Katarzyna Budny
Jan Tatar

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

CHARAKTERYSTYKI WIELOWYMIAROWYCH WIELKOŚCI FINANSOWYCH OPARTE NA DEFINICJI POTĘGI WEKTORA

Wprowadzenie

W szeregu wcześniejszych pracach (por. np. Tatar, 1996a; 1996b; 2000; 2009; Budny, Tatar, 2009; Osiewalski, Tatar, 1999) została zaproponowana nowa koncepcja opisu i analizy wielowymiarowych wektorów losowych. Jej istota – mówiąc najogólniej – sprowadza się do tego, że uzyskiwane charakterystyki są rzeczywiście charakterystykami wektora wielowymiarowego, nie zaś – jak to ma miejsce w klasycznym podejściu do rozkładów wielowymiarowych – charakterystykami odpowiednio skonstruowanych jednowymiarowych funkcji jego współrzędnych będących jednowymiarowymi zmiennymi losowymi.

W kolejnych pracach, będących dalszymi krokami rozwijanej koncepcji, zaproponowano formalne definicje takich m.in. charakterystyk rozkładów wielowymiarowych, jak: wartość oczekiwana, wariancja, odchylenie standardowe, miary asymetrii, kurtoza oraz eksces. Z kolei dla par wektorów losowych (niekoniecznie o tych samych wymiarach) zdefiniowano kowariancję, współczynnik korelacji oraz postać ich liniowego związku, czyli regresję liniową.

W przypadku każdej z proponowanych nowych (nazywanych także *łącznymi*) charakterystyk sformułowano i udowodniono twierdzenia dostarczające ich ważnych (także z punktu widzenia ewentualnych zastosowań) własności.

W przedkładanej obecnie pracy pojęcia, o których mowa powyżej, zostaną wykorzystane do opisu i analizy wybranych (przykładowych) wielkości występujących na rynkach finansowych. Warto w tym miejscu uczynić dość oczywistą uwagę, że zdecydowana większość specyfikowanych i analizowanych wielkości ekonomicznych (w szczególności tych, które opisują rynek finansowy) ma charakter wielowymiarowych wektorów losowych. Są to więc odpowiednio wybrane „zestawy" zmiennych losowych jednowymiarowych, ale przecież istniejących i realizujących się jednocześnie.

Przykładami wielowymiarowych wielkości, które posłużą do demonstracji, analizy oraz interpretacji parametrów, o których była mowa wcześniej, będą wektory stóp zwrotu na wybranych aktywach notowanych na polskim rynku finansowym. Dokładniej: wektory („zestawy”) jednostek uczestnictwa w wybranych funduszach inwestycyjnych notowanych na rynku regulowanym.

1. Przypomnienia

Niech $(R^n, R, +, \bullet)$ będzie przestrzenią wektorową, w której określono klasyczny (euklidesowy) iloczyn skalarny postaci:

$$\forall\, \mathrm{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n), w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in R^n : \ (v|\, w) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \,. \qquad (1)$$

Dla dowolnego $v \in R^n$ oraz dowolnej liczby $k \in N_0 = N \cup \{0\}$ definiujemy k-tą potęgę wektora v.

Definicja 1

$$v^0 = 1 \in R$$

oraz

$$v^k = \begin{cases} v^{k-1} \cdot v, & \textit{dla k-nieparzystych} \\ \left(v^{k-1} | v\right)_{R^n}, & \textit{dla k-parzystych} \end{cases} .$$

Z powyższego określenia natychmiast wynikają dwie podstawowe własności zdefiniowanej wielkości:

$$(\textit{wł. 1}) \qquad \forall v \in R^n, k \in N_0 : \textit{k-parzysta} \ \Rightarrow v^k \in R .$$

$$(\textit{wł. 2}) \qquad \forall v \in R^n, k \in N : \textit{k-nieparzysta} \ \Rightarrow v^k \in R^n .$$

Niech ponadto

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \Omega \rightarrow R^n \qquad (2)$$

będzie n-wymiarowym wektorem losowym o wartościach w R^n o gęstości łącznej

$$f = f(x_1, \dots, x_n) \qquad (3)$$

oraz gęstościach brzegowych

$$f_i = f_i(x_i) = \int\limits_{R^{n-1}} \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n, \ (i = 1, \dots, n). \qquad (4)$$

Definicja 2

Dla dowolnej liczby $k \in N_0$ łącznym momentem zwykłym rzędu k wektora losowego ξ nazywamy wartość oczekiwaną zmiennej losowej $g(\xi) = \xi^k$, czyli $m_k = E(\xi^k)$, jeżeli $E\left(\left|\xi^k\right|\right) < +\infty$.

