Katarzyna Zeug-Żebro
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Zarządzania
Katedra Matematyki
katarzyna.zeug-zebro@ue.katowice.pl

BADANIE WPŁYWU REDUKCJI SZUMU NA IDENTYFIKACJĘ DYNAMIKI CHAOTYCZNEJ NA PRZYKŁADZIE FINASOWYCH SZEREGÓW CZASOWYCH

Streszczenie: Filtracja danych jest bardzo ważnym etapem badań związanych z odróżnianiem szeregów chaotycznych od losowych. Jedną z metod wykorzystywanych w tym celu jest metoda najbliższych sąsiadów. Pierwotnie została ona stworzona w celu prognozowania, jednak późniejsze prace badawcze pokazały, że jest ona również dobrym narzędziem umożliwiającym redukcję szumu w szeregach czasowych.

Celem artykułu jest zbadanie wpływu redukcji szumu metodą najbliższych sąsiadów na identyfikację chaosu w wybranych szeregach czasowych. Badanie będzie przeprowadzone na podstawie ekonomicznych szeregów czasowych, złożonych z cen zamknięcia akcji spółek notowanych na GPW w Warszawie oraz dziennych kursów walut.

Słowa kluczowe: wskaźniki finansowe, analiza korelacji, syntetyczny miernik rozwoju.

Wprowadzenie

Wieloletnie badania deterministycznych układów dynamicznych pokazały, że trajektorie niektórych z nich wyglądają jak losowe szeregi czasowe. Okazało się również, że nie tylko trajektorie takich układów trudno odróżnić od szeregów losowych. Wielu badaczy, analizując trajektorie deterministycznych, chaotycznych układów dynamicznych, sporządziło ich empiryczne funkcje autokorelacji oraz spektra. Funkcja ta i spektrum wyznaczone dla szeregów czasowych generowanych przez odwzorowanie logistyczne oraz trójkątne były nieodróżnialne od wyników otrzymanych dla szeregów losowych [Zawadzki, 1996, s. 202]. Badania te ukazały, że istnieją przypadki, w których znane metody analizy szeregów czasowych, tj. funkcja autokorelacji i analiza spektralna, nie są w stanie odróżnić szeregów deterministycznych od losowych. W związku z tym podjęto badania, których celem było stworzenie metod na tyle czułych, by wychwycić te subtelne różnice [Zeug-Żebro i in., 2013].

Redukcja poziomu szumu jest bardzo ważnym etapem badań związanych z odróżnianiem szeregów deterministycznych od losowych. Istotność takiej filtracji wynika z tego, że obecność szumu może znacząco zmienić niektóre parametry układu, takie jak: wymiar, entropię czy wykładniki Lapunowa. Jedną z metod wykorzystywanych w tym celu jest metoda najbliższych sąsiadów. Pierwotnie została ona stworzona w celu prognozowania, jednak późniejsze prace badawcze pokazały, że jest ona również dobrym narzędziem umożliwiającym filtrację danych. Metoda ta wiąże się z pewnymi formami redukcji poziomu szumu w celu uwidocznienia w analizowanym szeregu części deterministycznej.

Celem artykułu jest zbadanie wpływu redukcji poziomu szumu metodą najbliższych sąsiadów na identyfikację dynamiki chaotycznej w wybranych szeregach czasowych. Metody identyfikacji chaosu pozwalają na wykrycie jedynie pojedynczego atrybutu dynamiki chaotycznej. Przeprowadzenie pełnej analizy danych wymaga zatem uwzględnienia uzupełniających się metod. Narzędziami służącymi do odróżniania szeregów deterministycznych od losowych będą: wymiar korelacyjny, największy wykładnik Lapunowa oraz analiza R/S. W badaniach wykorzystano szeregi utworzone z cen zamknięcia WIG i WIG20, dwóch spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie: INGBSK i Vistula oraz dwóch kursów walut: funta brytyjskiego i dolara amerykańskiego. Dane obejmowały okres od 14.04.1994 do 30.10.2012. Obliczenia przeprowadzono przy użyciu programów napisanych przez autorkę w języku programowania Delphi, pakietu Microsoft Excel oraz TISEAN.

