

Stanisław Heilpern

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów
Katedra Statystyki
stanislaw.heilpern@ue.wroc.pl

ZALEŻNOŚĆ – FAKTY I MITY

Streszczenie: Artykuł poświęcony jest wybranym zagadnieniom zależności zmiennych losowych, które można opisać za pomocą funkcji łączących (kopula). Opisano związek dwuwymiarowego rozkładu normalnego z gaussowską funkcją łączącą wraz z najczęściej stosowaną miarą zależności: współczynnikiem korelacji Pearsona. Wnioski odniesiono do przypadku wielowymiarowych rozkładów eliptycznych, w szczególności rozkładów normalnych. Zbadano także rozkład sumy zmiennych losowych pod względem najczęściej stosowanej miary ryzyka, jaką jest VaR. Pokazano, że największe wartości tej miary wcale nie muszą zachodzić dla ścisłej zależności ani dla niezależności.

Słowa kluczowe: wielowymiarowe rozkłady normalne, funkcje łączące.

Wprowadzenie

Obecnie coraz częściej w modelach związanych z finansami czy ubezpieczeniami rozpatruje się zależne procesy czy zmienne losowe [Denuit, Genest, Marceau, 1999; Embrechts, McNeil, Straumann, 2001; McNeil, Frey, Embrechts, 2005; Wang, 1999]. Praca poświęcona jest wybranym zagadnieniom dotyczącym zależności zmiennych losowych. Przedstawiono w niej pewne fakty, które w pierwszym momencie mogą się kłócić z intuicją, z pewnymi ustalonymi poglądami związanymi z wielowymiarowymi rozkładami zmiennych losowych. Fakty te dotyczą wielowymiarowego rozkładu normalnego oraz najczęściej stosowanych w praktyce miar zależności i ryzyka: współczynnika korelacji Pearsona i wartości narażonej na ryzyko VaR.

Strukturę zależności zmiennych losowych $X_1, \dots, X_n$ można opisać za pomocą funkcji łączących (*kopula*). Funkcja łącząca C jest łącznikiem między dystrybuantami brzegowymi $F_i(x)$ zmiennych X_i a dystrybuantą $F(x_1, \dots, x_n)$ rozkładu łącznego [Heilpern, 2007; Nelsen, 1999]:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (1)$$

Funkcja łącząca nie zależy od rozkładów brzegowych. Jest ona dystrybuantą rozkładu łącznego na $[0, 1]^n$, którego rozkłady brzegowe mają rozkład jednostajny. Gęstość f rozkładu łącznego określona jest wzorem:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))f_1(x_1) \dots f_n(x_n),$$

gdzie c jest gęstością funkcji łączącej C , a f_i gęstością zmiennej losowej X_i .

Niezależności odpowiada funkcja łącząca $\Pi(u_1, \dots, u_n) = u_1 \cdot \dots \cdot u_n$, a ścisłej dodatniej zależności (współmonotoniczności) funkcja $M(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n)$. Oznaczmy symbolem $\mathcal{F}(F_1, \dots, F_n)$ zbiór wszystkich dystrybuant łącznych o tych samych dystrybuantach brzegowych F_i . Jest to tzw. klasa Frecheta–Hoeffdinga. Dla każdej dystrybuanty $F \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_n)$ zachodzą tzw. nierówności Frecheta [Nelsen, 1999]:

$$\max\{F_1(x) + \dots + F_n(x) - n + 1, 0\} \leq F(x, y) \leq \min\{F_1(x), \dots, F_n(x)\}.$$

Funkcja $\max\{F_1(x) + \dots + F_n(x) - n + 1, 0\}$ dla $n > 2$ nie musi być dystrybuantą.

W przypadku dwuwymiarowym $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ jest funkcją łączącą odpowiadającą ścisłej, ujemnej zależności (przeciwmonotoniczności). Zmienne losowe X i Y są współmonotoniczne, gdy $Y = F_Y^{-1}(F_X(X))$ i przeciwmonotoniczne, gdy $Y = F_Y^{-1}(1 - F_X(X))$.

W pracy będziemy wykorzystywać gaussowską funkcję łączącą określoną wzorem:

$$C_{\mathbf{R}}^G(u_1, \dots, u_n) = \Phi_{\mathbf{R}}^{(n)}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

gdzie $\Phi_{\mathbf{R}}^{(n)}$ dystrybuanta n -wymiarowego standardowego rozkładu normalnego o macierzy korelacji $\mathbf{R}$, a Φ jest dystrybuantą jednowymiarowego, standardowego rozkładu normalnego.