Wobec powyższej definicji mamy

$$m_k = \int_{R^n} \ldots \int \left(x_1,\ldots,x_n\right)^k f\left(x_1,\ldots,x_n\right) dx_1 \ldots dx_n . \tag{5}$$

Na przykład:

$$m_0 = \int_{R^n} \ldots \int f\left(x_1,\ldots,x_n\right) dx_1 \ldots dx_n = 1 , \tag{6}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_{R^n} \ldots \int \left(x_1,\ldots,x_n\right) f\left(x_1,\ldots,x_n\right) dx_1 \ldots dx_n \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_1\left(x_1\right) dx_1, \ldots, \int_{-\infty}^{+\infty} x_n f_n\left(x_n\right) dx_n \right) \\ &= \left(m_{1(1)}, m_{1(2)}, \ldots, m_{1(n)}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= \int_{R^n} \ldots \int \left(x_1,\ldots,x_n\right)^2 f\left(x_1,\ldots,x_n\right) dx_1 \ldots dx_n \\ &= \int_{R^n} \ldots \int \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f\left(x_1,\ldots,x_n\right) dx_1 \ldots dx_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^2 f_i\left(x_i\right) dx_i = \sum_{i=1}^{n} m_{2(i)} . \end{aligned} \tag{8}$$

Symbolem $m_{r(i)}$ ($r \in N$, $i = 1, \ldots , n$) występującym w powyższych formułach oznaczamy moment zwykły rzędu r w rozkładzie brzegowym jednowymiarowej zmiennej losowej ξ_i.

Łatwo zauważyć, że momenty łączne zwykłe wielowymiarowej zmiennej losowej wyrażają się przez jej momenty mieszane tego samego rzędu. Przy tym:

(wł. 3), jeżeli k jest liczbą parzystą, to $m_k \in R$,

(wł. 4), jeżeli k jest liczbą nieparzystą, to $m_k \in R^n$.

Definicja 3

Momentem centralnym łącznym rzędu k, ($k \in N_0$) wektora losowego ξ nazywamy wartość oczekiwaną zmiennej losowej $(\xi - m_1)^k$ czyli $\mu_k = \left[E\left(\xi - m_1\right)^k\right]$, jeżeli jest spełniona nierówność $\int_{R^n} \ldots \int \left|\left(x - m_1\right)^k\right| f\left(x\right) dx < +\infty$.

Jest zatem

$$\mu_k = \int_{R^n} \dots \int \left(x_1 - m_{1(1)}, \dots, x_s - m_{1(n)}\right)^k f\left(x_1, \dots, x_n\right) dx_1 \dots dx_n \ . \tag{9}$$

Na przykład:

$$\mu_1 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_1 - m_{1(1)}\right) f_1 \ (x_1) dx, \dots, \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_n - m_{1(n)}\right) f_n \ (x_n) dx_n \right) = 0 \in R^n , \tag{10}$$

$$\mu_2 = \int_{R^n} \dots \int \left(x_1 - m_{1(1)}, \dots, x_n - m_{1(n)}\right)^2 f\left(x_1, \dots, x_n\right) dx_1 \dots dx_n = \tag{11}$$

$$= \int_{R^n} \dots \int \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_{1(i)}\right)^2 f\left(x_1, \dots, x_n\right) dx_1 \dots dx_n =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - m_{1(i)}\right)^2 f_i \left(x_i\right) dx_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_{2(i)}.$$

Symbolem $\mu_{2(i)}$ w powyższym wzorze oznaczamy moment centralny rzędu drugiego w rozkładzie jednowymiarowej zmiennej losowej ξ_i.

Centralny moment łączny rzędu drugiego nazywamy wariancją łączną wektora losowego ξ i oznaczamy przez σ^2 lub $Var\xi$.

Jest więc

$$\sigma^2 = \mu_2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_{2(i)} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 , \tag{12}$$

gdzie $\sigma_i^2, (i = 1, \dots, n)$ oznacza wariancję rozkładu zmiennej ξ_i.

Nietrudno dostrzec, że − podobnie jak dla rozkładów jednowymiarowych − zachodzi równość

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 . \tag{13}$$

Pierwiastek kwadratowy z wariancji łącznej nazywamy łącznym odchyleniem standardowym rozkładu wektora losowego ξ i oznaczamy przez σ.

Jest więc:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var\xi} = \left(\sum_{i=i}^{n} \sigma_i^2 \right)^{1/2} . \tag{14}$$

Komentarz do tak zdefiniowanych wielkości charakteryzujących rozproszenie rozkładu wielowymiarowego oraz zestawienie ich z klasycznie rozumianą wariancję uogólnioną wektora losowego można znaleźć w pracy Tatar (1996b).

Natomiast w pracy Tatar (2000) zaproponowano – przez analogię do znanej formuły w teorii zmiennych losowych jednowymiarowych – następującą miarę asymetrii rozkładu wielowymiarowego.

