0814
V S

LUDWIK SILBERSTEIN.

Pj 17266

O FALACH ELEKTROMAGNETYCZNYCH

wymuszonych

w sprężystym ośrodku drgającym.

W KRAKOWIE.
NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI.
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ.
1898.

NOWSZE WYDAWNICTWA
AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI
WYDZIAŁU MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZEGO.

Pamiętnik Akademii Umiejętności. Wydział matematyczno-przyrodniczy. Tom XVIII. 4°, str. 243, z 27. tablicami i licznemi rycinami w tekscie. Cena 5 złr.

Rozprawy Akademii Umiejętności. Wydział matematyczno-przyrodniczy. Serya II. tom X, ogólnego zbioru tom XXX, 1896, w 8° dużej, str. 403, z 12 tablicami i 22 rycinami w tekscie. Cena 6 złr.

E. Bandrowski: O utlenieniu parafenilenodwuaminu, lex. 8° str. 13. Cena 20 ct.
— O świeceniu podczas krystalizacyi, lex. 8-o, str. 8. Cena 10 ct.

A. Beck: O zmianach ciśnienia krwi w żyłach. lex. 8°, str. 40, z 20 rycinami w tekscie. Cena 70 ct.
— Pomiary pobudliwości różnych miejsc nerwu za pomocą rozbrojeń kondensatora. lex. 8-o, str. 13. Cena 20 ct.

A. Beck i N. Cybulski: Dalsze badania zjawisk elektrycznych w korze mózgowej, lex. 8-o, str. 84, z tablicą i 17 rycinami w tekscie. Cena 1 złr.

L. Birkenmajer: Marcin Bylica z Olkusza oraz narzędzia astronomiczne, które zapisał Uniwersytetowi Jagiellońskiemu w roku 1493, z 12 rycinami w tekscie lex. 8° str. 163. Cena 1 fl. 50 ct.
— Wyznaczenie długości wahadła sekundowego w Krakowie, oraz dwóch innych miejscowościach W. Księstwa Krakowskiego, lex. 8-o, str. 63. Cena 80 ct.
— O wpływie temperatury na ruch zegarów, a zwłaszcza chronometrów, lex. 8-o, str. 36. Cena 50 ct.

Cybulski i Zanietowski: Dalsze doświadczenia z kondensatorami: Zależność pobudzenia nerwów od energii rozbrojenia. lex. 8° str. 5. Cena 10 ct.

B. Dębski: O budowie i mechanizmie ruchów liści u marantowatych. lex. 8-o, str. 109, z dwiema tablicami. Cena 1 złr. 25 ct.

S. Dickstein: O rozwiązaniu kongruencyi $z^n - ay^n \equiv 0$ (mod M) lex. 8° str. 5. Cena 10 ct.
— Hoene Wroński, jego życie i dzieła, lex. 8-o, str. 368. Z portretem Wrońskiego i podobizną jego pisma. Cena 4 złr.
— Wiadomość o korespondencyi Kochańskiego z Leibnicem, lex 8-o, str. 9. Cena 10 ct.

B. Eichler i M. Raciborski: Nowe gatunki zielenic. 8° str. 11 z tablicą. Cena 20 ct.

B. Eichler i R. Gutwiński: De nonnullis speciebus algarum novarum. lex. 8° str. 17, z 2 tablicami. Cena 40 ct.

T. Estreicher: Zachowanie się chlorowcowodorów w nizkich temperaturach, lex. 8-o, str. 6. Cena 10 ct.
— O ciśnieniach nasycenia tlenu, lex. 8-o, str. 18. Cena 25 ct.

E. Godlewski: O nitryfikacyi amoniaku i źródłach węgla podczas żywienia się fermentów nitryfikacyjnych, lex. 8-o, str. 53, z dwiema rycinami w tekscie. Cena 60 ct.

W. Gosiewski: O przekształceniu najprawdopodobniejszem ciała materyalnego. lex. 8°, str. 13. Cena 20 ct.

J. Grzybowski: Otwornice czerwonych iłów z Wadowic, lex. 8-o, str. 48, z czterema tablicami. Cena 80 ct.

J. Talko-Hryncewicz: Zarysy lecznictwa ludowego na Rusi południowej, lex. 8° str. 461. Cena 3 złr.

E. Janczewski: Cladosporium herbarum i jego najpospolitsze na zbożu towarzysze, lex. 8°, str. 45 z 4 tablicami. Cena 1 złr.
— Zawilce. Część III. lex. 8°, str. 20, z tablicą. Cena 40 ct. — Część IV. z dwiema tablicami, str. 26. Cena 50 ct.

Ludwik Silberstein.

O FALACH ELEKTROMAGNETYCZNYCH

wymuszonych

w sprężystym ośrodku drgającym.

W KRAKOWIE.
NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI.
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ.
1898.

Osobne odbicie z Tomu XXXIV. Rozpraw Wydziału matematyczno-przyrodniczego
Akademii Umiejętności w Krakowie.

Bz 58591
643147 III
B 17266
Biblioteka Śląska
15,-

W Krakowie, 1898. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

O FALACH ELEKTROMAGNETYCZNYCH

wymuszonych w sprężystym ośrodku drgającym.

Przez

Ludwika Silbersteina.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydziału matem.-przyr. d. 8. listopada 1897 roku; referent członek Witkowski.

