Adrianna Mastalerz-Kodzis

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Katedra Matematyki
adrianna.mastalerz-kodzis@ue.katowice.pl

ZASTOSOWANIE FUNKCJI HÖLDERA DO MODELOWANIA DANYCH PRZESTRZENNYCH

Wprowadzenie

Celem artykułu jest pokazanie możliwości modelowania przestrzennego na podstawie wybranych metod i pojęć geometrii fraktalnej. U schyłku XX w. ukazało się wiele prac na temat modelowania szeregów czasowych (w tym ekonomicznych, finansowych) za pomocą wybranych metod fraktalnych. W ostatnich latach szybki rozwój modelowania przestrzennego (ekonometrii i statystyki przestrzennej) doprowadził także do powstania technik opartych na pojęciach geometrii fraktalnej zastosowanych do opisu danych przestrzennych. W początkach XXI w. zaczęto używać własności fraktalnych do modelowania w wyższych wymiarach. Prac o tej tematyce jest jednak nadal niewiele, szczególnie w kontekście modelowania danych ekonomicznych.

W literaturze z zakresu ekonometrii i finansów powszechnie stosuje się procesy stochastyczne ruchów Browna. Jest to tematyka, jak się wydaje, dobrze zbadana i opisana przez naukowców, a także mająca szerokie zastosowanie w praktyce. Modeluje się finansowe szeregi czasowe jako realizacje multiułamkowych procesów ruchów Browna. Wykres szeregu ma płaszczyźnie ma wymiar topologiczny równy 1, zaś wymiar fraktalny z przedziału (1,2). Zmienność wykresu mierzą punktowe wykładniki Höldera (zdefiniowane w punkcie 2 niniejszego artykułu) zależne wyłącznie od czasu.

W artykule autorka przybliża nowe podejście do modelowania, jeszcze słabo opisane w literaturze, a mianowicie uogólnia się modelowanie za pomocą ruchów Browna na przypadek 2- i 3-wymiarowy. Wówczas punktowe wykładniki Höldera zależą od położenia punktu na płaszczyźnie, co pozwala na przestrzenne modelowanie zmienności. Mogą także zależeć od miejsca na płaszczyźnie i parametru czasowego i wtedy modelowanie ma charakter przestrzenno-czasowy. Takie spojrzenie na przestrzeń i charakteryzujące ją wielkości jest w nauce interesujące z co najmniej dwóch względów. Po pierwsze można precyzyjnie modelować zmienność powierzchni w czasie i przestrzeni, po drugie zastosowanie podejścia fraktalnego umożliwia w interesujący sposób zaprezentować zmiany badanych charakterystyk.

1. Zmienność według Höldera i multifraktalne szeregi czasowe

Modelowanie losowych szeregów czasowych za pomocą procesów stochastycznych jest powszechnie stosowane w analizach ekonomicznych. Jedną z metod wykorzystywanych do opisu szeregów jest zastosowanie ruchu Browna[1].

Niech (X, d_x) i (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi[2].

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy funkcją Höldera o wykładniku α $(\alpha > 0)$, jeśli dla każdych $x, y \in X$ takich, że $d_X(x, y) < 1$ funkcja spełnia nierówność (1) z dodatnią stałą c

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq c \cdot (d_X(x, y))^{\alpha}. \tag{1}$$

Jeżeli funkcja Höldera jest klasy C^l, to wymiar fraktalny wykresu funkcji jest równy jeden. Gdy założy się jedynie ciągłość, to wykres może być fraktalem, mieć ułamkowy wymiar.

