

509
XIV f

Ms. 47289

JAN NEP. FRANKE.

ZASADY OGÓLNE
MECHANIKI CIAŁ SZTYWNYCH

NA PODSTAWIE

SPÓŁRZĘDNYCH JEDNORODNYCH RUCHU I SIŁY.



KRAKÓW.

NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ.

1891.



Po 17289

JAN NEP. FRANKE.

ZASADY OGÓLNE
MECHANIKI CIAŁ SZTYWNYCH

NA PODSTAWIE

SPÓŁRZĘDNYCH JEDNORODNYCH RUCHU I SIŁY.

TOwarzystwo
BIBLIOTEKI POLSKIEJ
WE WROCLAWIE

5030
XIV



KRAKÓW.

NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ.

1891.

Osobne odbicie z Tomu XXIII. Rozpraw Wydziału matematyczno-przyrodniczego
Akademii Umiejętności w Krakowie.

B ₂ 58517
640332 II

B 17289



207

Zasady ogólne
mechaniki ciał sztywnych
na podstawie spólrzędnych jednorodnych ruchu i siły.

Napisał

JAN NEP. FRANKE.

Rzecz przedstawiona 20. Marca 1891 r.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

Zasady kinematyki i statyki.

§. 1.

Spólrzędne jednorodne ruchu i siły.

1. Między ruchem chwilowym ciała sztywnego a siłą, działającą na takie ciało, zachodzą pewne związki, z których drogą indukcyjną dochodzi się do ustanowienia pewnego rodzaju dwoistości między temi dwoma pojęciami zasadniczemi mechaniki. Ruch chwilowy ciała sztywnego, w jakikolwiek sposób wywołany, można jednym tylko sposobem sprowadzić do tak zwanego skrętu, to znaczy, do obrotu chwilowego około pewnej osi razem z chwilowym ruchem postępowym w kierunku tejże osi; a jeżeli ruch chwilowy ciała przedstawia się jako wynik ilu-
kolwiek ruchów chwilowych, w których ciało jednocześnie bierze udział, czyli jako wynik układu ruchów chwilowych, natenczas skręt jest naj-
ogólniejszą postacią typową, w której ruch wypadkowy daje się przed-
stawić. Chwilowy ruch postępowy ciała możemy, jak wiadomo, zastąpić

tak zwaną parą obrotów, t. j. dwoma obrotami chwilowemi około osi równoległych a o prędkościach kątowych równych, lecz mających kierunki wprost sobie przeciwne; płaszczyzna, przechodząca przez osi tych obrotów, jest prostopadła do kierunku ruchu postępowego, a moment pary obrotów jest równy prędkości tego ruchu. Na tej podstawie możemy powiedzieć, że każdy układ ruchów chwilowych ciała sztywnego można jednym tylko sposobem sprowadzić do ruchu obrotowego w połączeniu z parą obrotów, której płaszczyzna jest prostopadła do osi tego obrotu.

Jeżeli na ciało sztywne działa jakikolwiek układ sił, natenczas ten układ możemy jednym tylko sposobem sprowadzić do tak zwanego skretnika, t. j. do siły, działającej w pewnej linii prostej, w połączeniu z parą sił, której płaszczyzna jest prostopadła do tej prostej.

Pojęcie skrętu jako postaci typowej układu ruchów chwilowych, i pojęcie skretnika jako postaci typowej układu sił, ustanawia ścisły związek między ruchem ciała sztywnego a siłą, do niego przyłożoną. Ten związek uwydatniamy geometrycznie tym sposobem, że ruch chwilowy i siłę przedstawiamy za pomocą odcinków prostoliniowych. Długość, proporcjonalna względem prędkości kątowej ω obrotu chwilowego i odcięta na osi skrętu w pewnym kierunku umówionym, przedstawia geometrycznie obrót chwilowy; a inna długość, proporcjonalna względem prędkości v ruchu postępowego, lub — co na jedno wychodzi — względem momentu v pary obrotów, a odcięta również na osi skrętu według pewnej umowy, przedstawia ruch postępowy skrętu. Z tego się okazuje, że skręt chwilowy można przedstawić geometrycznie za pomocą dwu odcinków na jego osi. Przedstawivszy podobnie siłę P za pomocą odcinka, tudzież parę sił za pomocą drugiego odcinka, proporcjonalnego względem jej momentu μ i prostopadłego do jej płaszczyzny, otrzymamy dwa odcinki na osi skretnika, które przedstawiają geometrycznie ten skretnik.

Stosunek $\lambda = \frac{v}{\omega}$ będziemy nazywali parametrem skrętu, a sto-

sunek $\lambda = \frac{\mu}{P}$ nazwiemy podobnie parametrem skretnika. Jeżeli

zważymy, że ω jest równe stosunkowi prędkości dowolnego punktu obracającego się ciała do odległości tego punktu od osi obrotu, a μ jest iloczynem siły i długości, to okaże się, że parametr skrętu i parametr skretnika należy pojmować jako pewną długość. Niech ciało obraca się jednostajnie z prędkością kątową ω ; wtedy jeden obrót zostanie dokonany w czasie $\frac{2\pi}{\omega}$, a ciało posunie się jednocześnie o długość, ró-

wną $2\pi\lambda$ w kierunku osi skrętu. Z tego widzimy, że parametr skrętu jest proporcjonalny względem długości, o którą ciało posunęło się w kierunku osi skrętu po jednym obrocie około tejże osi.

2. Z określenia parametru okazuje się, że skręt możemy określić przez jego oś, parametr λ i prędkość kątową ω , a skrętnik przez jego oś (oś centralną układu sił), parametr λ i siłę P . Z tych sposobów określenia możemy skorzystać, aby dla skrętu i dla skrętnika utworzyć nowe pojęcie wspólne, którego elementami są: pewna prosta, przedstawiająca bądź oś skrętu, bądź oś skrętnika, i pewna długość, na tej prostej odcięta, i przedstawiająca parametr λ . Tak utworzonemu pojęciu dajemy nazwę śruby elementarnej lub krócej śruby; owa prosta przedstawiać będzie oś śruby, a długość λ , na tej osi odcięta, parametr śruby.

Znaczenie kinematyczne śruby, pojmowanej w powyższy sposób, jest bezpośrednio widoczne. Przedstawmy sobie śrubę materjalną z odpowiednią mutrą; natenczas ruch ciała sztywnego możemy przyrównać do ruchu śruby w mutrze. Tak samo jak śrubie w mutrze możemy nadawać rozmaite ruchy, lecz wszystkie o tymże samym kroku, tak około śruby elementarnej możemy ciało sztywne udzielać dowolnych skrętów chwilowych, lecz wszystkie o tymże samym parametrze, a do określenia pewnego skrętu żadanego potrzeba znać tylko odpowiednią prędkość kątową obrotu. Podobnie określimy skrętnik około śruby elementarnej przez wielkość odpowiedniej siły tego skrętnika.

Śruba elementarna może odpowiadać śrubie materjalnej bądź prawej, bądź lewej, a według tego możemy ustanowić regułę znaków. W tym celu przedstawmy sobie śrubę prawą (materjalną) w położeniu pionowym, natenczas obrotowi w prawo towarzyszy posuwanie się w górę, a obrotowi w lewo posuwanie się na dół; gdyby śruba była lewą, natenczas obrotowi w prawo towarzyszyłoby posuwanie się na dół, a obrotowi w lewo posuwanie się w górę. Według tego przyjmijmy, że śrubie elementarnej prawej odpowiada parametr dodatni, a śrubie lewej parametr ujemny; natenczas przy $\lambda > 0$ obadwa odcinki, przedstawiające ω i v , lub P i μ , będą miały tenże sam kierunek na osi śruby, a przy $\lambda < 0$ będą miały dwa kierunki, wprost sobie przeciwne.

Parametr śruby może przybierać wszelkie wartości rzeczywiste od $-\infty$ do $+\infty$. Około śruby o parametrze $\lambda = 0$ można ciało udzielić tylko samego ruchu obrotowego, a taka śruba może być tylko podstawą czystej siły o dowolnej wielkości, działającej w kierunku osi. Około śruby o parametrze $\lambda = \pm\infty$ może zachodzić tylko para obrotów, lub odpowiednio może działać tylko para sił o dowolnym momencie, mającym kierunek osi tej śruby.

Parametr śruby będziemy oznaczali przez λ , a w razie potrzeby przez l . Śrubę o parametrze λ , której osią jest prosta S , będziemy oznaczali symbolem (λ) lub także krócej przez λ .

3. Obierzmy w przestrzeni nieruchomy układ prostokątny osi współrzędnych i oznaczmy przez a, b, c dostawy kątów, które oś S śruby λ , wzięta w kierunku odciętego na niej parametru, tworzy z osiami współrzędnych, a przez α, β, γ momenty prostej S względem tychże osi, to jest wielkości, określone przez równania następujące:

$$\alpha = cy - bz, \quad \beta = az - cx, \quad \gamma = bx - ay, \quad (1)$$

w których x, y, z oznaczają współrzędne prostokątne dowolnego punktu tej prostej. Między współrzędnymi $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ prostej S zachodzą dwa związki:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 0. \quad (2)$$

Niech około śruby λ zachodzi skręt z prędkością kątową ω , a Ξ, H, Z, Λ, M, N niech oznaczają współrzędne prostokątne tego skrętu, natenczas

$$\Xi = a\omega, \quad H = b\omega, \quad Z = c\omega,$$

$$\Lambda = (\alpha + \lambda a)\omega, \quad M = (\beta + \lambda b)\omega, \quad N = (\gamma + \lambda c)\omega^1).$$

Jeżeli przyjmiemy

$$A = \alpha + \lambda a, \quad B = \beta + \lambda b, \quad C = \gamma + \lambda c, \quad (3)$$

natenczas otrzymamy:

$$\Xi = a\omega, \quad H = b\omega, \quad Z = c\omega, \quad \Lambda = A\omega, \quad M = B\omega, \quad N = C\omega. \quad (4)$$

Jeżeli około śruby działa skrętnik z siłą P , natenczas współrzędne prostokątne X, Y, Z, L, M, N tego skrętnika wyrażają się przez równania następujące:

$$X = aP, \quad Y = bP, \quad Z = cP, \quad L = AP, \quad M = BP, \quad N = CP. \quad (5)$$

Wielkości a, b, c, A, B, C mogą służyć do określenia śruby λ za pomocą danego układu prostokątnych osi współrzędnych, i z tego powodu będziemy je uważali jako współrzędne prostokątne śruby.