Podczas doświadczeń nad działaniem zmiennego pola magnetycznego na ruchomą igłę glinową, której powierzchnia była siedliskiem zmiennych ładunków elektrycznych [1]), zmuszony byłem kilkakrotnie rozważać teoretycznie zjawiska elektromagnetyczne w dielektryku, którego elementy poruszają się w pewien określony sposób. Między innemi nasunęło mi się zagadnienie następujące:

Jakie są prawa rozchodzenia się płaskich fal elektromagnetycznych w ciągłym ośrodku sprężystym, w którym rozchodzą się już drgania sprężyste również w kształcie fal płaskich? W rozprawie niniejszej pragnę roztrząsnąć to zagadnienie, zakładając, że kierunek rozchodzenia się fal elektromagnetycznych jest równoległy do kierunku rozchodzenia się fal sprężystych. Zobaczymy, że dzięki drganiom ośrodka powstają w polu oprócz zwykłych fal elektromagnetycznych inne jeszcze, że tak powiem, wymuszone fale elektromagne-

[1]) Wyniki i teorya tych doświadczeń, podjętych z polecenia prof. Lippmanna i wykonanych w Labor. d. recherches physiques w Sorbonie (1897), ogłoszę w sprawozdaniu oddzielnem; są one bowiem do pewnego stopnia od treści rozprawy niniejszej niezależne.

tyczne, które pod pewnymi względami różnią się zasadniczo od fal w ośrodku spoczywającym.

Wyobraźmy sobie ośrodek sprężysty, ciągły, jednorodny i izotropowy, który pod względem mechanicznym niechaj będzie określony przez prędkość rozchodzenia się drgań poprzecznych $\frac{1}{c} = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$ (gdzie B jest współczynnikiem sztywności, zaś ρ gęstością) i przez nieściśliwość, pod względem elektromagnetycznym natomiast przez współczynnik dielektryczny K i magnetyczny μ [permeability]; współczynnik przewodnictwa niechaj bedzie równym zeru, t. j. ośrodek nasz, doskonale izolującym dielektrykiem.

Ogólne równania różniczkowe pola elektromagnetycznego w poruszającym się ośrodku, są następujące:

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = A K \left\{ \frac{\partial X}{\partial t} + \sigma\alpha + \frac{\partial}{\partial y}(X\beta - Y\alpha) + \frac{\partial}{\partial z}(X\gamma - Z\alpha) \right\}, \qquad 1.$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = A K \left\{ \frac{\partial Y}{\partial t} + \sigma\beta + \frac{\partial}{\partial z}(Y\gamma - Z\beta) + \frac{\partial}{\partial x}(Y\alpha - X\beta) \right\}, \qquad 2.$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = A K \left\{ \frac{\partial Z}{\partial t} + \sigma\gamma + \frac{\partial}{\partial x}(Z\alpha - X\gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(Z\beta - Y\gamma) \right\}, \qquad 3.$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = A \mu \left\{ \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(L\beta - M\alpha) + \frac{\partial}{\partial z}(L\gamma - N\alpha) \right\}, \qquad 4.$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = A \mu \left\{ \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(M\gamma - N\beta) + \frac{\partial}{\partial x}(M\alpha - L\beta) \right\}, \qquad 5.$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = A \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(N\alpha - L\gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(N\beta - M\gamma) \right\}. \qquad 6.$$

W równaniach tych α, β, γ oznaczają składowe prędkości ruchu ośrodka w punkcie x, y, z, w chwili t, — X, Y, Z, L, M, N składowe siły elektrycznej, względnie magnetycznej, $\sigma = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ gęstość ładunku elektrycznego w tymże punkcie ośrodka i w tej samej chwili czasu; A jest stosunkiem jednostki elektrostatycznej do jednostki elektromagnetycznej prądu elektrycznego (=odwrotności prędkości rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w eterze spoczywającym).

Załóżmy, że składowe prędkości i składowe sił elektrycznej i magnetycznej zależą li tylko od jednej współrzędnej, np. z, i od czasu t; gęstość ładunku elektrycznego σ niechaj wszędzie i zawsze będzie równą zeru, podobnie też gęstość ładunku magnetycznego, t. j.:

7 $$\frac{\partial Z}{\partial z}=0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial N}{\partial z}=0.$$

Warunek nieściśliwości ośrodka wymaga, aby było:

8 $$\frac{\partial \gamma}{\partial z}=0,$$

możemy więc przyjąć $\gamma=\text{const.}$, np. $\gamma=0$. Wówczas ogólne równania 1. do 6. przybiorą kształt następujący:

9. $$-\frac{\partial M}{\partial z}=AK\left\{\frac{\partial X}{\partial t}-Z\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right\}; \qquad +\frac{\partial Y}{\partial z}=A\mu\left\{\frac{\partial L}{\partial t}-N\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right\};$$ 11

10. $$+\frac{\partial L}{\partial z}=AK\left\{\frac{\partial Y}{\partial t}-Z\frac{\partial \beta}{\partial z}\right\}; \qquad -\frac{\partial X}{\partial z}=A\mu\left\{\frac{\partial M}{\partial t}-N\frac{\partial \beta}{\partial z}\right\};$$ 12

$$0=\frac{\partial Z}{\partial t}; \qquad 0=\frac{\partial N}{\partial t}.$$

Ze względu na ostatnie dwa równania jakoteż równania 7. składowe Z i N siły elektrycznej i magnetycznej są stałe w czasie i przestrzeni. Gdybyśmy je położyli równie zeru, wówczas, nie bacząc na ruch ośrodka, równania 9, 10, 11, 12 byłyby zupełnie identyczne z równaniami różniczkowemi płaskich fal elektromagnetycznych w ośrodku spoczywającym; zaburzenia elektromagnetyczne rozchodziłyby się zupełnie niezależnie od drgań sprężystych samego ośrodka. Skoro jednak założymy, że w kierunku z działają stałe siły: elektryczna Z i magnetyczna N różne od zera, widzimy z równań powyższych, że zaburzenia elektromagnetyczne zależą od drgań sprężystych i od ich sposobu rozmieszczenia w ośrodku.