1. Rodzaje szumu

Badania związane z analizą poziomu szumu wykazały istnienie dwóch jego rodzajów: pomiarowego i dynamicznego. Szum pomiarowy w układach dynamicznych można scharakteryzować przez następujące równanie:

$$\begin{aligned} \chi_{t+1} &= f(\chi_t), \\ x_{t+1} &= h(\chi_{t+1}) + \xi_t, \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $f : X \to X$ – m-wymiarowe odwzorowanie opisujące rzeczywistą dynamikę układu, $h : X \to R$ – funkcja pomiarowa generująca szereg czasowy obserwacji x_t układu dynamicznego, $\chi_t, \chi_{t+1} \in X$ – stan nieznanego, pierwotnego układu wielowymiarowego odpowiednio w chwilach *t*, $t+1$, x_{t+1} – obserwacja szeregu czasowego w chwili $t+1$, ξ_t – szum pomiarowy. Z równania (1) wynika, że szum pomiarowy dodawany jest do pomiaru i nie zaburza trajektorii, a zatem możemy mówić o istnieniu czystych danych.

Obecność w układzie szumu dynamicznego można zapisać następująco:

$$\chi_{t+1} = f(\chi_t + \eta_t), \tag{2}$$

gdzie η_t oznacza szum dynamiczny wewnątrz układu. Ponieważ występowanie takiego szumu zaburza trajektorię układu, tzn. szum jest włączony w równanie ruchu, dlatego nie istnieje czysta trajektoria, a jedynie możemy mówić o odległej trajektorii. Trajektoria ta spełnia równanie ruchu układu, leżąc jak najbliżej danych z szumem dynamicznym.

2. Redukcja szumu metodą najbliższych sąsiadów

Zadaniem metody najbliższych sąsiadów [Kantz, Schreiber, 1997] jest podział szeregu czasowego x_t na część deterministyczną $\bar{x}_t$ i część stochastyczną ξ_t:

$$x_t = \bar{x}_t + \xi_t \tag{3}$$

gdzie: ξ_t posiada szybko malejącą funkcję autokorelacji i jest nieskorelowana z $\bar{x}_t$.

W celu wyznaczenia $\bar{x}_l$, dla ustalonego *l*, musimy rozważyć wektor opóźnień (*d* – historię): $\hat{x}_i^d = (x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, ..., x_{i+(d-1)\tau})^T$ [1] w przypadku gdy opóźnienie czasowe τ przyjmuje wartość jeden (*d* jest wymiarem zanurzenia[2]). Wtedy jedną ze środkowych współrzędnych tego wektora jest filtrowana obserwacja x_l,

---

[1] Element zrekonstruowanej przestrzeni stanów metodą opóźnień.

[2] Twierdzenia Takensa o zanurzeniu [Takens, 1980]. Niech *M* będzie zwartą, *m* wymiarową rozmaitością różniczkową. Dla par (f, h), $f \in Diff^2(M, M)$, $h \in C^2(M, R)$ jest własnością generyczną, że odwzorowanie $\Phi : M \to R^{2m+1}$ określone wzorem:

$$\Phi_{(f,h)} = [h(\chi), h(f(\chi)), ..., h(f^{2m}(\chi))],$$

jest zanurzeniem, tj. dyfeomorfizmem klasy C^1 odwzorowującym *M* na $\Phi_{(f,h)}(M)$.