Jakoż z równań (3) wynika:

$$\alpha = A - \lambda a, \quad \beta = B - \lambda b, \quad \gamma = C - \lambda c, \quad (6)$$

¹⁾ Ob. J. N. Franke, *Mechanika teoretyczna*, Warszawa 1889, str. 83.

a stąd na podstawie drugiego równania (2):

$$(7) \quad \lambda = Aa + Bb + Cc.$$

Równania (6) i (7) pozwalają obliczyć momenty osi śruby i jej parametr, a ponieważ a , b , c określają kierunek osi, przeto śruba jest określona przez powyższe sześć wielkości, między którymi zachodzi tylko jeden związek, wyrażony przez pierwsze równanie (1). Śruba jest określona przez pięć wielkości niezależnych, a jej oś przez cztery wielkości niezależne. Z równań (4) i (5) okazuje się, że skręt, a tem samem odpowiednio i skrętnik, określa się przez sześć wielkości niezależnych.

Gdy w równaniach (4) przyjmujemy $\omega = 1$, a w równaniach (5) $P = 1$, natenczas otrzymamy współrzędne prostokątne odpowiedniej śruby. Możemy także powiedzieć, że śruba skrętu lub skrętnika jest określona przez stosunki między współrzędnymi prostokątnymi tego skrętu lub skrętnika, podczas gdy wartości bezwzględne tych współrzędnych określają sam skręt lub skrętnik. Mnożąc współrzędne śruby przez prędkość kątową skrętu lub wielkość siły skrętnika, otrzymamy odpowiednie współrzędne skrętu lub skrętnika.

4. Obierzmy w przestrzeni sześć śrub λ_i , określonych przez współrzędne prostokątne a_i , b_i , c_i , A_i , B_i , C_i ; $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; natenczas skręt o prędkości kątowej ω około śruby λ (a , b , c , A , B , C), czyli — jak krócej wyrazić się można — skręt ω około śruby λ , można w ogólności rozłożyć na sześć skrętów ω_i około powyższych śrub λ_i . Rozkład żądany polega na rozwiązaniu następującego układu równań liniowych względem niewiadomych ω_i :

$$(1) \quad \begin{aligned} \sum_1^6 a_i \omega_i &= a\omega, & \sum_1^6 b_i \omega_i &= b\omega, & \sum_1^6 c_i \omega_i &= c\omega, \\ \sum_1^6 A_i \omega_i &= A\omega, & \sum_1^6 B_i \omega_i &= B\omega, & \sum_1^6 C_i \omega_i &= C\omega. \end{aligned}$$

Jeżeli wyznacznik

$$(2) \quad R = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \end{vmatrix}$$

utworzony ze współrzędnych prostokątnych danych śrub λ_i , nie jest równy zeru, natenczas każdemu układowi wartości skończonych po prawych stronach równań (1) odpowiada układ wartości skończonych ω_i po lewych stronach tychże równań.

Wielkości ω_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), dające się obliczyć z równań (1), a przedstawiające prędkości kątowe sześciu skrętów około śrub danych, na które dany skręt można rozłożyć, będziemy nazywali współrzędnymi jednorodnymi skrętu danego względem układu owych sześciu śrub danych. Śruby dane, dla których wyznacznik R nie jest równy zeru, stanowią układ sześciu śrub współrzędnych. Gdyby około śruby λ działał skrętnik P (t. j. skrętnik z siłą P), natenczas sześć sił P_i , odpowiadających sześciu skrętnikom składowym około śrub współrzędnych, będzie przedstawiało współrzędne jednorodne skrętnika P .

Wielkości

$$p_1 = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{P_1}{P}, p_2 = \frac{\omega_2}{\omega} = \frac{P_2}{P}, \dots, p_6 = \frac{\omega_6}{\omega} = \frac{P_6}{P} \quad (3)$$

gdziemy nazywali współrzędnymi jednorodnymi śruby λ względem układu sześciu śrub współrzędnych. Każda ze współrzędnych jednorodnych śruby przedstawia odpowiednią współrzędną skrętu z prędkością kątową równą jedności, lub także odpowiednią współrzędną skrętnika z siłą równą jedności około tej śruby. Między sześcioma współrzędnymi p_i śruby λ a współrzędnymi ω_i skrętu z prędkością kątową ω lub współrzędnymi P_i skrętnika z siłą P około tej śruby zachodzą związki następujące:

$$\omega_i = p_i \omega, \quad P_i = p_i P; \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad (4)$$

z których okazuje się, że współrzędne ω_i lub P_i otrzymujemy ze współrzędnych śruby, mnożąc te ostatnie przez prędkość kątową skrętu, a odpowiednio przez wielkość siły skrętnika.

Współrzędne jednorodne śruby będziemy oznaczali przez p_i , a w razie potrzeby przez π_i .

Między sześcioma współrzędnymi jednorodnymi śruby zachodzi związek, który je sprowadza do pięciu wielkości niezależnych. Jakoż z pierwszych trzech równań (1) wynikają równania następujące:

$$\sum_1^6 a_i p_i = a, \quad \sum_1^6 b_i p_i = b, \quad \sum_1^6 c_i p_i = c, \quad (5)$$

a stąd związek szukany:

$$\sum_1^6 p_i^2 + 2 \sum_1^6 \sum_1^6 p_i p_k \cos (\lambda_i, \lambda_k) = 1, \quad (6)$$

w którym (λ_i, λ_k) oznacza kąt, który oś śruby λ_i , wzięta w kierunku parametru λ_i , tworzy z osią śruby λ_k ($i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), wziętą w kierunku parametru λ_k . Z ostatniego związku okazuje się, że śruba jest określona przez stosunki między jej współrzędnymi jednorodnymi.

Ponieważ skrętu około śruby współrzędnej λ_i nie można rozłożyć na skręty około pozostałych pięciu śrub współrzędnych, przeto współrzędne jednorodne śruby współrzędnej λ_i są: $p_i = 1$, a każda z pozostałych pięciu współrzędnych jest równa zeru.

Podzielmy równania (1) przez ω i wprowadźmy współrzędne p_i , natenczas otrzymamy:

$$(7) \quad \sum_1^6 a_i p_i = a, \quad \sum_1^6 b_i p_i = b, \quad \sum_1^6 c_i p_i = c,$$

$$\sum_1^6 A_i p_i = A, \quad \sum_1^6 B_i p_i = B, \quad \sum_1^6 C_i p_i = C.$$

Te równania pozwalają obliczyć współrzędne prostokątne śruby za pomocą jej współrzędnych jednorodnych, jeżeli znany współrzędne prostokątne śrub współrzędnych.

§. 2.

Wyznaczenie śruby za pomocą współrzędnych jednorodnych.

5. Niech około śruby λ' o współrzędnych prostokątnych a', b', c' , A', B', C' zachodzi skręt ω , i niech będzie dana prosta $(a'', b'', c'', A'', B'', C'')$: obliczmy moment μ skrętu danego względem tej prostej, t. j. sumę algebraiczną momentów trzech obrotów, stanowiących skręt, względem danej prostej. Moment obrotu ω względem tej prostej jest równy

$$\omega (a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' + a''\alpha' + b''\beta' + c''\gamma'),$$

gdzie $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ oznaczają współrzędne prostokątne osi śruby λ' ; moment pary obrotów $\lambda'\omega$ względem tej prostej jest równy rzutowi momentu $\lambda'\omega$ tej pary na tę prostą, wyraża się więc przez iloczyn

$$\lambda'\omega (a'a'' + b'b'' + c'c'').$$

Stąd wynika

$$(1) \quad \mu = \omega [a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' + a''\alpha' + b''\beta' + c''\gamma' + \lambda'(a'a'' + b'b'' + c'c'')].$$

Oznaczmy przez Δ najkrótszą wzajemną odległość osi śruby λ' i danej prostej, a przez φ kąt między temi prostymi, i przyjmijmy

$$m' = \Delta \sin \varphi = a'x'' + b'\beta'' + c'\gamma'' + a''x' + b''\beta' + c''\gamma',$$

gdzie m' oznacza tak zwany moment tych dwu prostych, natenczas

$$\mu = \omega (m' + \lambda' \cos \varphi). \quad (2)$$

6. Niech będą dane dwie śruby λ i λ' , których osi mają spółrzędne prostokątne $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ i $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$; niech nadto będzie dany układ sześciu śrub spółrzędnych λ_i , których osi są określone przez spółrzędne prostokątne $a_i, b_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, gdzie $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Około śruby λ niech zachodzi skręt ω , którego spółrzędne jednorodne względem układu śrub λ_i są ω_i , natenczas według (2) art. 5 go możemy obliczyć moment tego skrętu względem osi śruby λ' . Oznaczmy w tym celu przez m moment osi śruby λ względem osi śruby λ' , a przez (λ, λ') kąt, który tworzą te osi, wzięte w kierunkach odciętych na nich parametrów, natenczas moment szukany wyrazi się przez iloczyn

$$\omega [\lambda \cos (\lambda, \lambda') + m].$$

Obliczmy podobnie moment każdego ze skrętów składowych ω względem osi śruby λ' , natenczas

$$\omega_i [\lambda_i \cos (\lambda_i, \lambda') + m'_i]$$

przedstawiać będzie moment i -go skrętu składowego względem osi śruby λ' , jeżeli przez m'_i rozumieć będziemy moment tej osi względem osi i -tej śruby spółrzędnej λ , a przez (λ_i, λ') kąt, który tworzą te dwie proste. Ponieważ moment skrętu ω względem prostej dowolnej jest równy sumie algebraicznej momentów jego skrętów składowych względem tejże samej prostej, przeto otrzymujemy równanie

$$\omega [\lambda \cos (\lambda, \lambda') + m] = \sum \omega_i [\lambda_i \cos (\lambda_i, \lambda') + m'_i]. \quad (1)$$

Wiemy nadto, że rzut prostokątny prędkości kątowej ω skrętu około śruby λ na prostą dowolną jest równy sumie algebraicznej rzutów prostokątnych prędkości kątowych jego skrętów składowych na tę samą prostą, co się wyraża przez równanie

$$\omega \cos (\lambda, \lambda') = \sum \omega_i \cos (\lambda_i, \lambda'). \quad (2)$$

Pomnóżmy to równanie przez parametr λ' śruby λ' i dodajmy je następnie do (1), to otrzymamy:

$$(3) \quad \omega [(\lambda + \lambda') \cos(\lambda, \lambda') + m] = \sum_i \omega_i [(\lambda_i + \lambda') \cos(\lambda_i, \lambda') + m'_i].$$