Składowe prędkości α, β elementów ośrodka czynią zadość równaniom różniczkowym:

$$C^2\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}=0, \quad e^2\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}=0;$$ 13

ogólne rozwiązania tych równań mają kształt

$$F(t-cz)+G(t+cz),$$

gdzie F, G są dowolnemi funkcyami argumentów $t-cz$, $t+cz$; wyrażają one fale, o kształcie jakimkolwiek, rozchodzące się w kierunku $+z$, względnie $-z$, z prędkością $\frac{1}{c}$. Rozważajmy atoli fale sprężyste rozchodzące się tylko w jednym kierunku $(+z)$ i połóżmy np.:

$$\alpha=r.\cos(t-cz), \quad \beta=s.\cos n(t-cz),$$ 14

gdzie n, r, s oznaczają ilości stałe; $T=\frac{2\pi}{n}$ jest peryodem drgania, $\lambda=\frac{2\pi}{nc}$ długością fali sprężystej; r, s oznaczają stałe amplitudy drgań prędkości składowych α, β. Podstawiając wartości te (14) za α i β w równaniach 9, 10, 11, 12 i rugując, po zróżniczkowaniu równania 9 ze względu na z i równania 12 ze względu na t, z równań 9 i 12 pochodną składowej X, wreszcie postępując podobnie z równaniami 10 i 11, rugując pochodną Y, następnie w podobny sposób pochodne składowych L, M, otrzymamy cztery następujące równania różniczkowe dla X, Y, L, M:

$$\left.\begin{aligned} a^2\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}&=n^2\,\xi\cos n\,(t-cz),\\ a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}-\frac{{}^2 Y}{\partial e^2}&=n^2\,\eta\cos n\,(t-cz),\\ a^2\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}&=n^2\,\lambda\cos n\,(t-cz),\\ a^2\frac{\partial^2 M}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}&=n^2\,\rho\cos n\,(t-cz),\end{aligned}\right\}\qquad 15$$

gdzie, dla skrócenia położyliśmy:

$$a^2=A^2\,K\mu, \qquad 16$$

tak iż $\frac{1}{a}$ jest prędkością fal elektromagnetycznych w ośrodku (K, μ) spoczywającym, dalej:

$$\xi=A\mu.\,Nc^2.\,s+a^2\,Zc.\,r, \qquad 17$$

$$\eta=-A\mu.\,Nc^2.\,r+a^2\,Zc.\,s, \qquad 18$$

$$\lambda=-AKZc^2.\,s+a^2\,Nc.\,r, \quad \text{wreszcie:} \qquad 19$$

$$\rho=AKZc^2.\,r+a^2\,Nc.\,s. \qquad 20$$

Założyliśmy już, że siły Z i N mają wartości stałe różne od zera; gdyby więc, pomimo to, miało być $\xi=\eta=\lambda=\rho=0$, musiałyby być wyznaczniki równań 17 i 18, 19 i 20 równe zeru, t. j. $s^2+r^2=0$, a więc $s=0$, $r=0$, t. j. dla wszelkich wartości z, t: $\alpha=0$, $\beta=0$: ośrodek musiałby w całej swej rozciągłości znajdować się w spoczynku. Skoro więc ośrodek się porusza, nie mogą być ani ξ, η, ani też λ, ρ jednocześnie równe zeru. Prawe strony równań 15. nie mogą więc nigdy jednocześnie znikać, mamy więc układ równań różniczkowych (linijowych) n i e j e d n o r o d n y c h, t. j. oddziaływanie fal sprężystych na fale elektromagnetyczne. Każde z tych równań ma kształt:

I. $$\left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \varphi = n^2 f. \cos n\,(t - cz),$$

gdzie f jest ilością stałą, która dla $\varphi = X$, względnie Y, L, M ma wartości: ξ, względnie η, λ, ρ. Widzimy bezpośrednio, że dla różnych rozwiązań tego równania nie zachodzi t. zw. własność superpozycyi, która przysługuje całkom równań elektromagnetycznych w ośrodku spoczywającym. Aby znaleźć całkę szczególną równania różniczkowego I., połóżmy:

21 $$\varphi = B. \cos n\,(t - cz),$$

gdzie B ma być ilością stałą; ponieważ w tym wypadku

$$a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -a^2 n^2 + c^2 n^2,$$

mamy $B = f/(c^2 - a^2)$, a więc:

22 $$\varphi = \frac{f}{c^2 - a^2} \cos n\,(t - cz).$$

(Zakładamy, że w ogóle prędkości fal sprężystych i elektromagnetycznych są różne: $c^2 \gtrless a^2$; później rozważymy wypadek szczególny $c = a$). Całką ogólną równania zredukowanego

23 $$\left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \varphi = 0$$

jest

24 $$\varphi = F\,(t - az) + G\,(t + az),$$

gdzie F, G oznaczają zupełnie dowolne funkcye argumentów $t - az$, $t + az$. Możemy otrzymać całkę ogólniejszą równania niejednorodnego I, dodając całkę ogólną 24. równania zredukowanego do całki szczególnej 22. równania pierwotnego; otrzymamy:

25 $$\varphi = F\,(t - az) + G\,(t + az) + \frac{f}{c^2 - a^2} \cos n\,(t - cz).$$

Całka ta daje się przystosować do wszelkich warunków początkowych i granicznych: $\varphi_{(t=0)} =$ dowolnie danej funkcyi dla wszelkich z, $\varphi_{(z=0)} =$ dowolnie danej funkcyi czasu dla wszelkich wartości t. Możemy atoli w inny jeszcze sposób upewnić się niezawodnie, że całka 25 jest najogólniejszem rozwiązaniem równania różniczkowego I. Wprowadźmy mianowicie zamiast t, z dwie nowe zmienne niezależne:

26 $$x = t - az, \quad y = t + az;$$

otrzymamy wówczas:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}a+\frac{\partial\varphi}{\partial y}a,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y},$$

tak iż równanie I. przyjmuje kształt prostszy:

$$4a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x.\partial y}=n^2 f.\cos n\left\{x.\frac{1}{2}\left(1+\frac{c}{a}\right)+y\,.\,\frac{1}{2}\left(1-\frac{c}{a}\right)\right\};\qquad 27$$

przez dwukrotną kwadraturę otrzymujemy stąd:

$$\varphi=n^2 f.\iint\cos n\left\{x.\frac{1}{2}\left(1+\frac{c}{a}\right)+y\frac{1}{2}\left(1-\frac{c}{a}\right)\right\}dxdy+\Phi(x)+\Psi(y),\qquad 28$$

gdzie Φ i Ψ są dowolnemi funkcyami argumentów x, y. Otóż, wyrażając w 28. x, y przez t, z (według 26), otrzymamy istotnie całkę 25; ze sposobu wyprowadzenia całki 28. widzimy zaś, że całka nasza jest najogólniejszą, co było do dowiedzenia[1]).

Równanie zredukowane 23. jest identyczne z równaniem różniczkowem struny sprężystej drgającej swobodnie w próżni (jeżeli przez φ rozumieć będziemy np. przesunięcie), równanie zaś niejednorodne I., lub jakichkolwiek z pośród równań 15., jest identyczne z równaniem różniczkowem struny sprężystej drgającej pod działaniem sił zewnętrznych proporcyjonalnych do $\cos n(t-cz)$; obok drgań naturalnych (swobodnych) struna wykonuje wówczas drgania wymuszone, które rozchodzą się w kierunku jej długości w kierunku $\frac{1}{c}$ różną od prędkości $\frac{1}{a}$ drgań swobodnych; taż sama różnica ujawnia się też wyraźnie w całkach 24., 25. Ze względu na tę analogią, możemy fale elektromagne-

---

[1]) Z powyższych rozumowań widzimy, że rozwiązanie najogólniejsze równania różniczkowego

$$\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi=F(t,z),$$

sprowadza się do dwukrotnej kwadratury; wprowadzając bowiem podstawienie 26, możemy równaniu temu nadać kształt:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=F\left(\frac{x+y}{2},\frac{y-x}{2a}\right)=F_1(x,y),$$

tak iż $\varphi=\Phi(x)+\Psi(y)+\iint F_1(x,y)\,dxdy$. Uwagę tę zawdzięczam p. L. Podlaskiemu.

tyczne, odpowiadające dwom pierwszym wyrazom w naszej całce 25., nazwać falami swobodnemi, zaś te, które odpowiadają wyrazowi trzeciemu, falami elektromagnetycznemi wymuszonemi.

Otrzymane wyniki (patrz równ. 25. i 17—20) możemy obecnie wysłowić w sposób następujący:

Jeżeli w ośrodku dielektrycznym sprężystym, w którym rozchodzą się już fale sprężyste

14bis $$\alpha = r.\cos n(t - cz), \quad \beta = s\cos n(t - cz),$$

wywołamy np. w płaszczyźnie $z = 0$ zaburzenia elektromagnetyczne jakiekolwiek:

$$X_{z=0} = F_1(t) + G_1(t), \text{ i t. d. dla } Y, L, M,$$

zaburzenia te dadzą początek dwojakiego rodzaju falom elektromagnetycznym:

1°) falom swobodnym rozchodzącym się z prędkością $\frac{1}{a} = \frac{1}{A\sqrt{K\mu}}$ w kierunkach $+z$ i $-z$, tak jak gdyby ośrodek znajdował się w spoczynku, i

2°) falom elektromagnetycznym wymuszonym biegnącym w kierunku $(+z)$ fal sprężystych; prędkość rozchodzenia się, peryod drgań i długość tych fal elektromagnetycznych będą równe prędkości $\frac{1}{c}$, peryodowi $\frac{2\pi}{n}$, długości $\frac{2\pi}{nc}$ fal sprężystych; amplitudy tych fal wymuszonych dla X, Y, L, M będą:

29 $$\begin{cases} X_0 = \dfrac{\xi}{c^2 - a^2}, & Y_0 = \dfrac{\eta}{c^2 - a^2}, \\ L_0 = \dfrac{\lambda}{c^2 - a^2}, & M_0 = \dfrac{\rho}{c^2 - a^2}, \end{cases}$$

gdzie ξ, η, λ, ρ są ilości stałe określone w równaniach 17—20. jako funkcye amplitud r, s drgań sprężystych i wielkości Z, N sił elektrycznej i magnetycznej działających w kierunku (z) rozchodzenia się tych drgań. Ponieważ prędkość tych fal elektromagnetycznych jest (wogóle jak założyliśmy) różną od prędkości $\left(\frac{1}{a}\right)$ fal swobodnych, przeto fale wymuszone odrywają się też przestrzennie od fal swobodnych i biegną zupełnie od nich niezależnie, jakby unoszone przez fale sprężyste, jeżeli wolno nam użyć wyrażenia obrazowego. Amplitudy drgań elektromagnetycznych wymuszonych są, caeteris paribus, tem większe, im bardziej $\frac{1}{c}$, t. j. wartość prędkości fal sprężystych zbliża się do

prędkości fal swobodnych $1/a = 1/A\sqrt{K\mu}$. W wypadku krytycznym $c = a$ amplitudy drgań wymuszonych są pomimo to skończenie wielkie, w skończonej odległości z od źródła zaburzeń, jak zobaczymy później, dzięki czysto formalnemu przekształceniu całki ogólnej 25. Łatwo też możemy się przekonać, że fazy drgań swobodnych i wymuszonych są także wogóle różne (nawet gdy okresy drgań są identyczne)[1]. Jeżeli w całce ogólnej 25. opuścimy pierwsze dwa wyrazy, funkcya φ nadal czynić będzie zadość równaniu I.; gdybyśmy jednak opuścili wyraz trzeci, φ przestałoby być rozwiązaniem tego równania; innemi słowy: w drgającym ośrodku naszym fale elektromagnetyczne wymuszone mogą istnieć bez fal swobodnych, swobodne zaś bez wymuszonych nigdy istnieć w nim nie mogą (skoro tylko N, Z nie są jednocześnie równe zeru).