Z powyższego twierdzenia wynika, że dla $d \geq 2m+1$ przestrzenie (M, f) i $(\Phi_{(f,h)}(M), F)$ są dyfeomorficzne (*d* – wymiar zanurzenia). Oznacza to, że obserwowalne odwzorowanie *F* jest w pewnym sensie równoważne nieznanemu odwzorowaniu *f*.

np. $\hat{x}^d_{l-\frac{d}{2}}$ dla parzystej wartości wymiaru zanurzenia, $\hat{x}^d_{l-\frac{d+1}{2}}$ dla nieparzystej wartości d. Następnie ustalamy k najbliższych sąsiadów wektora[3] $\hat{x}^d_{l-\frac{d}{2}}$: $\hat{x}^d_{v_1-\frac{d}{2}}, \hat{x}^d_{v_2-\frac{d}{2}}, \ldots, \hat{x}^d_{v_k-\frac{d}{2}}$. Na podstawie wyznaczonych najbliższych sąsiadów, wartość deterministyczną $\overline{x}_l$ należy wyznaczyć ze wzoru:

$$\overline{x}_l = \tfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{v_i} \,. \tag{4}$$

Jednym z parametrów mierzących efektywność filtracji szeregu jest współczynnik poziomu redukcji szumu *NRL* [Orzeszko, 2005]:

$$NRL(d) = \tfrac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} m_i \Big/ \tfrac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} M_i \,, \tag{5}$$

gdzie: m_i i M_i oznaczają odległości od i-tego stanu (wektora opóźnień) do jego najbliższego i najdalszego sąsiada.

Współczynnik ten bada zależność pomiędzy siłą szumu dodawanego do układu a strukturą geometryczną jego atraktora. Korzystając z powyższej miary, należy wybrać spośród otrzymanych szeregów taki, dla którego współczynnik *NRL* przyjmuje najmniejszą wartość.

3. Największy wykładnik Lapunowa

Wykładniki Lapunowa są miarą wrażliwości układu dynamicznego na zmianę warunków początkowych. Najbardziej istotnym z punktu identyfikacji chaosu jest największy wykładnik $\lambda_{\max}$. W 1993 r. Rosenstein [Rosenstein, Collins, De Luca, 1993], a rok później Kantz [1994] zaproponowali algorytm wyznaczania największego wykładnika Lapunowa. Przebiega on według następujących kroków:

Krok 1. Wyznaczamy zbiory Z_i, złożone z k najbliższych sąsiadów $\hat{x}^d_{i_j}$ wektorów opóźnień $\hat{x}^d_i$, spełniających warunek $\left|i - i_j\right| > t^*$, gdzie t^* jest ustaloną liczbą naturalną. Dodany warunek zwiększa prawdopodobieństwo, że znaleziony sąsiad nie będzie należał do trajektorii wektora $\hat{x}^d_i$.

[3] W sensie odległości euklidesowej, w *d*-wymiarowej zrekonstruowanej przestrzeni stanów.

Krok 2. Obliczamy:

$$d_n(i) = \tfrac{1}{k} \sum_{\hat{x}_{ij}^d \in Z_i} \left| x_{i+n} - x_{i_j+n} \right|, \; i = 1, 2, ..., T \; ; \; n = 0, 1, ..., n_{\max} , \tag{6}$$

gdzie: $n_{\max}$ jest ustaloną liczbą naturalną, określającą liczbę iteracji.

Krok 3. Wyznaczamy średnią z $d_n(i)$ po wszystkich d – historiach:

$$d_n = \tfrac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} d_n(i). \tag{7}$$

Krok 4. Największy wykładnik Lapunowa jest współczynnikiem regresji:

$$\ln(d_n) = \ln(d_0) + \lambda_{\max} n . \tag{8}$$

Warto zauważyć, że wartość największego wykładnika Lapunowa w dużej mierze zależy od przyjętej metryki, wartości parametrów zrekonstruowanej przestrzeni stanów oraz liczby najbliższych sąsiadów *k*.

4. Wymiar korelacyjny atraktora

Pojęcie wymiaru korelacyjnego po raz pierwszy zostało zdefiniowane przez Grassbergera i Procaccię w 1983 r. [Grassberger, Procaccia, 1983a, 1983b]. Dostarcza on wstępnych informacji na temat złożoności układu dynamicznego, tzn. wskazuje minimalną liczbę zmiennych opisujących układ dynamiczny.