Definicja 4

Współczynnikiem asymetrii rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego nazywamy wielkość:

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3} \cdot \mu_3 . \tag{15}$$

Prosty rachunek prowadzi do następujących postaci współczynnika asymetrii w szczególnych przypadkach:

a) dla rozkładu dwuwymiarowego:

$$\gamma = \left(\frac{\mu_{30} + \mu_{12}}{(\mu_{20} + \mu_{02})^{3/2}}, \frac{\mu_{21} + \mu_{03}}{(\mu_{20} + \mu_{02})^{3/2}} \right). \tag{16}$$

b) dla rozkładu trójwymiarowego:

$$\gamma = \left(\frac{\mu_{300} + \mu_{120} + \mu_{102}}{(\mu_{200} + \mu_{020} + \mu_{002})^{3/2}}, \frac{\mu_{210} + \mu_{030} + \mu_{012}}{(\mu_{200} + \mu_{020} + \mu_{002})^{3/2}}, \frac{\mu_{201} + \mu_{021} + \mu_{003}}{(\mu_{200} + \mu_{020} + \mu_{002})^{3/2}} \right) \tag{17}$$

Występujące w (16) i (17) symbole μ_{ij} oraz μ_{ijk} oznaczają – odpowiednio – klasycznie rozumiane centralne momenty mieszane rzędu $i + j$ oraz $i + j + k$ (por. np. Stuart, Ord (1994) ; Shao (2003) ; Fujikoshi, Ulyanov, Shimizu (2010)).

Zaproponowana w definicji 4 charakterystyka γ jest − jak widać − charakterystyką wektorową. Wskazuje zatem na „kierunek” oraz „zwrot” asymetrii wielowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa. Wielkość (wartość) tej asymetrii otrzymamy natomiast obliczając normę wektora γ, tzn. $\|\gamma\|$.

Wartość oczekiwana wektora losowego (definicja 2) oraz współczynnik asymetrii (definicja 4) są miarami położenia jego rozkładu, zaś wariancja oraz odchylenie standardowe (definicja 3) opisują jego rozproszenie. Inne użyteczne miary dyspersji przypominamy w kolejnych definicjach.

Definicja 5 (Budny, 2009; Budny, Tatar, 2009)

Kurtozę wektora losowego $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \Omega \to R^n$ definiuje się jako

$$Kurt\xi = \frac{E\left[(\xi - m_1)^4\right]}{\mu_2^2} , \tag{18}$$

2. Zastosowania

Zgodnie z wcześniejszą zapowiedzią w tym punkcie zastosujemy zaproponowane w nowej koncepcji, a przywołane powyżej, pojęcia do charakteryzacji wybranych wektorowych wielkości z rodzimego rynku finansowego. Rozważać również będziemy wektory tygodniowych stóp zwrotu (rentowności) z inwestycji w jednostki uczestnictwa w funduszach inwestycyjnych. Spośród pięciu wybranych otwartych funduszy inwestycyjnych akcji będziemy tworzyć wektory trójwymiarowe, zaś spośród czterech funduszy rynku pieniężnego – wektory dwuwymiarowe. Do dalszych rozważań wybrano następujące fundusze:

a) *fundusze akcji:*
Arka Akcji FIO (przyjmujemy oznaczenie FA1)
PKO Akcji FIO (przyjmujemy oznaczenie FA2)
Skarbiec Akcji FIO (przyjmujemy oznaczenie FA3)
Legg Mason Akcji FIO (przyjmujemy oznaczenie FA4)
PZU Akcji FIO :Krakowiak" (przyjmujemy oznaczenie FA5)

b) *fundusze rynku pieniężnego:*
Allianz SFIO (przyjmujemy oznaczenie FP1)
KBC Pieniężny FIO (przyjmujemy oznaczenie FP2)
ING Gotówkowy SFIO (przyjmujemy oznaczenie FP3)
Uni Korona Pieniężny SFIO (przyjmujemy oznaczenie FP4)

W tabeli 1 zebrano notowania jednostek uczestnictwa w wybranych funduszach na zamknięciu sesji w ostatnim dniu roboczym każdego tygodnia w okresie od 31 grudnia 2009 r. do 1 kwietnia 2011 r.; dla każdego funduszu mamy więc 66 cen.

Tabela 1

Notowania jednostek uczestnictwa w wybranych funduszach inwestycyjnych (PLN)

	Fundusze akcji					Fundusze rynku pieniężnego			
Data	Arka (FA1)	PKO (FA2)	SKARBIEC (FA3)	Legg Mason (FA4)	PZU KRAKOWIAK (FA5)	Allianz (FP1)	KBC (FP2)	ING Parasol (FP3)	UniKorona (FP4)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2009-12-31	35,82	271,59	272,98	302,64	101,91	119,52	141,57	214,45	156,89
2010-01-08	36,73	277,43	278,45	308,71	104,43	119,61	142,10	214,87	157,44
2010-01-15	37,19	278,44	280,64	310,47	104,78	119,65	142,45	215,34	158,06
2010-01-22	36,58	275,57	275,98	308,42	103,67	119,75	142,88	216,06	158,39
2010-01-29	36,25	273,70	272,38	307,64	102,64	119,87	142,88	215,96	158,51
2010-02-05	34,23	260,39	256,08	292,90	96,56	119,79	142,89	216,10	158,79
2010-02-12	34,71	263,53	259,37	295,07	97,79	119,98	143,20	216,33	159,00