Niech będzie dana funkcja $f : D \to \Re$ $(D \subset \Re)$ oraz parametr $\alpha \in (0,1)$. Funkcja $f : D \to \Re$ jest funkcją klasy C^{α} Höldera, jeżeli istnieją stałe $c > 0$ oraz $h_0 > 0$ takie, że dla każdego x oraz wszystkich h takich, że $0 < h \leq h_0$ spełniona jest nierówność

$$|f(x+h) - f(x)| \leq c\, h^{\alpha}. \tag{2}$$

Niech x_0 będzie dowolnym punktem z dziedziny funkcji f $(x_0 \in D \subset \Re)$. Funkcja $f : D \to \Re$ jest w punkcie x_0 funkcją klasy $C^{\alpha}_{x_0}$ Höldera, jeżeli ist-

---

[1] Zastosowanie procesów stochastycznych do modelowania szeregów finansowych opisano m.in. w pracach [1], [2], [10], [11].

[2] Definicje zaczerpnięto z prac: [1], [4], [10], [11].

nieją stałe $\varepsilon, c > 0$ takie, że dla każdego $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ spełniona jest nierówność

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c\,|x - x_0|^{\alpha}. \tag{3}$$

Punktowym wykładnikiem Höldera funkcji *f* w punkcie x_0 nazywa się liczbę $\alpha_f(x_0)$ daną wzorem $\alpha_f(x_0) = \sup\left\{\alpha : f \in C_{x_0}^{\alpha}\right\}$. Funkcją Höldera dla funkcji *f* nazywa się funkcję, która każdemu punktowi $x \in D$ przyporządkowuje liczbę $\alpha_f(x)$.

Niech $H_t : [0, \infty) \to (0,1)$ będzie funkcją Höldera o wykładniku $\alpha > 0$. Uogólnionym multiułamkowym procesem ruchu Browna z parametrem funkcyjnym H_t i λ – liczbą rzeczywistą nazywa się proces $\{B_{H,\lambda}(t)\}_{t \in \Re}$ taki, że dla każdego $t \in \Re$

$$B_{H,\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{D_n} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H_n(t)+0,5}} dB(\xi), \tag{4}$$

gdzie:
B – standardowy proces ruchu Browna,
$D_0 = \{\xi : \ |\xi| < 1\}$ oraz dla wszystkich $n \geq 1$ $D_n = \left\{\xi : \ \lambda^{n-1} \leq |\xi| < \lambda^n\right\}$.

Punktowe wykładniki Höldera determinują własności procesu[3]. Można wymienić kilka z nich:

- im wartości funkcji Höldera są bliższe zera, tym większa zmienność wykresu, dla wartości funkcji bliskich jedynki proces jest gładszy,
- lokalny wymiar trajektorii procesu $B_{H,\lambda}(t)$ dla każdego $t_0 \geq 0$ wynosi $2 - H(t_0)$,
- regularność procesu mierzona punktowymi wykładnikami Höldera zmienia się w przedziale (0,1).

Multiułamkowy proces ruchu Browna może być generowany za pomocą metody losowego przemieszczaniu środka odcinka[4]. Odcinek [0,1] zostaje podzielony w połowie i przypisuje się mu wartość $B_{H(1/2)}(1/2) = \frac{B(0) + B(1)}{2} + G\frac{\sqrt{1 - 2^{2 \cdot H(1/2) - 2}}}{2^{1 \cdot H(1/2)}}$ dla zadanej wartości *H*(1/2).

---

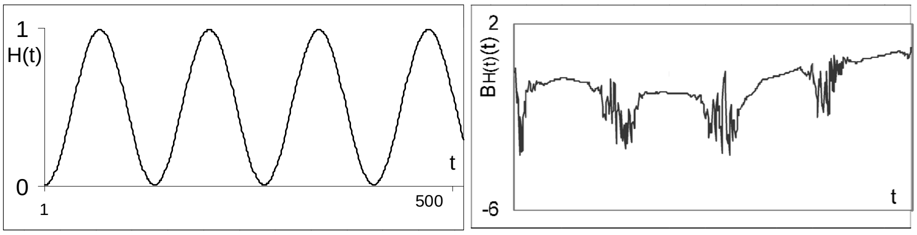
[3] Szczegółowe własności procesów wymieniono w pracach [1], [11].

