PORADNIK DLA SAMOUKÓW

Hank Liry

PORADNIK DLA SAMOUKÓW

WSKAZÓWKI METODYCZNE DLA STUDJUJĄCYCH POSZCZEGÓLNE NAUKI

WYDAWNICTWO A. HEFLICHA I ST. MICHALSKIEGO Z ZAPOMOGI KASY IMIENIA DRA. J. MIANOWSKIEGO. WYDANIE NOWE. — TOM I. — Z 34 FIG. W TEKŚCIE I 1 TABLICĄ. WARSZAWA, 1915. CENA 6 KOR. (2 R. 40 K.) SKŁ. GŁ. W KSIĘGARNIACH GEBETHNERA I WOLFFA: W WARSZAWIE, LUBLINIE, ŁODZI I KRAKOWIE

KRAKÓW — DRUK W. L. ANCZYCA I SPÓŁKI.

SPIS RZECZY.

O ZMIANACH W WYDANIU NOWYM

NAPISAŁ

STANISŁAW MICHALSKI

Treść: 1. Dawne wydanie a nowe. — 2. Dla kogo przeznacza się Poradnik 3. Plan i metoda opracowania. — 4. Kontakt z czytelnikami; samoobserwacja przy studjach.

---

1. Wyczerpanie się pierwszego wydania 4-ch części Poradnika, poświęconych wskazówkom do kształcenia się systematycznego, stwierdziło, że sprawa samouctwa jest w kraju naszym aktualna. Po upływie 18 lat od wydrukowania części I (w wyd. I) pragnienie kształcenia się wzrosło i rozszerzyło się na większą liczbę osób.

Wymagania życia, nowopowstające szkoły, instytucje oświatowe i naukowe, ruch na polu pedagogicznym, zetknięcie się naszej młodzieży uniwersyteckiej z nauką na Zachodzie — obudziły potrzeby umysłowe, które wzrosły nietylko pod względem ilościowym, lecz i jakościowym. Coraz więcej rozpowszechnia się zrozumienie roli nauki w życiu społeczeństwa, coraz częściej podnosi się znaczenie twórczej myśli naukowej dla odrodzenia narodowego. Obok dawnego hasła: wiedza to potęga, wyłania się inne: twórczość to potęga. »Żaden zasób erudycji lub wprawy technicznej czy zdolności krytycznych nie może zwolnić umysłu od konieczności tworzenia, jeśli umysł ten ma się rozwijać. A moc twórcza nie jest sprawą zdolności statycznych — w tym znaczeniu, że ktoś naprzykład może to wykonać, a inny nie, lecz jest sprawą nawyknień i pragnień. Nie stan przedmiotów, lecz tendencja im właściwa decydują o wynikach. Pierwszym więc warunkiem rozwoju umysłowego jest twórcze raczej niż przyswajające zachowanie się umysłu, lub jak to dobrze powiedziano: pokarm umysłowy powinien iść na wytwarzanie mięśni umysłowych, nie zaś tłuszczu«[1]). To, co CLIFFORD mówi o umyśle jednostki, stosuje się i do umysłowości zbiorowej. Społeczeństwo nie bytuje normalnie, gdy nauka jego jest »owocem z cudzego ogrodu«. W twórczej pracy umysłowej narodu — nikt wyręczyć go nie może.

Chcąc żyć, trzeba tworzyć.

Pierwsze wydanie Poradnika powstało z głodu oświaty. Praca oświatowa wywołuje głód nauki.

Zmienione warunki, w jakich ukazuje się wydanie nowe, musiały wpłynąć na zmianę treści, układu i metody opracowania.

Uwzględniwszy, jak dawniej, potrzeby oświaty, a nawet rozszerzywszy działy odpowiednie, w nowym opracowaniu położono nacisk na metodykę nauczania i samokształcenia w obrębie oddzielnych nauk.

Największym zmianom i rozszerzeniu uległ Stopień III, poświęcony studjom wyższym, samodzielnym.

Podniesienie poziomu naukowego wydawnictwa zasadniczo zmieniło jego treść i wielokrotnie powiększyło rozmiary, wypadło bowiem uwzględniać te działy różnych nauk, a nieraz całe nauki, których w poprzednim przystępniejszym wydaniu nie dotykano wcale.

2. Aby pozostawiony dawny tytuł »Poradnik dla samouków« nie był powodem do jakichkolwiek nieporozumień, winniśmy tu objaśnić, że wyrazy »dla samouków« nie zacieśniają ilości czytelników do pewnej tylko kategorji osób, którym wydawnictwo ma służyć, lecz wskazują metodę kształcenia się i rozszerzają raczej sferę czytelników Poradnika, w miarę bowiem posuwania się ku studjom wyższym, samodzielnym, znaczenie samouctwa wzrasta (por. Wstęp do Stopnia III Matematyki). Właściwie więc, wydawnictwo niniejsze jest Poradnikiem naukowym dla wszystkich, jest zbiorem systematycznie ułożonych

---

[1]) W. K. CLIFFORD. Lectures and Essays, Londyn, 1901, t. I, str. 116.

wskazówek metodycznych, oraz informacji, które mogą odpowiedzieć potrzebom dorosłych czytelników różnych kategorji i przygotowania.

3. Dla ułatwienia poinformujemy korzystających z Poradnika bliżej, co wydawnictwo zawiera i w jaki sposób zostało opracowane:

Po rozprawie, dotyczącej nauki wogóle, następują działy, poświęcone naukom odrębnym.

Podajemy tu w zarysie plan, który przy opracowywaniu tych działów został mniej lub więcej uwzględniony, zależnie od charakteru nauki i od indywidualnego sposobu ujęcia jej przez autora.

Działy, poświęcone każdej z nauk, rozpoczynają się od Wstępów ogólnych. Wstęp ogólny zaznajamia czytelnika z przedmiotem i zadaniem nauki, z charakterem jej zagadnień i metod, wyjaśnia stosunek jej do innych nauk oraz wskazuje, na jakie gałęzie nauka się dzieli; przytym podawane są w związku z programem studjów najogólniejsze informacje, dotyczące planu całego działu, poświęconego pewnej nauce.

Wstępy ogólne mają charakter raczej informacyjny, nie są wykładami systematycznemi.— Poziom wstępów ogólnych nie mógł być utrzymany na wysokości Stopnia I (który posiada wstęp własny), bez obawy zubożenia treści; od czytelnika więc wstępów ogólnych wymaga się przygotowania mniej więcej w zakresie szkoły średniej.

Dalej następują: Stopień I (elementarny) i II (średni), o ile charakter nauki nie wymagał zupełnego pominięcia Stopnia I. Stopień I w stosunku do Stopnia II jest w części kursem propedeutycznym, w części zaś kursem dla tych samouków, którzy poprzestają na stopniu elementarnym. Stopień II obejmuje książki, zawierające wykład również od początków nauki, lecz w sposób systematyczniejszy i ściślejszy. Dla więcej wyrobionych samouków Stopień I nie jest koniecznym wstępem do Stopnia II; mogą bowiem zacząć naukę odrazu od Stopnia II.

Stopnie I i II przeznaczone są: z jednej strony – dla samouków, którzy zaniedbali lub przerwali swe wykształcenie i pragną się douczyć w celu: a) dopełnienia swego wykształcenia ogólnego lub b) zastosowania nauki do praktyki, lub wreszcie c) przygotowania się do studjów dalszych — z drugiej zaś strony — dla nauczycieli, nauczających w zakresie elementarnym lub średnim, szkolnym lub domowym.

Treść Stopnia I i II składa się z następujących części głównych: Wstęp — ze wskazówkami dla czytelników odpowiedniego stopnia (wymagane przygotowanie, program nauki, pomoce naukowe, praca doświadczalna i t. p.) oraz krytycznie podana Bibljografja dzieł polecanych w języku polskim a także i w obcych, dla uzupełnienia braków naszego piśmiennictwa naukowego.

Przytym podawana jest bibljografja książek, traktujących o ziemiach polskich ze stanowiska oddzielnych nauk (np. gieologja ziem polskich, flora i t. p.)

Nadto w Stopniu II, a nieraz i I, przybywają jeszcze 2 rozdziały: Historja nauki wogóle i w Polsce w szczególności, oraz Metodyka nauczania w zakresie elementarnym i średnim.

Z kolei następuje Stopień III, wyższy, odpowiadający nauczaniu uniwersyteckiemu i studjom samodzielnym. Stopień III, jak i poprzednie, rozpoczyna się od Wstępu, który omawia: wymagane przygotowanie, program studjów, metodę i technikę kształcenia się wyższego w obrębie pewnej nauki i t. p., a także plany studjów dla różnych kategorji studjujących, którzy już to potrzebują danej nauki, jako środka pomocniczego do innych nauk, już oddają się tej nauce w celu zdobycia wykształcenia ogólnego lub też wyspecjalizowania się.

Po wstępie polecane są dzieła (w języku polskim i w obcych), obejmujące całość nauki, lub odrazu następuje szereg rozdziałów, poświęconych wyodrębnionym jej gałęziom, opracowanym często przez oddzielnych specjalistów.

Każdy z tych rozdziałów składa się: ze swego Wstępu, informującego o zagadnieniach tej gałęzi nauki, o metodach ich rozwiązywania i t. p. — i z Bibljografji rozumowanej.

W Stopniu III przybywają, oprócz wspomnianych już rozdziałów (historja nauki wogóle i w Polsce w szczególności, bibljografja dzieł o ziemiach polskich ze stanowiska tej nauki), następujące: bibljografja dzieł, traktujących krytycznie o zasadach, pojęciach i metodach danej nauki oraz dzieł o technice badań (przy naukach doświadczalnych); dalej czasopisma i dzieła informacyjne (słowniki, bibljografje, encyklopedje i t. p.)

Zamknięciem Stopnia III-go jest Zakończenie, które streszcza naczelne zagadnienia i kierunki doby obecnej w nauce.

Wreszcie ostatnią częścią każdego działu naukowego jest rozdział informacyjny, składający się z dwu części: organizacja pracy naukowej w zakresie pewnej nauki, w kraju i zagranicą (towarzystwa naukowe, pracownie i t. p.) i organizacja nauczania uniwersyteckiego.

W ten sposób przy pomocy rozpraw, wskazówek metodycznych, bibljografji, podanej krytycznie, oraz szeregu informacji Poradnik usiłuje dać jak najpełniejszy obraz życia nauki współczesnej.

Poinformowaliśmy ogólnie o układzie materjału; o treści informują szczegółowo tytuły rozdziałów, zamieszczone na czele każdej rozprawy, oraz skorowidze: rzeczowy i nazwiskowy, których zasada układu podana jest na właściwym miejscu.

Nadmienimy dla wiadomości czytelników, że wiele ze wstępów ogólnych oraz wstępów do I, II i III Stopnia, a także działy informacyjne mają znaczenie ogólniejsze (p. np. Matematykę, Fizykę i t. p.) i zasługują ze względów metodycznych na przeczytanie nietylko przez interesujących się specjalnie temi naukami, poglądy bowiem i rady tam wypowiedziane mogą stosować się do całej grupy nauk pokrewnych, a nadto mieć znaczenie ogólnokształcące.

Co się tyczy porządku, w jakim artykuły, poświęcone odrębnym naukom, będą drukowane w kolejnych tomach Poradnika, z góry zastrzec się należy, że zapewne niezawsze porządek odpowie ściśle tej czy innej zasadzie układu nauk, liczyć się bowiem wypada, jak w każdym dziele zbiorowym, z koniecznościami natury praktycznej.

To, co powiedzieliśmy wyżej o planie działów naukowych Poradnika, streszcza schemat poniższy, p. t. »Plan działu naukowego«:

PLAN DZIAŁU NAUKOWEGO.

Wstęp ogólny.
- Przedmiot, zadanie nauki. — Charakter zagadnień i metod.
- Stosunek do innych nauk. — Podział nauki na gałęzie.

Stopień I. (elementarny)
- Wstęp do Stopnia I (wymagane przygotowanie, program, wskazówki metodyczne, pomoce naukowe i t. d.).
- Bibljografja z informacjami i oceną książek podstawowych i uzupełniających.

Stopień II. (średni)
- Wstęp do Stopnia II (p. Stop. I).
- Bibljografja z uwzględnieniem historji nauki i dzieł, dotyczących Polski (np. flora Polski i t. p.).
- Metodyka nauczania w zakresie elementarnym i średnim
  - Wstęp.
  - Literatura.

Stopień III. (wyższy)
- Wstęp do Stopnia III (wymagane przygotowanie, program studjów dla różnych kategorji studjujących, metoda i technika kształcenia się wyższego i t. p.).
- Dzieła obejmujące całość nauki lub większe jej działy.
- Oddzielne gałęzie nauki
  - 1
    - Wstęp: Przedmiot, metody i zagadnienia danej gałęzi nauki.
    - Literatura.
  - 2 . . . .
  - i t. d.
- Podstawy nauki (zasady, pojęcia, metody).
- Technika badań.
- Dydaktyka w zakresie Stopnia III.
- Historja nauki wogóle i w Polsce w szczególności.
- Ziemie polskie (ze stanowiska danej nauki: np. flora Polski).
- Czasopisma, słowniki, encyklopedje i inne wydawnictwa informacyjne.
  - (dla powyższych:) Wstęp. Literatura.
- Zakończenie (naczelne zagadnienia i kierunki doby obecnej w nauce).
- Dział informacyjny
  - Organizacja pracy naukowej.
  - Organizacja nauczania uniwersyteckiego.
  - Wstęp. Literatura.

4. Oddając do użytku publicznego tom niniejszy, pragnęlibyśmy wejść w kontakt z jego Czytelnikami. Nadsyłane w swoim czasie z różnych stron kraju i obczyzny listy z uwagami o pierwszym wydaniu Poradnika oraz obszerniejsze wyznania, a nawet autobiografje czytelników były bardzo cenne, pozwoliły bowiem poznać ówczesne potrzeby i aspiracje umysłowe tych sfer, śród których Poradnik znalazł oddźwięk. Dziś ramy wydawnictwa zostały rozszerzone, przez co sfera jego czytelników może się powiększyć. Zwracamy się do wszystkich interesujących się wydawnictwem i jego zadaniami, do samouków wszelkich kategorji, do młodzieży szkolnej, do studentów zakładów wyższych, do nauczycieli i t. d. z prośbą o podzielenie się z nami wiadomością: czy w Poradniku znaleźli to, czego poszukiwali, w czym wydawnictwo i wskazówki w nim zawarte ich osobiście nie zadowoliło, jakie pragnęliby widzieć zmiany lub uzupełnienia w wydaniach następnych i t. p.

Pragnęlibyśmy się dowiedzieć, czy Poradnik pobudził Czytelnika do zajmowania się nauką i czy wskazał mu kierunek i metodę pracy; jak dalece Czytelnik korzystał ze wskazówek, zawartych w Poradniku, i o ile zastąpił je innemi lub też kierował się własnemi pomysłami. Wogóle zwracamy uwagę na pożytek samoobserwacji przy kształceniu się i studjach. Studenci np. i wogóle wszyscy, gdy się w nich budzić zaczyna samodzielne życie umysłowe, mogą gromadzić wiadomości, dotyczące powstawania i zmiany zamiłowań, stosunku wiedzy pochłanianej do zdobyczy własnych, warunków, w jakich wynurzają się ich własne zagadnienia naukowe, — co do postawy umysłu względem tych zagadnień, co do tych znamiennych momentów, gdy rozpoczyna się twórcza praca naukowa, co do dróg, jakiemi doszło się do niej, błędów, jakie się popełniło, co do metody pracy i t. p. (porówn. wstępy i wskazówki metodyczne w działach poświęconych: matematyce, fizyce i t. p.); nie chcemy krępować ankietą, dajemy tylko przykłady, zachęcając do badania siebie. Chodzi o materjał z pierwszej ręki. Niech każdy dotknie ze stanowiska tu omawianego tych jedynie zagadnień, w zakresie obranej przez siebie nauki, które go osobiście obchodzą żywo w danym momencie. Nie schwytane na gorącym uczynku, nie podpatrzone w chwili aktualnej ulatują z pamięci i potym nie dają się łatwo odtwarzać, gdy nieznacznie przepływamy do innych stanów umysłowych lub gdy nieprzyjazne okoliczności zewnętrzne zagłuszają rozwój naturalny myśli naszych.

Obszerniejsze sprawozdania na ten temat [1]), wiadomości zebrane z własnych, dłuższy czas trwających obserwacji nad sobą i rozmyślań, z osobistych przeżyć umysłowych Czytelnika w czasie kształcenia się i studjów są niezmiernie pożądane, oświetlić mogą niejedną stronę naszego życia i być materjałem, użytecznym zarówno do celów praktycznych (np. poznawanie siebie, udzielanie rad innym rozpoczynającym studja i t. p.), jak i do rozważania teoretycznego [2]).

Warszawa, w lipcu 1914 r.

Tom niniejszy, był na ukończeniu w lipcu 1914 r., z powodu jednak wypadków wojennych dopiero w końcu r. 1915 został wykończony oraz uzupełniony niezbędnemi dodatkami.

---

[1]) Adres do nadsyłania wiadomości: Księgarnia Gebethnera i Wolffa w Warszawie, dla »Poradnika dla Samouków«.

[2]) Por. np.: H. Fehr. Enquête de l'Enseignement Mathématique sur la méthode de travail des mathématiciens. Paryż, 1905. Tu także odnieść należy broszurę: S. Gelblum. Par l'historique à la science des idées (bez daty i miejsca wydania), która powstała pod wpływem przyrodnika polskiego A. Dobrowolskiego. D. zachęcił autora broszury do ścisłego notowania, w dziedzinie jego specjalności, — wszystkiego, co dotyczy gienezy i rozwoju wynalazków. Dobrowolski sądzi, że badanie historji wynalazków pozwoli poznać mechanizm umysłu wynalazczego. Autor broszury proponuje w przedmowie, aby każda oryginalna praca naukowa zaopatrywana była w dodatek, zawierający jej historją — i w myśl tego podaje przykłady podobnego badania. — Dalej wymienić należy: W. Ahrens. Scherz u. Ernst i. d. Mathematik. Lipsk, 1904; R. E. Moritz. Memorabilia mathematica, or the Philomat's Quotations book. N. York, The Macmillan Co. 1914, str. VII+410. Cena szyl. 12 p. 6; — oraz wogóle autobiografje, korespondencje i życiorysy uczonych (p. rozdziały o historji nauk w Poradniku).

O NAUCE.

NAPISAŁ

JAN ŁUKASIEWICZ.

---

1. We wstępie do dzieła, co poradą ma służyć wszystkim chętnym wiedzy, a także i chciwym pracy naukowej, chcę o nauce przedstawić pogląd, niezupełnie zgodny z mniemaniem potocznym. Zarówno bowiem uczeni, jak ludzie zdala od nauki stojący, mniemają zwykle, że celem nauki jest prawda, prawdę zaś opierają na zgodności myślenia i bytu. Sądzą więc, że praca uczonego polega na odtwarzaniu faktów w zdaniach prawdziwych. Podobnie płyta fotograficzna odtwarza światła i cienie, a fonograf dźwięki. Poeta, malarz lub muzyk tworzą; uczony nie tworzy, lecz tylko odkrywa prawdę.

Taki splot myśli niejednego uczonego napawa nieuzasadnioną dumą, niejednego artystę pobudza do lekceważenia nauki. Poglądy te wykopały przepaść między nauką a sztuką, a w przepaści tej zginęło zrozumienie dla rzeczy bezcennej: dla twórczości w nauce.

Pragnę wykazać w tych ustępach, że nauka nie polega tylko na intelektualnym odtwarzaniu świata i że prawda nie jest jej celem wyłącznym. Nauka jest tak jak sztuka twórczym dziełem człowieka. Ścisłemu, trzeźwemu uczonemu wyda się może taka myśl fantazją; a jednak wiedzie nas do niej z nieuchronną koniecznością ta wiedza, którą nazwano »sztuką sztuk i nauką nauk«: logika.

2. *Nie wszystkie zdania prawdziwe są prawdami naukowemi.* Istnieją prawdy dla nauki za błahe, bo istnieją fakty za błahe. Arystofanes opowiada w »Chmurach«, że

> »właśnie Sokrates spytał Chajrefonta,
> ile pchła własnych stóp uskoczyć zdoła,
> co jednym susem ze brwi Chajrefonta
> skoczyła sobie na mistrza łysinę«.

Sokrates złapał pchłę, łapki jej zanurzył w roztopionym wosku, tak pchła dostała buciki, poczym zdjął je i wymierzył niemi odległość. Prawda istnieje i o pchlim skoku, przez który ucierpiał Sokrates; ale właściwym dla prawd takich miejscem jest komedja, nie nauka.

Mógłby może ktoś sądzić, że niema faktów dla nauki za błahych i niema prawdy zbyt błahej. Kto tak myśli, niech zważy, że wszechświat jest w swych objawach nieskończenie bogaty i że sił ludzkich nie starczy, by poznać je wszystkie. Ileż to prawd można wypowiedzieć o tej kartce papieru! Można wymierzyć jej szerokość i długość, oznaczyć jej grubość i barwę, podać ilość liter, znajdujących się na niej. Można obliczyć, ile razy litera *w* pojawia się na jednej jej stronie, a ile razy *g*. Można opisać kształt i wielkość każdej litery i wziąwszy lupę do ręki wyszukać różnice między jednym *w* a drugim. Badania te możnaby rozszerzać i pogłębiać coraz bardziej i wynikami ich zapełnić całe grube tomy. Tak samo możnaby postąpić z każdą inną rzeczą. Z nieskończonej ilości faktów musimy wybierać tylko fakty ważne, a inne jako błahe pomijać. Jakże łatwo byłoby dokonywać odkryć naukowych, gdyby nauka polegała na gromadzeniu jakichkolwiek zdań prawdziwych!

Umysł ludzki, wytwarzając naukę, nie dąży do wszechwiedzy. Gdyby tak było, musielibyśmy dbać i o najlichszą prawdę. Istotnie wszechwiedza zdaje się być raczej ideałem religijnym, niż naukowym. Bóg zna wszystkie fakty, bo jest

Stwórcą i Opatrznością świata, a Sędzią ludzkich chęci i czynów. Według psalmisty, Bóg

»widzi i sprawy nasze i myśli zamknione,
bo przezeń serca nasze stworzone«.

Jakże inaczej Arystoteles pojmuje doskonałą wiedzę! I według niego mędrzec wie wszystko; nie zna atoli faktów szczegółowych, lecz ma tylko wiedzę ogółu. Znając zaś ogół, zna poniekąd i wszystkie szczegóły, podpadające pod ogół. Potencjalnie zatym wie wszystko, co można wogóle wiedzieć. Lecz tylko potencjalnie; aktualna, istotna wszechwiedza nie jest ideałem Stagiryty.

3. Skoro nie wszystkie zdania prawdziwe należą do nauki, to *poza prawdziwością musi jeszcze istnieć jakaś inna wartość, która zdania podnosi do godności prawd naukowych.*

Już Arystoteles za tę wartość dodatkową uważał ogólność. Wiedza naukowa, twierdzi Stagiryta, nie tyczy się zdarzeń przypadkowych (jakim był skok pchły ze brwi Chajrefonta), ale faktów, powtarzających się stale lub przynajmniej często. Wyrazem takich faktów są zdania ogólne i tylko one należą do nauki.

Do podobnego poglądu skłaniają się dzisiaj ci uczeni, którzy za istotne zadanie nauki uważają tworzenie praw, czyli zdań ogólnych, wyrażających związki konieczne lub stałe.

Ogólność wszelako nie jest ani niezbędną, ani wystarczającą cechą prawd naukowych. Nie jest cechą niezbędną, bo nie można wykreślić z nauki zdań jednostkowych. Zdanie jednostkowe »Władysław Jagiełło zwyciężył pod Grunwaldem« głosi o ważnym zdarzeniu historycznym; sąd jednostkowy o istnieniu planety Neptuna, sformułowany na mocy rachunku przed odkryciem tej planety, należy do największych tryumfów astronomji. Bez zdań jednostkowych historja przestałaby istnieć jako nauka, a z wiedzy przyrodniczej pozostałyby strzępy teorji.

Ogólność nie jest wystarczającą cechą prawd naukowych. O czterowierszu Mickiewicza:

»na każdem miejscu i o każdej dobie,
gdziem z tobą płakał, gdziem się z tobą bawił,

wszędzie i zawsze będę ja przy tobie,
bom wszędzie cząstkę mej duszy zostawił«;

można orzec następujące zdania ogólne:
»Każdy wiersz zawiera literę *s*«.
»Każdy wiersz, który zawiera literę *m*, zawiera ją dwa razy«.
»W każdym wierszu ilość liter *m* jest funkcją ilości liter *s*, wedle wzoru:

$$m = s^2 - 5s + 6\text{«}.$$

Z formułki tej wynika, że dla $s = 1$ (wiersz pierwszy i drugi) $m = 2$, dla $s = 2$ (wiersz trzeci) $m = 0$, a dla $s = 4$ (wiersz czwarty) $m = 2$, co zgodne jest z ilościami tych liter w przytoczonym czterowierszu.

Takich zdań ogólnych można tworzyć bez liku; czy zaliczymy je do nauki?

Mógłby jednak ktoś twierdzić, że zdania powyższe, jakkolwiek ogólne, nie są p r a w a m i, bo nie wyrażają stałego ani koniecznego związku. Kto taki zarzut stawia, może zadowoli się następującemi przykładami: »Żaden człowiek nie może zarazem mieć i nie mieć nosa długiego na 15 *cm*«. — »Każdy punkt w przestrzeni albo jest, albo nie jest oddalony o 100 metrów od kropki, która w tym egzemplarzu Poradnika kończy niniejsze zdanie«. — Twierdzenia te nietylko są ogólne, ale wyrażają zarazem jakieś związki k o n i e c z n e i tyczą się w s z y s t k i c h ludzi i w s z y s t k i c h punktów w przestrzeni; są więc prawami. W miejsce cyfr 15 i 100 można wstawić jakiekolwiek inne cyfry i uzyskać nieskończoną ilość prawd koniecznych. Czy i te prawdy zaliczymy do nauki?

4. Arystoteles, przyjmując ogólność, jako znamię prawd naukowych, ulegał urokowi wartości m e t a f i z y c z n e j. Na dnie stale powtarzających się faktów przeczuwał byt trwały, różny od znikomych zjawisk świata zmysłowego. Dziś uczeni widzą w ogólności raczej wartość p r a k t y c z n ą.

Zdania ogólne, określając warunki powstawania zjawisk, pozwalają przewidywać przyszłość, wywoływać zjawiska pożyteczne, a zapobiegać szkodliwym. Stąd pogląd, że prawdy naukowe to zdania p r a k t y c z n i e c e n n e, reguły skutecznego działania.

Lecz i wartość praktyczna nie jest niezbędną ani wystarczającą cechą prawd naukowych. Twierdzenie Gaussa, że każda liczba pierwsza kształtu $4n+1$ jest iloczynem dwu liczb sprzężonych, np. $5=(1+2i)(1-2i)$, $13=(2+3i)(2-3i)$, przyczym $i=\sqrt{-1}$ nie ma wartości praktycznej. Natomiast wiadomość z policji, że odebrano złodziejom skradzione przez nich rzeczy, jest prawdą, dla poszkodowanych praktycznie bardzo cenną. A ile to zjawisk można przewidzieć, ilu wypadkom skutecznie zapobiec na mocy prawa, którego w tym brzmieniu nie znał Galileusz: »Wszystkie ołówki Towarzystwa akcyjnego Majewski i Spółka w Warszawie, nie zawieszone ani podparte, spadają z prędkością, wzrastającą proporcjonalnie do czasu spadania!«

Niejedną prawdę naukową zrodziła potrzeba życiowa. Więcej jednak pożytku, nawet praktycznego, przyniosło ludzkości bezinteresowne uprawianie wiedzy. Faraday, badając zachowanie się zwojów drutu w obecności magnesu, nie myślał zgoła, że badania jego mogą stać się czymś więcej, niż zaspokojeniem teoretycznej ciekawości. Odkrył zjawiska indukcji magneto-elektrycznej. Zastosowaniom tego odkrycia zawdzięczamy dziś potężne prądnice, które dają nam światło elektryczne, pędzą motory i koleje, przenoszą siłę na odległość.

Nizko myślą o nauce ci, co radziby z niej zrobić służebnicę życia codziennego. Wznioślej, choć nie lepiej myślał Tołstoj, gdy, potępiając badania eksperymentalne, żądał od nauki jedynie pouczenia w sprawach etycznych. Nauka ma ogromne znaczenie praktyczne, może podnieść człowieka etycznie, bywa źródłem zadowolenia estetycznego; ale istotna jej wartość leży w czym innym.

5. Arystoteles początek nauki upatrywał w zdziwieniu. Dziwili się starożytni Grecy, że bok i przekątnia kwadratu nie mają wspólnej miary. Zdziwienie jest stanem psychicznym intelektualno-uczuciowym. Stanów takich istnieje więcej, jak ciekawość, lęk przed nieznanym, niedowierzanie, niepewność. Nie są one dotąd dokładnie zbadane, ale pobieżna już analiza wykazuje w nich wszystkich, obok czynników emocjonalnych, pierwiastek intelektualny, pragnienie wiedzy.

Pragnienie to tyczy się faktów, ważnych dla jednostek, albo dla wszystkich ludzi. Zakochany, którego dręczy niepewność, czy ukochana mu sprzyja, pragnie poznać fakt, ważny dla niego samego. Ale każdy człowiek z lękiem i ciekawością spogląda ku śmierci, usiłując daremnie zgłębić jej tajemnicę. O pragnienie jednostek nauka się nie troszczy; bada to, co w k a ż d y m człowieku może wzbudzić chęć wiedzy.

Jeśli myśl ta jest trafna, to *wartość dodatkową, którą oprócz prawdziwości każde zdanie winno posiadać, by należało do nauki, możnaby określić jako zdolność wywoływania lub zaspokajania, bezpośrednio albo pośrednio, potrzeb intelektualnych ogólno-ludzkich, t. zn. takich, które odczuć może każdy człowiek, stojący na pewnym stopniu rozwoju umysłowego.*

Prawda o skoku pchły ze brwi Chajrefonta nie należy do nauki, bo nie wzbudza ani nie zaspokaja żadnej ogólno-ludzkiej potrzeby intelektualnej. Wiadomość z policji o skradzionych rzeczach może zaciekawić co najwyżej jednostki. Nikomu również nie zależy na wiedzy, ile razy jakieś litery pojawiają się w pewnym wierszu i jaki związek łączy te ilości. Nawet zdanie o spadaniu ołówków Majewskiego nie znajdzie się w podręczniku fizyki, bo chęci poznania czyni już zadość o g ó l n e prawo o spadaniu ciał ciężkich.

Twierdzenie Gaussa o możności rozłożenia liczb pierwszych kształtu $4n+1$ na czynniki sprzężone znane jest tylko niewielu uczonym. A jednak należy do nauki, bo odsłania dziwną prawidłowość l i c z b. Prawa zaś liczb, tego potężnego narzędzia badania, budzą ciekawość w każdym myślącym człowieku. Istnienie planety Neptuna nie wszystkich może obchodzi. Ale fakt ten potwierdza syntezę Newtona o budowie s y s t e m u s ł o n e c z n e g o. Przyczynia się więc pośrednio do zaspokojenia potrzeby umysłowej, odczuwanej przez ludzkość od najdawniejszych czasów. Zwycięstwo Jagiełły, jako takie, Japończyka może nie zajmie. Ale zdarzenie to jest ważnym ogniwem w dziejowym stosunku dwu narodów, a dzieje n a r o d u nie mogą być obojętne żadnej kulturalnej jednostce.

Jak sztuka wyrosła z tęsknoty za pięknem, tak naukę wytworzył popęd do wiedzy. Szukać celów nauki poza sferą myślową jest równie wielkim błędem, jak krępować sztukę względami na pożytek. Zarówno uprawnione są hasła: »nauka dla nauki« i »sztuka dla sztuki«.

6. Rozważania dotychczasowe dały nam dwa wyniki: okazały po pierwsze, że sama prawda nie jest wystarczającą cechą zdań naukowych, bo istnieją zdania prawdziwe, zarówno jednostkowe jak ogólne, które nie należą do nauki; po wtóre, że zdania prawdziwe nabierają wartości naukowej dopiero wtedy, gdy pozostają w jakimś związku z potrzebami intelektualnemi człowieka. Następstwa tego drugiego twierdzenia doprowadzą nas do poglądu, że prawda nietylko nie jest wystarczającą, ale że nie jest nawet niezbędną cechą zdań naukowych. Nauka bowiem, dążąc do zaspokojenia intelektualnych potrzeb człowieka, nie może poprzestać na odtwarzaniu faktów, lecz musi wytwarzać teorje. *Żadna zaś teorja nie jest czystym odtworzeniem faktów, lecz każda zawiera pierwiastki twórcze.* Dlatego też prawdziwość żadnej teorji nie da się udowodnić, o ile pojmujemy prawdziwość jako zgodność myślenia z rzeczywistością.

Wszelka teorja rodzi się z rozumowania. Rozumowanie zaś bierze się stąd, że pragnienie wiedzy rzadko kiedy znajduje zupełne zaspokojenie w samej obserwacji faktów. Nietylko bowiem pragniemy wiedzieć, jak dany fakt wygląda, ale chcemy też zwykle poznać jego przyczyny, przewidzieć jego skutki, wyprowadzić go z jakiejś zasady i zrozumieć go wszechstronnie. We wszystkich tych wypadkach musimy sięgać do czynników, które nie są nam dane bezpośrednio, w doświadczeniu zmysłowym czy umysłowym lub w pamięci. Jedyną zaś drogą, by wyjść poza ciasne koło danych bezpośrednich, jest rozumowanie.

I tak, kto dziwi się niewspółmierności boku i przekątni w kwadracie i pragnie sobie ten fakt wytłumaczyć, szuka racji, które mu nie są bezpośrednio dane, a z których zdanie o niewspółmierności wynikałoby jako następstwo. Kto lęka się przejścia ziemi przez ogon komety i pragnie przewidzieć przy pomocy znanych praw przyrody, jakie następstwa mogłoby to zdarzenie wywołać, ten drogą wnioskowania stara się poznać fakty, których jeszcze nie doświadcza. Matematyk, który ma wątpliwość, czy równanie $x^n + y^n = z^n$ jest nierozwiązalne w liczbach całkowitych i różnych od zera dla n całkowitego i większego od 2, szuka dowodu, czyli zdań pewnych, dotąd nikomu nieznanych, któreby uzasadniły to wielkie twierdzenie Fermata. Człowiek, który ulegając halucynacjom niedowierza w danej chwili swoim spostrzeżeniom i pragnie sprawdzić ich objektywność, szuka następstw założenia, że doznaje halucynacji. Tłumaczenie, wnioskowanie, dowodzenie, sprawdzanie są rodzajami rozumowania.

Ażeby zrozumieć, dlaczego wszelka teorja jest twórczym dziełem człowieka, nie zaś odtworzeniem faktów, trzeba poznać teorję rozumowania.

7. Każde rozumowanie opiera się na stosunku wynikania. Mówimy, że ze zdania albo z grupy zdań a wynika zdanie b, jeśli b musi być prawdziwe, gdy prawdziwe jest a. Zdanie lub grupa zdań a zowie się racją, zdanie b następstwem. Z prawdziwością racji łączy się więc zawsze prawdziwość następstwa. Np., jeśli prawdziwe są zdania: »każdy Polak jest człowiekiem i każdy człowiek jest śmiertelny«, to musi być prawdziwe zdanie: »każdy Polak jest śmiertelny«. Ogólnie: jeśli »każde S jest M i każde M jest P«, to »każde S jest P«.

Stosunek wynikania jest niesymetryczny, czyli ma tę właściwość, że może ale nie musi zachodzić w kierunku od b do a, gdy zachodzi w kierunku od a do b. Innemi słowy, jakkolwiek z prawdziwością racji łączy się zawsze prawdziwość następstwa, to, na odwrót, z prawdziwością następstwa nie łączy się zawsze prawdziwość racji. Nie można tedy wnioskować z prawdziwości następstwa o prawdziwości racji. Np., z tego, że »każde S jest P«, nie wynika, że »każde S jest M« lub że »każde M jest P«.

Racja i następstwo odgrywają zatym w stosunku wynikania role odmienne i inne jest przejście od racji do następstwa, a inne od następstwa do racji. Przejście od racji do następstwa zowię kierunkiem wynikania.

Fakt, że stosunek wynikania jest niesymetryczny, a zatym kierunkowy, ma zasadnicze znaczenie dla teorji rozumowania. Rozumowaniem nazywam taką czynność umysłu, która na podstawie zdań danych, będących punktem wyjścia rozumowania, szuka zdań innych, będących celem rozumowania, a połączonych z poprzedniemi stosunkiem wynikania. Przejście od punktu wyjścia do celu rozumowania zowię kierunkiem rozumowania.

Kierunek rozumowania może być zgodny lub niezgodny z kierunkiem wynikania. Stąd można podzielić wszystkie rozumowania na dwie wielkie klasy: rozumowanie dedukcyjne, w którym kierunek rozumowania jest zgodny z kierunkiem wynikania i rozumowanie redukcyjne, w którym kierunek rozumowania jest przeciwny kierunkowi wynikania. Rozumowanie dedukcyjne czyli dedukcja szuka następstw dla danych racji, rozumowanie redukcyjne czyli redukcja szuka racji dla danych następstw.

Każdą z tych dwu klas rozumowania można jeszcze podzielić na dwie dalsze, zależnie od tego, czy punkt wyjścia rozumowania jest zdaniem pewnym, czyli takim, o którego prawdziwości rozumujący jest przekonany, czy też niepewnym. W ten sposób powstają cztery główne rodzaje rozumowania:

Wnioskowanie: jest to rozumowanie dedukcyjne, które dla danych zdań pewnych szuka następstw. Wnioskuję, jeśli za punkt wyjścia rozumowania obieram zdanie pewne, np.: »każda liczba pierwsza kształtu $4n+1$ jest sumą dwu kwadratów«, zdanie to traktuję jako rację i wyprowadzam z niego następstwo: »a więc 53 jest sumą dwu kwadratów«. Następstwa racji pewnych są zawsze pewne.

Sprawdzanie: jest to rozumowanie dedukcyjne, które dla danych zdań niepewnych szuka następstw pewnych. Sprawdzam, jeśli za punkt wyjścia rozumowania obieram zdanie niepewne, np.: »ulegam (może) halucynacji wzrokowej«, zdanie to traktuję jako rację i wyprowadzam z niego następstwo: »a więc tego, co widzę, (może) ktoś inny nie widzi«, usiłując przytym przekonać się o prawdziwości tego następstwa.

Tłumaczenie: jest to rozumowanie redukcyjne, które dla danych zdań pewnych szuka racji. Tłumaczę, jeśli za punkt wyjścia rozumowania obieram zdanie pewne, np.: »nie otrzymałem listu od przyjaciela«, zdanie to traktuję jako następstwo i staram się doszukać do niego jakiejś racji: »przyjaciel mój chory i pisać nie może« albo »list zaginął«. Racje następstw pewnych nie muszą być pewne.

Dowodzenie: jest to rozumowanie redukcyjne, które dla danych zdań niepewnych szuka racji pewnych. Dowodzę, jeśli za punkt wyjścia rozumowania obieram zdanie niepewne, np. twierdzenie Fermata o równaniu $x^n + y^n = z^n$, zdanie to traktuję jako następstwo i szukam zdań pewnych, z którychby jako z racji wynikało to twierdzenie.

8. Gdyby prawdą było, że nauka ma na celu odtwarzać rzeczywistość, to musiałyby ten cel spełniać przedewszystkim nauki empiryczne. Są to bowiem nauki, które zajmują się badaniem rzeczywistości i opierają się na faktach, danych w doświadczeniu. Zdania, stwierdzające te fakty, są jednostkowe i pewne.

Stwierdzanie faktów nie może atoli pragnienia wiedzy zaspokoić w całej pełni; do faktów trzeba dołączyć teorję, stworzoną drogą rozumowania.

W naukach empirycznych rozumowanie to musi za punkt wyjścia obierać zdania o faktach, danych w doświadczeniu, a więc zdania jednostkowe i pewne. Nie może to być przeto ani sprawdzanie ani dowodzenie, bo te rodzaje rozumowania wychodzą ze zdań niepewnych, ani też wnioskowanie, bo zdania jednostkowe nie nadają się na racje zdań innych. Nauki empiryczne zatym posługują się głównie tłumaczeniem, a więc tym rodzajem rozumowania redukcyjnego, które dane zdania pewne traktuje jako następstwa i doszukuje do nich racji.

Najprostszym i najpospolitszym rodzajem tłumaczenia, używanym w naukach empirycznych, jest indukcja niezupełna czyli właściwa. Jest to rozumowanie, które za punkt wyjścia obiera zdania jednostkowe i pewne, mające różne podmioty a to samo orzeczenie, np.: »S_1 jest P«, »S_2 jest P«, »S_3 jest P«..., zdania te traktuje jako następstwa i doszukuje do nich racji w formie zdania ogólnego: »każde S jest P«, przyczym zakres terminu S obejmuje zarówno indywidua S_1, S_2, S_3, jak i inne indywidua, niezaobserwowane.

Rozumowanie to nie może uchodzić za wnioskowanie, bo z tego, że niektóre tylko S są P, nie wynika, że wszystkie S są P. Kierunek wynikania nie jest więc zgodny z kierunkiem rozumowania, przebiega natomiast odwrotnie, bo z tego, że »każde S jest P«, wynika, że »S_1 jest P« i »S_2 jest P« i t. d. Zdanie ogólne czyli prawo: »każde S jest P« tłumaczy nam zatym, dlaczego »S_1 jest P« i »S_2 jest P« i t. d.

Innym rodzajem tłumaczenia, stosowanym przez nauki empiryczne, jest tworzenie hipotez. Jakkolwiek przez hipotezę rozumiemy zazwyczaj każde zdanie niepewne, to przecież byłoby może rzeczą stosowną zachować to wyrażenie dla zdań o faktach, których w doświadczeniu bezpośrednio nie stwierdzamy, a które w połączeniu z jakimś zdaniem ogólnym tłumaczą nam fakty, dane w doświadczeniu. Ktoś stwierdził np., że jakieś »S jest P«; ale nie wie, dlaczego. Chcąc znaleźć wyjaśnienie, przyjmuje, że owo »S jest M«, chociaż w doświadczeniu tego faktu nie stwierdza. Wie wszakże, że »każde M jest P«; jeśli więc przyjmie, że »S jest M«, to z obu tych przesłanek może wyprowadzić zdanie, że »S jest P«.

I to rozumowanie nie jest wnioskowaniem, bo z tego, że »S jest P«, nie wynika, że »S jest M«, bez względu na to, czy zdanie: »każde M jest P« jest prawdziwe, czy nie. Kierunek wynikania nie jest więc zgodny z kierunkiem rozumowania, przebiega natomiast odwrotnie, bo z tego, że »S jest M«, wynika, że »S jest P«, jeśli prawdziwe jest zdanie, że »każde M jest P«. Hipoteza: »S jest M« tłumaczy nam zatym, przy pomocy prawa »każde M jest P«, dlaczego »S jest P«.

9. Każda teorja naukowa, tycząca się faktów rzeczywistych, a więc i każda teorja przyrodnicza, jest splotem praw i hipotez. Ponieważ prawa i hipotezy uzyskujemy drogą rozumowania redukcyjnego, przeto i wszelkie teorje nauk empirycznych są wynikami redukcji.

Wyniki rozumowania redukcyjnego posiadają dwie cechy:

zawierają coś więcej, niż zdania, będące punktem ich wyjścia, i nie dadzą się na podstawie tych zdań udowodnić.

Pierwsza cecha bierze się stąd, że racja, obejmując sobą wszystkie swe następstwa, jest obszerniejsza, niż każde z jej następstw zosobna lub jakaś część jej następstw. Jeśli tedy rozumujemy dedukcyjnie, np. wnioskujemy, to z danych racji wysnuwamy tylko takie zdania, które potencjalnie już się w nich zawierają. Stąd mniemanie, niesłuszne zresztą, że dedukcja nie daje nam nic nowego. Jeśli natomiast rozumujemy redukcyjnie, wtedy, idąc od następstw ku racjom, wznosimy się do zdań, obejmujących więcej, niż dane nam następstwa, i zdobywamy naprawdę nowe wiadomości.

Stwierdzić to można z łatwością na prawach, uzyskanych indukcyjnie, i na hipotezach. Zdanie ogólne, czyli prawo: »każde S jest P«, zdobyte na podstawie zdań jednostkowych: »S_1 jest P«, »S_2 jest P«..., zawiera coś więcej, niż te zdania jednostkowe. Bo albo pojmujemy to zdanie ogólne jako zbiór zdań jednostkowych: »S_1 jest P i S_2 jest P i ... S_n jest P«, a wtedy zdanie takie, jak »S_n jest P«, nie zaobserwowane w doświadczeniu, jest całkiem nowe, różne od danych nam następstw; albo też pojmujemy to zdanie ogólne jako okres warunkowy, wyrażający zależność: »jeśli coś jest S, to jest P«, a wtedy zależność ta jest także czymś nowym, co nie jest nam dane w zdaniach jednostkowych. W obu wypadkach racja zawiera coś więcej, niż doświadczalnie dane następstwa; a to plus nie pochodzi już z doświadczenia i nie jest odtworzeniem faktów, tylko jest wytworzone przez umysł człowieka.

Tak samo ma się sprawa z hipotezami. Zdanie »S jest M« nie zawiera się w następstwie, stwierdzonym doświadczalnie: »S jest P«, choćbyśmy nawet uwzględnili prawo: »każde M jest P«. Hipoteza: »S jest M« przedstawia coś nowego, jakiś fakt przypuszczalny, którego w danej chwili nie stwierdzamy w doświadczeniu, tylko, co najwyżej, możemy później stwierdzić. A więc i hipotezy nie pochodzą z doświadczenia i nie są odtworzeniem rzeczywistości, tylko są wytworzone przez umysł człowieka.

Okazuje się w ten sposób na mocy właściwości rozumowania redukcyjnego, że żadna teorja nauk empirycznych nie jest czystym odtworzeniem faktów, lecz że każda zawiera pierwiastki twórcze.

Z właściwości redukcji wynika i druga cecha teorji empirycznych, mianowicie ta, że nie dadzą się udowodnić na podstawie swego punktu wyjścia czyli doświadczenia. Rozumowanie redukcyjne bowiem szuka racji dla danych następstw; z prawdziwością następstwa jednak nie musi się łączyć prawdziwość racji. Dlatego też nie możemy nigdy wiedzieć na pewno, czy prawa, zdobyte indukcyjnie, lub hipotezy, których nie stwierdziliśmy później w doświadczeniu, są prawdziwe. Zdobywamy dzięki redukcji nowe wiadomości, ale tylko kosztem zrezygnowania z ich pewności.

Nauki empiryczne posługują się wprawdzie jeszcze innym rozumowaniem, które możliwe jest dopiero wtedy, gdy jakieś prawa lub hipotezy zostały już utworzone: sprawdzaniem. Ale i to rozumowanie nie daje nam pewności. Sprawdzanie bowiem jest to takie rozumowanie, które dla danych zdań niepewnych, w tym wypadku praw i hipotez, szuka następstw pewnych. Otóż o ile jakieś następstwo prawa lub hipotezy okaże się fałszywe, to i prawo to lub hipoteza są fałszywe, bo z fałszywością następstwa musi się łączyć fałszywość racji. Jeśli jednak wszystkie znane nam następstwa są prawdziwe czyli zgodne z faktami, to z tego nie wynika, że i racja jest prawdziwa, bo z prawdziwością następstwa nie musi się łączyć prawdziwość racji. Wnioskować z prawdziwości następstw o prawdziwości racji można tylko wtedy, gdy znane są wszystkie następstwa; wiedza ta atoli nie jest nam nigdy dana, gdy chodzi o badanie faktów rzeczywistych.

Mógłby się ktoś zapytać, dlaczego wogóle rozumujemy redukcyjnie, skoro nie otrzymujemy tą drogą zdań prawdziwych, a przynajmniej nie możemy stwierdzić ich prawdziwości. Odpowiedź na to pytanie jest prosta, jeśli zastanowimy się nad celami nauki. Nauka ma na celu zaspokajać ogólno-ludzkie potrzeby intelektualne. Do potrzeb tych należy i pragnienie, by zorjentować się w chaosie otaczających nas zjawisk i zrozumieć je o ile możności, a cel ten osiągamy, wyprowadzając te zjawiska z niewielu prostych zasad. Zasad tych nie umiemy wprawdzie udowodnić, ale z chwilą, gdy możemy z nich jako z racji wyprowadzić znane nam fakty, a nawet szczęśliwym trafem przewidzieć inne nieznane, i gdy dzięki nim możemy wszystkie te fakty uporządkować i ująć w jakąś całość, to pragnienie nasze zostało zaspokojone. Dlatego też bywa czasem, że wyniki redukcji utrzymujemy w mocy nawet wtedy, gdy nie wierzymy już w ich prawdziwość, jeśli tylko pozwalają nam orjentować się w świecie. Chwieją się dziś podobno leges motus Newtona; gdyby nawet runęły, wskutek odkryć z elektroniki, to przecież w praktyce długo jeszcze zapewne przetrwają swój upadek, bo tłumaczą nam w gienjalnie prosty sposób zjawiska mechaniczne na ziemi i na niebie.

10. Suche te i abstrakcyjne rozważania nabiorą może życia, gdy sprawdzimy je na przykładach.

Zastanówmy się nad uogólnieniem Galileusza: »Wszystkie ciała ciężkie, nie zawieszone ani podparte, spadają z prędkością, wzrastającą proporcjonalnie do czasu spadania«. W uogólnieniu tym zawiera się prawo, wyrażające związek funkcjonalny między prędkością v a czasem spadania t, o wzorze $v = gt$.

Prawo to Galileusz opierał na znikomo małej ilości faktów: kazał toczyć się kulom metalowym w pochyło ustawionych rynienkach i mierzył ich czasy spadania. A przecież uogólnienie jego obejmuje w s z y s t k i e wypadki wolnego spadania ciał. Nietylko kula metalowa, tocząca się w rynience, ale ta sama kula, lecąca z wysokiej wieży, i kamień, wrzucony do głębokiej studni i każdy przedmiot, upuszczony przez człowieka, muszą wedle niego ulegać temu prawu. I nietylko zachowywać się muszą w ten sposób ciała ciężkie we Florencji w wieku XVII, ale gdziekolwiekbądź na ziemi i w jakimkolwiekbądź czasie, nawet w epoce węglowej, gdy ludzi jeszcze nie było. Ileż więc faktów, nie stwierdzonych i nie zbadanych mieści w sobie to uogólnienie?

Idźmy dalej. Wielkość t w podanej przez Galileusza formułce przybierać może wartości całkowite, ułamkowe, niewymierne, przestępne. Powstaje znowu nieskończona moc zdań o wypadkach, których także nikt nigdy nie stwierdził i nie może stwierdzić. Jakże więc można mniemać, że prawo Galileusza jest odtworzeniem faktów? Możeby nam wolno było tak sądzić, gdybyśmy przynajmniej mieli pewność, że prawo to jest prawdziwe. Ale jak zdobyć tę pewność, skoro znamy tylko nieznaczną ilość faktów i to tylko laboratoryjnych, a olbrzymia ich reszta jest dla nas na zawsze niedostępna? A brak nam przecież wszelkiej logicznej podstawy, by twierdzić, że fakty nieznane muszą zachowywać się tak samo, jak znane i zbadane.

Gdybyśmy jednak mieli nawet możność poznania wszystkich faktów wolnego spadania ciał, to i wtedy nie moglibyśmy formułki $v = gt$ uważać za ich odtworzenie. Chcąc bowiem przekonać się, czy formułka ta jest wiernym wyrazem rzeczywistości, musielibyśmy w każdym wypadku wymierzyć prędkość v i czas spadania t. Żaden zaś pomiar nie jest nigdy dokładny. Niepodobna więc stwierdzić, że prędkość jest dokładnie proporcjonalna czasowi spadania.

Wiemy wreszcie skądinąd, że prawo o spadaniu ciał ciężkich może być tylko w przybliżeniu prawdziwe. Suponuje bowiem warunki nie istniejące, jak stałość przyśpieszenia ziemskiego lub brak oporu powietrza. Nie odtwarza więc rzeczywistości, lecz tyczy się jedynie fikcji.

Podobne uwagi możnaby poczynić o każdym innym prawie, uzyskanym drogą indukcji. Żadne z nich nie opiera się logicznie na zdaniach jednostkowych o faktach, danych w doświadczeniu. Jeśli zaś nie opiera się na faktach i nie jest ich odtworzeniem, czymże innym być może, jeśli nie wynikiem twórczej czynności człowieka? To też uczy nas historja, że prawo wolnego spadania ciał, które dało początek całej nowożytnej mechanice, nie wyrosło z obserwacji faktów, lecz zrodziło się a priori w twórczym umyśle Galileusza. Dopiero po stworzeniu prawa Galileusz sprawdzał następstwa jego na faktach. Taką jest rola doświadczenia w każdej teorji przyrodniczej: *być bodźcem jeno dla twórczych pomysłów i dostarczać materjału do ich sprawdzania.*

Przez długie lata astronomowie nie mogli sobie wyjaśnić zaburzeń w ruchach planety Urana, niezgodnych z obliczeniami, opartemi na prawie grawitacji Newtona. Leverrier powziął przypuszczenie, że zaburzenia te wywołuje planeta nowa i nieznana, znajdująca się poza Uranem. Obliczył jej drogę, czas obrotu i masę. Wkrótce potym w pobliżu wskazanego miejsca Galle odkrył Neptuna. Hipoteza Leverriera była twórczym dziełem jego umysłu, nie zaś odtworzeniem faktu, wówczas nikomu nieznanego. Przypadek zdarzył, że hipotezę tę sprawdzono. Ale niezawsze tak bywa. Hipoteza o istnieniu Wulkana, planety bliższej słońca, niż Merkury, dotąd nie jest stwierdzona. Niektóre hipotezy nigdy zapewne nie doczekają się potwierdzenia doświadczalnego. Takiemi zdają się być przypuszczenia o istnieniu atomów, elektronów lub eteru. Należą do nich także hipotezy o zjawiskach minionych. Paleontologja składa się z samych takich hipotez; nie zjawisk bowiem, dostępnych spostrzeżeniu, tyczy się np. zdanie, że pewne szare bryłki wapienia, znajdowane na Podolu, są śladami ramienionogów, żyjących w sylurze albo dolnym dewonie. Historja jest olbrzymią siecią hipotez, które przy pomocy zdań ogólnych, wziętych najczęściej z praktyki życiowej, tłumaczą fakty, dane w doświadczeniu, t. zn. zabytki, dokumenty, urządzenia, zwyczaje, dziś istniejące. Historja nie jest więc odtworzeniem przeszłości, tylko jej wytworzeniem. Staramy się wprawdzie, by wytwór ten był możliwie wierny, ale nie wiemy i nie dowiemy się nigdy, czy jest takim w istocie.

11. Pogląd, że każda teorja empiryczna zawiera pierwiastki twórcze, ma najgłębsze swe źródło w fakcie natury logicznej: w niesymetrji stosunku wynikania. Fakt ten odbija się nietylko na gotowych już wytworach myśli ludzkiej, ale równie silny oddźwięk znajduje w czynnościach umysłu, tworzącego teorje.

Niewiele wiemy dotąd z psychologji twórczości naukowej. Zbyt mało mamy na to materjału doświadczalnego. Inaczej bowiem zwykle uczony tworzy, a inaczej układa dzieło do druku. Wytworzyły się z biegiem czasu konwencjonalne formy stylu naukowego, które sprawiają, że dzieła wszystkich uczonych, zwłaszcza pracujących w tej samej dziedzinie wiedzy, są do siebie stylistycznie bardzo podobne. Skutkiem tego mogą one wszystkie uchodzić za cząstki jednej wielkiej budowy naukowej, do której uczeni wszystkich czasów i narodów »dorzucają swe cegiełki«, a której formą najdoskonalszą ma być, zdaniem wielu, podręcznik lub encyklopedja. Na powstanie takich poglądów wpłynęło właśnie mylne pojmowanie nauki jako odtwarzania rzeczywistości. Sądzę inaczej: systematyzowanie wiedzy naukowej w celach praktycznych lub dydaktycznych jest ważne i pożyteczne; ale o wiele cenniejsze są monografje wielkich twórców naukowych, które należy traktować tak samo indywidualnie, jak arcydzieła poezji lub sztuki.

Chociaż zatym nie wiemy dokładnie, jak uczeni tworzą, to przynajmniej tyle powiedzieć możemy, że twórczość ta nie jest mechaniczną czynnością intelektu. Byłaby taką, gdyby polegała na wnioskowaniu, a więc na wyprowadzaniu następstw z danych racji. Nie potrzeba na to żadnej twórczości, by wywnioskować, że gdy »każde S jest M i każde M jest P«, to »każde S jest P«. Tworzenie teorji nie jest jednak dedukcją, tylko redukcją, a więc wyszukiwaniem racji dla danych następstw. Stosunek wynikania nie przebiega w kierunku od następstwa do racji; brak tu wszelkiego węzła logicznego i umysł musi skok uczynić, by znaleźć rację dla danego następstwa.

Słusznie przyrównywano świat zjawisk do depeszy szyfrowanej. Kto zna klucz depeszy, ten ułoży ją w szyfrach mechanicznie i odcyfruje ją równie łatwo. Ale my jesteśmy w położeniu tych niewtajemniczonych, co depeszy nie układali i klucza nie znają, i muszą go dopiero wyszukać drogą mozolnych i zawodnych prób. Tym kluczem do odcyfrowania znaków przyrody są teorje naukowe.

Uczy nas zatym sama logika, że teorje nie powstają i nie mogą powstawać drogą czystego myślenia logicznego. Działają więc przy ich tworzeniu się czynniki alogiczne. O czynnikach takich była już mowa, gdy przyjęliśmy za Arystotelesem, że początkiem nauki są stany intelektualno-uczuciowe, jak zdziwienie, ciekawość, lęk, niedowierzanie. Pierwiastki emocjonalne, zawarte w tych stanach, współdziałają właśnie w powstawaniu teorji.

Nietylko bowiem pragniemy wiedzieć, ale pragniemy wiedzieć coś takiego, coby nam przyniosło radość i rozkosz, a usunęło ból i cierpienie. Szukamy w świecie ładu i porządku, bo wszelka harmonja sprawia nam przyjemność, a dysharmonja jest przykra. Wierzymy, że świat jest urządzony rozumnie i celowo, bo czerpiemy stąd pokrzepienie na dzień dzisiejszy, a nadzieję i ufność na niepewne dni przyszłe. Pragniemy, by świat ten nie był dziełem Szatana, lecz Boga, i chcemy się korzyć przed mądrością przyrody, nie zaś walczyć ze ślepym, bezrozumnym przypadkiem. Poczucie piękna i siły, czci i pokory, uczucia estetyczne, etyczne, religijne łączą się z pragnieniem wiedzy.

Jak wpływają te uczucia na tworzenie teorji, niech zaświadczą przykłady z astronomji. Starożytni Grecy umieli odróżniać gwiazdy stałe od planet, gdyż rychło spostrzegli, że planety zmieniają swe miejsce na tle gwiaździstego nieba, lecz czynią to raz prędzej, raz wolniej, niekiedy zaś stają i cofają się w biegu, zakreślając pętlice. Grecy uważali gwiazdy za istoty boskie, wszelkiej czci godne, i dziwnym im się wydało takie zachowanie się planet. Cóżbyśmy powiedzieli o poważnym obywatelu, któryby na ulicy raz kroku przyśpieszał, drugi raz zwalniał, to znowu stawał i wracał się bez powodu? Uczucie czci i potrzeba harmonji skłoniły Greków, że ruchy planet, widzialne na niebie, uznali za pozorne i kazali planetom poruszać się jednostajnie po drogach kolistych. Tak powstała pierwsza teorja astronomiczna. Donosi nam o tym Geminos, astronom grecki, żyjący w pierwszym wieku po Chrystusie.

Pitagorejczycy za środek wszechświata przyjęli nie ziemię i nie słońce, lecz jakiś mityczny ogień centralny. Uczynili to dlatego, wedle świadectwa Arystotelesa, że ogień wydawał im się godniejszym do zajmowania tak honorowego miejsca, niż ziemia lub słońce. Nazwali ten ogień »strażą Zeusa«. Gdy później hipoteza ta upadła i trzeba było wyszukać inny środek świata, równie blizka lub równie daleka była droga od ognia centralnego do ziemi, jak do słońca. U Pitagorejczyków powstała też po raz pierwszy teorja heliocentrycznej budowy świata. Religijne uczucie czci wpłynęło w ten sposób na ukształtowanie się poglądu, który wyznajemy do dnia dzisiejszego.