cd. tabeli 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2010-02-19	35,75	267,07	266,01	299,70	99,64	120,04	143,41	216,59	159,26
2010-02-26	34,95	267,97	261,99	300,51	99,77	120,09	143,58	216,78	159,40
2010-03-05	36,04	276,04	273,03	307,13	103,32	120,15	143,69	216,85	159,61
2010-03-12	36,85	280,03	278,41	311,13	105,41	120,42	143,85	217,17	160,04
2010-03-19	36,93	282,69	279,68	315,25	106,28	120,62	144,34	217,74	160,64
2010-03-26	37,57	287,21	285,42	320,58	108,89	120,74	144,52	217,98	160,84
2010-04-01	38,29	291,78	292,11	324,62	110,50	120,77	144,65	218,14	161,11
2010-04-09	38,85	292,16	291,91	325,30	110,77	120,96	144,91	218,33	161,13
2010-04-16	39,29	295,42	295,80	328,91	112,31	121,12	145,09	218,60	161,69
2010-04-23	38,72	289,97	289,36	324,43	109,74	121,25	145,28	218,79	161,86
2010-04-30	38,81	292,54	293,27	326,71	111,03	121,34	145,48	218,71	161,53
2010-05-07	35,42	273,30	267,91	305,07	103,46	121,63	145,41	218,83	161,11
2010-05-14	36,85	281,29	276,30	312,97	106,35	121,84	145,64	219,18	161,84
2010-05-21	35,54	272,91	264,27	304,95	102,37	122,19	145,68	219,21	161,40
2010-05-28	36,61	283,38	275,83	315,42	106,32	122,33	145,68	219,29	161,36
2010-06-04	35,54	278,49	267,60	309,79	103,94	122,47	145,82	219,36	161,47
2010-06-11	35,45	279,00	265,78	310,30	104,42	122,55	145,94	219,46	161,11
2010-06-18	35,91	279,59	265,90	311,81	104,44	122,80	145,97	219,49	161,66
2010-06-25	35,53	277,36	263,20	308,90	103,65	122,77	146,03	219,56	161,69
2010-07-02	34,49	274,18	258,60	305,66	102,39	122,92	146,33	219,83	161,64
2010-07-09	35,00	278,02	261,66	309,73	103,62	123,00	146,40	220,03	162,34
2010-07-16	35,61	281,72	267,35	313,33	104,86	123,10	146,77	220,25	162,57
2010-07-23	36,25	287,54	273,15	318,78	107,33	123,25	146,90	220,31	162,72
2010-07-30	36,49	287,76	274,55	319,81	107,43	123,22	146,79	220,45	163,02
2010-08-06	36,90	292,62	279,14	328,56	109,65	123,21	146,84	220,43	162,96
2010-08-13	36,02	284,91	271,12	320,63	106,48	123,32	147,14	220,63	163,31
2010-08-20	36,24	285,43	270,96	320,27	106,49	123,51	147,29	220,72	163,45
2010-08-27	35,98	284,24	268,20	319,39	106,13	123,59	147,50	221,00	163,57
2010-09-03	36,67	289,04	273,95	325,04	108,15	123,51	147,55	221,04	163,60
2010-09-10	37,11	292,05	276,72	329,24	109,52	123,84	147,74	221,14	163,85
2010-09-17	37,63	296,19	278,67	334,63	110,71	123,94	147,84	221,34	164,12
2010-09-24	38,34	302,24	283,38	340,08	112,57	123,86	147,94	221,44	164,25
2010-10-01	38,43	303,78	283,10	341,57	112,59	123,92	148,13	221,55	164,62
2010-10-08	38,73	305,17	283,71	343,31	113,28	123,94	148,26	221,70	165,11
2010-10-15	38,85	308,68	286,38	346,17	114,33	124,04	148,48	221,84	165,11
2010-10-22	39,34	307,04	286,09	345,88	113,96	124,35	148,62	221,97	165,01
2010-10-29	39,51	310,84	287,70	349,63	115,44	124,33	148,83	222,13	165,14
2010-11-05	40,11	316,48	292,96	356,19	117,54	124,24	148,91	222,14	165,22
2010-11-12	40,04	318,23	293,95	358,23	118,36	124,52	149,09	222,33	165,40
2010-11-19	39,41	309,39	285,54	348,54	114,76	124,42	149,26	222,51	165,34
2010-11-26	39,23	306,55	281,32	345,45	113,86	124,56	149,34	222,71	165,04
2010-12-03	40,09	314,83	293,80	354,28	116,95	124,70	149,54	222,82	165,43
2010-12-10	40,20	318,18	295,39	360,02	118,71	124,86	149,53	222,95	165,53
2010-12-17	40,21	319,17	294,48	363,09	118,31	124,95	149,80	223,06	165,63
2010-12-23	40,48	319,55	295,86	362,46	118,89	124,99	149,92	223,13	165,73