Punkt 1 poświęcony jest dwuwymiarowemu rozkładowi normalnemu. Pokażemy, że jest on ściśle związany z gaussowską funkcją łączącą. Następnie omówimy najczęściej stosowaną miarę zależności: współczynnik korelacji Pearsona. Pokażemy jego wady: zależność od rozkładów brzegowych, brak niezmienniczości względem rosnących przekształceń oraz fakt, że dla ustalonych rozkładów brzegowych nie muszą być osiągalne wszystkie możliwe wartości tego współczynnika. W przypadku wielowymiarowych rozkładów eliptycznych, np. normalnych, współczynnik korelacji Pearsona nie ma tych wad. Na zakończenie badamy rozkład sumy zmiennych losowych pod względem najczęściej stosowanej miary ryzyka, jaką jest VaR. Pokażemy, że największe wartości tej miary wcale nie muszą zachodzić dla ścisłej zależności ani dla niezależności. Niestety, z takim poglądem można się niekiedy spotkać na wystąpieniach konferencyjnych czy w publikacjach związanych z analizą portfelową.

1. Rozkład normalny

W dalszych rozważaniach będziemy jedynie rozpatrywać dwuwymiarowy, standardowy rozkład normalny. Jego gęstość określona jest wzorem [Wang, 1999]:

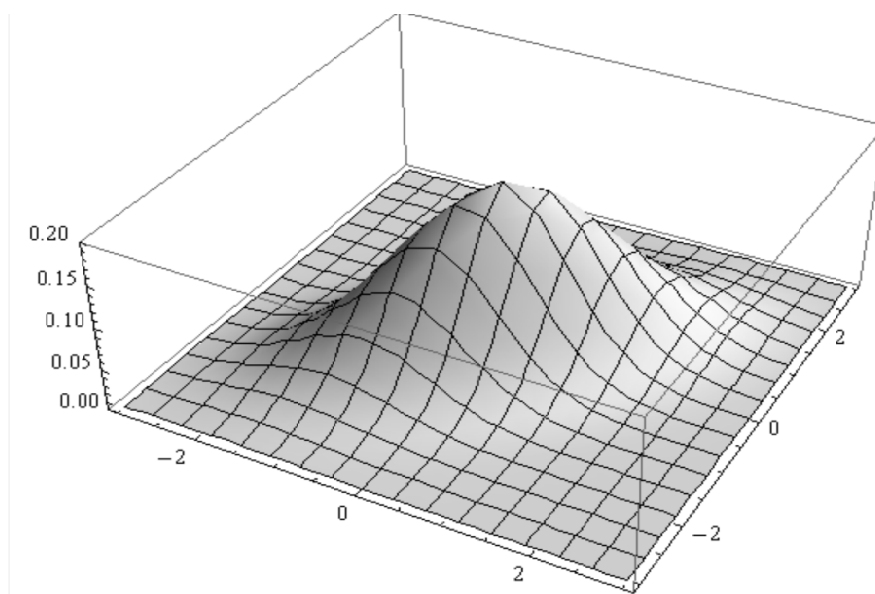
$$\phi_r^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2rxy + y^2}{2(1-r)^2}\right),$$

a macierz korelacji przyjmuje postać:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}.$$

Dwuwymiarowy, standardowy rozkład normalny zależy więc jedynie od jednego parametru r . Wykres gęstości tego rozkładu dla $r = 0,6$ przedstawiony jest na rys. 1.

Brzegowe rozkłady wielowymiarowego rozkładu normalnego mają również rozkład normalny. Niestety, z faktu, że rozkłady brzegowe są normalne wcale nie musi wynikać, że rozkład łączny jest wielowymiarowym rozkładem normalnym. Zachodzi tak jedynie, gdy struktura zależności między rozkładami brzegowymi jest opisana gaussowską funkcją łączącą. W przypadku gdy struktura zależności zadana jest za pomocą innych funkcji łączących, otrzymujemy inne niż normalne wielowymiarowe rozkłady. Nawet istotnie różne od wielowymiarowego rozkładu normalnego.



Rys. 1. Wykres dwuwymiarowego rozkładu normalnego

Źródło: Opracowanie własne.

Przykład 1

- a. Niech struktura zależności zachodzącej między dwoma zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym opisana jest funkcją łączącą postaci:

$$C_{f,g}(u,v) = uv + \int_0^u f(t)dt \int_0^v g(t)dt,$$

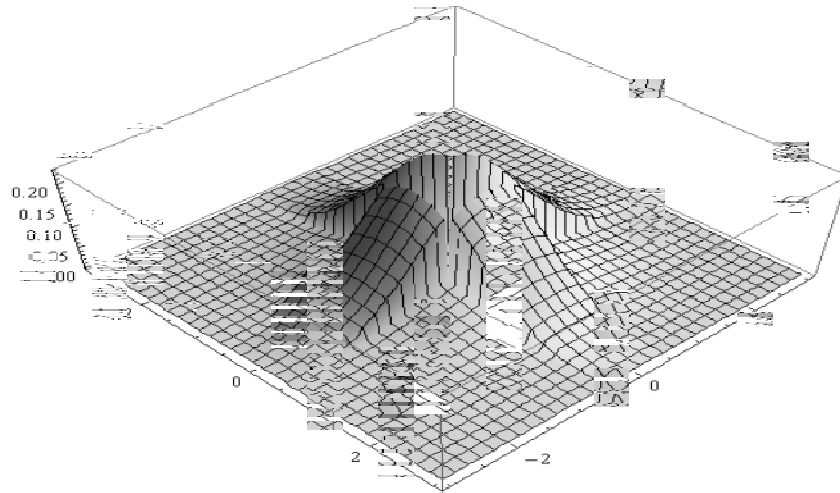
gdzie funkcje $f(t)$ oraz $g(t)$ zadane są wzorami [Embrechts, McNeil, Straumann, 2001]:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbf{1}_{(0,3;0,7)}(t) - \frac{2}{3} \mathbf{1}_{(0,3;0,7)^c}(t), \\ g(t) &= -\mathbf{1}_{(0,3;0,7)}(t) + \frac{2}{3} \mathbf{1}_{(0,3;0,7)^c}(t), \end{aligned}$$

a $\mathbf{1}_A(t)$ jest indykátorem zbioru A . Wtedy dystrybuanta otrzymanego rozkładu łącznego opisana jest wzorem:

$$F(x,y) = C_{fg}(\Phi(x), \Phi(y)).$$

Rysunek 2 przedstawia gęstość tego rozkładu.



Rys. 2. Gęstość rozkładu łącznego z przykładu 1a

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Embrechts, McNeil, Straumann].

- b. Przykład singularnego rozkładu łącznego o brzegowych rozkładach normalnych [Nelsen, 1999].

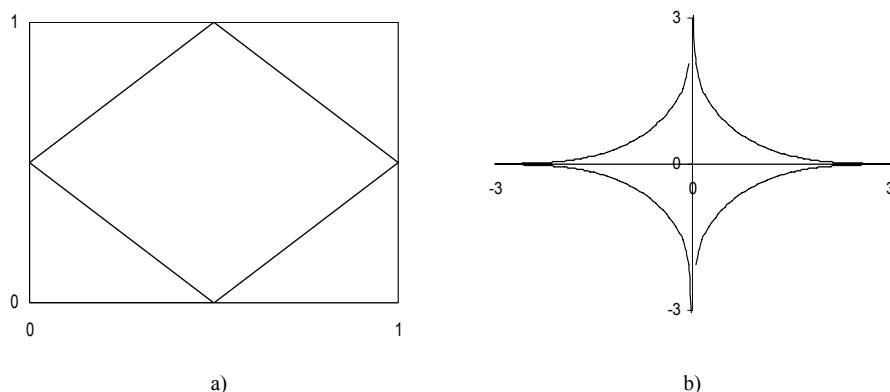
Niech $C(u, v)$ będzie funkcją łączącą będącą dystrybuantą rozkładu jednostajnego skupionego na brzegu kwadratu utworzonego przez wykresy linii $v = u + 0,5$ i $v = -u + 0,5$ dla $0 \leq u \leq 0,5$ oraz $v = u - 0,5$ i $v = -u + 1,5$ dla $0,5 \leq u \leq 1$ (rys. 3a). Wtedy rozkład łączny z dystrybuantą opisaną wzorem:

$$F(x, y) = C(\Phi(x), \Phi(y))$$

skupiony jest na krzywych określonych równaniem (rys. 3b):

$$|\Phi(x) - 0,5| + |\Phi(y) - 0,5| = 0,5.$$

Z drugiej strony, sama gaussowska funkcja łącząca nie wyznacza nam wielowymiarowego rozkładu normalnego. Wstawiając do wzoru (1) gaussowską funkcję łączącą oraz inne niż normalne brzegowe dystrybuanty, nie otrzymamy dystrybuanty wielowymiarowego rozkładu normalnego.



Rys. 3. Krzywe, na których skupiona jest funkcja łącząca (a) oraz rozkład łączny (b) z przykładu 1b

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Nelsen, 1999].

