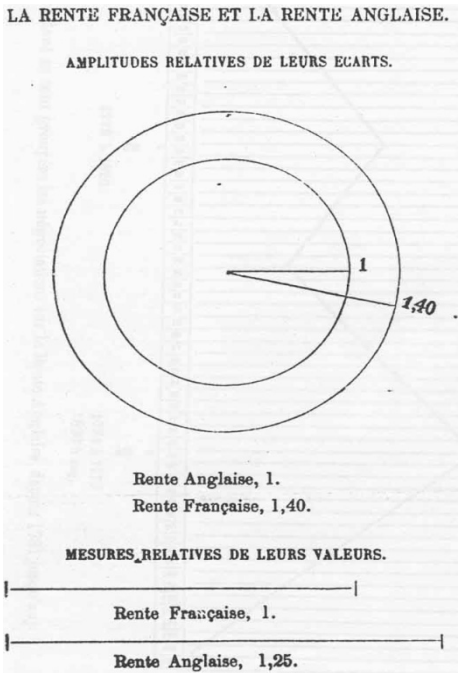
[48] Do czasu konwersji obligacji 4½-proc. na 3-proc. w 1863 r. odsetki wypłacano 22 czerwca i 22 grudnia (z tym że pierwsze notowanie bez kuponu miało miejsce 7 czerwca i 7 grudnia). Począwszy od 1863 r. odsetki były płatne 1 stycznia, 1 kwietnia, 1 lipca i 1 października, a odcięcie kuponu następowało 16 grudnia, 16 marca, 16 czerwca i 16 września (Ibid., s. 62, 152; E. Vidal, The History and Methods of the Paris Bourse, National Monetary Commission, Washington 1910, s. 39).

miesiąca, kwartału czy roku wynosiła odpowiednio: 0,25 franka, 0,75 franka oraz 1,50 franka. Skrajne odchylenia przeciętne właściwe dla cen terminowych wyniosły zatem w przypadku miesiąca, kwartału i roku odpowiednio: 2,73 franka, 4,74 franka oraz 9,50 franka. Ponieważ:

$$2{,}73 \cdot \sqrt{3} = 4{,}73 \approx 4{,}74\,,$$
$$2{,}73 \cdot \sqrt{12} = 9{,}45 \approx 9{,}50\,,$$

Regnault uznał, że uzyskane rezultaty pozostają w zupełnej zgodności z przewidywaniami teoretycznymi, a prawo odchyleń zostało zweryfikowane pozytywnie: „Czyż istnieje bardziej uderzający przykład zgodności między teorią a doświadczeniem!”[49].

Sformułowaną prawidłowość jej twórca wykorzystał do porównania francuskiego i angielskiego rynku państwowych obligacji wieczystych, używając opisanego poprzednio „koła zmienności” oraz relacji pomiędzy przeciętnymi cenami walorów.



Rys. 2. Koła zmienności oraz względne średnie ceny francuskich oraz angielskich państwowych obligacji wieczystych w okresie od maja 1825 r. do października 1862 r.

Źródło: J. Regnault, Calcul des Chances et Philosophie de la Bourse, Mallet-Bachelier & Castel, Paris 1863, s. 153.

[49] J. Regnault, op. cit., s. 175.

Obligacje francuskie cechują się większą zmiennością, a także wyższą przeciętną rentownością (tj. niższą średnią ceną). Konstatacja ta jest zgodna z rozpowszechnionym w nauce finansów stwierdzeniem, że wzrostowi poziomu ryzyka powinna towarzyszyć kompensata w postaci zwiększonego poziomu oczekiwanej stopy zwrotu z inwestycji.

Regnault, posługując się odkrytym prawem, przeanalizował zyskowność oraz ryzyko związane z transakcjami o charakterze gry hazardowej z uwzględnieniem opłat i prowizji. Instrumentem bazowym jest obligacja wieczysta o oprocentowaniu r i kuponie w wysokości C. Dla horyzontu inwestycyjnego o długości n dni bezpośrednie odchylenie przeciętne wynosi $d_M^D(n)$, stosunek odchylenia przeciętnego do prawdopodobnego – q, a opłaty i prowizje maklerskie w odniesieniu do transakcji dotyczącej jednej obligacji – P. Gracz dysponuje kapitałem K, a pojedyncza transakcja odnosi się do k obligacji. Wówczas z prawdopodobieństwem ½ osiągany jest zysk w wysokości $k\left(\frac{C}{r}\cdot\frac{d_M^D(n)}{100}-P\right)$ bądź strata $k\left(\frac{C}{r}\cdot\frac{d_M^D(n)}{100}+P\right)$. Oczekiwany wynik to:

$$\frac{1}{2}\cdot k\left(\frac{C}{r}\cdot\frac{d_M^D(n)}{100}-P\right)-\frac{1}{2}\cdot k\left(\frac{C}{r}\cdot\frac{d_M^D(n)}{100}+P\right)=-kP,$$

zaś stosunek zysku do straty:

$$\frac{\frac{C}{r}\cdot\frac{d_M^D(n)}{100}-P}{\frac{C}{r}\cdot\frac{d_M^D(n)}{100}+P}.$$

Rozważając przypadek, gdy oczekiwany wynik nie ulega zmianie, a zysk i strata wyrażają się liczbami przeciwnymi równymi bezpośredniemu odchyleniu przeciętnemu, trzeba przyjąć, że prawdopodobieństwo osiągnięcia dodatniego wyniku p spełnia zależność:

$$p\cdot k\cdot\frac{C}{r}\cdot\frac{d_M^D(n)}{100}-(1-p)\cdot k\cdot\frac{C}{r}\cdot\frac{d_M^D(n)}{100}=-kP,$$

skąd:

$$p = \frac{\frac{C}{r} \cdot \frac{d_M^D(n)}{100} - P}{\frac{2C}{r} \cdot \frac{d_M^D(n)}{100}}.$$

Na jedną szansę wygranej przypada zatem:

$$\frac{\frac{C}{r} \cdot \frac{d_M^D(n)}{100} + P}{\frac{C}{r} \cdot \frac{d_M^D(n)}{100} - P}$$

szans przegranej.

Tabela 5

Bezpośrednie odchylenia przeciętne i prawdopodobne, poziomy zysku i straty oraz ich stosunek dla kontraktu terminowego dotyczącego francuskiej państwowej 3-proc. obligacji wieczystej o kuponie wynoszącym 1500 franków

TEMPS moyen du liquid. (jours).	ÉCARTS Prob.	ÉCARTS Moyen.	DIFF.ces sur 1500 Rte	DIFF. NETTES en gain	DIFF. NETTES en perte	Le gain = 1 La perte =
1/2	0,14	0,2001	100,05	80,05	120,05	1,4997
1	0,20	0,2830	141,50	101,50	181,50	1,7882
2	0,28	0,4002	200,10	160,10	240,10	1,4997
3	0,35	0,4902	245,10	205,10	285,10	1,3900
4	0,40	0,5660	283	243	323	1,3292
5	0,45	0,6328	316,40	276,40	356,40	1,2894
6	0,49	0,6932	346,60	306,60	386,60	1,2609
7	0,53	0,7487	374,35	334,35	414,35	1,2392
8	0,57	0,8004	400,20	360,20	440,20	1,2221
9	0,60	0,8490	424,50	384,50	464,50	1,2081
10	0,63	0,8949	447,45	407,45	487,45	1,1963
11	0,67	0,9386	469,30	429,30	509,30	1,1864
12	0,70	0,9803	490,15	450,15	530,15	1,1777
13	0,72	1,0203	510,15	470,15	550,15	1,1702
14	0,75	1,0588	529,40	489,40	569,40	1,1635
15	0,78	1,0960	548	508	588	1,1575
16	0,80	1,1320	566	526	606	1,1521
17	0,83	1,1668	583,40	543,40	623,40	1,1472
18	0,85	1,2006	600,30	560,30	640,30	1,1428
19	0,87	1,2335	616,75	576,75	656,75	1,1387
20	0,90	1,2656	632,80	592,80	672,80	1,1350
21	0,92	1,2968	648,40	608,40	688,40	1,1315
22	0,94	1,3274	663,70	623,70	703,70	1,1283
23	0,96	1,3572	678,60	638,60	718,60	1,1253
24	0,98	1,3863	693,15	653,15	733,15	1,1225
25	1	1,4149	707,45	667,45	747,45	1,1199
26	1,02	1,4430	721,50	681,50	761,50	1,1174
27	1,04	1,4705	735,25	695,25	775,25	1,1151
28	1,06	1,4974	748,70	708,70	788,70	1,1129
29	1,08	1,5240	762	722	802	1,1108
30	1,10	1,5500	775	735	815	1,1088

Źródło: Ibid., s. 55.