[4] Metodę opisano m.in. w pracach [10], [11].

Ogólnie w i-tym kroku stosuje się wzór

$$B_{H(t)}(t)=\frac{B(t-d)+B(t+d)}{2}+G\frac{\sqrt{1-2^{2\cdot H(t)-2}}}{2^{i\cdot H(t)}}, \tag{5}$$

gdzie:
$t-d$ oraz $t+d$ są poprzednimi punktami podziału odcinka czasu [0,1].



Rys. 1. Funkcja Höldera $H(t)$ = 0,98 [sin ^{2}(12t) + 0,01] i multiułamkowy proces ruchu Browna

Dla danego (wcześniej wygenerowanego czy też rzeczywistego) szeregu czasowego istnieje także w literaturze metoda estymacji punktowych wykładników Höldera[5]. Estymator przyjmuje postać:

$$\hat{H}_{i/(n-1)}=-\frac{\log\left(\sqrt{\pi/2}\,S_{k,n}(i)\right)}{\log(n-1)} \tag{6}$$

dla

$$S_{k,n}(i)=\frac{m}{n-1}\sum_{j=i-k/2}^{i+k/2}\left|B_{j+1,n}-B_{j,n}\right| . \tag{7}$$

2. Zastosowanie funkcji Höldera do generowania zmienności danych przestrzennych

Spośród literatury z zakresu ekonometrii przestrzennej można wymienić prace [7], [13]. Nie wykorzystuje się jednak w nich pojęć zaczerpniętych z geometrii fraktalnej. W niniejszym artykule zaprezentowano nowe podejście, korzystano m.in. z prac [3], [5], [6], [8], [9], [12].

[5] Metodę estymacji opisano m.in. w pracach [10], [11]. Rozważania na temat metody estymacji na szeregach wygenerowanych komputerowo oraz na danych rzeczywistych można znaleźć w pracy [10].

W punkcie 1 opisano zachowanie się losowych szeregów czasowych. Naturalne wydaje się przeniesienie metodologii na przypadek płaszczyzny 2-wymiarowej i przestrzeni 3-wymiarowej. Multifraktalne ruchy Browna w ujęciu przestrzennym można wykorzystać jako narzędzie umożliwiające wielokierunkowe badania naukowe, w tym także społeczno-ekonomiczne. Można np. analizować rozwój przestrzenny miast, rozkład populacji na obszarze miast, wartości dowolnej cechy przestrzennej na danym obszarze. Interesujące jest także badanie intensywności badanego zjawiska zależnie od miejsca i czasu, na przykład zanieczyszczenia środowiska, opadów deszczu, zmian temperatury. Za pomocą wartości funkcji Höldera można także opisać skutki wybuchu czy też występowanie złóż surowców naturalnych na danej głębokości wewnątrz Ziemi.

Dwuwymiarowy ruch Browna ze stałym wykładnikiem Höldera *H* na całej powierzchni to proces dla każdego $(x, y) \in R^2$ o funkcji kowariancji danej wzorem[6]:

$$E(B_H(x), B_H(y)) = \|x\|^{2H} + \|y\|^{2H} - \|x - y\|^{2H} \tag{8}$$

Niech *H* będzie ciągłą funkcją z R^2 w *R*. W sensie topologicznym, dwuwymiarowy multiułamkowy proces ruchu Browna ma funkcję kowariancji daną wzorem:

$$E\left(B_{H(.)}(x), B_{H(.)}(y)\right) = \|x\|^{H(x)+H(y)} + \|y\|^{H(x)+H(y)} - \|x - y\|^{H(x)+H(y)} \tag{9}$$

Tak jak w przypadku jednowymiarowym, wykładnik Höldera determinuje własności powierzchni m.in.:

- mierzy regularność powierzchni; jest ona w każdym punkcie deterministyczną funkcją amplitudy (wysokości),
- jeżeli założy się, że *H* jest funkcją różniczkowalną, to z prawdopodobieństwem 1 zachodzi równość $\alpha_{B_{H(x,y)}}(x, y) = H(x, y)$.