Przykład 2. Rozpatrzmy dwuwymiarowy rozkład o dystrybuancie:

$$F(x, y) = C_{0,6}^G(H(x), H(y)),$$

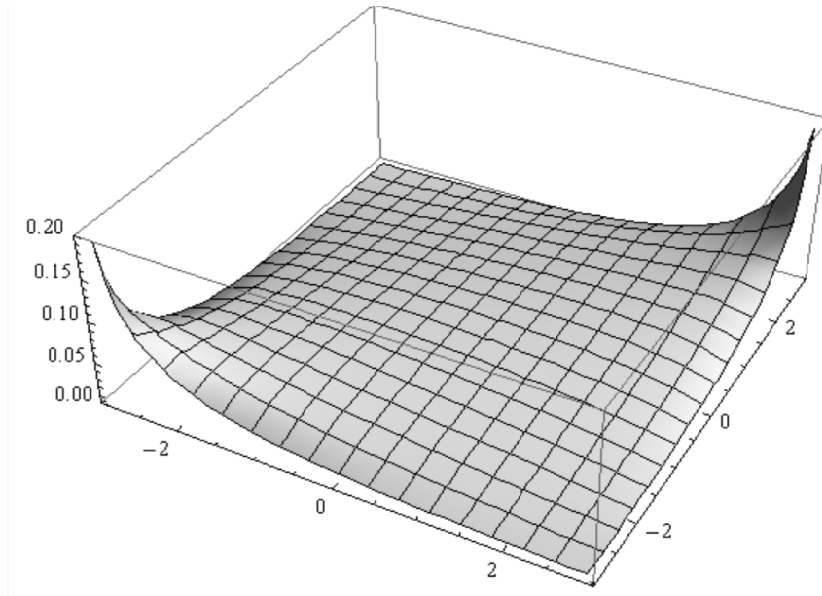
gdzie $H(x)$ jest dystrybuantą rozkładu jednostajnego na odcinku $[-3, 3]$. Na rys. 4 przedstawiona jest gęstość $f(x, y)$ tego rozkładu. Widzimy, że wykres ten istotnie różni się od wykresu gęstości dwuwymiarowego rozkładu normalnego (rys. 1). W punktach $(-3, -3)$ oraz $(3, 3)$ graniczna wartość gęstości jest równa nieskończoności.

Gęstość $f(x, y)$ z przykładu 2 została wyznaczona z następującego wzoru:

$$f(x, y) = c_{0,6}^G(H(x), H(y))h(x)h(y),$$

gdzie $h(x)$ gęstością rozkładu jednostajnego na $[-3, 3]$. Natomiast gęstość gaussowskiej funkcji łączącej c_r^G możemy obliczyć korzystając z zależności:

$$c_r^G(\Phi(x), \Phi(y)) = \frac{\phi_r^{(2)}(x, y)}{\phi(x)\phi(y)}.$$



Rys. 4. Wykres gęstości rozkładu łącznego dwóch rozkładów jednostajnych o strukturze zależności wyznaczonej przez gaussowską funkcję łączącą

Źródło: Opracowanie własne.

2. Miary zależności

Najczęściej stosowaną miarą zależności jest współczynnik korelacji Pearsona r określony wzorem:

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{s_X s_Y},$$

gdzie $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY$ jest kowariancją zmiennych X i Y , a s_X jest odchyleniem standardowym zmiennej X . Należy jednak pamiętać, że jest on jedynie miarą zależności liniowej. Nie jest on niezmienniczy ze względu na rosnące przekształcenia. Przykładowo zachodzi zależność [Embrechts, McNeil, Straumann, 2001]:

$$r(\Phi(X), \Phi(Y)) = \frac{\pi}{6} \arcsin\left(\frac{r(X, Y)}{2}\right).$$

Współczynnik korelacji Pearsona jest jedynie niezmienniczy ze względu na rosnące przekształcenia liniowe, tzn. dla $a, c > 0$ zachodzi zależność:

$$r(aX + b, cY + d) = r(X, Y).$$

Kowariancję można zapisać w języku funkcji łączących wzorem [Embrechts, McNeil, Straumann, 2001]:

$$\text{cov}(X, Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} (C(F_X(x), F_Y(y)) - \Pi(F_X(x), F_Y(y))) dx dy.$$

Widzimy, że na wielkość kowariancji, jak i współczynnika korelacji Pearsona r wpływa nie tylko funkcja łącząca, ale i dystrybuanty rozkładów brzegowych. Natomiast inne współczynniki korelacji: Kendalla τ i Spearmana ρ są jednoznacznie wyznaczone przez funkcje łączące [Embrechts, McNeil, Straumann, 2001]:

$$\tau(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1,$$

$$\rho(X, Y) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dudv.$$

Należy też pamiętać, że gdy wariancje nie istnieją, to nie można wyznaczyć współczynnika korelacji Pearsona r . Ponadto dla ustalonych rozkładów brzegowych X i Y nie wszystkie wartości współczynnika korelacji Pearsona r są osiągalne dla wszystkich możliwych rozkładów łącznych, czyli elementów rodziny $\mathcal{F}(F_X, F_Y)$. Mówi o tym poniższe twierdzenie pochodzące od Höffdinga i Frecheta.