Stosunki amplitud składowych sił elektrycznych i magnetycznych w fali wymuszonej są określone przez wzór:

$$X_0 : Y_0 : L_0 : M_0 = \xi : \eta : \lambda : \rho \qquad 30$$

i przez równania 17 do 20. (Stosunki zaś te dla fal swobodnych można znaleźć w wiadomy sposób, uciekając się do pierwotnych równań elektromagnetycznych 1—6. dla ośrodka spoczywającego, t. j. dla $\alpha = \beta = \gamma = 0$). Zobaczymy, że, dopóki $c \gtrless a$, stosunki te (30) są zasadniczo różne od stosunków sił w falach swobodnych. Powszechnie znanem jest twierdzenie, według którego w falach swobodnych gęstości przeciętne energii elektrycznej i energii magnetycznej są sobie równe; falom natomiast wymuszonym własność ta zasadnicza nigdy nie przysługuje, jeżeli tylko $c \gtrless a$. Zobaczymy to na dwóch wybitnych przykładach.

Jeżeli drgania sprężyste ośrodka są (proste harmoniczne i prostolinijne, możemy położyć kierunek osi x (np.) w kierunku tych drgań, a więc:

$$\beta = 0, \text{ t. j. } s = 0, \ \alpha = r \cos n(t - cz), \qquad 31$$

wówczas wzory 17—20 przyjmą kształt prostszy:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a^2 Z c r; & \lambda &= a^2 Nc. r; \\ \eta &= -A\mu. Nc^2. r; & \rho &= AKZ c^2. r, \end{aligned}\right\} \qquad 32$$

tak iż składowe siły elektrycznej i magnetycznej w fali wymuszonej

[1]) Połóżmy np. w równ. 25. $G = 0$, $F =$ const. $\cos n(t - az + \varepsilon)$; wówczas, ustawiając równanie np. dla X i przechodząc do stanu początkowego ($t = 0$) dla $z = 0$, otrzymamy równanie między różnicę fazy ε a wartościami $(c^2 - a^2)$ i ξ, i przekonamy się, że ε wogóle różni się od zera.

będą proporcyonalne do prędkości drgań ośrodka w każdym punkcie i w każdej chwili czasu.

A. Jeżeli siła magnetyczna w kierunku z równa się zeru: $N=0$, $Z \gtrless 0$, mamy:

$$\eta=0,\ \lambda=0;\quad \text{a więc:}\quad Y_0=0,\ L_0=0;$$

w tym wypadku siła elektryczna[1]) w fali wymuszonej jest równoległa do kierunku drgań sprężystych, siła zaś magnetyczna jest do kierunku tego prostopadła. Dla stosunku amplitud tych sił mamy według 30, 32:

33 $$X_0 : L_0 = \xi : \rho = \frac{A\mu}{c};$$

podnosząc do kwadratu i mnożąc przez $\frac{K}{\mu}$, otrzymamy stosunek gęstości przeciętnych energii elektrycznej i magnetycznej (z pominięciem energii niezmiennej, zależnej od Z):

34 $$E_e : E_m = \frac{a^2}{c^2};$$

stosunek ten jest więc odwrotnie proporcyonalny do stosunku kwadratów prędkości rozchodzenia się fal swobodnych i fal wymuszonych, i równa się jedności wówczas i t y l k o wówczas, gdy prędkości te są sobie równe.

B. Jeżeli $N \gtrless 0$, zaś $Z=0$, mamy:

$$\xi=0,\ \rho=0,\quad \text{a więc}\quad X_0=0,\ M_0=0,$$

t. j.: w fali wymuszonej siła elektryczna jest prostopadła, siła zaś magnetyczna (z pominięciem stałej składowej N) jest równoległa do kierunku drgań sprężystych ośrodka. Stosunek amplitud w tym wypadku, jest, według 32:

35 $$Y_0 : L_0 = \eta : \lambda = -\frac{c}{AK},$$

stosunek zaś przeciętnych gęstości energii elektrycznej i magnetycznej:

36 $$E_e : E_m = \frac{c^2}{a^2},$$

t. j. wprost odwrotny, niż w pierwszym wypadku. I w tym więc wypadku stosunek ten równa się jedności wówczas i t y l k o wówczas, gdy $c=a$.

---

[1]) Z pominięciem składowej Z stałej w czasie i przestrzeni.

Rozważmy teraz wypadek krytyczny, który zachodzi wówczas, gdy prędkości rozchodzenia się fal sprężystych i fal elektromagnetycznych swobodnych są sobie dokładnie równe, t. j. gdy $c=a$. Równania różniczkowe 15, czyli I, mają w tym wypadku kształt następujący:

$$\left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \varphi = n^2 f. \cos n\,(t-az). \qquad \text{II}$$

Równanie to przypomina równanie struny drgającej pod działaniem siły zewnętrznej proporcyonalnej do $\cos n\,(t-az)$, tak np. jak gdyby struna ta drgała w ośrodku sprężystym i bezwładnym, w którym drgania poprzeczne rozchodzą się z prędkością r ó w n ą prędkości rozchodzenia się drgań poprzecznych wzdłuż struny samej; zachodzi więc w tym wypadku pewnego rodzaju „współbrzmienie“ (resonans): działanie sił zewnętrznych nagromadza się w miarę jak fala biegnie naprzód wzdłuż struny, tak iż amplitudy drgań struny rosną wraz z drogą przebytą z. Pod tym więc względem drgania te różnią się teraz, podobnie jak w wypadku ogólnym $c \gtrless a$, od drgań swobodnych, tak iż możemy je znowu dla odróżnienia nazwać drganiami w y m u s z o n e m i.