Regnault był także zainteresowany znalezieniem odpowiedzi na pytanie: ile szans bankructwa przypada na jedną szansę podwojenia majątku gracza. Obliczał on ów stosunek jako:

$$\left(\frac{\frac{C}{r}\cdot\frac{d_M^D(n)}{100}+P}{\frac{C}{r}\cdot\frac{d_M^D(n)}{100}-P}\right)^{\frac{K}{q\cdot k\cdot\frac{C}{r}\cdot\frac{d_M^D(n)}{100}}}=\left(\frac{\frac{C}{r}\cdot\frac{d_M^D(30)\sqrt{n/30}}{100}+P}{\frac{C}{r}\cdot\frac{d_M^D(30)\sqrt{n/30}}{100}-P}\right)^{\frac{K}{q\cdot k\cdot\frac{C}{r}\cdot\frac{d_M^D(30)\sqrt{n/30}}{100}}}.$$

Wyniki liczbowe zestawiono w poniższej tabeli.

Tabela 6

Liczba szans bankructwa przypadających na jedną szansę podwojenia majątku gracza o wartości 14 000 franków

CHANCES DE PERDRE OU GAGNER, A LA BOURSE UNE MÊME SOMME, D'UNE VALEUR PROBABLE DE 14 000 FRANCS.

Temps moyen de liquid. (jours).	DIFFÉRENCE sur 1500 fr. Rte	Gain = 1 Perte =	Pour *une* chance de *nombres suivants*, suivant 1,500	Gain, les chances de Perte sont représentées par les qu'on opère sur des quotités moyennes de : 3,000	6,000	12,000	30,000
1/2	100,05	1,4997	390 000 000 000 000 000	625 000 000	25 000	158	7,58
1	141,50	1,7682	689 000 000 000 000 000	830 000 000	28 800	170	7,80
2	200,10	1,4997	625 000 000	25 000	158	13	2,75
3	245,10	1,3900	684 000	827	29	5,36	1,96
4	283	1,3292	23 300	153	12	3,52	1,65
5	316,40	1,2894	3 083	56	7,45	2,73	1,49
6	346,60	1,2609	803	28	5,32	2,31	1,40
7	374,35	1,2392	308	18	4,19	2,05	1,33
8	400,20	1,2221	150	12	3,50	1,87	1,28
9	424,50	1,2081	86	9,27	3,04	1,74	1,25
10	447,45	1,1963	55	7,39	2,72	1,65	1,22
11	469,30	1,1864	38	6,16	2,48	1,57	1,20
12	490,15	1,1777	28	5,30	2,30	1,52	1,18
13	510,15	1,1702	22	4,66	2,16	1,47	1,17
14	529,40	1,1635	17	4,18	2,04	1,43	1,15
15	548	1,1575	14	3,78	1,95	1,39	1,14
16	566	1,1521	12	3,49	1,87	1,37	1,13
17	583,40	1,1472	10,50	3,24	1,80	1,34	1,125
18	600,30	1,1428	9,24	3,04	1,74	1,32	1,117
19	616,75	1,1387	8,21	2,86	1,69	1,30	1,111
20	632,80	1,1350	7,38	2,72	1,65	1,28	1,105
21	648,40	1,1315	6,72	2,59	1,61	1,27	1,100
22	663,70	1,1283	6,16	2,48	1,58	1,26	1,095
23	678,60	1,1253	5,69	2,39	1,54	1,24	1,091
24	693,15	1,1225	5,30	2,30	1,52	1,23	1,087
25	707,45	1,1199	4,95	2,22	1,49	1,22	1,083
26	721,50	1,1174	4,66	2,16	1,47	1,21	1,080
27	735,25	1,1151	4,40	2,10	1,45	1,20	1,077
28	748,70	1,1129	4,17	2,04	1,43	1,196	1,074
29	762	1,1108	3,97	1,98	1,41	1,188	1,071
30	775	1,1088	3,79	1,95	1,40	1,181	1,069