Twierdzenie 1 [Embrechts, McNeil, Straumann, 2001]. Jeżeli X, Y są zmiennymi losowymi o dowolnej strukturze zależności z dystrybuantami F_X, F_Y oraz $0 < \sigma_X < \infty, 0 < \sigma_Y < \infty$, to:

- a. Zbiór wszystkich możliwych wartości współczynnika korelacji Pearsona jest domkniętym przedziałem $[r_{\min}, r_{\max}]$ oraz $r_{\min} < 0 < r_{\max}$.
- b. Najmniejszą wartość współczynnika korelacji $r_{\min}$ otrzymujemy wtedy i tylko wtedy, gdy zmienne X, Y są przeciwno monotoniczne, a największą $r_{\max}$ dla współmonotonicznych.
- c. $r_{\min} = -1$ wtedy i tylko wtedy, gdy zmienne $X, -Y$ mają rozkłady tego samego typu. Natomiast $r_{\max} = 1$, gdy X, Y mają rozkłady tego samego typu.
- d. Gdy $\sup\{x: F_X(x) < 1\} = \sup\{x: F_Y(x) < 1\} = \infty$ oraz $X, Y \geq 0$, to nigdy nie otrzymamy $r = -1$.

Ekstremalne wartości współczynnika korelacji Pearsona występują jedynie, gdy zmienne są zależne liniowo, czyli $Y = aX + b$. Wartość $r = 1$ otrzymamy, gdy $a > 0$ oraz $r = -1$ gdy $a < 0$.

Przykład 3

- a. Niech zmienne losowe X i Y mają rozkład wykładniczy o dystrybuantach $F_X(x) = 1 - e^{-ax}$ oraz $F_Y(y) = 1 - e^{-by}$, gdzie $a, b > 0$. Największą wartość współczynnika korelacji otrzymamy dla współmonotonicznych zmiennych losowych. Wtedy $Y = \frac{a}{b}X$ oraz $r(XY) = 1$. Natomiast gdy zmienne te są przeciwnotoniczne, to $Y = -\frac{1}{b} \ln(1 - e^{-ax})$ oraz:

$$E(XY) = - \int_0^{\infty} \frac{ax}{b} \ln(1 - e^{-ax}) e^{-ax} dx = \frac{12 - \pi^2}{6ab}.$$

Współczynnik korelacji jest wtedy równy:

$$r(X, Y) = \frac{\frac{12 - \pi^2}{6ab} - \frac{1}{ab}}{\frac{1}{ab}} = 1 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Podsumowując, otrzymujemy:

$$r_{\min} = 1 - \frac{\pi^2}{6} \approx -0,6449,$$

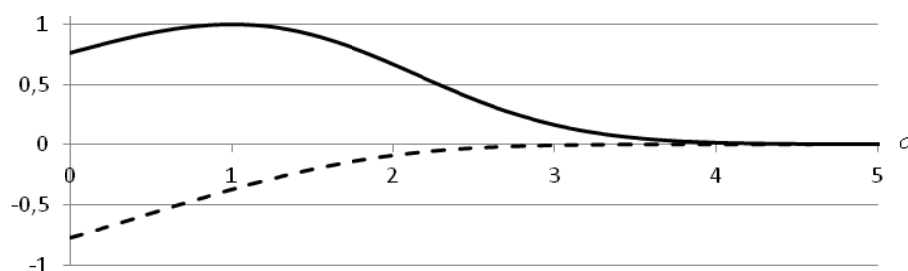
$$r_{\max} = 1.$$

- b. Załóżmy teraz, że zmienne mają rozkład logarytmiczno-normalny: zmienna X z parametrami 0 i 1, a Y z parametrami 0 i $\sigma > 0$. Wtedy [Embrechts, McNeil, Straumann, 2001]:

$$r_{\min} = r(e^Z, e^{-\sigma Z}) = \frac{e^{-\sigma} - 1}{\sqrt{(e-1)(e^{\sigma^2} - 1)}},$$

gdzie zmienna losowa Z ma rozkład standardowy normalny oraz:

$$r_{\max} = r(e^Z, e^{\sigma Z}) = \frac{e^{\sigma} - 1}{\sqrt{(e-1)(e^{\sigma^2} - 1)}}.$$



Rys. 5. Wartości $r_{\min}$ i $r_{\max}$ dla różnych wartości parametru σ

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Embrechts, McNeil, Straumann, 2001].