Równanie różniczkowe II. moglibyśmy scałkować, niezależnie od I., posługując się nowemi współrzędnemi x, y, równ. 26. Ponieważ atoli równanie I. przechodzi w równanie II., gdy c staje się równem a, przeto całka najogólniejsza 25. równania I. powinna przejść w całkę równania II., gdy w 25. podstawimy $c=a$. Otóż, gdybyśmy w całce 25. wprost podstawili $c=a$, otrzymalibyśmy dla amplitudy trzeciego wyrazu $\frac{f}{c^2-a^2}=\infty$, a więc $\varphi=\infty$ dla wszelkich wartości t i z. Ponieważ jednak funkcya $F(t-az)$ jest zupełnie dowolną, możemy sobie wyobrazić, iż zawiera ona pewną część, która dla $c=a$ staje się w ten sposób nieskończenie wielką, iż suma jej (algebraiczna) i wyrazu trzeciego w 25. daje w granicy, dla $c=a$, wartość skończenie wielką. Aby się o tem przekonać, należy przedewszystkiem całkę 25. przekształcić[1]) czysto formalnie, następnie zaś dopiero przejść do wypadku krytycznego $c=a$. Napiszmy, w tym celu, zamiast 25.:

$$\varphi = F_1\,(t-az) + G\,(t+az) - \frac{f}{c^2-a^2} \cos n\,(t-az) + \frac{f}{c^2-a^2} \cos n\,(t-cz) \qquad 37$$

$$= F_1 + G + \frac{f}{c^2-a^2} \cos n\,(t-az)\,[\cos n\,(a-c)\,z - 1]$$

$$- \frac{f}{c^2-a^2} \sin n\,(t-az).\ \sin n\,(a-c)\,z;$$

[1]) Przekształcenie to zawdzięczam życzliwości prof. Planck'a, który zakomunikował mi je w nader uprzejmym liście.

wprowadźmy rozwinięcia szeregowe:

$$\cos n(a-c)z-1=-\frac{1}{2}n^2(a-c)^2z^2+\ldots,$$

$$\sin n(a-c)z=n(a-c)z-\frac{1}{3!}n^3(a-c)^3z^3+\ldots,$$

podzielmy przez $(c+a)(c-a)$ i podstawimy $c=a$; wówczas wyraz zawierający $\cos n(t-az)$ wypadnie, i otrzymamy:

38 $$\varphi=F_1(t-az)+G(t+az)n+\frac{f}{2a}z.\sin n(t-az).$$

Możemy się przekonać łatwo, że całka ta istotnie czyni zadość równaniu różniczkowemu II. Podstawiając w 38. za f kolejno wartości ξ, η, λ, ρ z równań 17—20, otrzymamy rozwiązania dla sił elektrycznych i magnetycznych X, Y, L, M. Pierwsze dwa wyrazy w rozwiązaniu 38. czynią zadość równaniu zredukowanemu 23. (dla ośrodka spoczywającego), wyraz trzeci natomiast nie czyni mu zadość, lecz tylko równaniu niejednorodnemu II. (dla ośrodka drgającego); pierwsze dwa wyrazy dają więc fale elektromagnetyczne swobodne, wyraz trzeci natomiast odpowiada falom elektromagnetycznym wymuszonym, które są, jak widzimy, i w tym wypadku ($c=a$) nieuniknionym skutkiem drgań sprężystych eteru, skoro tylko siły N, Z nie są jednocześnie równe zeru.

Amplitudy sił elektrycznych i magnetycznych w fali wymuszonej są, według 38.:

39 $$\begin{cases} X_0=\frac{1}{2a}\xi.nz, & Y_0=\frac{1}{2a}\eta.nz, \\ L_0=\frac{1}{2a}\lambda.nz, & M_0=\frac{1}{2a}\rho.nz, \end{cases}$$

a więc proporcyonalne do częstości drgań sprężystych $\left(\frac{n}{2\pi}\right)$ ośrodka i do drogi przebytej z, podczas gdy dla $c \gtrless a$ amplitudy te były jednakowe dla wszystkich punktów ośrodka i zupełnie niezależne od częstości drgań sprężystych. Dla $z=0$ drgania elektromagnetyczne wymuszone znikają; własności ich są więc zupełnie niezależne od warunków granicznych dla $z=0$ i od przebiegu podtrzymywanych tamże zaburzeń elektromagnetycznych $\varphi_{z=0}(t)$, który wpływa li tylko na fale swobodne (F, G). Fale wymuszone powstają tuż przy płaszczyźnie $z=0$ i potężnieją w miarę posuwania się naprzód, proporcyonalnie do drogi przebytej, podczas gdy fale swobodne zachowują stałą amplitudę. Czę-

stość drgań i długość fal wymuszonych są równe częstości drgań i długości fal sprężystych; fazy wymuszonych drgań elektromagnetycznych i prędkości (α, β) drgań sprężystych różnią się od siebie o ćwierć okresu drgania; pierwsze bowiem są proporcyonalne do $\sin n(t-az)$, drugie do $\cos n(t-az)$.