Wymiar korelacyjny atraktora systemu dynamicznego jest zdefiniowany jako granica:

$$D_C = \lim_{r \to 0} \frac{\ln C(d, r)}{\ln r}, \tag{9}$$

gdzie: $C(d, r)$ jest całką korelacyjną, określoną jako prawdopodobieństwo znalezienia pary wektorów, których odległość od siebie w zrekonstruowanej d-wymiarowej przestrzeni nie jest większa od r:

$$C(d, r) = \tfrac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} I(r - r_{ij}), \quad r > 0 \tag{10}$$

$I(x)$ jest funkcją wskaźnikową (funkcja Heaviside'a), $n = N - (d-1)\tau$ jest liczbą wektorów w d-wymiarowej przestrzeni, τ jest wartością opóźnienia czasowego, N jest liczbą danych oraz $r_{ij} = \sqrt{\sum_{l=0}^{d-1}\left(x_{i+l} - x_{j+l}\right)^2}$.

Istnieje wiele sposobów wyznaczania wymiaru korelacyjnego. Najczęściej stosuje się regresję liniową do przybliżania linią prostą wykresu zależności logarytmu sumy korelacyjnej $\ln C(d,r)$ od logarytmu wielkości otoczenia $\ln r$. Daje nam to równanie postaci:

$$\ln C(d,r) = D_c \ln r + b \,. \tag{11}$$

W przypadku gdy układ jest deterministyczny, wymiar korelacyjny D_C jest niezależny od wymiaru zanurzenia. Gdy natomiast system jest stochastyczny, występuje równość pomiędzy tymi wymiarami.

5. Wykładnik Hursta

Wykładnik Hursta jest kolejną miarą statystyczną, która pozwala na klasyfikację szeregów czasowych, tj. odróżnienie deterministycznych szeregów czasowych od losowych. Jedną z metod obliczania wykładnika Hursta jest metoda analizy przeskalowanego zakresu, zwana analizą R/S. Analiza ta służy do badania istnienia efektu długiej pamięci i z tego powodu stosowana jest m.in. do identyfikacji chaosu w szeregach czasowych. Dla szeregu obserwacji $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ przebiega ona w następujących etapach:

Krok 1. Przekształcamy powyższy szereg w ciąg $m = N - 1$ logarytmicznych stóp zwrotu.

Krok 2. Niech $T, t \in N$ i $T \cdot t = m$. Mamy wówczas T podprzedziałów I_j, każdy o długości t, $j = 1, ..., T$. Ponadto niech każdy składnik podprzedziału I_j będzie oznaczony przez y_{ij}, gdzie $i = 1, ..., t$. Średnia wartość dla j-tego podciągu wynosi: $\bar{y}_j = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} y_{ij}$.

Krok 3. Scentrujemy każdy podciąg poprzez odjęcie średniej arytmetycznej i zdefiniowanie ciągu sum częściowych:

$$z_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_j \text{ i } q_{ij} = \sum_{l=1}^{i} z_{lj}\,,\ i = 1, 2, \ldots, t, j = 1, 2, \ldots, T. \tag{12}$$

Krok 4. Następnie obliczamy rozstępy skumulowanych szeregów czasowych według wzoru:

$$R_j = \max(q_{ij}) - \min(q_{ij}). \tag{13}$$

Krok 5. Obliczamy rozstęp przeskalowany dla każdego skumulowanego szeregu czasowego, tzn. dzielimy rozstęp przez odchylenie standardowe tego szeregu: $\alpha_{jt} = R_j / S_j$.

Krok 6. Ostatecznie obliczamy:

$$(R/S)_t = \tfrac{1}{T}\sum_{j=1}^{T} \alpha_{jt}. \tag{14}$$

Powyższą procedurę przeprowadza się dla różnych długości szeregu czasowego *t*, $10 \le t \le \frac{m}{2}$. W ten sposób otrzymujemy zależność wielkości *R/S* od długości szeregu *t*. Aby wyznaczyć wykładnik Hursta, należy zlogarytmować następującą zależność: $(R/S)_t = ct^H$, gdzie *H* jest wykładnikiem Hursta, *c* jest stałą, a *t* jest wartością oczekiwaną przeskalowanego zakresu:

$$\ln\left((R/S)_t\right) = \ln c + H \ln t. \tag{15}$$

Wykładnik Hursta jest współczynnikiem kierunkowym regresji liniowej.

