**Tadeusz Czernik**
**Daniel Iskra**
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

# ANALIZA PORÓWNAWCZA POLSKIEGO I AMERYKAŃSKIEGO RYNKU KAPITAŁOWEGO W UJĘCIU PROCESÓW MARKOWA

## Wprowadzenie

Przedmiotem badań współczesnej analizy portfelowej są przede wszystkim rozkłady stóp zwrotu, ich dynamika oraz powiązania stóp zwrotu różnych walorów. Niniejsza praca jest rozszerzeniem wcześniejszych badań autorów koncentrujących się na zależności (pamięci) w szeregach stóp zwrotu od znaku poprzedniej stopy zwrotu. Zaprezentowane podejście wprowadza dodatkową zmienną, jaką jest wolumen transakcji, jednakże analiza sprowadza się jedynie do warunkowych rozkładów brzegowych stopy.

## 1. Efekt pamięci modelowany wielostanowym procesem Markowa

W pracach autorów [Czernik, Iskra, 2012; Iskra, Czernik, 2008, 2009] można zapoznać się z opisem modelowania efektu pamięci za pomocą procesu Markowa w przypadku, w którym stan rynku był determinowany znakiem ostatniej zaobserwowanej stopy. Dla każdego instrumentu wyróżniono wówczas trzy stany [Iosifescu, 1988]:

– stan „minus” (–1) – w przypadku, gdy ostatnia odnotowana stopa zwrotu ma znak ujemny (spadek ceny);
– stan „zero” (0) – w przypadku, gdy ostatnia odnotowana stopa zwrotu jest równa zero (brak zmian ceny);
– stan „plus” (+1) – w przypadku, gdy ostatnia odnotowana stopa zwrotu ma znak dodatni (wzrost ceny).

Stan „minus” i „plus” są oczywiste, w przypadku stanu „zerowego” jego wprowadzenie zależy od odsetka stóp zerowych zaobserwowanych w historycznych notowaniach. W przypadku instrumentów notowanych na GPW w Warszawie, ilość ta jest statystycznie istotna (zazwyczaj około połowa badanych instrumentów ma więcej niż 10% stóp zerowych) – [Czernik, Iskra, 2012; Iskra, Czernik, 2008, 2009], natomiast w przypadku instrumentów notowanych na giełdzie Nasdaq wchodzących w skład indeksu S&P 100 ilość zaobserwowanych braków zmiany ceny zazwyczaj nie przekracza 2,5% [Czernik, Iskra, 2012]. W tym przypadku stan „zerowy” można pominąć, przypisując zerowe stopy do jednego z pozostałych stanów.

Przedstawiony w pracach [Czernik, Iskra, 2012; Iskra, Czernik, 2008, 2009] model kształtuje się następująco. Jeżeli przez $R_t$ oznaczymy proces stopy zwrotu (np. logarytmicznej), a przez $I(R_t) = sign(R_t)$ proces określający stan rynku, gdzie funkcja $sign(x)$ jest zdefiniowana następująco [Iskra, Czernik, 2009]:

$$sign(x) = \begin{cases} -1 \;\; dla \; x < 0 \\ 0 \;\; dla \; x = 0 \\ 1 \;\; dla \; x > 0 \end{cases}, \tag{1}$$

wówczas wektor prawdopodobieństw przebywania rynku w chwili $n\Delta t$ (w $n$-tym okresie przy deterministycznym przyroście czasu $\Delta t$ ), w stanach odpowiednio „minus”, „zero” i „plus” zapisuje się następująco [Iskra, Czernik, 2009]:

$$\pi^{(n)} = \left[ p_{-1}^{(n)}, p_0^{(n)}, p_1^{(n)} \right]. \tag{2}$$

Ze względu na przejrzystość formuł, czas (dokładniej numer kolejnego okresu) będzie zapisywany w indeksie górnym, a stan rynku w indeksie dolnym.