Jeżeli drgania sprężyste ośrodka są złożone i dowolnie rozmieszczone, ze względu na zależność od z, możemy położyć:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \sum_i r_i \cos n_i (t - c_i z + \varepsilon_i), \\ \beta &= \sum_i s_i \cos n_i (t - c_i z + \varepsilon_i), \end{aligned}\right\} \qquad 40$$

gdzie r_i, s_i, n_i, c_i, ε_i oznaczają ilości stałe. Wówczas zamiast równania różniczkowego I. będziemy mieli:

$$\left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \varphi = \sum_i n_i^2 f_i \cos [n_i (t - c_i z) + n_i \varepsilon_i] \qquad \text{III}$$

i, zamiast 25, całkę ogólną:

$$\varphi = F(t-az) + G(t-az) + \sum_i \frac{f_i}{c_i^2 - a^2} \cos n_i (t - c_i z + \varepsilon_i), \qquad 41$$

gdzie za f_i należy podstawić, dla X, Y, L, M wartości ξ_i, η_i, λ_i, ρ_i z równań 17—20; mamy więc w tym razie cały szereg fal wymuszonych elektromagnetycznych, z których każda odpowiada pewnej fali sprężystej. Podobnie też, w wypadku krytycznym, dla $c_i = a$ mamy, zamiast 38, rozwiązanie:

$$\varphi = F_1 (t - az) + G(t - az) + \frac{z}{2a} \sum_i n_i f_i \sin [n_i (t - az) + n_i \varepsilon_i]. \qquad 42$$

Możemy więc np. rozwinąć funkcye wyrażające prędkości (α, β) drgań sprężystych ośrodka w szeregi Fourier'a i przystosować je do dowolnych i dowolnie rozmieszczonych stanów początkowych w różnych częściach ośrodka, a następnie według szematów 41 lub 42 znaleść odnośne rozwiązania ogólne dla fal elektromagnetycznych wymuszonych i dobrać funkcye wyrażające fale swobodne tak, aby w ostatecznem rozwiązaniu elektromagnetycznym jakoteż i mechanicznym warunkom początkowym i granicznym w danym ośrodku stało się zadość.

S. Jentys: Studya nad rozkładem i przyswajalnością związków azotowych w odchodach zwierzęcych, lex. 8°, str. 113, z 9 rycinami. Cena 1 złr. 25 ct.
— O wpływie tlenu na rozkład związków azotowych w odchodach zwierzęcych, lex. 8-o, str. 30. Cena 40 ct.
H. Kadyi: Przyczynki do anatomii porównawczej zwierząt domowych (z tablicą jedną i 2 rycinami) lex. 8° str 22. Cena 50 ct.
S. Kępiński: O funkcyach Fuchsa dwu zmiennych zespolonych, lex. 8-o, str. 11. Cena 20 ct.
K. Klecki: Badania doświadczalne nad sprawą wydzielania w jelicie cienkiem, lex. 8°. str. 55. Cena 60 ct.
K. Kostanecki: Badania nad zapłodnionemi jajkami jeżowców, lex. 8-o, str. 44. Z tablicą. Cena 60 ct.
M. Kowalewski: Studya helmintologiczne, lex. 8-o, Część I, z jedną tablicą, str. 19. Cena 30 ct. — Część II. Przyczynek do histologicznej budowy skóry niektórych przywr, z jedną tablicą i jedną ryciną w tekscie, str. 19. Cena 25 ct. — Część III. Bilharzia polonica sp. nov., z jedną tablicą, str. 30. Cena 40 ct. — Część IV. Bilharzia polonica sp. nov. Sprostowania i uzupełnienia. Z jedną tablicą, str. 12. Cena 20 ct.
J. Kowalski: O prawie zgodności termodynamicznej w zastosowaniu do roztworów potrójnych, lex. 8°, str. 5. Cena 10 ct.
W. Kretkowski: O pewnej tożsamości, lex. 8° str. 4. Cena 10 ct.
F. Kreutz: O przyczynie błękitnego zabarwienia soli kuchennej, lex. 8° str. 13. Cena 25 ct.
L. Marchlewski: Synteza cukru trzcinowego, lex. 8-o, str. 6. Cena 10 ct.
A. Mars: O złośliwym gruczolaku macicy (Adenoma destruens uteri) (z jedną tablicą) lex. 8° str. 15. Cena 50 ct.
A. Mars i J. Nowak: O budowie i rozwoju łożyska ludzkiego, lex. 8-o, str. 49. Z trzema tablicami. Cena 80 ct.
F. Mertens: Przyczynek do rachunku całkowego, lex. 8°, str. 14. Cena 20 ct.
— O zadaniu Malfattego, lex. 8°, str. 26. Cena 35 ct.
W. Natanson: Studya nad teoryą roztworów, lex. 8° str. 33. Cena 50 ct.
— O znaczeniu kinetycznem funkcyi dysypacyjnej, lex. 8°, str. 10. Cena 20 ct.
— O prawach zjawisk nieodwracalnych, lex. 8-o, str. 28. Cena 50 ct.
J. Niedźwiecki: Przyczynek do geologii pobrzeża karpackiego w Galicyi zachodniej, lex. 8°, str. 13. Cena 20 ct.
S. Niementowski: Syntezy związków chinazolinowych, lex. 8°, str. 15. Cena 25 ct.
— O utlenianiu związków chinazolinowych, lex. 8-o, str. 16. Cena 20 ct.
J. Nowak: Badania doświadczalne nad etiologią skrobiawicy, lex. 8-o, str. 35. Cena 50 ct.
— Dalsze badania nad budową i rozwojem łożyska ludzkiego, lex. 8-o, str. 32. Z dwiema tablicami. Cena 50 ct.
J. Nusbaum: Przyczynek do kwestyi powstawania śródbłonków i ciałek krwi, lex. 8°, str. 56, z 3 tablicami. Cena 1 złr.
— Lyssa i szczątki podjęzyka zwierząt mięsożernych, lex. 8-o, str. 21, z jedną tablicą podwójną. Cena 35 ct.
K. Olearski: Nowy sposób całkowania pewnych równań różniczkowych pierwszego rzędu o dwu zmiennych, lex 8° str. 11. Cena 20 ct.
K. Olszewski: Próba skroplenia helu (helium), lex. 8-o, str. 8. Cena 10 ct.
K. Olszewski i A. Witkowski: O własnościach optycznych ciekłego tlenu. Z 2 rycinami, lex 8° str. 4. Cena 10 ct.
B. Pawlewski: Z teoryi roztworów (z dwiema figurami w tekscie), lex. 8° str. 20. Cena 30 ct.
G. Piotrowski: O wahaniu wstecznem przy pobudzaniu różnych miejsc tego samego nerwu, lex. 8° str. 31. Cena 25 ct.
F. E. Polzeniusz: O działaniu chlorku benzoilowego na kwasy i bezwodniki kwasowe, lex. 8-o, str. 6. Cena 10 ct.
J. Prus: O ciałkach Russella, lex. 8-o, str. 18, z tablicą. Cena 40 ct.
J. Puzyna: O wartościach funkcyi analitycznej na okręgach spółśrodkowych z kołem zbieżności jej elementu, lex. 8° str. 51. Cena 65 ct.