Podzielmy to równanie przez ω i wprowadźmy współrzędne jednorodne p_i śruby λ względem przyjętego układu śrub współrzędnych λ_i , natenczas wyniknie równanie następujące:

$$(4) \quad (\lambda + \lambda') \cos(\lambda, \lambda') + m = \sum_i p_i [(\lambda_i + \lambda') \cos(\lambda_i, \lambda') + m'_i].$$

7. Wielkość $(\lambda + \lambda') \cos(\lambda, \lambda') + m$ jest zbudowana symetrycznie z elementów dwu śrub λ i λ' , a znaczenie kinematyczne tej wielkości zostało dostatecznie wyjaśnione przez postępowanie rachunkowe, z którego ona wynika. Z dalszych dochodzeń okaże się, że ta wielkość ma również ważne znaczenie dynamiczne i że ona nadaje się znakomicie do rozwiązywania tych zagadnień, w których ruch chwilowy i siłę przedstawiamy za pomocą współrzędnych jednorodnych. Z tego powodu oznaczmy wielkość powyższą osobnym symbolem, przyjmując w dalszym rachunku

$$(1) \quad 2\sigma_{\lambda\lambda'} = (\lambda + \lambda') \cos(\lambda, \lambda') + m,$$

a odpowiednio do tego znakowania:

$$(2) \quad 2\sigma'_i = (\lambda_i + \lambda') \cos(\lambda_i, \lambda') + m'_i.$$

Gdybyśmy postępowanie powyższe zastosowali do śruby λ' , otrzymalibyśmy następujące równanie:

$$(3) \quad (\lambda + \lambda') \cos(\lambda, \lambda') + m = \sum_i p'_i [(\lambda_i + \lambda) \cos(\lambda_i, \lambda) + m_i],$$

w którym p'_i oznaczają i -tą współrzędną jednorodną śruby λ' , a m_i moment osi śruby λ względem osi śruby współrzędnej λ_i . Przyjmijmy

$$(4) \quad 2\sigma_i = (\lambda_i + \lambda) \cos(\lambda_i, \lambda) + m_i,$$

natenczas równanie (4) art. 6-go napiszemy krócej

$$(5) \quad \sigma_{\lambda\lambda'} = \sum_i \sigma_i p_i,$$

a poprzedzające równanie (3):

$$(6) \quad \sigma_{\lambda\lambda'} = \sum_i \sigma_i p'_i,$$

skąd wynika związek następujący między współczynnikami σ_i , σ'_i i współrzednemi jednorodnemi p_i , p'_i jakichkolwiek dwu śrub λ i λ' względem sześciu śrub współrzednych:

$$\sum \sigma'_i p_i = \sum \sigma_i p'_i. \quad (7)$$

Niech śruby λ i λ' będą identyczne, natenczas $\lambda = \lambda'$, $\cos(\lambda, \lambda') = 1$, $m = 0$. Jeżeli w tym przypadku współczynnik $\sigma_{\lambda\lambda'}$ oznaczymy przez $\sigma_{\lambda\lambda}$, natenczas z (1) otrzymamy

$$\sigma_{\lambda\lambda} = \lambda; \quad (8)$$

ten współczynnik jest wtedy równy parametrowi śruby. Wprowadzamy to założenie w równanie (5), a wyniknie

$$\lambda = \sum \sigma_i p_i. \quad (9)$$

To równanie pozwala obliczyć parametr danej śruby jako funkcją dwulinijową i jednorodną jej współrzednych jednorodnych p_i i współczynników σ_i względem sześciu śrub współrzednych.

8. Podzielmy równanie (2) art. 6-go przez ω i wprowadźmy współrzedne jednorodne p' śruby λ , to wyniknie:

$$\cos(\lambda, \lambda') = \sum p_i \cos(\lambda_i, \lambda').$$

Postępując podobnie ze śrubą λ' , otrzymamy nowe równanie

$$\cos(\lambda', \lambda) = \sum p'_i \cos(\lambda, \lambda_i),$$

a stąd związek następujący między dwiema śrubami λ i λ' :

$$\sum p_i \cos(\lambda_i, \lambda') = \sum p'_i \cos(\lambda_i, \lambda). \quad (1)$$

Według wzorów powyższych mieć będziemy:

$$\cos(\lambda_i, \lambda') = p'_1 \cos(\lambda_i, \lambda_1) + p'_2 \cos(\lambda_i, \lambda_2) + \dots + p'_6 \cos(\lambda_i, \lambda_6);$$

a gdy tę wartość dla każdego wskaźnika i wstawimy w wyrażenie na $\cos(\lambda, \lambda')$, natenczas otrzymamy następujące dwa nowe wyrażenia dostawy kąta między osiami dwu śrub:

$$\begin{aligned} \cos(\lambda, \lambda') = & \\ = & p_1 [p'_1 \cos(\lambda_1, \lambda_1) + p'_2 \cos(\lambda_1, \lambda_2) + \dots + p'_6 \cos(\lambda_1, \lambda_6)] + \\ & + p_2 [p'_1 \cos(\lambda_2, \lambda_1) + p'_2 \cos(\lambda_2, \lambda_2) + \dots + p'_6 \cos(\lambda_2, \lambda_6)] + \dots \\ & + p_6 [p'_1 \cos(\lambda_6, \lambda_1) + p'_2 \cos(\lambda_6, \lambda_2) + \dots + p'_6 \cos(\lambda_6, \lambda_6)], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \cos (\lambda, \lambda') = & \\
 = p_1 [p_1 \cos (\lambda_1, \lambda_1) + p_2 \cos (\lambda_2, \lambda_1) + \dots + p_6 \cos (\lambda_6, \lambda_1)] + & \\
 + p_2 [p_1 \cos (\lambda_1, \lambda_2) + p_2 \cos (\lambda_2, \lambda_2) + \dots + p_6 \cos (\lambda_6, \lambda_2)] + \dots & \\
 + p_6 [p_1 \cos (\lambda_1, \lambda_6) + p_2 \cos (\lambda_2, \lambda_6) + \dots + p_6 \cos (\lambda_6, \lambda_6)]. &
 \end{aligned}$$

9. Ważne równanie (9) art. 7-go możemy wyprowadzić także innym sposobem. W tym celu rozłożmy skręt ω około śruby λ na sześć skrętów ω_i około śrub λ_i , i obliczmy moment tego skrętu względem jego własnej osi. Ponieważ moment samego obrotu jest równy zeru, a moment pary obrotów jest równy $\lambda\omega$, przeto $\lambda\omega$ przedstawia wartość momentu szukanego. Ten moment jest także równy sumie momentów skrętów składowych ω_i względem osi śruby λ , a ponieważ moment skrętu ω_i jest równy

$$\omega_i [\lambda_i \cos (\lambda_i, \lambda) + m_i],$$

przeto

$$\lambda\omega = \sum_i \omega_i [\lambda_i \cos (\lambda_i, \lambda) + m_i].$$

Rzucając prędkość kątową ω na oś śruby λ i czyniąc tożsamo z każdą prędkością składową ω_i , otrzymamy równanie

$$\omega = \sum_i \omega_i \cos (\lambda_i, \lambda).$$

Pomnóżmy to równanie przez λ i dodajmy je następnie do poprzedzającego, to wyniknie

$$2\lambda\omega = \sum_i \omega_i [(\lambda_i + \lambda) \cos (\lambda_i, \lambda) + m_i].$$

Dzieląc to równanie przez ω i wprowadzając współrzędne p , śruby λ , tudzież współczynniki σ_i , otrzymamy równanie szukane.

10. Niech na ciało sztywne działa skrętnik P około śruby (a, b, c, A, B, C) , a ciało niech skręca się chwilowo o kąt nieskończenie mały $\delta\varphi$ około śruby $\lambda': (a', b', c', A', B', C')$; mamy obliczyć odpowiednią pracę przygotowaną δT skrętnika, czyli — jak możemy się wyrazić — pracę przygotowaną skrętnika P około śruby λ względem skrętu $\delta\varphi$ około śruby λ' . Rozłożmy w tym celu skrętnik i skręt na elementy, odpowiadające układowi prostokątnemu osi współrzędnych, i niech X, Y, Z ,

L, M, N oznaczają współrzędne prostokątne skrętnika P , a $\delta\zeta, \delta\eta, \delta\zeta, \delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$ nieskończenie małe współrzędne skrętu $\delta\varphi$. Natenczas

$$\delta T = X.\delta\lambda + Y.\delta\mu + Z.\delta\nu + L.\delta\zeta + M.\delta\eta + N.\delta\zeta,$$

a ponieważ

$$X = aP, \quad Y = bP, \quad Z = cP, \quad L = AP, \quad M = BP, \quad N = CP,$$

$$\delta\zeta = a'.\delta\varphi, \quad \delta\eta = b'.\delta\varphi, \quad \delta\zeta = c'.\delta\varphi, \quad \delta\lambda = A'.\delta\varphi, \quad \delta\mu = B'.\delta\varphi, \quad \delta\nu = C'.\delta\varphi,$$

przeto

$$\delta T = (aA' + bB' + cC' + Aa' + Bb' + Cc') P.\delta\varphi. \quad (1)$$

Wyraziwszy A, B, C przez parametr i współrzędne osi śruby λ' zaś A', B', C' przez parametr i współrzędne osi śruby λ , i używszy znakowania art. 7-go, otrzymamy

$$\delta T = [(\lambda + \lambda') \cos(\lambda, \lambda') + m] P.\delta\varphi,$$

czyli

$$\delta T = 2\sigma_{\lambda\lambda'}. P.\delta\varphi. \quad (2)$$

Z tego równania okazuje się znaczenie dynamiczne współczynnika $2\sigma_{\lambda\lambda'}$, utworzonego z elementów dwu śrub i symetrycznego względem tychże elementów. Jeżeli około jednej z dwu śrub danych λ i λ' , działa skręt na ciało sztywne, skręcające się chwilowo około drugiej śruby, natenczas iloczyn tego współczynnika, siły skrętnika i odchylenia skrętu jest równy pracy przygotowanej skrętnika względem skrętu. Z powyższego zaś wywodu okazuje się, że praca pozostaje taż sama bez względu na to, czy śruba λ jest podstawą skrętnika P , a λ' podstawą skrętu $\delta\varphi$, czy też λ jest podstawą skrętu $\delta\varphi$, a λ' podstawą skrętnika P .