Wektor określający stan początkowy $\pi^{(0)}$ jest wektorem, którego współrzędne składają się z jednej jedynki i zer (stan deterministyczny), natomiast macierz przejścia $P$ jest postaci (wymiar 3x3) – [Iskra, Czernik, 2008]:

$$P = [p_{i,j}], \;\; p_{i,j} = P\left(I^{(n+1)} = i / I^{(n)} = j\right) i, j \in \{-1,0,1\}, \tag{3}$$

Z własności procesów Markowa [Gillespie, 1992; Haberman, Pitacco, 2000; Iosifescu, 1988; Kowalenko, Kuzniecow, Szurienkow, 1989] wynika, że wektor prawdopodobieństw przebywania rynku w omawianych stanach w chwili $(m+n)\Delta t$ może być wyznaczony poprzez ten wektor z chwili $m\Delta t$ oraz macierz przejścia podniesionej do odpowiedniej potęgi:

$$\pi^{(m+n)} = \pi^{(m)} P^n \tag{4}$$

Dystrybuantę $F_R$ stopy zwrotu po *n* okresach, można natomiast zapisać w postaci [Iskra, Czernik, 2008]:

$$F_R(r) = \left[ p_{-1}^{(0)} \quad p_0^{(0)} \quad p_1^{(0)} \right] \mathbf{P}^n \begin{bmatrix} F_R(r / I = -1) \\ F_R(r / I = 0) \\ F_R(r / I = 1) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Należy dodać, że uwzględniając w modelu stan „zerowy", czyli sytuację, w której szereg stóp zwrotu zawiera istotną ilość stóp zerowych, powinniśmy rozważać warunkowe rozkłady stopy zwrotu opisujące zmienną losową mieszaną, z atomem w punkcie $R = 0$.

W opisywanym modelu pamięć zdefiniowano następująco [Iskra, Czernik, 2009]:

*Powiemy, że występuje efekt pamięci, jeżeli przynajmniej dwa rozkłady stóp zwrotu będą istotnie różne od siebie. Jeżeli rozkłady stóp zwrotu w każdym stanie nie są statystycznie istotnie różne od pozostałych rozkładów, wówczas powiemy, że nie występuje efekt pamięci.*

W przedstawionym modelu, który stanowi punkt wyjścia do dalszych rozważań, szereg stóp zwrotu dzieli się na trzy części, otrzymując trzy mieszane warunkowe rozkłady stopy zwrotu w skrócie nazwane „minus", „zero" i „plus" (tak jak stany rynku). Każdy z tych trzech rozkładów składa się z części ciągłej i części dyskretnej w zerze. W związku z tym, powiemy, że wystąpiła istotna różnica pomiędzy dwoma rozkładami stóp zwrotu w dwóch różnych stanach, jeżeli wystąpiła istotna różnica pomiędzy częściami ciągłymi lub dyskretnymi tych rozkładów.

Badania (przeprowadzone na jednodniowych logarytmicznych stopach zwrotu) wykazały, że opisywany efekt pamięci ma swoje miejsce zarówno na rynku instrumentów notowanych w Polsce [Czernik, Iskra, 2012; Iskra, Czernik, 2008] – w około 90% badanych instrumentów, jak i w USA [Czernik, Iskra, 2012] – w około 40% badanych instrumentów, w tym przypadku nie było potrzeby wyróżniania stanu „zero".

W obecnym artykule zaproponowano model opisujący efekt pamięci, w którym stan rynku może zależeć zarówno od znaku ostatnio zaobserwowanej stopy, jak i znaku przyrostu z wolumenu.

Niech $R_t$ oznacza proces stopy zwrotu, a przez $W_t$ oznaczono proces z przyrostu z wolumenu (lub stopy zwrotu z wolumenu). Obecnie proces określający stan rynku zdefiniujemy jako $I(R_t, W_t) = [sign(R_t), sign(W_t)]$ – funkcja $sign(x)$ zdefiniowana zgodnie ze wzorem (10).