Jednym z poprzedników Kopernika był Arystarch ze Samos, Pitagorejczyk. Archimedes opowiada w »Liczypiasku«, że Arystarch dlatego przyjął obrót ziemi dokoła osi, bo odczuwał, iż świat jest niezmiernie wielki, i nie mógł zgodzić się na to, by ten wielki wszechświat obracał się codziennie wraz z słońcem dokoła ziemi. Uczucie nieskończoności świata a znikomości ziemi skłoniło i Kopernika do tego samego poglądu, a głębokie poczucie religijne i wrażliwość na harmonję kazały mu porzucić zawiły system Ptolemeusza i stworzyć nowy, bardziej odpowiadający niezmierzonej mądrości Bożej.

Nie mnóżmy przykładów. Możnaby je znaleźć w dziejach każdej nauki. Poznanie ich ożywia martwe twierdzenia podręczników naukowych. Ze studjum historji nauk zaczerpnąłem przekonanie, że kto nie ma zachwytu dla sztuki i piękna, kto jest nieczuły na ból i krzywdę, komu brak poczucia religijnego, słowem, kto, żyjąc tylko trzeźwym rozumem, ma ubogie życie duchowe, ten nigdy zapewne nie stworzy nic wielkiego ani w obserwatorjum astronomicznym, ani w pracowni chemicznej, ani w żadnej dziedzinie wiedzy naukowej.

12. Istnieją jeszcze w naukach empirycznych pierwiastki twórcze, o których dotąd mowy nie było, bo w całej pełni występują w innych naukach: w aprjorycznych.

Naukami temi są logika i matematyka. Ponieważ dziś coraz bardziej toruje sobie drogę przekonanie, że matematyka jest tylko szczegółową częścią logiki, przeto obie te nauki możemy traktować jako jedną całość.

Punktem wyjścia nauk aprjorycznych nie są zdania jednostkowe o faktach, tylko zdania ogólne i oczywiste, t. zw. pewniki. Pewnikiem jest zasada sprzeczności: »żaden przedmiot nie może tej samej cechy zarazem posiadać i nie posiadać«. Pewnikiem jest także znane twierdzenie matematyczne: »dwie wielkości równe trzeciej są równe między sobą«.

Ponieważ nauki aprjoryczne wychodzą ze zdań ogólnych i oczywistych, a więc takich, których nie można i nie trzeba udowadniać, przeto formą rozumowania, najczęściej stosowaną w tych naukach, jest wnioskowanie. Nauki aprjoryczne są więc dedukcyjne. W dalszych stadjach tych nauk używamy też bardzo często dowodzenia, gdy chodzi o sprowadzenie jakiegoś zdania niepewnego do znanych już i pewnych twierdzeń. Rozumowania aprjoryczne nie prowadzą więc do pierwiastków twórczych. Mimo to, cała dziedzina tych nauk jest twórcza, bo nauki te nie opierają się na doświadczeniu i nie są odtworzeniem faktów.

Żadne twierdzenie nauk aprjorycznych nie opiera się na faktach, danych w doświadczeniu. Nie dlatego przyjmujemy zasadę sprzeczności, jakobyśmy stwierdzili w wielu wypadkach, iż przedmioty konkretne nie posiadają cech sprzecznych, lecz uważamy zasadę tę za pewną przed wszelkim doświadczeniem. Pochodzi ona, jak mówimy, z rozumu. Tak samo nie na faktycznych pomiarach opiera się twierdzenie, że suma kątów w trójkącie równa się dwu prostym. Twierdzenie to wynika z zasad gieometrji, które płyną znowu z rozumu.

Ponieważ nauki aprjoryczne powstały niezależnie od doświadczenia, dlatego też twory tych nauk nie mają często z doświadczeniem żadnego związku. Nie istnieją w rzeczywistości figury gieometrji nieeuklidesowskiej, ani bryły czterowymiarowe. Ale nawet punkt, prosta, trójkąt lub sześcian zwykłej gieometrji nie istnieją w doświadczeniu. Punkt gieometryczny nie ma rozciągłości, a prosta ma tylko jeden wymiar, długość. Takie utwory chyba w naturze nie istnieją. Wszystkie przedmioty, któremi zajmuje się gieometrja, są idealnemi konstrukcjami umysłu. Tak samo niema w świecie zjawiskowym liczb całkowitych, ułamkowych, niewymiernych, urojonych. Według Dedekinda liczby są »wolnemi tworami ducha ludzkiego«. Liczby zaś są podstawą całej analizy matematycznej.

Mogłoby się jednak zdawać, że niektóre twierdzenia logiczne, zwłaszcza te, które przybierają formę ontologiczną, a więc tyczą się nie zdań, lecz przedmiotów, są przecież odtworzeniem faktów, danych w doświadczeniu. Nikt bowiem nie wątpi, że żaden przedmiot rzeczywisty nie może posiadać zarazem cech sprzecznych. Zdanie to zdaje się być wyrazem rzeczywistości, choćby nawet z doświadczenia nie pochodziło.

Pogląd ten jest mylny. Chociaż zasady nauk aprjorycznych są oczywiste, to jednak nie wynika stąd jeszcze ich prawdziwość, jeżeli pojmujemy prawdziwość jako zgodność myślenia z rzeczywistością. Nie mamy żadnej gwarancji, że to, co rozumowi naszemu wydaje się oczywistym, musi być także zrealizowane w przyrodzie. Czyż rozum ludzki może swe prawa dyktować naturze? Przeciwnie, zdaje się być rzeczą prawdopodobną, że rzeczywistość praw rozumu nie słucha. Do konsekwencji tej prowadzi nas znowu sama logika. Głośne stały się w ostatnich czasach trudności logiczne, znane pod nazwą antynomji. Istnieją konstrukcje umysłowe, które zdają się nieuchronną zawierać sprzeczność. Konstrukcją taką jest np. zdanie: »Wiersz 13 na str. XXXV tej książki zawiera zdanie fałszywe«.

Zdanie to zawiera sprzeczność, bo łatwo można wykazać, że z prawdziwości jego wynika jego własna fałszywość, a z jego fałszywości jego własna prawdziwość, jeśli tylko zważymy, że zdanie to zawiera się właśnie w wierszu 13 na str. XXXV tej książki. Sprzeczność bierze się stąd, że nie uwzględniamy pewnego ważnego, a nieznanego dotąd prawa logicznego. By zrozumieć to prawo, trzeba wiedzieć, że każda zasada logiczna zawiera jakąś zmienną. Jest to termin, oznaczony literami X, S, M, P i t. p., który może oznaczać cokolwiekbądź, ale nie oznacza żadnego określonego przedmiotu. Tak np. w zasadzie sylogizmu: »jeśli każde S jest M i każde M jest P, to każde S jest P«, litery S, M, P oznaczają zmienne. Te zmienne logiczne mogą, tak jak matematyczne, przybierać różne wartości. Otóż istnieje prawo, które orzeka, że wszystkie zasady logiczne tyczą się tylko tych przedmiotów, które mogą być wartościami zmiennych. Można okazać, że zdanie powyższe, zawierające sprzeczność, nie może być wartością zmiennej. A więc prawa logiczne nie stosują się do niego, konstrukcja ta stoi poza logiką. Jeśli tedy istnieją konstrukcje umysłowe, które nie podlegają prawom logicznym, czyż nie mogą istnieć i przedmioty rzeczywiste, które logiki nie słuchają? Rzeczywistość jest tak bogata i tak niewyczerpana, że żadne więzy logiczne nie zdołają jej ująć.

Okazuje się z tego wszystkiego, że nauki aprjoryczne są czystym wytworem umysłu ludzkiego, nie zaś odtworzeniem faktów. Pierwiastki nauk aprjorycznych wchodzą jednak w skład każdej teorji empirycznej. Wprawdzie nie wszystkie nauki stosują matematykę; ale wszystkie posługują się rozumowaniem, a zatym i zasadami logicznemi, na których wspiera się każde rozumowanie. I w innym jeszcze, bardziej wewnętrznym, związku pozostają nauki empiryczne z aprjorycznemi. Dzięki teorji stosunków logika przekształca się dziś coraz bardziej w ogólną teorję form. W teorji form zakładamy np., że między pewnemi elementami, pozbawionemi zresztą wszelkich cech bezwzględnych, zachodzą jakieś stosunki; na podstawie tych założeń wyprowadzamy szereg praw, rządzących temi elementami. Jeśli tym elementom przypiszemy później jakieś cechy, wzięte z doświadczenia, to jako szczegółowe wypadki owych praw aprjorycznych możemy otrzymać jakieś prawa empiryczne. Tak można niektóre prawa gieometrji, stwierdzalne w doświadczeniu, np. o przecinaniu się prostych w pewnych punktach, wyprowadzić z ogólniejszych zasad formalnych, w których niema mowy o punktach i prostych.

W ten sposób nauki aprjoryczne nabierają ogromnego znaczenia metodologicznego. Logikę wraz z matematyką możnaby przyrównać do misternej sieci, którą zarzucamy w niezmierzoną toń zjawisk, by wyławiać z niej perły syntez naukowych. Są to potężne narzędzia badania, któremi posługujemy się przy budowie każdej teorji.

Aprjoryczne konstrukcje umysłu, wchodząc w skład każdej teorji, przepajają całą naukę pierwiastkiem idealnym i twórczym.

13. Czas teraz zająć się pytaniem: które zdania naukowe są czystym odtworzeniem faktów? Skoro bowiem prawa i hipotezy, a więc i wszelkie teorje nauk empirycznych, oraz cały obszar nauk aprjorycznych powstały przez twórczą pracę umysłu, więc niewiele chyba istnieje zdań w nauce, czysto tylko odtwórczych.

Odpowiedź na to pytanie jest na pozór łatwa. *Zdaniem, czysto odtwórczym, może być tylko zdanie jednostkowe o fakcie, danym bezpośrednio w doświadczeniu.* Np.: »tu rośnie sosna«,

»ta igła magnesowa teraz się odchyla«, »w tym pokoju znajdują się dwa okna«. Kto jednak bliżej przyjrzy się tym zdaniom, i w nich jeszcze dopatrzyć się może pierwiastków twórczych. Wyrazy »sosna«, »igła magnesowa«, »dwa« oznaczają pojęcia, a przez nie przeziera ukryta praca ducha. Wszystkie fakty, ujęte w słowa, są już, choćby prymitywnie, opracowane przez człowieka. »Fakt surowy«, nie tknięty przez umysł, zdaje się być pojęciem granicznym.

Jakkolwiek rzecz się ma, czujemy przecież, że twórczość umysłu nie jest nieograniczona. Idealistyczne systemy teorji poznania nie zdołają wyrugować poczucia, że istnieje jakaś rzeczywistość, niezależna od człowieka, i że szukać jej należy w przedmiotach spostrzeżeń, w doświadczeniu. Zbadać, co w tej rzeczywistości pochodzi od umysłu ludzkiego, jest od dawna wielkim zadaniem filozofji.

14. Dwa rodzaje zdań należy wyróżnić w nauce: o jednych przyjmujemy, że odtwarzają fakty, dane w doświadczeniu, inne są wytworzone przez umysł człowieka. Zdania pierwszej kategorji są prawdziwe, ponieważ prawdziwość polega na zgodności myślenia i bytu; czy prawdziwe są zdania i drugiej kategorji?

Nie możemy orzec stanowczo, iż są fałszywe. To, co umysł wytworzył, nie musi być tylko fantazją. Ale nie mamy też prawa uznać je za prawdziwe. Nie wiemy bowiem na ogół, czy odpowiada im byt rzeczywisty. Mimo to włączamy je do nauki, o ile powiązane są stosunkami wynikania ze zdaniami pierwszej kategorji i nie prowadzą do następstw, niezgodnych z faktami.

Błędne jest przeto zdanie, że wyłącznym celem nauki jest prawda. Nie dla prawdy tylko umysł tworzy. *Celem nauki jest budowa teorji, zaspokajających ogólno-ludzkie potrzeby intelektualne.*

W skład tych teorji wchodzą zdania jednostkowe, odtwórcze, o faktach; one głównie wzbudzają potrzeby intelektualne. To są elementy rekonstrukcyjne. Ale do teorji należą i zdania twórcze, ogólne i jednostkowe, prawa i hipotezy; one zaspokajają potrzeby intelektualne. To są elementy konstrukcyjne. Elementy jedne i drugie jednoczą się w całość dzięki logicznym stosunkom wynikania. Stosunki te teorjom nadają charakter naukowy.

Twórczość poetycka nie różni się od naukowej większym polotem fantazji. Kto jak Kopernik ziemię ruszył z posad i pchnął ją na tory w krąg słońca, lub jak Darwin ujrzał w mgle dziejów gienezyjskie przemiany gatunków, godzien stanąć obok największych poetów. Uczony tym jednak różni się od poety, że zawsze i wszędzie rozumuje. Nie wszystko musi i może uzasadnić, ale, cokolwiek głosi, musi węzłami logicznemi powiązać w ścisłą całość. Na dnie tej całości leżą zdania o faktach; nad niemi wznosi się teorja, która fakty tłumaczy, porządkuje, przepowiada. Tak powstaje poemat nauki.

15. Żyjemy w okresie skrzętnego zbierania faktów. Zakładamy muzea przyrodnicze i sporządzamy zielniki. Zestawiamy katalogi gwiazd i kreślimy mapy księżyca. Urządzamy wyprawy do biegunów ziemi i w niebotyczne góry Tybetu. Mierzymy, liczymy, uprawiamy statystykę. Gromadzimy zabytki przedhistoryczne i okazy sztuki ludowej. Przetrząsamy grobowce starożytne w pogoni za nowemi papirusami. Wydajemy źródła dziejowe i układamy bibljografje. Każdy skrawek zadrukowanego papieru radzibyśmy uchronić od zagłady. Cenna to praca i niezbędna.

Zbiór faktów wszelako nie jest jeszcze nauką. Ten jest prawdziwym uczonym, kto umie fakty powiązać w syntezy. Nie wystarcza zaś na to samo poznanie faktów; trzeba jeszcze przynieść z sobą myśl twórczą.

Kto pragnie być twórczym w dziedzinie nauki, winien pracę nad sobą podjąć w trzech kierunkach: niech kształci zmysły, ucząc się fakty spostrzegać i obserwować, bo fakty są punktem wyjścia i sprawdzianem teorji; niech kształci uczucie, bo na tle bogatego życia wewnętrznego zrodzi się najprędzej myśl nowa a płodna; niech kształci rozum, bo z twórczych swych pomysłów musi wysnuć następstwa i zestawić je z faktami.

Twórca naukowy niech będzie pełnym człowiekiem.

Kształcąc się zaś w ten sposób, niech i o jednej jeszcze nie zapomni rzeczy: każda myśl twórcza, i najgienjalniejsza, nie ma wartości naukowej, dopóki nie zostanie ujęta w słowa i nie stanie się w ten sposób dostępną ludzkości. Niech więc każdy przyszły twórca naukowy uczy się swe myśli wyrażać w słowach; niech dba o swój język i stara się pisać nietylko prosto i jasno, z nieubłaganą ścisłością logiczną, ale zajmująco i pięknie. Tylko piękne dzieła przetrwają wieki, wpływ swój wywierając na coraz dalsze pokolenia.

A gdy ktoś spełni wszystkie te warunki i, przestając z wielkiemi twórcami ludzkości, pogłębi rozum i serce, to może kiedyś, w szczęśliwej chwili, błyśnie w nim iskra natchnienia, która pocznie rzecz wielką. Albowiem »wszystkie wielkie rzeczy na świecie — powiedział raz Adam Mickiewicz — narody, prawodawstwa, instytucje wiekowe; wszystkie wiary przed przyjściem Chrystusa; wszystkie nauki, wynalazki, odkrycia, wszystkie arcydzieła poezji i sztuki, — wszystkie wzięły początek w natchnieniu proroków, mędrców, bohaterów, poetów«.

MATEMATYKA.

WSTĘP OGÓLNY.

OPRACOWAŁ

ZYGMUNT JANISZEWSKI.

Treść: 1. Charakter metody i przedmiotu matematyki; próba określenia matematyki. 2. Jej przedmiot. 3. Charakter jej zagadnień. 4. Jej cel. 5. Niezależność od innych nauk. 6. Zastosowania. 7. Znaczenie matematyki przy studjowaniu filozofji. 8. Układ treści w niniejszym tomie Poradnika; stosunek wzajemny trzech stopni i odpowiadające im kategorje czytelników. 9. Rola matematyki w wykształceniu ogólnym.

10. Podział matematyki (objaśnienia do tablicy). 10,1. Charakter tablicy. 10,2. Gieometrja a analiza; przedmiot gieometrji matematycznej. 10,3. Inne podziały matematyki. 10,4. Matematyka elementarna a wyższa.

---

1. Matematyka zajmuje zupełnie odrębne stanowisko śród ogółu nauk. Jest to jedyna (przynajmniej dzisiaj) nauka, zmuszająca z koniecznością do wiary w swe wyniki i w swych dowodach nie odwołująca się nigdy do doświadczenia [1]). Przyj-

[1]) Nie zajmujemy tu — o ile to możliwe — żadnego stanowiska filozoficznego. Nie chcemy więc rozstrzygać, czy różnica ta między matematyką a innemi naukami jest absolutna, czy też jest różnicą stopnia tylko Opisujemy tu jedynie cechy matematyki tak, jak się one bezpośrednio przedstawiają, nie wdając się w filozoficzną analizę i krytykę tych danych obserwacji. Chcemy więc tylko powiedzieć, że prawdy matematyczne narzucają się z koniecznością, że nie możemy uznać za prawdziwe zdań sprzecznych z niemi; i że przy ich uzasadnianiu nie potrzebujemy się powoływać na świadome doświadczenia (są to właśnie cechy, które posiada jedynie matematyka). Przez to nie stajemy w sprzeczności z żadnym z poglądów filozoficznych na matematykę, w szczególności z poglądami empiryków; bo to nie wyklucza jakichś możliwych wątpliwości co do prawd matematycznych ze stanowiska metafizyki czy teorji poznania, ani twierdzenia, że pojęcia i pewniki matematyczne pochodzą z doświadczenia (por. rozdział: Zagadnienia filoz. mat.).

Również nie twierdzimy tu, że żadna inna nauka nie może uzarzyjmy się na przykładzie oznaczania długości okręgu koła, czym różni się badanie matematyczne od badania doświadczalnego pod względem metody, przedmiotu i rezultatu.

Badanie doświadczalne będzie polegać na mierzeniu, możliwie dokładnym, obwodu kół materjalnych, zrobionych z różnych materjałów i mających różne średnice; przekonamy się, że w granicach dokładności doświadczenia stosunek długości obwodu do długości średnicy będzie dla wszystkich kół mierzonych ten sam. Stąd wnioskujemy, że wszystkie wogóle koła będą posiadały tę samą własność, czego jednak absolutnie pewni być nie możemy. Inaczej postąpi matematyk: poda on najprzód ścisłe określenie koła i za pomocą samego rozumowania, nic nie mierząc i, że tak powiemy, »zamknąwszy oczy«, wywnioskuje z tego określenia, jako konieczną własność koła, tę stałość stosunku obwodu do średnicy; rezultat, w ten sposób otrzymany, jest oczywiście bezwzględnie pewny.

Przypuśćmy, że ktoś chce sprawdzić słuszność naszego twierdzenia w ten sposób, że rysuje koło i wykonywa pomiary. Przypuśćmy, że otrzymał rezultat różny od obliczenia matematycznego. Cóż my na to? Powiemy po prostu, że źle narysował, lub źle zmierzył; że jeżeli figura narysowana własności danych nie posiada, to nie jest kołem.

Ta różnica metod i charakteru rezultatów badania doświadczalnego w porównaniu z matematycznym wynika z różnicy między badanemi przedmiotami, gdyż tylko pozornie wydawało się, że przedmiot badań tych jest wspólny. Koło materjalne a koło matematyczne — to dwa zupełnie różne przedmioty, pozostające w tym stosunku do siebie, że pierwsze posiada z pewnym przybliżeniem cechy drugiego. Jednak koło materjalne — to przedmiot, który możemy poznać tylko za pośrednictwem

---

sadnić swych rezultatów z absolutną pewnością i drogą niedoświadczalną. Stwierdzamy tylko, że żadna tego nie uczyniła, lub przynajmniej próby, podjęte w tym kierunku, nie uzyskały powszechnego uznania. Tak np. starano się przedstawić, jako naukę apodyktyczną i aprioryczną, metafizykę (Spinoza), etykę, mechanikę (Descartes, Euler).

zmysłów, gdy tymczasem koło matematyczne jest naszym własnym, świadomym wytworem umysłowym.

Weźmy inny przykład. Wrzucamy do skarbonki raz 3 groszaki, drugi raz 5. Wiele wrzuciliśmy groszaków do skarbonki? Empiryczny sposób — to rozbić skarbonkę i przeliczyć monety. Jednak każdy przełoży sposób matematyczny: nie zaglądając do skarbonki, »zamknąwszy oczy«, doda 3 do 5. Operację tę wykona w myśli, w myśli swej zobaczy wynik 8. I nie będzie miał żadnej wątpliwości, że zgodny jest on z rzeczywistością: sprawdzanie empiryczne (jeżeli tylko dobrze pamięta, co wrzucił) każdy uzna za najzupełniej zbyteczne, za nierozsądne nawet. I gdyby nawet kto, rozbiwszy skarbonkę, przeliczył nasze groszaki i znalazł ich np. tylko 7, to i to nie zachwiałoby naszej wiary w wynik matematycznego rozumowania: powiedzielibyśmy bez wahania, że jakiś groszak musiał wypaść, czy stało się co innego, lecz nigdy nie przyznamy, że $3 + 5$ nie jest równe 8 [1]). To jest fakt wewnętrzny — to, że

---

[1]) Możliwość teoretyczna niezgodności między wynikiem matematycznym a wynikiem doświadczenia tłumaczy się tym, że i tu także przedmioty badania matematyki i doświadczenia nie są identyczne. Twierdzenie matematyki dotyczy sumy matematycznej 3 wrzuconych groszaków i 5 wrzuconych groszaków (w matematyce wprawdzie mowa jest o liczbach abstrakcyjnych 3, 5, 8, a nie o »3 wrzuconych groszakach« i t. d., lecz wiemy z logiki, że co jest prawdziwe dla pojęć ogólnych, to jest prawdziwe dla przedmiotów, podpadających pod nie); sprawdzamy zaś doświadczalnie, ile jest groszaków w skarbonce po ich wrzuceniu. Otóż wrzucenie w jedno miejsce, połączenie fizyczne przedmiotów nie jest dodawaniem matematycznym; odpowiada mu tylko w razie, gdy uczynimy założenie fizyczne: że rozpatrywane przedmioty nie zmienią się przy tym połączeniu. Jesteśmy tak przyzwyczajeni do tego założenia, że nie uświadamiamy sobie, że je czynimy; a jednak łatwo podać przykłady, w których ono nie sprawdza się: np. gdybyśmy wrzucali zamiast groszaków krople rtęci. Albo wlejmy do naczynia 1 litr wody i 1 litr spirytusu. Matematyka mówi tylko, że wleliśmy 2 litry płynu; i tyle tylko jest — abstrahując od możliwości pomyłki — absolutnie pewne. Czy jednak w naczyniu będzie 2 litry płynu? — o tym już matematyka nic orzec nie może; w naczyniu mogłoby wcale płynu nie być, a np. ciało stałe. Po odpowiedź na to pytanie musimy się zwrócić do doświadczenia, które poucza nas, że w naczyniu będzie płyn, w objętości mniejszej niż dwa litry.

możemy badanie matematyczne przeprowadzić w myśli i że czujemy przymus bezwzględnej wiary w wynik tego badania — fakt, który tu tylko stwierdzamy, nie wdając się w dyskusję nad nim.

I to właśnie odnajdywanie prawd w sobie i niemożliwość wyobrażenia ich sobie inaczej jest najbardziej znamiennym dla prawd matematycznych [1]). Najlepszym więc sprawdzianem dla odróżnienia matematyki od innych nauk jest jej dedukcyjność, zakładająca abstrakcyjność jej przedmiotu i pociągająca za sobą bezwzględną pewność jej rezultatów; sprawdzianem najlepszym dzisiaj, choć niezupełnie dobrym, gdyż daje określenie trochę za szerokie.

Nauki doświadczalne wprawdzie posługują się też w większym, lub mniejszym stopniu dedukcją, tak, że mogą wiele rezultatów otrzymać na tej drodze, jednak opierają się przy tym na poprzednich rezultatach, otrzymanych drogą doświadczalną. Matematyka zaś posługuje się wyłącznie rozumowaniem bez zwracania się do doświadczenia [2]).

2. Dedukcyjność matematyki jest to jednak tylko jej forma; prawda, że dla niej tak istotna, z jej najgłębszych właściwości wynikająca. Jednak pozostaje pytanie: jaka jest treść matematyki, co jest jej przedmiotem? Zwykła odpowiedź na to brzmi, że matematyka jest nauką o wielkościach, czy liczbach. Określenie to jednak ścisłe nie jest: jest ono za ciasne.

Lecz nie kuśmy się o wyczerpanie treści matematyki w jednym zdaniu, określeniu. Rozwija się ona, żyje: dziedzina jej rozszerza się; zakreślić z góry jej granic nie możemy. Lepiej ją poznamy, wykazując kierunek jej rozwoju.

Matematyka zaczęła się od badania liczb [3]). Liczby, jak-

---

[1]) Fakt ten pozostanie, choćbyśmy doń dodali empirystyczne jego wytłumaczenie (por. Zagad. filoz. matem.).

[2]) W kwestji, mogącej tu nasunąć wątpliwości, co do pochodzenia i charakteru pewników matematycznych por. niżej Podstawy gieometrji i Zagadnienia filoz. matem.

[3]) Całkowitych; potym dopiero wprowadzono ułamki, liczby niewymierne, ujemne i urojone i t. d. (np. nadskończone, idealne), przez co oddalano się coraz bardziej od pierwotnego pojęcia liczby, od pierwotnego przedmiotu matematyki. Więcej jeszcze oddalamy się odeń w kierunku rozwoju, który jest przedstawiony poniżej.

kolwiek pojęcia proste, są już abstrakcją; badamy je, abstrahując od tego, czego one są liczbami. Zrazu mówiono o liczbach indywidualnych: 3, 5, 6,... Potym zauważono — doszło to do pełnej świadomości dopiero w czasach nowożytnych — że najciekawszemi własnościami liczb, są to własności ogólne, t. j. takie, które posiada każda liczba [1]). Własności te można więc poznać, badając liczby po zabstrahowaniu od ich własności indywidualnych, t. j. badając liczby 2, 5, 8, abstrahując od tego, że to jest właśnie 2, albo 5, albo 8, a nie jaka inna liczba — przez co jesteśmy w możności oznaczyć każdą z nich jednym i tym samym znakiem, np. literą a. Cóż wtedy jeszcze pozostanie z liczby? Co pozostanie z liczby 2, jeśli zabstrahujemy od tej jej własności, że jest ona liczbą 2, a nie liczbą 3, lub 7? Zostanie z niej to, że jest *jakąś liczbą*. Oznaczając liczby ogólnie przez litery a, b, c, i nie troszcząc się, jakie mianowicie liczby litery te przedstawiają — są to »jakieś« liczby — wstępujemy na drugi stopień abstrakcji. Przykładem tego niech służy twierdzenie

$$a \times b = b \times a.$$

Takie prawdy, jak wyrażona przez wzór powyższy, można równie dobrze uważać za wyrażenie własności liczb, jak i za własności działań (w danym razie mnożenia). Możemy więc traktować również te ostatnie jako przedmiot badań matematycznych.

Działanie jest to przedmiot bardziej abstrakcyjny niż liczba. Rozpatrując określone działanie, np. mnożenie, abstrahujemy od tego, na jakich (określonych) liczbach jest ono wykonane: mnożenie jest tym samym działaniem, czy mnożymy 2 przez 5, czy 3 przez 7, i możemy je przedstawić przez $a \times b$. Przechodząc od poszczególnych, określonych działań, jak dodawanie, mnożenie, do *działania wogóle*, wznosimy się na stopień abstrakcji wyższy od poprzedniego. Pokrewnym pojęciu działania jest pojęcie *funkcji* [2]), pojęcie szczególniej ważne, które dominuje w wyż-

---

[1]) Przynajmniej każda liczba danego rodzaju. Podobnych zastrzeżeń należy się domyślać i w dalszym ciągu.

[2]) Objaśnienie elementarne tego pojęcia znajdzie czytelnik w Stopniu II, § 16; zaś ścisłe i abstrakcyjne określenie w rozdziale: Teorja funkcji zmiennych rzeczywistych, § 1.

szej matematyce dzisiejszej i jest główną może jej treścią (a zaczyna też przenikać i do matematyki elementarnej). Także w badaniach nad funkcjami abstrahujemy zazwyczaj od indywidualnych cech danej funkcji, badając ogólnie pewne rodzaje funkcji. I znów utrwalamy dokonaną abstrakcję, oznaczając ogólnie funkcję przez literę; i operujemy tą literą, nie pytając, jaką mianowicie funkcję (danego rodzaju) oznacza.

Tutaj przestaniemy śledzić matematykę w jej śmiałym wdzieraniu się na coraz zawrotniejsze wyżyny abstrakcji — z tego miejsca, gdzie stoimy, wzrok nasz już nie sięgnie jej dalszych dróg [1]).

Widzieliśmy, jak w rozwoju matematyki przybywają jej nowe pojęcia, jako przedmioty badania. Przybywają jej one i dzięki innym jeszcze kierunkom rozwojowym. Jednym z pojęć najważniejszych, w ostatnich czasach wciągniętych w zakres badań matematycznych, jest pojęcie zbioru (w matematyce mówimy *mnogość*) jakichś przedmiotów, wszystko jedno jakich. Jest ono elementarniejsze od pojęcia liczby, bo dopiero do zbioru przedmiotów można zastosować pytanie: ile? w jakiej liczbie? t. j. liczbę możemy uważać, jako własność zbioru. Pojęcie to stało się podłożem badań nad funkcjami (jako odpowiedniości między elementami dwu zbiorów liczb) [2]); może być też uważane za podstawowe i w gieometrji, do której zaraz się zwrócimy, gdyż przestrzeń i każda figura gieometryczna jest zbiorem punktów. To też znany filozof matematyki Couturat pisze: »jeżeli więc istnieje w matematyce pojęcie pierwsze i zasadnicze, to nie jest nim pojęcie liczby, lecz właśnie pojęcie zbioru«.

Jednocześnie z pierwszemi badaniami nad liczbami, najdawniejszą dziedziną matematyki, zaczęła się doświad-

---

[1]) Stąd też nie dziw, że nauka matematyki jest tak trudna dla wielu; o ile bowiem z początku przedmiot matematyki jest prosty i dla każdego zrozumiały — jeden, dwa, trzy... — potym staje się, dzięki abstrakcjom i matematycznemu opracowaniu, tak subtelnym, a tak złożonym, że specjalnej trzeba zdolności, którąbym nazwał *intelektualną wyobraźnią*, by go sobie odtworzyć, utrzymać w umyśle i operować nim.

[2]) Por. rozdz. Teorja funkcji zmiennych rzeczywistych.

czalnie rozwijać gieometrja. Po przeniesieniu egipskiej gieometrji doświadczalnej na grunt grecki, spostrzeżono, że do niej można zastosować metodę dedukcyjną: że doświadczenie jest zbyteczne i że oparszy się na paru jasnych faktach (*pewnikach*), można wszystkie inne prawdy gieometryczne z nich wysnuć, z absolutną ścisłością i pewnością je udowodnić. Stała się ona przez to częścią matematyki, chociaż przedmiot jej w tym stadjum rozwoju (gieometrja grecka jest to w zasadzie nasza gieometrja elementarna, szkolna) — był zupełnie różny od pierwszego przedmiotu: liczb.

Matematyka jednak nie zniosła takiej dwoistości przedmiotu; wykazywaliśmy wprawdzie, że matematyka zajmuje się różnemi przedmiotami, lecz są to przedmioty, stojące ze sobą w ścisłym związku i jednego rodzaju, wszystko czysto myślowe [1]). Musiała ona wyrugować ten element obcy jej i jej dedukcyjnej metodzie, jaki tworzył przedmiot gieometrji: przestrzeń (pomimo jej zidealizowania) i jej podstawy: pewniki.

Najpierw uskuteczniono połączenie tych dwu dziedzin przez podporządkowanie gieometrji analizie matematycznej [2]) (gieometrja analityczna); w najnowszych czasach jednak gieometrja znalazła swą własną drogę: wchodząc w ścisłą łączność z analizą, zachowała swą odrębność. Stało się to dzięki t. zw. metodzie aksjomatycznej: przez uznanie aksjomatów za określenia, a przedmiotów gieometrycznych — za utwory myślowe, określone jedynie przez obrane aksjomaty. Stosowanie tej metody nie ograniczyło się jednak do gieometrji: tak samo zaczęto traktować i analizę (określając jej poszczególne przedmioty, np. liczby, jako coś, co spełnia pewną grupę aksjo-

---

[1]) Nie wszyscy zgodzą się na odmówienie przestrzeni charakteru czysto racjonalnego (np. nie zgodzą się racjonaliści i neokantyści); jednak zgodzą się pewno na to, że przestrzeń i pojęcia analizy są to rzeczy różnorodne.

[2]) Mówimy tu o analizie w szerszym znaczeniu, zaliczając do niej cały ten dział matematyki, który nie jest gieometrją, więc arytmetykę teoretyczną, teorję liczb, algiebrę i t. zw. analizę nieskończonostkową (por. niżej tablicę). W ciaśniejszym znaczeniu rozumiemy przez analizę tylko analizę nieskończonostkową.

matów i uważając ją za teorję formalnych rachunków)[1]. To przekształcenie się gieometrji wprowadza nową trudność w określeniu przedmiotu i dziedziny matematyki: wydaje się, że do niej należy — tym samym prawem, co i gieometrja — każda teorja czysto dedukcyjna. A więc powróciliśmy do podanego na początku określenia (za szerokiego). Nie chcąc więc wdawać się tu dłużej w poszukiwania tej subtelnej granicy matematyki, poprzestaniemy na tym pierwszym określeniu, szerszym i jaśniejszym, oraz dogodniejszym dla celów Poradnika, włączając do matematyki dwie nauki jej pokrewne: rachunek prawdopodobieństwa i logistykę.

Rachunek prawdopodobieństwa zwykle nawet zalicza się do matematyki. Jednak z większą słusznością możnaby go uważać za naukę odrębną, gdyż przedmiotem jego jest »prawdopodobieństwo« — pojęcie obce właściwej matematyce. Logistyka, czyli logika matematyczna, bywa również zaliczana do matematyki, a nawet sporna jest kwestja zasadniczej różnicy między matematyką a logiką. Tak np. znany filozof współczesny Husserl pisze (Logische Untersuchungen, t. I, str. 252—253):

»Nikt nie może zabronić matematykom zagarnąć tego wszystkiego, co należy opracowywać według formy i metody matematycznej. Tylko ten, kto nie zna matematyki, jako nauki nowoczesnej, zwłaszcza formalnej matematyki, i sądzi ją tylko według Euklidesa i Adama Riese, może jeszcze trzymać się powszechnego przesądu, jakoby istota matematyki leżała w liczbie i ilości. Nie matematyk, lecz filozof przestępuje swą naturalną sferę prawną, gdy się opiera »matematyzującym« teorjom logiki i nie chce swych tymczasowych wychowańców oddać ich naturalnym rodzicom«.

---

[1]) Dla objaśnienia ostatniego ustępu por. dalsze ustępy w Poradniku, a mianowicie: o różnicy między gieometrją a analizą — niżej w objaśnieniu do tablicy; o metodzie aksjomatycznej i dzisiejszym ujmowaniu matematycznej gieometrji — w Podstawach gieometrji; o znaczeniu metody aksjomatycznej, jako najwyższego stopnia omawianego wyżej procesu abstrakcji — w Zakończeniu; o stosunku gieometrji do przestrzeni (fizycznej czy psychologicznej) — w Zagadnieniach filozoficznych matematyki; o ujmowaniu analizy czysto formalnie z filozoficznego punktu widzenia (nominalistycznie) — tamże.

Dla dalszej charakterystyki matematyki — do zorjentowania się w aktualnym jej terenie badań oraz w jego podziale — służą podana niżej tablica i objaśnienia do niej. Tu dodamy jeszcze dla charakterystyki jej zagadnień słów kilka, uzupełniających rozwinięcia poprzednie.

3. Niejeden pewno wyobraża sobie, że matematyk zajmuje się ciągłym rachunkiem, otoczony jest liczbami, które dodaje i mnoży (i może nawet, że »wyższa« matematyka polega na zajmowaniu się *większemi* liczbami!) Niechże się ci zdziwią wiadomością, że w książkach matematycznych nie spotykamy prawie innych liczb całkowitych, jak 1, 2, 3, 4, 5. Możnaby powiedzieć, że 5 jest największą liczbą, jaką zna matematyk [1]). W jaki sposób ten dziwny napozór fakt jest możliwy, objaśnia nam omówiona wyżej dążność matematyki do abstrakcji i do ogólności, oraz następująca cecha matematyki: matematykę interesuje nie *wielkość*, lecz *jakość* [2]).

Przyjrzyjmy się, jakie pytania stawia sobie dziś matematyka. Najczęściej pytamy o własności przedmiotu matematycznego (liczby, równania, funkcji, figury gieometrycznej i t. p.) tak, że możemy odpowiedzieć przez »tak« lub »nie«. Pytamy

---

[1]) Jest to w zgodzie (a pewno i w związku) z tym faktem psychologicznym, że my naprawdę, bezpośrednio, znamy tylko pierwszych parę liczb. 5 jest pewno największą z nich: przy dużym wysiłku uwagi może jeszcze odróżnimy, bez przeliczenia i bez pomocy jakichkolwiek innych środków (np. ułożenia — choćby w myśli — tych danych przedmiotów w figurę jakiegoś znanego nam kształtu, np. takiego, jaki posiadają grupy oczek na kartach do gry), czy zbiór dany zawiera 4 czy 5 przedmiotów; wątpić należy, czy to jest możliwe dla liczb większych.

To, cośmy powiedzieli w tekście, objaśni nam możliwość innego faktu (z psychologji matematyków): wielu wielkich matematyków było bardzo złemi rachmistrzami — »nie umieli dodawać«; do nich należą NEWTON, POISSON, KUMMER (p. AHRENS, Scherz u. Ernst i. d. Mathem.).

[2]) Mówimy tu ogólnie; zdarza się, że trzeba pewną wielkość wyliczyć, ale wyliczenie to uważamy zwykle tylko jako środek do odpowiedzenia na inne pytanie, dotyczące jakości. Mówimy też tylko o właściwej czystej matematyce na stopniu największego rozwoju. Inaczej przedstawi się matematyka tym, którzy zajmują się nią dla jej zastosowań, inaczej także tym, którzy się uczą jej początków (szczególniej w zakresie stopnia I) i nie mogą jeszcze wznieść się na wyżyny abstrakcji.

np., czy jakiś zbiór ma skończoną czy nieskończoną ilość elementów (np. zbiór pierwiastków danego równania, lub punktów osobliwych funkcji), czy coś istnieje czy też nie istnieje (np. wspólny dzielnik dwu liczb całkowitych, pierwiastek równania), lecz nie o określone wielkości [1]).

Te ostatnie oznaczamy zwykle ogólnym znakiem, np. a, nawet w przypadkach, gdy liczba ta jest oznaczoną i gdy moglibyśmy ją obliczyć.

Gdy w szczególności chodzi nam o zbadanie jakiejś liczby (np. pierwiastku danego równania), to zazwyczaj nie pytamy, czy jest ona zawarta między 10 a 20, czy też jest większą od 1000; wielkość jej jest nam obojętna. Pytamy, jakie ona posiada własności, do jakiego należy rodzaju. A liczb nie dzielimy na rodzaje według ich wielkości, lecz zgoła inaczej, przyczym liczby bardzo mało różniące się wielkością zaliczamy do różnych rodzajów, podczas gdy do jednego rodzaju mogą należeć liczby jak najbardziej pod względem wielkości różne.

Pierwszym takim podziałem na rodzaje jest podział na liczby całkowite i niecałkowite. Liczby te mają różne bardzo własności; i nic nam nie pomoże np. wiadomość, że badana liczba a jest mniejsza od $2\frac{1}{10}$, a większa od $1\frac{9}{10}$, bo to nas nie objaśnia, czy ona jest równą 2, a więc całkowitą, czy też jest różną od 2, więc (przy powyższych nierównościach) liczbą niecałkowitą; wtedy, o jakkolwiek małą liczbę różniłaby się od 2, różni się swemi własnościami od 2 bardziej, niż np. liczba 1000.

To objaśnia nam znaczenie i potrzebę ścisłości *(dokład-*

---

[1]) Na przykładzie równania możemy bliżej jeszcze przyjrzeć się charakterowi zagadnień matematycznych: gdy więc odpowiemy w sposób twierdzący na pytania, czy pierwiastki istnieją i czy jest ich ilość skończona, to stawiamy sobie czasem pytanie: ile ich jest, lecz interesuje nas ta liczba tylko wtedy, gdy jest małą (1, 2, 3); w przeciwnym razie szukamy tylko jej związku z innemi liczbami (zazwyczaj nieokreślonemi), wchodzącemi do równania; tak w wypadku równania algiebraicznego, dowodzimy, że ilość pierwiastków jest równa stopniowi równania. Nigdy zaś prawie nie pytamy o wielkość samych pierwiastków: możemy tylko pytać o ich związek z innemi liczbami zagadnienia, lub o ich rodzaj, o czym patrz niżej. Tendencja ta dałaby się i dalej śledzić, co wytłumaczyłoby nam pozorne od niej odstępstwa.

ności) matematycznej w rezultatach (nie mówię tu o potrzebie ścisłości (*poprawności)* w dowodzeniach, co rozumie się samo przez się): i to nam objaśnia, dla czego matematyka nie zadowala się rezultatami przybliżonemi i dla czego wyliczenia »dokładnych« w znaczeniu fizyków przybliżeń nie mają dla matematyków żadnego znaczenia.

Widoczniejsze jest to jeszcze przy podziale na liczby wymierne (t. j. całkowite i ułamki) i niewymierne. Do rozstrzygnięcia bowiem, czy dana liczba nie jest całkowitą (nigdy jednak do stwierdzenia, że dana liczba jest całkowitą!) wystarcza często przybliżenie, bo np. gdy mamy: $a > 2$ i $a < 3$, to a nie może być liczbą całkowitą. Do rozstrzygnięcia zaś, czy dana liczba jest wymierną, czy nie, żadne przybliżenie wystarczyć nie może, bo między każdemi dwiema liczbami znajduje się nieskończenie wiele wymiernych i nieskończenie wiele niewymiernych.

W badaniach matematycznych w pewnych razach zadowalamy się nierównościami; lecz jest to tylko pozorny wyjątek od tego, co zaobserwowaliśmy wyżej: i wtedy chodzi nam nie o przybliżenia, nie o wielkość, lecz o pewną własność badanej liczby, o podział liczb na dwa rodzaje (mniejszych i niemniejszych od pewnej liczby), tak, że na postawione pytanie możemy odpowiedzieć przez »tak« lub »nie«. Np., gdy mamy dany postęp gieometryczny

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots,$$

którego suma dla $|a| < 1$ równa się $\frac{1}{1-a}$, a który przy $|a| \geqq 1$ jest rozbieżny i wcale o jego sumie mówić nie można, ważną jest dla nas tylko wiadomość, do którego z dwu rodzajów liczb należy $|a|$: do mniejszych, czy niemniejszych od 1? Przyczym do jednego rodzaju zaliczamy liczby 1 i 1000000, a do różnych 1 i $\frac{999999}{1000000}$ (i wogóle dowolnie mało mniejsze od 1). I tu więc nie wystarczy przybliżona ocena wielkości do dokonania zupełnego podziału.

Zauważymy tu, dla uniknięcia nieporozumień, jeszcze jedno: w matematyce mówi się często o przybliżeniach. Jest to jednak zupełnie co innego, niż przybliżenia w zwykłym znaczeniu.

Pojęcie matematyczne przybliżeń może właśnie służyć za przykład doskonałości i subtelności matematycznej (np.: pojęcie granicy; przybliżenia liczb niewymiernych za pomocą wymiernych).

---

4. Nie-matematykom nasuwa się często pytanie: jakiemu celowi służy ten cały gmach wiedzy tak abstrakcyjnej, jaką jest matematyka? Wtedy zazwyczaj, jako na rację bytu matematyki, wskazuje się na jej zastosowania, szczególniej na rozwój techniki, który stał się możliwym jedynie dzięki matematyce nowożytnej. Odpowiedź ta jednak traci swą wartość, gdy zwrócimy uwagę, jak drobną jest ta część matematyki, która ma zastosowania; większa zaś jej część »czeka na zastosowanie« i to, jak się wyraża A. Pringsheim [1]), »czeka napróżno«. Wprawdzie nie możemy twierdzić o żadnej teorji matematycznej, że nigdy nie znajdzie zastosowania, lecz usprawiedliwiać rację bytu tych teorji takim mało prawdopodobnym zastosowaniem byłoby to samo, mówi dalej Pringsheim, co uzasadniać żądania środków pieniężnych na ekspedycję polarną mogącemi stąd wyniknąć korzyściami handlowemi. Tego usprawiedliwienia należy — jak świadczą o tym zgodnie wyznania różnych matematyków — szukać gdzieindziej: w matematyce samej w sobie. Dobitnie wypowiada to Poincaré: »gdy pracujemy, to nie tyle dla rezultatów pozytywnych, do których, jak tłum przypuszcza, jedynie przywiązujemy wagę, ile dla odczuwania wzruszeń estetycznych i komunikowania ich tym, którzy są zdolni je odczuwać« [2]), oraz wyraźniej jeszcze w książce: La Valeur de la Science (str. 82, a w tłum. polskim 88): »nie waham się powiedzieć, że matematyka zasługuje, aby uprawiać ją dla niej

---

[1]) Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik (Festrede), (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, t. 13, 1904, str. 357—382), str. 380; także w tłum. ros. »Wiestnik Znanija«, Nr. 7 i 12, r. 1904. Ciekawa ta mowa zawiera odparcie zarzutów, czynionych matematyce przez W. Hamiltona i Schopenhauera.

[2]) Notice sur Halphen. Journal de l'École Politechnique, cah. 60, 1890.

samej i że działy, nie dające się stosować do fizyki, powinny być uprawiane na równi z innemi« [1]).

Zadając sobie pytanie, gdzie szukać właściwego celu dążeń naszych, przyznamy, że przedewszystkim w Prawdzie i Pięknie; tym właśnie wyższym duchowym potrzebom matematyka czyni zadość.

Prawda ta, którą podaje matematyka, dotyczy bezpośrednio nie przedmiotów materjalnych, lecz naszych konstrukcji umysłowych. Czy dlatego ma mieć mniejszą wartość? Czyż prawa myśli naszych, naszego wewnętrznego świata nie są również interesujące, jak i prawa świata zewnętrznego?

Często tak rozumianą matematykę porównywają z szachami, nazywając ją pogardliwie zabawką, a przedmiot jej urojeniem. Jest to niesłuszne porównanie. Teorja gry w szachy nie jest nauką nie dlatego, że przedmiot jej przez nas jest wymyślony, że jest konstrukcją umysłową, jak i przedmioty matematyczne — i w dziedzinie faktów materjalnych istnieją p r a w d y, nie posiadające wartości naukowej (np. dokładna waga stołu, na którym piszę) i z b i o r y prawd, nie tworzące nauki — lecz, że przedmiot ten nie jest ani ogólny, ani powiązany z innemi. Wogóle wartość poznanej prawdy jest tym większa, im bardziej ta prawda rozszerza lub pogłębia nasze poznanie, t. j. im bardziej jest ogólna i powiązana z resztą naszych wiadomości. Te właśnie cechy posiadają w wysokim stopniu prawdy matematyczne.

Nie mniej, a może więcej jeszcze, celem zajmowania się matematyką jest jej piękno. Dowodów na to pełno w wypowiedzeniach się różnych matematyków. Oto jak charakteryzuje dzieło matematyczne Mittag Leffler: »najlepsze dzieło matematyka jest dziełem sztuki, sztuki wzniosłej, doskonałej, śmiałej jak najbardziej skryte marzenia wyobraźni, jasnej i przezroczej jak myśl oderwana« [2]). Prawda, że tylko garstka jednostek odczuwa to; lecz »nie masz się czemu dziwić«, pisze Gauss w liście do Zofji Germain, »czar tej subtelnej nauki objawia się w ca-

---

[1]) Por. Ahrens, S c h e r z u n d E r n s t i n d e r M a t h e m a t i k, skąd czerpiemy większość przytoczonych tu cytat.

[2]) »S o p h i e K o w a l e w s k y«, Acta math., 16, 1892/1893, str. 388—389.

łym swym pięknie tylko tym, którzy mają odwagę ją zgłębić« [1]).

Rozumie się, kto piękna tego sam nie odczuł, temu wskazać go nie można; powinien uwierzyć świadectwu innych i musi zadowolić się wiadomością, że porównać da się ono najlepiej z pięknem muzyki lub architektury (z harmonją tonów i linji) [2]).

Na pytanie więc, na co są te abstrakcyjne teorje matematyczne, ta »zabawka«, odpowiemy również pytaniem: »na co są symfonje muzyczne?« Czy muzykę też nazwiemy zabawką? [3])

---

5. Matematyka, jako nauka aprioryczna, nic nie zapożycza od innych nauk, wyjąwszy chyba od logiki: znajomość (i to

---

[1]) Sophie Germain, Oeuvres philosoph., ed. 1896, str. 275. Gauss pisze tu głównie o Teorji liczb.

[2]) Por. Poincaré, La Valeur de la Science, str. 82, (tłumacz. pol. str. 88). Minkowski, Diophantische Approximationen (1907), przedmowa, i Boltzmann, Gustav Robert Kirchhoff (Akad. Festrede, Graz, 15. XI. 1887, str. 28—30). — J. W. A. Young (The teaching of matematics, Londyn, 1911), cytując Goethego, który nazwał tum gotycki »muzyką stężałą«, powiada, że lepiej nazwaćby go można »skamieniałą matematyką« (petrified mathematics). Inaczej sądzi Kummer, dla którego właściwe piękno matematyki jest podobne raczej do piękna przyrody (Über einige math. und philos. Grundanschauungen Leibnizens, Festrede, Berlin, Akademie, 1867).

Nie chcąc poprzestać na świadectwie samych matematyków, przytaczamy tu jeszcze ustęp z książki F. Rudio, Über den Antheil der math. Wiss. an der Kultur der Renaissance, str. 19, (Sammlung gemeinverst. wiss. Vortr., Virchov-Holtzendorff, H. 142): »To, co z nieprzepartą siłą pociągało do nauk matematycznych wielkich mistrzów Odrodzenia, takich jak *Brunellesco*, *Lionardo da Vinci*, *Rafael*, *Michelangelo* i w szczególności także *Albrecht Dürer*, nie było wyłącznie dążeniem do wszechstronnego wykształcenia. Mieli oni świadomość, że, przy całej swobodzie indywidualnej wyobraźni, sztuka także zna prawo konieczności i odwrotnie, przy całej niewzruszoności logicznej budowy, i matematyka rozwija się według praw piękna«.

[3]) Porównanie z szachami i tu jest płytkie: szachy mogą dać zadowolenie estetyczne, które da się porównać z eleganckim i dowcipnym rozwiązaniem poszczególnego zagadnienia matematycznego, ale nigdy z tą harmonją przedmiotów i związków matematycznycb, odkrywanych przez twierdzenia i teorje, ani z artystycznym planem i budową samej teorji.

praktyczną tylko) zasad poprawnego rozumowania. To też jedna tylko logistyka może być wymieniona, jako jej nauka pomocnicza. Poza logistyką mogą interesować matematyków specjalnie jeszcze filozofja matematyki i historja matematyki. Wszystkie te nauki zaliczamy jednak ze względów praktycznych do matematyki i traktujemy o nich w niniejszym dziale, w odpowiednim więc miejscu będzie mowa o ich znaczeniu dla matematyka (por. też Wstęp do stop. III).

6. Matematyka natomiast jest nauką pomocniczą dla bardzo licznych, coraz liczniejszych nauk. Kant scharakteryzował nawet ogólną tendencję ujmowania naszych wiadomości w formy matematyczne w tych słowach: twierdzę, że w każdej z nauk przyrodniczych tyle tylko można znaleźć właściwej nauki, ile w niej znajdzie się matematyki [1]). Szczególniej w badaniu przyrody martwej jest ona nieocenionym narzędziem, tym bardziej i skuteczniej stosowalnym, im dokładniej przedmiot jej da się zanalizować i zmierzyć. Mechanika np. daje się prawie całkowicie napisać, że tak powiemy, w języku matematycznym, z pomocą wzorów. To też fizyka i astronomja wymagają gruntownego wykształcenia matematycznego (szczególniej równań różniczkowych, szeregów Fourier'a, rachunku warjacyjnego, rachunku prawdopodobieństwa). Inne nauki przyrodnicze nie wymagają tyle matematyki, lecz zawsze co najmniej algiebry i gieometrji w zakresie szkolnym, początków gieometrji analitycznej i rachunków różniczkowego i całkowego. Nauki techniczne wymagają jeszcze znajomości gieometrji wykreślnej. Z nauk humanistycznych wymienię tylko ekonomję i statystykę (i ich praktyczne zastosowania, głównie naukę o ubezpieczeniach), jako te, w których matematyka zdobywa coraz szersze zastosowanie. W niektórych dziełach ekonomicznych używane są nawet równania różniczkowe [2]).

---

[1]) Vorrede zu den metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft.

[2]) Głównym przedstawicielem tego kierunku matematycznego w ekonomji politycznej jest Pareto, obecnie profesor w Lozannie; z dzieł jego wymienimy: Cours d'économie politique, Lozanna, t. I, 1896, t. II, 1897, por. też jego artykuł w t. I, cz. II-giej Encykl. der Math. Wiss.,

7. Studjowanie filozofji — choć tu matematyka zastosowań w ciaśniejszym znaczeniu nie ma — wymaga znajomości matematyki w niemniejszym stopniu. Wyszkolenie bowiem w logicznym, ścisłym rozumowaniu i krytycyzm, które daje matematyka, wykrywająca często fałsz i w prostych, oczywistych napozór, sądach, komuż są tak niezbędnie potrzebne, jak filozofowi? Dalej filozofja zajmuje się podstawami i zasadniczemi pojęciami nauk, a więc przedewszystkim matematyki, bo te są podstawą dla wszystkich (przynajmniej przyrodniczych) nauk. Zresztą i bez tego w filozofji używa się wciąż pojęć, na które właściwe światło rzuca matematyka: ilość, ciągłość, nieskończoność. W poszczególnych działach filozofji ta potrzeba poznania matematyki występuje jeszcze wyraźniej: jeśli kto się zajmuje logiką, ten powinien się zapoznać z rozumowaniami matematycznemi, z tworzeniem się pojęć, jako z materjałem do badań; jeśli teorją poznania — to ważną dlań jest wartość poznawcza matematyki, podstawy matematyki; jeśli historją nauk, metodologją nauk, lub t. zw. filozofją przyrody, to potrzeba znajomości matematyki nawet nie wymaga objaśnienia. Jak ważną rolę w systematach filozoficznych odgrywają zapatrywania na matematykę, dość wspomnieć Kanta. Przypomnijmy tu sobie też, ilu śród największych filozofów było matematykami: Pytagoras, Platon, Descartes, Leibniz; to nie pozostało bez wpływu na ich pisma filozoficzne. Z dzisiejszych szkół filozoficznych w większości matematyka odgrywa ważną rolę: wymienię tu szkołę Husserla, (którego zasadnicze poglądy filozoficzne ukształtowały się pod wpływem studjów nad matematyką i filozofją matematyki, jak sam to zaznacza w przedmowie do swego dzieła »Logische Untersuchungen«), empirjo-krytycyzm (historja mechaniki Macha), szkołę marburską i szkołę Friesa; aby się o tym przekonać, dość zajrzeć do wydawanych przez nie pism. Z tego względu matematyka staje się przy studjowaniu filozofji w pewnym znaczeniu praktycznie

---

p. t. Anwendungen der Mathematik auf Nationalöconomie, 1902, stronic 27; w wydaniu francuskim tej encyklopedji artykuł ten znajduje się w t. I, cz. (volume) IV, zeszyt 4, 1911.

potrzebną: dla swobodnego rozumienia i krytycznej oceny wydawanych dziś pism filozoficznych. Zauważyć tylko trzeba, że ponieważ filozofja w poszczególne wyniki matematyki prawie nie wchodzi, można więc bez znajomości matematyki czytać książki filozoficzne, powołujące się na matematykę, lub ją analizujące i mieć wrażenie, że się je rozumie; lecz pamiętajmy, że rozumieć a rozumieć — to duża różnica.

To też i dziś należy wstępującym na drogę filozofji powtórzyć te słowa, które przed wiekami PLATON umieścił u wejścia do swej akademji:

»Bez znajomości gieometrji niech tu nikt nie wchodzi« [1]).

---

8. Jako nauka o ogólnych formach wszystkich zjawisk (pozostających po zabstrahowaniu od wszelkich cech jakościowych przedmiotu), oraz jako jedyna ścisła nauka dedukcyjna, matematyka ma olbrzymią wartość kształcącą: rozwija wyobraźnię, uczy rozumować ściśle i wyrabia zdolności, które ułatwiają orjentowanie się w zjawiskach złożonych. Dlatego też od każdego wykształconego człowieka wymaga się nie tyle wiadomości, ile pewnego wyszkolenia matematycznego. Stopień II-gi matematyki w Poradniku (czyli mniej więcej kurs szkoły średniej) odpowiada zakresowi koniecznych do tego celu wiadomości. Stopień I-szy nie powinien być uważany za konieczny wstęp do stopnia II-go. Obejmuje on część tych samych przedmiotów, co i stopień II-gi, wyłożonych tylko w sposób łatwiejszy, bardziej poglądowo, praktycznie, w bezpośrednim związku z zastosowaniami do życia codziennego. Jest to kurs propedeutyczny, nie zaś właściwa, czysta teorja; korzystać z niego mogą samoucy, którzy nie nabyli znikąd zdolności ścisłego myślenia, albo którym chodzi tylko o osiągnięcie bezpośrednich korzyści praktycznych, potrzebnych w życiu codziennym, gospodarstwie i rze-

---

[1]) Wyraz »gieometrja« jest tu oczywiście użyty, jako synonim wyrazu »matematyka« (toż samo spotykamy u pisarzy francuskich).

O planie i sposobie prowadzenia studjów matematycznych dla filozofa por. W s t ę p do III stopnia.

miośle, którzy więc mogą poprzestać na stopniu I. Ci, co uczą dzieci w początkowym okresie nauczania, znajdą w stopniu I spis poleconych podręczników, inne wskazówki — w rozdziale, zatytułowanym: Metodyka nauczania.

Trochę wyrobiony czytelnik, pragnący zdobyć średnie wykształcenie ogólne, powinien zacząć od stopnia II-go. Nie zrobi on żadnego skoku, opuszczając stopień I-szy, wszelkie bowiem wiadomości od najelementarniejszych (lecz w układzie systematyczniejszym, niż w stopniu I-szym) znajdzie w podręcznikach stopnia II-go. Tylko w razie, gdyby te podręczniki okazały się dlań za trudne, winien pomagać sobie bardziej poglądowemi podręcznikami stopnia I-go.

Znający algiebrę, gieometrję (elementarną) i trygonometrję w zakresie stopnia II-go, może zacząć odrazu od stopnia III-go. Radzimy tylko przeczytać w każdym razie Wstęp do stopnia II-go. Zbytniej jednak skrupulatności w opanowywaniu matematyki elementarnej trzeba się także wystrzegać: nie na zapamiętaniu bowiem wszystkich szczegółów, lub poznaniu większej ilości wzorów polegają postępy w matematyce, lecz na zdobyciu i zgłębieniu nowych pojęć i metod. Właściwe też pogłębienie wiadomości z matematyki elementarnej (»pogłębienie«, nie zaś »rozszerzenie«) można osiągnąć dopiero na poziomie stopnia III-go, z jednej strony przez studjowanie podstaw gieometrji i arytmetyki, z drugiej zaś przez ujęcie jej z pomocą pojęć wyższej matematyki, spoglądając na nią z wysoko obranego punktu widzenia.