Z tego powodu wielkość $2\sigma_{\lambda\lambda'}$ nazywamy według Balla współczynnikiem przygotowanym dwu śrub λ i λ' . Mnożąc współczynnik przygotowany dwu śrub przez iloczyn $P.\delta\varphi$, otrzymamy odpowiednią pracę przygotowaną δT .

W równaniach art. 7-go wielkości 2σ , oznaczają współczynniki przygotowane śruby λ względem śrub współrzędnych λ_i , przy $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$: równania (5) i (6) art. 7-go pozwalają wyrazić współczynnik przygotowany dwu śrub przez współczynniki przygotowane tychże śrub i ich współrzędne jednorodne względem sześciu śrub współrzędnych, a równanie (9) pozwala obliczyć parametr śruby, jeżeli znamy jej współczynniki przygotowane i jej współrzędne jednorodne względem sześciu śrub.

11. Zastosujmy równanie (5) art. 7-go w ten sposób, że daną śrubę λ łączymy kolejno z każdą z sześciu śrub współrzędnych λ_i , aby obliczyć jej współczynnik przygotowany $2\sigma_i$ względem tejże śruby.

W celu otrzymania równań odpowiednich oznaczmy przez $2\sigma_{ik}$ współczynnik przygotowany śruby współrzędnej λ_i względem śruby współrzędnej λ_k , przyczem $\sigma_{ii} = \sigma_{ii}$, a według art. 7-go $\sigma_{ii} = \lambda_i$, natenczas wyniknie następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \sigma_{11} p_1 + \sigma_{21} p_2 + \sigma_{31} p_3 + \sigma_{41} p_4 + \sigma_{51} p_5 + \sigma_{61} p_6 \\
 \sigma_2 &= \sigma_{12} p_1 + \sigma_{22} p_2 + \sigma_{32} p_3 + \sigma_{42} p_4 + \sigma_{52} p_5 + \sigma_{62} p_6 \\
 \sigma_3 &= \sigma_{13} p_1 + \sigma_{23} p_2 + \sigma_{33} p_3 + \sigma_{43} p_4 + \sigma_{53} p_5 + \sigma_{63} p_6 \\
 \sigma_4 &= \sigma_{14} p_1 + \sigma_{24} p_2 + \sigma_{34} p_3 + \sigma_{44} p_4 + \sigma_{54} p_5 + \sigma_{64} p_6 \\
 \sigma_5 &= \sigma_{15} p_1 + \sigma_{25} p_2 + \sigma_{35} p_3 + \sigma_{45} p_4 + \sigma_{55} p_5 + \sigma_{65} p_6 \\
 \sigma_6 &= \sigma_{16} p_1 + \sigma_{26} p_2 + \sigma_{36} p_3 + \sigma_{46} p_4 + \sigma_{56} p_5 + \sigma_{66} p_6 .
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Te równania okazują, że, znając współczynniki przygotowane śrub współrzędnych względem siebie, można ze współrzędnych jednorodnych p_i danej śruby obliczyć jej współczynniki przygotowane względem tychże śrub; gdybyśmy w tych równaniach przyjęli współczynniki przygotowane $2\sigma_i$ jako wiadome, moglibyśmy z nich obliczyć współrzędne jednorodne p_i śruby odpowiedniej. Okazuje się zatem, że względem sześciu śrub współrzędnych każda śruba może być określona bądź przez wielkości p_i , które przyjmowaliśmy dotąd jako jej współrzędne, bądź też przez wielkości σ_i , które również możnaby przyjąć za współrzędne tej śruby.

Równania (1) uproszczą się znacznie, jeżeli przyjmiemy szczególnego rodzaju układ śrub współrzędnych, który Ball wprowadził do mechaniki.

Dwie śruby chwilowe, których współczynnik przygotowany jest równy zeru, nazywamy śrubami odwrotnemi. Wyrazimy współczynnik przygotowany dwu śrub według równania (1) art. 7-go, natenczas odwrotność wyrazi się przez następujące równanie warunkowe:

$$(\lambda + \lambda') \cos(\lambda, \lambda') + m = 0.
 \tag{2}$$

Ponieważ to równanie ustanawia tylko jeden związek między współrzędnymi śruby, przeto można wyznaczyć nieskończenie wiele śrub odwrotnych względem śruby danej. Owóż obierzmy tak sześć śrub współrzędnych, aby każda z nich była odwrotna względem każdej z pięciu śrub pozostałych; wówczas otrzymamy układ szczególny śrub współrzędnych, który nazwiemy układem śrub wzajemnie odwrotnych (krócej: układem wzajemnie odwrotnym). Dla takiego układu zachodzi 15 warunków $\sigma_{ik} = 0$, a ponieważ układ jest określony przez 30 wielkości niezależnych, przeto możemy nieskończenie wielu sposobami obrać tak sześć śrub, aby one stanowiły układ wzajemnie odwrotny.

Względem takiego układu śrub spółrzędnych równania (1) przybiorą postać następująca:

$$\sigma_1 = \lambda_1 p_1, \quad \sigma_2 = \lambda_2 p_2, \quad \dots, \quad \sigma_5 = \lambda_5 p_5, \quad \sigma_6 = \lambda_6 p_6, \quad (3)$$

z której okazuje się, że każda z sześciu spółrzędnych p_i śruby λ jest równa ilorazowi z podzielenia połowy jej spółczynnika przygotowanego względem śruby spółrzędnej przez parametr tejże śruby spółrzędnej.

Wyrażmy w równaniu (5) art. 7-go spółczynniki σ'_i śruby λ' przez spółrzędne p'_i tejże śruby według (3); natenczas otrzymamy następujące wyrażenie spółczynnika przygotowanego $2\sigma_{\lambda\lambda'}$ dwu śrub:

$$\sigma_{\lambda\lambda'} = \sum_1^6 \lambda p_i p'_i. \quad (4)$$

Wstawmy wartości (3) w równanie (9) art. 7-go, wówczas wyniknie parametr śruby:

$$\lambda = \sum_1^6 \lambda_i p_i^2. \quad (5)$$

Ostatnie dwa równania stosują się do przypadku, gdy śruby spółrzędne stanowią układ wzajemnie odwrotny.

Jeżeli osi dwu śrub λ i λ' są równoległe, natenczas $2\sigma_{\lambda\lambda'} = \lambda + \lambda'$. Wyrażmy $\sigma_{\lambda\lambda'}$ według (4), a parametry λ i λ' według (5), natenczas między takimi dwiema śrubami otrzymamy związek

$$\sum_1^6 \lambda_i (p_i - p'_i)^2 = 0, \quad (6)$$

który zachodzić będzie także w tym przypadku, gdy obie śruby mają oś spólną.

Według (4) warunek odwrotności dwu śrub λ i λ' dla sześciu śrub spółrzędnych, wzajemnie odwrotnych, wyrazi się przez równanie

$$\sum_1^6 \lambda_i p_i p'_i = 0, \quad (7)$$

a gdy wprowadzimy spółczynniki przygotowane $2\sigma_i$ i $2\sigma'_i$ tych śrub względem śrub spółrzędnych, to będziemy mogli odwrotność wyrazić przez jedno z dwu równań następujących:

$$\sum_1^6 \sigma_i p'_i = 0 \quad \text{lub} \quad \sum_1^6 \sigma'_i p_i = 0, \quad (8)$$

lub także przez równanie

$$\sum_1^6 \frac{\sigma_i \sigma'_i}{\lambda_i} = 0. \quad (9)$$

Niech śruba λ będzie podstawą nieskończenie małego skrętu z odchyleniem $\delta\varphi$, natenczas ten skręt możemy rozłożyć na sześć skrętów $\delta\varphi_i$ około sześciu śrub współrzędnych, wzajemnie odwrotnych, przy czem $\delta\varphi_i = p_i \delta\varphi$. Jeżeli śruba λ' jest podstawą skretnika o sile P , natenczas praca przygotowana δT tego skretnika względem skrętu powyższego będzie

$$\delta T = 2\sigma_{\lambda\lambda'} P \delta\varphi = 2P \delta\varphi \cdot \sum_1^6 \lambda_i p_i p'_i,$$

a gdy wprowadzimy $\delta\varphi_i$, otrzymamy

$$\delta T = 2P \cdot \sum_1^6 \lambda_i p'_i \delta\varphi_i.$$

Ponieważ Pp'_i przedstawia współrzędną jednorodną P_i skretnika P względem śruby współrzędnej λ_i , przeto

$$(10) \quad \delta T = 2 \sum_1^6 \lambda_i P_i \delta\varphi_i,$$

co wyraża pracę przygotowaną w funkcji współrzędnych skretnika i współrzędnych skrętu nieskończenie małych.

Z rachunku powyższego okazuje się, że sześć śrub wzajemnie odwrotnych nadaje się najdogodniej do wszelkiej rachuby, w której rozważamy współrzędne jednorodne danej śruby a tem samem współrzędne jednorodne skrętu lub skretnika. Z tego powodu będziemy takich układów używali jako podstawy rachunku, jeżeliby odmienne założenie nie było wyraźnie podane.

12. Zanim jednak powyższego układu szczególnego śrub współrzędnych użyjemy jako podstawy dalszych badań, należy odpowiedzieć na pytanie, czy sześć śrub wzajemnie odwrotnych ma zawsze takie parametry i takie położenie wzajemne, że każdy skręt dany można rozłożyć na skręty około tych śrub.