Przez (porównaj wzór (2)):

$$\pi^{(n)} = \left[ p_{[i,j]}^{(n)} \right] \qquad i, j \in \{-1, 0, 1\} \tag{6}$$

oznaczmy wektor prawdopodobieństw przebywania rynku w chwili $n\Delta t$ (górny indeks oznacza okres czasu), w stanach odpowiednio $[i,j]$ $i,j \in \{-1,0,1\}$ (np. $p^{(n)}_{[-1,-1]} = P\left(I^{(n)} = [-1,-1]\right)$, $p^{(n)}_{[0,1]} = P\left(I^{(n)} = [0,1]\right)$. Wektor ten może składać się (jeżeli uwzględnimy wszystkie możliwe stany) z 9 współrzędnych.

Macierz przejścia $P$ jest postaci (jej wymiar to 9x9):

$$P = [p_{[i,j],[k,l]}], \tag{7}$$

gdzie:

$$p_{[i,j],[k,l]} = P\left(I^{(n+1)} = [i,j] / I^{(n)} = [k,l]\right),\ i,j,k,l \in \{-1,0,1\}. \tag{8}$$

W rozważanym modelu dystrybuantę stopy zwrotu po $n$ okresach można zapisać w postaci:

$$F_R\left(R^{(n)} = r\right) = \pi^{(0)} P^n [F_R(r / I = [i,j])]\ \ i,j \in \{-1,0,1\}, \tag{9}$$

gdzie:
$\pi^{(0)}$ – wektor określający stan początkowy (wartości deterministyczne),
$P$ – macierz przejścia,
$[F_R(r / I = [i,j])]$ $i,j \in \{-1,0,1\}$ – wektor z warunkowymi dystrybuantami stopy zwrotu.

W przedstawionym powyżej modelu stan rynku zależy od dwóch zmiennych (znaku ostatniej stopy zwrotu i znaku ostatniego przyrostu wolumenu), w każdym stanie konstruujemy empiryczne rozkłady stopy zwrotu (rozkłady warunkowe). Jeżeli w modelu uwzględnimy stan, w którym ostatnia stopa zwrotu była zerowa $I = [0, sign(W)]$ (czyli mamy do czynienia z szeregiem stóp zwrotu z istotną ilością stóp zerowych), wówczas warunkowe rozkłady $F_R = (r / I = [i, j]$ będą opisywać zmienne losowe mieszane (część dyskretna dla stopy równej zero).

## 2. Badania empiryczne

W proponowanym podejściu modelowanie efektu pamięci wielostanowym procesem Markowa należy rozpocząć od odpowiedzi na pytanie – ile stanów będzie uwzględnionych w przeprowadzanych badaniach? Ogólnie rynek (dla danego instrumentu) może być w jednym z 9 stanów, co determinuje dziewięć mieszanych warunkowych rozkładów stóp zwrotu. Z tego powodu badania empiryczne oparto na danych wysokiej częstotliwości, a dokładniej na minutowych logarytmicznych stopach zwrotu. Symulacje przeprowadzono dla spółek notowanych na GPW w Warszawie (dla 100 instrumentów z najdłuższymi szeregami stóp zwrotu, notowania od 2001 do 2012 r.) oraz na instrumentach wchodzących w skład indeksu S&P100 (notowania od 2009 do 2012 r., należy jednak podkreślić, że instrumenty te były bardziej płynne niż notowane na GPW w Warszawie). W pierwszej kolejności sprawdzono częstotliwości występowania zerowych stóp zwrotu i zerowych przyrostów wolumenów. W poniższych tab. przedstawiono jak kształtują się statystyki w przypadku instrumentów notowanych na GPW (tab. 1) oraz instrumentów notowanych na giełdzie Nasdaq (tab. 2).