Z twierdzenia 1d wynika, że w obydwu przypadkach nie można otrzymać wartości współczynnika korelacji $r = -1$. Dla zmiennych o rozkładzie wykładniczym wartość dolnej granicy $r_{\min}$ nie zależy od wartości współczynników a i b . Natomiast w przypadku rozkładu logarytmiczno-normalnego sytuacja istotnie zależy od wartości parametru σ . Maksymalną wartość otrzymamy jedynie, gdy $\sigma = 1$, a dla $\sigma > 3,5$ współczynnik korelacji jest zawsze równy w przybliżeniu 0. Wykresy wartości tych granic: $r_{\min}$ i $r_{\max}$ zostały przedstawione na rys. 5.

Rozkład logarytmiczno-normalny wykorzystywany jest często w finansach, w analizie portfelowej. Należy więc w tym przypadku ostrożnie stosować współczynnik korelacji Pearsona.

3. Sumy zmiennych losowych, wyznaczanie VaR

Zbadamy teraz rozkład sumy zmiennych losowych $X_1, \dots, X_n$, gdy struktura zależności zadana jest funkcją łączącą C . Niech:

$$S_C = X_1 + \dots + X_n,$$

wtedy dystrybuanta sumy S_C określona jest wzorem [Heilpern, 2011]:

$$F_{S,C}(s) = \int_{K(s)} dC(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \int_{A(s)} dC(u_1, \dots, u_n),$$

gdzie:

$$K(s) = \{(x_1, \dots, x_n): x_1 + \dots + x_n \leq s\},$$

$$A(s) = \{(u_1, \dots, u_n): F_1^{-1}(u_1) + \dots + F_n^{-1}(u_n) \leq s\}.$$

Dystrybuanta sumy zmiennych losowych jest ograniczona z dołu i z góry przez dystrybuanty $F_{\min}$ i $F_{\max}$. Ich postać podana jest w twierdzeniu 2.

Twierdzenie 2 [Denuit, Genest, Marceau, 1999]. Niech $X_1, \dots, X_n$ będą dowolnymi zmiennymi losowymi o strukturze zależności opisanej funkcją łączącą C . Jeżeli $F_{S,C}(s)$ jest dystrybuantą ich sumy $S_C = X_1 + \dots + X_n$, to

$$F_{\min}(s) \leq F_{S,C}(s) \leq F_{\max}(s),$$

gdzie:

$$F_{\min}(s) = \sup_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \max \left\{ \sum_{i=1}^n F_i^-(x_i) - n + 1, 0 \right\},$$

$$F_{\max}(s) = \inf_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \min \left\{ \sum_{i=1}^n F_i(x_i), 1 \right\},$$

oraz $\Sigma(s) = \{(x_1, \dots, x_n): x_1 + \dots + x_n = s\}$ i $F_i^-(x) = P(X_i < x)$.

Ponadto, nie istnieje też funkcja łącząca C , taka że graniczne dystrybuanty $F_{\min}$ i $F_{\max}$ są dystrybuantami sumy S_C , ale dla każdego x_0 istnieje funkcja łącząca C_0 , taka że $F_{S,C_0}(x_0) = F_{\min}(x_0)$. Podobnie jest dla ograniczenia $F_{\max}$.

Przejdźmy teraz do zbadania podstawowych miar ryzyka dotyczących sumy zależnych zmiennych losowych S . Taką miarę ryzyka będziemy oznaczać symbolem $\gamma(S; C)$, gdzie C jest funkcją łączącą opisującą strukturę zależności zmiennych losowych X_i .

Koherentna miara ryzyka powinna spełniać cztery, pożądane w praktyce aksjomaty [McNeil, Frey, Embrechts, 2005]. Powinna być niezmiennicza względem transformacji, dodatnio jednorodna, monotoniczna i subaddytywna. Ostatnia własność, subaddytywność: $\gamma(X + Y) \leq \gamma(X) + \gamma(Y)$ zachodzi dla każdej zmiennej X i Y , związana jest z dywersyfikacją ryzyka. Najczęściej stosowaną w praktyce miarą ryzyka jest wartość narażona na ryzyko (Value-at-Risk) $\text{VaR}_\alpha(X)$. Jest to prosta miara ryzyka będąca kwantylem zmiennej X :

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x: F_X(x) \leq \alpha\}.$$

Nie jest ona jednak koherentną miarą ryzyka. Nie spełnia warunku subaddytywności. Można też pokazać [McNeil, Frey, Embrechts, 2005], że dla współmonotonicznych zmiennych losowych jest ona addytywna:

$$\text{VaR}_\alpha(S; M) = \text{VaR}_\alpha(X_1) + \dots + \text{VaR}_\alpha(X_n).$$

Miara VaR_α nie jest subaddytywna. Istnieje więc funkcja łącząca C , taka że $\text{VaR}_\alpha(S; C) > \text{VaR}_\alpha(X_1) + \dots + \text{VaR}_\alpha(X_n)$, czyli zachodzi relacja:

$$\text{VaR}_\alpha(S; M) < \text{VaR}_\alpha(S; C).$$

Współmonotoniczne zmienne losowe wcale nie muszą więc dawać największej wartości VaR_α dla ich sumy.