W tym celu obierzmy jakikolwiek układ sześciu śrub współrzędnych i oznaczmy przez ρ wyznacznik, utworzony ze współczynników przygotowanych tychże śrub, branych po dwie, a zatem wyznacznik

$$(1) \quad \rho = 2^6 \cdot \begin{vmatrix} \sigma_{111} & \sigma_{211} & \sigma_{311} & \sigma_{411} & \sigma_{511} & \sigma_{611} \\ \sigma_{121} & \sigma_{221} & \sigma_{321} & \sigma_{421} & \sigma_{521} & \sigma_{621} \\ \sigma_{131} & \sigma_{231} & \sigma_{331} & \sigma_{431} & \sigma_{531} & \sigma_{631} \\ \sigma_{141} & \sigma_{241} & \sigma_{341} & \sigma_{441} & \sigma_{541} & \sigma_{641} \\ \sigma_{151} & \sigma_{251} & \sigma_{351} & \sigma_{451} & \sigma_{551} & \sigma_{651} \\ \sigma_{161} & \sigma_{261} & \sigma_{361} & \sigma_{461} & \sigma_{561} & \sigma_{661} \end{vmatrix}.$$

Jeżeli $a_i, b_i, c_i, A_i, B_i, C_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) oznaczają współrzędne prostokątne tych śrub, natenczas według (1) art. 10-go:

$$2\sigma_{ik} = a_i A_k + b_i B_k + c_i C_k + A_i a_k + B_i b_k + C_i c_k. \quad (2)$$

Wstawmy te wartości w wyrażenie wyznacznika ρ , to otrzymamy

$$\rho = \begin{vmatrix} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \\ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 \\ A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \\ B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 \\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1, B_1, C_1, a_1, b_1, c_1 \\ A_2, B_2, C_2, a_2, b_2, c_2 \\ A_3, B_3, C_3, a_3, b_3, c_3 \\ A_4, B_4, C_4, a_4, b_4, c_4 \\ A_5, B_5, C_5, a_5, b_5, c_5 \\ A_6, B_6, C_6, a_6, b_6, c_6 \end{vmatrix},$$

czyli

$$\rho = - \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1 \\ a_2, b_2, c_2, A_2, B_2, C_2 \\ a_3, b_3, c_3, A_3, B_3, C_3 \\ a_4, b_4, c_4, A_4, B_4, C_4 \\ a_5, b_5, c_5, A_5, B_5, C_5 \\ a_6, b_6, c_6, A_6, B_6, C_6 \end{vmatrix}^2 = - R^2, \quad (2)$$

gdzie R jest wyznacznikiem, określonym przez równanie (2) art. 4-go.

Przyjmijmy teraz, że sześć śrub λ_i stanowi układ wzajemnie odwrotny, natenczas $\sigma_{ik} = 0$, $\sigma_{ii} = \lambda_i$, skąd wyniknie w tym przypadku

$$\rho = 2^6 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6. \quad (3)$$

Jeżeli iloczyn parametrów tych sześciu śrub nie jest równy zeru, to z równania (2) okazuje się, że wyznacznik R , utworzony ze współrzędnych prostokątnych tych śrub, nie będzie również posiadał wartości zera. A ponieważ ten warunek według art. 4-go jest konieczny i wystarczający, aby sześć śrub mogło stanowić układ śrub współrzędnych, przeto dochodzimy do wniosku ogólnego, że sześć śrub wzajemnie odwrotnych może stanowić układ śrub współrzędnych, jeżeli iloczyn parametrów tych śrub nie jest równy zeru. Około takich śrub nie można mieć ani sześciu skrętów, ani sześciu skrętników, któreby się nawzajem znosiły, a przeto każdy skręt lub skrętnik można rozłożyć na sześć skrętów lub skrętników około takich śrub.

które możemy także tak napisać :

$$\begin{aligned} \sum_1^6 a_i (\Omega_i - \omega p_i) &= 0, \quad \sum_1^6 b_i (\Omega_i - \omega p_i) = 0, \quad \sum_1^6 c_i (\Omega_i - \omega p_i) = 0, \\ \sum_1^6 A_i (\Omega_i - \omega p_i) &= 0, \quad \sum_1^6 B_i (\Omega_i - \omega p_i) = 0, \quad \sum_1^6 C_i (\Omega_i - \omega p_i) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

14. Ponieważ z założenia wyznacznik R nie jest równy zeru, przeto tylko wartości równe zeru niewiadomych czynią zadość tym równaniom ; otrzymamy więc :

$$p_1 = \frac{\Omega_1}{\omega}, \quad p_2 = \frac{\Omega_2}{\omega}, \quad \dots, \quad p_6 = \frac{\Omega_6}{\omega}. \quad (1)$$

Wstawmy te wartości w wiadome równanie warunkowe (6) artykułu 4-go, natenczas wyniknie :

$$\omega^2 = \sum_1^6 \Omega_i^2 + 2 \sum_1^6 \sum_1^6 \Omega_i \Omega_k \cos (\lambda_i, \lambda_k). \quad (2)$$

Jeżeli wartość ω , obliczoną z tego równania, wstawimy w równania (1), to otrzymamy spółrzędne jednorodne śruby skreću wypadkowego.

Niech λ oznacza parametr śruby skreću wypadkowego i przyjmijmy, że śruby spółrzędne stanowią układ wzajemnie odwrotny, natenczas otrzymamy według (1) :

$$\lambda \omega^2 = \sum_1^6 \lambda_i \Omega_i^2. \quad (3)$$

Wstawmy w to równanie wartości za Ω_i , tudzież parametry śrub skrećów składowych, wreszcie spółczynniki przygotowane tychże śrub, po dwie branych, według wzoru

$$\sigma_{\lambda^{(k)}} \lambda^{(l)} = \lambda_1 p_1^{(k)} p_1^{(l)} + \lambda_2 p_2^{(k)} p_2^{(l)} + \dots + \lambda_6 p_6^{(k)} p_6^{(l)},$$

rozumiejąc przez $2\sigma_{\lambda^{(k)}} \lambda^{(l)}$ spółczynnik przygotowany śruby $\lambda^{(k)}$ względem śruby $\lambda^{(l)}$, natenczas otrzymamy równanie następujące :

$$\lambda \omega^2 = \sum_{(k)} \lambda^{(k)} \omega^{(k)2} + 2 \sum_{(k)} \sum_{(l)} \sigma_{\lambda^{(k)}} \lambda^{(l)} \omega^{(k)} \omega^{(l)}, \quad (4)$$

które w związku z (2) pozwala także obliczyć parametr λ .

Pisząc równania (1) w postaci

$$\omega p_1 = \Omega_1, \quad \omega p_2 = \Omega_2, \quad \dots, \quad \omega p_6 = \Omega_6, \quad (5)$$

pomnóżmy je odpowiednio przez $\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \dots, \lambda_6 p_6$ i dodajmy iloczyny, to wyniknie równanie

$$(6) \quad \lambda \omega = \sigma_{\lambda\lambda'} \omega' + \sigma_{\lambda\lambda''} \omega'' + \dots + \sigma_{\lambda\lambda^{(n)}} \omega^{(n)},$$

które możemy także tak napisać:

$$(7) \quad \sigma_{\lambda\lambda} \omega = \sigma_{\lambda\lambda'} \omega' + \sigma_{\lambda\lambda''} \omega'' + \dots + \sigma_{\lambda\lambda^{(n)}} \omega^{(n)}.$$

Niech $2\sigma'_i, 2\sigma''_i, \dots, 2\sigma^{(n)}_i$ oznaczają współczynniki przygotowane śrub skrętów składowych, a $2\sigma_i$ współczynniki przygotowane śruby skrętu wypadkowego względem śrub współrzędnych, i połączmy

$$(8) \quad \begin{aligned} \Omega'_i &= \omega' \sigma'_i + \omega'' \sigma''_i + \dots + \omega^{(n)} \sigma^{(n)}_i \\ \Omega'_2 &= \omega' \sigma'_2 + \omega'' \sigma''_2 + \dots + \omega^{(n)} \sigma^{(n)}_2 \\ &\vdots \\ \Omega'_e &= \omega' \sigma'_e + \omega'' \sigma''_e + \dots + \omega^{(n)} \sigma^{(n)}_e, \end{aligned}$$

natenczas z równań (5) wyniknie:

$$(9) \quad \omega\sigma_1 = \Omega'_1, \quad \omega\sigma_2 = \Omega'_2, \quad \dots, \quad \omega\sigma_e = \Omega'_e.$$

Z równań (5) okazuje się, że każda współrzędna śruby skrętu wypadkowego wyraża się jako funkcja liniowa współrzędnych odpowiednich śrub składowych, a według (9) podobny związek zachodzi między współczynnikami przygotowanymi śruby wypadkowej a współczynnikami przygotowanymi śrub składowych względem śrub współrzędnych. Nakoniec wynika z (7), że parametr śruby skrętu wypadkowego można wyrazić jako funkcję liniową współczynników przygotowanych tej śruby względem śrub skrętów składowych.

Jeżeli skręty dane znoszą się, natenczas

$$(10) \quad \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \dots, \quad \Omega_e = 0,$$

a te równania wyrażają warunki znoszenia się danych skrętów, jakichkolwiek użylibyśmy śrub współrzędnych.

Rozumie się samo przez się, że wzory podane mogą być odpowiednio zastosowane do składu skrętników około śrub danych.

§. 4.

Kompleksy śrub.

15. Sześć śrub, dla których wyznacznik R , określony równaniem (2) art. 4go, nie jest równy zeru, ma takie położenie i takie pa-

rametry, że każdy skręt około jakiegokolwiek siódmej śruby można rozłożyć na skręty około tych sześciu śrub danych. Nawzajem przez odpowiedni dobór prędkości katowych można za pomocą sześciu śrub spółrzędnych utworzyć skręt około jakiegokolwiek śruby danej. Jakoż, aby za pomocą tych sześciu śrub utworzyć skręt około śruby λ , której spółrzędne mają wartości $p_1, p_2, \dots, p_6$, złożmy około śrub spółrzędnych o parametrach $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ skręty z prędkościami katowymi odpowiednio $p_1, p_2, \dots, p_6$; wtedy otrzymamy skręt z prędkością katową równą jedności około śruby λ , który właśnie określa tę śrubę. To postępowanie możemy także tak wyrazić, że za pomocą skrętów, których prędkości katowe są odpowiednio równe wielkościom $p_1, p_2, \dots, p_6$, utwarzamy śrubę o spółrzędnych $p_1, \dots, p_6$. Dając tym spółrzędnym wszelkie wartości rzeczywiste, zgodne z wiadomem równaniem warunkowem, możemy sposobem opisanym utworzyć każdą śrubę w przestrzeni.

Gdyby było danych n śrub, przyczem $n < 6$, około których nie można mieć ani n skrętów ani n skrętników, znoszących się nawzajem, natenczas przez odpowiedni dobór prędkości katowych można sposobem opisanym utworzyć z nich w ogólności nieskończenie wiele śrub innych. Atoli nie każda śruba w przestrzeni może być z nich utworzona, lecz tylko taka, około której skręt daje się rozłożyć na n skrętów około śrub danych.

Śrubami niezależnemi będziemy nazywali takich n śrub, przyczem $n < 6$, około których nie można podać ani n skrętów ani n skrętników, któreby znosiły się nawzajem. Komplexem śrub rzędu n -go nazywamy zbiór tych wszystkich śrub, które mogą być utworzone przez skład skrętów lub skrętników około n śrub niezależnych.