Tabela 1

Częstotliwości występowania zerowych stóp zwrotu i przyrostów wolumenu dla minutowych notowań z giełdy GPW w Warszawie

| **Częstotliwości występowania zerowych** | | |
|---|---|---|
| | **stóp zwrotu** | **przyrostu wolumenu** |
| Minimum | 7,88% | 0 |
| Kwartyl I | 43,30% | 1,71% |
| Kwartyl II | 46,18% | 2,19% |
| Kwartyl III | 51,03% | 2,89% |
| Maksimum | 69,85% | 11,79% |

Tabela 2

Częstotliwości występowania zerowych stóp zwrotu i przyrostów wolumenu dla minutowych notowań z giełdy Nasdaq

| **Częstotliwości występowania zerowych** | | |
|---|---|---|
| | **stóp zwrotu** | **przyrostu wolumenu** |
| Minimum | 4,82% | 0,20% |
| Kwartyl I | 22,89% | 0,77% |
| Kwartyl II | 27,08% | 1,11% |
| Kwartyl III | 30,67% | 1,60% |
| Maksimum | 39,84% | 9,57% |

Z powyższych statystyk wynikają co najmniej dwa wnioski. Pierwszy to większa ilość okresów w przypadku polskich instrumentów w stosunku do instrumentów notowanych na Nasdaq, w których nie zaobserwowano transakcji lub były one przeprowadzone po tych samych cenach co transakcje je poprzedzające. Drugi, bardziej istotny ze względu na charakter przeprowadzonych badań, odnosi się do częstotliwości braku zmian cen i wolumenów. W obu przypadkach należy uwzględnić stan zerowy dla stopy zwrotu oraz w obu przypadkach autorzy zrezygnowali ze stanu „zerowego” dla wolumenu (ilość zerowych przyrostów była mała, zerowe przyrosty przypisano do stanu „minus”).

Empiryczne badania przeprowadzono dla trzech przypadków:

1. W przypadku pierwszym, stan rynku (dla danego instrumentu) był determinowany znakiem przyrostu wolumenu. Uwzględniano tylko stan –1 i 1 („minus” i „plus”), przy czym występujące niekiedy zerowe przyrosty wolumenu włączano do stanu „minus” (z tab. 1-2 wynika, że co najmniej 75% badanych instrumentów miało mniej niż 3% zerowych przyrostów – rynek polski i mniej niż 1,6% – rynek amerykański).
2. W przypadku drugim, stan rynku był determinowany znakiem ostatniej logarytmicznej stopy zwrotu. Uwzględniano stan –1, 0 i 1 („minus”, „zero” i „plus”). Szereg stóp zwrotu dzielono na trzy rozkłady (w zależności od znaku ostatniej stopy zwrotu).
3. W ostatnim przypadku stan rynku zależał od dwóch zmiennych, od znaku ostatniej stopy zwrotu i znaku przyrostu wolumenu $I\,(R_t\,,\,W_t)$. Uwzględniono sześć stanów rynku $I=[i,j]\;\;i\in\{-1,0,1\},\,j\in\{-1,1\}$ (występujące niekiedy zerowe przyrosty wolumenu włączano do stanu $I\,(R_t\,,\,W_t) = [sign(R_t), -1]$).

We wszystkich przypadkach, w każdym ze stanów jest mieszany rozkład stóp zwrotu z częścią deterministyczną w zerze.

Zgodnie z podaną definicją pamięci można powiedzieć, że została ona zaobserwowana jeżeli wykryto istotne różnice pomiędzy przynajmniej jedną parą rozkładów z dwóch różnych stanów (można brać pod uwagę większą liczbę istotnych różnic pomiędzy rozkładami). W przypadku pierwszym jest tylko jedna para stanów, w drugim 3 pary stanów, a w trzecim (z 6 stanów) można utworzyć 15 par. Ostatni przypadek ukazuje potrzebę dysponowania dużą ilością danych (co najmniej dziesiątki tysięcy danych). Do weryfikacji istotnych różnic pomiędzy ciągłymi częściami rozkładów użyto testu Kołmogorowa-Smirnowa [Wywiał, 2004], pomiędzy dyskretnymi częściami rozkładów – testu wskaźnika struktury [Wywiał, 2004]. Odrzucenie hipotezy zerowej jednego (lub obu) z testów przy zadanym poziomie istotności $\alpha$ oznacza istotne różnice pomiędzy rozkładami stóp zwrotu z danej pary stanów (dokładniej pomiędzy częściami ciągłymi lub dyskretnymi, lub obiema jednocześnie).