Kto zaczyna studjowanie wyższej matematyki, powinien po przeczytaniu Wstępu do stopnia III-go, czytać tylko rozdziały o naukach, od których ma zacząć, bez względu na porządek tych rozdziałów. Poszczególne rozdziały bowiem stopnia III-go nie są przeznaczone do odczytania po kolei jednym ciągiem, lecz raczej do użytku podobnego, jak encyklopedje (co ułatwia skorowidz rzeczowy). Niektóre rozdziały mają charakter popularyzacyjny i mogą służyć np. czytelnikom stop. II-go do uzupełnienia swych wiadomości (szczególniej Arytmetyka, Teorja mnogości, Teorja liczb, Gieometrja analityczna i syntetyczna, Podstawy gieometrji, Topologja, Logistyka, Rachunek prawdopodobieństwa i Zagadnienia filozoficzne matematyki; por. Wstęp do stopnia II-go, § 2). Obeznany już nieco z matematyką wyższą może czytać którykolwiek interesujący go rozdział, bo są one zwykle niezależne od siebie; w przeciwnym razie cytaty ułatwiają odnalezienie innych miejsc w Poradniku, potrzebnych do zrozumienia czytanego rozdziału. Naogół wystarcza do ich zrozumienia znajomość matematyki elementarnej (stopień II-gi), (co nie wyklucza, że niektóre w nich zdania, a nawet ustępy mogą nie być zrozumiałe przy tym minimalnym przygotowaniu). Wyjątek stanowią rozdziały: Teorja funkcji analitycznych, Równania różniczkowe zwyczajne, Równania funkcyjne i całkowe, Rozwinięcia na szeregi, Równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych, Teorja grup, Gieometrja różniczkowa, Rachunek warjacyjny, do których zrozumienia potrzebne są przynajmniej początkowe wiadomości o szeregach, funkcjach zmiennej rzeczywistej, z rachunku różniczkowego i całkowego, oraz gieometrji analitycznej.

9. Pożądaną jest rzeczą, aby i ci, których przyszła specjalność nie wymaga znajomości matematyki, wyjrzeli trochę poza zakres stopnia II-go w interesie swego wykształcenia ogólnego [1]), a to ze względu na nieproporcjonalność między ilością materjału stopnia II-go a III-go. Jak to już widać bowiem z podanej niżej tablicy, matematyka elementarna jest znikomą częścią całości matematyki. »Elementy Euklidesa są taką samą małą częścią całej matematyki, jak Iljada — literatury, lub rzeźby Fidjasza — całej sztuki wszechświatowej«, trafnie porównywa C. J. Keyser (Mathematics, N. York, 1907, str. 8). A zdarza się często, że kończący szkołę mają wrażenie, iż elementarna algiebra i gieometrja wyczerpują zakres zagadnień matematyki i że cała dzisiejsza matematyka wyższa, pozostając w ciasnym kole tych, sięgających starożytności zagadnień, polega na znajdowaniu większej liczby podobnych, tylko bardziej skomplikowanych wzorów. Pogląd zaś taki — gdy się zważy, jak wspaniale matematyka rozwinęła się w czasach nowo-

---

[1]) Książek, popularyzujących zagadnienia wyższej matematyki, niestety prawie niema (por. stop. II-gi). W jaki mianowicie sposób należy uzupełnić stop. II-gi w kierunku powyższym, p. Wstęp do stop. II-go i III-go.

żytnych i najnowszych — jest tak dalekim od prawdy, że musimy go uznać za błąd zgoła niedopuszczalny, szczególniej wobec tego znaczenia, jakie rozwój matematyki miał i ma dla kultury dzisiejszej.

Złudzenie, że taki zastój istnieje w matematyce, powstaje stąd, że jest ona nauką najbardziej zachowawczą [1]), mało co z jej zdobyczy zostało później odrzucone, bo wszystkie prawie tak są solidnie ugruntowane, że wytrzymują próbę czasu. Nie z bezkrytycznego pietyzmu dla tego, co stare, wynika ta zachowawczość, gdyż matematyka jest przedewszystkim krytyczna i nie zatrzymuje swej krytyki przed najprostszemi, najoczywistszemi prawdami.

To jednak, że nowe badania nie zmieniają wyników matematyki elementarnej, nie powinno nam zasłaniać faktu, że matematyka jednocześnie należy do najbardziej postępowych — rozwija się niezmiernie szybko, krocząc różnemi drogami, zdobywa coraz to nowe dziedziny, nie bojąc się najśmielszych, najparadoksalniejszych nowych teorji; wspominamy tylko liczby urojone, gieometrje nieeuklidesowskie, odrzucające dawne pewniki gieometryczne i teorję mnogości, która dowiodła, że część może się równać całości.

Bliższe wskazówki co do studjów w zakresie każdego stopnia podane są w odpowiednich wstępach.

W szczególności we wstępie do stopnia III-go uwzględnione są potrzeby tych wszystkich, którzy z jakiegokolwiekbądź względu chcą posiąść wykształcenie matematyczne, wyższe od średniego, i to w jakimkolwiek zakresie aż do specjalności ostatecznej i przygotowania się do pracy twórczej.

---

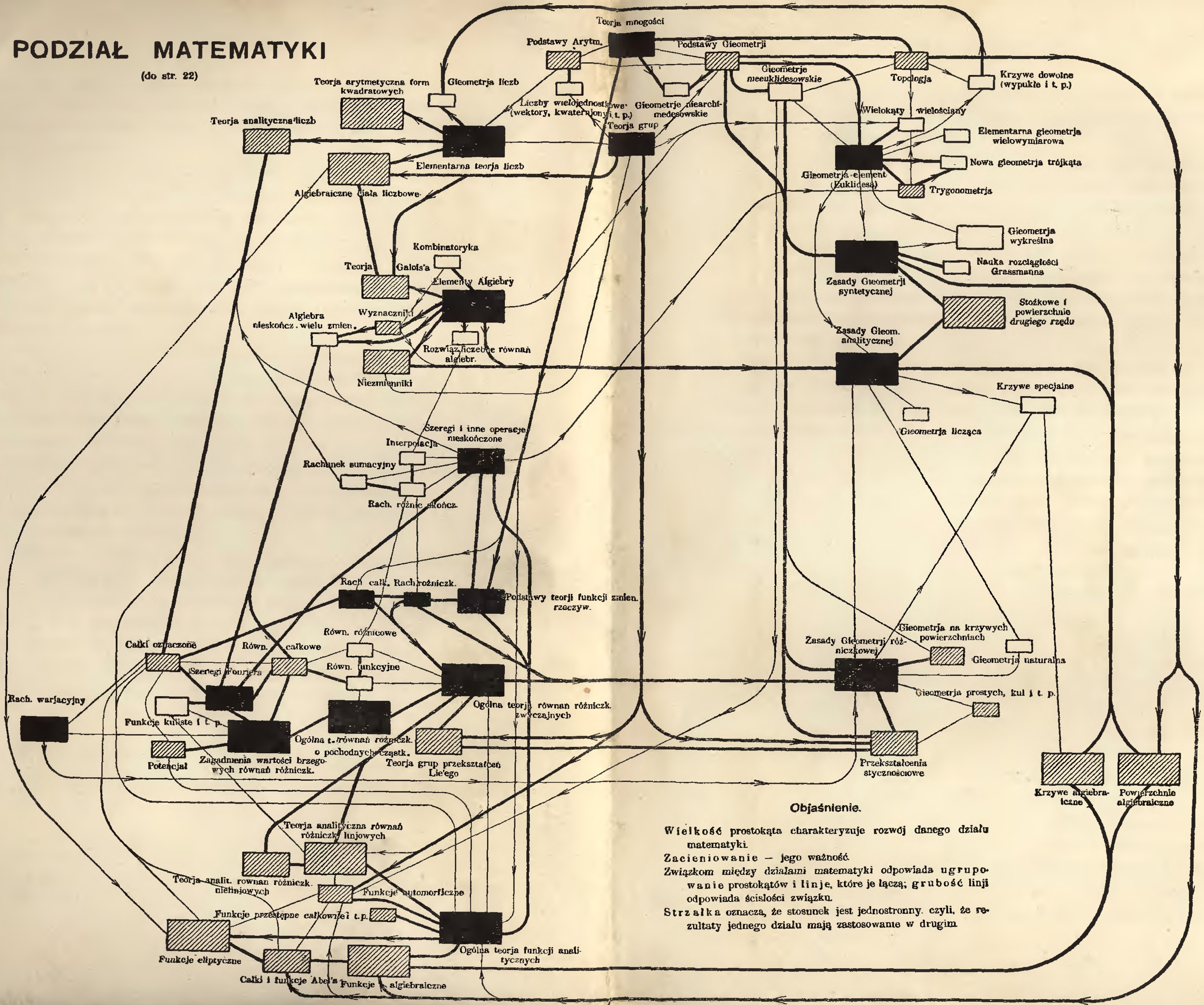
10. PODZIAŁ MATEMATYKI (objaśnienia do tablicy). **10,** 1. Podana tu tablica służy dwojakiemu celowi. Cel pierwszy jest

---

[1]) ...»tak zachowawcza, jak matematyka, która nie burzy prac okresów poprzedzających, by w ich miejsce wznosić nowe budowle«. (HANKEL, Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten, 1885, str. 7).

PODZIAŁ MATEMATYKI

(do str. 22)



Objaśnienie.

Wielkość prostokąta charakteryzuje rozwój danego działu matematyki.

Zacieniowanie — jego ważność.

Związkom między działami matematyki odpowiada **ugrupowanie** prostokątów i linij, które je łączą; **grubość** linji odpowiada ścisłości związku.

Strzałka oznacza, że stosunek jest jednostronny, czyli, że rezultaty jednego działu mają zastosowanie w drugim.

teoretyczny, poznawczy: chcemy dać pewne *wyobrażenie* o ogromie i rozgałęzieniu matematyki oraz *uporządkować* znane już czytelnikowi teorje.

Drugi cel tablicy jest praktyczny: ma ona być niejako *katalogiem rzeczowym* gałęzi matematyki, tak, aby czytelnik, odszukując na tablicy nazwę jakiegoś nieznanego mu zupełnie działu, mógł się zorjentować do jakiej dziedziny badań on należy, co ułatwi szukanie wiadomości o nim. Dlatego staramy się osiągnąć w tablicy możliwą zupełność i wyszczególniamy w niej nawet takie działy matematyki, które z większą może słusznością należałoby uważać jako części innych teorji, niż jako teorje samoistne.

Tablica ta jest tylko bardzo *niedokładnym przybliżeniem* istotnego stanu rzeczy. Nie można bowiem myśleć o dokładności podziału tam, gdzie się ma do czynienia z tak żywym, rozwijającym się i tak niepodzielnym materjałem, jaki przedstawia matematyka. Matematyka tworzy tak organiczną całość, że niepodobna jej rozczłonkować bez pewnego zniekształcenia. Tymbardziej przy porównywaniu różnych działów ze sobą, wobec braku jakichś ustalonych umów co do mierzenia ważności działów, stopnia ich rozwoju i ścisłości związku z innemi, trzeba się zadowolić oceną bardzo przybliżoną.

Nadmieniamy w szczególności, że uwidoczniliśmy na tablicy tylko te związki między odrębnemi działami, które nam się wydały ważniejsze, lub specjalnie ciekawe, abstrahując od reszty. Stąd już wynika, że tablica ta, oprócz tego, że jest niedokładna, musi być w znacznym stopniu *subjektywną*: kto inny ułożyłby ją inaczej; my sami moglibyśmy zmienić ten układ na inny. Czytelnik też powinien ją traktować jako próbę, której celem dać mu możność orjentacji w pierwszych chwilach studjów, a w dalszych — tło do tworzenia własnego poglądu (tło może być i kontrastem), materjał do zastanowienia.

Związki pomiędzy działami matematyki są różnego charakteru: wspólność przedmiotu, wspólność metody i charakteru badań, posiłkowanie się rezultatami jednej gałęzi przez inną i wreszcie związek często polega na tym, że jedna nauka jest częścią innej. Tak np. teorja funkcji eliptycznych albo algiebraicznych należy do teorji funkcji analitycznych, a badania stożkowych należą do gieometrji analitycznej lub syntetycznej (zależnie od przyjętej metody badania). Nie uwidoczniamy tych różnic, nadmienię tylko, że przy rozmieszczaniu kierowaliśmy się pokrewieństwem przedmiotu, inne związki oznaczając tylko łączącemi linjami, naogół zaś kierowaliśmy się głównie względem praktycznym: o ile studjowanie jednej nauki jest przydatne lub konieczne do studjowania innej. Opuściliśmy też związki, rozumiejące się same przez się, wynikające z istnienia innych związków.

10, 2. Matematykę dzieli się zwykle na dwa wielkie działy: analizę i gieometrję. Podział ten istnieje rzeczywiście, ale w wyższej matematyce nie jest tak wyraźny, jak się zrazu wydaje. Czy polega on na różnicy badanego przedmiotu? Gieometrja taka, która należy do czystej matematyki, nie bada przestrzeni fizycznej, lecz tylko własności matematyczne tej — i innych — przestrzeni (do nich np. należy czas)[1]). Kto ma chociaż pojęcie o gieometrji analitycznej, ten wie, że badać linję a badać funkcję, jest to w rezultacie prawie to samo; co więcej, w ujętej abstrakcyjnie wyższej gieometrji analitycznej linje i wszelkie inne figury gieometryczne nie są niczym innym, jak właśnie pewnemi równaniami lub innemi utworami analizy. I czy można poważnie twierdzić, że badania, dotyczące figur urojonych i przestrzeni wielowymiarowych, dotyczą widzialnej, czy choćby intuicyjnej przestrzeni?

To samo stosuje się i do nieanalitycznej, t. zw. czystej gieometrji, do której należą: gieometrja elementarna, topologja (w kierunkach Dehna i Schoenfliesa) i gieometrja syntetyczna; dzisiejsze bowiem teorje podstaw gieometrji uniezależniły również i czystą gieometrję od wszelkiego — empirycznego, czy in-

---

[1]) Poincaré (Analysis Situs, Journal de l'École polytech., 1895, (2) **1**, str. 1) mówi: »gieometrja nie ma jako jedynej racji bytu opisu bezpośredniego ciał, które podpadają pod nasze zmysły: jest ona przedewszystkim studjum analitycznym grupy«. O pojęciu matematycznej przestrzeni, lepiej *rozmaitości*, będzie mowa w rozdziale: Podstawy gieometrji; o jej stosunku do przestrzeni fizycznej — w rozdziale: Zagadnienia filozoficzne matematyki.

tuicyjnego — elementu przestrzennego. Dla czystej gieometrji jednak można prędzej określić różnicę jej przedmiotu od przedmiotu analizy: gieometrja czysta zajmuje się utworami gieometrycznemi, określonemi przez pewniki bez pomocy liczb. Lecz jest to różnica zbyt niejasna.

Na czym więc polega różnica między temi dwiema gałęziami matematyki, szczególniej, gdy gieometrja jest traktowana analitycznie? Najczęściej usłyszymy odpowiedź, że różnią się językiem: jedna nazywa przedmioty swych badań linjami, prostemi i t. d., druga zaś funkcjami, równaniami I-go stopnia i t. d. Gdy wnikniemy głębiej w tę odpowiedź, to zobaczymy, że wskazana w niej różnica nie jest powierzchowną: w sposobie nazywania kryje się sposób ujęcia rzeczy.

Ujęciem przedmiotu i metodą badania — nie zaś przedmiotem — różnią się między sobą analiza i gieometrja. To też większość przedmiotów badań matematycznych bywa traktowana i gieometrycznie i analitycznie, jakby oglądane z dwu stron. Bo każdy fakt da się wypowiedzieć i w języku gieometrji i w języku analizy; tylko, że jeden fakt wyraża się prościej w jednym z tych języków, a inny w drugim. Stąd też powstaje różnica stawiania zagadnień w obu działach.

10, 3. Bardziej jednak zasadniczym podziałem matematyki wydaje nam się podział na matematykę utworów ciągłych i nieciągłych (discret). Do ostatniej zaliczamy teorję liczb i teorję grup nieciągłych wraz z algiebrą [1]). Do pierwszej — resztę analizy (analizę w znaczeniu ciaśniejszym) i prawie całą gieometrję [2]).

Różnica między temi dwoma działami matematyki jest bardzo znaczna, zarówno w metodzie badań, jak i w przedmiocie

---

[1]) Algiebra wprawdzie zajmuje się wielomianami, które są funkcjami ciągłemi; lecz nie bada ich jako funkcje, w swych dowodach użytku z ciągłości nie robi (wyjąwszy t. zw. *twierdzenie zasadnicze algiebry*), i tylko takie dowody uważamy za właściwie algiebraiczne.

[2]) Z gieometrji do matematyki form nieciągłych możnaby zaliczyć topologję (kierunek Dehna), a także gieometrję elementarną, o ile ta zajmuje się linjami łamanemi, szczególniej zaś dział gieometrji o wielokątach i wielościanach foremnych.

i w zagadnieniach (co nie wyklucza istnienia między niemi głębokiego związku). Zastosowań jednak rezultatów jednego z tych działów do drugiego jest stosunkowo mało.

Podobnym podziałem, ale dotyczącym tylko analizy w ciaśniejszym znaczeniu, jest podział na analizę wielkości zespolonych (funkcji analitycznych) i analizę wielkości rzeczywistych (funkcji dowolnych)[1].

Podział ten jest bardziej zasadniczy niż według przedmiotu, bowiem ze zmianą zakresu badania (ograniczeniem się do funkcji zmiennych rzeczywistych, lecz za to znosząc ograniczenie, że mają być one analitycznemi) zmieniają się i zagadnienia, zmieniają i metody, co zmienia cały charakter badania[2].

10, 4. Pozostaje nam powiedzieć słów parę o podziale matematyki na elementarną i wyższą; rozumie się jest to podział konwencjonalny; w praktyce matematyką elementarną nazywamy działy, wchodzące w zakres nauczania w szkole średniej i bezpośrednie ich rozwinięcia, bez wprowadzenia nowych pojęc, a więc całą gieometrję grecką i algiebrę średniowieczną.

Matematyka rozwija się, tworząc nowe, coraz bardziej złożone pojęcia, które coraz to dalsza droga dzieli od pojęć prostych, będących jej punktem wyjścia; wprowadzenie każdego takiego nowego pojęcia — każde wejście na nowy poziom abstrakcji — można uważać za przejście do »wyższego« szczebla matematyki. Ten podział na szczeble będzie oczywiście dla każdej gałęzi matematyki różny i scharakteryzowany przez wprowadzenie różnych nowych pojęć.

Jednak wprowadzenie pojęcia *granicy*, bardzo ważnego, tworzy przeskok najbardziej wydatny, tak, że możemy pojęcie to uważać za kamień graniczny, znaczący przejście do matematyki wyższej. Występuje ono wprawdzie już w gieometrji elementarnej przy obliczaniu pola koła i t. p., ale właściwie jest to już wkraczanie do matematyki wyższej, do rachunku całkowego.

---

[1]) Gdybyśmy chcieli rozciągnąć podział ten i na gieometrję, to do matematyki utworów dowolnych (rzeczywistych) zaliczyć należy topologję (kierunek Schoenfliesa) i teorję krzywych dowolnych.

[2]) O tym podziale por. Rozwinięcia na szeregi.

Wystarczającym jednak dla scharakteryzowania matematyki wyższej ono nie jest, gdyż nie w każdej gałęzi matematyki zostaje wprowadzone i nie odgranicza matematyki elementarnej np. od algiebry wyższej, ani od teorji liczb.

Znaczenie takie wyrazu »elementarny« utarło się także w analizie wyższej: nazywamy tam zwykle »elementarnym« każdy dowód, posługujący się tylko pojęciami teorji liczb i algiebry (choćby bardzo złożonemi i trudnemi) bez używania pojęcia granicy, co wcale zresztą nie oznacza, żeby on miał być łatwiejszy od dowodu analitycznego.

STOPIEŃ I.

OPRACOWAŁ

STEFAN KWIETNIEWSKI.

Treść: 1. Cel niniejszego artykułu. 2. Nauka rachunków: liczby całkowite. 3. Ułamki. 4. Rachunek pamięciowy. 5. Miary. 6. Rachunek przybliżony. 7. Proporcjonalność. 8. O związku arytmetyki z innemi naukami. 9. Nauka gieometrji: figury; umiejętność spostrzegania. 10. Doświadczenia, wykonywanie modeli. 11. Rysunki gieometryczne. 12. O stosowaniu wiadomości gieometrycznych w praktyce. 13. Dalsza nauka matematyki. 14. Wskazówki praktyczne. 15. Literatura: a) nauka rachunków, b) uzupełnienia, c) książki w językach obcych.

---

1. W rozdziale tym zwracam się przedewszystkim do tych czytelników, którzy nie pragną zagłębiać się w naukę matematyki, wymagającą długich lat pracy, a także odpowiednich zdolności, ale którzy pragną posiąść z niej tylko te wiadomości podstawowe, które są dla każdego przystępne, (bez względu na zdolności), które mogą być potrzebne w życiu codziennym dla celów praktycznych, jak np. dla udoskonalenia pracy zawodowej, i które mogą być przydatne do lepszego zrozumienia stosunków społecznych i świata otaczającego[1]. Nauka początków matematyki prowadzi do ściślejszego patrzenia na świat; dzięki temu może ona bardzo przyczynić się do tego, żeby ludzie zrozumieli wzajemnie swoje czynności, poznali lepiej działalność zbiorową i stanowisko poje-

---

[1]) W szczególności artykuł ten polecić można matkom, które zamierzają same uczyć dzieci swoje. Znajomość języków obcych, a zwłaszcza angielskiego, ułatwi korzystanie z najodpowiedniejszych podręczników w tym kierunku. Jako uzupełnienie tego rozdziału, patrz rozdział: Metodyka nauczania, §§ 1—4.

dyńczego człowieka wobec społeczeństwa i pozostałej przyrody; może ona dopomóc do przekształcenia nie rozumiejącej świata istoty w myślącą cząstkę przyrody. W tym znaczeniu matematyka praktyczna jest niezbędną częścią wykształcenia ogólnego.

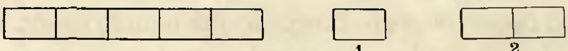
Na początek stawiamy sobie cel o wiele skromniejszy: nauczyć się tylko tego, co możemy spożytkować w gospodarstwie domowym, w interesach naszych, oraz w pracy zawodowej; umiejąc już tyle, niewielkiej będziemy potrzebowali pracy, ażeby zdobyć pobieżne pojęcie o gospodarce całych społeczeństw, o wielkich operacjach finansowych, oraz o niektórych przynajmniej sposobach stosowania matematyki do techniki i do badania przyrody. Kto potrafi obliczyć, ile zużywa w ciągu miesiąca mięsa, chleba, węgla i t. d., ile z tego wypada na każdego członka rodziny, jaka jest tego wartość — temu już łatwiej będzie nabrać wyobrażenia o tym ogromie towarów, przywożonych do miasta ze wszystkich stron świata całemi pociągami i wywożonych z niego, o potrzebach wielkiego miasta, o źródłach ich zaspokajania, o przeciętnym udziale pojedyńczego mieszkańca w zużywaniu produktów i w wydatkach. Liczby będą tu większe, większa różnorodność przedmiotów, ale sposób obliczania pozostaje ten sam.

2. Zaczynać naukę trzeba oczywiście od liczb najmniejszych, wznosząc się stopniowo i bardzo powoli coraz wyżej, powracając często do tego, czego się już nauczyliśmy. Poznawszy dokładnie jedną liczbę, przechodzimy do następnej i badamy starannie zależności między tą liczbą i mniejszemi. Np. po zaznajomieniu się z liczbą 5, otrzymujemy przez dodanie do niej jedności nową liczbę 6. Tę samą liczbę 6 moglibyśmy jeszcze innemi sposobami utworzyć z liczb mniejszych: przez dodanie 2 do 4; albo 4 do 2; albo przez dodanie 3 do 3, czyli przez pomnożenie 3 przez 2; albo jeszcze przez powtórzenie dwuch 3 razy, czyli przez pomnożenie 2 przez 3 i t. d. Nabieramy w ten sposób pojęcia o *czterech działaniach arytmetycznych: dodawaniu, odejmowaniu, mnożeniu* i *dzieleniu*, oraz o pewnych prawach, którym te działania podlegają: $4 + 2 = 2 + 4$, $3 + 5 + 1 = 1 + 5 + 3$; $4 \times 2 = 2 \times 4$, $3 \times 5 = 5 \times 3$ i t. d., skąd widzimy, że wartość sumy jest niezależna od porządku składników, wartość iloczynu jest niezależna od porządku czynników.

Kto uczył się dawniej rachunków, ale wyszedł już z wprawy, ten nie powinien żałować trudu na staranne przypomnienie sobie samych początków; ułatwi mu to znacznie zrozumienie dalszego ciągu. Oczywiście będzie mu to przychodziło o wiele prędzej, aniżeli dziecku, które dopiero zaczyna naukę.

W szkole ludowej w pierwszym roku dzieci poznają zwykle tylko liczby od 1 do 20, i dopiero w czwartym roku potrafią pisać wszelkie żądane liczby i wykonywać na nich działania; kto już raz przechodził naukę rachunków, albo kurs arytmetyki, ten będzie mógł to samo zrobić w ciągu kilku miesięcy, ale zaczynać trzeba zawsze od początku! Dobrze jest też przedstawiać sobie liczby za pomocą kropek, kresek, lub jeszcze lepiej używać do tego celu patyczków; łącząc po 10 patyczków w jedną wiązkę, 10 takich wiązek w jedną większą wiązkę, ułatwimy sobie zrozumienie zwykłego pisania liczb. Np., mając 145 patyczków, z których każdy ma przedstawiać jednostkę, ułożymy je w jedną dużą wiązkę (100), 4 małe (40) i pozostanie jeszcze 5 oddzielnych patyczków.

3. Poznawszy *liczby całkowite*, przechodzimy do *ułamków*. Jeżeli jedność przedstawimy za pomocą paska papieru (fig. 1)



(Fig. 1).

i podzielimy go na 5 części równych, wtedy każda taka część nazywać się będzie jedną piątą ($\frac{1}{5}$), dwie takie części razem wzięte stanowią dwie piąte ($\frac{2}{5}$). To są właśnie ułamki; otrzymujemy je, dzieląc jedność na części równe, i biorąc jedną lub kilka takich części. Najdogodniej jest rachować ułamkami, które powstają przez dzielenie jedności na 10, 100, lub 1000 części; Są to *ułamki dziesiętne*. Używamy ich w ten sposób: przypuśćmy, że chcemy zmierzyć decymetrem wyrysowaną obok kreskę A B (fig. 2); znajdziemy, że decymetr mieści się w kresce raz jeden, w pozostałej części kreski dziesiąta część decymetra mieści się 2 razy i pozostanie jeszcze część zawierająca $\frac{5}{100}$ części decymetra. Długość tę można tak wyrazić:

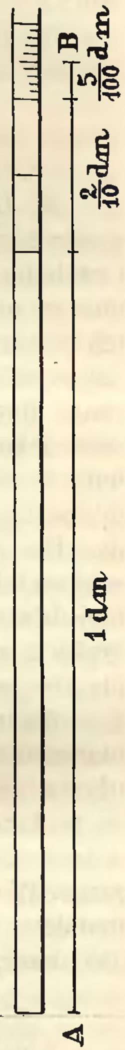
$1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$; krócej piszemy: 1,25;

tutaj pierwsza cyfra z prawej strony przecinka (2) wyraża liczbę części dziesiątych, druga (5) liczbę części setnych jedności. Podobnie zamiast 3 rb. 15 kop. pisze się nieraz 3,15 rb., jedynka oznacza tu liczbę części dziesiątych rubla, czyli 10 kop., piątka—części setnych rubla, czyli 5 kop. Przy tym sposobie pisania rachunek liczb ułamkowych dziesiętnych daje się wykonywać równie łatwo, jak rachunek liczb całkowitych; też same reguły, które służą do rachunku piśmiennego liczb całkowitych, dają się zastosować do liczb dziesiętnych, przybywa jedynie wyznaczanie właściwego miejsca dla przecinka, oddzielającego liczbę całkowitą od ułamka.

4. *Reguły wykonywania piśmiennego działań arytmetycznych* ułatwiają znacznie rachunek, jeżeli mamy do czynienia z liczbami dużemi; ale trzeba się starać, o ile można, *wykonywać rachunek w pamięci, nie używając* reguł i pisząc jak można najmniej; tym sposobem rachować można szybciej; lepiej się też przez to zrozumie istotę samego rachunku, oraz zależności między liczbami. Jeżelibyśmy mieli np. do 17 dodać 98, wówczas zamiast pisać

$$\begin{array}{r} 17 \\ +\ 98 \\ \hline 115 \end{array}$$

prędzej dojdziemy do celu, uważając, że $98 = 100 - 2$; można więc do 17 dodać 100, otrzymamy 117; dodaliśmy jednak o 2 zadużo, należy więc od 117 odjąć 2, pozostaje 115; albo też bierzemy z 17 dwie jednostki, któremi uzupełniamy 98 do 100, i dodajemy następnie pozostałe 15 jednostek. Rachunek ten jest prędszy i łatwiejszy. Podobnie, mnożąc 16 przez 0,75, dobrze jest zauważyć, że $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$; wystarczy więc odjąć



(Fig. 2).

od 16 czwartą część tej liczby, czyli 4, ażeby otrzymać szukany iloczyn 12. Rachunek piśmienny i tu wymaga więcej pracy:

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 0{,}75 \\ \hline 80 \\ +\ 112\ \ \\ \hline 12{,}00 \end{array}$$

5. Ucząc się rachować, jednocześnie uczymy się stosować rachunek do swych potrzeb. Pojęcia o liczbie i rachunku powstają w nas przez baczne przyglądanie się przedmiotom otaczającym; raz zdobywszy te pojęcia, możemy przy ich pomocy coraz dokładniej poznawać to, co nas otacza. Przedewszystkim, umiejąc już rachować, potrafimy też mierzyć czas, długość, objętość, ciężar i t. d.; należy w tym celu poznać *jednostki miary*. Jednostki czasu: rok, doba, godzina, minuta i sekunda są wszystkie w powszechnym użyciu. Przy mierzeniu innych wielkości napotykamy większą różnorodność: nietylko różne narody używają różnych jednostek długości, objętości i t. d., ale jeszcze do różnych przedmiotów stosuje się niejednakowe jednostki. Np. objętość węgla, zboża i wogóle ciał sypkich nieraz podaje się w korcach; do mierzenia objętości płynów tej jednostki nie stosujemy.

Ta różnorodność jednostek utrudnia bardzo rachunek. Dla ułatwienia i ujednostajnienia mierzenia, większość narodów używa dziś wyłącznie *układu metrycznego*, najdogodniejszego w rachunku. Układ ten bywa i u nas stosowany w nauce, w technice i rzemiośle, trzeba więc koniecznie z nim się zaznajomić. W układzie tym zasadniczą jednostką długości jest *metr* [1]); mniejsze otrzymujemy, dzieląc metr na 10, 100 i 1000 części (decymetr, centymetr, milimetr); z większych jednostek używa

---

[1]) W zasadzie 1 : 40,000,000 część długości południka ziemskiego, przechodzącego przez Paryż; w rzeczywistości model normalny metra, podług którego wykonywa się wszystkie inne, różni się nieznacznie od tej wielkości wskutek drobnego błędu w ówczesnych pomiarach ziemi (1792—1798; metr wypadł zakrótki prawie o 0,1 milimetra).

się prawie wyłącznie *kilometr*, czyli 1000 metrów (w przybliżeniu $\frac{14}{15}$ wiorsty).

Znając jakąś długość, zmierzoną za pomocą jednej z tych jednostek, np. centymetra, łatwo ją wyrazić w innych jednostkach: 346 centymetrów jest to to samo, co 3460 milimetrów, albo 3,46 metra.

Do tych samych jednostek sprowadza się mierzenie innych wielkości: np. jednostką objętości jest *litr* (znany u nas pod nazwą kwarty), czyli objętość sześcianu, którego krawędź ma długość jednego decymetra; ciężar wody czystej, wypełniającej w temperaturze 4^0 Celsjusza jeden litr, przyjmuje się za jednostkę wagi, zwaną *kilogramem*.

6. Wielkości, z któremi mamy w praktyce do czynienia, nie dadzą się wyrażać za pomocą liczb zupełnie ściśle, tylko z pewnym przybliżeniem.

Jeżeli mamy powiedzieć, jaka jest odległość między dwoma miastami, możemy podać odległość o kilka kilometrów większą lub mniejszą, zależnie od tego, czy mierzymy drogę od poczty, od rogatki i t. d., a także czy bierzemy pod uwagę długość szosy, czy ścieżki dla pieszych, czy też najkrótszej linji, jaką można poprowadzić na powierzchni ziemi, między obu miastami. Umówiwszy się co do tych warunków, będziemy mogli odległość dokładniej podać; nietrudno będzie wymierzyć dziesiąte części kilometra, ale już setne i tysiączne części kilometra byłyby niepewne; mówimy wtedy, że wymierzyliśmy odległość z dokładnością do $\frac{1}{10}$ kilometra. Za pomocą odpowiednich przyrządów mierniczych można odległość mierzyć ze ścisłością o wiele większą, ale ścisłości bezwzględnej nigdy nie osiągniemy: ani położenie punktów, między któremi mierzymy odległość, nie jest nigdy bezwzględnie ściśle oznaczone, ani też sposoby mierzenia nie są pozbawione pewnych niedokładności.

Mierząc objętość, ciężar, czas, również popełniamy większe lub mniejsze niedokładności; wszystkie wielkości, które otrzymujemy przez mierzenie, są obarczone pewnym błędem, i razem z tym błędem wprowadzamy je do rachunku.

O tym należy pamiętać przy podawaniu rezultatu rachunku. Przypuśćmy, że ktoś przebył na rowerze odległość

7 kilometrów w $23\frac{1}{2}$ minut; chcemy obliczyć, jak daleko dojedzie on w ciągu godziny, jadąc z takąż samą szybkością. Odległość ta będzie tyle razy większa od 7 km., ile razy jedna godzina, czyli 60 minut, jest większa od $23\frac{1}{2}$ minut; odległość ta, wyrażona w kilometrach, będzie więc:

$$\frac{7\times 60}{23\frac{1}{2}}=\frac{2\times 7\times 60}{47}=\frac{840}{47}=17\tfrac{41}{47}.$$

Rezultat ten, napozór bardzo ścisły, daje czterdzieste siódme części kilometra; ale czy można bardzo ufać tej ścisłości? Cyklista nie przebywa dokładnie tej samej odległości, którą wskazują słupy przy szosie; omijając przeszkody, wydłuża drogę; może ją skracać tam, gdzie szosa robi zakręt; pozatym prędkość jego nie pozostaje ściśle ta sama, a także czas przez nas wymierzony, $23\frac{1}{2}$ minut, jest obarczony pewnym błędem. Zamiast więc mówić, że cyklista przejedzie w ciągu godziny $17\frac{41}{47}$ kilometrów, właściwiej będzie powiedzieć, że przejedzie 17 km. (z niedomiarem) lub 18 km. (z nadmiarem); lepiej jest podać tę drugą odległość, gdyż ona mniej się różni od odległości obliczonej, aniżeli pierwsza.

W warunkach wyjątkowo dogodnych, jeżeli np. cyklista jedzie po torze wyścigowym, i jeżeli czas został wymierzony z możliwą dokładnością, wówczas jeszcze dziesiąte, a nawet setne części kilometra mogą mieć znaczenie; w tym przypadku zamienilibyśmy ułamek $\frac{41}{47}$ na ułamek dziesiętny, obliczając tylko jedną lub 2 cyfry dziesiętne; znajdziemy, że odległość szukana wyniesie 17,87 km. Wprawdzie biorąc $\frac{87}{100}$ zamiast $\frac{41}{47}$, popełniamy nowy błąd, ale błąd ten jest napewno mniejszy od $\frac{1}{100}$, a więc w danym zadaniu można nie zwracać nań uwagi.

Wogóle dobrze jest pamiętać o tym, że rachować można z wszelką żądaną dokładnością, a więc możemy zawsze unikać błędów rachunkowych, które zwiększyłyby jeszcze niedokładność roboty; ale nie możemy uniknąć tych błędów, które powstają wskutek niedokładnego mierzenia, lub wskutek niezupełnie ścisłych przypuszczeń, jak np., że cyklista jedzie najprostszą drogą i z prędkością zawsze jednakową.

Błędy, stąd pochodzące, mogą być większe w ostatecznym rezultacie, aniżeli w wielkościach wymierzonych. Najprostszy przykład: ktoś przebywa 1 wiorstę w 11 min., z dokładnością do $\frac{1}{2}$ minuty; na pytanie, jak długo będzie szedł 1 milę, odpowiadamy: 77 minut, ale tu błąd może wynosić już nie $\frac{1}{2}$, ale $7\times\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$ minuty.

7. Zaznajomiwszy się z czterema działaniami i z miarami, zwykle uczymy się *proporcjonalności.*

Dwie takie wielkości, jak ciężar przedmiotu i jego cena, albo ciężar i objętość, albo droga przebyta i czas, w ciągu którego ją przebyliśmy, dostarczają nam przykładów wielkości proporcjonalnych (lub dokładniej: wprost proporcjonalnych); jeżeli jedna z nich, np. objętość zwiększa się 2, 3 lub 4 razy, wtedy i druga (ciężar) zwiększy się 2, 3 lub 4 razy. Dwie kwarty wody ważą 2 razy więcej niż jedna kwarta wody; 6 funtów chleba kosztuje 3 razy więcej, niż 2 funty chleba; jeżeli na przebycie 2 wiorst zużyłem 25 minut czasu, to na przejście odległości 4 razy większej, czyli 8 wiorst, zużyję cztery razy więcej czasu, a więc 100 minut, czyli 1 godzinę 40 minut. Uczeń wyrabia w sobie stopniowo poczucie proporcjonalności i nabiera świadomości, w jakich warunkach można lub nie można zastosować proporcjonalności; tak np. przy ogrzewaniu ciał objętość ich powiększa się, jakkolwiek ciężar pozostaje bez zmiany (co widzimy na rtęci w termometrze); należałoby więc dokładniej powiedzieć, że ciężar i objętość ciała są wielkościami proporcjonalnemi, dopóki temperatura pozostaje bez zmiany. Proporcjonalność drogi i czasu da się również nie zawsze zastosować, a tylko wtedy, jeżeli prędkość poruszającego się przedmiotu pozostaje bez zmiany.

I cena, jaką kupiec wyznacza za towar, nie zawsze jest proporcjonalna do ilości towaru; przy większych zakupach nieraz wypada nam zapłacić za każdą jednostkę mniej, aniżeli przy drobnym kupnie.

Innego rodzaju zależność między wielkościami poznajemy przy odwrotnej proporcjonalności.

Za 60 rb. można dostać 60 metrów materji po 1 rb. za metr, lub 30 metr. po 2 rb. za metr, lub 20 mtr. po 3 rb. za m lub 15 m. po 4 rb. za m. i t. d.; jeżeli więc cena jednego metra materji powiększa się 2, 3 lub 4 razy, wówczas ilość metrów, którą otrzymać można za tę samą sumę pieniędzy, zmniejsza się 2, 3 lub 4 razy.—Pociąg, przebywający 30 km. na godzinę, przejdzie odległość 180 km. w 6 godzin; pociąg, idący z prędkością 2 razy większą, t. j. 60 km. na godzinę, przejdzie tę samą odległość w czasie 2 razy krótszym, t. j. w 3 godziny. Dwie takie wielkości, z których jedna powiększa się 2, 3, 4 razy, jeżeli druga zmniejsza się tyleż razy, nazywają się odwrotnie proporcjonalne.

Stosunki handlowe dostarczają nam licznych przykładów wielkości proporcjonalnych; w szczególności należy tutaj rachunek procentów. Również w mechanice, fizyce i gieometrji często wypada mieć do czynienia z wielkościami proporcjonalnemi.

8. Początków mechaniki i fizyki zwykle uczymy się oddzielnie od arytmetyki [1]), ale dobrze jest uczyć się tych przedmiotów jednocześnie z arytmetyką, ażeby zawczasu wprawiać się w stosowanie wiadomości nabytych w jednej z tych nauk do rozszerzenia wiedzy w innych. Kto nie ma możności uczenia się jednocześnie fizyki, powinien przynajmniej postarać się o nabycie pojęć podstawowych, jak *ciężar właściwy, ruch jednostajny*, prawa *równowagi dźwigni* i t. d. W nowszych podręcznikach, używanych w Anglji i Stanach Zjednoczonych [2]), wykład początków mechaniki i fizyki prowadzony jest łącznie z arytmetyką i gieometrją; w naszej literaturze brak książek tego rodzaju, ale pojęcia podstawowe, o których wyżej była mowa, bywają uwzględniane i w naszych podręcznikach.

Gieometrji należy się uczyć również jednocześnie z arytmetyką i starać się o to, ażeby obie nauki wspierały się i przenikały wzajemnie.

Przy mnożeniu zwykle zaznajamiamy się z *prostokątem* i *prostopadłościanem:* chcąc obliczyć pole jakiegoś prostokąta

---

[1]) Patrz art. Fizyka (Poradnik dla Samouków, t. 2-gi).

[2]) S. W. Myers, First-Year Mathematics for Secondary Schools, Chicago, 1909, str. XII + 365.

(np. powierzchni podłogi lub stołu), mnożymy jego długość przez szerokość; ażeby obliczyć objętość prostopadłościanu (pokoju, pieca, pudełka i t. d.), mnożymy długość przez szerokość i przez wysokość. Przy obliczaniu pól i objętości innych figur uczymy się stosować prawidła bardziej złożone, poznajemy coraz to nowe zależności między wielkościami, ale zawsze staramy się wielkość szukaną (pole, objętość) obliczyć przez wymierzenie pewnych długości i przez wykonanie nad niemi pewnych działań, zależnie od własności rozpatrywanych figur.

Tak np., ażeby obliczyć pole wykreślonego obok trapezu (fig. 3), mierzymy jego boki równoległe (3 cm. i 2 cm.) oraz wysokość (1,5 cm. = $\frac{3}{2}$ cm.), dodajemy liczby jednostek długości obu jego boków, dzielimy tę sumę przez 2 i mnożymy przez liczbę jednostek, zawartych w wysokości:

$$\frac{3+2}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5.3}{4}=\frac{15}{4}=3\tfrac{3}{4};$$

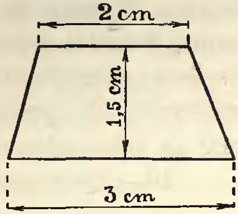


Fig. 3.

liczba otrzymana wskazuje, ile razy jednostka powierzchni mieści się w danym trapezie.

9. Figury, których własności poznać należy, są: punkt, odcinek, kąt; kwadrat, prostokąt, równoległobok, romb, trójkąt, koło, wielokąt, trapez; sześcian, prostopadłościan, graniastosłup, ostrosłup, walec, stożek, kula. Oprócz sposobów mierzenia ich wielkości, rozpatrujemy niektóre inne ich własności i położenie wzajemne, równość i symetrję figur, figury utworzone przez ruch punktu lub linji prostej w pewien oznaczony sposób i t. d.

Przy uczeniu się początków gieometrji, poznajemy wogóle tylko figury, mające niezbyt złożone własności, które dadzą się w kilku słowach wypowiedzieć i o których nietrudno się przekonać. Własności te poznajemy bądź przez baczne przyglądanie się figurom, bądź przez mierzenie niektórych ich części, bądź przez rozumowanie; uczymy się więc przytym patrzyć, mierzyć i myśleć.

Umiejętność s p o s t r z e g a n i a pewnych cech przedmiotów, na które patrzymy, wyrabiamy w sobie stopniowo; nie każdy zwraca uwagę na te same cechy; dobrze więc jest rozmawiać z innemi o tym, co zauważyliśmy: w ten sposób rozszerza się zakres wiadomości naszych.

Książka lub nauczyciel dostarcza wskazówek, na co zwracać trzeba uwagę. Weźmy np. pudełko od zapałek: jest to model prostopadłościanu. Niezawodnie każdy zauważył, że figura taka ma 6 ścian, ale nie każdy bez namysłu lub bez porachowania potrafi powiedzieć, że prostopadłościan ma 8 wierzchołków (rogów) i 12 krawędzi, trzech różnych długości. W y o b r a ź n i a doprowadzi nas do poznania innych jeszcze własności prostopadłościanu. Weźmy np. pod uwagę 2 wierzchołki, nie leżące na tej samej ścianie; można w y o b r a z i ć s o b i e linję prostą, łączącą te dwa wierzchołki; taka linja nazywa się *przekątną*. Łatwo spostrzec, że prostopadłościan ma 4 przekątne i że wszystkie one są sobie równe.

10. Obserwowanie modeli figur gieometrycznych nie wy-

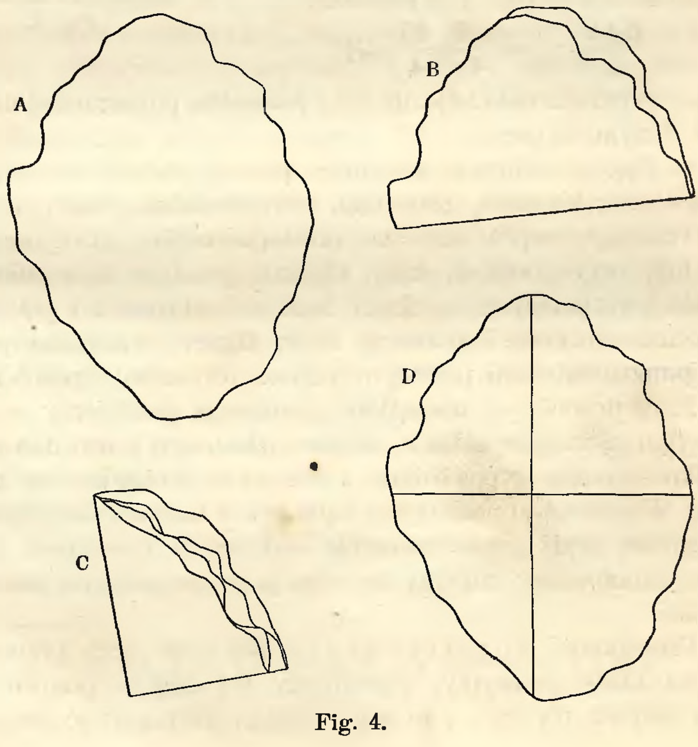


Fig. 4.

starcza do nauki: trzeba modele takie samemu sporządzać i wykonywać nad niemi doświadczenia. Kawałek papieru jest modelem płaszczyzny (fig. 4 *A*), załamując go jakkolwiek (*B*), otrzymamy krawędź, przedstawiającą linję prostą. Jeżeli załamiemy go po raz drugi tak, żeby jedna część otrzymanej krawędzi przylgnęła do drugiej (*C*), otrzymamy nową krawędź, prostopadłą do poprzedniej. Kąt, utworzony przez obie krawędzie, nazywamy *kątem prostym;* jest on równy każdemu z kątów, utworzonych przez krawędzie prostopadłościanu, co łatwo sprawdzić. Kawałek papieru, zwinięty w opisany powyżej sposób, można zawsze tak położyć na pudełku od zapałek, ażeby krawędzie jego przystały do krawędzi pudełka. Jeżeli rozwiniemy napowrót kawałek papieru, spostrzeżemy na nim dwie linje proste, wzajemnie prostopadłe (*D*); tworzą one między sobą cztery kąty proste. Wszystkie kąty proste są sobie równe.

Z kątami prostemi mieć będziemy bardzo często do czynienia; dobrze więc jest sporządzić sobie odrazu na początku trwały model kąta prostego; najlepiej wyciąć go piłką (laubsegą) z cienkiej deseczki. Deseczka formy trójkąta, w którym jeden z kątów jest prosty, nazywa się ekierką (fig. 5). Umiejąc budować kąty proste, potrafimy już sporządzić model prostopadłościanu. Kawałek papieru postaci przedstawionej na rysunku (fig. 6), załamany wzdłuż nakreślonych linji prostych, dostarczy nam takiego modelu.

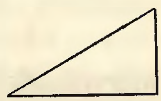


Fig. 5.

Wogóle trzeba się starać wykonywać modele i przyrządy, o ile możności, samemu; nabiera się przez to wprawy do dokładnej roboty, umysł lepiej chwyta własności przedmiotów tak wykonanych, aniżeli znanych tylko z oglądania, rozwija się samodzielność i zmysł wynalazczy.

Podam jeszcze dwa przykłady, jak można doświadczalnie poznawać prawdy matematyczne. Wytnijmy trójkątny kawałek papieru (fig. 7 *A*) i oderwijmy od niego wszystkie 3 kąty; jeżeli kąty te ułożymy na stole jeden obok drugiego tak, żeby miały

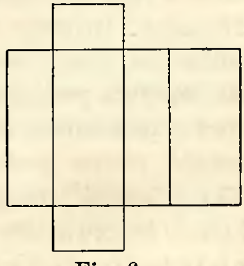


Fig. 6.

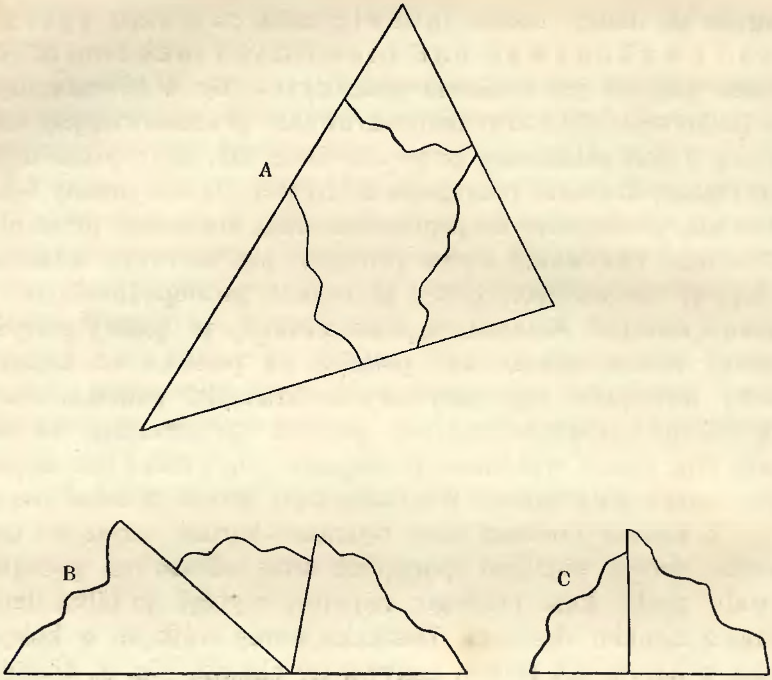


Fig. 7.

wierzchołek wspólny i stykały się ramionami (*B*), wówczas oba ramiona końcowe zawsze będą leżały wzdłuż jednej linji prostej.

Tę własność trójkąta wyrażamy mówiąc, że *suma wszystkich trzech kątów każdego trójkąta równa się sumie 2 kątów prostych* (*C*).

Inny przykład: krążek papierowy, przecięty wzdłuż promienia (fig. 8) czyli linji prostej, idącej od środka do obwodu, zwijamy, tworząc rodzaj tutki, i sklejamy w tym położeniu; tutka ma postać stożka, brzeg jej ma postać okręgu koła, które się nazywa podstawą stożka. Sporządźmy z kartki prostokątnej rurkę papierową w kształcie walca, mającego podstawę i wysokość równe podstawie i wysokości stożka, i przyklejmy do niej z jednej strony denko. Za pomocą piasku można się przekonać, że zawartość tutki jest 3 razy mniejsza, niż rurki, czyli, że *objętość stożka jest trzy razy mniejsza, niż obję-*

tość walca o tej samej podstawie i wysokości.

Oswajając się coraz więcej z figurami gieometrycznemi, możemy zastępować niektóre doświadczenia przez rysunek, zwłaszcza jeżeli mamy do czynienia z figurami płaskiemi; linijka, ekierka, miarka, (którą zresztą w wielu przypadkach można zastąpić przez pasek papieru) i cyrkiel są do tego celu wystarczającemi przyrządami.

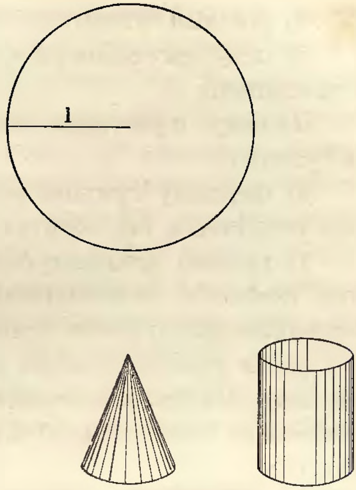


Fig. 8.

Zamiast wycinać figurę, rysujemy ją na papierze; zamiast przenosić z miejsca na miejsce, rysujemy na nowym miejscu figurę równą danej. Np. równoległobok $ABCD$ (fig. 9) można rozciąć na takie dwie części, które wypełnią prostokąt $EFGH$ (mający podstawę EF równą podstawie równoległoboku AB i wysokość EH równą wysokości równoległoboku BI); ażeby się o tym przekonać, przedłużmy bok CD i poprowadźmy do niego prostopadłe BI i AK; uważne przypatrzenie się otrzymanej figurze przekona nas, bez wycinania i przenoszenia, że tak jest w istocie.

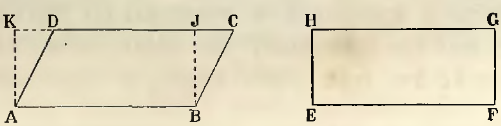


Fig. 9.

11. Dużo starań poświęcić należy rysunkom gieometrycznym. Rysunek jest niezbędnym środkiem pomocniczym przy nauce gieometrji; oprócz tego jest on pożytecznym z następujących względów:

a) uczy nas poznawać nowe kształty, podobieństwo i różnice między figurami, przejście stopniowe od jednych figur do drugich;

b) pobudza wrażliwość oka i sprawność ręki [1]);

c) uczy odwzorowywać na płaszczyźnie to, co widzimy w przestrzeni;

d) uczy wyobrażać sobie w przestrzeni to, co widzimy na rysunku;

e) dokładny rysunek pozwala wykonać model wyrysowanego przedmiotu lub odtworzyć żądany przedmiot;

f) rysunki gieometryczne mają zastosowanie w zdobnictwie, rzemiośle, architekturze, technice i t. d., są też bardzo pożyteczne dla artystów malarzy;

g) za pomocą rysunku można przedstawiać przebieg pewnego zjawiska (patrz przedstawienia graficzne, Stopień II, § 16) z dziedziny fizyki, statystyki, gospodarstwa domowego i wielu innych.

12. Przedmioty, z któremi mamy do czynienia, porównywamy z figurami gieometrycznemi i w ten sposób stosujemy w praktyce wiadomości nasze o tych figurach. Skrzynkę rozpatrywać można jako prostopadłościan, pomarańczę jako kulę i t. d. Nie zawsze zresztą zadowalamy się bezpośredniemi wrażeniami wzrokowemi i dotykowemi: nieraz jeszcze bierzemy pod uwagę to, co wogóle wiemy o rozpatrywanym przedmiocie; np. kawał zwiniętego drutu sprawia na nas wrażenie pierścienia, ale przy obliczaniu jego objętości lepiej jest wyobrazić sobie, że został wyprostowany i rozpatrywać go jako walec o bardzo znacznej wysokości w stosunku do jego przekroju.

Wogóle należy pamiętać, że jakiś przedmiot sam przez się nigdy nie jest figurą gieometryczną;

---

[1]) Niektórzy autorowie zalecają przybliżone wykreślanie linji krzywych za pomocą cyrkla, np. elipsę zastępują owalem, złożonym z czterech łuków koła; sposób ten bywa często stosowany w architekturze. Wrażliwe oko niedokładności takie z łatwością rozpoznaje; ażeby tej wrażliwości nie zatracić, początkujący powinien, moim zdaniem, unikać rysunków tego rodzaju i starać się rysować wszystkie krzywe, z wyjątkiem kół, od ręki, nie używając cyrkla, ani krzywika. Kto ma jakie takie zdolności do rysunków ręcznych, łatwo pokona pierwsze trudności, i ćwiczenia takie będą dla niego bardzo pożyteczne; jedynie osobom pozbawionym tych zdolności zalecić można rysunek przybliżony za pomocą cyrkla lub krzywika.

stosując w praktyce nasze wiadomości gieometryczne, zawsze popełniamy większy lub mniejszy błąd. Starać się należy o to, żeby błąd ten był nie koniecznie jak najmniejszy, ale dość mały, ażeby można było nie brać go pod uwagę w danym zagadnieniu.

Jeden i ten sam przedmiot może być zresztą w różnych warunkach rozpatrywany jako rozmaite figury gieometryczne: równy kawałek powierzchni ziemi uważamy za płaszczyznę; całą ziemię możemy uważać za kulę i w ten sposób obliczyć jej objętość, odległość między dwu miastami i t. d.; dokładniej — kształt ziemi można przyrównać do elipsoidy; rozpatrując okolice górzyste, musimy zaniechać tych wszystkich porównań; ziemia, rozpatrywana jako magnes, da się porównać do linji prostej; badając wreszcie jej położenie względem ciał niebieskich, uważamy ją jako punkt.

13. Szkic, który tu przedstawiłem, odpowiada z niewielkiemi zmianami kursowi ośmioletniemu szkół ludowych w Europie zachodniej.

Nie jest to jeszcze właściwa matematyka, ale *początki matematyki praktycznej,* którą można nazwać nauką ściślejszego spoglądania na świat; na pojęciach, tą drogą zdobytych, można oprzeć naukę matematyki czystej, co do której czytelnik znajdzie wiadomości we wstępie ogólnym, oraz w Stopniu II-im i III-im. Kurs, przedstawiony w tym rozdziale, wystarcza człowiekowi przeciętnemu do potrzeb życia codziennego, do czytania książek popularnych z dziedziny fizyki, chemji, astronomji, meteorologji, ekonomji politycznej i t. d., a także do słuchania odczytów popularnych i pogadanek.

Kto pragnie rozszerzyć swoje wiadomości z matematyki praktycznej, nie przechodząc do matematyki ścisłej, temu można polecić przedewszystkim zaznajomienie się z używaniem tablic, wzorów i maszyn rachunkowych (p. Literaturę), początkami gieometrji wykreślnej i perspektywy, oraz z początkami rachunku prawdopodobieństwa.

14. Łatwiej jest wskazać, czego należy się uczyć, niż odpowiedzieć na pytanie, jak trzeba się uczyć.

Strona metodyczna samouctwa wogóle nie była dotychczas gruntownie opracowana. Nie jest zresztą rzeczą możliwą opracowanie jednakowej metody dla wszystkich, wobec znacznej różnicy w ustroju umysłów ludzkich. Wogóle tylko osoby obdarzone wyjątkowemi zdolnościami mogą się od początku uczyć bez obcej pomocy; i w tym przypadku zresztą pożądane jest kontrolowanie nabytych wiadomości przez ludzi doświadczonych.

Ludzie, obdarzeni odpowiedniemi zdolnościami, dochodzą nieraz bez obcej pomocy do znakomitej wprawy w rachunku pamięciowym [1]); komu na tym zależy, powinien się wprawiać, zanim zacznie wykonywać większe rachunki na piśmie; kto już raz nabierze rutyny w rachunku piśmiennym, temu trudniej jest przyzwyczaić się do wykonywania działań w pamięci. Nie należy zresztą sądzić, ażeby zdolności do rachunku były równoznaczne ze zdolnościami do matematyki wogóle; wielcy matematycy nieraz bywają słabemi rachmistrzami, a wyborni rachmistrze często nie mogą podołać trudnościom teoretycznym.

Książek, odpowiadających w zupełności potrzebom początkujących samouków, dotychczas niema nietylko w naszej literaturze, lecz i w obcych. Książka, choćby była opatrzona napisem: »podręcznik dla samouków«, będzie zawsze zawierała miejsca, których samouk nie zrozumie. Nieraz można usunąć takie wątpliwości przez uważne wczytywanie się i zastanawianie się nad zdaniem niejasnym.

To, co na razie jest niezrozumiałym, staje się często jasnym po dłuższym rozmyślaniu, po odłożeniu książki, gdy umysł już się wyczerpał, i powróceniu do niej po raz drugi i trzeci, nazajutrz lub po dłuższej nawet przerwie. Gdy i ten sposób nie da rezultatu, gdy się ze siebie wydobyło wszystko, co mogło być wydobyte, pomocnym okazać się może uczenie się zbiorowe; wtedy np. jeden z uczących się, bystrzejszy, może przyspieszyć pokonywanie trudności; przytym wspólna wymiana zdań działa pobudzająco na myślenie, zwraca uwagę na to, czego sam czytelnik nigdy nie dostrzeże. Należy jednak pamiętać o tym, że bystrzejszy lub bardziej oczytany kolega może jedynie na nie-

---

[1]) Por. B. Branford, A Study of Mathematical Education. Oxford, 1908. Rozdział VII (str. 74—92): Jak pewien znakomity inżynier (Bidder) sam się nauczył arytmetyki.

znaczny dystans wyprzedzić towarzyszów pracy; opinje jego, która książka jest »dobra«, a która »zła«, lub który pogląd w jakiejś kwestji spornej jest »prawdziwy«, który »fałszywy«, często będą powierzchowne i błędne, nie należy więc od niego przejmować nic, czego nie potrafi dokładnie wytłumaczyć. Zdolniejszy kolega otrząśnie się później łatwo, przy dalszej nauce, z niedorzeczności, które sam wymyślił, pozostawiając swym towarzyszom w spadku przesądy, trudne do wykorzenienia.

Pośród osób z połowicznym wykształceniem kursuje mnóstwo przesądów dotyczących matematyki, a pochodzących z tego właśnie źródła.

Kto nie ma towarzyszów nauki, może prosić o wytłumaczenie niezrozumiałych ustępów w książce kogoś, obeznanego z przedmiotem.