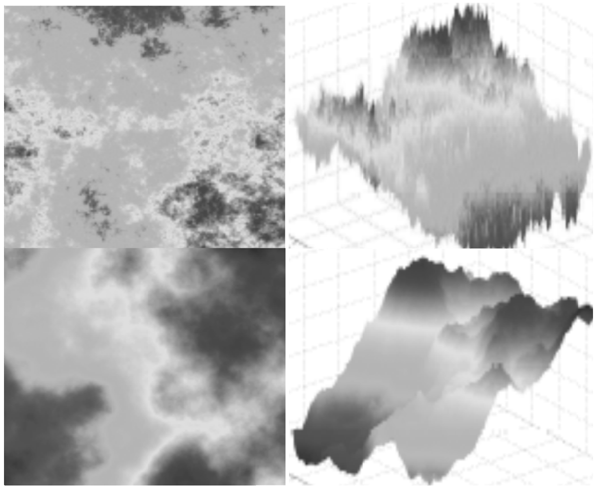
Kolejny krok polega na rozważaniu generowania za pomocą funkcji Höldera przestrzeni 3-wymiarowej (w sensie topologicznym!). Jest to najciekawszy z przypadków, trzeci wymiar (parametr) może być bowiem traktowany jako wartość cechy dla punktu płaszczyzny (*x,y*). Dokładając parametr czasowy otrzymuje się modelowanie czasowo-przestrzenne dla dowolnego argumentu (*x,y,t*), trudne do pokazania w artykule, znacznie bardziej efektowne np. w prezentacji multimedialnej.

Na bazie metody generowania losowego przemieszczania środka odcinka można także skonstruować metodę generowania powierzchni multifraktalnych [12].

---

[6] Prace na temat zastosowania wykładników w przestrzeni to: [2], [3], [5], [6], [8].

Algorytmy mają zbliżoną metodologię, różnicą jest liczba wymiarów. Na rysunku 2 pokazano wizualizację komputerową losowej powierzchni 2 i 3 wymiarowej dla zadanej wartości parametru H.



Nota:
Im wyższa wartość H, tym „gładsza” powierzchnia, mająca mniejszy wymiar fraktalny.

Rys. 2. Powierzchnia dla stałego H równego kolejno 0,3; 0,9

Źródło: [12].

W pierwszym kroku iteracji np. kwadrat jednostkowy jest dzielony na b^2 kwadratów, gdzie b to dowolna liczba naturalna większa od 1. W i-tym kroku iteracji liczba tych kwadratów wynosi już $(b^i)^2$. Każdemu z powstających kwadratów jest przypisywana miara (intensywność), której definicja opiera się na zadanym parametrze h $(0 < h < 1)$ oraz dwumianie Newtona. Po wyznaczeniu wartości miar, ich rozłożenie w polu powstałym w wyniku podziału kwadratu jest losowe na każdym kroku iteracji.

Algorytm jest rekurencyjny, polega na podziale obszaru na mniejsze obszary o tym samym kształcie. Tymi obszarami mogą być dowolne figury, np. kwadraty, trójkąty lub sześciokąty. Losowo przypisuje się wysokości, na jakich będą się znajdować wierzchołki figury, a następnie należy obliczyć wysokości punktów potrzebnych do kolejnego podziału. Oblicza się średnią wysokość sąsiednich punktów i modyfikuje się ją o wartość losową. W kolejnym kroku, mając obliczone nowe wysokości, należy użyć ich jako wierzchołków dla nowej figury, którą ponownie się dzieli.

Dla wyższych wymiarów przestrzeni istnieje metoda estymacji punktowych wykładników Höldera. Jest ona jednak dość skomplikowana matematycznie, została opisana w pracach [5], [8]. Dla łamanej wystarczył przedział na osi czasu, w wyższych wymiarach to koło, kula.