Według tego określenia wszystkie śruby w przestrzeni stanowią kompleks rzędu 6-go; a ponieważ śruba jest określona przez stosunki między jej spółrzędnymi, przeto kompleks śrub rzędu 6-go stanowi rozmaitość pięciokrotną, czyli w tym komplexie znajduje się ilość śrub nieskończenie wielka rzędu 5-go. Kompleks śrub rzędu n -go stanowi rozmaitość rzędu $(n-1)$ -go; ilość tych śrub jest nieskończenie wielka rzędu $(n-1)$ -go.

Dwie śruby określają kompleks rzędu 2-go; ponieważ śruby tego kompleksu stanowią rozmaitość rzędu 1-go, przeto ich osi tworzą powierzchnię prostolinijową. Ta powierzchnia jest znana pod nazwą cylindroidy.

16. Kompleksy śrub rozmaitych rzędów, powstające za pomocą składania skrętów około pewnych śrub niezależnych, mogą być utwarzane jeszcze innym sposobem, a mianowicie przez rozważanie śrub odwrotnych względem pewnych śrub niezależnych.

Ten nowy sposób utwarzania kompleksów śrub polega przedewszystkiem na twierdzeniu następującem: Śruby odwrotne względem jednej i tejże samej śruby — czyli względem kompleksu śrub rzędu pierwszego — tworzą kompleks rzędu piątego. Jakoż niech będzie dana śruba λ o spółrzędnych p_i , której spółczynniki przygotowane względem sześciu śrub spółrzędnych, wzajemnie odwrotnych, niech będą równe σ_i , natenczas można wyznaczyć nieskończenie wiele śrub odwrotnych względem λ . Niech $l', l'', l''', l^{IV}, l^V, l$ będzie sześć śrub, odwrotnych względem λ , których spółrzędne są odpowiednio $\pi'_i, \pi''_i, \pi'''_i, \pi^{IV}_i, \pi^V_i, \pi_i$, wtedy według (8) art. 11 go te spółrzędne czynią zadość następującym równaniom warunkowym:

$$\begin{aligned}\sigma_1 \pi'_1 + \sigma_2 \pi'_2 + \dots + \sigma_6 \pi'_6 &= 0 \\ \sigma_1 \pi''_1 + \sigma_2 \pi''_2 + \dots + \sigma_6 \pi''_6 &= 0 \\ \sigma_1 \pi'''_1 + \sigma_2 \pi'''_2 + \dots + \sigma_6 \pi'''_6 &= 0 \\ \sigma_1 \pi^{IV}_1 + \sigma_2 \pi^{IV}_2 + \dots + \sigma_6 \pi^{IV}_6 &= 0 \\ \sigma_1 \pi^V_1 + \sigma_2 \pi^V_2 + \dots + \sigma_6 \pi^V_6 &= 0 \\ \sigma_1 \pi_1 + \sigma_2 \pi_2 + \dots + \sigma_6 \pi_6 &= 0.\end{aligned}$$

Rugując z tych równań spółczynniki σ_i , otrzymamy

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \pi'_1 & \pi'_2 & \pi'_3 & \pi'_4 & \pi'_5 & \pi'_6 \\ \pi''_1 & \pi''_2 & \pi''_3 & \pi''_4 & \pi''_5 & \pi''_6 \\ \pi'''_1 & \pi'''_2 & \pi'''_3 & \pi'''_4 & \pi'''_5 & \pi'''_6 \\ \pi^{IV}_1 & \pi^{IV}_2 & \pi^{IV}_3 & \pi^{IV}_4 & \pi^{IV}_5 & \pi^{IV}_6 \\ \pi^V_1 & \pi^V_2 & \pi^V_3 & \pi^V_4 & \pi^V_5 & \pi^V_6 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 \end{vmatrix} = 0$$

jako związek, zachodzący między sześcioma śrubami, z których każda jest odwrotną względem jednej i tejże samej śruby. Ten związek wyraża jednak także, że około powyższych sześciu śrub można mieć sześć skrętów lub skrętników, znoszących się nawzajem. Jakoż wiadomo z art. 14-go, że skręty z prędkościami kątowymi $\omega', \omega'', \omega''', \omega^{IV}, \omega^V, \omega$ około śrub odpowiednio $l', l'', l''', l^{IV}, l^V, l$ znoszą się nawzajem, jeżeli między temi prędkościami a spółrzędnymi śrub zachodzą związki następujące:

$$\begin{aligned}
\omega' \pi_1' + \omega'' \pi_1'' + \omega''' \pi_1''' + \omega^{IV} \pi_1^{IV} + \omega^V \pi_1^V + \omega \pi_1 &= 0 \\
\omega' \pi_2' + & & & & & & + \omega \pi_2 &= 0 \\
\omega' \pi_3' + & & & & & & + \omega \pi_3 &= 0 \\
&\vdots & & & & & & \vdots \\
\omega' \pi_6' + \omega'' \pi_6'' + \omega''' \pi_6''' + \omega^{IV} \pi_6^{IV} + \omega^V \pi_6^V + \omega \pi_6 &= 0.
\end{aligned}$$

Rugując z tych równań prędkości kątowe, otrzymamy wyznacznik (1), w którym wiersze zamieniono na kolumny, skąd wynika, że około powyższych sześciu śrub można mieć tyleż skrętów, znoszących się nawzajem. Z tego wynika wniosek dalszy, że skręt około śruby l można rozłożyć na skręty około śrub $l', l'', l''', l^{IV}, l^V$, że zatem śruby, odwrotne względem λ , tworzą kompleks rzędu piątego.

17. Możemy teraz dowieść następującego twierdzenia ogólnego: Śruby, odwrotne względem n śrub niezależnych, przy czem $n \leq 5$, tworzą kompleks rzędu $(6-n)$ -go. Tego twierdzenia dowiedzimy tym sposobem, że, przyjmując prawdziwość jego dla $n-1$ śrub niezależnych, okażemy, iż ta prawdziwość zachodzić będzie dla n śrub niezależnych.

Przyjmijmy zatem $n-1$ śrub niezależnych $\lambda', \lambda'', \dots, \lambda^{(n-1)}$, natenczas śruby, które są oddzielnie odwrotne względem nich, tworzyć będą komplexy rzędu piątego, które oznaczymy odpowiednio przez $J', J'', \dots, J^{(n-1)}$, a śruby szukane, odwrotne względem każdej z tych śrub, będą wspólne powyższym $n-1$ komplexom. Według założenia między śrubami, wspólnymi tym komplexom, znajduje się $6-(n-1)$ śrub niezależnych, które oznaczamy przez $l_1, l_2, \dots, l_{6-(n-1)}$. Przydajmy do $(n-1)$ śrub danych $\lambda', \dots, \lambda^{(n-1)}$ jeszcze n -tą śrubę $\lambda^{(n)}$, całkiem dowolną i od nich niezależną, i niech $J^{(n)}$ oznacza odpowiadający tej śrubie kompleks rzędu piątego śrub odwrotnych. Przypuśćmy teraz, że śruby $l_1, \dots, l_{6-(n-1)}$ należą także do kompleksu $J^{(n)}$. Śruby $\lambda', \dots, \lambda^{(n)}$ razem z $l_1, \dots, l_{6-(n-1)}$ stanowią $n+6-(n-1)=7$ śrub, a zatem skrętnik o sile dowolnej P , działający około śruby $l_{6-(n-1)}$, można rozłożyć na 6 skrętników około śrub pozostałych. Ponieważ z założenia śruba $l_{6-(n-1)}$ jest odwrotna względem $\lambda^{(n)}$, przeto praca przygotowana skrętnika P względem skrętu około $\lambda^{(n)}$ jest równa zeru. Gdy P rozłożymy na skrętniki $P', P'', \dots, P^{(n)}$ odpowiednio około śrub $\lambda', \lambda'', \dots, \lambda^{(n)}$, tudzież na skrętniki $P_1, P_2, \dots, P_{6-(n-1)-1} = P_{6-n}$ odpowiednio około śrub $l_1, l_2, \dots, l_{6-(n-1)-1} = l_{6-n}$, natenczas suma prac przygotowanych tych skrętników składowych względem skrętu około $\lambda^{(n)}$ będzie równa zeru. Otrzymamy zatem równanie następujące:

$$P' \cdot \sigma_{\lambda' \lambda^{(n)}} + P'' \cdot \sigma_{\lambda'' \lambda^{(n)}} + \dots + P^{(n-1)} \sigma_{\lambda^{(n-1)} \lambda^{(n)}} + P^{(n)} \sigma_{\lambda^{(n)} \lambda^{(n)}} + \\ + P_1 \cdot \sigma_{l_1 \lambda^{(n)}} + P_2 \cdot \sigma_{l_2 \lambda^{(n)}} + \dots + P_{c-(n-1)} \sigma_{l_{c-(n-1)} \lambda^{(n)}} + P_{c-n} \cdot \sigma_{l_{c-n} \lambda^{(n)}} = 0.$$

Ponieważ jednak z założenia śruby $l_1, l_2, \dots, l_{c-n}$ są odwrotne względem $\lambda^{(n)}$, przeto

$$\sigma_{l_1 \lambda^{(n)}} = 0, \quad \sigma_{l_2 \lambda^{(n)}} = 0, \quad \dots, \quad \sigma_{l_{c-n} \lambda^{(n)}} = 0,$$

a zatem

$$P' \cdot \sigma_{\lambda' \lambda^{(n)}} + P'' \cdot \sigma_{\lambda'' \lambda^{(n)}} + \dots + P^{(n-1)} \sigma_{\lambda^{(n-1)} \lambda^{(n)}} + P^{(n)} \sigma_{\lambda^{(n)} \lambda^{(n)}} = 0.$$

Jeżeli zatem wszystkie $G-(n-1)$ śrub niezależnych $l_1, l_2, \dots, l_{c-(n-1)}$ spółnych kompleksom $J, J', \dots, J^{(n-1)}$, mają być także śrubami kompleksu $J^{(n)}$, natenczas między współczynnikami przygotowanymi śrub $\lambda', \lambda'', \dots, \lambda^{(n-1)}, \lambda^{(n)}$ względem śruby $\lambda^{(n)}$ będzie zachodził związek, wyrażony przez ostatnie równanie. Według równania (7) art. 14-go ten związek wyraża, że śruba $\lambda^{(n)}$ jest zależną od śrub $\lambda', \dots, \lambda^{(n-1)}$, t. j., że skrętnik około $\lambda^{(n)}$ można rozłożyć na skrętniki około $\lambda', \dots, \lambda^{(n-1)}$, co się sprzeciwia założeniu. Z tego wynika, że śruba $l_{c-(n-1)}$ nie może należeć do kompleksu $J^{(n)}$, jeżeli ma być niezależną od śrub $l_1, \dots, l_{c-n}$, że zatem komplexy $J, \dots, J^{(n-1)}, J^{(n)}$ mają tylko $G-n$ śrub spółnych niezależnych. Przyjawszy zatem prawdziwość twierdzenia dla $(n-1)$ śrub, przekonujemy się o jego prawdziwości dla n śrub; a ponieważ dowiedliśmy go bezpośrednio dla $n=1$, przeto twierdzenie jest prawdziwe dla każdego $n \leq 5$.