cd. tabeli 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2010-12-31	40,14	318,65	299,27	358,89	118,78	125,08	149,91	223,26	165,78
2011-01-07	39,91	313,70	290,42	354,76	116,74	125,08	150,01	223,37	165,84
2011-01-14	39,87	315,10	296,41	357,70	118,21	125,16	149,89	223,50	166,12
2011-01-21	39,51	317,39	295,73	360,23	119,50	125,20	150,28	223,54	166,37
2011-01-28	39,54	314,95	294,62	358,17	118,35	125,33	150,41	223,79	166,70
2011-02-04	39,74	317,23	300,37	362,36	119,64	125,35	150,58	223,92	166,97
2011-02-11	39,80	315,31	298,22	359,69	118,76	125,47	150,68	224,06	167,07
2011-02-18	39,26	312,19	293,29	354,71	117,00	125,51	150,78	224,02	167,26
2011-02-25	38,87	311,40	297,29	354,28	117,11	125,66	150,95	224,28	167,58
2011-03-04	39,55	316,91	300,09	363,55	120,21	125,81	151,09	224,43	167,84
2011-03-11	38,98	314,27	294,80	361,18	118,76	126,37	151,20	224,46	167,99
2011-03-18	39,16	314,89	299,14	364,53	119,35	126,28	151,08	224,70	168,17
2011-03-25	39,81	318,78	301,93	367,92	120,63	126,45	151,27	224,73	168,40
2011-04-01	40,44	323,00	306,82	372,89	123,07	126,60	151,54	224,92	168,81

Źródło: Obliczenia własne.

Następnie, korzystając z danych w tabeli 1, obliczono tygodniowe stopy zwrotu na poszczególnych jednostkach według wzoru:

$$r_n = \frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n-1}}, \tag{19}$$

gdzie:

r_n – rentowność jednostki uczestnictwa w rozważanym funduszu w tygodniu *n*-tym,

P_n – cena jednostki uczestnictwa w rozważanym funduszu na zamknięciu w ostatnim dniu roboczym tygodnia *n*-tego,

P_{n-1} – cena jednostki uczestnictwa w rozważanym funduszu na zamknięciu w ostatnim dniu roboczym tygodnia *n-1*-ego.

Dla każdego z dziewięciu wybranych funduszy wyznaczono w ten sposób 65 wartości będących w istocie realizacjami (historycznymi) zmiennej losowej pod nazwą *„tygodniowa stopa zwrotu na jednostkach uczestnictwa w danym funduszu"*. Na oznaczenie rozważanych zmiennych losowych przyjmujemy następujące symbole:

r_{FAi} – tygodniowa rentowność jednostki uczestnictwa w funduszu akcyjnym o numerze *i*-tym (dla $i = 1,2,3,4,5$),

r_{FPj} – tygodniowa rentowność jednostki uczestnictwa w funduszu rynku pieniężnego o numerze *j*-tym (dla $j = 1,2,3,4$).

Obliczone zgodnie z wzorem (19) kolejne realizacje zmiennych losowych r_{FAi} oraz r_{FPj} zestawiono w tabeli 2.