Wstępne badania wykazały, że efekt pamięci był na tyle silny, iż autorzy do testów założyli bardzo niski poziom istotności $\alpha = 0{,}001$. Dla takiego poziomu istotności, w każdym przypadku 100% instrumentów wykazywało pamięć. P-value prawie wszystkich testów były bliskie zeru. Oczywiście zdarzały się także pary rozkładów, dla których nie było podstaw do odrzucenia hipotez zerowych przy przyjętym poziomie istotności. W przypadku stanu determinowanego ostatnim przyrostem wolumenu, w 100% instrumentów (notowanych zarówno na GPW, jak i Nasdaq) hipotezy zerowe obu testów (badanie różnic części ciągłych i dyskretnych porównywanych rozkładów) były zawsze odrzucane. Poniżej przedstawiono statystyki dla ilości przypadków, w których stwierdzano lub nie istotne różnice pomiędzy parami rozkładów w pozostałych dwóch podejściach.

Wyróżniono w nich ilość istotnych różnic pomiędzy rozkładami ogólnie, a także pomiędzy ich częściami ciągłymi i dyskretnymi.

Tabela 3

Statystyki występowania istotnych różnic pomiędzy rozkładami badanych instrumentów

| Statystyki występowania istotnych różnic (3 pary rozkładów, 6 testów) pomiędzy rozkładami badanych instrumentów | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Spółki notowane na GPW w Warszawie | | | Spółki notowane na Nasdq | | |
| | ogólnie | pomiędzy częściami ciągłymi | pomiędzy częściami dyskretnymi | ogólnie | pomiędzy częściami ciągłymi | pomiędzy częściami dyskretnymi |
| Minimum | 5 | 3 | 2 | 5 | 3 | 2 |
| Kwartyl I | 5 | 3 | 2 | 5 | 3 | 2 |
| Kwartyl II | 5 | 3 | 2 | 6 | 3 | 3 |
| Kwartyl III | 6 | 3 | 3 | 6 | 3 | 3 |
| Maksimum | 6 | 3 | 3 | 6 | 3 | 3 |

Tabela 4

Statystyki występowania istotnych różnic pomiędzy rozkładami badanych instrumentów

| Statystyki występowania istotnych różnic (15 pary rozkładów, 30 testów) pomiędzy rozkładami badanych instrumentów | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Spółki notowane na GPW w Warszawie | | | Spółki notowane na Nasdaq | | |
| | ogólnie | pomiędzy częściami ciągłymi | pomiędzy częściami dyskretnymi | ogólnie | pomiędzy częściami ciągłymi | pomiędzy częściami dyskretnymi |
| Minimum | 22 | 12 | 8 | 20 | 12 | 8 |
| Kwartyl I | 25 | 14 | 11 | 25 | 14 | 11 |
| Kwartyl II | 26 | 14 | 12 | 27 | 15 | 12 |
| Kwartyl III | 27 | 14 | 13 | 28 | 15 | 13 |
| Maksimum | 29 | 15 | 15 | 30 | 15 | 15 |