M. Raciborski: Chromatofilia jąder worka zalążkowego, lex. 8° str. 20. Cena 30 ct.
— Przyczynek do morfologii jądra komórkowego nasion kiełkujących (z jedną tablicą). lex. 8° str. 11. Cena 20 ct.
— Cycadeoidea Niedzwiedzkii. Nov. Sp. (z dwiema tablicami), lex. 8° str. 10. Cena 25 ct.
— Elaioplasty liliowatych, lex. 8°, str. 22, z tablicą. Cena 40 ct.
— Flora kopalna glinek ogniotrwałych krakowskich; część I. — 4°, str. 101. z 22 tablicami. Cena 3 złr.
— Pseudogardneria, nowy rodzaj z rodziny Loganiaceae, lex. 8-o, str. 9, z ośmiu rysunkami w tekscie. Cena 20 ct.

K. Radziewanowski: Przyczynki do znajomości działania chlorku glinowego, lex. 8°, str. 11. Cena 20 ct.
— O zastosowaniu glinu metalicznego do syntez węglowodorów aromatycznych, lex. 8-o, str. 9. Cena 20 ct.

M. P. Rudzki: Przyczynek do teoryi fal wodnych niewirowych, lex. 8-o, str. 11. Cena 15 ct.

J. Schramm: O połączeniach styrolu z kwasem solnym i bromowodorowym, lex. 8° str. 6. Cena 10 ct.

M. Siedlecki: O budowie leukocytów oraz o podziale ich jąder u jaszczurów, lex. 8-o, str. 30. Z tablicą. Cena 50 ct.

L. Silberstein: Porównanie pola elektromagnetycznego z ośrodkiem sprężystym, lex. 8°, str. 9. Cena 15 ct.

J. A. Stodółkiewicz: Kilka uwag o czynniku całkującym równań różniczkowych, lex. 8°, str. 7. Cena 15 ct.

W. Syniewski: O metylowęglanach wielowartościowych fenolów, lex. 8-o, str. 5. Cena 10 ct.

J. Szyszyłowicz: Diagnoses plantarum novarum; pars I. lex. 8°, str. 25. Cena 30 ct.

L. Teichmann: Naczynia limfatyczne w słoniowacinie (Elephantiasis Arabum) 5 tablic in 4° w teczce, oraz tekst imp. 8° str. 51. Cena 3 złr.

L. Wachholz: O oznaczaniu wieku ze zwłok na podstawie kostnienia główki kości ramieniowej, lex. 8°, str. 44, z tablicą. Cena 65 ct.

D. Wierzbicki: Spostrzeżenia magnetyczne wykonane w zachodniej części W. X. Krakowskiego w roku 1891, lex. 8° str. 20. Cena 30 ct.

A Wierzejski: Rotatoria (Wrotki) Galicyi. Z 3 tablicami i 3 rycinami w tekscie. lex. 8° str. 106. Cena 1 złr. 25 ct.

A W. Witkowski: O własnościach termodynamicznych powietrza, lex. 8-o, str. 46. Z dwiema tablicami i 6 rysunkami. Cena 60 ct.

Wł. Zajączkowski: O inwolucyi punktów na liniach tworzących powierzchnię prostokreślnej skośnej, lex 8-o, str. 23, z figurą w tekscie. Cena 30 ct.

I. Zakrzewski: O zależności ciepła właściwego ciał stałych od temperatury, lex. 8° str. 16. Cena 30 ct.

R. Załoziecki: O terpenowych węglowodorach w nafc[illegible]ex. 8°, str. 13. Cena 20 ct.

„. Zanietowski: Poszukiwania nad zmianami elektrotonicznemi w pobudliwości nerwów, lex. 8-o, str 47. Z dwiema tablicami. Cena 70 ct.

K. Zorawski: O linii wskazującej krzywiznę powierzchni, lex. 8°, str. 16. Cena 25 ct.
— Iteracye i szeregi odwracające, lex. 8°, str. 10. Cena 20 ct.

Sprawozdania Komisyi fizyograficznej obejmujące pogląd na czynności dokonane w ciągu roku 1891 oraz materyały do fizyografii krajowej. Tom XXXI, 8-o, str. XXXIX, 60, 255 i 258, z 2-ma tablicami. Cena 4 złr.

Skład główny wydawnictw Akademii znajduje się w Księgarni Spółki wydawniczej Polskiej w Krakowie.