Szeregi czasowe można podzielić na trzy klasy w zależności od ich wartości wykładnika Hursta: jeśli H = 0,5, szereg zachowuje się losowo, dla $H \in (0{,}5;1)$ szereg jest persystentny (mówiąc w terminach dynamiki chaotycznej, istnieje subtelna wrażliwość na warunki początkowe), dla $H \in$ (0; 0,5) szereg jest antypersystentny lub ergodyczny.

W celu sprawdzenia czy badany szereg jest losowy, należy otrzymany wykładnik Hursta porównać z wartością oczekiwaną wykładnika szeregu losowego tej samej długości [Orzeszko, 2005, s. 63]. W związku z tym należy oszacować wartość oczekiwaną $E\left((R/S)_t\right)$ [Stawicki, Janiak, 1997]:

$$E\left((R/S)_t\right) = \frac{t}{(t-0{,}28)\sqrt{\frac{\pi}{2}t}} \sum_{i=1}^{t-1} \sqrt{\frac{t-i}{i}}\,. \tag{16}$$

Wykładnik Hursta różny od oczekiwanego $E(H)$ świadczy o istnieniu szeregu o długookresowej pamięci.

6. Przedmiot i przebieg badania

Badaniu poddano szeregi finansowe[4] utworzone z cen zamknięcia WIG, WIG20, dwóch spółek notowanych na GPW w Warszawie, tj. INGBSK, Vistula oraz dziennych kursów funta brytyjskiego i dolara amerykańskiego. Dane obejmują okres od 14.04.1994 do 30.10.2012. Długość analizowanych szeregów pozwala na otrzymanie wiarygodnych rezultatów (powyżej 4600 obserwacji). Przeanalizowano obserwacje, które były dziennymi logarytmicznymi stopami zwrotu.

Analiza wymienionych wyżej szeregów czasowych będzie przebiegała w następujących etapach:

1. Rekonstrukcja przestrzeni stanów metodą opóźnień-wektory opóźnień.
2. Redukcja szumu metodą najbliższych sąsiadów oraz obliczenie współczynnika redukcji poziomu szumu *NRL*.
3. Identyfikacja chaosu: oszacowanie największego wykładnika Lapunowa, wymiaru korelacyjnego oraz wykładnika Hursta.

Przeprowadzone badania empiryczne pozwoliły za pomocą metody opóźnień zrekonstruować przestrzeń stanów. Stosując metodę opartą na analizie funkcji autokorelacji – ACF [Ramsey, Sayers, Rothman, 1990], oszacowano czas opóźnień τ. Następnie przy pomocy metody najbliższego pozornego sąsiada – MNPS [Abarbanel, Brown, Kennel, 1992], obliczono wymiar zanurzenia *d* (tab. 2).

W kolejnym kroku badań zastosowano redukcję poziomu szumu metodą najbliższych sąsiadów[5]. Aby dokonać filtracji, ustalono wartość czasu opóźnienia, $\tau = 1$ oraz wartości dwóch parametrów: wymiar zanurzenia $d = 2, 3, 4, 5, 8, 10, 15, 20$; promień otoczenia $\rho = 0{,}001;\ 0{,}01;\ 0{,}1$.

W celu oceny redukcji poziomu szumu metodą najbliższych sąsiadów wykorzystano miarę *NRL*(*i*)[6] dla $i = 2, 3, \ldots, 10$. Poniższa tabela zawiera najniższą wartość współczynnika *NRL* obliczoną dla wybranych szeregów finansowych oraz odpowiadające jej wartości wymiaru zanurzenia i promienia otoczenia. Przefiltrowane szeregi oznaczono symbolem *NazwaSzeregu*_red.