Z przeprowadzonych symulacji wynika, że w badanych instrumentach efekt pamięci modelowany wielostanowym procesem Markowa (dla danych minutowych) występuje jednoznacznie. Świadczy o tym ilość instrumentów z pamięcią – 100% w każdym przypadku. Ilość istotnych różnic pomiędzy rozkładami: 2 na 2 w modelu z dwoma stanami, co najmniej 5 na 6 w modelu z 6 stanami i co najmniej 20 na 30 w modelu ostatnim oraz poziom istotności użyty w testach, który był bardzo niski –0,001. Nasuwa się wniosek, iż inwestorzy różnie postrzegają instrument, w który chcą inwestować, w zależności od możliwości uzyskania zysku lub strat w notowaniu wcześniejszym oraz od ilości przeprowadzonych na nim ostatnio transakcji (a dokładniej od ich wzrostu lub spadku).

Nasuwa się obecnie pytanie czy modelowany efekt pamięci nie jest pamięcią pozorną (przynajmniej w części) – [Czernik, Iskra, 2012; Iskra, Czernik, 2008, 2009], tzn. czy dowolnie inny losowy podział szeregu stóp zwrotu na części (2, 3 lub 6) oraz testowanie istotnych różnic pomiędzy tak skonstruowanymi rozkładami przyniesie pozytywny wynik w postaci efektu pamięci. Ponadto w testach na istotność rozkładów można popełniać błąd pierwszego rodzaju z prawdopodobieństwem $\alpha = 0{,}001$ (tzn. odrzucić hipotezę zerową (pamięć), pomimo tego, że nie powinna być odrzucona). Biorąc pod uwagę ilość przeprowadzanych testów (do 30), część zaobserwowanej pamięci może, a właściwie będzie pamięcią pozorną. Należy zauważyć, że przyjmując za prawdopodobieństwo sukcesu $\alpha = 0{,}001$ (prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej w teście, pomimo tego, że nie powinna być odrzucona), można podać, korzystając z rozkładu dwumianowego, prawdopodobieństwo wystąpienia pamięci pozornej.

Prawdopodobieństwa te wynoszę odpowiednio:
- 0,002 – w modelu z dwoma stanami determinowanymi znakiem ostatniego przyrostu wolumenu,
- 0,006 – w modelu z trzema stanami determinowanymi znakiem ostatniej stopy zwrotu,
- 0,03 – w modelu z sześcioma stanami determinowanymi znakiem ostatniej stopy zwrotu i ostatniego przyrostu wolumenu.

Podane prawdopodobieństwo oznacza, że np. w modelu z 6 stanami 3 na 100 instrumentów z pamięcią powinno mieć pamięć pozorną wynikającą z błędów testów. Podane prawdopodobieństwo jest jednocześnie oczekiwaną częstością występowania sukcesu w próbie, czyli oczekiwanym odsetkiem występowania pamięci pozornej w badanych instrumentach. Odchylenie standardowe odsetka pamięci pozornej wynosi natomiast odpowiednio 0,0026, 0,0045 oraz 0,0098 (rozkład dwumianowy).

W pracy pamięć pozorną zbadano symulując dla każdego instrumentu 300 razy losowy podział szeregu stóp zwrotu na części (odpowiednio do modelu) z zachowaniem pierwotnych relacji, badając za każdym razem czy występuje pamięć zgodnie z przyjętym modelem. W poniższej tab. podano średnią ilość oraz odchylenie standardowe zaobserwowanych pamięci w badanych instrumentach.

Tabela 5

Statystyki występowania pamięci pozornej – instrumenty notowane na GPW

| Statystyki występowania pamięci pozornej – instrumenty notowane na GPW | | | |
|---|---|---|---|
| **model z** | **dwoma stanami** | **trzema stanami** | **sześcioma stanami** |
| średni odsetek pamięci pozornej | 0,0019 | 0,0051 | 0,0258 |
| odchylenie standardowe odsetka pamięci pozornej | 0,0026 | 0,0042 | 0,0102 |