W przypadku gdy zmienne $X_1, \dots, X_n$ mają łączny rozkład eliptyczny, to miara VaR_α jest koherentna [McNeil, Frey, Embrechts, 2005]. Wtedy $\text{VaR}_\alpha(S; M) \geq \text{VaR}_\alpha(S; C)$ dla każdej struktury zależności. Podobna sytuacja zachodzi dla innej miary ryzyka: średniego niedoboru (expected shortfall) określonego wzorem:

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}_u(X) du.$$

Dla ciągłych zmiennych losowych zachodzi zależność:

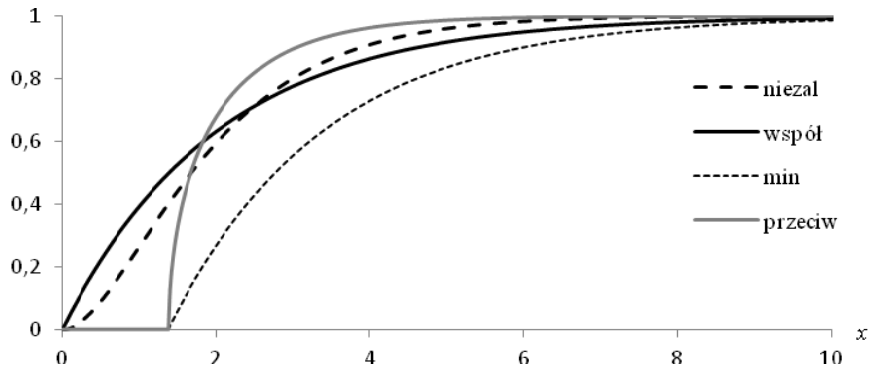
$$\text{ES}_\alpha(X) = E(X | X > \text{VaR}_\alpha(X)).$$

Średni niedobór jest koherentną miarą ryzyka również addytywną dla współmonotonicznych zmiennych losowych [McNeil, Frey, Embrechts, 2005]. Tak więc współmonotoniczne zmienne gwarantują nam największą wartość tej miary ryzyka:

$$\text{VaR}_\alpha(S; C) \leq \text{VaR}_\alpha(S; M).$$

Ponadto, wcale nie jest prawdą, że wartość miary VaR_α jest zawsze większa dla zmiennych współmonotonicznych niż dla przeciwnotonicznych czy niezależnych. Zagadnienie to poruszają przykłady 4 oraz 5. Przedstawiają one dwie przeciwstawne sytuacje.

Przykład 4 [Heilpern, 2011]. Niech zmienne losowe X_1 i X_2 mają rozkład wykładniczy o dystrybuancie $F_i(x) = 1 - e^{-x}$. Na rys. 6 przedstawione są wykresy dystrybuant sumy przeciwnotonicznych, niezależnych i współmonotonicznych tych zmiennych losowych oraz dolnego ograniczenia $F_{\min}(x)$.



Rys. 6. Wykresy dystrybuant sumy zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczych

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Heilpern, 2011].