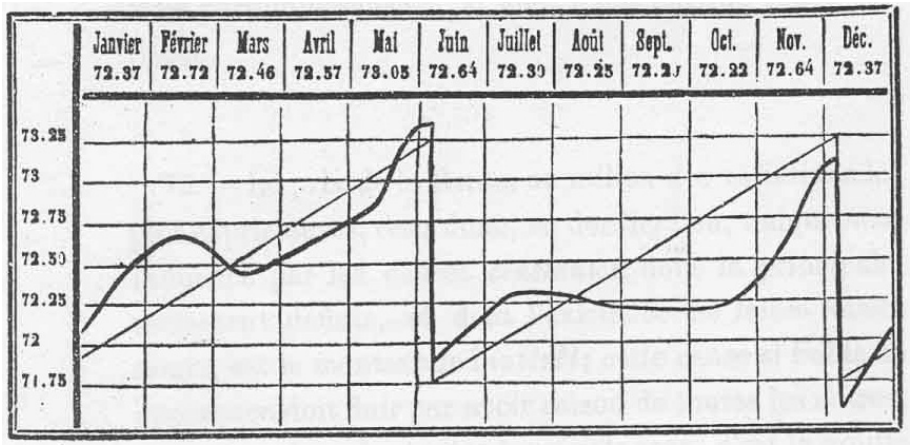
Źródło: Ibid., s. 78-79.

Występowanie opłat i prowizji sprawia, że ruina gracza jest w rzeczywistości nieuchronna.

5. Teoria inwestycji

Poza potępianą spekulacją krótkoterminową (grą)[50], wyróżniono także spekulację długoterminową (inwestowanie), uznaną za użyteczną dla gospodarki narodowej. Kierując się tym podziałem, Regnault zbadał oddziaływanie przyczyn stałych na ceny walorów. Do najistotniejszych zaliczył fakt naliczania odsetek, pisząc że „stawka *odsetek* jest najważniejszym elementem charakteryzującym papier wartościowy, tym, który dominuje nad wszystkimi innymi w ocenie walorów w obrocie"[51]. Przedmiotem jego badań stały się ceny natychmiastowe obligacji.

Eliminując oddziaływanie przyczyn przypadkowych, zgodnie ze wskazaniami Quételeta, Regnault zastosował operację uśredniania, obliczając przeciętną cenę obligacji w każdym miesiącu roku. Stwierdził, że najwyższe ceny odnotowywano w maju i listopadzie, zaś najniższe w czerwcu i grudniu, co zostało przezeń powiązane z wypłatą kuponu. Hipoteza, że za występowanie omówionego efektu odpowiada narastanie odsetek, została zweryfikowana z wykorzystaniem metody graficznej.



Rys. 3. Kształtowanie się przeciętnych cen natychmiastowych francuskich państwowych 3-proc. obligacji wieczystych w okresie od maja 1825 r. do października 1862 r.

Źródło: Ibid., s. 153.

[50] Regnault krytykuje całkowitą bezproduktywność spekulacji krótkoterminowej następującymi słowami: „Jeśli pięćdziesiąt osób zebranych wokół stołu nakrytego zielonym suknem gra między sobą całą noc w *ruletkę,* wszystkie te osoby wychodząc rano będą mieć więcej lub mniej pieniędzy niż wtedy, gdy zaczynały grę. Nastąpi wymiana, cyrkulacja, w końcu *spekulacja*, ale spekulacja całkowicie bezowocna, gdyż do kwoty pieniędzy, którą posiadali wszyscy razem nie zostanie dodana żadna realna korzyść, nie nastąpi żaden wzrost wartości" (J. Regnault, op. cit., s. 101).

[51] Ibid., s. 120.

Można zatem traktować Regnaulta jako jednego z pierwszych odkrywców istnienia efektów sezonowych (do których zaliczył także odstępstwa od cen teoretycznych w marcu oraz lipcu-październiku, co tłumaczył systematyczną realizacją zysków bądź zmniejszeniem wolumenu obrotu w miesiącach letnich).