Przy braku osób, znających rzecz, zwrócić się można po wyjaśnienia i radę do redakcji Poradnika.

15. Literatura.

a) Nauka rachunków. Dla początkujących samouków przeznaczone są następujące książeczki:

M. Brzeziński. Wstępna nauka rachunków z liczbami całkowitemi i ułamkami w zakresie od 1-go do 10-ciu. Warszawa, wyd. im. Staszyca. 1909, str. 40. Cena 12 kop.

S. Różański. Nauka rachunków dla samouków. Wydanie piąte, uzupełnił M. B. Warszawa, wyd. im. Staszyca. 1908, str. 88. Cena 20 kop.

Książeczka ta stanowi ciąg dalszy poprzedniej.

Obszerniejsze i staranniej opracowane, ale przeznaczone do lekcji z nauczycielem są książki:

A. Jeske. Arytmetyczka dla rozpoczynających elementarny kurs nauk. Wyd. 7-me, opracował podług najdostępniejszej »Metody obrazowej« Z. Kamiński. Warszawa, Arct, 1906, str. 165. Cena kop. 45.

M. Berkman. Arytmetyka. Podręcznik do nauki początkowej. Wyd. 2-e. Warszawa, Arct, 1906, str. 232. Cena kop. 75.

R a c h u n k i d l a s z k ó ł l u d o w y c h. Nakładem zakładu Narodowego im. Ossolińskich. Lwów. Część I, str. 34. 1911. Cena (razem z »Elementarzem«) hal. 45. Cz. II, str. 64. 1911. Cena hal. 24. Cz. III, str. 79. 1912. Cena hal. 26. Cz. IV, str. 112. 1912. Cena hal. 35.

T r e ś ć: I. Liczby od 1 do 10. II. Liczby od 1 do 100, pojęcie o ułamkach, monety austryjackie, miary metryczne, podział czasu. III. Liczby od 1 do 1000, liczby wielorakie, ułamki zwyczajne i dziesiętne. IV. Też same rozdziały, co w cz. III, obszerniej traktowane. Zakres liczb wykracza poza 1000. Zastosowania do gieometrji i do stosunków handlowych.

Te ostatnie książeczki najbardziej odpowiadają dzisiejszym wymaganiom, zarówno pod względem treści, jak i metody. Część III i IV może być używana bez pomocy nauczyciela, po opracowaniu książeczek Brzezińskiego i Różańskiego.

Kto zamierza uczyć się matematyki w zakresie średniego wykształcenia, ten powinien, po opracowaniu jednej z podanych tu książek, przejść do S t o p n i a II (cykl I). Polecam zwłaszcza Arytmetykę Dicksteina i Gieometrję Jamrógiewicza i Strutyńskiego.

b) Uzupełnienia dla tych czytelników, którzy muszą poprzestać na książkach popularnych; zaznaczamy wszakże, że wymienione tu książki nie wyczerpują planu powyżej zakreślonego, gdyż literatura nasza w tym względzie jest niewystarczająca.

Z. Kamiński. C y r k i e l i e k i e r k a. Warszawa, 1896, str. 110. Cena kop. 80.

Książeczka ta może być pomocna przy początkowej nauce gieometrji. Oprócz początkowych wiadomości z gieometrji i wskazówek, jak używać przyrządów rysunkowych, zawiera dużo zadań.

W. Majewski. G i e o m e t r j a p r a k t y c z n a (podręcznik dla rzemieślników). Warszawa, Kasa Mianowskiego, 1903, str. 301. Cena kop. 75.

Książka zawiera ważniejsze twierdzenia (bez dowodzeń), wzory i zadania.

c) Książki w językach obcych [1]). Z licznych podręczników g i e o m e t r j i początkowej można wybrać:

---

[1]) Książki, tutaj podane, mają charakter uzupełniający; typowe podręczniki zagraniczne dla szkół ludowych, p. w M e t o d y c e n a u c z a n i a.

G. Ch. Young & W. H. Young. The first book of Geometry. Londyn, Dent, 1905, str. XVI+222. Cena 1 s. 6 p. — Przekład niemiecki: Der kleine Geometer. Lipsk, 1908. XVI+239. Cena m. 3.

Ważniejsze rozdziały: Prosta, płaszczyzna, walec, stożek, kąt, koło. Podział kąta i prostej na części równe. Prostopadłe. Romb, kwadrat, sześcian, prostokąt. Trójkąt, czworościan. Linje i płaszczyzny równoległe. Pole prostokąta i trójkąta. Równoległobok.

W książeczce tej nauka jest prowadzona w ścisłym związku z wykonywaniem przez ucznia modeli z papieru, bez pomocy przyrządów (np. cyrkla); w ten sposób rozwijają się jednocześnie spostrzegawczość, zdolność rozumowania i sprawność ręki.

Ponieważ w książeczce tej rozpatrywane są wyłącznie przedmioty wykonane ręką ucznia, polecamy więc jako uzupełnienie:

J. Eaton Feasey. In the open air. Londyn, Pitman, str. 120. Cena 1 szyl. 6 pensów.

Idąc za wskazówkami, zawartemi w tej książeczce, można się nauczyć początków gieometrji przy pomocy pomiarów, wykonywanych na świeżym powietrzu.

Ze zbiorów zadań rachunkowych do najwybitniejszych należy:

Rechenbuch für die Münchener Volksschule. München, Gerber. Schülerhefte für Knaben 1—8. 8 zeszytów w cenie od 15 do 25 fen.

Zwłaszcza polecamy zeszyt 8-my, zawierający zadania, dotyczące gospodarstwa domowego i handlu, początki gieometrji, w zastosowaniu do rzemiosł, przedstawienia graficzne i t. p.

Z książek popularnych, wykraczających poza kurs szkoły ludowej, traktujących matematykę stosowaną, wymienimy:

W. J. Stainer. Junior practical mathematics. Londyn. George Bell, 1907, str. X+350+XLII. Cena 2 s. 6 p.

Treść. W części I: Cztery działania z zastosowaniami głównie do gieometrji i fizyki; przedstawienia graficzne, równania stopnia 1-go i 2-go, logarytmy, proporcjonalność, przybliżenia. W części II: odcinki, kąty, koło, trójkąt, prostokąt, równoległobok; rzut prostokątny, bryły; stosunki trygonometryczne, rzuty koła. Rozwiązania zadań.

Podręcznik ten jest przeznaczony dla szkół elementarnych.

F. Castle. Elementary practical mathematics. Londyn, 1901. [str. X + 407]. Cena 3 s. 6 p.

Zawiera elementarne wiadomości z arytmetyki, algiebry, gieometrji, trygonometrji, gieometrji wykreślnej i analitycznej, mechaniki, z licznemi zastosowaniami. Książka dla starszych.

O. Meissner. Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst Anwendungen. Lipsk, Teubner, 1912, IV+64. Cena 80 fen.

Treść: Wstęp (Przypadek, prawdopodobieństwo). Wiadomości podstawowe z rachunku prawdopodobieństwa. Zastosowania: Teorja błędów. Biometryka. Statystyka. Odpowiedzi na pytania, podane w tekscie. Literatura.

R. Neuendorff. Praktische Mathematik. I Teil: Graphisches und numerisches Rechnen. (Aus Natur und Geisteswelt, Nr 341). Lipsk, Teubner, 1911, str. VI+104. Cena m. 1.25.

Treść: I. Przedstawienia graficzne. II i III. Mierzenie powierzchni i objętości. IV. Rachunek skrócony. V. Rachunek za pomocą tablic. VI. Przyrządy i maszyny rachunkowe.

Najłatwiejsza w użyciu tablica logarytmów jest:

H. Schubert. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen (Sammlung Göschen, 181). Cena 90 fen.

Ze względu na odrębny charakter wykładu, wspomnę jeszcze o książce:

P. la Cour. Historisk Matematik. Et indledende Kursus. 3 wyd. Kopenhaga. Gyndendalske Boghandel. 1909. Cena rb. 4 k. 40. Część I. s. 68. Arytmetyka. II, 192. Gieometrja. III, 70. Algebra.

Autor wychodzi z założenia, że najłatwiej i najgruntowniej można się nauczyć matematyki, idąc w tym samym porządku, w jakim ludzkość zdobywała prawdy matematyczne; odpowiednio do tego założenia, wykład prowadzony jest historycznie. Książkę można polecić tym czytelnikom, którzy pragną przypomnieć sobie to, czego dawniej się uczyli, rozszerzyć swoje wiadomości i dowiedzieć się, w jaki sposób matematyka powstała i jak się z biegiem czasu doskonaliła (książka zawiera treść wykładów autora w uniwersytecie ludowym w Askov, w Danji).

STOPIEŃ II.

OPRACOWAŁ

STEFAN KWIETNIEWSKI.

Treść: 1. Trzy kategorje uczących się matematyki. 2. Kategorja pierwsza. 3. Kategorja druga. 4. Kategorja trzecia. 5. Stanowisko krytyczne czytelnika względem podręczników. 6. Podręczniki przestarzałe. 7. Nowsze tendencje. 8. Ogólna charakterystyka podręczników, wydawanych w różnych językach. 9. Wybór podręczników. 10. Praca pozaświadoma. 11. Podział materjału na trzy cykle. 12. Cykl I. — 13. Cykl II. 14. Gieometrja. 15. Algiebra. 16. Matematyka stosowana. 17. Cykl III. Pojęcia podstawowe. 18. Równania nieoznaczone. 19. Ułamki ciągłe. 20. Rachunek nieskończonostkowy. 21. Kombinatoryka. Rachunek prawdopodobieństwa. 22. Goniometrja. Trygonometrja. 23. Gieometrja rzutowa i wykreślna. 24. Gieometrja analityczna. Literatura. 25. Cykl I. — 26. Cykl II. Podręczniki ogólne. 27. Ogólne zbiory zadań. 28. Podręczniki algiebry. 29. Zadania algiebraiczne. 30. Podręczniki gieometrji. 31. Tablice logarytmów i suwak rachunkowy. 32. Cykl III. Arytmetyka i algiebra. 33. Trygonometrja. 34. Gieometrja rzutowa. 35. Gieometrja wykreślna. 36. Gieometrja analityczna. 37. Pewniki gieometryczne. 38. Rachunek nieskończonostkowy. 39. Rozrywki matematyczne. 40. Życiorysy. Historja. 41. Zbiory wzorów. Modele i przyrządy. Słowniki.

---

1. Ażeby odpowiedzieć na pytanie, jakie wiadomości z matematyki należą do średniego wykształcenia, wypadałoby zastanowić się nad tym: *a)* co człowiek ogólnie wykształcony powinien umieć z matematyki; *b)* jakie wiadomości są konieczne lub pożądane dla ludzi stosujących matematykę w praktyce (techników, kupców, przyrodników, medyków i t. d.) i wreszcie *c)* jakie przygotowanie jest potrzebne temu, kto zamierza studjować matematykę wyższą. Wykształcenie średnie musi uwzględnić te trzy kategorje uczących się. W szkole zwłaszcza względy praktyczne nie pozwalają na odrębne trakto-

wanie tych trzech grup, zresztą uczeń rzadko kiedy wie, jaką drogę obierze w przyszłości. Materjał więc matematyczny, który szkoła średnia daje uczniom, jest taki, aby mógł zaspokoić wymagania tych trzech rodzajów; jest on zarazem probierzem umysłu ucznia: komu nauka matematyki sprawia duże trudności, ten zdecyduje się na taki fach, w którym wymagania pod względem matematyki są jak najmniejsze. Samouk, zwłaszcza starszy, mający określone cele na widoku, może odpowiednio do tych celów wybrać sobie materjał; ale różnice dla tych trzech grup będą niewielkie i dotyczyć mogą tylko poszczególnych rozdziałów, luźno związanych z głównym pniem nauki; różnica polegać będzie nie tyle na wyborze materjału, ile raczej na sposobie przyswojenia go, na tym, co mianowicie z tej nauki pozostanie w umyśle jako trwały nabytek. Spoglądając na jakiś przedmiot, nie wszyscy widzą w nim to samo: każdy zwraca uwagę na te cechy, które go szczególnie interesują; coś podobnego odbywa się przy uczeniu się matematyki.

2. Niektóre umysły zachowują się biernie wobec matematyki: to, co czytają, rozumieją jako tako, ale wzorów i twierdzeń nie pamiętają i nie potrafią ich zastosować samodzielnie przy rozwiązywaniu zadań; takim nauka matematyki pozornie nic nie daje, nie należy jednak sądzić, żeby czas na to poświęcony był zupełnie stracony: pozostaje zdolność zrozumienia jakiegoś artykułu czy książki, zawierającej pewne wywody elementarne, a nadewszystko pewien wpływ na sposób myślenia, nieświadome wyrobienie ściślejszego sposobu rozumowania, czego nie należy niedoceniać.

Osoby, należące do p i e r w s z e j z wymienionych kategorji, pragnące tylko posiąść wykształcenie ogólne, mogą sobie pozostawić dużą swobodę zarówno w wyborze materjału, jak i metod, o ile zwłaszcza nie ciąży na nich mus zdawania egzaminu. Względy towarzyskie również nie stawiają zbyt wygórowanych żądań co do matematyki; nieznajomość bardzo elementarnych rzeczy, takich nawet, jak np. podział proporcjonalny, albo twierdzenie Pitagorasa, mniej zachwieje opinją wykształconego człowieka, aniżeli np. nieświadomość, kto napisał jakiś głośny romans współczesny. Dla czytelników grupy *a)* najodpowiedniejsze więc będą łatwe podręczniki zreformowane (Behrendsen-Götting, Borel, Todhunter-Kwietniewski); o ile czytelnik dojrzy w nich jaką lukę i pragnąłby ją uzupełnić, może to zrobić, biorąc do pomocy jeden z bardziej systematycznych podręczników (Badowski, Böttcher, z obcych: Bourlet i Halsted lub włoskie podręczniki gieometrji), starając się zgłębić dokładniej zagadnienia, które go interesują, i pomijając inne. Jednakże czytelnik, choćby stawiał sobie jak najskromniejsze cele, nie powinien nigdy zadowalać się biernym czytaniem tekstu książki; będzie to czas stracony. Trzeba starać się zrozumieć dokładnie to, co się czyta i po przeczytaniu samemu odtworzyć dowodzenie czy obliczenie. Dla dokładniejszego zrozumienia konieczne jest przerabianie zadań, niezbyt trudnych.

Nie trzeba się łudzić możnością osiągnięcia zupełności; pewien rzut oka na całokształt wiedzy matematycznej, dający pojęcie o tym, co się w tej nauce właściwie dzieje, można następnie osiągnąć przez czytanie takich rozpraw, jak np. Whitehead, A. N. An Introduction to Mathematics. Londyn, 1912, str. 252. Cena 1 szyl. (przygotowuje się przekład polski). Keyser C. J., Mathematics. New York, 1907, str. 44, lub trudniejsza: Voss, Ueber das Wesen der Mathematik. Lipsk i Berlin, 1900, str. 98, cena m. 3.30. Kto może poświęcić na to więcej czasu, znajdzie odpowiednie wskazówki poniżej, w literaturze, §§ 37—40; do tegoż celu może posłużyć przeczytanie łatwiejszych artykułów Stopnia III-go w tym tomie Poradnika, np. Arytmetyki, Teorji mnogości, Teorji liczb, Gieometrji analitycznej i syntetycznej, Podstaw gieometrji, Topologji, Logistyki, Rachunku prawdopodobieństwa i Zagadnień filozoficznych matematyki.

Dla kogoś, dążącego do wykształcenia filozoficznego, takie przygotowanie nie wystarcza. Kto chce mieć jasne pojęcie o znaczeniu matematyki, o jej stanowisku wobec innych nauk, musi starać się dokładniej zaznajomić z materjałem i metodami; potrzebne mu będzie przygotowanie takie samo, jak i tym, którzy będą później mieli do czynienia z matematyką wyższą (grupa *c*).

3. Czytelnicy drugiej grupy, którzy będą zmuszeni stosować wiedzę nabytą w praktyce, muszą już z większą

starannością traktować naukę, niżeli grupa pierwsza. Nie trzeba jednak przywiązywać zbyt wielkiej wagi do opanowania pamięciowego przedmiotu. W praktyce zawsze bezpieczniej jest, z wyjątkiem najprostszych przypadków, korzystać z podręcznika lub zbioru twierdzeń i wzorów, aniżeli polegać na własnej pamięci; to też nagromadzenie w pamięci jak największej liczby rezultatów nie może być uważane za cel nauki. Za to niezbędne jest dla celów praktycznych dokładne zaznajomienie się z metodami, częściej używanemi w matematyce. Osiągnąć to można przez odtwarzanie samodzielne dowodów, napotykanych w książce, oraz przez przerabianie znacznej ilości zadań. Rugowanie niewiadomych z równań, używanie tablic, interpolacja, są to rzeczy bardzo łatwe, ale wymagające dużej wprawy, ażeby można było posiłkować się niemi biegle i pewnie.

Czytelnikowi tej kategorji niewolno unikać trudności, ale trzeba je pokonywać. Gdyby obrany podręcznik zawierał miejsca niezrozumiałe dla czytelnika, lepiej jest zwrócić się do innej książki, aniżeli opuszczać poszczególne rozdziały.

Przy wyborze zadań dobrze jest mieć na uwadze późniejsze zastosowania praktyczne. Zbiory zadań, wydane dotychczas w języku polskim, warunkowi temu nie odpowiadają; najodpowiedniejszy jest niemiecki zbiór Schülkego.

Ważną też rzeczą jest umieć samemu układać i rozwiązywać zadania, a więc obliczać wielkości, które nas interesują, za pomocą innych, bądź wprost wymierzonych, bądź też wziętych z jakichkolwiek źródeł (z książek lub gazet; ostatnim jednak nie zawsze można ufać co do ścisłości liczb). Więc np. obliczać będziemy przybliżone objętości i masy ciał, z któremi mamy do czynienia (książka, dom, rzeka, warstwa śniegu i t. d.), prędkości poruszających się przedmiotów, ilości materjałów, zużywanych przeciętnie przez mieszkańca danego miasta czy kraju; na zasadzie doświadczeń fizycznych obliczać będziemy ciężar właściwy, ciepło właściwe, temperaturę średnią, spółczynnik sprężystości lub rozszerzalności, pracę wykonaną i t. d. Można również przedstawiać graficznie zmiany, jakim podlega liczba ludności danego miasta czy kraju, liczba wypdaków chorób lub śmierci. Mieszkańcy wsi znajdą w gospodarstwie obfity materjał do zadań: inwentarz, mleko, stóg siana, ilość i wielkość ziarn w kłosie zboża, maszyna parowa — wszystko to może być zużytkowane przy układaniu zadań, na wzór tych, które czytelnik znajdzie u Schülkego.

4. To, co powiedzieliśmy o drugiej grupie, stosuje się w ogólności i do trzeciej. Dodać tu tylko można zachętę do większej samodzielności w opracowywaniu strony teoretycznej. Czytelnik, który zamierza poświęcić się specjalnie matematyce, nie powinien zadowalać się wiernym odtwarzaniem dowodzeń przeczytanych w książce, ale próbować je zmieniać, zastępować innemi dowodzeniami własnego pomysłu, oraz starać się odkrywać nowe twierdzenia.

5. Przy czytaniu podręczników może być na miejscu pewien umiarkowany krytycyzm. Każdy podręcznik elementarny z natury rzeczy musi zawierać pewne luki, niedomówienia i wątpliwości, nie dla tego, ażeby go pisać mieli ludzie, nie znający się na rzeczy, ale z następujących przyczyn: 1) podstawy matematyki, jak pewniki gieometryczne, pojęcia liczby i wielkości, nastręczają wielkie trudności teoretyczne, których początkujący nie zdoła ani ocenić, ani pokonać, ani nawet zainteresować się niemi. Autorowie podręczników omijają te trudności w mniej lub więcej zręczny sposób, bądź powołując się na doświadczenie życia codziennego, bądź starając się wykładowi podstaw nadać pozory takiej samej ścisłości, z jaką jest prowadzony dalszy wykład. 2) Ze względów praktycznych wprowadza się do nauki elementarnej pewne wiadomości, które ściśle mogłyby być traktowane tylko w matematyce wyższej; np. teorja logarytmów. 3) Dla ułatwienia samej nauki i lepszego zrozumienia nieraz uczymy się stosować pewną metodę, zanim ją uzasadnimy teoretycznie; np. rugowanie niewiadomych z równań poprzedza zwykle ogólną teorję równań, która, podana na samym początku, byłaby trudna do zrozumienia.

Oprócz powyższych niedokładności, których uniknąć nie można, zdarzają się nawet w dobrych podręcznikach pewne niedopatrzenia, nie mówiąc już o błędach drukarskich. Takie niedokładności przypadkowe, dość częste w pierwszych wydaniach, w późniejszych bywają stopniowo usuwane.

Jeżeli jednak z jednej strony ostrzegamy przyszłych matematyków przed dowierzaniem pozornej ścisłości, to również przestrzec trzeba przed rozmyślnym wynajdywaniem słabych punktów w książce. Jeżeli natrafimy na jakieś zdanie, które wydaje nam się niesłusznym, powinniśmy się raczej zastanowić, czy to nie my źle zrozumieliśmy myśl autora, lub czy ono nie dałoby się uzasadnić z innego punktu widzenia. Wogóle trzeba postępować bardzo oględnie, zanim się uzna cudze zdanie za błędne; kto chce rozwijać swój umysł, powinien stosować krytycyzm nietylko do innych, ale przedewszystkim do siebie samego.

6. Przy wyborze podręczników należy unikać książek przestarzałych. Są wprawdzie podręczniki dawne, mające znaczenie dzieł naukowych, jak naprzykład gieometrja Euklidesa lub algiebra Eulera, ale nauka stale kroczy naprzód; inne zagadnienia wysuwają się na plan pierwszy; pod wpływem rozwoju matematyki wyższej zmieniają się niektóre poglądy w matematyce elementarnej. W nowszych podręcznikach znajdziemy wskutek tego nieco odmienne określenia (definicje), inny układ pewników i pewne różnice w wyborze materjału, wreszcie wielu autorów nowych podręczników stara się o racjonalną metodę wykładu, dzięki czemu można przyswoić sobie wiadomości łatwiej i gruntowniej. Jeżeli więc czytanie pierwszorzędnych podręczników dawniejszych, mających wartość naukową, można polecić, zwłaszcza tym, którzy interesują się historją nauki — to w każdym razie wpierw należy uczyć się z podręczników nowożytnych. Podręczników średniej miary z przed kilku dziesiątków lat najlepiej jest unikać.

Podręczniki te mają dwie kardynalne wady: 1) nie stoją na dzisiejszym poziomie nauki: zawierają określenia niedość ścisłe, pozorne dowodzenia tego, co się dowieść nie da i t. d. 2) Nie ustalają związku pomiędzy myślą matematyczną i wrażeniami, pochodzącemi ze świata zewnętrznego, nie uczą ściśle patrzeć na świat i nie przygotowują do użytkowania wiedzy matematycznej w stosunkach społecznych.

7. Próby, dążące do usunięcia tych dwu braków, zgadzają się w jednym zasadniczym punkcie: usuwają dowodzenia pozorne

tego, co się dowieść nie da; pozatym są one niezależne od siebie, a nawet w wielu punktach rozbieżne. Autorowie, pragnący przedstawić w podręczniku naukę w sposób możliwie najdoskonalszy, jednolity, starają się usunąć z niej pierwiastek doświadczalny, osiągając rezultaty wyłącznie przez wyprowadzanie wniosków z pewników drogą rozumowania; przeciwnie, autorowie dążący do ściślejszego połączenia matematyki z życiem i z przyrodą, odwołują się często do bezpośredniej obserwacji lub do intuicji; pierwsi budują matematykę tak, ażeby była zgodna tylko z prawami logiki, nie dbając o zastosowanie; drudzy tak, ażeby jak najdokładniej i z jak największym prawdopodobieństwem opisywała te zjawiska, od których pochodzą nasze wrażenia.

8. Oba kierunki mają swych przedstawicieli między największemi matematykami spółczesnemi: Dawid Hilbert w Gietyndze i większość matematyków włoskich są logikami, Henryk Poincaré (w Paryżu, † 1912) Feliks Klein (w Gietyndze) i wielu matematyków angielskich są zwolennikami metody intuicyjno-doświadczalnej.

W podręcznikach włoskich uwzględniony jest prawie wyłącznie kierunek logiczny, w nowszych angielskich — empiryczny, poglądowy. Niemcy i Francuzi posiadają dobre podręczniki obu kierunków, ale u Niemców przeważa znacznie kierunek empiryczny. Nie brak również w literaturze niemieckiej i francuskiej podręczników, zajmujących stanowisko pośrednie lub też starających się uwzględnić obustronne wymagania: ścisłości logicznej i poglądowości, składając w ofierze jednolitość wykładu.

W podręcznikach, wydawanych w języku polskim, daje się zauważyć nieznaczny zwrot ku empiryzmowi. Algiebra Feldbluma i Gieometrja Badowskiego mają charakter abstrakcyjny (formalny); Gieometrja Suppančiča ma charakter pośredni, algiebra Todhuntera bardziej zbliża się do empiryzmu, wreszcie algiebra Böttchera obejmuje oba kierunki.

Podręczniki nasze nie mogą jednak zadowolić wszystkich wymagań. Dotyczy to zwłaszcza tych działów, które bywają wykładane w szkołach w klasach najwyższych i stanowią przejście od nauczania średniego do wyższego. Brak nam również zbioru zadań, uwzględniającego w należytym stopniu zastosowania praktyczne. Dla tego też pożądane jest już na tym szczeblu zaznajamianie się z literaturą obcą; dla osób, zamierzających w przyszłości pracować naukowo, jest to wprost niezbędne. Kto pragnie nauczyć się tylko jednego języka obcego, temu w ogólności najwięcej przydać się może język niemiecki. Literatura matematyczna niemiecka odznacza się obfitością dzieł oryginalnych i tłumaczonych, starannie opracowanych. Pod względem wytworności wykładu pierwszeństwo należałoby oddać książkom francuskim. Rosyjskie podręczniki oryginalne w ogólności nie zasługują na uwagę; są one zbyt skrępowane przestarzałemi programami szkolnemi; korzystać można co najwyżej z tłumaczeń rosyjskich dzieł obcych, ale bądź co bądź dla osób pracujących naukowo znajomość języka rosyjskiego wystarczyć nie może.

9. Wobec dużej różnicy pomiędzy podręcznikami dwu wyżej wskazanych kierunków, nie jest rzeczą obojętną, jakim podręcznikiem posiłkować się będziemy. Przy dokonywaniu wyboru kierować się należy następującemi wskazówkami. Chcąc mieć jasne pojęcie o przedmiocie, trzeba starać się zapoznać z metodami obu kierunków, ale uczyć się należy tylko podług jednej, tej mianowicie, która bardziej odpowiada usposobieniu czytelnika, i dzięki temu może być gruntowniej przyswojona. Każdy może do pewnego stopnia sam zbadać swój umysł pod tym względem. Kto ma zamiłowanie do badania przyrody, do rysunków; kto ma zwyczaj wyobrażać sobie przedmiot, o którym myśli — ten lepsze rezultaty osiągnie drogą empiryczną. Kto ma większą skłonność do rozmyślań, nie przywiązanych do wrażeń wzrokowych, dla kogo odtwarzanie obrazów wzrokowych odbywa się pod przymusem, tego więcej zadowoli kierunek logiczny; poglądowość, ułatwiająca naukę innym, stanie się dla niego wkrótce zbytecznym balastem (jedynie nauka przygotowawcza, propedeutyczna, powinna być dla wszystkich poglądowa). Oba typy umysłów spotykają się zarówno między obdarzonemi większemi jak i mniejszemi zdolnościami do matematyki. Są oczywiście osoby, nie skłaniające się do żadnego z tych typów, lub też nie umiejące ocenić siebie pod tym względem; dla tych najodpowiedniejsze będą podręczniki o charak-

terze pośrednim, lub też, o ile czytelnik rozporządza dużym zasobem czasu i wytrwałości, obszerne podręczniki obejmujące obie metody, jak algiebra Böttchera. Raz obrany kierunek porzucić można tylko wtedy, gdy czytelnik sam się przekona, że wybór jego był błędny, że książki przez niego obrane nie zadowalają go, lub nie mogą być zrozumiane. W każdym razie nie trzeba się dać zbić z tropu zwolennikom innej metody, od których czytelnikowi nieraz, być może, wypadnie usłyszeć pogardliwy aforyzm, np. że matematyka, oparta na doświadczeniu, nie jest wcale nauką, lub też przeciwnie, że matematyka, nie mająca zastosowań praktycznych na widoku, jest zabawką, jak gra w szachy i rozwiązywanie szarad. Tego rodzaju opinje przyjacielskie mogą zniechęcić do jednego kierunku, ale nie wprowadzą do drugiego, nie należy więc poddawać się im, ażeby nie marnować swych zdolności.

10. Ucząc się matematyki, trzeba mieć na względzie, że robota pośpieszna nie może być gruntowna. Uczenie się całemi dniami, choćby staranne, dużych korzyści nie przyniesie. Ażeby utrwalić w umyśle to, cośmy przyjęli do wiadomości, na to niezbędny jest odpoczynek, gdyż tę część pracy umysł wykonywa poza naszą świadomością w chwilach, kiedy jest wolny od pracy zewnętrznej. Zwłaszcza, nauczywszy się czegoś, co nas szczególnie zainteresowało czy to ze względu na ciekawą treść, czy na niezwykłe trudności, nie trzeba osłabiać wrażenia dalszym czytaniem, ale przerwać pracę i wrócić później jeszcze raz do tegoż samego przedmiotu.

Nie znaczy to, ażeby w przerwach oddawać się zupełnej bezczynności. Poza odpoczynkiem, przerwy te należy przedewszystkim wypełniać przerabianiem odpowiednich zadań, a także uczeniem się innych przedmiotów. Algiebry i gieometrji dobrze jest uczyć się jednocześnie.

11. W miarę rozszerzania zakresu wiedzy zwiększa się zdolność dokładnego zrozumienia przedmiotu, wnikania w pewne subtelności, ogarnięcia i połączenia w jedną całość tego, co początkowo uważaliśmy za szereg zagadnień bez związku; wynika stąd, że dobrze jest powracać do materjału raz opracowanego, ale traktować go należy już z większą dokładnością. W ogólności naukę w zakresie średnim można rozłożyć na trzy cykle, z których pierwszy jest zbyteczny dla mających dobre przygotowanie w zakresie niższym, drugi jest niezbędny dla każdego, pragnącego zapoznać się z matematyką elementarną, trzeci wreszcie zawiera luźne rozdziały uzupełniające, z których pewne mogą być opuszczone, zależnie od celów, jakie mamy na widoku.

12. Cykl I zawiera kurs propedeutyczny (przygotowawczy) arytmetyki i gieometrji. Celem jego jest wytworzenie pojęć liczby, wielkości, niektórych tworów gieometrycznych; przyzwyczajenie do podporządkowywania wzajemnego pewnych pojęć i przedmiotów; wytworzenie pojęcia zmienności; zaznajomienie się z praktycznemi zasadami rachunku, z miarami, używanemi w życiu codziennym. Znaczną część zwykłego kursu arytmetyki w szkole średniej (kurs klasy III szkół realnych) wypełniają zadania, dotyczące proporcjonalności; nie zdaje mi się jednak, ażeby ten dział zasługiwał na bardzo szerokie traktowanie: nie przemawia za tym ani jego znaczenie teoretyczne, ani wartość praktyczna. Wystarczy przerobić kilka typowych zadań i wrócić do nich, przechodząc w algiebrze równania stopnia pierwszego, które dostarczają dogodniejszych sposobów rozwiązywania tego rodzaju zadań. Natomiast przydać się mogą wiadomości, dotyczące podzielności liczb.

13. Cykl II ma na celu poznanie ważniejszych metod i rezultatów matematyki elementarnej oraz sposobów ich zastosowania. Coraz bardziej skomplikowane przedmioty badań, (wyrażenia algiebraiczne i figury gieometryczne) wywołują potrzebę ścisłych dowodzeń, t. j. wyprowadzania wniosków z danych założeń, co stanowi najbardziej charakterystyczną cechę matematyki (p. Wstęp ogólny). W nowszych podręcznikach autorowie od samego początku wprowadzają zależność funkcjonalną, jako myśl przewodnią, dokoła której można ugrupować wiele rozdziałów matematyki, i która staje się potężnym narzędziem przy badaniu przyrody.

Materjał tego cyklu jest następujący [1]):

---

[1]) Zwracamy tutaj uwagę na to, że wskazówki nasze nie są zależne

A. G i e o m e t r j a: własności metryczne figur i podstawowe własności położenia (planimetrja i stereometrja).

B. A l g i e b r a: wyrażenia algiebraiczne, działania nad niemi; równania i postępy.

C. M a t e m a t y k a s t o s o w a n a, którą traktuje się łącznie z gieometrją i algiebrą: metoda spółrzędnych (w dawnych podręcznikach pomijana), interpolacja, logarytmy, procenty, zadania konstrukcyjne i rachunkowe.

Postaram się w kilku słowach scharakteryzować każdy z tych działów.

14. G i e o m e t r j a. Przechodząc kurs przygotowawczy, wytwarzamy w sobie pojęcie punktu, prostej, płaszczyzny i przestrzeni, oraz ich części: odcinka, wielokąta i bryły; opierając się na tych pojęciach, możemy określić (to jest umówić się), co nazywać będziemy kołem, kulą, powierzchnią stożkową i powierzchnią walcową — i mamy już wszystkie części składowe, z których buduje się figury, rozpatrywane w gieometrji elementarnej.

Figura, złożona z dwu prostych, tworzy kąt, jeżeli one się przecinają (mają punkt wspólny); o ile proste nie przetną się, ale leżą na jednej płaszczyznie — nazywają się równoległemi. Kąt ma cechy wielkości, daje się zmierzyć, podobnie jak odcinek.

Znaczna część gieometrji bywa poświęcana z a l e ż n o ś c i o m m i ę d z y w i e l k o ś c i a m i odcinków i kątów rozpatrywanej figury. Weźmy dla przykładu pod uwagę równoległobok. Jest to czworokąt, w którym boki przeciwległe są do siebie równoległe. Opierając się na twierdzeniach, które powinny być poprzednio dowiedzione, można znaleźć następujące własności równoległoboku (fig. 10 na str. nast.):

1. Boki przeciwległe są sobie równe ($AB=DC$; $BC=AD$);

2. kąty przeciwległe są sobie równe ($\sphericalangle DAB=\sphericalangle BCD$; $\sphericalangle ABC=\sphericalangle CDA$);

---

od jakiegokolwiek programu egzaminacyjnego; kto więc pragnie korzystać z Poradnika w celu zdawania egzaminu, powinien zawczasu porównać program egzaminu z planem tu przedstawionym.

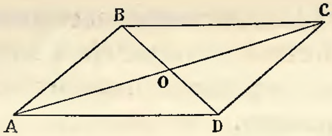


Fig. 10.

3. Kąty przylegające do jednego z boków są spełniające ($\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC + DAB = 180^0$);

4. Punkt przecięcia przekątnych dzieli każdą z nich na części równe ($AO = OC$; $BO = OD$) i t. d.

Figurom, ograniczającym część płaszczyzny lub przestrzeni, można przypisywać, podobnie jak odcinkom i kątom, pewne wielkości: pola i objętości, które staramy się otrzymywać przez mierzenie pewnych odcinków figury. Dla prostokąta, i wogóle dla równoległoboku wielkością pola będzie iloczyn podstawy przez wysokość. Wprawdzie w ten sposób dwa równoległoboki nierówne (fig. 11) (nie dające się doprowadzić do przystawania) mogą otrzymać tę samą miarę; ale dowieść można, że dwa takie równoległoboki dadzą się rozłożyć na części odpowiednio równe, czyli że są równoważne, i wogóle figurom równoważnym przypisujemy pola równe.

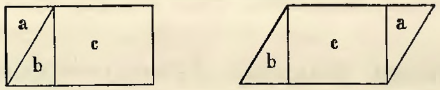


Fig. 11.

Sprawa komplikuje się przy mierzeniu objętości brył. Jeżeli taż sama ilość wody może dokładnie wypełnić dwa różne naczynia, nie wypada stąd, ażeby bryła, np. drewniana, wypełniająca dokładnie jedno z nich, dała się podzielić na części, które możnaby było ułożyć w drugim; w praktyce cel ten osiągniemy, ścierając bryłę, częściowo przynajmniej, na proszek; w matematyce działaniu temu odpowiada podział bryły na części, których ilość wzrasta nieograniczenie; można też zastosować metodę granic [1]) w inny odpowiedni sposób. Podobnie po-

[1]) P. niżej rozdział: Rachunek różniczkowy.

stępować musimy przy mierzeniu długości okręgu koła lub pola, ograniczonego linją krzywą.

Nauka gieometrji jest interesująca nietylko ze względu na rezultaty, ale więcej jeszcze ze względu na jednolitą metodę rozumowania i na ścisłą łączność poszczególnych przedmiotów badania. Pod względem metody można podzielić podręczniki gieometrji na cztery ważniejsze kategorje [1]).

a) Metoda całkowicie logiczna (Peano, Hilbert, Halsted), ustanawiająca zupełny układ pewników niezależnych od siebie, nie powołująca się zupełnie na doświadczenie, a poddająca pojęcia zasadnicze (punkt, prosta i t. d.) jedynie temu warunkowi, ażeby one czyniły zadość pewnikom ustanowionym, jak np. »z trzech punktów linji prostej jeden i tylko jeden leży między dwoma innemi«;

b) podstawy doświadczalne, dalsze rozwinięcie logiczne. Pierwowzorem tej metody jest Euklides. Z wiadomości podstawowych, zaczerpniętych z doświadczenia, wyprowadza się wnioski drogą logiczną;

c) Metoda intuicyjna (doświadczalna) miesza się z dedukcyjną (logiczną) zależnie od tego, którą z nich autor w danym przypadku uważa za odpowiedniejszą ze względów dydaktycznych. W podręcznikach takich nie zawsze można odróżnić, co zostało dowiedzione, a co przyjęte bez dowodzenia (Borel, Behrendsen-Götting).

d) Metoda intuicyjno-doświadczalna, podająca twierdzenia gieometryczne jako fakty bezpośrednio widoczne lub dające się stwierdzić doświadczalnie (Perry).

Z tych czterech typów pierwszy, na początek przynajmniej, nie wchodzi w rachubę, gdyż nastręcza początkującemu zbyt wiele trudności; ostatni, jako nie wdrażający w matematyczny sposób myślenia, może być polecony tylko tym, którzy mają doraźne cele praktyczne na widoku. Najłatwiej początkującemu będzie posiłkować się metodą *c*, przyczym pożądane jest późniejsze uzupełnienie jej pod względem ścisłości: można

---

[1]) Podług sprawozdania Castelnuovo, odczytanego na Kongresie Komisji Międzynarodowej Nauczania Matematyki w Medjolanie w r. 1911. (L'Enseignement mathématique. Nr. 6 z r. 1911).

też odrazu korzystać z podręcznika typu *b*, trzeba tylko wybrać taki, w którym strona doświadczalna jest ściśle odgraniczona od logicznej (np. G i e o m e t r j a SUPPANČIČA); w przeciwnym razie czytelnik łatwo zostanie wprowadzony w błąd pozorną ścisłością logiczną książki.

15. A l g i e b r a. Zakres liczb, rozpatrywanych w algiebrze, jest obszerniejszy aniżeli w arytmetyce. Oprócz liczb naturalnych, znanych z arytmetyki, przybywają tutaj *liczby ujemne;* zależność wzajemna pomiędzy obydwoma rodzajami liczb da się porównać do zależności między temperaturami odczytywanemi na termometrze powyżej zera i poniżej zera, np. ośmiu stopniom zimna odpowiada liczba ujemna —8 (mniej ośm). Wprowadza się również *liczby niewymierne*, które nie są ani całkowitemi, ani ułamkami, ale o każdej z nich można powiedzieć, czy jest mniejsza, czy większa od jakiegokolwiek ułamka danego. Np. liczba, która pomnożona sama przez siebie, daje 2, jest niewymierna, gdyż niema ani liczby całkowitej, ani ułamkowej, posiadającej tę własność; ale wiemy o niej, że jest większa od 1,41 i mniejsza od 1,42, gdyż pierwsza pomnożona sama przez siebie daje 1,9881, a więc mniej niż dwa, druga-2,0164, to jest więcej niż dwa. Wprowadza się wreszcie tak zwane *liczby urojone*, to jest takie, które, pomnożone same przez się, dają liczby ujemne; nie są one ani większe, ani mniejsze od liczb, o których dotychczas była mowa; są one pożyteczne z tego względu, że w tak rozszerzonym zakresie liczb wszystkie działania arytmetyczne (wraz z wyciąganiem pierwiastka i logarytmowaniem) dadzą się zawsze wykonać. Znajomość liczb urojonych w drugim cyklu nie jest jeszcze niezbędna.

W algiebrze przybywają trzy nowe działania: p o t ę g o w a n i e, w y c i ą g a n i e p i e r w i a s t k a i l o g a r y t m o w a n i e. *Potęgą* — w najprostszym przypadku — nazywamy iloczyn czynników równych: np. 5×5 nazywa się drugą potęgą, albo kwadratem pięciu; $5 \times 5 \times 5$ jest trzecią potęgą, albo sześcianem pięciu; 9 jest kwadratem trzech, 16 czwartą potęgą dwuch. Odwrotnie: 3 jest *pierwiastkiem* kwadratowym, albo pierwiastkiem drugiego stopnia z 9; 2 jest pierwiastkiem czwartego stopnia z 16. Jeżeli wreszcie chcemy znaleźć, ile razy trzeba po-mnożyć przez siebie czynnik dany, ażeby otrzymać liczbę żądaną, wtedy wykonywamy działanie logarytmowania: 2 trzeba powtórzyć cztery razy jako czynnik, ażeby otrzymać 16; mówimy, że 4 jest *logarytmem* 16 przy zasadzie 2. Podobnie logarytmem liczby 125 przy zasadzie 5 jest 3 [1]). W praktyce za zasadę logarytmów przyjmuje się zwykle liczbę 10.

Przeważnie w algiebrze wypada nam wykonywać działania na liczbach ogólnych, których wartości nie są nam bezpośrednio znane i które oznaczamy za pomocą liter. Osiągamy wtedy rezultaty, mające znaczenie o wiele ogólniejsze, aniżeli rezultat zwykłego rachunku arytmetycznego. Np. pisząc $a+b$, wyrażam, że do pewnej liczby, którą oznaczyłem przez a, dodaję liczbę inną, oznaczoną przez b. Chcąc wyrazić, że:

$$5+2=2+5, \quad 3+7=7+3 \text{ i t. d.},$$

czyli że przestawiając składniki, nie zmieniamy wartości sumy, napiszemy: $a+b=b+a$, i zależność ta będzie prawdziwa, jakiekolwiek wartości przyjmiemy dla a i b. Wyrażenia tego rodzaju, które zawsze są równe, jakiekolwiek wartości nadamy występującym w nich literom, nazywamy r ó w n e m i t o ż s a m o ś c i o w o; pierwsze rozdziały algiebry zajmują się przeważnie znajdowaniem *tożsamości*, przyczym staramy się dla każdego skomplikowanego wyrażenia znaleźć możliwie najprostsze, równe danemu tożsamościowo.

Dalsze rozdziały bywają poświęcane *równaniom warunkowym*, t. j. takim, które są prawdziwe tylko przy pewnych wartościach liter w nich występujących; rozwiązywanie równań polega na wynajdywaniu tych wartości. Jeżeli chcemy np., ażeby prawdziwe były następujące dwa równania

$$x+y=13.$$
$$xy=40,$$

musimy przyjąć, że $x=8$, $y=5$, lub odwrotnie; przy wszelkich innych wartościach przyjętych dla x i y, albo oba równania, albo przynajmniej jedno z nich będzie nieprawdziwe. Roz-

[1]) Sądzę, że powyższe przykłady wystarczą, ażeby dać czytelnikowi pojęcie o charakterze tych działań; przytaczanie ścisłych określeń za daleko by nas zaprowadziło.

wiązywanie równań stanowi najważniejszy dział algiebry elementarnej, mający bardzo liczne i różnorodne zastosowania. Obliczanie pewnych wielkości podług danych warunków zwykle wykonywa się za pomocą rozwiązywania równań.

W algiebrze elementarnej uczymy się rozwiązywać równania stopnia pierwszego (t. j. takie, w których wyrazy niewiadome są stopnia pierwszego) z jedną i z wielu niewiadomemi, równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą; pewne przypadki szczególne układów równań stopnia 2-go z dwiema niewiadomemi; przypadki szczególne równań stopni wyższych, o ile dadzą się rozwiązywać temiż samemi metodami, co i równania stopnia 1-go i 2-go; wreszcie niektóre *równania wykładnicze*, czyli zawierające niewiadomą w wykładniku, np. $2^{3+x}=32$ (odpowiedź: $x=2$). Poznajemy wreszcie niektóre sposoby wynajdywania wartości przybliżonej pierwiastków jakichkolwiek równań.

Mniej pracy wymaga zaznajomienie się z ciągami liczb, zwanemi *postępami*, z któremi często wypada mieć później do czynienia. Ciąg liczb tworzy postęp *arytmetyczny*, jeżeli różnica między każdą z nich i poprzedzającą jest wielkością stałą; *gieometryczny*, jeżeli stosunek każdej z nich do poprzedzającej jest wielkością stałą. Tak np. liczby:

$$5,\ 7,\ 9,\ 11\ldots$$

tworzą postęp arytmetyczny (różnica $=2$), zaś liczby:

$$4,\ 12,\ 36,\ 108\ldots$$

tworzą postęp gieometryczny (stosunek $=3$).

16. Matematyka stosowana. Metody i rezultaty algiebry i gieometrji mają liczne zastosowania, zwłaszcza w fizyce, mechanice i kosmografji; czytelnik je pozna, studjując te nauki; ale niektóre zagadnienia dogodniej jest poznawać przy matematyce, ażeby mieć bezpośrednie przykłady zastosowań, a także materjał odpowiedni do ćwiczeń. Oprócz metod już omówionych, stosuje się i inne, z których ważniejsze są następujące:

Przedstawienia graficzne (metoda spółrzędnych) służą do zilustrowania przebiegu pewnych zjawisk. Każdą wielkość, dającą się zmierzyć, możemy przedstawić za pomocą odcinka oznaczonej długości. Jeżeli np. godzinę przedstawimy za pomocą odcinka długości 4 mm., wtedy dwu godzinom odpowiadać będzie odcinek długości 8 mm. (fig. 12); jeden stopień ciepła możemy przedstawić pod postacią 1 mm., 5^0 przez 5 mm. i t. d. Chcąc zaznaczyć, że o godzinie 2-ej odczytałem na termometrze 10^0, odmierzam w kierunku poziomym odcinek długości 8 mm., co ma oznaczać 2 godz., i z końca tego odcinka wyprowadzam prostopadłą długości 10 mm., odpowiadającą 10^0 ciepła. Z biegiem czasu temperatura się zmienia; zmieniać się też

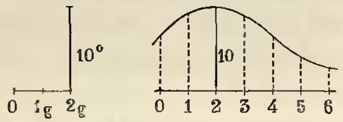


Fig. 12.

będą długości obu odcinków, — koniec odcinka pionowego opisze pewną linję krzywą, która nam przedstawia przebieg rozpatrywanego zjawiska: zmienność temperatury w zależności od czasu. Ta metoda, w dawnych podręcznikach elementarnych pomijana, zasługuje na uwagę nietylko ze względów praktycznych; przyczynia się do dobrego zrozumienia *funkcji*, t. j. wielkości, zmieniających się w zależności od innych wielkości zmiennych. Np. wyrażenie $2x+1$, lub ogólniej: $ax+b$ (gdzie a, b są jakiemikolwiek liczbami danemi) jest funkcją stopnia 1-go zmiennej x. Zmieniając x, nadajemy mu kolejno różne wartości, np.: 0, 1, 2, $2\frac{1}{2}$; wtedy funkcja $2x+1$, którą dla skrócenia oznaczać będziemy przez y, przyjmie odpowiednie wartości: 1, 3, 5, 6. Obierając na prostej poziomej jakikolwiek punkt O, i odcinając na niej od tego punktu, w jednę i tę samą stronę, jako wielkości zmiennej x: 0, 1, 2 i $1\frac{1}{2}$ jednostek długości (fig. 13), znajdziemy szereg punktów, z których wyprowadzamy proste pionowe, i odcinamy na nich, począwszy od wyznaczonych punktów: 1, 3, 5 i 6 jednostek długości, czyli odpowiednie wartości funkcji y. Punkty końcowe tych wszystkich odcinków leżą na jednej linji prostej; a więc obrazem graficznym funkcji $y=2x+1$ jest linja

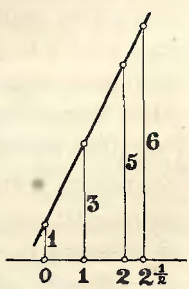


Fig. 13.

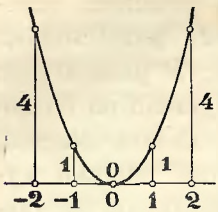


Fig. 14.

prosta. Można dowieść, że każda wogóle funkcja stopnia 1-go: $y=ax+b$ prowadzi w podobny sposób do linji prostej; obrazami graficznemi funkcji, w których x występuje w wyższej potędze, będą linje krzywe.

Fig. 14 przedstawia zmienność funkcji $y=x^2$; dla x obraliśmy wartości: —2, —1, 0, 1, 4; przedstawiając te wielkości za pomocą odcinków, podobnie jak w poprzednim przykładzie, znajdziemy, że końce odcinków pionowych leżą na linji krzywej, znanej pod nazwą paraboli.

Teorja *logarytmów* nastręcza duże trudności, które na tym szczeblu nie mogą być jeszcze całkowicie pokonane, ale ze względu na zastosowania praktyczne trzeba się z nią zapoznać. Główny pożytek praktyczny logarytmów polega na tym, że dają one możność, przy posiłkowaniu się odpowiedniemi tablicami, zastąpić mnożenie liczb przez dodawanie ich logarytmów i dzielenie przez odejmowanie; pozwalają one też wykonywać takie działania, których wprost nie moglibyśmy wykonać, jak np. wyciąganie pierwiastków wyższych stopni. Rachunek logarytmowy nie daje zupełnie ścisłych rezultatów, tylko przybliżone, obarczone pewnym niewielkim błędem, ale mamy możność obliczyć zawsze granice, w jakich ten błąd się zawiera. Zależnie od celów, używa się tablic, dających różny stopień dokładności; do nauki na początek wystarczą logarytmy czterocyfrowe (z czterema znakami dziesiętnemi).

Za pomocą postępów gieometrycznych i logarytmów rozwiązywać można zagadnienia, dotyczące procentów składanych, to jest takich, które nie podlegają wypłacie wierzycielowi w oznaczonych terminach, ale zostają dołączane do kapitału. Tutaj należą także łatwiejsze zadania z rachunku rent i wypłat terminowych, a także z rachunku ubezpieczeń; do tego ostatniego jednak trzeba jeszcze znać początki rachunku prawdopodobieństwa.

Gieometrja dostarcza licznych zadań, prowadzących do obliczeń pewnych długości, pól i objętości, a także do rozwiązywania konstrukcyjnego. Te konstrukcje wykonywać trzeba z jak największą dokładnością za pomocą cyrkla i ekierek; zwłaszcza przyszli technicy zawczasu powinni wprawiać się w wykonywanie dokładnych rysunków. Przerabianie bardziej skomplikowanych zadań nie jest niezbędne. Wystarczą zadania podstawowe na wykreślenie miejsc gieometrycznych, figur podług warunków danych oraz wyrażeń algiebraicznych.

Nadmienię tu wreszcie, że dla urozmaicenia nauki i dla pobudzenia zainteresowania, dobrze jest czytać książki o rozrywkach matematycznych, o historji matematyki oraz życiorysy poszczególnych matematyków.

17. Cykl III zawierać winien uzupełnienia, mające na celu zarówno pogłębienie teoretyczne, jak i rozszerzenie zakresu wiedzy. Wymienię tu ważniejsze rozdziały, ale nie jest rzeczą konieczną opracować wszystkie. Czytelnik sam musi dokonać wyboru [1]).

Pojęcia podstawowe. Kogo interesuje strona teoretyczna, ten przedewszystkim powinien poddać rewizji swoje wiadomości o liczbach, działaniach arytmetycznych i równaniach. Osiągnąć to można za pomocą jednego z obszerniejszych podręczników algiebry, np. Bourleta. — O podstawach logicznych gieometrji znaleźć można wiadomości w podręczniku Halsteda, albo w Encyklopedji Webera i Wellsteina. W tej ostatniej można się także poinformować, lepiej niż u Bourleta, o liczbach niewymiernych; Algiebra Feldbluma zawiera również dobrze opracowany rozdział o liczbach niewymiernych (patrz: Literatura).

18. Podręczniki algiebry zawierają zwykle rozdziały o równaniach nieoznaczonych i ułamkach ciągłych.

---

[1]) Dla tych, którzy zamierzają studjować matematykę wyższą, niezbędną w tym cyklu jest tylko trygonometrja; wszystkie inne działy traktowane będą obszernie w Stopniu III; czy jednak proponowany tutaj cykl III, jako ogniwo między nauczaniem średnim i wyższym, jest dla nich pożądany czy nie, co do tego zdania są podzielone. Według mnie jest on bardzo pożyteczny dla umysłów intuicyjnych, przyzwyczajonych do przenoszenia myśli z jednej dziedziny na drugą, do posiłkowania się analogjami i porównaniami; jest natomiast zbyteczny dla umysłów skupionych w jednym kierunku, dążących naprzód tylko drogą rozumowań logicznych.

Równanie, albo układ równań, nazywa się nieoznaczonym wtedy, jeżeli liczba niewiadomych przewyższa liczbę równań danych, wskutek czego równaniom tym może czynić zadość nieskończenie wiele pierwiastków. Naprzykład, jeżeli dajemy jedno równanie z dwiema niewiadomemi $x+3y=7$, możemy przyjąć wartość dla jednej z niewiadomych dowolną, i zawsze można będzie znaleźć taką wartość dla drugiej niewiadomej, ażeby równanie było prawdziwe; przy $y=10$, będzie $x=-23$; przy $y=\frac{2}{3}$ będzie $x=5$ i t. d. Liczba rozwiązań w tym przykładzie będzie jednak ograniczona, jeżeli dla niewiadomych poszukujemy tylko wartości całkowitych dodatnich; wtedy równanie dane sprawdzi się tylko w dwu przypadkach: przy $x=1$, $y=2$ i przy $x=4$, $y=1$. Rozwiązania całkowite dodatnie stanowią właśnie główny przedmiot badania równań nieoznaczonych.

19. *Ułamek ciągły* jest to ułamek, którego mianownik składa się z liczby całkowitej i ułamka zwyczajnego albo ciągłego. Naprzykład:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

Łatwo sprawdzić, że wartość tego ułamka ciągłego jest $\frac{3}{8}$. Jeżeli przerwiemy ułamek po pierwszym lub drugim mianowniku, dostaniemy: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2+\frac{1}{1}}=\frac{1}{3}$; są to tak zwane przybliżenia ułamka ciągłego; każde z nich mniej się różni od istotnej wartości danego ułamka ciągłego, aniżeli poprzednie.

Wartość ułamka ciągłego nieskończonego, jak np.:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

jest niewymierna; obliczając jego kolejne przybliżenia, możemy zawsze znaleźć takie, które się różni dowolnie mało od tej wartości; zarazem przedstawi ono żądaną wartość dokładniej, aniżeli jakikolwiek inny ułamek o takim samym lub mniejszym mianowniku. Tak np. przybliżone wartości liczby π (stosunku długości okręgu koła do średnicy): $\frac{22}{7}$ i $\frac{355}{113}$ są przybliżeniami nieskończonego ułamka ciągłego, na który tę liczbę można rozwinąć.

20. Kto nie zamierza poświęcić się specjalnie matematyce, może te rozdziały opuścić lub pobieżnie tylko zapoznać się z ich treścią; są one mało powiązane z innemi działami matematyki (z wyjątkiem teorji liczb) i zastosowania ich są nieliczne. Więcej można polecić zaznajomienie się z metodą granic i początkami rachunku nieskończonostkowego (p. Stopień III, Rach. różniczkowy), choćby w tak skromnym zakresie, w jakim ten przedmiot jest traktowany we francuskich podręcznikach algiebry (podręczniki polskie nie zawierają tego działu). Kosztem niewielkiego trudu wprowadzeni zostajemy w świat wielkości nieskończenie małych, co umożliwia dokładniejsze zrozumienie wielu twierdzeń z gieometrji i mechaniki.

21. Kombinatoryka odpowiada na pytania w tym rodzaju: na ile sposobów można ustawić pewną liczbę przedmiotów (np. litery jakiegoś wyrazu) w jeden szereg, albo na ile sposobów można wybrać ze wszystkich danych przedmiotów pewną określoną ich liczbę (np. trzy litery z całego alfabetu) i t. d.

Jest ona ważna jako podstawa rachunku prawdopodobieństwa (uwzględnianego w podręcznikach szkół zaboru austryjackiego). Rachunek ten, pozwalający przewidywać prawdopodobny przebieg zjawiska, pozwalający obliczać przypuszczalne błędy przy obserwacjach i przy rachunkach przybliżonych, bardzo może się przyczynić do zrozumienia przyrody i stosunków społecznych.

Pozatym kombinatoryka zwykle bywa w podręcznikach stosowana do wyprowadzenia wzoru zwanego Dwumianem Newtona, za pomocą którego można dowolną potęgę danego dwumianu przedstawić jako sumę jednomianów; inne zastosowanie kombinatoryki stanowią wyznaczniki (również uwzględnione w niektórych podręcznikach algiebry, np. u Feldbluma); te jednak same przez się mało kogo mogą zainteresować i są potrzebne tylko temu, kto będzie się zajmował matematyką wyższą.

22. Goniometrja. Przedmiotem goniometrji są zależności między kątami i pewnemi związanemi z niemi wielkościami, zwanemi funkcjami goniometrycznemi (lub trygonometrycznemi). Obierzmy na jednym z ramion kąta AOB (fig. 15) jakikolwiek punkt P i poprowadźmy z niego prostopadłą PM do drugiego ramienia; stosunki $\frac{MP}{OP}$, $\frac{OM}{OP}$ i $\frac{MP}{OM}$ są właśnie funkcjami goniometrycznemi kąta AOB; pierwszy nazywa się jego wstawą, drugi dostawą, trzeci styczną (sinus, cosinus i tangens). W goniometrji rozważa się

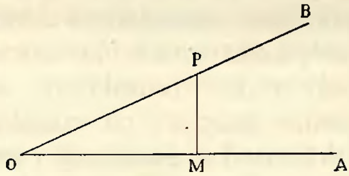


Fig. 15.

zmienność tych funkcji w zależności od wielkości kąta, kąty odpowiadające funkcjom danej wielkości oraz pewne tożsamości i równania, w których te funkcje występują. Zastosowanie mają one przedewszystkim w trygonometrji.

Trygonometrja (podręczniki, noszące ten tytuł zawierają i goniometrję). Podstawowym zagadnieniem jej jest obliczanie nieznanych wielkości trójkąta, w którym trzy wielkości są znane. Np. znając dwa boki i kąt zawarty między niemi, możemy obliczyć bok trzeci i kąty pozostałe. Z wyjątkiem najprostszych przypadków, konieczną jest przy tym znajomość logarytmów. Ze względu na liczne zastosowania w mechanice, fizyce, gieodezji, astronomji i matematyce wyższej, znajomość trygonometrji jest niezbędna, ale wystarczy poznać zasadnicze zadania, w których dane są wprost boki i kąty trójkąta, pomijając bardziej skomplikowane.

Trygonometrja kulista, nauka o trójkątach utworzonych przez koła wielkie na powierzchni kuli, jest mało interesująca pod względem teoretycznym i ma zastosowanie prawie wyłącznie w astronomji i gieodezji wyższej.

Klasycznym przykładem zastosowania trygonometrji pła-

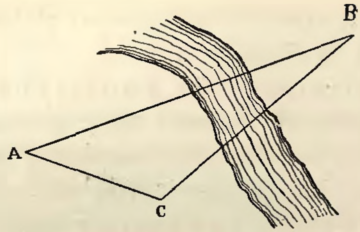


Fig. 16.

skiej jest obliczanie odległości, których bezpośrednio zmierzyć nie można. Przypuśćmy, że chcemy zmierzyć odległość (patrz fig. 16) od A do nieprzystępnego punktu B, (przeszkodę do wymierzenia bezpośredniego może stanowić np. rzeka). Obieramy w tym celu punkt C, którego odległość od A da się wprost wymierzyć; mierzymy kąty BAC i ACB, i mamy w ten sposób w trójkącie ABC trzy wielkości — bok i dwa kąty, wystarczające do obliczenia poszukiwanej długości boku AB.