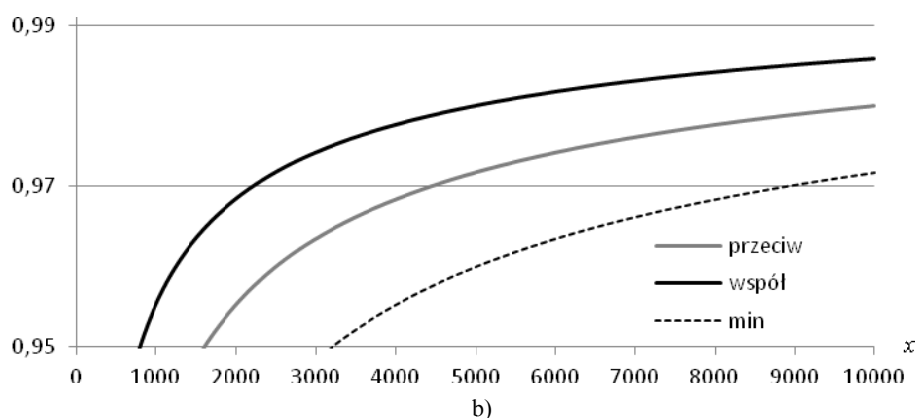
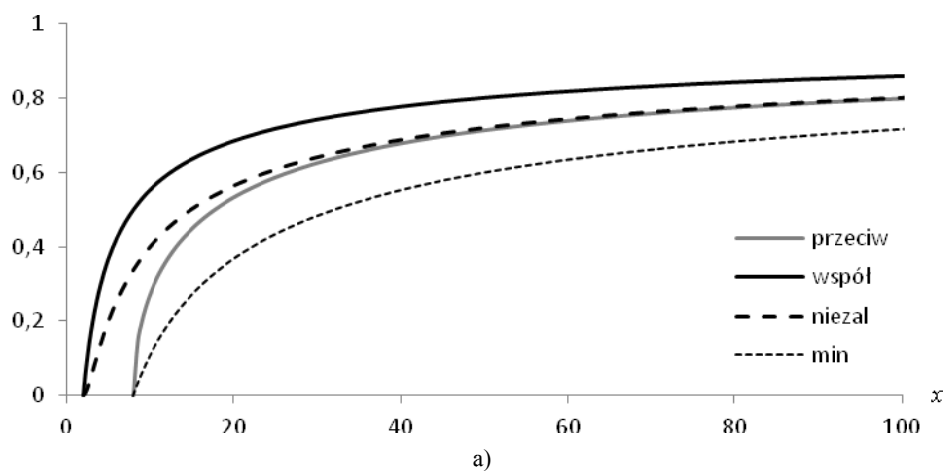
Widzimy, że dla małych wartości x największą wartość dystrybuanty otrzymujemy dla zmiennych współmonotonicznych, a najmniejszą dla przeciwnotonicznych. Natomiast dla dużych wartości x relacje są odwrotne. Oznacza to, że dla wartości α bliskich 1 otrzymujemy zależności:

$$\text{VaR}_\alpha(S, W) < \text{VaR}_\alpha(S, II) < \text{VaR}_\alpha(S, M) < \text{VaR}_\alpha(S, C_\alpha),$$

gdzie C_α jest funkcją łączącą, dla której istnieje x_α , takie że $F_{S, C_\alpha}(x_\alpha) = F_{\min}(x_\alpha) = \alpha$.

Odminną sytuację otrzymujemy dla rozkładów gruboogonowych, np. dla rozkładu Pareto.

Przykład 5 [Heilpern, 2011]. Niech zmienne losowe X_1 i X_2 mają rozkład Pareto o dystrybuancie $F_i(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$. Wykresy dystrybuant przedstawione są na rys. 7a. Natomiast rys. 7b przedstawia te same dystrybuanty dla wartości prawdopodobieństw bliskich 1.



Rys. 7. Wykresy dystrybuant sumy zmiennych losowych o rozkładzie Pareto

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Heilpern, 2011].

W przypadku gdy zmienne X_i mają rozkład Pareto, to dla każdego x największe wartości dystrybuanty otrzymujemy dla współmonotonicznych zmiennych, a najmniejsze dla przeciwnotonicznych. Dla x większych od 60 dystrybuanty niezależnych i przeciwnotonicznych zmiennych losowych są już prawie równe. Wartości VaR_α dla przeciwnotonicznych zmiennych są znacznie większe niż dla współmonotonicznych, jednak aż ponad dwukrotnie mniejsze dla $\alpha = 0,97$ od dolnej granicy $F_{\min}(x)$ (patrz rys. 7b). Jest to sytuacja odwrotna jak w przypadku rozkładu wykładniczego, gdzie wartość VaR_α jest większa dla współmonotonicznych zmiennych losowych.

Literatura

- Denuit M., Genest C., Marceau E. (1999), *Stochastic Bounds on Sums of Dependent Risks*, „Insurance: Mathematics and Economics”, No. 25, s. 85-104.
- Embrechts P., McNeil A., Straumann D. (2001), *Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls* [w:] Dempster M., Moffatt H.K. (eds.), *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Heilpern S. (2007), *Funkcje łączące*, Wydawnictwo AE, Wrocław.
- Heilpern S. (2011), *Aggregate Dependent Risk – Risk Measure Calculation*, „Mathematical Economics”, No. 7(14), s. 93-110.
- McNeil J.A., Frey R., Embrechts P. (2005), *Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, Princeton.
- Nelsen R.B. (1999), *An Introduction to Copulas*, Springer, New York.
- Wang S.S. (1999), *Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models & Algorithms*, CAS Committee on Theory of Risk, Working Paper.

DEPENDENCE – FACTS AND MYTHS

Summary: The main aim of the article is to show chosen issues of random variables which can be described in the form of copula functions. In the first part the relationship between two-dimensional normal distribution with Gaussian copula function was shown together with the most common measure – Pearson correlation coefficient. Conclusions were referred to multivariate elliptical distributions, mainly to normal distributions with major focus on generally used risk measure – value at risk (VaR). It was shown that the highest values of this measure need not appear for close dependence as well as for independence.

Keywords: multivariate normal distribution, copula functions.