---

4 Dane pochodzą z archiwum plików programu Omega, dostępnych na stronie internetowej www.bossa.pl.

5 Redukcję szumu przeprowadzono przy wykorzystaniu darmowego programu TISEAN autorstwa H. Kantza i T. Schreibera.

6 W celu obliczenia współczynnika *NRL*, posłużono się programem autora napisanym w języku programowania Delphi.

Tabela 1. Wartości miary *NRL* dla szeregów przefiltrowanych

Szereg	Parametry filtracji		Miara *NRL*
	d	ρ	
ING_red	6	0,1	0,001058
Vistula_red	3	0,1	0,001190
WIG_red	3	0,1	0,000505
WIG20_red	2	0,1	0,000725
GBP_red	2	0,1	0,000222
USD_red	3	0,1	0,0002457

Do oszacowania największego wykładnika Lapunowa posłużono się algorytmem Kantza i Rosensteina. W obliczeniach przyjęto liczbę sąsiadów $k = 1$ i wartość $t^* = 10$. Następnie zastosowano regresję liniową do przybliżania linią prostą wykresu zależności wartości $\ln d_n$ od numeru iteracji *n*. Kolejnym krokiem badań była analiza R/S. Istotność tej analizy w dużej mierze zależy od liczby dzielników wybranego szeregu, gdyż na ich podstawie, szacowane jest równanie regresji. W tym celu w przeprowadzonych badaniach skrócono szeregi tak, by liczba dzielników była nie mniejsza niż 30. W celu porównania wyników, badanie szacowania wykładnika Lapunowa oraz wykładnika Hursta przeprowadzono dwukrotnie dla szeregów przed i po filtracji (tzn. dla szeregów otrzymanych dla parametrów d i ρ zamieszczonych w tab. 1).

W tab. 2 przedstawiono wyniki szacowania największego wykładnika Lapunowa, wykładnika Hursta oraz oczekiwanego wykładnika Hursta dla analizowanych szeregów czasowych[7]. Tabela ta zawiera również informację o długości szeregu oraz liczbę dzielników wykorzystanych w obliczeniach związanych z analizą R/S. W przypadku gdy otrzymane wyniki nie dawały podstaw do traktowania współczynnika regresji jako szacowanej wartości wykładnika Lapunowa czy też wykładnika Hursta, pojawiał się symbol „–" (dla $R^2 < 0{,}3$).

Tabela 2. Wyniki szacowania wykładników Lapunowa i Hursta
dla finansowych szeregów czasowych

Szereg	Wykładnik Lapunowa	Szacowany wykładnik Hursta	Oczekiwany wykładnik Hursta	l. obser/ l. dziel
1	2	3	4	5
ING $\tau = 5, d = 7$	0,2421	0,5937	0,5521	4560/32
ING_red	**0,2432**	**0,6017**	0,5521	4560/32
Vistula $\tau = 2, d = 7$	0,0022	0,6114	0,5521	4560/32
Vistula_red	**0,2068**	**0,6314**	0,5521	4560/32
WIG $\tau = 2, d = 8$	0,034	0,581	0,5521	4560/32
WIG_red	**0,0354**	**0,6182**	0,5521	4560/32

[7] Obliczenia przeprowadzono na podstawie programu własnego autora, napisanego w języku programowania Delphi.

cd. tabeli 2

1	2	3	4	5
WIG20 $\tau = 5, d = 7$	0,249	0,5576	0,5521	4560/32
WIG20_red	**0,3298**	**0,5637**	0,5521	4560/32
GBP $\tau = 2, d = 6$	0,0018	**0,5511**	0,5521	4680/39
GBP_red	**–**	**–**	0,5521	4680/39
USD $\tau = 2, d = 6$	0,0344	0,5466	0,5521	4680/39
USD_red	0,0573	**–**	0,5521	4680/39