23. Gieometrja rzutowa (albo syntetyczna, patrz Stopień III) odróżnia się od innych działów tym, że nie rozpatruje wielkości, lecz położenie wzajemne elementów gieometrycznych: punktów, prostych i płaszczyzn. Zapoznamy się tu z piękną odrębną metodą, mogącą dać wypoczynek i zadowolenie umysłowi, przeciążonemu ciągłym rozpatrywaniem zależności między wielkościami, to też dział ten można polecić każdemu, interesującemu się matematyką. Pozostając na poziomie średniego wykształcenia, wystarczy przejść rozdział I Gieometrji Wykreślnej Feldbluma, albo książkę Baranieckiego lub Doehlemanna [1]).

Gieometrja wykreślna (patrz Stopień III), mająca głównie na celu przedstawianie na płaszczyźnie przedmiotów przestrzennych, może być również każdemu polecona, ponieważ pobudza wyobraźnię przestrzeni, przyzwyczaja do podporządkowywania wzajemnego przedmiotów, wreszcie uczy dokładnie rysować przedmioty przestrzenne. Dla malarzy jest ona bardzo pożyteczna, dla techników niezbędna. Kto ma zamiar w przyszłości przestudjować obszerniejsze dzieło o Gieometrji wykreśl-

---

[1]) P. niżej: Literatura, § 34.

nej (np. Fiedlera), powinien zacząć od podręcznika, przeznaczonego dla szkoły średniej.

24. Metoda Gieometrji Analitycznej (patrz Stopień III), polegająca na badaniu figur gieometrycznych przy pomocy algiebry, ma wartość pierwszorzędną zarówno pod względem teoretycznym, jak praktycznym, ale w ogólności zalicza się do matematyki wyższej. Tu wystarczy poznać niektóre układy spółrzędnych i umieć wyprowadzić przy najdogodniejszym z nich, prostokątnym, równania prostej, koła i przecięć stożkowych, oraz rozwiązywać najłatwiejsze zadania.

LITERATURA.

25. Cykl I. Do nauki arytmetyki najbardziej można polecić:

S. Dickstein. Arytmetyka w zadaniach w trzech częściach. Wyd. 3. Warszawa, Gebethner i Wolff, 1906 r. Część I (str. VIII+252). Liczby całkowite. Cena 60 kop. Cz. II. (str. 270) Ułamki. Cena 60 kop. Cz. III. (str. 263). Stosunki, proporcjonalność, kwadraty, sześciany. Zadania różne. Cena 60 kop.

Książka ta wyróżnia się systematycznym układem, pozwalającym uczącemu się samodzielnie pokonywać przybywające stopniowo trudności. Treść zadań przeważnie zaczerpnięta z życia codziennego, z gieografji, przyrody i t. d. Pożądaną jest rzeczą, aby czytelnik na wzór tych zadań sam sobie układał nowe.

Wskazówki do rozwiązywania zadań oraz elementarne wiadomości z teorji arytmetyki podają:

M. A. Baraniecki. Krótka arytmetyka z wielu zadaniami. Wyd. 3. Warszawa, 1906 r. Część I (str. 137), cena 60 k. Cz. II. (str. 134). Cena 60 kop.; lub dla znających język francuski:

É. Borel. Arithmétique (Premier Cycle) Paryż, Colin. Cena fr. 2.50.

Książka odznacza się przystępnym i zajmującym wykładem, jak wszystkie podręczniki tego autora.

Z podręczników gieometrji najbardziej odpowiada celowi:

R. Jamrógiewicz i K. Strutyński. Gieometrya poglądowa. Stopień niższy. Lwów, Jakubowski, 1911, str. VII+270. Cena w opr. kor. 3.

Oprócz zwykłego materjału gieometrji elementarnej, wyłożonego sposobem poglądowym, oraz znacznej liczby zadań, książka zawiera wiadomości o formach gieometrycznych, spotykanych w przyrodzie, a także o zastosowaniu form gieometrycznych w architekturze i w zdobnictwie. Liczne widoki charakterystycznych budowli uczą rozróżniać ważniejsze style architektoniczne.

Książka powyższa zasługuje bardzo na polecenie, ale dla niektórych czytelników może być zbyt obszerna; kto ma mało czasu do rozporządzenia, może zadowolnić się mniejszą:

R. Suppantschitsch. Poglądowa nauka geometryi dla klasy pierwszej gimnazyów, gimnazyów realnych i szkół realnych. Przetłumaczył K. Hordyński. Lwów, Seyfarth, 1911, str. 41. Cena w opr. kor. 1.

Książeczka ta może zadowolnić tylko bardzo skromne wymagania.

Oba podręczniki zawierają zadania; pozatym bardzo pożyteczny jest zbiór zadań:

S. Dickstein. Początkowa nauka gieometrji w zadaniach. Wyd. 4-te, str. 217. Warszawa, 1906. Cena kop. 90.

26. Cykl II. Przedewszystkim wymienić należy podręczniki ogólne, zawierające całkowity wykład matematyki elementarnej. Literatura nasza książek takich nie posiada, podaję więc tylko obce. Podręczniki niemieckie mają przeważnie po dwa wydania: jedno dla szkół realnych (obszerniejsze) i drugie nieco skrócone, z drobnemi zmianami w układzie, stosownie do programów obowiązujących w gimnazjach filologicznych. Wydanie dla gimnazjów uważać można za wystarczające, zwłaszcza jeżeli czytelnik uzupełni następnie swoje wiadomości za pomocą jednego z podręczników, podanych na innym miejscu.

O. Behrendsen und E. Götting. Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. Lipsk.

Unterstufe. 2 Aufl. Ausgabe *A*. für Gymnasien. Mit 294 Figuren; str. 277, 1911. Cena w opr. m. 2.80. — Ausgabe *B* für sechsklassige Realschulen und die

Mittelklassen der Oberrealschulen und Realgymnasien. Mit 347 Fig.; str. 327, 1911. Cena w opr. m. 2.80.

Oberstufe. Ausg. *A*. für Gymnasien. 1912. Cena w opr. m. 3.60. Ausg. *B* für Oberrealschulen und Realgymnasien. 1912. Cena w opr. m. 4.

Treść: Unterstufe. *A* i *B*. I. Kurs przygotowawczy (wiadomości wstępne z gieometrji). II. Planimetrja: Trójkąty, wielokąty, koło, pola figur, proporcje i podobieństwo, gieometrja algiebraiczna, obliczenia, odcinki niewspółmierne. III. Arytmetyka:[1]) cztery działania na wyrażeniach algiebraicznych, metoda spółrzędnych, stosunki i proporcje, równania stopnia 1-go, potęgi, pierwiastki, równania stopnia 2-go. Oprócz tego w wydaniu *B* początki trygonometrji i stereometrji.

Oberstufe. *A* i *B*: I. Trygonometrja. II. Stereometrja: Bryły, proste i płaszczyzny; (tylko w wyd. *B*: początki gieometrji wykreślnej) obliczenia, kąty bryłowe i trójkąty kuliste. III. Arytmetyka: Logarytmy, szeregi (postępy i ich zastosowania), procenty składane; wielkości zespolone; równania stopnia 2-go z dwiema niewiadomemi; równania stopnia 3-go i wyższych, równania wykładnicze. IV. Rachunek różniczkowy i całkowy (z zastosowaniami do gieometrji i mechaniki). V. Gieometrja analityczna; punkt, prosta, krzywe drugiego rzędu (tylko w wyd. *B*: biegun i biegunowa, ogólne równanie stopnia 2-go z dwiema zmiennemi etc.) VI. Nowa gieometrja: Pokrewieństwo rzutowe (tylko w wyd. *B*: pokrewieństwo kół).

Podręcznik Behrendsena i Göttinga jest typowy pod względem reformy nauczania, jaka obecnie dokonywa się w szkołach niemieckich. Pod względem ścisłości w gieometrji zaliczać go można do grupy *C* (patrz str. 61). Wykład przystępny i zajmujący; duża ilość zadań racjonalnie dobranych, rysunki bardzo staranne.

Podobny charakter ma książka:

K. Schwab und O. Lesser. Mathematisches Unterrichtswerk zum Gebrauche an höheren Lehranstalten[2]). Im Sinne

---

[1]) Niemcy nazywają »Arytmetyką« to, co u nas nazywa się algiebrą elementarną.

[2]) »Höhere Lehranstalten« odpowiadają naszym szkołom średnim.

der Meraner Lehrpläne bearbeitet von... W 2 tomach, każdy w 2 częściach. Wiedeń i Lipsk.

I Band. Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. I Teil. Für die mittleren Klassen sämtlicher höheren Lehranstalten von O. Lesser. 3-e wyd. Str. 206, 1912. Cena w opr. m. 2.50. II Teil. Ausg. *B.* Für die oberen Klassen der Gymnasien. Von C. H. Müller. Str. 161, 1910. Cena w opr. m. 2.

II Band. Geometrie. I Teil. (Planimetrie). Ausg. *B.* Für die Unterstufe der humanistischen Gymnasien. Von C. H. Müller. Str. 196. 1910, Cena w opr. m. 2.50. II Teil (Trigonometrie, Stereometrie, Koordinatengeometrie). Ausg. *B.* Für die Oberstufe der Gymnasien. Von C. H. Müller. Str. 211, 1911. Cena w opr. m. 3.

Obszerniejsze wydanie *A*:

II Band. Lehr- und Übungsbuch der Geometrie. Von K. Schwab. Ausg. *A.* 3 Teile, 1912. Cena w opr. m. 7.30.

We Francji, oprócz Borela (p. niżej), duże ma uznanie:

C. Bourlet. Cours complet de mathématiques à l'usage de l'Enseignement secondaire (Programme du 31 mai 1902). Paryż, Hachette.

27. Z ogólnych zbiorów zadań polecić można:

A. Schülke. Aufgabensammlung aus der reinen und angewandten Mathematik: I Teil. Für die mittleren Klassen, Str. VIII+194, Lipsk, 1906. Cena w opr. 2 m. 20 f. II Teil. Für die oberen Klassen. Str. X+186, Lipsk, 1910. Cena w opr. 2 m. 40 f.

Ten zbiór zadań zawiera bardzo umiejętnie dobrany materjał i uwzględnia głównie zastosowania praktyczne do astronomji, miernictwa, nautyki, fizyki, nauk technicznych i społecznych. Odpowiedzi i wskazówki do rozwiązań wyszły oddzielnie. Wydawca (B. Teubner) sprzedaje je tylko nauczycielom, samouk może je otrzymać za pośrednictwem znajomego nauczyciela.

Używając tego zbioru zadań, należy mieć:

A. Schülke. Vierstellige Logarithmentafeln. Für den Schulgebrauch zusammengestellt. Lipsk, 1912, str. VI+25, (cena w oprawie 90 fenigów), zawierające oprócz logarytmów liczb oraz funkcji trygonometrycznych także tablice śmiertelności i różne dane z fizyki i astronomji.

28. Z podręczników algiebry, wydanych w języku polskim, można polecić;

J. Todhunter. Algiebra początkowa. Tłumaczył z angielskiego Wł. Kwietniewski. Wyd. 3 opracował i uzupełnił S. Kwietniewski. Warszawa, Gebethner i Wolff, 1907, str. IX+538. Cena w oprawie rb. 1.50.

Podręcznik ułożony głównie dla początkujących (cykl II), ale są w nim też rozdziały należące do 3-go cyklu: równania nieoznaczone, ułamki ciągłe i kombinatoryka. Zawiera przedstawienia graficzne oraz znaczną liczbę zadań, całkowicie rozwiązanych, i niewielką ilość dla samodzielnego rozwiązania. Odpowiedzi są podane w końcu książki.

M. Feldblum. Algiebra elementarna. Wyd. 2, str. 5+411. Warszawa—Łódź, Fiszer, 1907. Cena rb. 1.50.

Książka nieco mniej przystępna od poprzedniej, strona teoretyczna więcej uwzględniona (zwłaszcza w rozdziale o równaniach) ale nie we wszystkich szczegółach odpowiada dzisiejszemu stanowi nauki. Liczby niewymierne wprowadzone są jako »przekroje« szeregu liczb wymiernych, zgodnie z zapatrywaniami dzisiejszemi. Wogóle książka dla początkujących niezupełnie odpowiednia, ale pożyteczna dla tych, którzy już mieli do czynienia z algiebrą. Wykład uzupełnia niewielka ilość zadań. Zastosowania praktyczne i przedstawienia graficzne nie zostały uwzględnione.

L. Böttcher. Zasady algiebry elementarnej. Podręcznik i zbiór zadań dla szkół. VI+704. Warszawa, Arct, 1911. Cena rb. 2.50.

Książka dla początkujących zbyt obszerna, ale ze względu na treść bogatą, wszechstronnie opracowaną, stosownie do nowoczesnych wymagań, może być pożyteczna dla tych, którzy algiebry już się uczyli i pragnęliby odświeżyć i rozszerzyć swoje wiadomości (cykl III). Jasność wykładu miejscami pozostawia nieco do życzenia. Liczba zadań znaczna.

Z dzieł obcych wymienimy:

E. Borel. Algèbre, second cycle. Paryż, Colin. Cena w opr. fr. 3.

Podręcznik łatwy, odwołujący się nieraz do intuicji i uwzględniający zastosowania praktyczne. Liczba zadań niewielka.

29. Nie mamy w języku polskim zbioru zadań algiebraicznych, który możnaby było polecić bez zastrzeżeń. Zadania na układanie równań są to przeważnie zagadki, pozbawione estetycznej lub dowcipnej formy i zajmującej treści; zagadnień zbliżonych do tych, jakie wypada w praktyce rozwiązywać, bardzo jest mało w tych zbiorach. W braku odpowiedniejszych, musimy się jednak posiłkować takiemi, jakie są.

S. Okulicz. Zbiór zadań algiebraicznych w układzie metodycznym. Warszawa. Część I. Pojęcia wstępne. Liczby ujemne. Jednomiany i wielomiany. Ułamki. 1910. kop. 90. II. Proporcje. Równania 1-go stopnia. Pierwiastki. Równania kwadratowe; kop. 90. III. Równania wyższych stopni. Nierówności. Równania nieoznaczone. Postępy. Logarytmy. Kombinatoryka. Dwumian Newtona. Ułamki ciągłe. Dział mieszany. 1912. Kop. 90.

A. Klonowski. Zadania algiebraiczne. Warszawa. Część I. 1906, str. 87. (Liczby algiebraiczne, wzory, jednomiany, wielomiany, ułamki). Cena 45 kop. Część II. 1907, str. 98 (równania stopnia 1-go). Cena 45 kop. Część III. 1907 (kwadraty, sześciany, pierwiastki, równania st. 2-go o jednej niewiadomej) str. 82. Cena 45 kop.

Odpowiedzi podane przy każdym rozdziale.

Dla posiadających podręcznik Böttchera oddzielny zbiór zadań jest zbyteczny.

W językach obcych, oprócz Schülkego, używać można następujących zbiorów zadań:

E. Heis-J. Druxes. Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik u. Algebra zum Gebrauche an höheren Schulen. Köln. Teil I. (do równań st. 2-go włącznie). 1909, str. 285; m. 3. II 1908, str. 283; m. 2.80.

Nowsze tendencje niemieckie uwzględnione, strona teoretyczna więcej uwydatniona, niż u Schülkego. Uwagi historyczne.

Morf C. et Tzaut S. Exercices et problèmes d'algèbre. Recueil gradué par... Paris. Première série: Exercices. 4 wyd. 1906. str. VII+

195. (Notatka historyczna. Rachunki algiebraiczne. Równania st. 1-go). Cena fr. 3.50.

Réponses 3 wydanie 1901, str. 99 (odpowiedzi i wskazówki). Cena fr. 2.50.

Deuxième série. Exercices, 1905, str. VI+264. (Potęgi i pierwiastki. Równania st. 2-go. Logarytmy, postępy, ułamki ciągłe, równania wykładnicze, równania nieoznaczone, nierówności, kombinatoryka, wyznaczniki). Cena fr. 4. Réponses (pod prasą).

I. B. Montag. Praktische leichtfassliche Anleitung zur Buchstabenrechnung und Algebra mit vielen Beispielen und im Anschluss an die Aufgabensammlungen von Meier Hirsch und Bardey. Wydanie 5, Lipsk, Teubner, 1877, str. VIII+388.

Książka nie zawiera teorji, lecz tylko szczegółowe wskazówki do rozwiązywania zadań. Może być z korzyścią używana do usunięcia trudności, których samouk nie mógłby sam pokonać, jak również do osiągnięcia większej elegancji i pewności przy rozwiązywaniu zadań.

30. Przechodząc do gieometrji, na pierwszym planie postawimy bardzo dobry podręcznik (który można zaliczyć do grupy *B* (patrz str. 61).

R. Suppantschitsch. Podręcznik geometryi dla klasy IV i V szkół średnich. Planimetrya i stereometrya. 349 fig. w tekscie i 1296 pytań i zagadnień. Przetłumaczył R. Hordyński. Cena w opr. kor. 4.50. Lwów, Seyfarth, 1912, str. 242+CXIII.

Treść: I. Planimetrja: Wstęp. Utwory zasadnicze, odcinek, kąt i koło. Trójkąt. Proste równoległe. Symetrja. Obroty. Czworokąty. Wielokąty. Związki z kołem. Zadania konstrukcyjne. Podobieństwo. Miernictwo. Nauka o powierzchniach. Połączenie algiebry z gieometrją. Obwód i powierzchnia koła. II. Stereometrja: Wstęp. Rzuty. Punkty, proste, płaszczyzny w przestrzeni. Symetrja. Trójścienne i wielościenne kąty bryłowe. Wielościan. Graniastosłup i walec. Ostrosłup i stożek. Nauka o objętościach. Kula. Twierdzenie Eulera. Umiarowe wielościany. Dodatek: liczby niewymierne. Zbiór zadań.

Podobny układ ma książka:

A. Łomnicki. Geometrya. Podręcznik dla szkół średnich. Część I i II. Planimetrya. Stereometrya. Lwów, Gubrynowicz, 1911, str. 289.

Mniej odpowiedni dla samouków:

I. Badowski. Gieometrja elementarna, Warszawa, 1894, str. LVIII+338, z wstępem historycznym. Wyd. 2, 1906, str. 337+IV.

W wyd. 2-im rozdziały, dotyczące planimetrji i stereometrji nie są oddzielone; figury płaskie i przestrzenne rozpatrywane są łącznie. Książka dla początkujących nie łatwa i zbyt obszerna, ale dla tych, którzy już gieometrję poznali, może bardzo dobrze służyć do przypomnienia i rozszerzenia wiadomości. Wykład (grupa *B* z pewną tendencją ku *A*, nie zawiera jednak zupełnego układu pewników), odznacza się ścisłością i drobiazgowością. Liczba zadań dość znaczna, zastosowania praktyczne pominięte.

Dużą popularnością cieszy się podręcznik:

J. Zydler. Gieometrja w zakresie szkoły średniej. Wyd. 2-gie, str. 285+III, Warszawa, 1906. Cena rb. 1.

Jest on nietrudny i zawiera wszystko, co bywa wymagane od uczniów szkół średnich; ale jako niezbyt staranna przeróbka Euklidesa, zbliża się do typu książek przestarzałych.

Szczuplejszy zakres od poprzednich ma przystępnie napisana kiążka:

A. Faifofer. Pierwsze początki gieometrji. Przetłumaczył z włoskiego W. Kwietniewski. Wydanie drugie przejrzane i poprawione. Warszawa, Gebethner i Wolff, 1906, str. XII+241, cena rb. 1.

Można z niej się uczyć, ucząc się jednocześnie arytmetyki, a następnie przejść do podręcznika Badowskiego lub Halsteda.

Z dzieł obcych polecamy:

E. Borel. Géometrie, premier et second cycles. Wyd. 2-gie. Paryż, Colin, 1908, str. X+383. Cena 3 fr.

Treść: Przedmowa. Wstęp. I. Prosta i koło. II. Płaszczyzna i bryły obrotowe. III. Podobieństwo. Pola i objętości. Uzupełnienia: Elipsa. Parabola. Cyssoida, konchoida prostej. Wiadomości o powierzchniach cylindrycznych; cienie. Wiadomości o miernictwie. Obliczenie przybliżone pól płaskich.

Wykład (grupa *C*) zajmujący, odwołujący się nieraz do intuicji, stosujący możliwie często ruch i symetrję. Dużo zadań.

Wszystkie podręczniki wymienione zawierają dostateczną liczbę zadań konstrukcyjnych. Ze specjalnych zbiorów zadań, ze wskazówkami metodycznemi, wymienić można:

J. Petersen. Metody i teorje rozwiązywania zadań gieometryczych konstrukcyjnych, zastosowane do przeszło 400 zadań. Przetłomaczył K. Hertz. Warszawa, 1881, str. IV+101. Cena kop. 60 (1-sze wydanie duńskie w r. 1866).

Treść: I. Miejsca gieometryczne. II. Przekształcenia figur. III. Teorja obrotów. Dodatki: O przecięciu się łuków i kół. Układy kół. O możności rozwiązania danego zadania za pomocą linjału i cyrkla.

Dla przyszłych techników może być pożyteczna książka:

E. Rosentahl. Wykład praktyczny kreślenia (kurs dla samouków). Łódź, 1904, str. 44, tablic 11. Cena rb. 1.

31. Do matematyki stosowanej książek specjalnych nie potrzeba, ponieważ wyszczególnione podręczniki uwzględniają ją w większym lub mniejszym zakresie. Zaopatrzyć się tylko należy w tablice logarytmowe. Najodpowiedniejsze do nauki są podane wyżej tablice czterocyfrowe Schülkego; tekst niemiecki dla nikogo przeszkody stanowić nie będzie, gdyż jest wogóle zbędny. Zaznaczyć wszakże wypada, że polskie podręczniki algiebry uwzględniają tablice pięciocyfrowe, zaś niemieckie i francuskie (nowsze) przeważnie czterocyfrowe. Kto zapozna się dokładnie z jedną tablicą, łatwo sobie poradzi z innemi.

Polskie wydanie logarytmów czterocyfrowych:

A. W. Witkowski. Tablice logarytmowe i goniometryczne czterocyfrowe. Warszawa, 1903. Cena kop. 25;

nie może być polecone, gdyż ma druk drobny i niewyraźny.

Tablice pięciocyfrowe są:

J. Kranz. Tablice logarytmów. Str. XIII+126. Kraków, 1900. Cena kop. 60.

oraz:

O. Schlömilch. Tablice logarytmiczne i trygonometryczne pięciocyfrowe. Warszawa, L. Fiszer. 60 k.

Do rachunków, nie wymagających znacznej dokładności, wielu techników używa, zamiast tablic logarytmowych, suwaka rachunkowego[1]).

Opis tego przyrządu podaje:

M. Pożaryski. Krótkie wskazówki, dotyczące »suwaka rachunkowego«. Str. 8. Warsz. 1908. Cena kop. 5.

---

[1]) Przyrząd ten nabyć można w Warszawie, np. w »Uranji« (Bracka, 18) lub w większym składzie optycznym.

lub obszerniej:

J. Sł. Suwak rachunkowy (podług Culmana). Str. 24, z tablicą, Warszawa, 1901. Cena kop. 75.

32. Dotychczas mieliśmy na uwadze przeważnie cykl II; przechodzimy teraz do cyklu III.

Równań nieoznaczonych, ułamków ciągłych i kombinatoryki uczyć się można podług któregokolwiek z wyszczególnionych podręczników polskich; niemieckie i francuskie przeważnie tych rozdziałów nie zawierają. Początki rachunku prawdopodobieństwa znaleźć można w podręcznikach szkół zaboru austryjackiego, których dotychczas nie wymieniłem, ponieważ wskutek zwięzłości wykładu niezupełnie są odpowiednie dla samouka:

M. A. Baraniecki. Podręcznik algiebry dla uczniów klas wyższych gimnazjów i szkół realnych w Galicji. Str. VIII+322. Kraków, 1893. Cena rb. 2.40,

albo:

P. Dziwiński. Zasady algiebry, wyd. 3. Str. XI+384. Lwów, 1907. Cena rb. 1.80;

lub też obszerniej ale przystępnie w książce:

A. B. Danielewicz i S. Dickstein. Zarys arytmetyki politycznej. Warszawa, 1910, XII+394+40. Cena rb. 1.80.

Treść: Rachunek procentowy. Niektóre wiadomości z algiebry i analizy. Zasady rachunku prawdopodobieństwa. Gry losowe. Statystyka. Ubezpieczenia. Tablice.

Podręczniki specjalne rachunku prawdopodobieństwa wskazane są w Stopniu III.

O wyznacznikach wyszła w języku polskim książeczka:

O. Hesse. Wyznaczniki, opracowane elementarnie. Przekład A. Zdziarskiego. Warszawa, 1880, str. 44.

Mniej mogą podręczniki nasze zadowolić tych, którzy poszukują pogłębienia teoretycznego wiadomości podstawowych z algiebry. Kto języków obcych nie posiada, może korzystać z podręczników Feldbluma lub Böttchera.

Z większą ścisłością opracowana jest teorja działań arytmetycznych, równań i liczb zespolonych w książce:

C. Bourlet. Leçons d'algèbre élémentaire. Paryż, 1896, str. XII+518,

albo w bardzo pouczającej, ale niełatwej książce, przeznaczonej raczej dla nauczycieli i wogóle dla osób, mających dużo do czynienia z matematyką:

H. Weber und J. Wellstein: Encyclopädie der Elementarmathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. I. Elementare Algebra und Analysis. 3 Aufl. 1909. II. Elemente der Geometrie. 2 Aufl. 1907. III. Angewandte Elementarmathematik. 2 Aufl. 1910—12. Lipsk.

Wskazówki praktyczne, jak najdogodniej znajdować za pomocą rachunku lub graficznie przybliżone wartości pierwiastków równań przy spółczynnikach wielocyfrowych, znaleźć można w książce:

C. Runge. Praxis der Gleichungen. Lipsk. 1900. Str. 196. (Sammlung Schubert). Cena w opr. m. 5.20.

Osobom, pragnącym przejść kurs arytmetyki dokładniej, aniżeli to jest możliwe w cyklu pierwszym, polecić można:

J. Tannery. Leçons d'arithmétique théorique et pratique. Paryż, 1894. Str. VIII+509.

Treść: I. Wiadomości wstępne. Numeracja. II. Działania zasadnicze. III. Twierdzenia zasadnicze o podzielności. Cechy podzielności. IV. Największy wspólny dzielnik. V. Liczby pierwsze. VI. Ułamki zwyczajne. VII. Ułamki dziesiętne. VIII. Rachunki przybliżone. IX. Kwadraty. Sześciany. Pierwiastek kwadratowy. Pierwiastek sześcienny. X. Układ metryczny. XI. Zastosowania. XII. Liczby niewymierne. Granice. XIII. Miara wielkości. XIV. Zasady teorji liczb.

Do arytmetyki handlowej służy podręcznik:

S. Kramsztyk. Wykład arytmetyki handlowej. Str. IV+328. Warszawa, 1901. Cena rb. 2.

33. Do trygonometrji płaskiej polecić można:

E. Borel. Trigonométrie. Second cycle. Paryż, Colin, 1905. Str. VII+198. Cena w oprawie fr. 2.50.

Polskie wydanie tegoż samego podręcznika:

E. Borel. Trygonometrja. Tłum. H. Stattlerówna. Warszawa, 1910, str. VI+217. Cena w opr. rb. 1.10.

Książka zawiera: funkcje goniometryczne, rozwiązywanie trójkątów prostokątnych, wzory goniometryczne, rozwiązywanie trójkątów ukośnokątnych, zastosowania, pochodne funkcji trygonometrycznych i tablice logarytmów czterocyfrowych. W oryginale francuskim uwzględniona jest dwojaka miara kątów: podział dziesiętny kąta prostego oraz podział kąta prostego na 90 stopni, z dalszym podziałem na minuty i sekundy; w tłumaczeniu polskim pozostawiono tylko ten drugi podział. Wykład jasny, przystępny. Znaczna liczba zadań.

A. Łomnicki. Geometrya. Stopień wyższy dla klasy VI, VII i VIII. Lwów 1912. Str. 302. Cena kor. 3.80 w opr.

Treść: Część III. Trygonometrja. Rozdz. I. Rozwiązywanie *trójkątów prostokątnych (zawiera zastowania do kartografji).* II. Rozszerzenie pojęcia f. trygonometrycznych i badania ich własności. III. Rozwiązywanie trójkątów ukośnokątnych. IV. Zastosowanie trygonometrji do miernictwa. V. Trygonometrja sferyczna. Część IV. R. I. O współrzędnych i równaniach między współrzędnemi. II. Planimetryczne zastosowania układu współrzędnych. III. O linji prostej. IV. Zmiana osi współrzędnych. Przesunięcie i obrót. V. Koło. VI. Ogólne uwagi o dyskusji linji krzywych. VII. Parabola. VIII. Elipsa. IX. Hiperbola. X. Ogólny rozbiór równania 2-go stopnia o 2 niewiadomych. XI. Pochodna i całka.

Zawiera uwagi historyczne. Uwzględnia wymagania nowoczesne.

R. E. Moritz. Elements of Plane Trigonometry. A Text-Book for High-Schools, Technical Schools and Colleges. XIV+361 str. i 91 str. tablic, 183 fig. 8°. N. York, 1911, w opr. dol. 2.

Bardzo systematyczny, drobiazgowy wykład, uwzględniający potrzeby samouków. Notatki historyczne niezbyt ścisłe.

Obszerniejsze dzieło o trygonometrji:

A. Czajewicz. Trygonometrja płaska i kulista. Str. XXX+392, Warszawa, 1861. Cena rb. 2 (wyczerpane).

Zawiera we wstępie krótki rys rozwoju trygonometrji.

34. Do gieometrji rzutowej służyć może pierwszy rozdział Gieometrji wykreślnej Feldbluma (p. Stopień III), albo obszerniej:

M. A. Baraniecki. Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych na podstawie ich pokrewieństwa harmonicznego z kołem. Warszawa, 1885, str. XVI+131. Cena kop. 85.

Treść: I. Pojęcia wstępne. II. Szereg punktów harmoniczny i pęk promieni harmoniczny. Czworobok zupełny i czworokąt zupełny. III. Pokrewieństwo harmoniczne. Koło harmonicznie pokrewne z samym sobą. IV. Przecięcie stożkowe wogóle, jako linja harmonicznie pokrewna z kołem. V. Biegun i biegunowa. Ogniska i kierownice. Styczne. Osi w elipsie i w hiperboli. Mimośród. VI. Biegunowe punktów na prostej i bieguny prostych, przechodzących przez ten sam punkt. Czworokąt wpisany i czworobok opisany. Punkty sprzężone i proste sprzężone. Średnice sprzężone elipsy i hiperboli. VII. Środki podobieństwa dwu kół i osi podobieństwa trzech kół. Twierdzenia Pascala i Brianchona dla koła i dla przecięcia stożkowego. VIII. Powstawanie organiczne przecięcia stożkowego. Zasada dwoistości.

K. Doehlemann. Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Sammlung Göschen, Nr. 72. Cena w opr. fen. 90.

Wykład nieco trudniejszy; stanowić może przejście do Stopnia III-go.

35. Do gieometrji wykreślnej najbardziej zasługuje na polecenie przystępna i uwzględniająca liczne zastosowania książka niemiecka:

Müller C. H. und Presler O. Leitfaden der Projectionslehre. Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie. Ausgabe für Realgymnasien und Oberrealschulen. 233 fig., str. VIII+320, Lipsk, 1903. Cena w opr. m. 4.

Książka zawiera: rzut ukośny równoległy (zastosowanie do krystalografji, fizyki i t. d.) rzut prostokątny (bardziej teoretycznie opracowany); rzut środkowy; rzuty kartograficzne.

Z podręczników polskich zaznaczymy:

M. Łazarski. Zasady gieometrji wykreślnej dla wyższych szkół realnych. Wyd. 3. Str. IV+154+tabl. XIII. Część I. O punkcie prostej i płaszczyźnie. II. O kątach bryłowych trójściennych. III. O wielościanach. IV. O powierzchniach. Lwów, 1907. Z atlasem. Cena w opr. rb. 1.80.

Ten podręcznik zawiera tylko rzut prostokątny.

M. Feldblum. Gieometrja wykreślna. Str. 317, Warszawa, 1902. Cena rb. 2.

Podręcznik o wiele obszerniejszy, wyróżniający się jasnym wykładem. Treść p. Stopień III.

Jako przygotowanie do kursu politechniki zalecić można: K. Bartel. Wstęp do wykładów geometryi wykreślnej. Lwów, »Koło mechaników«, 1913. (litogr.) 4°, str. 102.

Wyłącznie o perspektywie traktuje:

J. Maszyński. Wykład elementarny zasad perspektywy. Str. VII+95, Warszawa, 1907. Cena kop. 40.

Przy nauce gieometrji wykreślnej, zarówno jak stereometrji, dobrze jest posiłkować się modelami, które najlepiej samemu sporządzać. Deseczki, tektura, papier, drut, sznurek, wosk i klej są wystarczającemi do tego celu materjałami.

36. Początków gieometrji analitycznej nauczyć się można z któregokolwiek z wyszczególnionych już podręczników ogólnych: np. Łomnickiego, Schwaba i Lessera, albo najlepiej Tannery'ego. Podręczniki specjalne, patrz Stopień III.

Do programu szkół polskich w Królestwie przystosowana jest książka:

J. Zydler. Zarys Gieometrji Analitycznej na płaszczyźnie. Warszawa, Arct, 1913, str. X+231. Cena rb. 1.25

37. Kto pragnie teoretycznie pogłębić wiadomości podstawowe z gieometrji, zapoznać się dokładniej z jej pewnikami, ten może korzystać albo z wszechstronnej, ale trudnej Encyklopedji Webera i Wellsteina, albo z książki popularyzującej w nader umiejętny sposób najnowsze wyniki badań Hilberta nad podstawami gieometrji (grupa *A* według klasyfikacji Castelnuovo):

G. B. Halsted. Rational geometry. A text book for the science of space. Cena 8 szyl., przekład francuski: Géometrie rationnelle. Traité élémentaire de la science de l'espace. Traduction française par P. Barbarin avec une préface de C. A. Laisant. Paryż, Gauthier-Villars, 1911, str. IV+296. Cena fr. 6.50, w oprawie fr. 7.50.

Treść: I. Połączenia. II. Porządek. III. Przystawanie. IV. Równoległe. V. Zagadnienia konstrukcyjne. VI. Boki i kąty. VII. Rachunek odcinków. VIII. Proporcje i podobieństwo. IX. Równoważność. X. Koło. XI. Długość i powierzchnia koła. XII. Gieometrja płaszczyzn. XIII. Wielościany i objętości. XIV. Sferyka trójwymiarowa. XV. Stożek i walec. XVI. Sferyka czysta. XVII. Kąty bryłowe. Dodatki: I. Dowodzenie dwu twierdzeń o porządku, przyjętych w tekście jako postulaty. II. Cyrkiel. III. Rozwiązywanie zadań.

Wykład uzupełnia 694 zadań i twierdzeń do dowodzenia.

Autor nie odwołuje się do doświadczenia ani do fikcji prawd oczywistych, ale umawia się z czytelnikiem, że mówić będzie o pewnych przedmiotach, które nazywać będzie punktami, prostemi i płaszczyznami, i które spełniać mają pewne warunki, zwane pewnikami; pewników tych wymienia 21. W tym zrozumieniu figury gieometryczne są bezpostaciowe; rysunek służy jedynie, podobnie jak pismo, do lepszego porozumienia między autorem i czytelnikiem; zastosowania praktyczne mogą być dla matematyka obojętne.

Wymienię jeszcze kilka ważniejszych punktów, w których podręcznik różni się od innych. A więc iloczyn dwu odcinków określa się jako odcinek, otrzymywany w pewien oznaczony sposób konstrukcyjny z odcinków danych przy pomocy trzeciego, przyjętego za jedność. Jeżeli cztery odcinki czynią zadość równaniu $ab' = ba'$, mówimy, że tworzą one proporcję $a:b = a':b'$ (pewnik Archimedesa o ciągłości jest przy tym określeniu zbyteczny). Polem trójkąta nazywa autor połowę iloczynu podstawy przez wysokość i dowodzi, że jeżeli trójkąt zostanie podzielony na liczbę skończoną trójkątów, wtedy pole trójkąta danego równa się sumie pól tych trójkątów. Podobnie, jeżeli jakikolwiek wielokąt podzielony zostanie linjami prostemi na trójkąty, wtedy dowieść można, że suma pól tych trójkątów jest niezależna od sposobu podziału; ta suma nazywać się będzie, podług umowy, polem wielokąta. W sposób analogiczny określa autor objętość brył, unikając przez to wszelkich wątpliwości, jakie mogą się tu nastręczyć przy innych metodach. Natomiast obliczenie długości łuku koła, podane przez autora, może wzbudzić w czytelniku pewne wątpliwości. Opiera się ono na założeniu dowolnym, że każdemu łukowi koła można podporządkować odcinek jeden i tylko jeden, mający dwie następujące własności [1]): 1) jest on większy od cięciwy i mniejszy od sumy odcinków stycznych, poprowadzonych z końców łuku do wspólnego ich punktu przecięcia, i 2) jeżeli łuk zostanie podzielony na dwie części, wtedy

---

[1]) Mówimy tu o łuku »mniejszym«, t. j. o takim, którego cięciwa leży między środkiem koła i wszystkiemi punktami łuku.

odcinek, odpowiadający całemu łukowi równa się sumie odcinków, odpowiadających obu częściom. Taki odcinek, podług umowy, ma się nazywać długością łuku.

Zaznaczyć jeszcze wypada, że sposób wysławiania się Halsteda nie jest pedantycznie ścisły; subtelniejsi pod tym względem są Weber i Wellstein, a także autorowie włoscy i Badowski, który się na nich wzorował.

Z licznych podręczników włoskich najbardziej na uwagę zasługują zawierające możliwie kompletny układ pewników:

G. Veronese. Elementi di geometria. Con la collabor. di P. Gazzaniga. 3 wydanie. Werona-Padwa, 1904, I, str. XXIV+124. II, str. IV+220.

F. Enriques e U. Amaldi. Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori. Bolonja. 2 wyd. 1904, str. 567.

Dla czytelników, pragnących zapoznać się z gieometrją Euklidesa w jej pierwotnej postaci, zaznaczamy, że z dawnych naszych podręczników zbliża się do pierwowzoru:

Euklidesa początków Geometryi ksiąg ośmioro, to jest sześć pierwszych, jedenasta i dwunasta, z dodanemi przypisami dla użytku młodzi akademickiey wytłumaczone przez Józefa Czecha. Wydanie 2 z przydaną Trygonometryą Roberta Simsona, przełożoną z angielskiego. Wilno, 1817; str. XX+476.

Podajemy jeszcze tytuły dokładnych tłumaczeń Euklidesa na języki niemiecki i francuski:

Euclid's Elemente. 15 Bücher. Aus dem griechischen übersetzt von J. Fr. Lorenz. Halle, 1781; str. 366. Ostatnie wydanie 6-te w r. 1840.

Les oeuvres d'Euclide en grec, en latin et en français par F. Peyrard. 3 tomy. Paryż, 1814—18.

Gieometrje nieeuklidesowskie i wielowymiarowe zalicza się do Stopnia III; pobieżne wiadomości o gieometrjach nieeuklidesowskich dwu i trójwymiarowych znaleźć można w książeczce:

P. Mansion. Pierwsze zasady metageometryi czyli geometryi ogólnej. Przełożył S. Dickstein. Warszawa, 1877, str. 46; odbitka z »Wiadomości matematycznych«.

38. Początki rachunku różniczkowego i całkowego znaleźć można w wymienionych już podręcznikach algiebry Borela, Bourleta, Schwab-Lessera i t. d.

Podajemy jeszcze kilka tytułów, ostrzegamy wszakże czytelnika, że ścisłej teorji rachunku nieskończonostkowego na tym poziomie wyłożyć jeszcze nie można; pojęcia, nabyte przy czytaniu książek popularnych z tego zakresu, uważać należy jako tymczasowe; przy studjach dalszych powinny one ulec gruntownym przeobrażeniom.

Z książek polskich używać można:

A. Hoborski i A. Wilk. Zasadnicze pojęcia rachunku różniczkowego i całkowego. Str. X+180. Kraków, 1910. Cena kor. 3.

Treść: I. Wstęp. II. O funkcjach i ich ciągłości. III. O granicach. IV. O pochodnej i różniczkowaniu. V. O ciągach. VI. Własności funkcji ciągłych i twierdzenie o średniej wartości. VII. O całkach. VIII. O całkowaniu. IX. Wskazówki do dalszego kształcenia się.

Książka bardzo elementarna, ilość podanych wiadomości niewielka.

Bardziej praktyczne cele mają na widoku:

A. E. H. Love. Zasady rachunku różniczkowego i całkowego. Przekład St. Kalinowskiego i Wł. Wojtowicza. Warszawa, 1912. Cena 1 r. 60 kop.

Książka odpowiednia dla przyrodników i techników, nie mających możności oddania się głębszym studjom matematycznym.

K. Dusing. Die Elemente der Differential- und Integralrechnung in geometrischer Methode dargestellt. Ausgabe *B*. Für höhere technische Lehranstalten und zum Selbstunterricht. 3 wyd. Hanower, 1911; str. XII+110.

Książka bardzo przystępna, zawiera różniczkowanie i całkowanie prostszych funkcji, zastosowanie do badania zmienności funkcji oraz do niektórych zagadnień z fizyki i mechaniki.

Wystarczające wiadomości z gieometrji analitycznej i z rachunku różniczkowego znaleźć też można w książce pięknie napisanej, obfitej w treść, wprowadzającej stopniowo czytelnika w dziedzinę matematyki wyższej:

J. Tannery. Notions de mathématiques. Notions historiques par P. Tannery. Classes de philosophie, certificat des sciences physiques, chimiques et naturelles etc. Paryż, 1903, str. X+352.

Wydanie niemieckie:

J. TANNERY. Elemente der Mathematik. Mit einem geschichtlichen Anhang von P. TANNERY. Autorisierte deutsche Ausgabe von P. KLAESS in Luxemburg. Mit einem Einführungswort von F. KLEIN. Lipsk, 1909. Cena w opr. m. 8.

Treść: Wstęp. I. Niektóre tożsamości. II. Algiebra gieometryczna. III. Równania stopnia 2-go. IV. Spółrzędne. V. Krzywe empiryczne. VI. Wiadomości z gieometrji analitycznej: Linja prosta. Ruch jednostajny. Przedstawienia graficzne niektórych funkcji. Metody graficzne rozwiązywania równań liczebnych. Równania niektórych krzywych, określonych gieometrycznie. VII. Styczne, prędkości, pochodne. VIII. Wiadomości z rachunku całkowego. IX. Granice, wielkości nieskończenie małe, całka oznaczona, szeregi. Wiadomości historyczne: I. Początki algiebry. II. O znaczeniu wyrazów: »analiza i synteza« u Greków, oraz o ich algiebrze gieometrycznej. III. Wielkości dodatnie i ujemne. IV. O krzywych, badanych przez starożytnych. V. O zapoczątkowaniu stosowania spółrzędnych w celu przedstawienia graficznego zmienności zjawisk. VI. O początkach rachunku nieskończonostkowego.

O celu książki poinformuje najlepiej następujący wyjątek z przedmowy:

»Nie wie się, co to jest matematyka, nie przeczuwa się jej nadzwyczajnej rozległości, ani natury zagadnień, które stawia i rozwiązuje, jeżeli się nie wie, co to jest funkcja, jak się bada funkcję daną, jak się śledzi jej zmienność, jak przedstawia się jej przebieg za pomocą linji krzywej, jak algiebra i gieometrja pomagają sobie wzajemnie, jak liczba i przestrzeń rozświetlają się wzajemnie, jak wyznacza się styczną, pole, objętość, jak dochodzi się do tworzenia nowych funkcji, nowych krzywych, do badania ich własności. To są wiadomości i metody, potrzebne do czytania książek technicznych, w których występuje matematyka. Są one niezbędne dla tego, kto chce zrozumieć cośkolwiek z tego wzmagającego się ruchu naukowego, z tych coraz liczniejszych zastosowań nauki, które z dnia na dzień dążą do coraz głębszego zmodyfikowania naszego sposobu myślenia i życia«.

Na te właśnie pytania autor książki daje odpowiedź.

Oprócz książek, przeznaczonych do nauki, znaleźć można w czasopismach, podanych na innym miejscu, artykuły omawiające w mniej lub więcej przystępny sposób pewne zagadnienia matematyczne [1]. W odbitkach z »Wiadom. matemat.« wyszły:

A. Łomnicki. Kolejne rozszerzanie zakresu pojęcia liczby. 1911, str. 53—78.

S. Dickstein. Matematyka XIX wieku. 1901, str. 24.

S. Dickstein. O najnowszych badaniach nad podstawami matematyki. 1901, str. 23. Cena kop. 20.

Przyrodnika zainteresować może książeczka:

H. Przibram. Anwendung elementarer Mathematik auf biologische Probleme. Lipsk, 1908, str. 84.

39. Polecamy jeszcze czytelnikom zagadnienia, pośredniczące między nauką i rozrywką:

A. Łaparewicz ogłosił szereg takich zadań w tygodniku »Przyjaciel dzieci« (począwszy od r. 1902). Wybór tych zadań znaleźć można w Sprawozdaniach z posiedzeń Koła matematyczno-fizycznego, r. 1909, p. t. »Z rekreacyj matematycznych«. Tutaj zaliczyć również można:

C. A. Laisant. Nauczanie początków matematyki (Initiation mathématique). Książka napisana niezależnie od programów szkolnych i poświęcona przyjaciołom dziatwy. Z 99 rysunkami w tekście. Przetłumaczył z francuskiego Z. Czubalski. Słowem wstępnym opatrzył S. Dickstein. Warszawa, 1908, str. IV+154. Cena kop. 50.

Książka ta, przeznaczona głównie dla rodziców i nauczycieli domowych, posługuje się »zabawą, jako środkiem pedagogicznym, który pozwala obudzić ciekawość dziecka i oswoić je w ten sposób z pierwszemi i najważniejszemi pojęciami matematycznemi, bez obarczania jego umysłu nadmiernemi wysiłkami« (wyjątek z przedmowy). Zawiera ona naukę liczenia, wiadomości o postępach, procencie składanym, mierzeniu pól i ob-

---

[1]) Wiele tematów opracowano popularnie w »Mathematische Bibliothek« (Lipsk, Teubner); cena tomiku fen. 80.

jętości, przedstawieniach graficznych, przecięciach stożkowych i t. d., wszystko w łatwej, zajmującej formie.

W językach obcych:

H. Schubert. Mathematische Mussestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. 2 wyd. 3 tomy. Lipsk, 1900, str. VIII+199, IV+247, III+265. Cena każdego tomu w oprawie m. 4.

Ta książka wymaga większego przygotowania od poprzedniej; zawiera dużo zadań i zagadek arytmetycznych, labirynt, gry towarzyskie, różne ciekawe zagadnienia z rachunku prawdopodobieństwa i wiele innych.

E. Fourrey. Récréations arithmétiques. 4 wyd. Paryż. Cena fr. 3.50, w oprawie fr. 5.

Zawiera między innemi ciekawe własności niektórych liczb, postępy, liczby wielokątne, zagadnienia, kalendarz, kwadraty magiczne i t. d.

E. Fourrey. Curiosités géométriques. 2 wydanie. Paryż. Cena w opr. fr. 6.50.

Cel książki: »Uczyć, przedstawiając naukę z ciekawej strony«. Zawiera ona między innemi: wstęp historyczny; wybór określeń elementów i figur gieometrycznych, niezwykłych lub też błędnych; różne dowodzenia twierdzenia Pitagorasa; łamigłówki; wiadomości o miernictwie, o przyrządach, używanych w dawnych czasach, o zastosowaniach gieometrji do rachunku; o komórkach pszczół; różne zadania, niektóre rymowane i t. d.

Więcej jednostronny, ale bądź co bądź ciekawy jest zbiór zagadnień, mający znaczenie historyczne:

C. G. Bachet Sr. de Méziriac. Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres. Lyon, 1612, str. 172. Najnowsze, 4 wydanie tego dzieła, str. VI+161. Paryż, 1905. Cena fr. 3.50.

Treść zadań: odgadywanie liczby, którą ktoś pomyślał; odgadywanie kart, przez kogoś wyciągniętych; kwadraty magiczne i t. d. Niektóre zadania dotyczą kombinatoryki i równań nieoznaczonych, ale nie wymagają znajomości teorji. Dowodzenia w nowszych wydaniach zostały zmodernizowane.

40. Z życiorysów uczonych, pominąwszy prace specjalne, należące do Stopnia 3-go, posiadamy bardzo niewiele, np.:

H. Merczyng. Mikołaj Kopernik. Życie i działalność naukowa. Petersburg, 1898. Cena kop. 30.

L. Świeżawski. Jan Śniadecki, jego życie i działalność naukowa. Petersburg, 1898. Cena kop. 30.

Z obcych można polecić:

F. Arago. Notices biographiques. (Oeuvres complètes, publ. par M. J. Barral). Tomy I (str. 638), II (703), 1854 i III (628) 1855 r. Paryż.

Wydanie niemieckie, tł. W. Hankel, 3 tomy. Lipsk, 1856.

Są to świetnym stylem pisane biografje niektórych matematyków, fizyków i astronomów.

A. Rebière. Mathématiques et Mathématiciens, Pensées et Curiosités, 4 éd., str. 566. Paryż, Vuibert. Cena fr. 5.

Wyjątki z prac matematyków, utrzymane w stylu bardzo popularnym.

Z książek ogólnych o historji matematyki do najbardziej popularnie napisanych należy:

J. Boyer. Histoire des mathématiques. Paryż, 1900, str. XII+260. Cena fr. 5.

Z bardziej szczegółowych podręczników historji matematyki elementarnej polecamy:

F. Cajori. A history of elementary mathematics. With hints on methods of teaching. New York, 1896, str. VIII +304.

W. H. Rouse-Ball. A short account of the history of mathematics. Londyn, 1888. 2 wyd. 1893, str. XXIV+520. Tłumaczenie włoskie przez D. Gambioli i G. Puliti. I. Bolonja, 1903, str. X+284. II. 1904, str. VI+439. Tłumaczenie francuskie: Histoire des mathématiques, tłumaczył H. L. Freund. I. Paryż, 1906, str. VII+422; II, 1907, z uzupełnieniami dotyczącemi czasów nowszych (Montessus i Darboux).

I. Tropfke. Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. I. Bd.: Rechnen und Algebra. Lipsk, 1902, str. VIII+332. II. Bd. Geometrie. Logarithmen. Ebene Trigonometrie. Sphärik und sphärische Trigonometrie. Reihen. Zinsenzinsrechnung. Kettenbrüche. Stereometrie. Analytische Geometrie. Kegelschnitte. Maxima und Minima. Lipsk, 1903, str. VIII+496.

Oprócz powyższych dzieł specjalnych, systematyczne wiadomości z historji poszczególnych nauk matematycznych znaleźć można w wyszczególnionych już podręcznikach, opatrzonych wstępami historycznemi; (a mianowicie: Badowski, Geometrja; Czajewicz, Trygonometrja; Dziwiński, Algiebra) nadto w niewymienionej tu książce M. A. Baranieckiego p. t. Arytmetyka, wykład szczegółowy (Warszawa, 1894, str. LXIV+408. Cena 1 r. 35 k.) znajduje się rozdział, zawierający krótki rys rozwoju arytmetyki i o jej nauczaniu w Polsce. Zarys historji matematyki podaje:

Dzieje myśli t. I, zesz. II-gi: Rozwój historyczny pojęć chemicznych. Historja mineralogji. Zarys historji nauk matematycznych (od str. 127 do 279). Warszawa, 1911, str. 279. Cena 1 r. 50 k. Rozdział o historji matematyki jest opracowany przez M. Feldbluma, W. Smosarskiego i S. Kwietniewskiego.

Jako przygotowanie do czytania pisarzy starożytnych, służyć może książka:

M. C. P. Schmidt. Realistische Chrestomathie aus der Literatur des klassischen Altertums. In 3 Büchern. Lipsk. I. Buch der Grössen. 1900, str. VIII+128. II. Buch von Himmel und Erde. 1901, VI+170. III. Buch der Erfindungen. 1901, VIII+235.

Życiorysy i komentarze w języku niemieckim, teksty greckie i łacińskie bez tłumaczeń. W części I wyjątki z Euklidesa, Ptolemeusza, Nikomacha i Diofanta.

41. Ogólnym zbiorom wzorów matematycznych niezawsze można ufać; drobna omyłka drukarska może spowodować dużo kłopotu. Do pewniejszych należą:

O. Th. Bürklen. Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, enthaltend die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential und Integralrechnung. 3 wydanie. Sammlung Göschen. Lipsk, 1904, str. 227. Cena w opr. 90 fen.

Obszerniejszy:

W. Ligowski. Taschenbuch der Mathematik. Tafeln und Formeln zum Gebrauche für den Unterricht an höheren Lehranstalten und zur Anwendung bei Berechnungen. Berlin, 3 wyd. 1893, str. XIII+219.

Pragnących zapoznać się z przyrządami i metodami, służącemi do ułatwienia rachunków, odsyłam do popularnie napisanej książki:

M. d'Ocagne. Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques. Histoire et description sommaire des instruments et machines à calculer, tables, abacques et nomogrammes. 2 wydanie. Paryż, 1905, VIII+228. Cena fr. 5.

Książka zawiera opis prostych przyrządów i bardziej skomplikowanych maszyn do wykonywania czterech działań arytmetycznych; narzędzi logarytmicznych; maszyny służącej do rozwiązywania równań algiebraicznych z jedną niewiadomą oraz opis różnych tablic, metod graficznych i nomogramów.

Dzieła specjalne w tym przedmiocie wspomniane są we Wstępie do Stopnia III.

Słownika matematycznego, gruntownie opracowanego, dotychczas nie mamy. Zdatne do użytku są:

Słownictwo naukowe. Część I. Matematyka elementarna. Wilno, 1912, nakładem »Pobudki«. Cena kop. 20, str. 16. (Słowniczek rosyjsko-polski, niezupełnie wolny od błędów).

Niemiecko-polski słowniczek matematyczny, ułożony przez Zuryskie kółko matematyczno-techniczne. Zurych, 1904, str. 37. Cena fr. 1. (Pominąwszy rusycyzmy, dość starannie opracowany).

Technik. Podręcznik opracowany wedł. niemiec. wzoru, wyd. przez stow. »Hütte«. Warszawa, 1905, str. 1213. Cena 4 r.

Podręcznik zawiera słownik, oraz tablice i wzory matematyczne (str. 1—142).

METODYKA NAUCZANIA MATEMATYKI [1].

OPRACOWAŁ

STEFAN KWIETNIEWSKI.

Treść. 1. Zadanie metodyki nauczania (dydaktyki) matematyki. 2. Stanowisko otoczenia względem uczącego się. 3. Przygotowanie dzieci do nauki systematycznej. 4. Wspieranie nauki systematycznej przez otoczenie uczącego się. 5. Nauczanie systematyczne (właściwa metodyka nauczania). 6. Wykształcenie nauczycieli.

---

1. Metodyka nauczania matematyki w najogólniejszym znaczeniu ma na celu zbadanie, w jaki sposób wytworzyć najkorzystniejsze warunki, przy których w umysłach jednostek lub mas myśl matematyczna powstaje i rozwija się prawidłowo, osiągając pożądany zasób wiedzy i zdolność do pracy twórczej. W zwykłym, ciaśniejszym, znaczeniu do metodyki nauczania zalicza się tylko te zagadnienia, które dotyczą nauczania systematycznego, prowadzonego przez nauczyciela fachowego. O metodyce w tym znaczeniu będzie mowa w § 5; §§ 1—4 są przeznaczone dla niespecjalistów i przedewszystkim dla rodziców uczącego się.

Z pośród czynników, niezbędnych do osiągnięcia zamierzonego celu, wymieniam najważniejsze: *a)* wytworzenie nastroju psychicznego, sprzyjającego skupieniu myśli na danym przed-

---

[1]) Porównaj wskazówki metodyczne w rozdziałach: Stopień I i Stopień II; w związku z niemi należy czytać rozdział niniejszy.

miocie; *b)* dostarczanie przedmiotów, mogących wzbudzić w umyśle pojęcia matematyczne; *c)* dostarczanie wzorów do naśladownictwa, jak należy obserwować, rozumować (wykład), wykonywać rachunki, modele i rysunki i t. d.; *d)* dostarczanie odpowiedniego materjału do myślenia: pytania, zadania i t. p.; *e)* tematy i wskazówki, dotyczące zajęć samodzielnych, przy których uczeń stosuje nietylko to, czego się nauczył, ale także pomysły własne, a myśl pracuje bez szczegółowej kontroli obcej.

Wszystkie te punkty nauczyciel powinien uwzględniać w jednakowym stopniu; współdziałanie rodziców lub otoczenia jest niemal niezbędne w punktach *a* i *b*; w punktach *d* i *e* bywa często możliwe i pożądane, a tylko punkt *c* pozostawić należy wyłącznie specjalistom.

2. Nastrój psychiczny, sprzyjający przyjmowaniu wiedzy, wytwarza się przez oddziaływanie odpowiednich warunków zewnętrznych na umysł, obdarzony pewnemi wrodzonemi lub nabytemi cechami indywidualnemi, a zwłaszcza *żądzą wiedzy*. W żądzy wiedzy dopatrzeć się można następujących ważniejszych składników: ciekawość, chęć naśladownictwa (odtwarzania tego, co już inni pomyśleli lub osiągnięcia rezultatów analogicznych w innych dziedzinach) i fantazja twórcza. Ciekawość występuje tu jako chęć poznania własności rzeczy otaczających nas, wykrycia źródeł naszych wrażeń, a także chęć poznania wyniku myśli innych ludzi. To jednak nie wystarcza; ucząc się matematyki, staramy się odtwarzać cudze myśli, osiągamy stanowisko, zdobyte już przez innych, i wówczas można odnaleźć w umyśle swym rzeczy nowe, innym jeszcze nie znane [1]).

[1]) Zdobycie wiedzy występuje tu jako cel, nie zaś jako środek do osiągnięcia innego celu. W znacznym stopniu sprzyja również przyjmowaniu wiedzy chęć zużytkowania jej w przyszłości w celu powiększenia dorobku kulturalnego ludzkości (praca naukowa), szerzenia oświaty (nauczycielstwo) lub podniesienia dobrobytu ludzkiego (zastosowania techniczne); ogólne dążenie do doskonałości, do wszechstronnego ukształtowania swego umysłu (przeważa naśladownictwo, na drugi plan schodzi ciekawość i fantazja twórcza) mniej sprzyja specjalizacji, ale jest znakomitym czynnikiem dla tych, dla których matematyka stanowi tylko część wykształcenia ogólnego. Natomiast nie sprzyja przyjmowaniu wiedzy dążenie do osiągnięcia przywilejów społecznych (trzeba znać równania, żeby zostać księ-

Pragnąc zapewnić uczącemu się odpowiednie warunki zewnętrzne, należy go przedewszystkim odosobnić od tego wszystkiego, coby mogło odciągnąć jego uwagę od nauki; jest to rzecz powszechnie znana, ale rzadko kiedy przestrzegana, i dlatego sądzę, że zwrócenie na to uwagi nie jest zbyteczne. Uczący się (zwłaszcza samouk) powinien mieć zapewnione kilka godzin dziennie ciszy i spokoju, nieprzerywanego żadnemi pytaniami ani uwagami. To abstrakcyjne skupienie młodocianego umysłu jest jednak możliwe tylko w ciągu krótkiego okresu czasu; pozatym umiarkowane rozrywki i odpoczynek są niezbędne dla prawidłowego funkcjonowania władz umysłowych. Tylko dla młodzieży dorastającej może być pożyteczna, od czasu do czasu, wzmożona praca kilkunastogodzinna w ciągu jednej doby, ale jedynie w tym przypadku, jeżeli chodzi o gruntowne poznanie jakiegoś trudniejszego szczegółu, o rozwiązanie skomplikowanego zadania i t. p., wogóle wtedy, jeżeli umysł ucznia pozostaje w ciągu tego okresu czasu przy jednym i tym samym temacie, pochłaniającym wyjątkowo silnie jego uwagę; praca taka, o ile stanowi wyjątek od reguły, może się nieraz przyczynić do lepszego zrozumienia przedmiotu i utrwalenia go w pamięci; korzyści te giną, jeżeli wysiłki takie częściej się powtarzają. Względy higjeniczne również stanowczo przemawiają przeciw wysiłkom tego rodzaju. Szybkie pochłanianie całych tomów — jak to bywa przed egzaminami ustnemi — żadnego pożytku nie przynosi, lecz tylko nuży umysł, nie dając mu możności wniknięcia w treść przedmiotu.