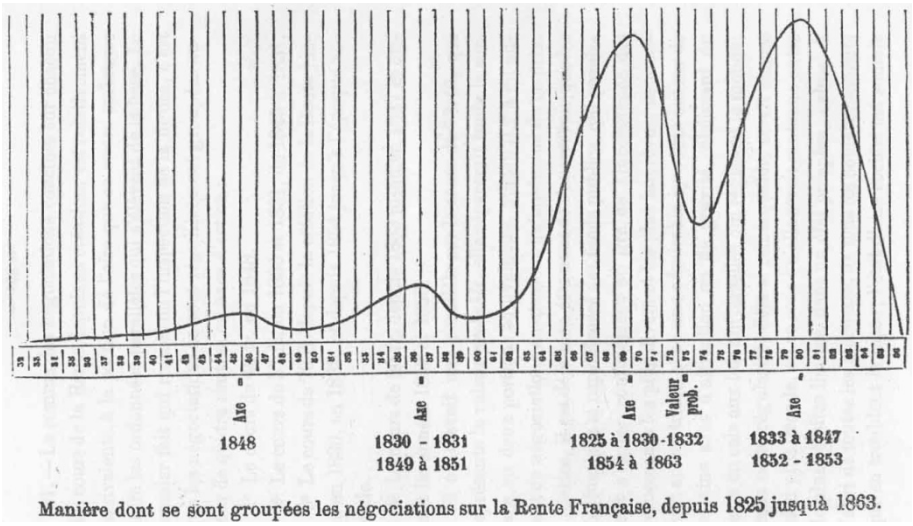
Przeciętna cena natychmiastowa w okresie od maja 1825 r. do października 1862 r. wyniosła 72,48 franka, zaś rozstęp – 54,15 franka[52]. Regnault uznał, że bezpośrednie obliczenie mediany cen byłoby obarczone zbyt dużym błędem. W tym celu wybrał metodę pośrednią – najpierw skalkulował skrajne odchylenie prawdopodobne dla wartości średniej (przy 900 obserwacjach):

$$54{,}15 \cdot \frac{1}{\sqrt{900}} \cdot 0{,}67 = 1{,}20 .$$

Jako że z dostępnych mu danych wynikało, iż przedział zawierający ceny pomiędzy minimalną a średnią jest ok. trzy razy dłuższy od przedziału zawierającego ceny pomiędzy średnią a maksymalną, medianę cen obliczył następująco:

$$72{,}48 + 1{,}20 \cdot \frac{3}{4} \approx 73{,}40 .$$

Regnault przedstawił ponadto empiryczny rozkład prawdopodobieństwa cen obligacji.



Manière dont se sont groupées les négociations sur la Rente Française, depuis 1825 jusquà 1863.

Rys. 4. Rozkład cen francuskich państwowych 3-proc. obligacji wieczystych w okresie od maja 1825 r. do października 1862 r.

Źródło: Ibid.

[52] Kurs maksymalny odnotowano w lipcu 1840 r. – 86,65 franka, zaś minimalny w kwietniu 1848 r. – 32,50 franka.

Stwierdził on istnienie czterech „osi przyciągania" – w przypadku ceny równej 46 frankom, 57 frankom, 70 frankom oraz 80 frankom. Uwzględniając odkryte zależności, sformułował drugie prawo rządzące fluktuacjami cen obligacji:
„W rzeczywistości istnieją *dwa* odrębne prawa, którym podlegają fluktuacje kursów i prawie nigdy nie możemy całkowicie pominąć jednego z nich. Pierwsze z tych dwóch praw: *odchylenia są w bezpośrednim stosunku do pierwiastka kwadratowego czasu*, byłoby jedynym branym pod uwagę, jeśli wartość znajdująca się na poziomie swojej ceny średniej lub nieznacznie od tej ceny oddalona, nie byłaby przyciągana w tym czy innym kierunku. Ale w miarę jak następują wzrosty i spadki, cena oddala się mniej lub bardziej od wartości średniej, powyżej lub poniżej, a fluktuacje podlegają drugiemu prawu, które brzmi: *wartość, we wszystkich swoich odchyleniach, jest nieustannie przyciągana do swej ceny średniej, w bezpośrednim stosunku do kwadratu swojego oddalenia.* Jeśli, jak to się zdarza prawie zawsze, wartość ma kilka osi przyciągania, cena średnia przedstawia środek ciężkości wszystkich osi"[53].

Drugie prawo Regnaulta nie prowadzi do określenia *a priori* poziomów cen traktowanych jako „osie przyciągania" – dla odmiennych rynków mogą one być różne. Tym niemniej obydwa prawa Regnaulta stanowią pierwszy naukowy, spójny model zachowania cen obligacji.

Podsumowanie

Przedstawiony zarys teorii fluktuacji cen obligacji oraz metodyki oceny ryzyka inwestycji skłania do przyjęcia ich stworzenia za pierwszą naukową próbę przeanalizowania funkcjonowania rynku kapitałowego w ujęciu ilościowym. Regnaulta należy uznać za pioniera zastosowania metod matematyczno-statystycznych do modelowania cen papierów wartościowych. Metody te traktował jako uniwersalne narzędzia wspomagające uczestników rynku kapitałowego w podejmowaniu trafnych oraz unikaniu pochopnych decyzji inwestycyjnych. Jednocześnie był przekonany, że formułując wspomniane prawa, odkrywa fragmenty Bożego planu:
„(...) jakież przemyślenia sugeruje nam cudowny porządek, który rządzi najmniejszymi szczegółami najbardziej ukrytych zdarzeń! Co! Fluktuacje Giełdy podlegają odwiecznym prawom matematycznym! (...) Człowiek działa, ale kieruje nim Bóg"[54].