Tabela 2

Tygodniowe rentowności jednostek uczestnictwa w wybranych funduszach

Tydzień	r_{FA1}	r_{FA2}	r_{FA3}	r_{FA4}	r_{FA5}	r_{FP1}	r_{FP2}	r_{FP3}	r_{FP4}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0254	0,0215	0,0200	0,0201	0,0247	0,0008	0,0037	0,0020	0,0035
2	0,0125	0,0036	0,0079	0,0057	0,0034	0,0003	0,0025	0,0022	0,0039
3	−0,0164	−0,0103	−0,0166	−0,0066	−0,0106	0,0008	0,0030	0,0033	0,0021
4	−0,0090	−0,0068	−0,0130	−0,0025	−0,0099	0,0010	0,0000	−0,0005	0,0008
5	−0,0557	−0,0486	−0,0598	−0,0479	−0,0592	−0,0007	0,0001	0,0006	0,0018
6	0,0140	0,0121	0,0128	0,0074	0,0127	0,0016	0,0022	0,0011	0,0013
7	0,0300	0,0134	0,0256	0,0157	0,0189	0,0005	0,0015	0,0012	0,0016
8	−0,0224	0,0034	−0,0151	0,0027	0,0013	0,0004	0,0012	0,0009	0,0009
9	0,0312	0,0301	0,0421	0,0220	0,0356	0,0005	0,0008	0,0003	0,0013
10	0,0225	0,0145	0,0197	0,0130	0,0202	0,0022	0,0011	0,0015	0,0027
11	0,0022	0,0095	0,0046	0,0132	0,0083	0,0017	0,0034	0,0026	0,0037
12	0,0173	0,0160	0,0205	0,0169	0,0246	0,0010	0,0012	0,0011	0,0012
13	0,0192	0,0159	0,0234	0,0126	0,0148	0,0002	0,0009	0,0007	0,0017
14	0,0146	0,0013	−0,0007	0,0021	0,0024	0,0016	0,0018	0,0009	0,0001
15	0,0113	0,0112	0,0133	0,0111	0,0139	0,0013	0,0012	0,0012	0,0035
16	−0,0145	−0,0184	−0,0218	−0,0136	−0,0229	0,0011	0,0013	0,0009	0,0011
17	0,0023	0,0089	0,0135	0,0070	0,0118	0,0007	0,0014	−0,0004	−0,0020
18	−0,0873	−0,0658	−0,0865	−0,0662	−0,0682	0,0024	−0,0005	0,0005	−0,0026
19	0,0404	0,0292	0,0313	0,0259	0,0279	0,0017	0,0016	0,0016	0,0045
20	−0,0355	−0,0298	−0,0435	−0,0256	−0,0374	0,0029	0,0003	0,0001	−0,0027
21	0,0301	0,0384	0,0437	0,0343	0,0386	0,0011	0,0000	0,0004	−0,0002
22	−0,0292	−0,0173	−0,0298	−0,0178	−0,0224	0,0011	0,0010	0,0003	0,0007
23	−0,0025	0,0018	−0,0068	0,0016	0,0046	0,0007	0,0008	0,0005	−0,0022
24	0,0130	0,0021	0,0005	0,0049	0,0002	0,0020	0,0002	0,0001	0,0034
25	−0,0106	−0,0080	−0,0102	−0,0093	−0,0076	−0,0002	0,0004	0,0003	0,0002
26	−0,0293	−0,0115	−0,0175	−0,0105	−0,0122	0,0012	0,0021	0,0012	−0,0003
27	0,0148	0,0140	0,0118	0,0133	0,0120	0,0007	0,0005	0,0009	0,0043
28	0,0174	0,0133	0,0217	0,0116	0,0120	0,0008	0,0025	0,0010	0,0014
29	0,0180	0,0207	0,0217	0,0174	0,0236	0,0012	0,0009	0,0003	0,0009
30	0,0066	0,0008	0,0051	0,0032	0,0009	−0,0002	−0,0007	0,0006	0,0018
31	0,0112	0,0169	0,0167	0,0274	0,0207	−0,0001	0,0003	−0,0001	−0,0004
32	−0,0238	−0,0263	−0,0287	−0,0241	−0,0289	0,0009	0,0020	0,0009	0,0021
33	0,0061	0,0018	−0,0006	−0,0011	0,0001	0,0015	0,0010	0,0004	0,0009
34	−0,0072	−0,0042	−0,0102	−0,0027	−0,0034	0,0006	0,0014	0,0013	0,0007
35	0,0192	0,0169	0,0214	0,0177	0,0190	−0,0006	0,0003	0,0002	0,0002
36	0,0120	0,0104	0,0101	0,0129	0,0127	0,0027	0,0013	0,0005	0,0015
37	0,0140	0,0142	0,0070	0,0164	0,0109	0,0008	0,0007	0,0009	0,0016
38	0,0189	0,0204	0,0169	0,0163	0,0168	−0,0006	0,0007	0,0005	0,0008

cd. tabeli 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
39	0,0023	0,0051	−0,0010	0,0044	0,0002	0,0005	0,0013	0,0005	0,0023
40	0,0078	0,0046	0,0022	0,0051	0,0061	0,0002	0,0009	0,0007	0,0030
41	0,0031	0,0115	0,0094	0,0083	0,0093	0,0008	0,0015	0,0006	0,0000
42	0,0126	−0,0053	−0,0010	−0,0008	−0,0032	0,0025	0,0009	0,0006	−0,0006
43	0,0043	0,0124	0,0056	0,0108	0,0130	−0,0002	0,0014	0,0007	0,0008
44	0,0152	0,0181	0,0183	0,0188	0,0182	−0,0007	0,0005	0,0000	0,0005
45	−0,0017	0,0055	0,0034	0,0057	0,0070	0,0023	0,0012	0,0009	0,0011
46	−0,0157	−0,0278	−0,0286	−0,0270	−0,0304	−0,0008	0,0011	0,0008	−0,0004
47	−0,0046	−0,0092	−0,0148	−0,0089	−0,0078	0,0011	0,0005	0,0009	−0,0018
48	0,0219	0,0270	0,0444	0,0256	0,0271	0,0011	0,0013	0,0005	0,0024
49	0,0027	0,0106	0,0054	0,0162	0,0150	0,0013	−0,0001	0,0006	0,0006
50	0,0002	0,0031	−0,0031	0,0085	−0,0034	0,0007	0,0018	0,0005	0,0006
51	0,0067	0,0012	0,0047	−0,0017	0,0049	0,0003	0,0008	0,0003	0,0006
52	−0,0084	−0,0028	0,0115	−0,0098	−0,0009	0,0007	−0,0001	0,0006	0,0003
53	−0,0057	−0,0155	−0,0296	−0,0115	−0,0172	0,0000	0,0007	0,0005	0,0004
54	−0,0010	0,0045	0,0206	0,0083	0,0126	0,0006	−0,0008	0,0006	0,0017
55	−0,0090	0,0073	−0,0023	0,0071	0,0109	0,0003	0,0026	0,0002	0,0015
56	0,0008	−0,0077	−0,0038	−0,0057	−0,0096	0,0010	0,0009	0,0011	0,0020
57	0,0051	0,0072	0,0195	0,0117	0,0109	0,0002	0,0011	0,0006	0,0016
58	0,0015	−0,0061	−0,0072	−0,0074	−0,0074	0,0010	0,0007	0,0006	0,0006
59	−0,0136	−0,0099	−0,0165	−0,0138	−0,0148	0,0003	0,0007	−0,0002	0,0011
60	−0,0099	−0,0025	0,0136	−0,0012	0,0009	0,0012	0,0011	0,0012	0,0019
61	0,0175	0,0177	0,0094	0,0262	0,0265	0,0012	0,0009	0,0007	0,0016
62	−0,0144	−0,0083	−0,0176	−0,0065	−0,0121	0,0045	0,0007	0,0001	0,0009
63	0,0046	0,0020	0,0147	0,0093	0,0050	−0,0007	−0,0008	0,0011	0,0011
64	0,0166	0,0124	0,0093	0,0093	0,0107	0,0013	0,0013	0,0001	0,0014
65	0,0158	0,0132	0,0162	0,0135	0,0202	0,0012	0,0018	0,0008	0,0024