Pragnąc kogoś zachęcić do pracy, dobrze jest okazywać mu zainteresowanie nie tyle postępami w nauce, ile raczej przedmiotem nauki; a więc pytać go, na czym pewna teorja polega, jak powstała, kto i kiedy ją wymyślił i jakie są jej zastosowania. Pytania te nieraz będą musiały pozostać bez zadowalającej odpowiedzi, ale, bądź co bądź, w wielu przypadkach skierują

---

dzem, logarytmy — żeby służyć w wojsku krócej od innych, dwumian Newtona — żeby być prawnikiem). Dążenia takie, względem których matematyka stanowi opór pokonywany lub zręcznie omijany, wytwarzają właśnie niechęć do nauki, a zarazem pomysłowość w osiąganiu najświetniejszych pozorów przy najmniejszym zasobie wiedzy.

myśl we właściwą stronę, a także przyzwyczają uczącego się do porządkowania i wypowiadania swych myśli.

3. Dla małych dzieci, które nie zaczęły jeszcze nauki systematycznej, można wymyślić rozrywki, stanowiące przygotowanie do niej. Dzięki takiemu przygotowaniu nauka stanie się łatwiejszą i może być szerzej traktowana.

Przygotowanie do nauki rachunków nie wymaga wielkiego zachodu. Jakiekolwiek przedmioty zabawy: kulki, patyczki, kamyki — posłużą do wywołania potrzebnych pojęć. Niemowlę poznaje skalę dwustopniową: *jest* — *niema;* dziecko nieco starsze rozróżnia trzy stopnie: *dużo* — *mało* — *nic*. Z biegiem czasu w części skali »mało« powstają stopniowo pojęcia: jeden — dwa — trzy; w tym zakresie dziecko rozróżnia liczbę przedmiotów przez samo spostrzeganie, nie umiejąc liczyć i nie myśląc o tym, że $1+1=2$. Dziecko przystępuje więc do nauki rachunków z pojęciem o skali przynajmniej pięciostopniowej: *dużo* — *trzy* — *dwa* — *jeden* — *nic*. Rozpatrując trzy pierwsze liczby, możemy dać dziecku pojęcie o dodawaniu i odejmowaniu, oraz o znaczeniu wyrazów: więcej i mniej, a to już wystarcza, ażeby zapuszczać się z nim stopniowo coraz dalej w dziedzinę »dużo« [1]).

Więcej kłopotliwe jest przygotowanie umysłu dziecka do przyjęcia pojęć gieometrycznych. Ta dziedzina zwykle pozostaje w zaniedbaniu i to jest, być może, przyczyną, że u większości ludzi wykształconych umiejętność rozumowania gieometrycznego i wyobraźnia przestrzenna jest słabo rozwinięta. W ostatnich czasach zwrócono na tę okoliczność baczniejszą uwagę. Pożyteczne w tym względzie są niektóre roboty ręczne, gry i zabawy, znane pod nazwą slöjdu.

---

[1]) Cała nauka rachunku ma na celu prawie wyłącznie zastosowania bądź praktyczne, bądź naukowe. Ze stanowiska teoretycznego jest ona dla wielu gałęzi matematycznych zbyteczna: matematyka czysta, prawie we wszystkich swych działach, może się obejść bez wykonywania działań na liczbach szczególnych, bez dziesiątkowego lub innego systemu liczenia i t. d. Skala pięciostopniowa, o której mowa w tekście, jest więcej niż wystarczającą podstawą, na której można, drogą logicznych rozumowań, zbudować matematykę czystą. Porównaj rozdział: Wstęp ogólny.

Praktyczne wskazówki dla rodziców zawierają książki:

M. E. BOOLE[1]). Przygotowanie dziecka do wiedzy ścisłej. Tłum. M. SADZEWICZOWA. Warszawa, Gebethner i Wolff. Str. 113. Cena 1 rub. Rozdz. I. Myślenie naukowe. IV. Pielęgnowanie wyobraźni matematycznej.

J. STRZEMESKA i M. WERYHO. Wychowanie przedszkolne. Podręcznik dla wychowawców. Warszawa, Paprocki, 1895, str. 270+tabl. XXIX. Cena rb. 2.

Dobrym środkiem zapoznania dzieci z prawidłowością figur gieometrycznych oraz pobudzenia fantazji twórczej dziecka są wyszywanki, do których wzory gotowe można dostać w księgarni:

Boole Curve-sewing cards. Designed to accompany A Rhytmic Approach to Mathematics. By Edith L. SOMERVELL. Series I—VII. George Philip and Son, Londyn. Cena każdej serji (zawierającej 12 wzorów) 8 pensów.

O sposobie używania powyższych wzorków traktuje dziełko:

E. L. SOMERVELL.[1]) A Rhythmic approach to mathematics. Londyn 1906. Str. 67. Cena 2½ szyl.

4. Podczas nauki systematycznej domownicy ucznia mogą mu skutecznie dopomagać, o ile sami mają średnie lub wyższe wykształcenie, niekoniecznie matematyczne. Pożyteczne jest dawanie uczniowi zagadnień, dotyczących gospodarstwa, zabaw, praktyki zawodowej i t. p.[2]). Ojciec lekarz, adwokat, kupiec, czy inżynier będzie mógł z pewnością dostarczyć synowi takich zagadnień, zaczerpniętych z własnej praktyki. Zachęcająco może działać rozmowa o ciekawych zagadnieniach trud-

---

[1]) Książeczki te polecam wyłącznie ze względu na wskazówki praktyczne w nich zawarte. Dobre, choć nieliczne wskazówki podaje M. MONTESSORI: Domy dziecięce (Le case dei bambini). Warsz., 1913, str. VIII +255. P. rozdz. XI. Wykształcenie umysłowe. XIII. Początki arytmetyki.

[2]) Jak połączyć zabawy na świeżym powietrzu z nauczaniem gieometrji, o tym informuje książka: J. E. FEASEY. In the open air. A series of outdoor lessons in arithmetics, mensuration, geometry, etc. For primary and secondary schools. Londyn, str. 120. Cena 1½ szyl.

Wskazówki, dotyczące robót drzewnych w związku z ćwiczeniami matematycznemi, czytelnik znajdzie w książce: F. E. DRURY. Manuel training. Woodwork exercices treated mathematically. A scheme for linking up practical mathematics with woodwork; including a complete course of mensuration. For use in »Preparatory Day Trade Schools« and Elementary »Evening Technical Classes«. Londyn, 1912, str. 215. Cena 2 szyl. 6 pensów.

niejszych, które na razie są dla ucznia nieprzystępne, o okolicznościach towarzyszących ważniejszym odkryciom matematycznym, o życiu sławnych uczonych i t. p. Pomocne w tym względzie mogą być książki podane w Stopniu II, a zwłaszcza:

C. A. Laisant. Nauczanie początków matematyki. Warszawa, 1908, (patrz str. 90).

Dla starszej młodzieży i dla dorosłych pożyteczna jest następująca książka, której autor stara się pobudzić wyobraźnię przestrzenną na podstawie kształtów, spotykanych w przyrodzie i w sztuce:

H. E. Timerding. Die Erziehung der Anschauung. Lipsk, Teubner, 1912, str. VIII+241. Cena w opr. m. 5.60.

Treść: Formy gieometryczne, spostrzeganie gieometryczne, obrazy przedmiotów przestrzennych, obrazy liczb, szczeble poglądowości.

Dużo literatury i uwag teoretycznych na końcu książki. Strona historyczna uwzględniona.

5. Przechodząc do nauczania systematycznego, rozpatrzymy w krótkości czynniki, o których była mowa w § 1.

a) Wytworzenie i podtrzymywanie nastroju psychicznego, sprzyjającego skupieniu myśli na danym przedmiocie.

Temat ten należy do ogólnej psychologji wychowania; przy nauczaniu matematyki nie stosuje się odrębnych środków [1]). Nastręcza się jednak pytanie, czy każdy umysł jest zdolny do przyjęcia wiedzy matematycznej, czy też matematyka jest sztuką, wymagającą szczególnych zdolności?

Praktyka nauczania początkowego wykazuje, że każde dziecko, normalnie rozwinięte, może się nauczyć rachunków, i że nawet z dziećmi słabo rozwiniętemi osiągnąć można nieraz niezłe wyniki [2]). Inaczej jest z kursem średnich i wyższych klas

---

[1]) Patrz np. J. W. Dawid. Nauka o rzeczach. Warszawa, 1892. Rozdział III: Rozwój umysłowy, str. 381—482, a także: F. Queyrat. Wyobraźnia u dzieci i jej odmiany. Warszawa. 1895. Cena kop. 80.

[2]) Dzieci słabo rozwinięte w ogólności nie są zdolne do przyjmowania nauki abstrakcyjnej, natomiast mogą myśleć prawidłowo, dopóki myśl jest kierowana przez dość silne wrażenia, wzbudzone przez przedmioty zewnętrzne, (porównaj *b* i *d*). Tak np. w niektórych szkołach dla dzieci słabo rozwiniętych urządzono w klasach sklepiki, w których dzieci pod-

szkoły średniej. Rozumowania abstrakcyjne, jak indukcja zupełna oraz niektóre dowodzenia gieometryczne bywają niedostępne dla wielu umysłów, mogących poprawnie rozumować w innych dziedzinach; postępy w matematyce w zakresie średnim nie powinny więc być uważane za kryterjum sprawności umysłowej ucznia [1]). Jednakże można nieraz osiągnąć wyniki zadowalające z uczniami mniej zdolnemi przez przeważne stosowanie tych metod, które najbardziej odpowiadają właściwościom psychicznym ucznia. W szczególności nauczyciel powinien zbadać, czy uczniowi dokładniej utrwalają się w pamięci wrażenia wzrokowe, czy słuchowe, czy też ruchowe, oraz jakie obrazy powstają w umyśle ucznia pod wpływem słyszanych czy odczytywanych przez niego wyrazów. Tylko znając ucznia pod tym względem, nauczyciel będzie mógł wybrać dla niego najodpowiedniejszą metodę.

b) Dostarczanie przedmiotów (lub ogólniej: wywoływanie wrażeń), mogących wzbudzić w umyśle pojęcia matematyczne.

Pojęcie o pewnym przedmiocie będzie tym wszechstronniejsze i trwalsze, im więcej zmysłów jest czynnych przy jego wytwarzaniu, im różnorodniejsze wrażenia do niego prowadzą. Jeżeli więc chcemy np. dać dziecku pojęcie o kole, pokazujemy mu krążek tekturowy, polecamy mu obejrzeć ten krążek ze wszystkich stron, poprowadzić palec wzdłuż obwodu, wskazać inne przedmioty mające kształt koła, obejść koło trzymając jeden koniec wyprężonego sznurka umocowanego na drugim końcu, wyrysować koło od ręki, przy pomocy sznurka i przy pomocy cyrkla, poczym wskazujemy, jak rozpoznać niektóre własności

---

czas lekcji rachunków kupują i sprzedają różne przedmioty pod kierunkiem nauczycielki. O dodatnim wpływie rachunku palcowego na rozwój umysłowy dziecka patrz: H. Nöll. Fingertätigkeit und Fingerrechnen als Faktor der Entwicklung der Intelligenz und der Rechenkunst bei Schwachbegabten. Langensalza, Beyer, 1908. Str. 59. Cena m. 1.

[1]) Porównaj: A. Richter. Programm des Matthias Claudius-Gymnasium in Wandsbeck, 1891; Ch. Beyel. Über die Anlage zur Mathematik. Zeitschrift für math. u. naturwiss. Unterricht. 43 Jahrg. 7 Heft. 1912.

koła: równość średnic, stosunek okręgu do średnicy i t. d. Stopniowo, w miarę rozwoju wyobraźni ucznia, można zmniejszać stosunkową ilość dostarczanych mu wrażeń: na wyższym poziomie nauki pojęcia matematyczne wytwarza się za pomocą określeń.

c) Dostarczanie wzorów do naśladownictwa, jak należy obserwować, rozumować, wykonywać rachunki, modele i rysunki i t. d.

To, o czym tutaj mowa, stanowi treść wykładów ustnych lub zawartych w podręczniku. O wyborze materjału mówiliśmy w rozdziałach: Stopień I i Stopień II; tu zaznaczymy, że opracowanie materjału powinno być takie, ażeby mogło stanowić wzór myśli matematycznej, i ażeby wzór ten nie przekraczał władz umysłowych ucznia. Urzeczywistnienie tych wymagań nastręcza trudności, co do których pokonywania istnieje znaczna różnorodność zdań, zarówno wśród matematyków, jak i wśród pedagogów [1]). Zwracam w tym względzie uwagę na postulaty merańskie i na dyskusję, która się nad niemi wywiązała.

---

[1]) O stanie aktualnym nauczania matematyki informują publikacje Komisji międzynarodowej do spraw nauczania matematyki (Commission internationale de l'Enseignement mathématique), która w oddzielnych zeszytach wydaje sprawozdania o stanie nauczania w poszczególnych krajach, w szkołach wszelkich typów. Komisja rozpoczęła prace w r. 1909 i dotychczas ich nie ukończyla. Ze względu na ogrom materjalu, nie podaję wykazu zeszytów dotychczas wydanych; wykazy takie, dla każdego kraju oddzielne, otrzymać można bezpłatnie przez księgarnie. (Na uwagę zasługują: Schriften des deutschen Unterausschusses der internationalen mathematischen Unterrichtskommission. Lipsk, Teubner; Sous-Commission suisse, Gienewa, Georg; Berichte über den mathematischen Unterricht in Oesterreich, Wiedeń, Hölder; Sous-Commission française, Paryż, Hachette. Wydawnictwa Board of Education, Wyman and Sons, Londyn, p. t. Special Reports on Educationel Subjects). W komisji tej Galicja jest reprezentowana przez delegatów austryjackich. (N. 8: S. Zaremba. Bericht über die speciellen Verhältnisse des öffentlichen Mathematikunterrichtes an den Volks- und Mittelschulen Galiziens). Szkolnictwo polskie w Królestwie przedstawicieli nie posiada wskutek wadliwej ustawy komisji; opracowano jednak Referat Komisji programowej Koła mat.-fiz., poprzedzony wstępem historycznym. Warszawa, 1911, str. 24, odbitka z »Wiadomości Matematycznych«, tom XV).

W r. 1905 towarzystwo »Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte« na zjeździe w Meranie zajmowało się sprawą reformy nauczania matematyki. Opinję powołanej w tym celu komisji streścić można w następujących słowach:

»Uznając w zupełności wartość matematyki, jako czynnika kształcenia formalnego (formaler Bildungswert), trzeba zaniechać jednostronnych i bezwartościowych pod względem praktycznym wiadomości specjalnych, natomiast rozbudzić i wzmocnić zdolność matematycznego rozpatrywania i pojmowania (Betrachtung und Auffassung) zjawisk w przyrodzie oraz w stosunkach życia ludzkiego. Stosownie do tego, komisja stawia jako najważniejsze zadania nauczania matematyki: wzmacnianie wyobraźni przestrzennej i kształcenie przyzwyczajenia do myślenia funkcjonalnego... Jako cel ostateczny nauczania matematyki w gimnazjach wyłania się przedewszystkim wniknięcie w znaczenie matematyki przy ścisłym poznawaniu przyrody (für die exakte Naturerkenntniss«) [1])

Opozycja najsilniej krytykuje wprowadzenie przez zwolenników reformy — rachunku różniczkowego do szkoły średniej; głównym motywem opozycji jest fakt, że rachunek różniczkowy na tym poziomie nie może być ściśle wykładany, a wykład nieścisły staje się źródłem błędów, trudnych do wykorzenienia. Zwolennicy reformy powołują się na konieczność rozpowszechniania rachunku różniczkowego ze względu na potrzeby niematematyków, którzy coraz częściej muszą posługiwać się tym środkiem.

Toż samo w tłumaczeniu francuskim: L'enseignement des mathématiques et de la physique dans les écoles privées de Pologne. (L'Enseignement mathématique, XIII, N. 4, r. 1911). Zaznaczymy jeszcze: Projekt planu naukowego ośmioklasowej szkoły realnej w Galicji, ułożony przez komisję nieustającą planów i książek szkolnych Tow. Naucz. Szkół wyższych. »Muzeum«, dodatek 11, Lwów 1913, str. 68. Treść: 1. Memorjał Zarządu T. N. S. W. 2. Projekt planu. 3. Przegląd godzin. Projekt jest opracowany w myśl dążenia do samodzielnego rozwoju ekonomicznego narodu i opiera się na wykształceniu matematyczno-przyrodniczym.

[1]) Podobne dążenia, ale o charakterze bardziej radykalnym, powstały wcześniej w Anglji; patrz Perry, The Teaching of Mathematics.

d) Dostarczenie odpowiedniego materjału do myślenia: pytania, zadania i t. p.

Znając zasób wiedzy ucznia, łatwo jest zadać mu takie pytanie, które wywołuje pożądaną reakcję myślową: odtworzenie wykładu nauczyciela, zastosowanie teorji ogólnej do szczególnego przypadku (zadania), otrzymywanie nowych rezultatów bądź przez uogólnianie, bądź przez kombinowanie rezultatów już znanych. W ostatnim przypadku uczeń poznaje nowe prawdy matematyczne nie z wykładu nauczyciela, ale przez własne rozumowanie nad tematami, odpowiednio dobranemi przez nauczyciela (metoda heurystyczna, wynalazcza, albo sokratesowska). Tak np. uczeń może sam odkryć sposób rozwiązywania równań stopnia drugiego, bez jakichkolwiek objaśnień ze strony nauczyciela, jeżeli będzie miał dany do rozwiązania następujący szereg równań:

$$
\begin{aligned}
x^2=9; &\quad x^2=a \\
(x+1)^2=25; &\quad (x+a)^2=b \\
x^2+6x+9=16; &\quad x^2+2ax=b-a^2 \\
x^2+10x+25-36=0; &\quad x^2+8x=9 \\
x^2+2ax+b=0; &\quad x^2+px+q=0
\end{aligned}
$$

Ta metoda daje zawsze dobre wyniki w nauczaniu prywatnym oraz w niższych klasach szkolnych; w wyższych klasach można ją z pożytkiem stosować tylko wtedy, jeżeli niema w nich licznego balastu słabych uczniów.

e) Tematy i wskazówki do zajęć samodzielnych.

Address at the Meeting of the British Association. Glasgow, 1901. O postulatach merańskich bliższe szczegóły znaleźć można w pracach: A. Gutzmer. Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. Lipsk, Teubner. 1908.

R. Schimmack. Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen. Bericht über einen Vortrag von Prof. O. Behrendsen beim Göttinger Ferienkurs Ostern 1908 und über die anschliessende Diskussion. Sonderabdruck aus der »Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht«, 39. (1908), str. 513—527, Lipsk, Teubner, 1908. Cena fen. 80.

Liczne głosy pro i contra czytelnik znajdzie w czasopismach oraz w »Sprawozdaniach Koła Matematyczno-Fizycznego« Warszawa.

Zaliczyć tu poniekąd można bardzo pożyteczne ćwiczenia, polegające na ustnym lub piśmiennym opracowaniu tematu (twierdzenia, obliczania pewnych wielkości, rozwiązywania jakiejś kategorji zadań i t. p.), znanego już uczniowi z wykładu nauczyciela lub z książki; jednakże myśl samodzielna odgrywa w ćwiczeniach tego rodzaju nieznaczną rolę: przeważa posiłkowanie się pamięcią. Więcej samodzielności wymaga streszczenie jakiegoś większego rozdziału, wyszukiwanie związków między twierdzeniami, stanowiącemi jeden ciąg (np. twierdzenia o objętościach brył) lub też wykładanemi w różnych czasach, albo należącemi do różnych nauk (np. pole trójkąta, postęp arytmetyczny, prawo ruchu jednostajnie przyspieszonego; równoważność prostokątów, odwrotna proporcjonalność, hiperbola, praca mechaniczna lub prawo Mariotte'a; wspólna miara odcinków, złoty podział, ułamki ciągłe i t. p.); stosowanie nowych metod do dowodzenia twierdzeń dawniej poznanych (np. symetrja, metoda spółrzędnych); badanie zmienności jednych wielkości w zależności od innych (wykresy funkcji); zastosowania do innych nauk [1]); wykonywanie modeli; wreszcie większe zadania podane w niektórych zbiorach (Schülke, Heis), oraz wkraczanie w dziedziny, nie objęte wykładem.

Przy wszelkich pracach tego rodzaju pisać należy jak najmniej; objaśnienia swej pracy uczeń powinien dawać ustnie. Opracowanie piśmienne jest tylko wtedy możliwe, jeżeli sam temat nie nastręcza uczniowi żadnej trudności i jeżeli nie jest zbyt rozległy. Wskazówki, udzielane przez nauczyciela, dotyczyć będą oczywiście zarówno treści przedmiotu, jak i sposobu posiłkowania się kilku źródłami przy opracowywaniu jednego i tego samego tematu.

W literaturze polskiej niema książek, zawierających kom-

---

[1]) Niektóre zbiory zadań (np. Schülke, p. str. 75) uwzględniają w należytej mierze zastosowania praktyczne; pozatym trzeba poszukiwać materjału do zadań w książkach technicznych, statystycznych i t. d. — Dla uniknięcia mylnej interpretacji, zaznaczam, że bynajmniej nie uważałbym za rzecz pożądaną, ażeby plan powyższy w całości stał się obowiązującym w szkołach; tematy trudne i wymagające dużo pracy dobre są tylko dla zdolniejszych uczniów.

pletny wykład metodyki nauczania matematyki. Oprócz luźnych artykułów w czasopismach matematycznych i pedagogicznych na uwagę zasługują [1]):

W Encyklopedji Wychowawczej artykuły:

Arytmetyka (Trybulskiego).

Artykuł bardzo gruntownie opracowany, zarówno pod względem metodycznym jak historycznym; w szczegółach przestarzały.

Algiebra (Gosiewskiego).

Gieometrja (Dicksteina).

Matematyka (Dicksteina).

Ostatni artykuł uzupełnia poprzednie, stosownie do nowszych postępów nauki.

A. Dygasiński. Jak się uczyć i jak uczyć innych. Warszawa. Gebethner i Wolff, 1889, str. 239. Rozdz. XV: Arytmetyka. XVI: Geometrya. XVII: Algebra.

Krótkie ale pożyteczne wskazówki, w ogólności zgodne z dzisiejszemi zapatrywaniami.

W. Krzanowski. Przewodnik metodyczny do nauki rachunków zastosowany do nowych podręczników szkolnych. Część I na klasę (stopień) I. Przemyśl, 1911, str. 76. Cena w oprawie kor. 1.20.

Szczegółowe wskazówki, ułożone z dużą znajomością rzeczy. Zakres liczb 1—20. Metr, decymetr, litr, kilogram; rok, miesiąc, tydzień; monety austryjackie.

L. Zarzecki. Uwagi metodyczne o nauczaniu arytmetyki początkowej. Warszawa, 1911, str. 122. Cena kop. 75.

Jak tytuł wskazuje, książka nie stanowi podręcznika metodyki, zawiera tylko uwagi (przeważnie natury teoretycznej) o niektórych zagadnieniach metodyki, nieco wiadomości historycznych i krótki przegląd literatury.

Literatura obca posiada szereg dobrych podręczników w zakresie nauczania początkowego:

J. Stöcklin. Schweizerisches Kopfrechenbuch

---

[1]) Prace dawniejsze, p. T. Żebrawski: Bibljografja piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki. 1873. Dodatek: 1886.

und Methodik des Rechenunterrichts. 3 tomy. Liestal, Buchhandlung zum Landschäftler [1]).

Cz. I. 3-e wyd. 1910, str. VI+471. Rok nauczania 1—3. Liczby 1—1000. Cena rb. 3.50. II. 3-e wyd. 1907, str. IV+400. Rok 4—6. Liczby bez ograniczenia. Miary. Ułamki. Reguła trzech. Cena rb. 3.25. III. 1906, str. VIII+432. Rok 7—8 lub 9. Powtórzenie. Reguła trzech. (Procenty i t. d.) Gieometrja. Zadania mieszane. Cena rb. 3.90.

Książka bardzo starannie opracowana, zawiera ogólne rady i uwagi, szczegółowe wskazówki oraz dużo zajmującego i urozmaiconego materjału do zadań pamięciowych. Zadania te jednak mają przeważnie charakter lokalny, musiałyby więc ulec przeróbce, stosownie do naszych warunków.

W. A. LAY. Führer durch den Rechenunterricht 2-te Auflage. Lipsk, Nägele, 1906, str. VIII+235. Cena m. 3.60.

Treść: Materjał do zbudowania hipotez. Hipotezy. Doświadczenia i ich wyniki. Zużytkowanie wyników doświadczeń: metodyka nauczania rachunków.

Autor stara się zbudować metodę jak najbardziej racjonalną, opierając się na badaniach psychologicznych.

H. WALSEMANN. Die Rechenkunst. Eine Anschauungs- und Denklehre der Zahl. Auf experimenteller Grundlage. 2-te Auflage. Hanower, Meyer. 1913, str. VIII+535. Cena m. 3.80.

Treść: Przegląd historyczny. Materjał nauki o liczbach. Wybór i podział materjału. Formy i reguły rachunków. Środki pomocnicze. Metodyka sztuki rachowania. Część praktyczna.

LONGMANS' Practical-Arithmetics. Teachers' series. Londyn, Longmans, Green and Co [2]). 7 książeczek w cenie ½—1½ szyl.

Wskazówki bardzo drobiazgowe. Nauka rachunków w ścisłym związku z gieometrją i po części z fizyką. Zakres znacznie obszerniejszy, aniżeli

---

[1]) Odpowiadające temu podręcznikowi książeczki dla ucznia mają tytuł:

J. STÖCKLIN. Rechenfibel und Rechenbücher für schweizerische Volksschulen 1—8 ev. 9. Schuljahr. Liestal, Buchhandlung z. Landschäftler.

[2]) Odpowiednie książeczki dla ucznia: LONGMANS. Practical-Arithmetics. Pupils' series. Po 2—6 pensów.

u Stöcklina: w ks. 7 równania stopnia 1-go i 2-go, logarytmy, wykresy funkcji.

Dla porównania przytaczam jeden z lepszych podręczników włoskich dla szkół ludowych (wyd. Antonio Vallardi, Medjolan):

F. Amodeo. Abbaco o primi elementi di Aritmetica. Kl. I liczenie do 100, cztery działania do 20. Cena 15 cent. — Toż samo, kl. II. Cztery działania do 10.000, mierzenie. Cena 20 cent. — Primi elementi di Aritmetica e Geometria. Kl. III. Ułamki, miary; prosta, koło, kąt, trójkąt, czworokąt. Cena 30 cent. — Nozioni elementari di Aritmetica e Geometria. Kl. IV. Rozszerzenie kursu kl. III. Cena 60 cent. — Toż samo, klasa V. Proporcjonalność, bryły, mierzenie objętości. Cena 60 cent.

Trudniej jest wskazać godny polecenia podręcznik metodyki nauczania w zakresie średnim. Do wybitniejszych należą:

F. Reidt. Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. 2 Auflage, revidiert und mit Anmerkungen versehen v. H. Schotten. Berlin, Grote, 1906, str. XVI+269. Cena m. 4.

Dużo cennych, wyczerpujących wskazówek, ale wogóle książka zupełnie nie odpowiada duchowi czasu. Nie ratują sytuacji przypiski wydawcy, który stara się książkę po części zmodernizować. Pomimo to polecić ją można, jako najbardziej systematyczny przewodnik dla nauczyciela.

A. Höfler. Didaktik des mathematischen Unterrichts. Lipsk, 1910, str. XVIII+509. Cena m. 12. Treść: Przedmowa. Wstęp. Literatura. I. Cele i drogi nauczania matematyki. II. Wzory lekcji, programy i plany nauki. Dydaktyka dwu klas najwyższych. III. Zagadnienia dydaktyki matematyki, graniczące z psychologją, teorją poznania i dydaktyką ogólną.

Stanowisko autora jest zgodne z postulatami merańskiemi. Książka bardzo pouczająca, ale rozpatruje szczegółowo tylko kilka typowych przykładów.

Branford B. A. Study of mathematical Education including the teaching of Arithmetic. Oxford, Clarendon Press, 1908, str. XII+392. Cena 4 szyl. 6 pensów. Tłumaczenie niemieckie w przygotowaniu. Ważniejsze rozdziały: Mierzenie; doświadczenie w nauczaniu gieometrji. Rozwój pojęcia liczby u rodzaju ludzkiego i u dziecka. Jak pewien znakomity inżynier uczył się sam arytmetyki. Doświadczenia podświadome.

Znaczenie dydaktyczne gieometrji położenia. Wskazówki dotyczące lekcji. Początek i rozwój matematyki u rodzaju ludzkiego i u jednostki.

Autor przeprowadza paralelę pomiędzy rozwojem umysłowym jednostki i całego rodzaju i wyprowadza stąd wnioski metodyczne. Wykład popularny, ale bardzo pouczający.

J. W. A. Young. The Teaching of Mathematics in the Elementary and the Secondary School. N. York i Londyn, Longmans, 1911, str. XVIII+351. Cena dol. 1.50.

Książka traktowana dość pobieżnie. Autor daje próby różnych metod nauczania, roztrząsa niektóre ważniejsze rozdziały i udziela wielu rad praktycznych, dotyczących wykształcenia nauczycieli. Dużo literatury, ale prawie wyłącznie angielskiej.

6. Ażeby nauczanie matematyki mogło być skutecznie prowadzone w sposób wyżej omówiony, nauczyciel powinien mieć wykształcenie ogólne, na które składają się wiadomości z historji i nauk przyrodniczych przynajmniej w zakresie średnim, znajomość choć jednego języka zachodnio-europejskiego, psychologji wychowawczej [1]) i pedagogiki ogólnej. Pozatym wykształcenie specjalne nauczyciela matematyki obejmować powinno następujące przedmioty:

a) Matematyka elementarna w zakresie niższym i średnim z uwzględnieniem sposobów jej zastosowania do nauk fizycznych i do innych dziedzin oraz znajomość niektórych przynajmniej metod elementarnych, przekraczających zakres kursu szkoły średniej [2]).

Obszar wiedzy nauczyciela powinien być w każdym kierunku rozleglejszy, aniżeli zakres tego, co ma być wykładane. Znając to, czego uczniowie poprzednio się uczyli, nauczyciel może swój wykład uczynić bardziej zrozumiałym; wiedząc, do

---

[1]) J. Sully. Psychologja wychowawcza. Warszawa, 1905.

[2]) Metody elementarne w znacznej mierze są uwzględnione w książce: Th. Vahlen. Konstruktionen und Approximationen in systematischer Darstellung. Eine Ergänzung der niederen, eine Vorstufe zur höheren Geometrie. Lipsk, Teubner, 1911, str. XII+349.

Wielką ilość zadań zawiera: F. G.-M. Exercises d'algèbre. 7 wyd. Paryż, 1908, str. XXIV+954; tegoż autora: Exercises de géométrie, 4 wyd. Paryż, 1907, str. XXI+1228.

czego uczniowie będą stosować wyłożoną przez niego teorję, może wyprowadzić z niej wnioski, ułatwiające przejście od teorji do zastosowań; znając dalszy ciąg nauki, będzie mógł unikać takich powiedzeń, które prowadzą do sprzeczności, jakkolwiek nie są sprzeczne w zakresie przez niego wykładanym.

b) Ważniejsze działy matematyki wyższej (patrz Wstęp do St. III). Minimum: gieometrja syntetyczna i analityczna; rachunek różniczkowy i całkowy z zastosowaniami do gieometrji; podstawowe wiadomości z algiebry wyższej, teorji mnogości, teorji liczb i teorji funkcji; gieometrja wykreślna. Specjalizacja w jakimkolwiek przedmiocie, choćby najszczuplejszym, i stałe śledzenie postępów wiedzy w tym kierunku jest pożądane, gdyż utrzymuje nauczyciela w kontakcie z wiedzą aktualną.

c) Matematyka elementarna ze stanowiska dzisiejszej nauki.

Postępy wiedzy matematycznej w naszych czasach dotyczą prawie wyłącznie matematyki wyższej i nie zmieniają rezultatów matematyki szkolnej; ale pod wpływem nowych odkryć zmieniają się poglądy na matematykę elementarną, na pojęcia, któremi ona operuje, na ścisłość dowodzeń, na użyteczność niektórych teorji i t. d. Z tego względu jest rzeczą niezbędną, ażeby nauczyciel znał stosunek matematyki elementarnej do aktualnego stanu wiedzy.

Z literatury polecamy:

F. Klein. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I. Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1907—1908, ausgearbeitet von E. Hellinger. 2-e wyd. Lipsk, Teubner, 1911, str. 614; litografowane. Cena m. 7.50. Teil II: Geometrie, 1909. Cena m. 7.50.

Wykład bardzo zajmujący i pouczający. Do zrozumienia książki konieczna jest znajomość matematyki wyższej.

H. Weber und J. Wellstein. Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. Lipsk, Teubner.

I. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet v. H. Weber. 3 Auflage. 40 Fig. Str. XVIII+532, 1909. Cena m. 10.

II. Elemente der Geometrie. Bearbeitet v. Weber, J. Well-

STEIN und W. JACOBSTHAL. 2 Auflage. 251 Fig. Str. XII+596, 1907. Cena m. 12.

III. Angewandte Elementar-Mathematik. 2 Auflage.

I Theil: Mathematische Physik. Mit einem Buch über Maxima und Minima von H. WEBER u. J. WELLSTEIN. Bearbeitet von RUDOLF H. WEBER. 254 Fig. Str. XII+536, 1910. Cena m. 12.

II Theil: Darstellende Geometrie, graphische Statik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, politische Arithmetik und Astronomie. Bearbeitet v. J. WELLSTEIN, H. WEBER, H. BLEICHER und J. BAUSCHINGER. 271 Fig. Str. XIV+671, 1912. Cena m. 14.

Autorowie wprowadzają do matematyki elementarnej nowsze pojęcia (teorja mnogości, gieometrja nieeuklidesowska i t. d.), nie robiąc użytku z rachunku nieskończonostkowego. Wykład nie jest łatwy, ale przygotowania specjalnego nie wymaga.

F. ENRIQUES. Questioni riguardanti le matematiche elementari. Tom I. Wyd. 2-gie. Bolonja, 1912. (Podstawy gieometrji i arytmetyki).

Wydanie niemieckie, Fragen der Elementargeometrie, tłum. THIEME, Lipsk, Teubner — jest przekładem uzupełnionym I-go wydania włoskiego w 2 tomach i zawiera w t. I: Podstawy gieometrji (1911. Cena m. 10), w t. II: Teorję zadań konstrukcyjnych (1907. Cena m. 9).

Spis artykułów wydania włoskiego: F. ENRIQUES. O ważności filozoficznej zagadnień, należących do podstaw gieometrji. — F. ENRIQUES. O nauczaniu gieometrji rozumowej. — U. AMALDI. O pojęciach prostej i płaszczyzny. — A. GUARDUCCI. O przystawaniu i ruchu. — G. VITALI. O zastosowaniach postulatu ciągłości w gieometrji elementarnej. — U. AMALDI. O teorji równoważności. — G. VAILATI. O teorji proporcji. — R. BONOLA. O teorji równoległych i o gieometrjach nieeuklidesowskich. — F. ENRIQUES. Liczby rzeczywiste. — D. GIGLI. O liczbach zespolonych o dwu i więcej jednostkach.

Przekład polski w przygotowaniu.

Zaremba S. Zarys pierwszych zasad teorji liczb całkowitych. Kraków, Akad. Um., 1907, str. 166. Cena kor. 1.80

»Dziełko to przeznaczone jest, w pierwszym rzędzie, dla przyszłych nauczycieli matematyki i cel jego polega na wyłożeniu zasad teorji liczb całkowitych w tak ściśle naukowej postaci, aby teorja ta mogła zadośćuczynić wymaganiom zawodowego matematyka. Moim zdaniem ściśle naukowa postać wspomnianej teorji, jak i każdej innej teorji matematycznej, wykracza częściowo ponad poziom, do którego można wznieść się przy nauczaniu w zakładach średnich. Z tej przyczyny omawiam w ostatnim rozdziale te zmiany, które należałoby wprowadzić do teorji wyłożonej w rozdziałach poprzedzających, ażeby uzyskać teorję przystępną dla uczniów najwyższych klas gimnazjalnych«. (Przedmowa).

d) Metodyka nauczania (dydaktyka matematyki). Patrz § 5.

e) Historja matematyki. (Patrz rozdział pod tym tytułem, Stopień III).

W umyśle jednostki odbywają się przeobrażenia analogiczne do tych, którym podlegała cała ludzkość; znajomość historji może przeto ułatwić nauczycielowi racjonalne kierowanie pracą uczniów.

W szczególności do użytku przy nauczaniu nadaje się książka:

Tropfke. Geschichte der Elementar-Mathematik in systemat. Darstellung. Bd. 1. 2. Lipsk, Veit und Comp. Cena m. 22. 1. Rechnen u. Algebra. 1902. 2. Geometrie. 1903.

f) Niektóre nauki, mające styczność z matematyką. Stosownie do indywidualności nauczyciel może wybierać z następujących przedmiotów: filozofja, logika, historja kultury; mechanika, fizyka doświadczalna i teoretyczna, chemja fizyczna, krystalografja; astronomja, gieofizyka; nauki techniczne.

Wymagania powyższe stosują się w zasadzie zarówno do nauczycieli początków matematyki, jak i do tych, którzy uczą w zakresie średnim, ale nauczyciel, udzielający początków, będzie mógł poprzestać na wiadomościach zasadniczych, nie zagłębiając się w szczegóły; natomiast nie jest wcale rzeczą pożądaną, ażeby nauczyciele uczyli się z książek popularnych, przeznaczonych dla techników lub rzemieślników. Książki takie ukrywają przed czytelnikiem trudności, które poznać trzeba, chcąc mieć wyobrażenie o metodach, używanych w matematyce [1]).

O sposobach zdobycia wykształcenia we wspomnianym zakresie czytelnik znajdzie potrzebne informacje w odpowiednich rozdziałach Poradnika: tu zwracamy uwagę na kursy wakacyjne dla nauczycieli, urządzane przez niektóre uniwersytety zagraniczne (ogłoszenia w czasopismach) [2]), na odczyty publiczne, urządzane staraniem Koła matematyczno-fizycznego w Warszawie, oraz na następujące czasopisma matematyczne, przeznaczone dla nauczycieli:

Wektor. Czasopismo matematyczno-fizyczne. Redaktor W. Wojtowicz. Warszawa, 10 numerów rocznie, rb. 5.

---

[1]) Plan, tutaj przedstawiony, jest niezależny od jakichkolwiek przepisów urzędowych, określających sposób uzyskania przywileju nauczania (o przepisach poinformować się można z publikacji »Komisji międzynarodowej do spraw nauczania matematyki«, lub z oddzielnych wydań tych przepisów). W zastosowaniu do nauczania w zakresie średnim jest on w głównych zarysach zgodny z dezyderatami, wypowiadanemi w ostatnich czasach przez szereg uczonych i pedagogów, zwłaszcza F. Kleina (w różnych jego pracach) i A. Höflera (Die neuesten Einrichtungen in Österreich für die Vorbildung der Mittelschullehrer in Mathematik, Philosophie und Pädagogik. Wiedeń, Hölder, 1912, str. IV+103. Cena m. 2). Zaznaczyć jednak należy, że wielu profesorów jest przeciwnych wprowadzaniu przedmiotów pedagogicznych do uniwersytetu, a to z tego względu, aby nie odciągać studentów od pracy czysto naukowej i aby nie nadawać studjom uniwersyteckim charakteru przygotowawczego do zajęć zawodowych. Biorąc argument powyższy pod uwagę, można przedmioty te studjować już po rozpoczęciu pracy zawodowej, tymbardziej, że wtedy będą lepiej zrozumiane; w każdym razie zupełne zaniechanie przedmiotów pedagogicznych stanowi błąd kardynalny.

Co się tyczy nauczycieli szkól początkowych, to również już zwracano uwagę na to, że wykształcenie wyższe jest im potrzebne (naprzykład G. Noth: Universität und Volksschullehrer, Pädagogische Bausteine. Heft 22. Berlin. Gerdes und Hödel. Cena m. 0.80). Zaspokojenie tej potrzeby jest jeszcze jednak bardzo odległe, nietylko u nas, ale i na Zachodzie. Na przeszkodzie stoi, oprócz względów ekonomicznych, przesąd: ludzie z wyższym wykształceniem stronią od szkoły ludowej i od nauczania początkowego wogóle.

[2]) Por. Dział informacyjny.

Wiadomości matematyczne (od 1906 do 1912 r. zawierały dodatek: Sprawozdania z posiedzeń Koła matematyczno-fizycznego). Red. S. Dickstein, Warszawa. Cena r. 3 k. 60 rocznie.

Zeitschrift für Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht. Lipsk. Cena m. 12 rocznie.

L'Enseignement mathématique. Organe officiel de la Commission Internationale de l'Enseignement mathématique. Dir. par C. A. Laisant et H. Fehr. Gienewa, Georg et Co. 6 numerów rocznie. Cena fr. 15.

School Science and Mathematics. Chicago.

Ogólne czasopisma pedagogiczne, jak np. »Nowe Tory«, »Wychowanie«, zawierają również artykuły, dotyczące nauczania matematyki.

WSTĘP DO STOPNIA III.

OPRACOWAŁ

ZYGMUNT JANISZEWSKI.

Treść: 1. O samouctwie w wyższej matematyce. 2. Potrzeba znajomości języków obcych. 3. Nauka matematyki wyższej w zastosowaniu do różnych celów: Matematyka dla przyrodników (fizyków, chemików, biologów). 4. Matematyka dla filozofów. 5. Matematyka jako uzupełnienie wykształcenia ogólnego. 6. Matematyka dla matematyków: wykształcenie matematyczne wyższe ogólne i specjalizacja. 7. Filozofja matematyki i historja matematyki. 8. Rozrywki i zabawy matematyczne. 9. Sposób korzystania z podręczników. 10. Wykłady. 11. Ćwiczenia, przykłady zadań. 12. Modele i instrumenty. 13. Czytanie a rozwój indywidualny. 14. Specjalizacja. 15. Książki pomocne przy szukaniu zagadnień. 16. Źródła bibljograficzne.

---

1. Rozpoczynając studja w zakresie Stopnia III-go, który obejmuje całą współczesną matematykę wyższą z jej najnowszemi zdobyczami w najbardziej specjalnych gałęziach, niejeden zapewne czytelnik zada sobie pytanie: czy dziedzina ta, w takiej rozciągłości, dostępną jest dla samouków? Odpowiemy na to, że w tym znaczeniu, jakie nadajemy wyrazowi »samouk«, jest ona dostępna tylko dla samouków.

Samoukiem nazywamy każdego, kto w studjach swych pozostawiony jest własnej inicjatywie. Przeciwstawieniem samouka jest »uczeń« jakiejś szkoły lub nauczyciela, poddany obcym wpływom, programowi i kontroli. Student matematyki zaś niekoniecznie jest uczniem; w najlepszych i najbardziej uczęszczanych uniwersytetach studenci są w znacznej mierze samoukami: muszą sami sobie ułożyć plan studjów, wybrać wykłady, podręczniki itd.[1]) Zasadniczej różnicy pomiędzy niemi a samoukami niema żadnej. Fakt, że student uniwersytetu słucha wykładów, nie przeistacza go w ucznia. Wykłady bowiem są to »niedrukowane podręczniki« (jak się wyraził E. Hartman o wykładach z całokształtów nauk, nazywając je przeżytkiem z czasów, poprzedzających wynalazek drukarstwa); przytym słuchacz nie wchodzi w żadną styczność z profesorem. Wyjątek stanowią ćwiczenia i t. zw. seminarja (p. Dział informacyjny: »Organizacja pracy naukowej«)[2]).

---

[1]) Jak dalece student pozostawiony jest samemu sobie, świadczy o tym rozdawanie przez niektóre uniwersytety niemieckie drukowanych porad (»Ratschläge«) zapisującym się. Natomiast studenci politechnik, większości uniwersytetów we Włoszech, Anglji i szczególniej w Rosji, są w mniejszym, lub większym stopniu »uczniami«, poddanemi ścisłemu programowi, egzaminom itd.

W podawanych dla samouków wskazówkach będziemy stale mieć na myśli i studentów, jako potrzebujących wskazówek w mniejszym lub większym stopniu; nie wyłączając i tych z pośród nich, którzy są właściwie »uczniami«, gdyż dla nich najczęściej pierwszą radą będzie: stać się samoukiem, jak najmniej trzymając się programu urzędowego, który często odpowiada stanowi i duchowi matematyki w. XVIII. (Do całego tego ustępu por. Dział informacyjny).

[2]) I ta różnica pomiędzy studentem a uczniem znika, gdy przechodzimy do najtrudniejszych specjalnych przedmiotów, których uczenie się wymaga często kilkuletniego przygotowania, a więc zaczyna się (dla studentów) często już po t. zw. »skończeniu« uniwersytetu; do uczących się tych przedmiotów zatym możnaby z równym prawem zastosować nazwę samouka bez względu na to, jak poprzednio zdobyli wiadomości, i choćby nawet byli jeszcze na uniwersytecie, bo przedmioty te prawie nigdy nie są wykładane (por. Dział informacyjny).

Trzeba koniecznie pozbyć się raz na zawsze pojęcia, które panuje śród początkujących i ogółu, że ten, kto »skończył« matematykę (ten nieszczęśliwy termin »skończył«!), umie już »wszystko«. Po t. zw. »skończeniu« uniwersytetu, t. j. zdaniu egzaminu nauczycielskiego, w najlepszych uniwersytetach zna się w przybliżeniu tylko to, co nazywamy tu (§ 6) wyższym ogólnym wykształceniem matematycznym (i może jaki jeden przedmiot specjalny). A toż to są przecież tylko podstawy pewnych, najbardziej znanych teorji, poza któremi i ponad któremi wznosi się i rozwija cały gmach wiedzy! Żeby poznać »wszystko« (co ważnego dotychczas zrobiono), trzebaby na to uczyć się nie 4, lecz 400 lat!

Główna trudność, jaką ma samouk właściwy, jest natury moralnej: samoukowi brak tej pobudki i zachęty do pracy, którą (nie zaś pomoc) znajduje student w swym otoczeniu. Trudność ta nie leży jednak bynajmniej w naturze nauki; kto ma zapał i silną wolę, dla tego — o ile wogóle posiada odpowiednie zdolności — nie istnieją żadne granice, poza któreby przejść nie mógł. Przeciwnie, gdy pokona pierwsze, napotkane zaraz na wstępie, a największe trudności, t. j., gdy dokładnie zrozumie zasadnicze pojęcia analizy wyższej, dalej będzie mu szło coraz to łatwiej i łatwiej, a o pomoc — gdziekolwiekby się znajdował — coraz trudniej.

Swoboda inicjatywy nie wyklucza jednak szukania wskazówek; samouk właściwy znajduje się tu w trudniejszym nieco położeniu. Szczególniej zachodzi co do niego obawa (co nie mniej, jeżeli nie więcej, dotyczy i studjujących w uniwersytetach oddalonych od centrów naukowych), że nie pozna nowszych metod i kierunków, które jeszcze nie przedostały się do podręczników. Rada na to dla wszystkich jedna: strzec się odosobnienia i utrzymywać łączność z temi, którzy stykają się bezpośrednio z głównemi ogniskami dzisiejszej wiedzy matematycznej (p. Dział informacyjny). Samouk w szczególności winien komunikować się z innemi samoukami. Towarzystwo starszych od siebie kolegów — to główne źródło wskazówek nawet dla słuchaczów uniwersytetów (rzadko kiedy można otrzymać je od profesora), a zarazem bodziec do dalszej pracy, tak potrzebnej samoukom [1]).

2. Kto chce studjować matematykę wyższą, t. j. stopień III, musi znać języki obce. Bez nich poważna nauka jest niemożliwa. Polskie podręczniki tylko w niektórych działach mogłyby wystarczyć. Dla matematyka specjalisty pożą-

---

[1]) Pozwolimy tu sobie na jedną praktyczną uwagę dla młodych samouków: w świecie naukowym przyjęty jest zwyczaj udawania się po informacje do osób zupełnie nieznajomych. Najlepiej w tym celu zwracać się do starszych studentów zachodnich uniwersytetów: oni mają najświeższe i najlepsze, bo z własnego doświadczenia czerpane, te wiadomości, które mogą być potrzebne samoukowi, i najchętniej ich udzielą. O adresach łatwo się dowiedzieć np. w redakcji Poradnika lub Wektora.

dana jest znajomość — taka, aby rozumiał dzieła matematyczne — czterech języków: angielskiego, francuskiego, niemieckiego i włoskiego [1]).

Wystarczyć może jednak niemiecki i francuski.

Dla początkującego przynajmniej jeden z tych dwu języków jest niezbędny [2]).

Posiąść tę znajomość bardzo łatwo, gdyż ilość wyrazów i form językowych, używanych w matematyce, jest nader ograniczona. Najlepiej osiągnąć ją przez samo czytanie podręczników matematycznych w danym języku: początkowo takiego podręcznika, którego treść jest nam w części znana [3]).

Wszystkie polskie podręczniki i skrypta, posiadające choćby pewną wartość, staraliśmy się wymienić w odpowiednich miejscach. Nie radzimy tedy posługiwać się takiemi, które nie są tutaj wymienione.

Mówimy tu rozumie się o podręcznikach tylko, nie zaś

---

[1]) Te cztery języki uznane są za międzynarodowe w świecie matematycznym i najważniejsze pisma matematyczne przyjmują artykuły pisane w którymkolwiek z nich.

Co do podręczników rosyjskich, które tak często używane bywają przez studentów, zwłaszcza przez młodszych, to na ogół nie stoją one na poziomie wymagań współczesnych. Książki wybitniejsze staraliśmy się uwzględnić w odpowiednich miejscach. To samo, cośmy powiedzieli o podręcznikach, stosuje się w większym jeszcze stopniu do skryptów.

[2]) Trudno odpowiedzieć, który z nich lepiej jest znać. Niemiecka literatura jest najbogatsza i najwszechstronniejsza; szczególniej posiada dużo monografji i podręczników specjalnych działów. Natomiast do tych podstawowych części matematyki, z któremi początkujący najpierw będzie miał do czynienia, najbardziej godne są polecenia podręczniki francuskie. Jednak na niemiecki przetłumaczono wiele dzieł i podręczników angielskich i włoskich, a podręczniki włoskie należą też do najlepszych.

[3]) Pomocnym przy tym może być:

Słowniczek matematyczny niemiecko-polski i polsko-niemiecki. Wyd. Kółka matem.-technicznego w Zurychu. Cena 1 korona.

Dla nie znających francuskiego możemy przytoczyć tylko:

F. Müller. Vocabulaire mathématique, français-allemand et allemand-français. Mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch-französisch. Lipsk, Teubner. — Paryż, Gauthier-Villars, 1900/1901. Cena: część I m. 8; cz. II m. 11; całość, str. XV+316, m. 20, w oprawie.

o pracach specjalnych, zamieszczanych zazwyczaj w czasopismach matematycznych. Prace te jednak przez początkujących z korzyścią prawie nigdy czytane być nie mogą.

3. Rozpoczynający studja matematyki wyższej musi najpierw zdać sobie jasno sprawę, w jakim to czyni celu; od tego zależy bowiem nietylko zakres, w jakim powinien poznać matematykę, lecz także wybór jej gałęzi i sposób ich poznawania, w szczególności zaś dobór podręczników. Rozpatrzmy główne 3 grupy, na które można podzielić studjujących matematykę. Tworzą je: 1) przyrodnicy, technicy i ekonomiści, słowem ci, którym matematyka potrzebną jest do poznawania świata realnego; 2) filozofowie; 3) wreszcie matematycy [1]).

Pierwsi potrzebują matematyki o tyle tylko, o ile mogą ją zastosować, użyć jako narzędzia. Obchodzą ich przedewszystkim rezultaty matematyki, nie zaś ich dowody [2]), oraz metody rozwiązywania zagadnień pewnych typów, napotykanych w praktyce. Podstawowe pojęcia matematyki, ścisłość jej rozumowań, obchodzą ich mniej; wolą raczej poglądowe metody dowodzenia. Potrzebują metod obliczania numerycznego oraz rozwiązywania przybliżonego, które znów nie interesują matematyków.

Wreszcie tę grupę interesuje tylko ta część matematyki wyższej, która posiada zastosowania, t. j. prawie wyłącznie analiza (zwłaszcza jej działy, zajmujące się zmiennemi rzeczywistemi); w jakim zaś zakresie, to zależy od poszczególnych

---

[1]) Wyrazu »przyrodnik« używam tu w najszerszym znaczeniu, mając na myśli zajmujących się zarówno żywą, jak i martwą przyrodą, (a więc i fizyków i astronomów); wyrazu zaś »matematyk« tylko na oznaczenie matematyków czystych, studjujących matematykę dla matematyki. Przy drugiej grupie uwzględniamy też studjujących matematykę dla uzupełnienia wykształcenia ogólnego i dla rozrywki. — O nauczycielach matematyki nie piszemy osobno, gdyż włączamy ich do grupy matematyków; uważamy bowiem, że wykształcenie nauczycieli powinno różnić się od wykształcenia innych matematyków tylko obejmowaniem ponad to ostatnie przedmiotów pedagogicznych. Po wskazówki, dotyczące specjalnie nauczycieli, odsyłamy do rozdz.: Metodyka nauczania matematyki.

[2]) Tylko te nauki, w których matematyka służy do objaśniania zjawisk, gdzie cała teorja posiada formę matematyczną (jak fizyka teoretyczna), wymagają głębszej znajomości matematyki.

specjalności: dla jednych wystarczą te elementy matematyki wyższej, które tu zostały włączone do stopnia II-go, dla innych (fizyków teoretycznych, astronomów) potrzebna jest znajomość niektórych działów, szczególniej z teorji równań różniczkowych, zupełnie specjalna. Co do planu nauki por. § 6.

4. Cele i potrzeby filozofów w stosunku do studjów matematyki są najzupełniej, kontrastowo odmienne od potrzeb grupy poprzedniej. Z tego, co już powiedzieliśmy we Wstępie ogólnym (p. § 7) wynika, że nie o rezultaty matematyki chodzić im winno i nie o zdobycie narzędzia badań, lecz przedewszystkim o poznanie jej charakteru, podstaw i metod. A więc filozof powinien:

a) poznać gruntownie, choćby w najmniejszym zakresie, najbardziej charakterystyczne i ważne jej działy, a więc, poza stopniem II-im, arytmetykę teoretyczną i teorję funkcji zmiennej rzeczywistej, oraz pierwsze pojęcia z rachunku różniczkowego z ich zastosowaniami. Kto może poświęcić więcej czasu, niech poznaje dalej analizę wyższą na równi z matematykami, przyczym, jako działy najcharakterystyczniejsze, polecamy: teorję funkcji analitycznych i teorję szeregów Fouriera. Gruntowne przestudjowanie tych przedmiotów pozwoli zrozumieć, czym jest matematyka, jej przedmiot, jakie jest jej zadanie i jak pojmuje ona jego rozwiązanie; jaka metoda i jakie wymagania stawiane są dowodom.

Ażeby mieć lepsze jeszcze o tym pojęcie, trzeba wiedzieć, jak ten przedmiot, zagadnienia, metody mogą się zmieniać, zależnie od działu, jak różne mogą posiadać formy (by nie brać indywidualnych cech analizy za charakterystyczne dla całej matematyki); w tym celu należy:

b) poznać, choćby najpobieżniej, najbardziej różne i odosobnione gałęzie matematyki. Więc przedewszystkim teorję liczb, gieometrję rzutową, czyli syntetyczną (w wykładzie czysto gieometrycznym), teorję mnogości, topologję (wszystkich kierunków); poza niemi możnaby polecić jeszcze gieometrję różniczkową, teorję rozwiązywania równań algiebraicznych i gieometrję nieeuklidesowską. Filozof dowie się z nich wielu ciekawych dla siebie faktów. Rozumie się, może tu być mowa tylko o poznaniu elementów każdej z tych nauk, co jednak do zorjentowania się wystarczy zupełnie. Można nawet zadowolnić się informacjami encyklopedycznemi o tych naukach, zawartemi np. w Repertorium der höheren Mathematik E. Pascala, w drugim (zupełnie przerobionym i powiększonym) wydaniu niemieckim pod redakcją Epsteina i Timerdinga, albo w Encyklopädie der Elementar-Mathematik H. Webera i J. Wellsteina [1]). W taki sposób czytelnik będzie mógł zorjentować się również co do wielkości dziedziny matematyki.

Chcąc poznać ją ze strony jeszcze jednej: jak ona w kolei wieków doszła do dzisiejszego stanu, z jakiego gruntu wyrosła i jak daleko zaszła, trzeba:

c) poznać dzieje matematyki w zarysie. Należy tu wybrać historję, przedstawiającą syntetycznie główne epoki i prądy w matematyce, nie zaś podającą dużo szczegółów: żeby bowiem z ostatnich skorzystać, a więc je zrozumieć, trzeba posiadać dużą wiedzę, której tu przypuszczać nie możemy [2]). Wreszcie:

d) nieodzownym jest poznanie podstawowych pojęć matematyki, a więc studjowanie teorji mnogości, podstaw arytmetyki i podstaw gieometrji (podstawy analizy zawarte są w wymienionej wyżej teorji funkcji zmiennych rzeczywistych). I tu zagłębianie się w szczegóły jest zbyteczne, wyjąwszy może teorję mnogości, której studjowanie obszerniejsze bardzo polecamy. Należy tylko wczuć się dobrze w zupełnie obcy zwykłemu pojmowaniu arytmetyki i gieometrji sposób ich ujęcia. W ostatecznym razie można i tu

---

[1]) Tego rodzaju obraz algiebry wyższej i teorji liczb znajduje się w książce Wintera: La méthode dans la philosophie des mathématiques, topologji zaś i gieometrji rzutowej w pracy Couturat, Les principes des mathématiques. Ocena filozoficznej strony obu tych książek znajduje się w rozdziale: Zagadn. filoz.-matematyki.

[2]) Historja matematyki tego rodzaju, któraby charakteryzowała różne jej gałęzie powstające, mogłaby zastąpić w ostatecznym razie to, co zawarliśmy w punkcie *b*), gdyż studjowanie systematyczne tych działów nie wydaje się nam dla rozważanej grupy konieczne.

posługiwać się artykułami encyklopedycznemi lub pracami treści ogólnej i popularyzacyjnej [1]); jednak nie radzimy poprzestawać na tym. Dobrze jest przytym porównywać te badania z pracami z filozofji matematyki, lecz nie należy nigdy brać ostatnich za źródło swych wiadomości o podstawach matematyki, gdyż w nich zatraca się swoisty charakter i wartość badań matematycznych, oraz są one podane już w pewnym specjalnym oświetleniu.

Musimy podkreślić jeszcze jedną różnicę, jaka powinna zachodzić w nauce matematyki między pierwszą a drugą grupą, mianowicie różnicę w wyborze podręczników. Z tego wszystkiego, cośmy powiedzieli, wynika, że filozof nie powinien nigdy brać do ręki książek, przeznaczonych dla przyrodników lub techników [2]). A jest to powszechnie, niestety, popełniany błąd. O ile niema podręczników, odpowiadających właśnie potrzebom filozofa, t. j. krótkich i jasnych, a ścisłych i głębszych, winien on posługiwać się przeznaczonemi dla matematyków i zupełnie ścisłemi, jeśli nie chce otrzymać fałszywego obrazu matematyki i błędnie rozumieć jej pojęć. Nie potrzeba zgłębiać ich w całości: lepiej dobrze przestudjować tylko początek większego, ściśle naukowego podręcznika, niż nauczyć się całego takiego, który przechodzi bez zatrzymania się (dobrze jeszcze, jeżeli bez błędu) nad najważniejszemi, podstawowemi kwestjami.

5. Do tej drugiej grupy można zaliczyć i tych, którzy szukają w studjowaniu matematyki tylko pogłębienia swego wykształcenia ogólnego [3]). Kto jednak kładzie więcej wagi

---

[1]) Np. podstawy arytmetyki traktuje J. Tannery w książce zbiorowej De la méthode dans les sciences, także Voss w swej książce Über das Wesen der Mathematik; zupełnego obrazu jednak nie daje żadna z tych prac.

[2]) Wyjąwszy naturalnie, gdy studjuje jednocześnie fizykę lub nauki przyrodnicze.

[3]) Przez wykształcenie ogólne rozumiemy zdobycie takiej sumy wiadomości i, więcej jeszcze, wyrobienie takich zdolności umysłu, które są konieczne do zrozumienia dzisiejszej kultury i do orjentowania się w jej zagadnieniach (nie zaś zdobycie sumy praktycznych wiadomości poztrebnych w życiu).

na swą kulturę estetyczną i na osiągnięte z nauki zaznanie piękna, niż na jej wartość poznawczą, ten niech idzie raczej drogami matematyków, niż filozofów. Może opuścić zmudniejszą i trudniejszą analizę, zwracając się, stosownie do upodobania, do której z nauk nie wymagających żadnego prawie przygotowania matematycznego (nawet w zakresie Stopnia II), a mianowicie: do jasnej i prostej teorji liczb, lub do eleganckiej i kształcącej wyobraźnię przestrzenną gieometrji rzutowej (syntetycznej), lub wreszcie do potężnej i interesującej z metafizycznego punktu widzenia, otwierającej wspaniałe perspektywy nieskończoności — teorji mnogości. Wszystko to są teorje jednolite w swym rysunku, nie wymagające żadnych nudnych przygotowań, by nam odkryć swe piękno; wymagają one tylko, jak i każde dzieło sztuki, pewnego rodzaju zmysłu piękna. Tu też polecić można poglądową i ciekawą topologję, oraz gieometrje nieeuklidesowskie; i z zakresu tych nauk istnieją dzieła, dostępne dla osób, posiadających wykształcenie szkolne [1]).