Można zauważyć, że wszystkie objęte badaniem finansowe szeregi czasowe są wrażliwe na zmianę warunków początkowych ($\lambda_{\max} > 0$). Szeregi przefiltrowane w większym stopniu wykazały jednak cechy chaotyczne. Wartości wykładnika Lapunowa otrzymane dla tych szeregów znacznie wzrosły. Najbardziej wrażliwy na zmianę warunków początkowych okazał się indeks WIG20, najmniej zaś kurs GBP (po filtracji nie można było oszacować największego wykładnika Lapunowa dla tego szeregu). Otrzymane rezultaty pokazały również, że w przypadku niektórych finansowych szeregów czasowych (WIG, INGBSK, Vistula) wykładnik Hursta dość wyraźnie różni się od wartości oczekiwanych dla szeregów losowych. W wyniku redukcji poziomu szumu, różnica ta jeszcze wzrosła. Oznacza to, że te właśnie szeregi finansowe charakteryzują się „pamięcią długookresową". Szeregi czasowe ich stóp zwrotu posiadają pewną wewnętrzną strukturę, mogą być chaotyczne.

W kolejnym kroku badań obliczono wymiar korelacyjny[8] przefiltrowanych szeregów, tj. dla których miara *NRL* była najniższa. Tabela 3 zawiera wartości wymiaru korelacyjnego (oszacowane dla kolejnych poziomów wymiaru zanurzenia) obliczonego dla szeregów oryginalnych oraz po redukcji szumu.

Tabela 3. Wyniki szacowania wymiaru korelacyjnego

Szereg \ *d*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
INGBSK	0,643	1,2607	1,8492	2,3857	2,8969	3,3538	3,8112	4,1792	4,5713	4,9471
INGBSK_red	**0,1486**	**0,3064**	**0,4776**	**0,6566**	**0,8407**	**1,0264**	**1,2151**	**1,4065**	**1,597**	**1,7924**
Vistula	0,6858	1,3766	2,0563	2,7048	3,3146	3,8719	4,4728	5,1141	5,9183	6,5449
Vistula_red	**0,2008**	**0,4186**	**0,6568**	**0,9094**	**1,1752**	**1,4502**	**1,7313**	**2,0328**	**2,3442**	**2,6608**
WIG	0,4809	1,4966	2,2999	3,1183	3,9732	4,6624	5,3996	5,8261	6,5859	7,2386
WIG_red	**0,0461**	**0,0966**	**0,153**	**0,2149**	**0,2809**	**0,351**	**0,4255**	**0,5036**	**0,5842**	**0,6672**
WIG20	0,7403	1,5300	2,3572	3,1914	4,0037	4,1294	5,2740	5,9279	6,5396	7,2929
WIG20_red	**0,0735**	**0,1583**	**0,2522**	**0,3512**	**0,4554**	**0,5632**	**0,6776**	**0,7964**	**0,9169**	**1,0421**
GBP	0,727	1,494	2,269	3,018	3,753	4,176	4,852	5,394	5,696	5,939
GBP_red	**0,0009**	**0,0012**	**0,0015**	**0,0019**	**0,0022**	**0,0026**	**0,0029**	**0,0032**	**0,0036**	**0,0039**
USD	0,7095	1,4412	2,1658	2,8702	3,5539	4,2756	4,5807	5,1431	5,4781	5,9645
USD_red	**0,0032**	**0,0056**	**0,0078**	**0,0096**	**0,0117**	**0,0137**	**0,0155**	**0,0173**	**0,0189**	**0,0204**

[8] W celu oszacowania wymiaru korelacyjnego posłużono się programem autora napisanym w języku programowania Delphi.

Wartości wymiaru D_c dla szeregów otrzymanych w wyniku redukcji szumu są zdecydowanie najniższe. Filtracja metodą najbliższych sąsiadów przebiegła zatem pomyślnie i poziom szumu w badanych finansowych szeregach czasowych jest zdecydowanie niższy. Niestety żaden z analizowanych szeregów nie wykazuje zachowania typowego dla danych deterministycznych, gdyż nie można zaobserwować wyraźnego stabilizowania się wymiaru korelacyjnego.