Źródło: Obliczenia własne.

Wektorami losowymi, których wybrane charakterystyki łączne wyznaczymy korzystając z definicji 1-4 oraz danych w tabeli 2 są:

$RA\,I = (r_{FA1}, r_{FA2}, r_{FA3})$; $RA\,II = (r_{FA1}, r_{FA2}, r_{FA4})$

$RA\,III = (r_{FA1}, r_{FA2}, r_{FA5})$; $RA\,IV = (r_{FA2}, r_{FA3}, r_{FA4})$

oraz

$RPI = (r_{FP1}, r_{FP2})$; $RPII = (r_{FP1}, r_{FP3})$; $RPIII = (r_{FP1}, r_{FP4})$; $RPIV = (r_{FP2}, r_{FP3})$.

Wyznaczając „średnie z próby” jako estymatory wartości oczekiwanej wektorowych stóp zwrotu otrzymujemy:

$m_1(RA\ I) = (0{,}2082\ ;\ 0{,}2824\ ;\ 0{,}2057)$ $\quad$ $m_1(RP\ I) = (0{,}0886\ ;\ 0{,}1048)$

$m_1(RA\ II) = (0{,}2082\ ;\ 0{,}2824\ ;\ 0{,}3362)$ $\quad$ $m_1(RP\ II) = (0{,}0886\ ;\ 0{,}0734)$

$m_1(RA\ III) = (0{,}2082\ ;\ 0{,}2824\ ;\ 0{,}3101)$ $\quad$ $m_1(RP\ III) = (0{,}0886\ ;\ 0{,}1128)$

$m_1(RA\ IV) = (0{,}2824\ ;\ 0{,}2057\ ;\ 0{,}3362)$ $\quad$ $m_1(RP\ IV) = (0{,}1048\ ;\ 0{,}0734)$

Uzyskane powyżej wyniki interpretujemy jako „wielowymiarowe oszacowania z próby historycznej” teoretycznych wartości oczekiwanych wielowymiarowych rozkładów stóp zwrotu. Innymi słowy: rozkłady te (wykresy ich gęstości w odpowiednich przestrzeniach) są niejako „rozpięte wokół” wyznaczonych powyżej wektorów. Owo „wokół” może być z kolei scharakteryzowane odpowiednimi miarami rozproszenia (wariancja; odchylenie standardowe), które z kolei możemy oszacować korzystając z definicji 3, dokładniej zaś z wzorów (12) oraz (14). Wykonując konieczne obliczenia otrzymujemy następujące szacunki *wariancji łącznych* oraz *łącznych odchyleń standardowych*:

$s^2(RA\ I) = 0{,}1229$ oraz $s(RA\ I) = 0{,}3506$

$s^2(RA\ II) = 0{,}1009$ oraz $s(RA\ II) = 0{,}3176$

$s^2(RA\ III) = 0{,}1105$ oraz $s(RA\ III) = 0{,}3324$

$s^2(RA\ IV) = 0{,}1096$ oraz $s(RA\ IV) = 0{,}3311$

a także

$s^2(RP\ I) = 0{,}1701 \cdot 10^{-3}$ oraz $s(RP\ I) = 0{,}0412$

$s^2(RP\ II) = 0{,}1290 \cdot 10^{-3}$ oraz $s(RP\ II) = 0{,}0359$

$s^2(RP\ III) = 0{,}3164 \cdot 10^{-3}$ oraz $s(RP\ III) = 0{,}0562$

$s^2(RP\ I) = 0{,}1203 \cdot 10^{-3}$ oraz $s(RP\ IV) = 0{,}0347$.