18. Twierdzenie, podane w art. poprzedzającym, pozwala właśnie utwarzać komplexy śrub nie na podstawie składu skrętów, lecz na podstawie rozważania odwrotności śrub. Między temi dwoma sposobami tworzenia kompleksów zachodzi ta różnica, że według sposobu pierwszego kompleks rzędu n -go jest określony przez n śrub niezależnych, według zaś drugiego przez $G-n$ śrub niezależnych. Gdyby $n=1$, a użylibyśmy sposobu drugiego, otrzymalibyśmy jedną śrubę, odwrotną względem pięciu śrub niezależnych.

Niech $\sigma_i, \sigma_i'', \dots, \sigma_i^{(n)}$ oznaczają współczynniki przygotowane n śrub niezależnych $\lambda', \dots, \lambda^{(n)}$ względem śrub spółrzędnych, stanowiących układ wzajemnie odwrotny, a π_i niech oznaczają spółrzędne śruby l_i odwrotnej względem tych śrub, natenczas

$$\begin{aligned}\sigma_1' \pi_1 + \sigma_2' \pi_2 + \dots + \sigma_6' \pi_6 &= 0 \\ \sigma_1'' \pi_1 + \sigma_2'' \pi_2 + \dots + \sigma_6'' \pi_6 &= 0 \\ \vdots & \\ \sigma_1^{(n)} \pi_1 + \sigma_2^{(n)} \pi_2 + \dots + \sigma_6^{(n)} \pi_6 &= 0.\end{aligned}$$

PomnóŹmy te równania odpowiednio przez współczynniki nieoznaczone $\mu', \mu'', \dots \mu^{(n)}$ i dodajmy iloczyny, to wyniknie

$$[\mu' \sigma_1' + \dots + \mu^{(n)} \sigma_1^{(n)}] \pi_1 + \dots + [\mu' \sigma_6' + \mu'' \sigma_6'' + \dots + \mu^{(n)} \sigma_6^{(n)}] \pi_6 = 0.$$

Z tego równania okazuje się, że śruba l jest odwrotną względem każdej śruby, której współczynniki przygotowane względem śrub spółrzednych wyrażają się przez funkcyje liniowe współczynników przygotowanych śrub $\lambda', \dots \lambda^{(n)}$. A że według art. 14-go skręt około każdej takiej śruby można rozłożyć na skręty około śrub danych $\lambda', \dots \lambda^{(n)}$, czyli, że każda taka śruba należy do kompleksu, który można utworzyć z tych n śrub przez składanie skrętów, przeto okazuje się, że śruba l jest odwrotna względem każdej śruby kompleksu, określonego przez śruby $\lambda', \dots \lambda^{(n)}$. Śruby l tworzą kompleks rzędu $(6-n)$ -go, a każda śruba tego kompleksu jest odwrotna względem każdej śruby λ kompleksu rzędu n -go, określonego przez śruby dane. Jeżeli takie dwa kompleksy śrub nazwiemy kompleksami wzajemnie odwrotnymi, to otrzymamy następujące twierdzenie nowe: Do każdego kompleksu śrub rzędu n -go, $n \leq 5$, należy kompleks odwrotny rzędu $(6-n)$ -go.

Z danych n śrub, $n \leq 5$, $\lambda', \dots \lambda^{(n)}$ można zatem utworzyć jednocześnie dwa kompleksy śrub, wykluczających się nawzajem. Jeden z tych kompleksów otrzymamy przez skład skrętów około śrub danych, drugi zaś przez rozważanie śrub odwrotnych; kompleks pierwszy będzie rzędu n -go, drugi rzędu $(6-n)$ -go, a każda śruba jednego kompleksu będzie odwrotna względem każdej śruby kompleksu drugiego.

19. Niech kompleks śrub rzędu n -go będzie określony (sposobem pierwszym) przez n śrub $\lambda', \dots \lambda^{(n)}$. Składając skręty około tych śrub z dowolnemi prędkościami kątowemi odpowiednio $\omega_1', \omega_1'', \dots \omega_1^{(n)}$, otrzymamy pewną śrubę λ_1 kompleksu; wyznaczmy dalej taką śrubę λ_2 , która jest zależną od n śrub danych i zarazem odwrotną względem λ_1 , natenczas między n odpowiedniami prędkościami kątowemi $\omega_2', \omega_2'', \dots \omega_2^{(n)}$ otrzymamy jeden związek liniowy i jednorodny, wynikający z odwrotności śruby λ_2 względem λ_1 , a zresztą te prędkości będą dowolne; wyznaczmy dalej śrubę λ_3 , zależną od n śrub danych i zarazem odwrotną względem λ_1 i λ_2 , wtedy między prędkościami kątowemi $\omega_3', \dots \omega_3^{(n)}$ za-

chodząc będą dwa związki, i t. d. aż wyznaczymy śrubę λ_n , zależną od n śrub danych i zarazem odwrotną względem śrub $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{n-1}$. Między prędkościami kątowymi $\omega'_1, \dots \omega_n^{(n)}$ zachodzić będzie $n-1$ związków liniowych i jednorodnych, wynikających z odwrotności śruby λ_n względem $\lambda_1, \dots \lambda_{n-1}$, skąd wynika, że śruba λ_n będzie dokładnie oznaczona. Tym sposobem w kompleksie śrub rzędu n -go, określonym przez śruby $\lambda', \dots \lambda^{(n)}$, otrzymamy n śrub $\lambda_1, \dots \lambda_n$, wzajemnie odwrotnych, a ponieważ te śruby są niezależne, przeto każdą śrubę kompleksu możemy otrzymać przez skład skrętów, bądź około n śrub pierwotnych $\lambda', \dots \lambda^{(n)}$, bądź około n śrub nowych $\lambda_1, \dots \lambda_n$, stanowiących układ wzajemnie odwrotny.

Niech kompleks rzędu n -go będzie określony (sposobem drugim) przez $6-n$ śrub $\lambda_1, \dots \lambda_{6-n}$, względem których szukamy śrub odwrotnych. Wyznaczmy dowolną śrubę l_1 , odwrotną względem danych; następnie wyznaczmy śrubę l_2 , odwrotną względem $l_1, \lambda_1, \dots \lambda_{6-n}$; dalej śrubę l_3 , odwrotną względem $l_1, l_2, \lambda_1, \dots \lambda_{6-n}$ i t. d. aż w końcu wypadnie wyznaczyć śrubę l_n , odwrotną względem śrub $l_1, l_2, \dots l_{n-1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{6-n}$. Śruba l_n ma być odwrotna względem $n-1+6-n=5$ śrub niezależnych, będzie zatem dokładnie oznaczona. Tym sposobem otrzymamy n śrub niezależnych $l_1, l_2, \dots l_n$, które mogą służyć do określenia kompleksu rzędu n -go sposobem pierwszym, zamiast $6-n$ śrub pierwotnych, które go określały sposobem drugim.

Okazuje się zatem, że kompleks śrub rzędu n -go można zawsze określić przez n śrub niezależnych, wzajemnie odwrotnych i że takie określenie kompleksu jest możliwe nieskończenie wielu sposobami. Podobnie, jak sześć śrub niezależnych i wzajemnie odwrotnych, uważanych za śruby współrzędne, służy do określenia każdej śruby w przestrzeni, tak n śrub niezależnych i wzajemnie odwrotnych służy do określenia tych śrub, które stanowią kompleks rzędu n -go.

20. Przyjmijmy zatem, że kompleks śrub rzędu n -go jest określony przez n śrub $\lambda', \dots \lambda^{(n)}$ wzajemnie odwrotnych, których współrzędne względem sześciu śrub wzajemnie odwrotnych niech będą $p_i, p_i'', \dots p_i^{(n)}$. Niech λ będzie dowolną śrubą kompleksu, natenczas jej współrzędne będą funkcjami liniowymi i jednorodnymi współrzędnych śrub określających, a zatem

$$(1) \quad \begin{aligned} p_1 &= \mu' p'_1 + \mu'' p''_1 + \dots + \mu^{(n)} p_i^{(n)} \\ p_2 &= \mu' p'_2 + \mu'' p''_2 + \dots + \mu^{(n)} p_i^{(n)} \\ &\vdots \\ p_n &= \mu' p'_n + \mu'' p''_n + \dots + \mu^{(n)} p_i^{(n)}. \end{aligned}$$

Niech $2\sigma_{\lambda\lambda'}, 2\sigma_{\lambda\lambda''}, \dots, 2\sigma_{\lambda\lambda^{(n)}}$ oznaczają współczynniki przygotowane śruby λ względem śrub odpowiednio $\lambda', \dots, \lambda^{(n)}$, natenczas

$$\sigma_{\lambda\lambda'} = \lambda_1 p_1 p_1' + \lambda_2 p_2 p_2' + \dots + \lambda_6 p_6 p_6'$$

i podobne wyrażenia otrzymamy dla współczynników pozostałych. Wstawiając w to równanie wartości p_i według (1) i uwzględniając wyrażenia wiadome parametrów śrub określających, tudzież ich odwrotność, mieć będziemy

$$\sigma_{\lambda\lambda'} = \mu^* \lambda', \quad \sigma_{\lambda\lambda''} = \mu'' \lambda'', \quad \dots, \quad \sigma_{\lambda\lambda^{(n)}} = \mu^{(n)} \lambda^{(n)}. \quad (2)$$

Ponieważ żaden ze współczynników $\mu', \dots, \mu^{(n)}$ nie jest równy zero, przeto współczynniki przygotowane śruby λ względem śrub $\lambda', \dots, \lambda^{(n)}$ nie będą w ogólności także równe zero, z czego wynika przede wszystkim, że w kompleksie śrub rzędu n -go nie znajduje się w ogólności więcej, jak n śrub wzajemnie odwrotnych. Kompleks śrub rzędu n -go zawiera w ogólności nieskończenie wiele układów po n śrub wzajemnie odwrotnych, atoli nie ma w nim $(n+1)$ śrub, które byłyby wzajemnie odwrotne.