Podsumowanie

Wykorzystanie metodologii geometrii multifraktalnej do modelowania procesów zachodzących w otaczającym nas świecie jest obecnie w literaturze przedmiotem zarówno teoretycznych rozważań naukowców, jak i eksperymentalnych doświadczeń praktyków, także w dziedzinie finansów i ekonomii. Analiza fraktalna pozwala określać w sposób ilościowy stopień nieregularności powierzchni. Połączenie wybranych metod geometrii fraktalnej z elementami modelowania przestrzennego jest interesujące z graficznego punktu widzenia, ale także użyteczne z uwagi na możliwość wykorzystania metodologii do modelowania ekonomicznego oraz do analizy zmienności w czasie i przestrzeni.

Literatura

[1] Ayache A., Lévy Véhel J., *Generalized Multifractional Brownian Motion: Definition and Preliminary Results*, [w:] *Fractals: Theory and Applications in Engineering*, eds. M. Dekking, J. Lévy Véhel, E. Lutton, C. Tricot, Springer Verlag, New York 1999.

[2] Ayache A., Taqqu M.S., *Multifractional Processes with Random Exponent*, „Stochastic Processes and their Applications" 2004, 111(1), s. 119-156.

[3] Barrière O., *Synthèse et estimation de mouvements browniens multifractionnaires et autres processus à régularité prescrite. Définition du processus autorégulé multifractionnaire et applications*, PhD thesis, IRCCyN, Nantes 2007.

[4] Daoudi K., Lévy Véhel J., Meyer Y., *Construction of Continuous Functions with Prescribed Local Regularity*, „Journal of Constructive Approximations" 1998, Vol. 014(03), s. 349-385.

[5] Echelard A., Barrière O., Lévy-Véhel J., *Terrain Modelling with Multifractional Brownian Motion and Self-Regulating Processe*, Computer Vision and Graphics: Proceedings, ICCVG 2010, Vol. 6374, eds. L. Bok, R. Tadusiewicz, L.J. Chmielewski, Warsaw 2010, s. 342-351.

[6] Falconer K.J., Lévy-Véhel J., *Multifractional, Multistable and Other Processes with Prescribed Local Form*, „Journal of Theoretical Probabilisty" 2008, Vol. 21.

[7] Kopczewska K., *Ekonometria i statystyka przestrzenna*, Wydawnictwo CeDeWu, Warszawa 2007.

[8] Lévy-Véhel J., Mendivil F., *Multifractal and Higher Dimensional Zeta Functions*, „Nonlinearity" 2011, Vol. 24(1), s. 259-276.

[9] Lévy-Véhel J., Seuret S., *The 2-Microlocal Formalism, Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot*, „Proceeding of Symposia in Pure Mathemathics" 2004, Vol. 72 (2), s. 153-215.

[10] Mastalerz-Kodzis A., *Modelowanie procesów na rynku kapitałowym za pomocą multifraktali*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice 2003.

[11] Peltier R.F., Lévy Véhel J., *Multifractional Brownian Motion: Definition and Preliminary Results*, INRIA Recquencourt, Rapport de recherche No. 2645, 1995.

[12] Perfect E., Tarquis A.M., Bird N.R.A., *Accuracy of Generalized Dimensions Estimated from Grayscale Images Using the Method of Moments*, „Fractals" 2009, Vol. 17, No. 3, s. 351-363.

[13] Suchecki B., *Ekonometria przestrzenna*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2010.

APPLICATION OF HÖLDER FUNCTION TO DESCRIPTION SPATIAL DATA

Summary

The aim of his article is to use the Hölder function to analysis spatial data. We show the method of generate spatial data with Hölder exponents. The article consists of two parts: the first one presents elements of analysis the Hölder function, and the second consist results of analysis in spatial dimension.