Dysponując informacjami o wartościach oczekiwanych wektorowych stóp zwrotu oraz o ich ryzyku mierzonym łącznym odchyleniem standardowym możemy w kolejnym etapie zbadać asymetrię ich rozkładów. Oszacowanie jej współczynnika określonego w definicji 4 otrzymamy – w rozważanym przykładzie – stosując odpowiednio formuły (16) i (17) do danych z tabeli 2. Mamy zatem:

$Asym(RA\ I) = (-0{,}8312; -0{,}6554; -0{,}8291)$ oraz $\|Asym(RA\ I)\| = 1{,}3445$

$Asym(RA\ II) = (-0{,}9630; -0{,}7642; -0{,}7815)$ oraz $\|Asym(RA\ II)\| = 1{,}4567$

$Asym(RA\ III) = (-0{,}8817; -0{,}7053; -0{,}7832)$ oraz $\|Asym(RA\ III)\| = 1{,}3741$

$Asym(RA\ IV) = (-0{,}6811; -0{,}8547; -0{,}6970)$ oraz $\|Asym(RA\ IV)\| = 1{,}2963$

Także:

$Asym(RP\ I) = (0{,}2680\,;\ 0{,}0193)$ oraz $\|Asym(RP\ I)\| = 0{,}2687$

$Asym(RP\ II) = (0{,}4844\,;\ 0{,}1148)$ oraz $\|Asym(RP\ II)\| = 0{,}4978$

$Asym(RP\ III) = (0{,}2869\,;\ -0{,}2313)$ oraz $\|Asym(RP\ III)\| = 0{,}3685$

$Asym(RP\ IV) = (0{,}5994;\ 0{,}6231)$ oraz $\|Asym(RP\ IV)\| = 0{,}8646$

Wektorowe współczynniki asymetrii badanych rozkładów prawdopodobieństwa wskazują – jak już wcześniej wspominaliśmy – na kierunek (kierunki) oraz „zwrot" występującej asymetrii, zaś ich długości (normy) są jej „łączną" wartością.

Na koniec oszacujemy jeszcze kurtozę każdego z badanych rozkładów. Stosowne obliczenia prowadzą do następujących wyników:

$Kurt(RA\,I) = 6{,}2950$
$Kurt(RA\,II) = 6{,}6821$
$Kurt(RA\,III) = 6{,}2076$
$Kurt(RA\,IV) = 6{,}0178$

oraz

$Kurt(RP\,I) = 2{,}6145$
$Kurt(RP\,II) = 3{,}3200$
$Kurt(RP\,III) = 2{,}7098$
$Kurt(RP\,IV) = 3{,}9579$.

Podsumowanie

W niniejszym artykule autorzy skupili swoją uwagę na praktycznym wykorzystaniu zaproponowanych wcześniej nowych charakterystyk do opisu wielowymiarowych wielkości ekonomicznych (finansowych). Otwartym zagadnieniem pozostaje możliwość wykorzystania uzyskanych wyników w podejmowaniu decyzji gospodarczych, np. w konstrukcji i zarządzaniu portfelem inwestycyjnym. Wstępne badania w tym zakresie skłaniają co najmniej do umiarkowanego optymizmu. Z konieczności jednak bardziej pogłębioną prezentację i analizę zagadnień aplikacyjnych pozostawiamy do osobnego opracowania.

Literatura

Budny K. (2009), Kurtoza wektora losowego, Ekonometria, nr 26, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Wrocław.

Budny K., Tatar J. (2009), Kurtosis of a Random Vector – Special Types of Distributions, „Statistics in Transiton", Vol. 10, No. 3.

Fujikoshi Y., Ulyanov V.V., Shimizu R. (2010), Multivariate Statistics: High-Dimensional and Large-Sample Approximations, John Wiley & Sons, New York.

Osiewalski J., Tatar J. (1999), Multivariate Chebyshev Inequality Based on a New Definition of Moments of a Random Vector, „Przegląd Statystyczny", z. 2.

Shao J., (2003), Mathematical Statistics, Springer Science and Business Media, LLC, Berlin.

Stuart A., Ord K., (1994), Kendall's Advanced Theory of Statistics, Vol. 1: Distribution Theory, John Wiley & Sons, New York.

Tatar J. (1996a), Nierówność Czebyszewa dla wielowymiarowych zmiennych losowych, „Badania Operacyjne i Decyzje", z. 2.

Tatar J. (1996b), O niektórych miarach rozproszenia rozkładów prawdopodobieństwa, „Przegląd Statystyczny", z. 3/4.

Tatar J. (2000), Asymetria wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa, Materiały z XXXV Konferencji Statystyków, Ekonometryków i Matematyków Akademii Ekonomicznych Polski Południowej, Osieczany, 23-25 III 1999 r., Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Kraków.

Tatar J. (2009), Nowe charakterystyki warunkowych rozkładów wielowymiarowych, „Studia i Prace Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie", nr 3.

CHARACTERISTICS OF MULTIVARIATE FINANCIAL ITEMS BASED ON DEFINITION OF THE POWER OF A VECTOR

Summary

In the previous articles the authors proposed – different from the well-known in the probabilistic literature – definitions of such characteristics of multivariate probability distributions as the expected value, variance, standard deviation, skewness coefficient, kurtosis and excess kurtosis. The basis of these definitions is the concept of the power of the vector in an inner product space proposed by J. Tatar, among others things, in Tatar (1996b). In this paper, the formal forms of those which are mentioned above are used to describe some random vectors occurring in a typical financial market. In this case these are two dimensional and three-dimensional vectors of weekly rates of units in selected investment funds. It is worth noting that the nature of the moments of multivariate distributions shows that parameters such as the expected value and skewness coefficient are vectors whereas the variance, standard deviation, kurtosis and excess are scalars.