Tabela 6

Statystyki występowania pamięci pozornej – instrumenty notowane na Nsdaq

| Statystyki występowania pamięci pozornej – instrumenty notowane na Nsdaq | | | |
|---|---|---|---|
| **model z** | **dwoma stanami** | **trzema stanami** | **sześcioma stanami** |
| średni odsetek pamięci pozornej | 0,0020 | 0,0061 | 0,0254 |
| odchylenie standardowe odsetka pamięci pozornej | 0,0028 | 0,0043 | 0,0099 |

Wartości z tab. 5-6 uzyskane empirycznie są bardzo bliskie wartościom teoretycznym, co może sugerować, że pamięć pozorna wynika ze skumulowanych błędów pierwszego rodzaju przeprowadzanych testów. Niemniej jednak nie można całkowicie wykluczyć, że rozkłady te rzeczywiście mogły istotnie różnić się od siebie, pomimo tego, że stopy zwrotu przydzielano do nich losowo. Podział ze względu na znak ostatniej stopy lub przyrostu wolumenu oczywiście również jest losowy i stanowi dobry przykład, że mogą istnieć jeszcze inne determinanty wyznaczania warunkowych rozkładów stóp zwrotu wykazujących istotne różnice pomiędzy sobą.

## Podsumowanie

W artykule przedstawiono próbę modelowania efektu pamięci za pomocą wielostanowego procesu Markowa. Model ten stanowi także alternatywę dla modeli typu Threshold. W pracy przeprowadzono symulację badając pamięć jednookresową (na danych minutowych), z której wynika, że na rynku występuje efekt pamięci w wielu instrumentach (w obecnej pracy w 100% przypadków). Opisywany model opiera się wyłącznie na empirycznych rozkładach, dostarczając dodatkowej informacji o pamięci, co jest jego zaletą. Jedną z jego wad jest ilość danych potrzebna do prawidłowych wniosków statystycznych w przypadku większej ilości stanów. Osobną kwestią, którą należy zbadać są własności prognostyczne modelu.

## Literatura

Czernik T., Iskra D., 2012: *Memory Effect Modeled by Multi-state Markov Process. Comparison of Polish and US Stock Markets*. W: *Methematical, Econometrical and Computer Methods in Finance and Insurance 2010.* Red. A.S. Barczak, T. Węgrzyn. Publisher of the University of Economics in Katowice, Katowice.

Gillespie D.T., 1992: *Markov Processes. An Introduction for Physical Scientists.* Academic Press, San Diego.

Haberman S., Pitacco E., 2000: *Actuarial Models for Disability Insurance.* CRC Press LLC, Boca Raton, Florida.

Iosifescu M., 1988: *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*. PWN, Warszawa.

Iskra D., Czernik T., 2008: *Wartość zagrożona instrumentu z uwzględnieniem efektu pamięci modelowanym wielostanowym procesem Markowa. Badania symulacyjne.* W: *Matematyczne aspekty ekonomii. Ryzyko – reasekuracja – równowaga.* Red. W. Kulpa. Wydawnictwo Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego, Warszawa.

Iskra D., Czernik T., 2009: *Jednookresowy efekt pamięci modelowany trzystanowym procesem Markowa. Analiza instrumentów notowanych na GPW w Warszawie.* W: *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek.* Red. W. Ronka-Chmielowiec, K. Jajuga. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Wrocław.

Kowalenko I.N., Kuzniecow N.J., Szurienkow W.M., 1989, *Procesy stochastyczne.* PWN, Warszawa.

Wywiał J., 2004: *Wprowadzenie do wnioskowania statystycznego.* Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.

## COMPARATIVE ANALYSIS OF POLISH AND AMERICAN CAPITAL MARKETS IN TERMS OF THE MARKOV PROCESSES

### Summary

This paper proposes a memory effect modeling using Markov process where the state is determined by a recent historical growth rates of return and (or) volume. In every state variable which is the rate of return may come from a different distribution. If these distributions are significantly differ among themselves say that the memory effect. Studies on the effect of storage was performed on instruments traded on the Polish and American capital market.