6. Co z matematyki powinien poznać matematyk?

Niejeden pewnie początkujący odpowie sobie na to pytanie, że matematyk powinien poznać całą matematykę. Lecz matematyka, jak już zaznaczyliśmy wyżej, (§ 1, przypisek drugi; por. także przypiski: na str. 140 i ostatni w rozdz.: Równania różniczkowe), jest nauką tak olbrzymią, że poznać ją w całości — nietylko podczas studjów, lecz i w ciągu życia — jest rzeczą niemożliwą. Trzeba więc zrobić wybór i czynić go z rozwagą, tak, żeby nam wystarczyło czasu na rzeczy najpiękniejsze i najważniejsze.

Wykształcenie matematyczne wyższe można podzielić na

---

[1]) Można tu też wspomnieć o nowej gieometrji trójkąta, szczególniej dla tych, których interesuje gieometrja elementarna. Dział ten jest głównie uprawiany przez nauczycieli szkół średnich, nie mających możności poświęcić się głębszym studjom. Z powodu jego małego znaczenia nie zajmujemy się nim w Poradniku. Literaturę do tego działu znaleźć można w tomie drugim Repertorjum matematyki wyższej E. Pascala (tłum. polskie, Warszawa, 1900). Krótkim podręcznikiem jest:

A. Poulain, Principes de la nouvelle théorie du triangle. Paryż, 1892; str. 46.

ogólne i specjalne [1]). Do pierwszego obowiązany jest bezwzględnie każdy matematyk. Specjalizować się zaś w jakiejś gałęzi jest zawsze dobrze — gdyż w ten sposób najłatwiej pogłębić swe ujmowanie matematyki — lecz tylko jednostki, pragnące pracować naukowo, muszą kłaść na specjalizację nacisk. Takie ogólne wyższe wykształcenie matematyczne, którego pojęcie zależy od stanu wiedzy i prądów danej doby, wymaga mniej więcej znajomości wyliczonych niżej działów matematyki w zakresie, wskazanym bliżej w odpowiednich rozdziałach Poradnika.

A. *a)* Wyznaczniki.
Gieometrja analityczna.
Arytmetyka.
Rachunek różniczkowy i całkowy z zastosowaniami do analizy i gieometrji.

b) Teorja mnogości
Teorja funkcji zmiennych rzeczywistych.

c) Teorja funkcji analitycznych.
Równania różniczkowe.
Szeregi Fouriera.
Gieometrja różniczkowa (krzywe linje i powierzchnie).
Elementy rachunku warjacyjnego.

B. Gieometrja syntetyczna (rzutowa).
Teorja liczb.
Algiebra wyższa z Teorją grup skończonych.
Podstawy gieometrji.

Grupy *A* i *B* mogą być studjowane równolegle; w grupie *B* pomieściliśmy nauki, mało związane z grupą *A*. Grupa *B* prawie nie posiada zastowań (poza matematyką). Nauki grupy *A* studjować należy w porządku, w jakim je wyżej wyliczyliśmy [2]).

Przez arytmetykę rozumie się na Stopniu III. naukę zu-

---

[1]) Mówimy tu o wykształceniu matematycznym matematyka czystego, a więc możnaby je w całości nazwać specjalnym; lecz używamy tu stale wyrazu: »specjalny« (i tak samo dalej wyrazu »specjalista«) w znaczeniu ciaśniejszym: mówimy o specjalizacji w obrębie matematyki, o specjalnym poświęceniu się jednemu działowi matematyki.

[2]) Co do porządku, w jakim umieszczone są rozdziały w Stopniu III, p. odsyłacz na str. 142.

pełnie różną od tego, co nazywamy tak na Stopniu II. Do dalszych studjów potrzebne są z arytmetyki przedewszystkim krótkie wiadomości o ciągach i szeregach; gruntowniejszą naukę arytmetyki najlepiej odłożyć na lata późniejsze.

Do grupy *c* należy przystąpić po gruntownym przestudjowaniu grup *a* i *b*. Rachunek warjacyjny jest najtrudniejszy z tej grupy i najlepiej odłożyć go na sam koniec: pozatym porządek studjowania nauk grupy *c* jest dowolny. — Nauki grupy *B* można także studjować w dowolnym porządku; tylko do algiebry potrzebne są elementy teorji liczb.

W szczególności można polecić teorję liczb lub gieometrję rzutową do równoczesnej nauki wraz z grupą *a*: ma to tę dobrą stronę, że do obu tych nauk, dzięki ich jednolitości i prostocie postępowania, łatwiej jest głębiej wniknąć i uchwycić ich metodę, co rozwijająco wpływa na uzdolnienie matematyczne. Przytym dają one pewnego rodzaju odpoczynek dla umysłu znużonego ciągłym zajmowaniem się analizą, tymbardziej, że nauki te — proste i piękne w swej prostocie — mogą łatwiej pociągnąć początkującego, niż gałęzie analizy, operujące trudniejszemi metodami i bardziej złożonemi pojęciami. Należy tylko zawsze dawać przewagę naukom grupy *a*, nie zapominając, że są one kluczem (choć może tylko kluczem) do głównych skarbów matematyki, źródłem jej potęgi. Często się bowiem zdarza, że samoucy uwiedzeni czarem jednej z tych dwu nauk, nie wymagających znajomości innych gałęzi matematyki, jej się tylko oddają, nie osiągając nigdy nawet skromnej matematycznej wiedzy i szerszego horyzontu.

Znajomości niewymienionych tu (str. 124) gałęzi matematyki nie można wymagać od każdego matematyka; jedynie pewnych ogólnych wiadomości o ich przedmiocie, pojęciach i zadaniach. Najlepiej też zapoznać się z niemi, choćby w sposób encyklopedyczny, (np. z cytowanego niżej repertorjum PASCALA w drugim niemieckim wydaniu, z niektórych artykułów Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften i tp.), a potym wybrać sobie grupę nauk, czy kierunek, w którym się chce specjalizować (p. niżej § 14).

7. Obok różnych działów matematyki jeszcze następujące

nauki obchodzą matematyka i należą do zakresu jego działalności: filozofja matematyki, historja matematyki i metodyka nauczania matematyki. Ostatnia ma ważne, lecz tylko praktyczne znaczenie, dla nauczycieli. Dwie pierwsze mają znaczenie teoretyczne. Poświęcimy tu parę słów oznaczeniu tego miejsca, jakie powinny one zająć w wykształceniu matematyka; bo, że pewne miejsce zająć powinny, że myślący człowiek musi sobie kiedyś zadać pytania, czym są w swej istocie te przedmioty, które bada i jakie uprawnienie mają metody, któremi się przytym posługuje, wreszcie skąd te pojęcia i metody się wzięły i jak się rozwijały — to, zdaje się, nie potrzebuje uzasadnienia.

Właściwe studjowanie filozofji matematyki wymaga znacznego przygotowania filozoficznego oraz specjalnego upodobania i uzdolnienia: przytym prawie niema ono wpływu na rozwój samej matematyki, ani na rozwój uzdolnienia do matematyki. Polecamy więc tylko zaznajomienie się ogólne z różnemi poglądami na najważniejsze jej zagadnienia: istotę liczby, gieometrji, rozumowania matematycznego i t. p., ostrzegając zarazem przed informowaniem się jednostronnym. Wreszcie radzimy zająć się nią dopiero w dalszych latach studjów (co do przygotowania i t. d., p. Z a g. f i l o z.-m a t.).

Większą wartość dla matematycznego rozwoju uczącego się ma historja matematyki. Tę ogólną wartość ma nie specjalna nauka historji (to wymaga jeszcze bardziej, niż filozofja, specjalnych upodobań i uzdolnień, oraz — przy historji matematyki nowożytnej, którą tu głównie mamy na myśli — dużej znajomości matematyki), tym bardziej nie znajomość nazwisk, tytułów książek i dat, lecz zrozumienie ogólnego biegu myśli matematycznej: jak się zmieniały m e t o d y, s p o s ó b stawiania zagadnień, jak to wpływało na rozwój matematyki, oraz jak jej dzisiejszy stan da się wytłumaczyć z poprzednich jej faz i panujących przedtym poglądów i jak jej stan jutrzejszy — odgadnąć z kierunku prądów dzisiejszych.

Takie h i s t o r y c z n e z r o z u m i e n i e matematyki pogłębia jej zrozumienie rzeczowe i wpływa dodatnio na twórczość matematyka.

Do uzyskania go służą trzy środki, uzupełniające się wzajemnie:

1) czytanie historji matematyki lub jej oddzielnych gałęzi, a także monografji o poszczególnych matematykach, o ile przedstawiają one syntetycznie ogólny bieg rozwoju nauki, a nie są przeładowane nazwiskami i niepowiązanemi faktami;

2) czytanie klasyków; i głównie

3) studjowanie podręczników napisanych w sposób historyczny.

Są bowiem dwa sposoby prowadzenia wykładu: systematyczny i historyczny. Przy pierwszym sposobie zachowuje się w wykładzie porządek, odpowiadający istocie samych badanych pojęć i logicznym związkom, zachodzącym między niemi; przy historycznym sposobie zaś zwraca się większą uwagę na to, jak pojęcia i twierdzenia nowe następowały po sobie w rzeczywistości dziejowej. O pierwszym i drugim sposobie można powiedzieć, że zachowują porządek naturalny: pierwszy porządek bowiem leży w *naturze* rzeczy badanych samych w sobie, drugi — w *naturze* badającego umysłu człowieka. Pierwszy wykład idzie drogą krótszą i jaśniejszą, która jednak do przebycia bywa zrazu trudniejszą: umysł nasz bowiem przy zdobywaniu wiedzy musi przejść (podobnie jak i nasz organizm w swym rozwoju), choć w niepomiernie szybszym tempie, w ogólnych zarysach tę drogę, jaką przebywała ludzkość w swym rozwoju historycznym.

Oba rodzaje podręczników są potrzebne: za podstawowe uważać należy systematyczne wykłady, obok których trzeba szukać pogłębienia w wykładach historycznych. Niestety, ostatnie są bardzo nieliczne; zastąpić je może typ podręczników z wykładem systematycznym, lecz z uwagami historycznemi.

8. Historja może też służyć do uprzyjemnienia studjów matematycznych, a więcej jeszcze służą do tego wiadomości z życia matematyków. Wspomnimy tu specjalnie (po inne dane odsyłamy do rozdziału Historja matematyki) bardzo ciekawy zbiór cytat niemieckich, francuskich, angielskich i innych (w ich oryginalnym brzmieniu):

W. Ahrens, Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. Lipsk, Teubner, 1904; str. X+522. Cena m. 8.

Podobną książką jest:

Rebières, Mathématiques et Mathématiciens. 3 wyd., 1898. Wszystkie cytaty podane w języku francuskim.

Innym rodzajem rozrywki dla matematyków są zabawy matematyczne. Najbardziej naukowemi są z tego zakresu książki:

W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Lipsk, Teubner, 1901; str. XII+428. Cena m. 10. (zbroszurowane w dwu częściach po 5 m.) Wydania drugiego tegoż dzieła, w dwu tomach, wyszedł dopiero, tom 1-y, 1910, str. IX+400.

Rouse Ball, Mathematical Recreations and Problems. 3 wyd. Londyn, 1890; lub w przekładzie francuskim:

Rouse Ball. Récréations mathématiques. 3 tomy, Paryż, A. Hermann, 1907—1909. Cena fr. 15.

Obszerne informacje o tych zagadnieniach znaleźć można w Encyklopädie der math. Wiss., w artykule:

G. 1. W. Ahrens, Mathematische Spiele; t. I, cz. II.

Bardziej popularną jest książka:

Schubert, Mathematische Mussestunden, 3 tomy.

9. Wspomnieliśmy w § 7 o czytaniu dwu podręczników do jednego przedmiotu. Jest to jeden z wyjątków. Z reguły należy zadowolić się przeczytaniem jednego podręcznika (jeśli trzeba, to dwa i trzy razy), lub najwyżej — przy trudniejszych i ważniejszych przedmiotach — dwu, a potym przejść do studjowania dalszego ciągu teorji — bądź z obszernych podręczników, bądź z monografji, bądź z artykułów oryginalnych. Jest to częsty błąd samouków, zwłaszcza oddalonych od ośrodków ruchu naukowego, że po przeczytaniu jednego podręcznika biorą drugi i trzeci o tym samym przedmiocie (i w tym samym zakresie), nie posuwając się nigdy naprzód. O ile zrazu chwytają za wielką ilość różnych, często za trudnych dla siebie, gałęzi matematyki, o tyle potym nie wychodzą poza obręb pierwszych jej działów, chcąc je zgłębić z bezcelowym (i zresztą nie dającym się w ten sposób uskutecznić) pedantyzmem. Umiejętne przeczytanie jednej książki (lub dwu, p. niżej) wystarczy zupełnie.

Nie trzeba bowiem umieć wszystkich zawartych w książce dowodów na pamięć — dość umieć udowodnić każde twierdzenie zaraz po przeczytaniu dowodu, nie zaglądając do książki, co świadczy o dostatecznym wniknięciu w treść jego.

Także jest — na ogół — zbyteczne poznanie wielu metod układu, różnych dowodów danego twierdzenia lub podrzędnych szczegółów (naumyślnie przecież często, jako balast, przez dobry podręcznik opuszczanych), czym zwykle różni się jeden podręcznik od drugiego; wystarczy wiedzieć, że różne sposoby układu i dowodów istnieją, czego dowiemy się albo po przestudjowaniu dwu podręczników (należy tedy wybrać możliwie różniące się układem), albo i bez tego przy dalszych studjach.

Posługiwanie się większą ilością podręczników z tego samego zakresu polecamy tylko w następujących razach[1]):

a) Przy trudniejszych przedmiotach dobrze jest używać podręcznika krótszego, jako propedeutycznego, a potym drugiego o tym samym, ale z wykładem obszernym, posługującym się bardziej naukowemi, trudniejszemi metodami; np. najprzód przejść krótki kurs gieometrji analitycznej o prostej i stożkowych w spółrzędnych prostokątnych, po części posługujący się metodami elementarnej gieometrji, a potym obszerny kurs gieometrji analitycznej, tak samo o prostej i stożkowych, ale prowadzony metodą wyłącznie analityczną i posługujący się innemi spółrzędnemi, np. jednorodnemi, oraz trudniejszemi algiebraicznemi pojęciami, np. wyznacznikami, niezmiennikami.

---

[1]) Uwaga ta, jak i prawie wszystkie następujące (§§ 9—12), stosuje się głównie do młodszych (w pierwszych trzech, pięciu latach studjów). Dla starszych mogą być pożądane liczne odstępstwa od podanych tu wskazówek; później np. można wiele skorzystać, przeglądając (ale nie studjując) i porównywając podręczniki pisane różnemi metodami. Uwaga ta dotyczy też tylko właściwych podręczników; do dzieł oryginalnych nie stosuje się.

Wiele ciekawych uwag i rad, dotyczących sposobu pracy matematycznej znajduje się w książce:

H. Fehr, Enquête de »l'Enseignement mathématique« sur la méthode du travail des mathématiciens; Paryż-Gienewa, 1908; str. 126 (odbitka z l'Enseignement mathématique z r. 1905 i 1906); p. szczególniej odpowiedzi na pytanie 11 i 21.

b) Przy zupełnie różnych metodach i punktach wyjścia w wykładach tego samego przedmiotu, np. w teorji funkcji metody Cauchy'ego, Riemanna i Weierstrassa [1]), w teorji równań całkowych metody Fredholma i Hilberta. W niektórych wypadkach metody są tak różne, że teorje wyłożone za ich pomocą są prawie innemi naukami (np. gieometrja analityczna i syntetyczna).

c) W razie jakichś specjalnych zalet podręcznika bywa wskazanym przeczytanie go, pomimo że zna się przedmiot. Tutaj należą przedewszystkim wspomniane już podręczniki, pisane metodą historyczną; dalej podręczniki, zawierające wiele uwag krytycznych, natury metodycznej, historycznej lub filozoficznej, wreszcie takie, które poddają zagadnienia i nowe myśli i mogą służyć za impuls i źródło tematów do pracy samodzielnej. Czytanie takich książek jest niezmiernie pożyteczne i przyjemne zarazem. Najczęściej służą one jako uzupełnienie podręczników systematycznych.

d) Wreszcie drugiego podręcznika dobrze jest używać dla wyjaśnienia sobie niezrozumiałych miejsc w tym, który się czyta.

W razie, gdy napotkana trudność leży w jakimś dowodzie, polecamy spróbować przeprowadzić samemu ten dowód, nie oglądając się na podręcznik: zdarza się bowiem, że prosty dowód mógł być zaciemniony jakimś niezrozumiałym wyrażeniem lub zwrotem, lub że trudność polega na jakimś rachunkowym uproszczeniu, którego czytelnik nie może się domyśleć, a bez którego, rachując zwyczajnie, dowód można przeprowadzić [2]). Jeżeli to

---

[1]) W ostatnim tomie podręcznika E. Foueta, Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques (Paryż, Gauthier-Villars) znajdzie czytelnik obszerne wiadomości o każdej z tych trzech metod.

[2]) Jeśliby jednak dowód znaleziony przez czytelnika był prostszy, np. czytelnikowi zdawałoby się, że jakaś część dowodu podanego w podręczniku jest zbyteczna, to w takim razie należy przypuszczać, że znaleziony dowód czytelnika jest nieścisły, i że czytelnik nie orjentuje się w wymaganiach ścisłości. Nad takim miejscem tedy powinien się bardzo zastanowić i także porównać je z innemi podręcznikami, których ścisłość nie ulega wątpliwości.

się nie uda, lub trudność leży gdzieindziej, np. czytelnik nie może zrozumieć któregokolwiek określenia, to należy poszukać odpowiedniego miejsca w innym podręczniku, pisanym tą samą lub bardzo zbliżoną metodą i o podobnym układzie (bo w innym nie znajdzie i nie zrozumie odpowiedniego miejsca), ale łatwiej. Jeżeli i to nie pomoże, a niema nikogo, ktoby pomógł i objaśnił, to trzeba czytać pomimo niezrozumienia dalej i dopiero, gdy po dłuższym studjowaniu czytelnik przyzwyczai się do sposobu myślenia napotkanego w danym podręczniku, wrócić do poprzednio niezrozumianego miejsca. Poza tym wyjątkiem nie należy nic czytać, czego się dokładnie nie rozumie.

10. Uwagi powyższe, a zwłaszcza ostatnia, stosują się również do słuchania wykładów. Gdy kto ma możność słuchania ludzi, posuwających naukę naprzód, nie należy tej sposobności zaniedbywać [1]). Jednak należy pamiętać, że wykłady nie mogą zastąpić książki i trzeba je uzupełnić czytaniem podręczników. Na wykładzie bowiem wskutek nieuwagi wiele rzeczy się opuści, źle zanotuje i t. d. Jeśli przytym ma się wrażenie, że się łatwo zrozumiało, to właśnie często dlatego, że trudniejsze i mniej zrozumiałe miejsca zaraz się zapomina. Chcąc więc słuchać wykładu matematycznego z korzyścią, trzeba poświęcić mu dużo czasu i dlatego nie należy słuchać więcej nad dwa większe [2]).

11. Aby posiąść nietylko surową wiedzę, lecz i głębsze zrozumienie przedmiotu, a szczególniej, aby rozwinąć swe zdolności do pracy samodzielnej, należy i przy przyjmowaniu wiedzy być więcej czynnym, niż biernym. Więc najprzód:

a) przerabiać ćwiczenia i zadania, zawarte w podręczniku lub w oddzielnych zbiorach;

---

[1]) O ewentualnym wyborze uniwersytetu p. Dział informacyjny. Samoukom w ściślejszym znaczeniu tego słowa polecalibyśmy korzystać z każdej sposobności słuchania wykładów, nie lekceważąc i niewybitnych prelegentów, gdyż będą one bodźcem do pracy. Mamy tu na myśli różne kursy wakacyjne i t. p.

[2]) Jest to zalecane studentom przez profesorów uniwersytetów niemieckich; porówn. »Ratschläge u. Erläuterungen für die Studierenden d. Mathematik und Physik a/d. Univ. Göttingen«. Lipsk, Teubner.

b) streszczać piśmiennie przeczytane rozdziały podręcznika oraz powtarzać dowody twierdzeń z pamięci, (co nie znaczy uczyć się ich na pamięć!) Streszczanie mamy na myśli bardzo zwięzłe, zawierające tylko punkty wytyczne, zasadnicze linje rozwoju myśli całego rozdziału, a także dowodów najważniejszych, podstawowych twierdzeń. Przy używaniu dwu podręczników należy porównywać różnicę w biegu myśli — inaczej różnica między podręcznikami, zamiast przynieść korzyść i pomóc do głębszego zrozumienia, stworzy tylko chaos w umyśle czytelnika;

c) przy bardziej abstrakcyjnych teorjach dobierać przykłady, ilustrujące teorję i sprawdzać na nich ciekawsze twierdzenia, aby dokładniej zrozumieć ich treść.

To jest najmniejszy stopień samodzielności, jakiego trzeba wymagać od każdego uczącego się matematyki.

Pożądanym jest bardzo — a powinno to być dostępne dla każdego, kto chce się matematyce specjalnie poświęcić — rozwiązywanie wymyślonych przez samego siebie zadań, oraz — lepiej jeszcze — dowodzenie drobnych twierdzeń, bądź analogicznych do twierdzeń przeczytanych, bądź będących ich uzupełnieniem. Warto np. zastanowić się, jak się sformułuje twierdzenie ogólne w zastosowaniu do szczególnego przedmiotu, a więc np. jaką przybierze formę jakieś ogólne twierdzenie o stożkowych dla paraboli, koła, hiperboli i t. d., czyli, zakładając między wchodzącemi do twierdzenia wielkościami dowolnemi (a, b, $c \ldots h$) pewne związki w kształcie równości lub nierówności, np. $a = o$, $a = b$, $a + b + c + \ldots + h < 0$. W pewnych razach takie badanie jest bardzo proste — sprowadza się do t. zw. dyskusji rozwiązania; w innych można, badając głębiej, znaleźć jakiś ciekawy rezultat, niewidoczny wprost z ogólnego wzoru. Twierdzenia te nie będą miały najczęściej żadnej wartości naukowej, ale ich znajdywanie ma wielką wartość jako ćwiczenie. Wreszcie dobrze jest zastanawiać się nad wypadkami, stanowiącemi wyjątki z ogólnych twierdzeń (np. wśród stożkowych: do koła nie stosuje się twierdzenie o kierownicy, do paraboli — o istnieniu środka), w szczególności nad tym, co się staje z ogólnym twierdzeniem przy zastosowaniu do t. zw.

wypadków zwyrodnienia, np. rozważając parę prostych, jako specjalny wypadek stożkowej [1]).

Dobrym ćwiczeniem (głównie w analizie i teorji mnogości) jest również wynajdywanie przykładów na różne osobliwości: znaleźć przykład funkcji w jednym tylko punkcie ciągłej i t. p.

Do trudniejszych trochę ćwiczeń należy szukanie na znane twierdzenia innych dowodów, niż podane w podręczniku. Dalej polecamy bardzo takie postępowanie: po przeczytaniu pewnej części podręcznika, gdy czytelnik oswoił się już z używanemi w tym dziale matematyki metodami dowodzenia, czytać tylko wysłowienie twierdzenia, poczym odkładać książkę i próbować dowieść je samemu.

Wszelkie takie ćwiczenia należy prowadzić dopóty tylko, póki one nastręczają jakąś trudność. Z chwilą, gdy się tak już opanuje metodę, że rozwiązywanie zadań i dowody łatwiejszych twierdzeń nie nastręczają trudności, należy zaniechać tych ćwiczeń i stawiać sobie trudniejsze zagadnienia. Takiemi mogą być np. próby uogólnień znanych twierdzeń lub opracowanie jakiegoś zagadnienia analogicznego do podanego w podręczniku, lecz trudniejszego. Biorąc znów przykład z gieometrji analitycznej, takim zagadnieniem może być dla znającego teorję stożkowych: zbadanie jakiejś innej grupy analogicznych figur gieometrycznych, np. krzywych rzędu 3-go (najlepiej nie ogólnych, lecz jakiegoś prostszego typu), albo krzywych na kuli np. stożkowych [2]), albo powierzchni drugiego rzędu, np. ograni-

---

[1]) To właśnie rozważanie wypadków, stanowiących wyjątki, jest według MINKOWSKIEGO (matematyk niemiecki, 1864—1909) najpewniejszą drogą, prowadzącą do nowych odkryć (MINKOWSKI, Vorlesungen über Variationsrechnung, Gietynga; wykłady pisane na maszynie, str. 138: »Es ist überhaupt immer der sicherste Weg, um zu neuen Theorien zu gelangen, dass man vor allem die Grenzfälle der Problemstellungen ins Auge fasst und ihr Wesen klarlegt«.

[2]) Na to ćwiczenie zwracamy uwagę, gdyż zorjentowanie się w gieometrji na kuli jest pożyteczne w dalszych studjach. Zadanie to należy do łatwiejszych i daje się w zupełności rozwiązać metodami gieometrji płaskiej; z trygonometrji kulistej wystarczą do tego badania naj-

czając się do posiadających środek: $Ax^2+By^2+Cz^2=0$ lub lepiej — gdy czytelnik zna już gieometrję analityczną trójwymiarową — gieometrycznych figur w 4-ch wymiarach: Ax^2+By^2+ $+Cz^2+Dw^2=0$ [1]).

Tak samo łatwo o opanowanie metody i o proste zagadnienia np. w teorji liczb.

Przy przeprowadzaniu takich badań bardzo często okaże się, że postawione zagadnienie znanemi metodami rozwiązać się w zupełności nie da; ale to nic nie szkodzi: czytelnik zobaczy, jakie przy tym napotyka się trudności. To będzie dla niego także cennym poznaniem: zrozumie potrzebę nowych metod.

Jedno tylko: matematyk nie powinien nigdy mówić sobie: »dla mnie za wcześnie jeszcze na taką samodzielność: dopiero później, gdy będę więcej umiał, będę sam znajdywał twierdzenia i dowodził je«. Kto nie umie od samego początku

---

pierwsze wzory. Wiadomości o gieometrji na kuli można znaleźć w podręczniku:

R. Heger, Analytische Geometrie auf der Kugel. Samml. Schubert, LIV. Lipsk, 1908, str. 152. Cena m. 4.80, albo:

Urysz, Analityczna geometrya na kuli. Stanisławów. Program gimnaz., 1883.

Także w Trygonometryi prostolinijnej i sferycznej G. H. Niewęgłowskiego (Paryż, 1870) jest rozdział poświęcony gieometrji na kuli. Jednak mamy tu na myśli, mówiąc o zajęciu się gieometrją na kuli, nie uczenie się jej, lecz ćwiczenia z jej zakresu, przez które czytelnik lepiej ją opanuje w potrzebnym mu stopniu.

[1]) Także bardzo pożądane ze względu na dalsze studja, a zupełnie łatwe (przygotowanie to samo, co do gieometrji analitycznej płaskiej) jest napisanie sobie gieometrji analitycznej figur linjowych, (tj. prostej i płaszczyzn dwu-, trój-, ..., $(n-1)$-wymiarowej) w przestrzeni n-wymiarowej. Należy tylko badanie to przeprowadzić metodą czysto analityczną. określając z góry płaszczyznę $(n-1)$-wymiarową, jako równanie

$$A_1x_1+A_2x_2+\cdots+A_nx_n=0$$

a płaszczyznę $(n-k)$-wymiarową, jako przecięcie k płaszczyzn $(n-1)$-wymiarowych, (w szczególności prostą jako przecięcie $(n-1)$ takich samych płaszczyzn); wreszcie odległość dwu punktów $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ i $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ jako

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

(por. rozdział Gieom. analit.).

nauki, już na stopniu II-im nawet, rozwiązywać samodzielnie zagadnień i samodzielnie ich sobie stawiać, ten — zazwyczaj — i później tego nie potrafi. Wprawdzie, dopiero gdy pozna metody, pojęcia i całe bogactwo matematyki dzisiejszej, oraz jej ducha — te zagadnienia i otrzymane przezeń rezultaty będą mogły posiadać wartość naukową: przedtym są one tylko ćwiczeniem, lecz ćwiczeniem koniecznym, jako przygotowanie do twórczej pracy.

12. Przy nauce gieometrji przestrzennej pewne znaczenie mają modele. W wielu uniwersytetach istnieje zbiór modeli przy seminarjum matematycznym. Opis różnych modeli zawiera książka:

W. v. Dyck, Katalog mathematischer Modelle, Apparate und Instrumente. Monachjum, 1892/1893.

W książce tej znajduje się również opis różnych przyrządów matematycznych, od maszyn do wykonywania działań arytmetycznych do maszyn całkujących i rozwiązujących równania algiebraiczne. Przyrządy te dla matematyków czystych nie mają znaczenia; potrzebne mogą być tylko przy zastosowaniach matematyki, gdzie chodzi o odnalezienie przybliżonych wartości liczebnych. Można się o nich poinformować z tomu I Repertoryum matematyki wyższej E. Pascala (rozdz. XXIII; tłum. polskie str. 529—539), tam podana jest i literatura przedmiotu. Przytoczymy tu tylko najnowszą książkę z tego zakresu:

H. de Morin, Les appareils d'intégrations, intégrateurs simples et composés, planimètres, intégromètres, intégraphes et courbes intégrales, analyseurs harmoniques. Paryż, 1913. Cena fr. 5.

13. Ze względu na twórczość pracy nastręczają się uwagi, dotyczące ilości czytania; pierwsza: nie czytać więcej, niż można strawić. Kto będzie czytał w związku ze wskazanemi wyżej ćwiczeniami, ten będzie pewny, że wchłaniane wiadomości dobrze przetrawi. Lecz i to ograniczenie często nie wystarcza: i przetrawione wiadomości mogą być dla rozwoju naszego szkodliwe. Mianowicie należy przerwać czytanie, gdy rodzą się w nas jakieś pomysły, zaczyna coś kiełkować; wtedy trzeba ciszy i spokoju i nie można ich przygłuszać poznawaniem bardziej wyrobionych teorji cudzych, dopóki nasze pomysły nie dojdą do tego stopnia jasności i rozwoju, że bądź nie grozi im zanik przy spotkaniu z obcemi, bądź przekonamy się, że są bez wartości. Ale choć one najczęściej nie będą miały wartości naukowej, to jednak należy uszanować rozwój własnych idei, takich, jakiemi są, i wchłanianiem w siebie nadmiernej ilości obcych pierwiastków (im gienjalniejszych i piękniejszych — tym w takich chwilach niebezpieczniej) nie zabijać w zarodku rozwoju swej indywidualności naukowej [1]).

Wtedy to należy szczególniej poświęcić czas nasuwającym się nam zagadnieniom. Naturalnie należy strzec się i drugiej skrajności: obracania się ciągłego w kole własnych tylko idei. Gdy one są już jasne, uświadomione przez nas w ogólnych zarysach, trzeba je porównać z pomysłami innych i dopiero, gdyśmy się przekonali, że i nasze pomysły są coś warte, badać je dalej w oświetleniu otrzymanych już przez matematykę rezultatów, w związku z niemi. Nie można przeżuwać wciąż tego samego.

14. Dalej nasuwa się jeszcze pytanie: jaki należy zachować stosunek między rozszerzeniem a pogłębieniem swych wiadomości? Jak dalece można posunąć rozszerzenie wiadomości na coraz nowe dziedziny bez obawy rozproszenia się? jak daleko można oddać się pogłębianiu specjalnego zagadnienia bez obawy ciasnej jednostronności? Naszym zdaniem rozproszenia się w matematyce nie ma co się obawiać [2]) — o wiele więcej obawiać się trzeba ciasnoty. Szkodliwym jest tracenie

---

[1]) Minkowski wypowiedział w swej mowie »Peter G. L. Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik« następujące słowa:

»Sie [Mathematiker in jungen Jahren] blicken in vielen Dingen weniger voreingenommen. Es trägt jeder mathematische Soldat den Marschallstab im Tornister, wenn er nicht aus purer Disziplin auf alles Vorhandene schwört«. (Oni [matematycy w młodych latach] patrzą na wiele rzeczy mniej uprzedzeni. Każdy szeregowiec matematyczny niesie laskę marszałkowską w ładownicy, jeżeli nie przysięga z samej tylko dyscypliny na wszystko, co istnieje).

[2]) Mówimy tu o studjowaniu, nie zaś o pracy autorskiej.

czasu na studja bezwartościowych zagadnień, na powierzchowne czytanie, z którego nic nie pozostaje, lub zaczynanie nauki różnych teorji i urywanie studjów nad każdą przed uzyskaniem jakiejkolwiek całości [1]); głębsze jednak studjowanie wartościowej pracy, choćby w zupełnie innej gałęzi, zawsze da korzyść i dla ściślejszej specjalności. W matematyce bowiem wszystko tak się ze sobą łączy, że aby wniknąć dobrze w jedno zagadnienie, niedość znać je samo szczegółowo, trzeba także mieć szeroki, rozległy horyzont, by widzieć, jakie miejsce zagadnienie to zajmuje w całości nauki i w jakich pozostaje związkach z innemi, często napozór krańcowo odległemi, jej dziedzinami. Najgłębsze, najistotniejsze prawa matematyki kryją się w ogólnych jej prawidłowościach, a nie w bogactwie szczegółów, i poznanie, zrozumienie pierwszych właśnie prowadzi do wielkich epokowych odkryć w matematyce.

I specjalizacja jednak — będąca dla pracy twórczej *conditio sine qua non* — posiada też doniosłe kształcące znaczenie, o ile będzie dobrze zrozumiana. Powinna ona polegać na pogłębieniu jakiegoś jednego obranego zagadnienia i to przez czytanie głównie oryginalnych artykułów, do których zwykle podręczniki bardziej specjalne same odsyłają: nie można bowiem iść ciągle na pasku podręczników, w których przytym zacierają się linje właściwego (historycznego) rozwoju teorji. Przedewszystkim jednak koniecznym tu jest własne przemyślenie kwestji. Trzeba zaś unikać dążenia do erudycji, do poznania wszystkiego (choćby w najciaśniejszym zakresie) bez względu na wartość [2]), bo ten balast może przynieść więcej szkody, niż pożytku; to właśnie byłaby źle zrozumiana specjalizacja.

---

[1]) »Całości« nie należy tu rozumieć, jako całej książki; często właśnie może być poleconym przeczytanie, zamiast krótkiego podręcznika, paru pierwszych rozdziałów większego dzieła (w takim przedmiot jest zazwyczaj traktowany głębiej).

[2]) Z wyjątkiem przypadku, gdy się ogłasza coś drukiem: wtedy należy do obowiązku autorskiego przejrzeć (ale tylko przejrzeć) możliwie wszystko, co napisano o tym samym zagadnieniu, o tyle, by się przekonać, czy nasze rezultaty nie są już znane.

Taką specjalizację — pogłębianie jednego zagadnienia ze źródeł oryginalnych — można zacząć dość wcześnie, przed ukończeniem planu ogólnego wykształcenia matematycznego; nie należy się tylko spieszyć z jej prowadzeniem (przez szkodliwe dążenie do prędkiego publikowania) [1]).

15. Przy wyborze zagadnień, chcąc się ustrzec takich, które nie mają znaczenia naukowego lub je dzisiaj straciły, dzięki nowym ogólniejszym teorjom i lepszym metodom, należy unikać starych źródeł. Specjalnie w naszych warunkach powinniśmy bardzo na to zwracać uwagę, gdyż będąc oddalonemi od ognisk dzisiejszego ruchu naukowego, oddychamy w atmosferze czasów minionych.

Z zakresu analizy wyższej możemy specjalnie polecić, jako wierne odbicie tego, o czym dzisiejsi matematycy myślą i co robią, książki zbioru E. Borela [2]). Każda z tych małych książek zajmuje się jednym specjalnym zagadnieniem z teorji funkcji analitycznych lub funkcji zmiennych rzeczywistych, ważnym dla dzisiejszego rozwoju matematyki. Z małemi wyjątkami dają się one czytać niezależnie od siebie i wymagają wogóle niewielkiego przygotowania: najczęściej wystarczy znajomość grup *a* i *b*, (p. wyżej str. 124) i ogólnej teorji funkcji analitycznych; jednak wymagają pewnego już wyrobienia matematycznego. Traktowane zagadnienia są w nich doprowadzone do ostatniego punktu

---

[1]) Taką specjalizację można zacząć po jakichś 3 latach studjów (zależy to od tego, jakiego przygotowania wymaga obrane zagadnienie). Ogólne wykształcenie, objęte podanym wyżej planem, zajmie od 3 do 6 lat, zależnie szczególniej od tego, jakie sobie stawiamy wymagania w każdym z wymienionych w planie działów. Lepiej jednak i na tym planie nie poprzestawać: specjalizację ostateczną, konieczną do pracy twórczej, łatwo uskutecznić potym, gdy się zna gruntownie klasyczne teorje matematyki, w przeciągu 1—2 lat. Mówimy tu jednak zawsze o specjalizacji w zakresie jednego wybranego, zupełnie określonego zagadnienia, a nie jednej, choćby i drobnej gałęzi matematyki.

[2]) Collection des monographies sur la théorie des fonctions, wydawane pod redakcją E. Borela. Paryż, Gauthier-Villars. Większość napisana przez samego Borela, prof. uniwersytetu w Paryżu (Sorbony); obejmują od 100 do 180 stronic każda, cena 3.50 lub 4.50 fr. Wyszło dotąd 17.

rozwoju i pomnożone własnemi badaniami autorów. Na zaznaczenie zasługują w tych monografjach liczne uwagi krytyczne i historyczne; w niektórych z nich wykład jest historyczny.

Podobne zadanie spełniają litografowane wykłady F. KLEINA, profesora z Gietyngi, z różnych dziedzin gieometrji i analizy. Nie są one nowe, więc nie doprowadzają nas do ostatniej chwili, ale są zawsze bardzo cennemi podręcznikami. Dzięki wielkiej ilości zawartych w nich uwag, dotyczących przeszłości i przyszłości traktowanego zagadnienia, nowym pomysłom, rzuconym przez tego wielkiego uczonego, służyć mogą czytelnikowi do zorjentowania się wśród dróg, któremi idzie rozwój matematyki i pomóc do wybrania sobie własnej drogi [1]).

16. Do znalezienia literatury obranego określonego zagadnienia służyć może

E. PASCAL, Repertoryum matematyki wyższej, tłum. polskie (z włoskiego) S. DICKSTEINA.

T. I. Analiza. Warszawa, 1900, str. XIII+556. Cena 4 r.

T. II. Geometrya. Warszawa, 1901, str. X+728. Cena 5 r.

Jeśli jednak chodzi nietylko o literaturę, lecz i o poinformowanie się rzeczowe o przedmiocie, to należy posługiwać się zupełnie przerobionym 2-im wydaniem tłumaczenia niemieckiego

---

[1]) Wspomnimy tu jeszcze o dwu zbiorach monografji, które zaczęły wychodzić w Niemczech. Są to:

Fortschritte der Mathematischen Wissenschaften in Monographien. Wydawane przez O. BLUMENTHALA. Lipsk, Teubner. Dotąd wyszły 2 tomy.

Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen. Lipsk, Teubner. — Dotąd wyszło 5 tomów.

Pierwszy zbiór, a w części i drugi, zbliża się charakterem swym do zbioru BORELA. W porównaniu z ostatnim są one mniej jednolite i mają obszerniejszy zakres, obejmujący całą matematykę i nauki fizyczne.

Tu wreszcie należy wymienić: E. PICARD, Traité d'Analyse (4 tomy). Wartościowe to dzieło traktuje o zagadnieniach z różnych działów analizy, podając ostatnie wyniki badań, dzięki czemu może być również wzięte za punkt wyjścia do specjalizacji. Można w nim czytać wiele rozdziałów ze środka, nie czytając poprzednich; różne rozdziały wymagają różnego stopnia przygotowania.

w czterech częściach, z których jednak wyszły dopiero dwie (I 1 i II 1):

E. Pascal, Prof. an der Universität zu Neapel, Repertorium der höheren Mathematik; zweite völlig umgearbeitete Auflage der deutschen Ausgabe, unter Mitwirkung zahlreicher Mathematiker, herausgegeben von P. Epstein und H. E. Timerding. Lipsk, Teubner, 1910.

Erster Band (Analysis), erste Hälfte: Algebra, Differential und Integralrechnung; str. XV+527. Cena m. 10.

Zweiter Band (Geometrie), erste Hälfte: Grundlagen und ebene Geometrie; str. XVI+534. Cena m. 10.

Wyczerpujących wiadomości i danych bibljograficznych szukać należy w dziele:

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgegeben im Auftrage der Akademieen der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden. Lipsk, Teubner.

Wychodzi zeszytami; w całości wyszły dopiero tomy: I_1 i I_2 (Arithmetik und Algebra), oraz IV_1 i IV_3 (Mechanik).

Lepiej jeszcze posługiwać się wydaniem francuskim tejże encyklopedji:

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées i t. d. Édition française, redigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de J. Molk. Paryż, Gauthier-Villars — Lipsk, B. G. Teubner.

Jest ono nowsze i znacznie powiększone. Niestety niewiele dotąd wyszło zeszytów.

Innym rodzajem encyklopedji jest:

G. Peano. Formulaire mathématique. Turyn.

W dziele tym autorzy, posiłkując się ideografją logistyki (bez używania w tekście twierdzeń języka zwykłego), w sposób bardzo zwięzły podają zbiór twierdzeń z różnych dziedzin matematyki. Obok tego Formulaire zawiera dużo danych historycznych i bibljograficznych.

Sprawozdania z bieżącej literatury matematycznej podają:

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von E. Lampe. Berlin.

Rocznie wychodzi tom o przeszło 1000 stronicach; zawiera kompletny spis literatury matematycznej wszystkich krajów wraz ze sprawozdaniami za rok, o trzy lata poprzedzający rok wydania rocznika [1]).

Bulletin des Sciences mathématiques, redagowany przez G. Darboux i J. Tannery. Cena roczna 20 fr. Paryż, Gauthier-Villars.

Sprawozdania mniej kompletne i mniej regularne.

Revue semestrielle des Publications mathématiques. Lipsk, Teubner, rocznie m. 7.

Wiadomości nowsze, lecz sprawozdania krótsze.

International Catalogue of Scientific Literature. — A. Mathematics. — Published for the International Council by the Royal Society of London. Londyn. 15 szyl. rocznie.

Jest to tylko katalog; recenzji nie zawiera żadnych. Składa się z dwu części: Authors Catalogue i Subject Catalogue. Pierwsza zawiera spis dzieł, uporządkowany alfabetycznie według nazwisk autorów; druga podaje spis tych samych dzieł, uporządkowany według treści przy pomocy klasyfikacji dziesiętnej. Objaśnienie i skorowidz do tej klasyfikacji w czterech językach (angielski, francuski, niemiecki, włoski). Podana ilość stronic każdej pracy. Wychodzi tomami rocznemi.

Katalog literatury matematycznej polskiej wydaje od r. 1901 Akademja Umiejętności w Krakowie p. t.:

Katalog literatury naukowej polskiej, wydawany przez Komisyę Bibliograficzną Wydz. Matem.-Przyrod. Akad. Um. w Krakowie.

Rzeczowe (t. j. uporządkowane według działów) katalogi wyboru literatury, zarówno książek, jak i artykułów z pism, zawierają:

F. Müller. Führer durch die mathematische Literatur mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften. Lipsk, Teubner, 1909; str. X+252. M. 7, opr. 8.

E. Wölffing. Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichniss der wichtigsten deutschen u. ausländischen Lehrbücher u. Monographien des XIX Jahrh. Cz. I. 1903; str. 416. Cena m. 14. (Cz. II w przygotowaniu).

Wiadomości bardziej praktycznej natury, potrzebne do studjów, znajdzie czytelnik w Dziale Informacyjnym.

---

[1]) Można z niego powziąć wyobrażenie o ilości publikacji matematycznych: w ostatnich rocznikach sam spis tytułów prac z czystej matematyki obejmuje w każdym tomie około 40 stronic (do 2000 tytułów).

GIEOMETRJA ANALITYCZNA [1]).

OPRACOWAŁ

S. KWIETNIEWSKI.

Treść: 1. Materjał. 2. Pochodzenie gieometrji analitycznej. 3. Spółrzędne Kartezjusza. 4. Spółrzędne ogólne. 5. Metoda gieometrji analitycznej. 6. Klasyfikacja. 7. Wymagane przygotowanie. 8. Zastosowania. 9. Wskazówki bibljograficzne dla studjujących.

---

1. Gieometrję analityczną charakteryzuje nie tyle materjał rozpatrywany lub zagadnienia przez nią rozwiązywane, ile raczej metoda, którą się ta gałąź matematyki posługuje. Przedmiotem badań są tutaj własności figur, utworzonych z elementów gieometrycznych: punktu, prostej i płaszczyzny oraz ich części. Figury te występują bądź jako zbiór elementów stałych, bądź jako miejsce gieometryczne elementu zmiennego.

Pojęcia empiryczne punktu, linji, powierzchni i t. d. mogą być wyrugowane z gieometrji analitycznej i zastąpione przez

---

[1]) Układając porządek oddzielnych artykułów Stopnia III kierowaliśmy się względami następującemi: *a*) wzrastającą trudnością odpowiednich działów oraz samych artykułów, *b*) do pewnego stopnia wenętrznym związkiem tych ostatnich. Oczywiście porządek ten czytelnika nie obowiązuje (o porządku studjów por. Wstęp do Stopnia III, str. 124—125). Kto chce odrazu przystąpić do analizy, może pominąć artykuły o gieometrji analitycznej i rzutowej (z wykreślną). Kogo interesuje raczej gieometrja, może po przeczytaniu artykułów: Gieom. analit., syntetyczna (z wykreślną), Arytmetyka, Teorja mnogości, Teorja funkcji zmien. rzeczywistej i Rachunek różniczkowy i całkowy — przejść do artykułów: Gieom. różniczkowa, Topologja i Podstawy gieometrji.

Artykuły: Rachunek prawdopodobieństwa, Logistyka i Zagadnienia filozof. matematyki mają luźniejszy związek z całością.

pewne układy liczb[1]); w ogólnych podręcznikach gieometrji analitycznej pojęcia te bywają jednak zachowane, natomiast u ż y w a m y liczb w celu wyznaczania położenia pewnych elementów lub tworów gieometrycznych względem innych, i to właśnie stanowi jedną z głównych cech gieometrji analitycznej.

Przedmioty i środki badania gieometrji analitycznej elementarnej pochodzą więc z matematyki elementarnej: gieometrji, arytmetyki i algiebry; pojęć obcych nie wprowadza się tu zupełnie. Fakty i pojęcia, leżące poza obrębem matematyki (oprócz tych, które występują już w gieometrji elementarnej) mają tu wpływ jedynie o tyle, że dają podnietę do prowadzenia badań abstrakcyjnych w pewnym oznaczonym kierunku. Bezpośrednie dostarczanie nowego materjału gieometrji analitycznej elementarnej pod postacią empirycznych tworów gieometrycznych nie da się wykazać. Wprawdzie ruchy i postaci ciał spotykanych w przyrodzie mogłyby dostarczyć takiego materjału, do którego opracowania metody gieometrji analitycznej są odpowiednie i wystarczające; ale w rzeczywistości albo badania teoretyczne poprzedziły empiryczne zaznajomienie się z tworem gieometrycznym (np. parabola jako tor kamienia rzuconego ukośnie, elipsa jako tor planety, hiperbola jako wyobrażenie graficzne prawa Mariotte'a), albo też badania tworów empirycznych, jako zbyt specjalne, wytworzyły nową gałąź wiedzy (przykład: krystalografja).

Gieometrja analityczna w szerszym znaczeniu (nietylko elementarna) posiłkuje się w niektórych zagadnieniach pojęciami empirycznemi. Np. można z powodzeniem wprowadzać środek ciężkości przy dowodzeniu niektórych twierdzeń gieometrycznych; spółrzędne krzywolinjowe wprowadzone zostały w celu badań z zakresu fizyki teoretycznej.

2. Podnietę, jaką gieometrja analityczna otrzymała z ze-

---

[1]) Naprzykład: »Niech będą $x, y, \ldots$ wielkościami zmiennemi; nazywamy punktem układ wartości jednoczesnych $a, b, \ldots$ nadanych tym zmiennym«. (C. Jordan, Cours d'analyse, Paryż, 1893). Wogóle w nowszych czasach występuje wyraźna tendencja oderwania gieometrji od pojęć empirycznych; por. Podstawy Gieometrji.

wnątrz, łatwo wykazać. Głównym zagadnieniem, które przyczyniło się do jej rozwoju i które dziś jeszcze stanowi najważniejszy rozdział wykładu elementarnego, jest badanie przecięć stożkowych. Znane one były starożytnym Grekom jako linje przecięcia stożka z płaszczyzną (własności ogniskowe odkryte zostały później). Na zainteresowanie temi linjami wpłynęła niemało ta okoliczność, że pewne zadania, które wielu matematyków usiłowało rozwiązać, prowadziły do wykreślania przecięć stożkowych. Jednym z bardziej znanych takich zadań jest zadanie podwojenia sześcianu. Zadanie wymaga znalezienia krawędzi sześcianu, którego objętość jest dwa razy większa od objętości sześcianu, mającego krawędź daną, czyli podług dzisiejszej pisowni rozwiązania równania:

$$x^3 = 2a^3.$$

To zadanie udało się Grekom sprowadzić do wyznaczenia punktów przecięcia dwu przecięć stożkowych (Menechmos, wiek IV przed Chr.).

Z przykładu tego widać zależność wzajemną pomiędzy rachunkiem a tworami gieometrycznemi. Zadanie stereometryczne wyraża się za pomocą równania algiebraicznego; równanie to rozwiązuje się za pomocą rysunku.

Matematycy greccy posiłkowali się przy badaniu przecięć stożkowych metodą mało różniącą się, pod względem gieometrycznym, od obecnej [1]): układ spółrzędnych równoległych występuje tu dość wyraźnie, brakuje jednak jeszcze algiebry. Znaczniejszy postęp w tym względzie, jak wogóle w matematyce, przejawia się dopiero w początkach wieku XVII. I tutaj nie brakło bodźców zewnętrznych do dalszych badań przecięć stożkowych, np. odkrycie, że podług tych linji poruszają się planety dokoła słońca.

Na pierwszy plan w badaniach przecięć stożkowych metodą analityczną wysuwa się Descartes (Kartezjusz), którego sposób traktowania, zarówno algiebry jak gieometrji analitycznej, utrzymał się z niewielkiemi stosunkowo zmianami do naszych czasów.

---

[1]) Np. F. Schur. Podręcznik gieometrji analitycznej. Wstęp.

3. Kartezjusz wyznacza położenie punktu na płaszczyźnie względem dwu prostych danych za pomocą dwu odcinków, przechodzących przez ten punkt równolegle do prostych danych i zawartych między punktem i prostemi.

Te odcinki (lub częściej liczby wyrażające ich długości) noszą miano *spółrzędnych*. Proste dane nazywają się *osiami spółrzędnych*. W ten sposób powstało podporządkowanie jednoznaczne pomiędzy punktami płaszczyzny i parami liczb: każdemu punktowi odpowiadają dwie liczby (długości spółrzędnych); każdej parze liczb odpowiada pewien punkt, ten mianowicie, którego spółrzędne mają długości wskazane przez te dwie liczby.

Jeżeli punkt porusza się na płaszczyźnie, opisując linję krzywą, wówczas wielkości obu spółrzędnych ulegają zmianie; każdej wartości jednej z nich odpowiada jedna lub kilka wartości drugiej; mówimy, że jedna zmienia się w zależności od drugiej; zależność tę możemy wyrazić za pomocą równania, zawierającego dwie zmienne. Linje krzywe otrzymują więc pewne równanie; odwrotnie, równanie z dwiema zmiennemi można ilustrować na płaszczyźnie za pomocą linji krzywej lub prostej. Równanie stopnia 1-go odpowiada linji prostej; równanie stopnia 2-go przecięciom stożkowym; równania algiebraiczne wogóle odpowiadają linjom, które otrzymały miano *algiebraicznych* (określenie gieometryczne tych linji podał Grassmann)[1]; inne krzywe otrzymały miano *przestępnych* (np. sinusoida, przedstawiająca zmienność wstawy w zależności od długości łuku; równanie jej jest: $y = \sin x$).

Przez wprowadzenie trzeciej osi, nie leżącej na płaszczyźnie dwu pierwszych, osiągnięto układ spółrzędnych dogodny do badania figur przestrzennych.

4. Jak widzimy, metoda spółrzędnych Kartezjusza da się zastosować do bardzo różnorodnych zagadnień gieometrycznych, ale metoda ta może być uogólniona przez wprowadzenie no-

---

[1]) H. Grassmann. Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Curven; mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse, Journal für Mathematik, tom 36, str. 111—132, r. 1846.

wych układów spółrzędnych, odpowiednio do celów, którym mają służyć. Dziś określamy w ogólności **spółrzędne** jako **liczby, za pomocą których oznacza się pewien twór gieometryczny względem innych tworów zasadniczych, stanowiących** *podstawę spółrzędnych.*

Za podstawę spółrzędnych punktu na płaszczyźnie można np. przyjąć jakikolwiek trójkąt, za spółrzędne odległości punktu od trzech jego boków, lub wielkości do nich proporcjonalne (*spółrzędne trójkątowe*). Jeżeli jeden z boków trójkąta leży w nieskończoności, układ ten zmienia się w kartezjuszowski. Odpowiednią podstawą spółrzędnych punktu w przestrzeni będzie czworościan.

Często używane *spółrzędne biegunowe* wyznaczają położenie punktu na płaszczyźnie za pomocą jego odległości od punktu stałego (**bieguna**) zwanej **promieniem wodzącym** i kąta, który promień wodzący tworzy z prostą stałą przechodzącą przez biegun. Kąt ten XOP może być zmierzony długością łuku AQ koła, mającego środek w biegunie i promień równy jedności. Tym sposobem położenie punktu P wyznacza się za pomocą dwu długości: łuku AQ i odcinka OP. Koło i biegun stanowią podstawę spółrzędnych.

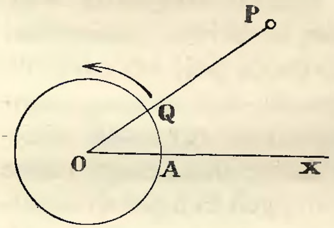


Fig. 17.

Jeżeli punkty rozpatrywane nie leżą na płaszczyźnie, lecz na powierzchni krzywej, wtedy dogodnie jest używać spółrzędnych krzywolinjowych. Znany powszechnie przykład takich spółrzędnych stanowią długość i szerokość gieograficzna na powierzchni kuli.

Jeżeli rozpatrujemy rozmaitość nie punktów, lecz innych tworów gieometrycznych — np. wszystkich prostych, leżących na płaszczyźnie danej, wszystkich kul w przestrzeni i t. p. wtedy dogodniej bywa zamiast spółrzędnych punktu wprowadzić spółrzędne tworów rozpatrywanych, t. j. wielkości, które w zupełności wyznaczają każdy twór poszczególny względem podstawy spółrzędnych.

Tak więc położenie każdej prostej, leżącej na płaszczyźnie danej, można wyznaczyć względem podstawy złożonej z dwu prostych przecinających się (osi Kartezjusza) za pomocą długości odcinków, które ta prosta odcina na osiach, mierząc od punktu wspólnego obu osiom. Te dwa odcinki możnaby było przyjąć za spółrzędne linji prostej; z pewnych względów rachunkowych bierzemy ich odwrotności ze znakami przeciwnemi (odcinki a, b, spółrzędne prostej $-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}$).

5. Wprowadzenie spółrzędnych daje nam możność zastąpienia w rozumowaniu elementów i figur gieometrycznych przez liczby i równania; badając równania, poznajemy własności figur; każdej czynności gieometrycznej (prowadzenie linji, wyznaczanie punktów przecięcia i t. d.) odpowiada pewne działanie rachunkowe. Na tym właśnie polega metoda gieometrji analitycznej. Tak np. dwu równaniom:

$$(1)\ a_1x + b_1y + c_1 = 0;\ (2)\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

odpowiadają dwie linje proste; wyznaczeniu ich punktu przecięcia odpowiada rozwiązanie tych dwu równań. Rzeczywiście, wartości x, y, czyniące zadość obu równaniom, są spółrzędnemi punktu leżącego zarówno na jednej jak i na drugiej prostej, a więc spółrzędnemi ich punktu przecięcia. Mnożąc jedno z równań przez jakąkolwiek liczbę n i dodając do drugiego, otrzymamy nowe równanie:

$$a_1x + b_1y + c_1 + n\ (a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

albo

$$(3)\ (a_1 + na_2)x + (b_1 + nb_2)y + c_1 + nc_2 = 0.$$

Temu równaniu odpowiada pewna prosta, przechodząca przez punkt przecięcia prostych danych, gdyż spółrzędne tego punktu muszą oczywiście spełniać to równanie. Przyjmując dla n wszelkie możliwe wartości, dostaniemy pęk prostych, mający wierzchołek w punkcie przecięcia prostych danych. Dwie z pośród prostych tego pęku zasługują na szczególną uwagę: jedna równoległa do osi rzędnych, której wszystkie punkty mają odciętą, równą odciętej wierzchołka pęku; druga równoległa do osi odciętych zawiera wszystkie punkty, których rzędne są równe rzędnej wierzchołka. Równania tych dwu prostych znajdziemy obierając *n* takie, ażeby w równaniu (3) spółczynnik odpowiednio przy *y*, lub przy *x*, stał się zerem. Rugowaniu niewiadomych z równań odpowiada więc wyznaczanie takich prostych pęku, które są równoległe do osi spółrzędnych.

6. Gieometrja analityczna w zakresie elementarnym opiera się wyłącznie na gieometrji elementarnej i na algiebrze elementarnej. Połączenie metod gieometrji analitycznej, gieometrji syntetycznej i analizy wyższej prowadzi do t. zw. gieometrji wyższej, czyli do gieometrji analitycznej w szerszym znaczeniu.

Wykład ogólny dzieli się na gieometrję analityczną płaską i gieometrję analityczną w przestrzeni i zawiera następujące ważniejsze rozdziały: spółrzędne równoległe, trójkątowe i biegunowe punktu i prostej; równania prostej i punktu, położenie wzajemne punktów i prostych; pęki promieni i szeregi punktów; własności przecięć stożkowych; układy przecięć stożkowych; odpowiednie zagadnienia z gieometrji przestrzeni.

Obszerniejsze podręczniki gieometrji analitycznej przeważnie zawierają ponad to teorję ogólną krzywych i powierzchni algiebraicznych, która wykracza poza zakres gieometrji analitycznej elementarnej, gdyż wymaga wiadomości o *pochodnych funkcji algiebraicznych* (p. rozdz.: Rachunek różniczkowy); inne potrzebne wiadomości o funkcjach algiebraicznych bywają zwykle w takich podręcznikach podawane.

Zagadnienia, które rozpatruje ogólna teorja krzywych algiebraicznych, polegają przeważnie na badaniu własności tych krzywych w związku z własnościami ich równań, wyrażonych w spółrzędnych trójkątowych. Równanie krzywej n^{go} rzędu przyjmuje postać równania, którego prawą stroną jest zero, lewą funkcja jednorodna n^{go} stopnia o trzech zmiennych, czyli forma trójkowa n^{go} stopnia. Badanie krzywych algiebraicznych n^{go} rzędu jest więc równoznaczne z badaniem form n^{go} stopnia o trzech zmiennych, przyczym własności form wyrażamy językiem gieometrycznym.

Np.: jeżeli forma jest przywiedlna, a więc może być przedstawiona pod postacią iloczynu *k* form stopnia niższego niż *n*, wówczas krzywa rozpada się na *k* krzywych rzędu niższego;

ilość punktów, potrzebnych do wyznaczenia krzywej ogólnej rzędu n^{go} jest równa ilości istotnych spółczynników formy stopnia n^{go}; punkty przecięcia i punkty wielokrotne krzywej danej $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ leżą na krzywej, której równanie otrzymamy, kładąc wyznacznik, $|f_{il}| = 0$, gdzie $f_{il} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l}$, $i, l = 1, 2, 3$.

O znaczeniu przekształceń w gieometrji patrz rozdział p. t. Teorja grup.