Podsumowanie

W opracowaniu zbadano wpływ redukcji szumu losowego metodą najbliższych sąsiadów na identyfikację chaosu w wybranych szeregach finansowych. Na podstawie wyników badania empirycznego, należy stwierdzić, że identyfikacji chaosu w rzeczywistych szeregach czasowych warto poddawać również szeregi, w których zastosowano redukcję szumu. Wyznaczone wartości największego wykładnika Lapunowa dla szeregów przefiltrowanych znacznie przewyższały wartości tego wykładnika przed zastosowaniem filtracji. Podobne zjawisko można było zaobserwować w przypadku szacowania wykładnika Hursta i wymiaru korelacyjnego. Mimo że otrzymane rezultaty są dość zadawalające, nie należy traktować redukcji poziomu szumu bezkrytycznie, gdyż taka filtracja danych może spowodować zdeformowanie analizowanego sygnału, a co za tym idzie błędną interpretację wyników.

Literatura

Abarbanel H.D., Brown R., Kennel M.B. (1992), *Determining Embedding Dimension for Phase Space Reconstruction Using a Geometrical Construction*, „Physical Review A", Vol. 45, No. 6, s. 3404-3411.

Grassberger P., Procaccia I. (1983a), *Characterization of Strange Attractors*, „Physical Review Letters", Vol. 50, No. 5, s. 346-349.

Grassberger P., Procaccia I. (1983b), *Measuring the Strangeness of Strange Attractors*, „Physica D", Vol. 9, No. 1-2, s. 189-208.

Kantz H. (1994), *A Robust Method to Estimate the Maximal Lyapunov Exponent of a Time Series*, „Physical Letters A", Vol. 185, No. 1, s. 77-87.

Kantz H., Schreiber T. (1997), *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.

Orzeszko W. (2005), *Identyfikacja i prognozowanie chaosu deterministycznego w ekonomicznych szeregach czasowych*, Polskie Towarzystwo Ekonomiczne, Warszawa.

Ramsey J.B., Sayers C.L., Rothman P. (1990), *The Statistical Properties of Dimension Calculations Using Small Data Sets: Some Economic Applications*, „International Economic Review", Vol. 31, No. 4.

Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. (1993), *A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets*, „Physica D", Vol. 65, s. 117-134.

Stawicki J., Janiak E.A., Müller-Frączek I. (1997), *Różnicowanie fraktalne szeregów czasowych – wykładnik Hursta i wymiar fraktalny*, „Dynamiczne modele ekonometryczne", TNOiK „Dom Organizatora", Toruń, s. 35-41.

Takens F. (1981), *Detecting Strange Attractors in Turbulence* [w:] Rand D.A., Young L.S. (red.), *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, Berlin, s. 366-381.

Zawadzki H. (1996), *Chaotyczne systemy dynamiczne*, Wydawnictwo AE, Katowice.

Zeug-Żebro K., Dębicka J., Kuśmierczyk P., Łyko J. (2013), *Wybrane modele matematyczne w ekonomii. Decyzje i wybory*: *Metody analizy chaosu deterministycznego w szeregach czasowych*, Wydawnictwo UE, Wrocław, s. 121-161.

STUDY OF THE EFFECT OF NOISE REDUCTION ON THE IDENTIFICATION OF CHAOTIC DYNAMICS BASED ON FINANCE TIME SERIES

Summary: The data filtration is very important stage of research involving distinguishing the chaotic series from random series. One of the methods used for this purpose is the nearest neighbor method. It was originally designed to predict, but later research showed that it was also a good tool for reducing noise in the time series.

The aim of the article will be to study the effect of noise reduction, carried out using the nearest neighbor method, on the identification of chaotic dynamics in the selected time series. The test will be conducted based on the economic time series which consist of closing prices of companies listed on the Warsaw Stock Exchange and the daily exchange rates.

Keywords: identification of deterministic chaos, noise reduction, time series.