21. Niech λ_{11} i λ_{12} oznaczają parametry dwu śrub kompleksu rzędu n -go, określonego przez śruby $\lambda', \dots, \lambda^{(n)}$, wzajemnie odwrotne; spółrzędne jednorodne tych śrub oznaczmy przez p_{i1} i p_{i2} ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$), obliczając je według wzorów

$$\begin{aligned} p_{i1} &= \mu_{11} p_i' + \mu_{21} p_i'' + \dots + \mu_{n1} p_i^{(n)} \\ p_{i2} &= \mu_{12} p_i' + \mu_{22} p_i'' + \dots + \mu_{n2} p_i^{(n)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Śrubie λ_{11} odpowiadają według tego znakowania współczynniki $\mu_{11}, \mu_{21}, \dots, \mu_{n1}$, a śrubie λ_{12} współczynniki $\mu_{12}, \mu_{22}, \dots, \mu_{n2}$, za pomocą których ze spółrzędnych n śrub określających można obliczyć spółrzędne tych dwu śrub.

Oznaczmy przez $2\sigma_{12}$ współczynnik przygotowany śruby λ_{11} względem λ_{12} , natenczas

$$\sigma_{12} = \lambda_1 p_{11} p_{12} + \lambda_2 p_{21} p_{22} + \dots + \lambda_6 p_{61} p_{62}.$$

Wstawmy w to wyrażenie wartości spółrzędnych p_{i1} i p_{i2} , uwzględnijmy wyrażenia parametrów śrub określających i ich wzajemną odwrotność, wtedy otrzymamy:

$$\sigma_{12} = \lambda^* \mu_{11} \mu_{12} + \lambda'' \mu_{21} \mu_{22} + \dots + \lambda^{(n)} \mu_{n1} \mu_{n2}. \quad (2)$$

Gdyby śruby λ_{11} i λ_{22} były identyczne, natenczas, jak wiadomo, $\sigma_{12} = \lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda$, a stąd

$$(3) \quad \lambda = \lambda' \mu_{11}^2 + \lambda'' \mu_{21}^2 + \dots + \lambda^{(n)} \mu_{n1}^2.$$

Z porównania dwu ostatnich równań z równaniami (4) i (5) art. 11-go okazuje się, że parametr śruby dowolnej, tudzież współczynnik przygotowany dwu śrub dowolnych kompleksu rzędu n -go, określonego przez n śrub wzajemnie odwrotnych, można obliczyć z parametrów tych n śrub za pomocą wyrażeń, podobnych do tych, które służyły do obliczenia wielkości powyższych dla jednej lub dla dwu śrub w tym przypadku, gdy sześć śrub spółrzednych stanowiło układ odwrotny. Z równań (1) okazuje się, że współczynniki $\mu_{11}, \mu_{21}, \dots, \mu_{n1}$, które służą do obliczenia spółrzednych jednorodnych śruby λ_{11} , ze spółrzednych śrub $\lambda', \dots, \lambda^{(n)}$, przedstawiają prędkości katowe skrętów odpowiednio około tych n śrub, których wypadkową jest skręt z prędkością katową równą jedności około śruby λ_{11} . Ponieważ sześć spółrzednych jednorodnych p_{1i} śruby λ_{11} ma podobne znaczenie względem sześciu śrub wzajemnie odwrotnych, przeto możemy n współczynników $\mu_{11}, \mu_{21}, \dots, \mu_{n1}$ uważać za spółrzedne jednorodne śruby w kompleksie rzędu n -go, one bowiem określają dokładnie tę śrubę, jeżeli znamy parametry śrub, kompleks określających. Wprowadziwszy pojęcie n spółrzednych śruby w kompleksie rzędu n -go, widzimy, że równania (2) i (3) odpowiadają zupełnie równaniom (4) i (5) art. 11-go tak pod względem budowy, jakoteż pod względem znaczenia wyrazów, w nie wchodzących.

Miedzy sześcioma spółrzednymi p_{1i} śruby λ_{11} zachodzi związek wiadomy

$$\sum p_{1i}^2 + 2 \sum \sum p_{1i} p_{1k} \cos (\lambda_i, \lambda_k) = 1.$$

Wstawmy w to równanie wartości (1) i uwzględnijmy wzór na dostawę kąta między osiami dwu śrub, podany w art. 8-ym, a otrzymamy

$$(4) \quad \sum \mu_{1i}^2 + 2 \sum \sum \mu_{1i} \mu_{1k} \cos (\lambda^{(i)}, \lambda^{(k)}) = 1.$$

To równanie wyraża jedyny związek, zachodzący między n spółrzednymi śruby w kompleksie rzędu n -go, z którego okazuje się, że między temi spółrzednymi jest $n-1$ wielkości niezależnych.

Z wywodu powyższego wypływa, że przez wprowadzenie śrub wzajemnie odwrotnych wszelkie badania, odnoszące się do kompleksu śrub, sprowadzają się do rachuby jednolitej a co do formy niezależnej od rzędu kompleksu.



§. 5.

Równowaga ciała sztywnego.

22. Ruch chwilowy ciała sztywnego jest dokładnie określony, jeżeli znamy śrubę λ , około której ciało skręca się w chwili rozważanej, tudzież odchylenie $\delta\varphi$ tego skrętu. Obracwszy sześć śrub spółrzędnych, rozłożmy skręt $\delta\varphi$ na sześć skrętów z odchyleniami odpowiednio $\delta\varphi_i$ około tych śrub, natenczas $\delta\varphi_i$ przedstawiają nieskończenie małe spółrzędne jednorodne ruchu chwilowego, a gdy p_i oznacza jedną ze spółrzędnych śruby λ , natenczas odpowiednia spółrzędna ruchu $\delta\varphi = p \delta\varphi$.

Jeżeli między sześcioma spółrzędnymi ruchu chwilowego, czyli — co na jedno wychodzi — między sześcioma spółrzędnymi odpowiedniej śruby chwilowej nie zachodzi żaden związek, wtedy ciało jest zupełnie swobodne, czyli — jak się wyrazić możemy — posiada swobodę rzędu szóstego. Jeżeli zaś między temi spółrzędnymi (ruchu lub śruby) zachodzą pewne związki, niezależne od sił, wtedy swoboda ciała jest ograniczona. Aby to ograniczenie swobody, a zatem także rząd swobody pozostałej dokładnie określić, zważmy, że przy stosowaniu zasady prac przygotowanych należy w ogólności uwzględniać tylko nieskończenie małe przesunięcia punktów rzędu pierwszego, odrzucając potęgi wyższe tychże przesunięć. Z tego wynika, że związki między spółrzędnymi śruby chwilowej, ograniczające swobodę ciała, będą wyrażone przez równania liniowe i jednorodne względem tych spółrzędnych, że zatem rząd swobody zależeć będzie tylko od ilości tych równań.

Jeżeli między spółrzędnymi p_i śruby zachodzi n związków liniowych i jednorodnych

$$\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \dots + \mu_6 p_6 = 0,$$

przyczem $n \leq 5$, natenczas swobodę ciała sztywnego określamy jako swobodę rzędu $(6-n)$ -go. Na podstawie takiego określenia swoboda ciała będzie tem większa, im mniej równań warunkowych zachodzi między powyższemi spółrzędnymi. Uważajmy współczynniki μ jako proporcjonalne względem spółrzędnych pewnej śruby, natenczas każde równanie warunkowe z osobna wyraża, że śruby chwilowe, około których ciało może się skręcać, są odwrotne względem pewnej śruby, a układ n równań warunkowych wyraża, że śruby chwilowe są odwrotne względem n śrub, czyli, że stanowią kompleks rzędu $(6-n)$ -go. Z tego się okazuje, że rząd swobody ciała sztywnego jest równy rzędowi kompleksu śrub, około których ciało może wykonywać skręty chwilowe.

Gdy ciało posiada nieograniczoną swobodę ruchu, natenczas kompleks śrub, około których może się skręcać, jest rzędu szóstego. Gdy ciało sztywne kręci się około punktu stałego lub posuwa się równolegle do płaszczyzny stałej, natenczas kompleks śrub, około których może się skręcać, jest rzędu trzeciego, a ciało posiada w skutek tego swobodę rzędu 3-go.

23. Na podstawie podanego określenia swobody ciała sztywnego możemy zasadę równowagi takiego ciała przy działaniu jakiegokolwiek sił wyrazić w następującem twierdzeniu ogólnem:

Jeżeli ciało sztywne posiada swobodę jakiegokolwiek rzędu, to dla równowagi sił przyłożonych potrzeba i wystarcza, żeby śruba skrętnika, równoważnego układowi tych sił, należała do kompleksu, odwrotnego względem kompleksu tych śrub, które określają swobodę ciała.

Prawdziwość tego twierdzenia, streszczającego całą statykę układów sztywnych, wynika bezpośrednio z pojęcia swobody takich układów i z pojęcia odwrotności dwu śrub.

Niech kompleks śrub rzędu $(6 - n)$ -go J_{6-n} określa kinematycznie swobodę ciała sztywnego, a J_n niech będzie odpowiednim kompleksem odwrotnym rzędu n -go, natenczas skrętnik o sile dowolnej, którego śruba należy do kompleksu J_n , nie wywrze żadnego wpływu na ruch ciała. Gdyby kompleks J_n określał swobodę ciała, toby skrętnik o sile dowolnej, którego śruba należy do kompleksu J_{6-n} , nie wywarł żadnego wpływu na ruch ciała.

Wszelkie poszukiwania, odnoszące się do równowagi sił, mają na celu wyznaczenie kompleksu śrub, odwrotnego względem pewnego kompleksu danego. W paragrafie poprzedzającym sprowadziliśmy te poszukiwania do postaci najprostszej w skutek określenia kompleksu przez śruby wzajemnie odwrotne. Na podstawie metody podanej można każde zagadnienie statyczne rozwiązać sposobem najprostszym. W zagadnieniach, rozwiązywanych w elementach statyki, komplekxy odpowiednie mają postaci najprostsze, a parametry śrub mają najczęściej wartość zero lub wartość nieskończenie wielką, w skutek czego można te zagadnienia rozwiązywać bez znajomości powyższego twierdzenia ogólnego.