---

[53] J. Regnault, op. cit., s. 187. Warto zauważyć pewną analogię istniejącą pomiędzy drugim sformułowanym przez Regnaulta prawem, a procesem Ornsteina-Uhlenbecka.
[54] Ibid., s. 51-52.

Analiza rozważań Regnaulta umożliwia zweryfikowanie powszechnej, aczkolwiek nieprawdziwej tezy, jakoby poprzednicy Bacheliera nie istnieli. Ich osiągnięcia, zdaniem autora, są nieporównywalne (co zdecydowanie podkreślił Bernard Bru, mówiąc o giełdzie, że „(...) Regnault byłby jej Keplerem (...), tak jak Bachelier jej Newtonem”[55]), a nazywanie Regnaulta „ojcem współczesnej teorii finansów”[56] nie wydaje się do końca uprawnione. Należy jednak stwierdzić, że pierwszy (i jednocześnie znaczący) krok na drodze wiodącej do współczesnych teorii kwantyfikacji ryzyka poczynił właśnie Jules Regnault.

Literatura

Bernstein P., Intelektualna historia Wall Street, WIG-Press, Warszawa 1998.

Blaug M., Metodologia ekonomii, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1995.

Fama E., Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, „The Journal of Finance” May 1970, Vol. 25, No. 2.

Fama E., Random Walks in Stock Market Prices, „Financial Analysts Journal” September-October 1965, Vol. 21, No. 5.

Hume D., Badania dotyczące rozumu ludzkiego, PWN, Warszawa 1977.

http://benhur.teluq.uquebec.ca/SPIP/fjovanovic/IMG/doc/who_is_Jules_Regnault_version_soumise_2.doc (pobrano 29.06.2013 r.).

Jovanovic F., A Biography of Jules Regnault – The Father of the Modern Financial Theory.

Jovanovic F., Le Gall P., Does God Practice a Random Walk? The „Financial Physics” of a Nineteenth-century Forerunner, Jules Regnault, „The European Journal of the History of Economic Thought” Autumn 2001, Vol. 8, No. 3.

Laplace P.S., A Philosophical Essay on Probabilities, Dover Publications, New York 1951.

Le Gall P., A History of Econometrics in France. From Nature to Models, Routledge, London & New York 2007.

Peters E., Teoria chaosu a rynki kapitałowe, WIG-Press, Warszawa 1997.

Pismo Święte Starego i Nowego Testamentu, Michał Glücksberg, Warszawa 1874.

Preda A., Informative Prices, Rational Investors: The Emergence of the Random Walk Hypothesis and the Nineteenth-Century „Science of Financial Investments”, „History of Political Economy” 2004, Vol. 36, No. 2.

Preda A., Rational Investors, Informative Prices: The Emergence of the „Science of Financial Investments” and the Random Walk Hypothesis, [w:] Pioneers of Financial Economics: Volume 1, red. G. Poitras, Edward Elgar, Cheltenham & Northampton 2006.

[55] M. Taqqu, op. cit., s. 14.
[56] F. Jovanovic, op. cit., s. 1.

Regnault J., Calcul des Chances et Philosophie de la Bourse, Mallet-Bachelier & Castel, Paris 1863.

Taqqu M., Bachelier and his Times: A Conversation with Bernard Bru, „Finance and Stochastics" January 2001, Vol. 5, No. 1.

The Random Character of Stock Market Prices, red. P. Cootner, The M.I.T. Press, Cambridge 1964.

Vidal E., The History and Methods of the Paris Bourse, National Monetary Commission, Washington 1910.

Williams J.B., The Theory of Investment Value, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1956.

JULES REGNAULT'S THEORY OF SPECULATION AND INVESTMENT

Summary

The main purpose of this article is to present Jules Regnault's theory of speculation. Firstly, the theory of short-term speculation and negative consequences of transactions of this kind are described. In the next part of the article the theory of long-term speculation and two laws of securities prices fluctuations revealed by Regnault are discussed.