7. Z powyższego widać, z jakim przygotowaniem można rozpocząć naukę gieometrji analitycznej. Z gieometrji trzeba umieć kurs szkoły średniej, z algiebry zadowolić się można równaniami stopnia 1-go i 2-go z dwiema niewiadomemi (o wielkościach urojonych trzeba mieć pojęcie), jeżeli ktoś poprzestaje na przecięciach stożkowych i powierzchniach drugiego rzędu. Kto chce się zaznajomić pobieżnie z linjami krzywemi i powierzchniami algiebraicznemi stopni wyższych, musi znać prawie cały kurs szkoły średniej z pewnemi uzupełnieniami (postępy, kombinatoryka, wyznaczniki, pochodne funkcji algiebraicznych). Przy studjach dalszych potrzebne są niektóre wiadomości z algiebry wyższej, zwłaszcza *teorja niezmienników*.

Z trygonometrji trzeba mieć pojęcie o funkcjach i wzorach goniometrycznych oraz o rozwiązywaniu trójkątów.

Z uogólnień gieometrycznych, wychodzących poza zakres gieometrji elementarnej, uwzględnione zwykle bywają przy wykładzie, w mniejszym lub większym zakresie, elementy urojone; inne uogólnienia (gieometrja nieeuklidesowska i wielowymiarowa) nie bywają uwzględniane. Gieometrja analityczna *przestrzeni wielowymiarowej* traktowana bywa w oddzielnych podręcznikach i jako przygotowania wymaga znajomości przynajmniej początków gieometrji analitycznej płaskiej i przestrzeni.

8. Gieometrja analityczna jest niezbędna dla każdego zajmującego się matematyką wyższą; sama metoda spółrzędnych, zwłaszcza prostokątnych, ma zastosowanie prawie we wszystkich naukach, nawet w tych, które wogóle matematyki unikają i bywa często stosowana w życiu codziennym (por. Stopień II, przedstawienia graficzne). Metoda spółrzędnych stosuje się również przy graficznym rozwiązywaniu równań oraz, dla uła-

twienia wykładu, w rachunku różniczkowym. Inne działy matematyki (teorja funkcji, teorja liczb) nieraz korzystają z rezultatów osiągniętych w gieometrji analitycznej. Poza tym liczne zastosowania znajdujemy w mechanice analitycznej, astronomji, fizyce, chemji, krystalografji i innych pokrewnych naukach, przyczym nieraz stosuje się pojęcia przestrzeni wielowymiarowej. W nowej teorji elektrodynamicznej względności wprowadza się czas jako czwarty wymiar (H. Minkowski, Przestrzeń i czas. »Wiad. Mat.« XIII, 1909 str., 231—247).

---

9. *a)* Oprócz podręczników zupełnie elementarnych, podanych w Stopniu II, polecić można dla początkujących:

F. Schur. Podręcznik gieometrji analitycznej (z licznemi figurami) przełożył T. Łopuszański. Dzieła i rozprawy matem.-fizyczne wydane z zapomogi Kasy pomocy im. J. Mianowskiego. VI. Warszawa, 1901. T. I. Str. X+246. Cena 1 rb.

Treść: Od redakcji. Przedmowa autora. Wstęp. I. Gieometrja płaszczyzny. II. Gieometrja przestrzeni. — Książka pisana przystępnie i z dużą ścisłością, we wstępie zawiera wiadomości historyczne. Można ją polecić zwłaszcza tym, którzy interesują się stroną filozoficzną.

Z podręczników w językach obcych do przystępniejszych należą:

H. Ganter und F. Rudio, Die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene, 7 wyd. 1910, m. 3.

Punkt, prosta, koło, elipsa, hiperbola, parabola; dużo zadań.

F. Rudio. Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. 4 wyd. 1908, m. 3.

Obie te książki (stanowiące jedną całość) są bardzo łatwe, odpowiednie dla przyrodników i techników.

Dla techników przeznaczony jest również podręcznik:

O. Dziobek. Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Ebene. 1909 (2-e wyd.) m. 5. II. Raum. 1902, m. 5.

b) Podręczniki przeznaczone dla matematyków i fizyków. Dla lepszego ich zrozumienia pożądane jest uprzednie zaznajomienie się z gieometrją analityczną w zakresie Stopnia II lub przeczytanie jednej z książek, podanych pod *a)*, jak również znajomość rachunku różniczkowego i wyznaczników.

C. A. A. Briot et J. C. Bouquet. Leçons de géométrie analytique. 17 éd. par Appell. Paryż, 1900.

B. A. Niewenglowski. Cours de géométrie analytique. 3. P. I Sections coniques, 2-e éd. Paryż, 1911. Cena fr. 10. II Constructions des courbes planes. Compléments rélatifs aux coniques. 2-e éd. 1911, fr. 9. III. Géométrie dans l'espace avec une note de E. Borel sur les transformations en géométrie. 1896, fr. 14.

Książki powyższe odznaczają się jasnością wykładu.

L. Heffter u. C. Koehler. Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Bd. Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe u. i. d. Ebene. Lipsk, Teubner, 1905, str. XVI+526.

Trudniejsza od poprzednich; wykład bardziej nowożytny.

W języku polskim odpowiedniego podręcznika niema. Można posiłkować się skryptami wykładów uniwersytetu krakowskiego:

K. Żorawski. Wykłady uniwersyteckie Gieometrji analitycznej. Część I, II i III. Kraków, 1911—1913, str. 613+680; dalsze części w przygotowaniu; litogr. Cena 9 kor. za tom. Nakładem Kółka mat.-fiz. Ucz. Uniw. Jagiell.

W braku powyższych można używać:

W. Zajączkowski. Gieometrja analityczna. Warszawa, 1884. Str. 511 (wyczerpane).

c) Dzieła obszerniejsze o charakterze encyklopedycznym, wymagające przygotowania w zakresie *a)* lub *b)*:

G. Salmon. A treatise on conic sections; containing an account of some of the most important modern algebraic and geometric methods. Londyn, 1848, 6-th ed. 1879. 400 str. Cena 12 szyl.; lub przekłady:

G. Salmon. Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von W. Fiedler. Lipsk, 7 wyd. I. 1907, m. 10. II. 6 wyd. 1903. Str. XX+443—809, m. 9.

G. Salmon. Traité des sections coniques p. H. Resal et Vaucheret, 3-e wyd. Paryż, 1897.

G. Salmon. A treatise on the higher plane curves, intended as a sequel to a treatise on conic sections. Dublin, 1852, 3 wyd. 1879. Str. 396; lub przekłady:

G. Salmon. Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Bearbeitet von W. Fiedler. Lipsk, 2 wyd. 1882, str. XVI+508. m. 12.20.

G. Salmon. Traité de géométrie analytique (courbes planes) tłum. O. Chemin. Suivi d'une étude sur les points singuliers, p. G. Halphen. Paryż, 2-e wyd. 1903, str. XIX+667.

G. Salmon A treatise on the Analytic Geometry of three dimensions. Revised by P. A. R. Rogers. 5 wyd. w 2 tomach. T. 1 str. XXII+470. Londyn. Longmans and C°. Dublin, Hodges, Figgis and C°. Ltd. Cena 9 szyl.; lub przekłady:

G. Salmon. Analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von W. Fiedler. I. Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades. 4 wyd. Lipsk, 1898, str. XXXIV+448. m. 9. II. Analytische Geometrie der Kurven im Raume und der algebraischen Flächen. 2 wyd. Lipsk, 1880. Str. LXXII+686; m. 17.40.

G. Salmon. Traité de géométrie à trois dimensions; tłum. O. Chemin. Paryż. 2-e wyd. 1899. fr. 7. II. 2 wyd. 1903. fr. 6. III. 1892. fr. 4.50.

G. Salmon. Elementi di geometria analitica a tre coordinati (przekład włoski Salvatora Dino). Neapol. 1870.

A. Clebsch. Vorlesungen über Geometrie. Mit besonderer Benutzung der Vorträge von A. Clebsch; bearbeitet und herausgegeben von F. Lindemann. 2-te Aufl. Ersten Bandes erster Teil. Erste Lieferung. Lipsk. 1906, str. 480; m. 16. Zweite Lieferung, str. 481—768. 1910, m. 9.

Treść: I. Rozważania wstępne. Szeregi punktów i pęki promieni. II. Krzywe rzędu drugiego i klasy drugiej. III. Wstęp do teorji form algiebraicznych.

Zweiten Bandes erster Teil. Die Flächen erster und zweiter Ordnung oder Klasse und der lineare Complex. 1891. Str. VIII+650.

Bd I. 1 wyd. Str. XII+1050. 1875, m. 24.

Dzieło to ma charakter encyklopedyczny.

d) Powyższe podręczniki zawierają niewielką liczbę zadań do rozwiązywania dla wprawy. W większej ilości zadania znaleźć można w następujących zbiorach:

Fr. Gräfe. Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Punktes, der geraden Linie, des Kreises und der Kegelschnitte. Lipsk. 1885. Str. IV+136.

Fr. Gräfe. Auflösungen und Beweise, 1886. Str. IV+259.

Fr. Gräfe. Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere der Flächen zweiten Grades. Lipsk, 1888. Str. XIV+127. — Auflösungen und Beweise. 1890. Str. XVI+353.

Fr. Michel. Recueil de problèmes de géométrie analytique. Solutions de problèmes. Paryż, 1900, str. VI+240.

Pożądane jest również, ażeby czytelnik sam układał sobie zadania; można np. obmyśleć miejsce gieometryczne punktów, mających pewną własność wspólną, znaleźć równanie, któremu spółrzędne tych punktów muszą czynić zadość i z równania tego wyprowadzić inne własności miejsca gieometrycznego.

e) W wielu zagadnieniach gieometrycznych niedogodnie jest krępować się tą lub inną metodą. Można osiągnąć lepsze rezultaty przez połączone posiłkowanie się metodami syntetyczną i analityczną, oraz stosując analizę nieskończonostkową.

Pragnącym zapoznać się bliżej z linjami krzywemi można polecić:

H. Wieleitner. Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. Lipsk, 1905, str. XXII+308. Sammlung Schubert, XLIII. Cena w opr. m. 10.

H. Wieleitner. Spezielle ebene Kurven. Lipsk, 1908, str. XVI+409. Sammlung Schubert LVI. Cena w opr. m. 12. — Treść: I. Cyssoidy. II. Konchoidy. III. Inne krzywe, dające się wytworzyć kinematycznie w sposób prosty. IV. Krzywe cykliczne. V. Metoda zamiany spółrzędnych.

Obie te książki są przystępnie napisane. Wymagane przygotowanie: początki rachunku różniczkowego i algiebry (wyznaczniki) i przecięcia stożkowe.

Do dalszych studjów w tym kierunku:

F. Severi. Lezioni di Geometria algebraica (kurs litografowany).

Raczej katalogiem, aniżeli podręcznikiem jest książka:

G. Loria. Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von F. Schütte. Lipsk, 1902, str. XXI+774. II Aufl. Bd I. 1910. Cena w opr. m. 18.

Wykład o charakterze historycznym, trudniejszy, aniżeli Wieleitnera. Autor starał się zebrać, w miarę możności, wszystkie krzywe, jakie kiedykolwiek były badane.

O przekształceniach i pokrewieństwie figur gieometrycznych bardziej szczegółowe wiadomości, niż w podręcznikach ogólnych, znaleźć można w następujących książkach:

K. Doehlemann. Geometrische Transformationen. I. Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen. 1902, str. VII+322. II. Die quadratischen und höheren birationalen Punkttransformationen. 1908, str. VIII+328. Lipsk. Sammlung Schubert. XXVII i XXVIII. Cena każdego tomu w opr. m. 10.

W tym przystępnie napisanym podręczniku rozpatrywane są te przekształcenia, które mogą być odtworzone za pomocą niezbyt skomplikowanych konstrukcji gieometrycznych i mogą być zastosowane do badania własności tworów gieometrycznych. Wykład, przeważnie analityczny, uzupełnia opis niektórych przyrządów oraz liczne wskazówki, dotyczące literatury o zastosowaniach przekształceń w naukach technicznych i przyrodniczych.

Do gieometrji wielowymiarowej polecamy:

P. H. Schoute. Mehrdimensionale Geometrie. Lipsk, Sammlung Schubert, XXXV i XXXVI. I Teil, 1902, str. VIII+295. Die linearen Räume. Cena w opr. m. 10. II Teil, 1905, str. IX+326. Die Polytope. Cena w opr. m. 10.

Książka przeznaczona dla początkujących. Część I zawiera, oprócz wiadomości podstawowych, gieometrję wykreślną, analityczną i położenia; znajomość tych nauk, w elementarnym zakresie, jest więc potrzebna do czytania tej książki.

W Encykl. d. Math. Wiss. Gieometrja analityczna jest opracowana w artykułach:

Band III, Teil I:

4a. G. Fano. Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwickelung im XIX. Jahrhundert.

4b. G. Fano. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip.

8. E. Müller. Die verschiedenen Koordinatensysteme.

Band III. Teil II, całość.

GIEOMETRJA SYNTETYCZNA I WYKREŚLNA

OPRACOWAŁ

STEFAN KWIETNIEWSKI.

Treść: 1. Przedmiot badań. 2. Powstanie gieometrji rzutowej. 3. Metody. 4. Gieometrja wielowymiarowa. 5. Treść podręczników. 6. Przygotowanie. 7. Zastosowania. 8. Gieometrja wykreślna. 9. Literatura.

---

1. Przedmiotem gieometrji syntetycznej jest badanie bezpośrednie własności figur gieometrycznych, utworzonych z najprostszych elementów: punktów, linji prostych i płaszczyzn. W przeciwieństwie do gieometrji elementarnej rozpatruje się tutaj wyłącznie figury złożone z całkowitych elementów, nie zaś z ich części [1]. Tak np. w gieometrji elementarnej wyrazy czworokąt i czworobok mają toż samo znaczenie i bywają zwykle określane jako część płaszczyzny, ograniczona czterema odcinkami, lub jako linja łamana zamknięta, złożona z czterech odcinków. W gieometrji syntetycznej *czworobokiem zupełnym* nazywamy figurę płaską, złożoną z czterech linji pro-

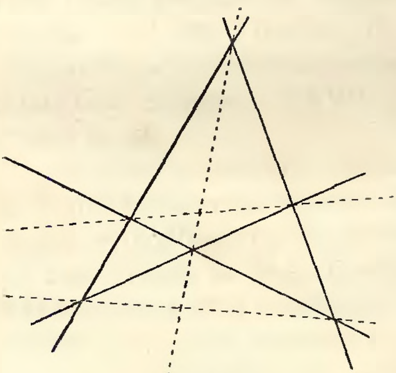


Fig. 18.

---

[1]) Nazwa Gieometrji syntetycznej utworzoną została jako przeciwstawienie gieometrji analitycznej, która nie operuje bezpośrednio elementami gieometrycznemi, ale podporządkowanemi im w pewien oznaczony sposób liczbami. Inne nazwy tej samej gałęzi gieometrji są: *gieometrja rzutowa* i *gieometrja położenia.*

stych nieograniczonych; mają one w ogólności sześć punktów przecięcia, które tworzą wierzchołki czworoboku; łącząc linjami prostemi po dwa wierzchołki czworoboku, nie leżące na tym samym boku, otrzymamy trzy przekątne (fig. 18).

Czworokątem zaś nazywać będziemy figurę złożoną z czterech punktów, leżących na jednej płaszczyźnie; ma on sześć boków, t. j. prostych nieograniczonych, łączących dane wierzchołki po dwa; trzy nowe punkty przecięcia boków dają nam tak zwane punkty przekątne (fig. 19).

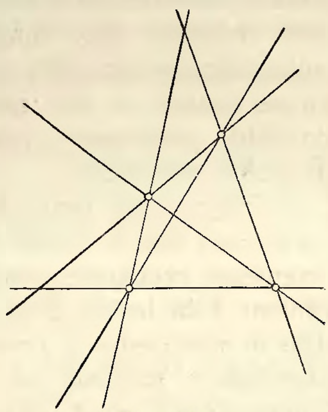


Fig. 19.

Z przykładów tych widać że nie będziemy tu mieli do czynienia z figurami, złożonemi z odcinków, ani też z częściami płaszczyzny. Badając inne figury, będziemy też brali pod uwagę inne ich własności aniżeli w gieometrji elementarnej. Tam na plan pierwszy wysuwały się zależności między wielkościami odcinków, kątów, pól i objętości; tu wprowadza się jedynie do pomocy stosunki odcinków, można zresztą i tego uniknąć, nie wprowadzając zupełnie pojęcia długości odcinka [1]).

Własności metryczne figur pozostają więc na uboczu. Główną uwagę zwraca się na t. zw. *własności rzutowe* [2]). Postaramy się dać pojęcie, co to są za własności.

Wyobraźmy sobie płaszczyznę i punkt, nie leżący na niej; oprócz tego jakąkolwiek figurę w przestrzeni. Z punktu danego, który nazywać będziemy *środkiem rzutów*, prowadzimy prostą przez każdy punkt figury danej. Tak otrzymane proste (promienie rzucające) przetną płaszczyznę w punktach, tworzących

[1]) Zagadnieniem wyrugowania pojęć metrycznych z gieometrji rzutowej pierwszy zajmował się v. STAUDT (Geometrie der Lage, Norymberga, 1847). Późniejsi autorowie nie unikają w zupełności pojęcia długości odcinka, ale w obszerniejszych dziełach (np. FIEDLERA) uwzględniają również metodę v. STAUDTA.

[2]) Stąd pochodzi nazwa »gieometrji rzutowej«.

nową figurę; ta figura nazywa się *rzutem środkowym* danej figury. Figura i jej rzut mają pewne własności wspólne; te własności nazywają się rzutowemi. Rzutem punktu jest punkt, prostej — prosta. Rzutem punktu, leżącego na prostej danej, jest punkt leżący na rzucie tej prostej; złączone położenie punktu i prostej (punkt leży na prostej, lub prosta przechodzi przez punkt) jest własnością rzutową; odległość między dwoma punktami, wielkość kąta między dwiema prostemi nie są własnościami rzutowemi, gdyż odcinek i kąt w ogólności nie są równe swoim rzutom. A więc rzuty dwu prostopadłych nie zawsze są do siebie prostopadłe, rzuty dwu równoległych mogą nie być do siebie równoległe.

Przypuśćmy teraz, że chcemy znaleźć rzut koła. Jeżeli połączymy środek rzutów z każdym punktem okręgu koła, wtedy promienie rzucające utworzą powierzchnię stożka pochyłego; rzutem koła będzie linja przecięcia stożka z płaszczyzną; będzie to więc jedno z *przecięć stożkowych:* elipsa, parabola lub hiperbola — zależnie od położenia wzajemnego punktu, koła i płaszczyzny. Stąd oczywisty wniosek, że linje te mają własności rzutowe wspólne z kołem, są rzutowo pokrewne z kołem, zaś własności metryczne będą różne. Np. twierdzenie, że prosta styczna do koła jest prostopadła do promienia w punkcie styczności, wyraża pewną własność metryczną, mówi nam mianowicie o wielkości kąta między styczną a promieniem, twierdzenie to nie da się więc zastosować do przecięć stożkowych; ale twierdzenia, że prosta przecina koło najwyżej w dwu punktach i że z punktu do koła można poprowadzić nie więcej niż dwie styczne, wyrażają własności rzutowe, gdyż rzuty punktów przecięcia dwu linji są punktami przecięcia rzutów tych linji; rzuty stycznych do koła są stycznemi do rzutu koła. A więc te dwa twierdzenia są również prawdziwe dla elipsy, paraboli i hiperboli.

Można dowieść następującego twierdzenia: w sześciokącie, wpisanym w koło, trzy pary boków przeciwległych mają punkty przecięcia na jednej i tej samej prostej. Twierdzenie dotyczy wyłącznie własności rzutowych koła, gdyż jest w nim mowa tylko o prostych łączących punkty i o punktach przecięcia prostych; położenie połączone punktu i prostej jest własnością rzutową, a więc, jeżeli dowiedziemy, że twierdzenie jest prawdziwe dla koła, będziemy odrazu wiedzieli, że jest prawdziwe i dla wszystkich przecięć stożkowych.

To twierdzenie, znane pod nazwą twierdzenia Pascala, bywa bardzo często stosowane w gieometrji syntetycznej. Inne twierdzenie podstawowe dotyczy *stosunku podwójnego podziału*. Jeżeli 4 punkty $A\,B\,C\,D$ leżą na linji prostej, wtedy stosunek $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$ nazywa się ich stosunkiem podwójnego podziału (dwustosunek).

Twierdzenie, o którym mowa, poucza, że stosunek podwójnego podziału jest własnością rzutową, to znaczy, że jeżeli punkty $A'B'C'D'$ są rzutami punktów $A\,B\,C\,D$, wtedy:

$$\frac{A'C'}{B'C'}:\frac{A'D'}{B'D'}=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$$

2. Skąd powstały badania własności rzutowych figur, można do pewnego stopnia wyśledzić. Zjawiska przyrody dostarczają nam bezustannie przykładów figur rzutowo pokrewnych: cienie są rzutami przedmiotów, źródło światła jest tu środkiem rzutów. Ale chęć poznania zjawisk przyrody nie zapoczątkowała bezpośrednio badań w tym kierunku; impulsem była tu raczej chęć naśladowania przyrody. Rzut środkowy (perspektywę) wynaleźli malarze, pragnący kopjować przyrodę. Widz, patrząc na obraz, powinien otrzymać wrażenie takie, jakby miał przed sobą sam przedmiot; obraz jest jego rzutem środkowym, oko środkiem rzutów. Jeżeli obraz sprawia pożądane wrażenie, wtedy można zauważyć na nim pewne zależności między rzutem i przedmiotem, np. wszystkim linjom prostym, równoległym w naturze, odpowiadają na obrazie proste, zbiegające się w jednym punkcie. Poznawanie faktów tego rodzaju zachęca do badań teoretycznych, które z biegiem czasu doprowadzają do wytworzenia odrębnej metody, która na początku wieku XIX [1]) rozdwaja się na abstrakcyjną *gieometrję*

[1]) Pierwsze dzieło odrębne o gieometrji rzutowej napisał Poncelet, p. Literaturę. Gieometrja wykreślna występuje samodzielnie nieco wcześ-

syntetyczną i na *gieometrję wykreślną* — mającą na celu zastosowania praktyczne.

Obie gałęzie: syntetyczna i wykreślna pozostają z sobą jednak w ścisłym związku, wspierają się wzajemnie i dostarczają materjału jedna drugiej. Niemały wpływ na rozwój gieometrji syntetycznej miała także postępująca równorzędnie gieometrja analityczna. Wytwarza się współzawodnictwo obu metod; każda dąży do osiągnięcia tych rezultatów, które druga otrzymała już innym sposobem.

3. Z tego, co dotychczas było mówione, można już nabrać niejakiego wyobrażenia o metodach gieometrji syntetycznej. Ale jej pole działania byłoby bardzo ograniczone, gdyby mogła rozpatrywać tylko figury i ich rzuty. Ażeby zrozumieć, w jaki sposób można je rozszerzyć, wyobraźmy sobie, że, utrwaliwszy rzuty poszczególnych elementów figury, zmieniamy następnie położenie samej figury. Jeżeli ona jest płaska, możemy ją np. położyć na płaszczyznę rzutów. Mamy teraz na płaszczyźnie dwie figury, na których ustalone zostało pewne *podporządkowanie.*

Każdemu punktowi A jednej z nich odpowiada pewien określony punkt drugiej A', ten mianowicie, który w pierwotnym położeniu był jego rzutem; i odwrotnie, każdemu punktowi B' drugiej odpowiada pewien punkt B pierwszej. Podobne podporządkowanie istnieje między linjami prostemi; każdej z nich w jednej figurze odpowiada jedna, ale tylko jedna, drugiej. Mówimy, że podporządkowanie jest jedno-jednoznaczne (dla odróżnienia od innych podporządkowań, również rozważanych w gieometrji syntetycznej; np. można każdemu elementowi jednego układu podporządkować dwa elementy drugiego; podporządkowanie będzie jedno-dwuznaczne).

Własności rzutowe obu figur będą oczywiście wspólne: w szczególności stosunek podwójnego podziału czterech punktów prostej $A\,B\,C\,D$ będzie równy takiemuż stosunkowi punktów

---

śniej w dziele: G. Monge, Traité de géométrie descriptive. Paryż, 1799; nowe wydanie 1898—1899; tłumaczenie niemieckie R. Haussnera w Klassiker Ostwalda, Nr. 117). Lipsk, 1900, str. 217, w 12-ce.

odpowiednich $A'B'C'D'$; ta własność najczęściej bywa stosowana dla stwierdzenia pokrewieństwa rzutowego figur.

Sprawność metody rozszerza się jeszcze znakomicie przez wprowadzenie podporządkowania między elementami różnorodnemi. Wyobraźmy sobie *pęk promieni*, to znaczy zbiór wszystkich prostych, leżących na jednej płaszczyźnie i przechodzących przez jeden punkt (wierzchołek pęku). Jeżeli przetniemy pęk linją prostą, nie przechodzącą przez wierzchołek, wtedy każdy promień przetnie prostą w jednym punkcie, i przez każdy punkt szeregu przechodzi jeden i tylko jeden promień pęku; otrzymaliśmy podporządkowanie jedno-jednoznaczne między punktami i prostemi. To prowadzi do *zasady dwoistości* [1]). Wyobraźmy sobie dwie płaszczyzny P i P_1; każdemu punktowi A pierwszej podporządkujmy pewną prostą a_1 drugiej i odwrotnie i to tak, aby złączone położenie punktu i prostej zostało zachowane, wtedy punktom linji prostej jednej płaszczyzny odpowiadać będą promienie jednego pęku drugiej. Wyznaczaniu punktu przecięcia dwu prostych na jednej płaszczyźnie odpowiada prowadzenie prostej przez dwa punkty drugiej płaszczyzny i t. d.

Podobną dwoistość ustalić można między wszystkiemi punktami i wszystkiemi płaszczyznami w przestrzeni i w wielu innych przypadkach. Twierdzenia, dowiedzione dla pewnego układu punktów, mogą być zastosowane do odpowiedniego układu innych elementów, np. prostych; wyraz »punkt« należy tylko zastąpić przez wyraz »prosta« i odwrotnie. Wymienione już powyżej twierdzenie Pascala możemy teraz tak przekształcić: W sześcioboku opisanym na przecięciu stożkowym trzy proste, łączące pary wierzchołków przeciwległych, przechodzą przez jeden punkt (twierdzenie Brianchona).

Przy podporządkowywaniu jedno-jednoznacznym elementów możemy napotkać liczne wyjątki. Np. mając dwie proste p i p_1, możemy podporządkować sobie wzajemnie te ich punkty

---

[1]) O uzasadnieniu zasady dwoistości p. Podstawy gieometrji.

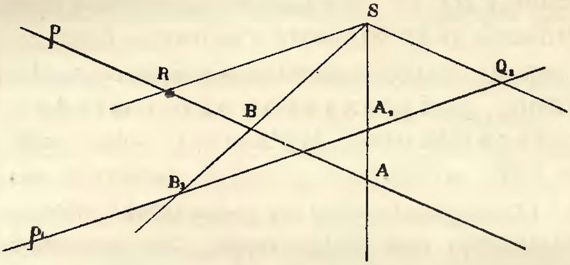


Fig. 20.

A, A_1, które leżą na jednej prostej przechodzącej przez punkt stały S. W ten sposób każdy promień pęku S wyznacza na p i p_1 w ogólności parę punktów odpowiednich, są jednak dwa wyjątki: promień równoległy do p_1 wyznacza na p pewien punkt R, nie przecina jednak drugiej; promień równoległy do p wyznacza tylko na p_1 pewien punkt Q. Dla formalnego uniknięcia wyjątków wprowadzamy t. zw. *elementy niewłaściwe* albo *nieskończenie odległe*. Przyjmujemy, że każda prosta ma w nieskończoności jeden i tylko jeden punkt, i że jest to jej punkt przecięcia z wszystkiemi prostemi równoległemi. Z podobnych względów przypisujemy płaszczyźnie jedną i tylko jedną prostą w nieskończoności. Elementami niewłaściwemi operujemy dziś z równą łatwością jak właściwemi.

Dla zachowania ciągłości pewnych własności figur, Poncelet (1788—1867) wprowadził elementy »idealne«, które odpowiadają dzisiejszym *urojonym*. Np. wyobraźmy sobie dwa przecinające się koła; mają one cięciwę wspólną. Jeżeli oddalać będziemy środki kół, przestaną one przecinać się i cięciwy wspólnej mieć nie będą; Poncelet mówi, że mają one teraz cięciwę wspólną »idealną«, osiągając przez to pożądaną ciągłość własności. Dziś mówimy, że dwa koła i wogóle dwa przecięcia stożkowe mają zawsze cztery punkty wspólne; mogą one być rzeczywiste lub urojone. Operowanie elementami urojonemi nastręcza pewne niedogodności w porównaniu z rzeczywistemi, ale trudności dziś już zostały pokonane.

Metody zaznaczone tutaj dają się stosować nietylko do przestrzeni zwykłej, znanej z gieometrji euklidesowskiej, jakkolwiek w wykładach i podręcznikach ogólnych zwykle tylko taka przestrzeń bywa uwzględniana. W pracach specjalnych ta sama metoda bywa stosowana i do badania własności figur w przestrzeniach nieeuklidesowskich. Twierdzenia, dotyczące wyłącznie własności rzutowych figur, pozostają tu też same, gdyż są one niezależne od pewnika o równoległych.

4. Przestrzenie wielowymiarowe również z łatwością mogą być badane za pomocą gieometrji syntetycznej. Do pojęcia tych przestrzeni dochodzimy syntetycznie taką drogą:

Wyobraźmy sobie prostą i punkt nie leżący na niej. Łącząc ten punkt ze wszystkiemi punktami prostej, otrzymamy pęk promieni, wypełniających całą płaszczyznę. Nieskończony szereg punktów, leżących na prostej, nazwijmy rozmaitością jednowymiarową punktów, albo przestrzenią jednowymiarową; a ponieważ między punktami szeregu i promieniami pęku istnieje podporządkowanie jedno-jednoznaczne, przeto konsekwentnie będzie powiedzieć, że pęk jest rozmaitością jednowymiarową promieni. Każdy promień jednak jest rozmaitością jednowymiarową punktów, przeto całą płaszczyznę nazwiemy rozmaitością dwuwymiarową (R_2). Każde dwa punkty tej płaszczyzny można połączyć jedną tylko linją prostą; podług znanego pewnika gieometrycznego, ta prosta leży całkowicie na płaszczyźnie utworzonej, a więc przetnie każdy promień pęku. Wyobraźmy sobie teraz punkt, nie leżący na płaszczyźnie, i połączmy go z każdym punktem płaszczyzny. Otrzymamy »wiązkę« promieni; pomiędzy promieniami wiązki i punktami płaszczyzny będzie podporządkowanie jedno-jednoznaczne, a ponieważ płaszczyzna jest rozmaitością dwuwymiarową punktów, przeto wiązka będzie rozmaitością dwuwymiarową prostych. Punkty wszystkich tych prostych wypełniają całkowicie przestrzeń empiryczną, o jakiej jest mowa w gieometrji elementarnej; a ponieważ każda z tych prostych jest jednowymiarową rozmaitością punktów, przeto zwykła przestrzeń jest trójwymiarową rozmaitością punktów, lub przestrzenią trójwymiarową (R_3). Pomyślmy sobie teraz punkt nie leżący w R_3 i przypuśćmy, że łączymy go linjami prostemi z punktami przestrzeni R_3. Każda z tych prostych może mieć w R_3 nie więcej jak jeden punkt, gdyż, gdyby miała dwa punkty, leżałaby całkowicie w tej przestrzeni (innych punktów prostej nie przyjmujemy). Otrzymamy tą drogą rozmaitość trójwymiarową prostych; każda z nich jest rozmaitością jednowymiarową punktów, punkty tych wszystkich prostych tworzą przeto rozmaitość czterowymiarową punktów, lub przestrzeń czterowymiarową.

Wprowadzenie owego punktu, nie należącego do R_3, pociąga za sobą w konsekwencji odrzucenie niektórych pewników gieometrji elementarnej, jak np. pewnika, że dwie płaszczyzny, mające jeden punkt wspólny, mają jeszcze drugi punkt wspólny — lub jego ekwiwalentu. Przez dołączenie coraz to nowych punktów, nie leżących w przestrzeni już otrzymanej, dochodzimy do przestrzeni o coraz to większej liczbie wymiarów. Za elementy w takiej przestrzeni uważać można oprócz punktów, prostych i płaszczyzn, jeszcze przestrzenie o niższej liczbie wymiarów. Tak np. przestrzeń czterowymiarowa jest również rozmaitością czterowymiarową przestrzeni trójwymiarowych, z których każda jest w zupełności określona przez cztery punkty, nie leżące na jednej płaszczyźnie. Z elementów tych oraz z ich części można tworzyć figury, przedstawiające pewne analogje do figur badanych w zwykłej gieometrji.

Z rozmaitościami wielowymiarowemi mamy zresztą do czynienia i w przestrzeni empirycznej, jeżeli zamiast punktu przyjmiemy jaki inny element. Np. przestrzeń ta jest rozmaitością czterowymiarową prostych, a także rozmaitością czterowymiarową kul. Twierdzeniom o układach punktów w R_4 odpowiadać więc będą twierdzenia o układach prostych i kul w R_3 [1]).

---

[1]) R. Sturm. Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. Lipsk, 3 części. Cena m. 42.

I. Der lineare Komplex oder das Strahlengewinde und der tetraedrale Komplex. Str. XIV+386, 1892.

II. Die Strahlenkongruenzen erster und zweiter Ordnung. Str. XIV+367. 1893.

III. Die Strahlenkomplexe zweiten Grades. Str. XXIV+518. 1897.

Th. Reye. Synthetische Geometrie der Kugeln und linea-

5. Wykłady i podręczniki, przeznaczone dla początkujących, noszące tytuł gieometrji syntetycznej lub gieometrji rzutowej, zawierają naukę o tworach elementarnych (szereg punktów, pęk promieni, pęk płaszczyzn, pole punktów, pole prostych, wiązka (snop) promieni; przestrzeń punktów i przestrzeń płaszczyzn), o tworzeniu z nich krzywych i powierzchni drugiego rzędu, o własnościach rzutowych tych tworów i o ich niektórych układach. Elementy urojone zwykle bywają uwzględniane. Teorja syntetyczna tworów algiebraicznych (linji i powierzchni) bywa traktowana w oddzielnych pracach [1]), jak również gieometrja syntetyczna przestrzeni wielowymiarowych. Niektórzy autorowie łączą gieometrję rzutową w jedną całość z gieometrją wykreślną (FIEDLER) lub też podają wiadomości zasadnicze gieometrji rzutowej przy wykreślnej w osobnych rozdziałach (FELDBLUM, WIENER).

6. Rozpoczynający naukę gieometrji syntetycznej może nie rozporządzać dużym zasobem wiadomości. Są podręczniki, które nie robią nawet użytku z twierdzeń gieometrji elementarnej, ale te należą do trudniejszych właśnie dlatego, że rozporządzają szczuplejszemi środkami. Podręczniki przystępniej napisane robią użytek z twierdzeń planimetrycznych o podobieństwie trójkątów, z wiadomości o położeniu wzajemnym prostych i płaszczyzn w przestrzeni oraz z twierdzeń trygonometrji o proporcjonalności boków i wstaw kątów przeciwległych w trójkącie; kto więc przechodził kiedykolwiek kurs szkoły średniej, może rozpocząć naukę gieometrji syntetycznej, chociażby niejedno wyszło mu z pamięci. Za to pewną trudność nastręcza zwykle dla początkującego konieczność wyrobienia sobie wyobraźni wzrokowej. Tę trudność udaje się nieraz pokonać przez

---

ren Kugelnsysteme mit einer Einleitung in die analytische Geometrie der Kugelsysteme. Lipsk, 1879.

[1]) E. KÖTTER. Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven. Preisschrift. Berlin, 1887, str. 303, w 4-ce.

Toż samo w Abhandlungen der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1887.

posiłkowanie się modelami; ominąć ją można przez zwrócenie się do gieometrji analitycznej, która osiąga te same rezultaty.

7. Pobudzenie wyobraźni wzrokowej oraz wprawa w podporządkowaniu wzajemnym różnorodnych przedmiotów są to nabytki pożądane dla każdego umysłu i choćby w tym tylko celu dobrze jest zapoznać się z gieometrją syntetyczną. Dla matematyka stanowi ona pożyteczne uzupełnienie i jest ciekawa ze względu na jednolitą metodę; nie może jednak zastąpić o wiele owocniejszej gieometrji analitycznej.

Bezpośrednie zastosowanie gieometrji syntetycznej spotyka się dość często w mechanice (statyka graficzna), krystalografji [1]) i kartografji; pozostająca w związku z nią gieometrja wykreślna jest niezbędna dla nauk technicznych; specjalny dział gieometrji wykreślnej — perspektywa — ma zastosowanie w malarstwie.

8. Gieometrję wykreślną w najogólniejszym znaczeniu można określić jako naukę o przedstawianiu myśli gieometrycznych za pomocą obrazów graficznych lub plastycznych [2]). Jest to więc sposób porozumiewania się za pomocą znaków; znaki te będą różne, zależnie od metody, jaką wybierzemy, w celu ustanowienia sposobu odwzorowania, czyli podporządkowania między obrazem a oryginałem. Odwzorowanie powinno być ścisłe, t. zn. takie, ażeby każda własność gieometryczna oryginału miała odpowiedni znak na obrazie, i ażeby podług obrazu można było odtworzyć całkowicie własności gieometryczne oryginału. Dla celów praktycznych wymaga się jeszcze, ażeby obraz był poglądowy, t. zn. ażeby, spojrzawszy na rysunek obrazu, można było bezpośrednio wyobrazić sobie w przybliżeniu oryginał.

Zwykle, chociaż nie wyłącznie, obraz wyznaczamy na płaszczyźnie; w tym przypadku wszystkie zagadnienia kon-

---

[1]) E. Blasius. Die Geometrie der Lage in ihrer Anwendung auf die Kristallographie. Annalen der Physik und Chemie, t. 45, str. 108—158, r. 1892.

Th. Liebisch, A. Schoenflies und O. Mügge. Kristallographie. Enc. d. math. Wiss. V, 7, str. 391—493, Lipsk, 1906.

[2]) Enc. d. math. Wiss., Papperitz.

strukcyjne gieometryczne staramy się sprowadzić do czterech następujących [1]):

1. Dwa punkty dane połączyć linją prostą.
2. Wyznaczyć punkt przecięcia dwu prostych.
3. Zbudować koło, mające dany środek i promień.
4. Wyznaczyć przecięcie koła z prostą lub z drugim kołem.

Do przedstawienia graficznego tych konstrukcji wystarczają dwa przyrządy: linjał i cyrkiel; dla ułatwienia prowadzenia prostych równoległych i prostopadłych używa się jeszcze ekierki, t. j. deseczki, mającej kształt trójkąta prostokątnego.

Zagadnienia, nie dające się sprowadzić do powyższych czterech konstrukcji zasadniczych, rozwiązuje się albo w przybliżeniu za pomocą tych samych środków, albo też przy pomocy mechanizmów, wykreślających linje krzywe, różne od koła.

Następujące metody odwzorowania figur przestrzennych na płaszczyźnie bywają najczęściej używane:

1. Rzut środkowy (patrz wyżej). Linja prosta wyznacza się za pomocą śladu i punktu zbiegu (śladem nazywamy przecięcie prostej danej z płaszczyzną obrazu, punktem zbiegu — rzut punktu nieskończenie oddalonego prostej). Punkt wyznacza się za pomocą jego rzutu oraz śladu i punktu zbiegu którejkolwiek prostej, przechodzącej przez ten punkt. Płaszczyźnie podporządkowujemy jej ślad i prostą zbiegu.

Metoda rzutu środkowego jest ciekawa ze względów teoretycznych; inne wypływają z niej jako przypadki szczególne. Do celów praktycznych niezawsze jest dogodna.

2. Rzut równoległy otrzymamy zamiast środkowego, przyjmując środek rzutów w nieskończoności. Wyznacza się obrazy na dwu różnych płaszczyznach, obierając dla każdej inny kierunek prostych rzucających. Punkty i proste odwzorowuje się za pomocą ich rzutów na obie płaszczyzny; płaszczyzny odwzorowuje się za pomocą ich śladów. Najdogodniejszy i najczęściej używany jest rzut prostokątny, przy którym płaszczyzny rzutów są do siebie prostopadłe (płaszczyzna pozioma i pionowa),

---

[1]) G. Loria. Lezioni di geometria descrittiva. Genua, 1906.

zaś kierunki prostych rzucających prostopadłe do tych płaszczyzn.

Rzut prostokątny ma bardzo rozległe zastosowanie w naukach technicznych.

3. Rzut równoległy aksonometryczny, w którym używa się tylko jednej płaszczyzny rzutów, na której są podane rzuty trzech odcinków znanej długości, pochyłych względem płaszczyzny. Ta metoda jest dogodna przy przedstawianiu przedmiotów, w których ważniejsze linje biegną w trzech kierunkach (domy, kryształy), i bywa stosowana przy szkicowaniu maszyn i przyrządów fizycznych. Zwykle obiera się trzy odcinki równej długości, przechodzące przez jeden punkt i prostopadłe wzajemnie do siebie; ich rzuty mogą być równe lub różnej długości. Kierunek rzutów najczęściej obiera się prostopadły do płaszczyzny obrazu. Trzy odcinki prostopadłe tworzą układ spółrzędnych; znajomość spółrzędnych jakiegokolwiek punktu względem tego układu wystarcza do wyznaczenia jego rzutu aksonometrycznego, gdyż odcinki równoległe skracają się przez rzut w tym samym stosunku.

4. Rzut topograficzny jest to rzut prostokątny na jedną płaszczyznę z dodaniem odległości punktu od płaszczyzny rzutów. Oprócz w topografji, metoda ta da się zastosować do przedstawienia graficznego jakiejkolwiek funkcji jednoznacznej dwu zmiennych.

5. Rzut ukośny stosowany, przy którym podaje się stały stosunek długości odcinków prostopadłych do płaszczyzny do długości ich rzutów. Przy rysunkach stereometrycznych używa się zwykle tej metody.

6. Perspektywa, rzut środkowy, otrzymywany z rzutów prostokątnych na płaszczyzny: poziomą i pionową. Zastosowania w malarstwie.

Z innemi działami matematyki gieometrja wykreślna mało ma styczności; ze względu na znaczenie teoretyczne w każdym razie zasługują tutaj na wzmiankę nowsze usiłowania stworzenia teorji błędów konstrukcji gieometrycznych.

E. Lemoine. Géométrographie ou l'art des constructions géométriques. Paryż, 1902.

K. Nitz. Beiträge zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen, »Zeitschrift f. Mathematik und Physik«. Band 53.

---

9. Wiadomości podstawowe z gieometrji rzutowej, krótko przystępnie wyłożone, znaleźć można w książce p. t.:

M. Feldblum. Gieometrja wykreślna. Str. XIV+327, w 8-ce. Warszawa, 1902, cena rb. 2.

Rozdz. I, str. 3—52: Wiadomości z gieometrji rzutowej. § 1. Teorja rzutu środkowego. § 2. Zarys teorji stożkowych. § 3. Właściwości rzutu równoległego. § 4. Kolineacja figur na płaszczyźnie.

Nieco obszerniej:

A. M. Baraniecki. Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych, na podstawie ich pokrewieństwa harmonicznego z kołem. Str. XVI+151, w 8-ce; drzeworyt. 63. Warszawa, 1885, cena kop. 40.

Obie te prace mogą jednak służyć tylko do pobieżnego poinformowania się o przedmiocie. Dla niematematyków wystarczyć może następująca książeczka:

K. Doehlemann. Projektive Geometrie in synthetischer Darstellung. Lipsk. Sammlung Göschen. 3 wyd. 1905, str. 181. Cena w oprawie 90 fenigów.

Ogólnemu kursowi uniwersyteckiemu (dla niższych semestrów) najbardziej odpowiada:

F. Enriques. Lezioni di geometria projettiva. 2 wyd. Bolonja, 1904, str. VIII+409; lub wyd. niem. tegoż dzieła:

F. Enriques. Vorlesungen über projektive Geometrie deutsch von H. Fleischer. Mit einem Einführungswort von F. Klein. Str. XIV+374. Lipsk, 1903. Cena m. 8, w opr. 9.

Treść: Wstęp. I. Twierdzenia podstawowe. II. Dwoistość. III. Grupy harmoniczne. IV. Pewnik ciągłości. V. Twierdzenie fundamentalne. VI. Pokrewieństwo rzutowe między tworami elementarnemi jednowymiarowemi. VII. Inwolucja. VIII. Przecięcia stożkowe. X. Pokrewieństwo rzutowe między przecięciami stożkowemi. XI. Zadania. XII. Ogniska. XIII. Stożek. XIV. Pokrewieństwo rzutowe między tworami trójwymiarowemi. Dodatek. Skorowidz.

Podręcznik ten w zupełności odpowiada dzisiejszemu stanowi nauki. Wykład jest przystępny (może go zrozumieć każdy, kto posiada średnie wykształcenie) i jednocześnie bardzo ścisły. W pierwszych rozdziałach rozpatrywane są pewniki gieometrji rzutowej, wprowadzone poglądowo (a więc nie sposobem Hilberta). Twory urojone krótko są traktowane; w pierwszym wydaniu włoskim pominięte zupełnie.

Dla wszystkich pragnących bliżej zapoznać się z przedmiotem, podręcznik ten uważam za najbardziej odpowiedni.

W języku polskim mamy podręczniki:

A. Lewenberg. Gieometrja rzutowa tworów pierwiastkowych. Str. XV+414. Warszawa, 1902. Cena rb. 8.

C. Russjan. Geometrja rzutowa (autografowane). Kraków. Nakładem Kółka matem.-fiz. U. U. J. Cena kor. 2 (na wyczerpaniu). Niezupełnie odpowiada wymaganiom nowoczesnym, ale może jeszcze być z pożytkiem czytane.

Z dawniejszych nieco podręczników na uwagę zasługuje:

M. Pasch. Vorlesungen über neuere Geometrie. Lipsk, 1882. Str. IV+202. 2-e wyd. 1912.

Książka ta odznacza się ścisłym utrwaleniem podstaw opartych na empiryzmie; ciekawa dla matematyka i filozofa, ale całkowitego kursu uniwersyteckiego zastąpić nie może: brak w niej linji i powierzchni krzywych oraz elementów urojonych.

Treść: Wstęp. 1—5. Prosta, płaszczyzna, pęk promieni i płaszczyzn, wiązka promieni. 6—9. Uogólnienia pojęć: punkt, prosta płaszczyzna, »między«. 10. Figury perspektywiczne. 11. Twory harmoniczne. 12. Dwoistość. 13, 14. Przystawanie. 15—23. Kolineacja, bezwzględne układy biegunowe, stosunek podwójnego podziału, spółrzędne, szereg liczb ciągły i t. d.

Obszerniejsza od powyższych:

Th. Reye. Die Geometrie der Lage. 2 tomy. Hanower, 1866—67. Tłumaczenie francuskie Chemin'a. 2 t. Paryż, 1881—82; włoskie Faifofer'a. Wenecja, 1884; angielskie Holgate'a. Nowy York, 1898. 4-te wyd. niemieckie: I Abt. 1899, str. XIV + 296, m. 8; II. 1907, str. VIII+335, m. 10; III. str. VIII+253, m. 8.

Ostatnie wydanie (4-te) zostało znacznie rozszerzone i zawiera więcej, aniżeli bywa wykładane w ogólnych kursach uniwersyteckich. Wykład pierwszej części dość przystępny. Znaczna ilość zadań. W II. Abt. między innemi: kolineacja i korrelacja w przestrzeni; kompleksy i kongruencje promieni i t. d. III. Abt. Układy powierzchni 2-go rzędu, linje i powierzchnie 3-go rzędu i t. d.

Pragnącym dokładnie zaznajomić się z gieometrją syntetyczną, zalecamy usilnie czytanie dzieł dawniejszych, fundamentalnych, stanowiących źródła dla późniejszych autorów. Są one przystępne nawet dla początkujących i mogą pobudzić do pracy samodzielnej. Wymieniam kilka ważniejszych:

J. V. Poncelet. Traité des propriétés projectives des figures. Paryż, 1822. 2-e éd. 2 części, Paryż, 1865—66.

Dzieło to utrwaliło gieometrję rzutową, jako samodzielną gałąź nauki; główny cel: wyprowadzić własności przecięć stożkowych i powierzchni drugiego rzędu z własności kół i kul.

G. K. Ch. v. Staudt. Geometrie der Lage. Norymberga, 1847.

G. K. Ch. v. Staudt. Beiträge zur Geometrie der Lage. Norymberga, 1856—60.

W ostatnim dziele po raz pierwszy występują elementy urojone w tej postaci, w jakiej dziś zwykle bywają wykładane.

J. Steiner. Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander. Berlin, 1832, Ostwalds Klassiker der exacten Wissenschaften, Nr. 82 i 83. Lipsk, 1897.

J. Steiner. Vorlesungen über synthetische Geometrie. Lipsk. I. Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung. Bearbeitet von C. F. Geiser. 3 wyd. 1887, str. VIII +208. II. Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften. Bearbeitet von H. Schröter. 3 wyd. oprac. przez R. Sturma, 1898, str. XVII+537.

W części I autor opiera się wyłącznie na gieometrji elementarnej i nie wprowadza nowych pojęć gieometrji rzutowej; w części II przecięcia stożkowe są rozpatrywane jako krzywe, utworzone za pomocą szeregów punktów lub pęków promieni, rzutowo pokrewnych.

Do historji gieometrji wskażemy tu tylko:

G. Loria. Przeszłość i stan obecny najważniejszych teorji gieometrycznych. Przełożył S. Dickstein. Str. VIII+112. Warszawa, 1889. Cena kop. 30.

Prace bardziej szczegółowe będą podane w Historji matematyki.

Jedyne w swoim rodzaju dzieło, w którym gieometrja rzutowa i wykreślna zostały połączone w jedną całość, jest:

W. Fiedler. Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 3 Bde. Lipsk.

I. Die Methoden der darstellenden Geometrie und die Elemente der projektivischen Geometrie. 4 wyd. Str. XXIV+431, m. 11.

II. Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen. 3 wyd. 1885. Str. XXXIII+560; m. 15.40.

III. Die konstruierende und analytische Geometrie der Lage. 3 wyd. 1888, str. XXX+660; m. 17.40.

Treść. I. *A*. Rzut środkowy jako metoda odwzorowania, oraz jego zasady ogólne. *B*. Teorja konstrukcyjna przecięć stożkowych jako rzutów koła. *C*. Kolineacja środkowa układów przestrzennych jako teorja metod modelowania. *D*. Zasady rzutu równoległego prostokątnego, jego przekształcenia; aksonometrja. II. *A*. O krzywych i powierzchniach rozwijalnych. *B*. O powierzchniach krzywych w ogólności i o powierzchniach stopnia drugiego w szczególności. *C*. Rodziny powierzchni, najważniejszych dla techniki. III. *A*. Podstawy gieometrji, elementy urojone, spółrzędne i parametry. *B*. Parametry i pokrewieństwo rzutowe. Wytwory rzutowych tworów szczebla pierwszego. *C*. Twory rzutowe, w szczególności twory elementarne szczebla drugiego i trzeciego.

Książka nieco zawiła i dla początkujących niełatwa, ale bardzo pożyteczna dla pragnących dokładniej poznać przedmiot. Ze względu na zastosowania odpowiedniejszy jest, również bardzo obszerny, ale przystępniej napisany podręcznik:

Ch. Wiener. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Lipsk. I. 1884, str. XX+477. II. 1887, str. XXX+649.

Treść: I. Pojęcia zasadnicze. Historja gieometrji wykreślnej (dość wyczerpująca). Rzut prostokątny. Gieometrja rzutowa. Aksonometrja. Perspektywa. II. Powierzchnie krzywe.

Wielką wadą zewnętrzną tej książki jest niewyraźny druk (anastatyczny).

Technikom może wystarczyć jeden z mniejszych podręczników:

M. Feldblum. Gieometrja wykreślna (p. str. 169).

Treść. I. Wiadomości z gieometrji rzutowej. II. Punkt, prosta i płaszczyzna. III. Wielościany. IV. Linje krzywe. V. Powierzchnie walcowa i stożkowa. VI. Powierzchnie obrotowe. VII. Powierzchnie śrubowe i inne. VIII. Teorja perspektywy. IX. Aksonometrja. X. Teorja oświetlenia powierzchni. Wskazówki do ćwiczeń. Wykaz alfabetyczny terminów.

M. Łazarski. Zasady geometryi wykreślnej. T. I, str. VI+144 z atlasem (tabl. XVIII, rys. 242). Lwów, 1903. Cena r. 3.15.

Treść: Cz. I. Zasady gieometrji rzutowej. Cz. II. Metody gieometrji wykreślnej. *A.* Rzuty środkowe. *B.* Rzuty prostokątne. *C.* Aksonometrja prostokątna. *D.* Kolineacja utworów przestrzeni. Cz. III o wielościanach.

T. II. Str. II+143, z atlasem (tabl. XXXV, rysunk. 154). Lwów, 1906.

Treść: O krzywych, o powierzchniach.

C. F. A. Leroy. Traité de Géométrie descriptive (Liège, 1837) suivi de la Méthode des plans cotés et de la Théorie des engrenages cylindriques et coniques. 15-e éd. revue et annotée par Martelet. In 4-o avec Atlas de 71 planches. Paryż, 1910, fr. 16.

G. Hauck. Vorlesungen über darstellende Geometrie unter besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Technik. Hrsg. v. A. Hauck. In 2 Bänden. I Bd. Lipsk, 1912. m. 10, w opr. m. 12.

Dla matematyków niespecjalistów, pragnących zapoznać się bardziej teoretycznie z przedmiotem, zgodnie z dzisiejszym stanem wiedzy, polecamy:

G. Loria. Lezioni di geometria descrittiva. Genua, 1906.

G. Loria. Vorlesungen über darstellende Geometrie. Autorisierte nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von F. Schütte. I. Teil. Die Darstellungsmethoden. Lipsk, 1907, str. XI+219. Cena m. 6.80.

Treść: Rzut prostokątny, środkowy, topograficzny; aksonometrja, fotogramometrja.

Rozpoczynając studjowanie tej książki, należy znać gieometrję rzutową oraz analityczną płaszczyzny i przestrzeni, w zakresie elementarnym.

Wyszczególnione wyżej podręczniki zawierają znaczną ilość zadań; jako zbiór specjalny można wskazać:

E. Sailer. Die Aufgaben aus der darstellenden Geometrie, welche bei der Prüfung für das Lehramt der Mathematik und Physik, 1873—1893, gestellt wurden. Monachjum 1899, str. 75.

O zastosowaniach gieometrji wykreślnej poinformować może:

F. Schilling. Ueber die Anwendung der darstellenden Geometrie, insbesondere über Photogrammetrie. Vorträge. Lipsk, 1904. Str. VII+196. Cena m. 5.

Wiadomości o modelach i przyrządach do gieometrji wykreślnej i wogóle do matematyki podaje:

W. v. Dyck. Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben im Auftrage des Vorstandes der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Monachjum, 1892, str. XVI+430. Cena m. 14. Nachtrag 1893, str. X+135. Cena m. 4.

Katalog był przygotowany na wystawę matematyczną, która odbyła się w Monachjum w r. 1893. Część I Katalogu zawiera kilka ciekawych rozpraw, z których dwie dotyczą gieometrji rzutowej i wykreślnej:

G. Hauck. Über die constructiven Postulate der Raumgeometrie in ihrer Beziehung zu den Methoden der darstellenden Geometrie (str. 40—53).

A. v. Braunmühl. Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Curven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts (str. 54—88).

Część druga zawiera opisy przyrządów i modeli; składa się z 3 działów: I. Arytmetyka, Algiebra, Teorja funkcji, Rachunek całkowy. II. Gieometrja. III. Matematyka stosowana.

Dział II zawiera: *H)* Przyrządy rysunkowe. *I)* Modele do nauki elementarnej. *K)* Wielościany, podział powierzchni i przestrzeni. *L)* Krzywe płaskie. *M)* Powierzchnie algiebraiczne. *N)* Krzywe skośne, powierzchnie rozwijalne. *O)* Modele do gieometrji linji prostych. *P)* Modele do teorji krzywizny. *Q)* Zjawiska osobliwe na krzywych i powierzchniach.

Liczne wskazówki bibljograficzne ułatwiają wyszukanie dokładniejszych opisów; podane są też adresy firm, w których można zaopatrzyć się w wyszczególnione przedmioty.

Oprócz tego katalogu jest jeszcze inny:

M. Schilling. Katalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht. 6 wyd. Halla nad Salą, 1903, str. XIII+130.

Wyszczególnimy jeszcze niektóre prace specjalne, posiłkujące się metodą syntetyczną.

R. Sturm. Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften. Lipsk. 4 Bände. I. Die Verwandschaften zwischen Gebilden erster Stufe. 1908, str. XII+415. Cena m. 16. II. Die eindeutigen linearen Verwandschaften zwischen Gebilden zweiter Stufe. 1908, str. VIII+346. Cena m. 16. III. Die eindeutigen linearen Verwandschaften zwischen Gebilden dritter Stufe. 1909. Str. VIII+574. Cena m. 20. IV. Die nichtlinearen und die mehrdeutigen Verwandschaften zweiter und dritter Stufe. 1909, str. X+486. Cena m. 20.

»W książce tej nie chodzi o Gieometrję położenia w znaczeniu Staudta, ani też o Gieometrję rzutową, lecz o syntetyczne przedstawienie tego, co wiemy o pokrewieństwach gieometrycznych. Ale ten charakter syntetyczny wykładu nie będzie wyłączał stosowania algiebry... Pokrewieństwo rzutowe określam algiebraicznie« (wyjątek z przedmowy).

O gieometrji wielowymiarowej polecamy gruntowne dzieło włoskie i jego przekład niemiecki:

G. Veronese. Fondamenti di geometria a più dimensioni e più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Padwa, 1891, str. XLVIII+628.

G. Veronese. Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Übersetzt von A. Schepp. Lipsk, 1894, str. XLVII+710.

Treść: Przedmowa. Wstęp: Twierdzenia podstawowe o abstrakcyjnych formach matematycznych. I. Prosta, płaszczyzna i przestrzeń trójwymiarowa w przestrzeni ogólnej. II. Przestrzeń o 4 i o n wymiarach w przestrzeni ogólnej. Dodatek. Badania historyczno-krytyczne nad podstawami gieometrji.

Wykład ściśle syntetyczny, bardzo staranny i drobiazgowy, pogłębiony filozoficznie. Autor buduje gieometrję od samych podstaw, z uwzględnieniem gieometrji nieeuklidesowskich. Książka do czytania niełatwa, jakkolwiek przygotowania specjalnego nie wymaga. Przeczytać ją powinien każdy, kto pragnie dokładnie zapoznać się z przedmiotem.

Odrębną metodę geometryczną stworzył

H. Grassmann. Die lineare Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert. Lipsk, 1844.—Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet. Berlin, 1862.

Toż samo w tomie I nowego wydania:

H. Grassmanns Gesammelte mathematische und physikalische Werke, herausgegeben von F. Engel Lipsk. 3 Bände.

I Bd. 1 Tl. 1894, str. XVI+435. Die Ausdehnungslehre von

1844 oder die lineare Ausdehnungslehre. Geometrische Analyse, geknüpft an die von LEIBNIZ erfundene geometrische Charakteristik.

I Bd. 2 Tl. 1896, str. VIII+511. Die Ausdehnungslehre von 1862.

II Bd. 1 Tl. 1904, str. X+451. 2 Tl. 1902, VIII+266.

III Bd. 1 Tl. 1911, str. 353. 2 Tl. 1911, str. XIII+400.

Tomy II i III, 1. zawierają mniejsze rozprawy; tom III, 2. zawiera życiorys GRASSMANNA, napisany przez ENGLA.

Odrębność metody polega głównie na tym, że autor nie podporządkowuje liczb tworom gieometrycznym, jak to się robi w gieometrji analitycznej, ale oznacza je przez symbole i wykonywa na tych symbolach działania analogiczne do działań arytmetycznych i odpowiadające pewnym konstrukcjom gieometrycznym. Metoda GRASSMANNA jest stosunkowo mało rozpowszechniona, jakkolwiek do wielu zagadnień może być z pożytkiem stosowana.

Poza tym literaturę dotyczącą metody GRASSMANNA znaleźć można w rozprawie:

V. SCHLEGEL. Die Grassmannsche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. 41. Historisch-literarische Abteilung, 1896, str. 1—21, 41—59; lub w przekładzie polskim:

SCHLEGEL. Nauka rozciągłości Grassmanna (Przyczynek do historji matematyki w ostatnich 50 latach). Str. 51, Warszawa, 1896. Red. »Prac. matem.-fiz.« Cena kop. 80.

W Encyclopädie der Math. Wiss. gieometrja syntetyczna jest opracowana:

Band III, Teil I, w szczególności:

6. A. SCHOENFLIES. Projektive Geometrie.

O gieometrji wykreślnej patrz artykuł w tym samym tomie:

7. E. PAPPERITZ. Darstellende Geometrie.

ARYTMETYKA.

OPRACOWAŁ

WACŁAW SIERPIŃSKI.

---

1. Jednym z najważniejszych pojęć matematycznych jest pojęcie liczby całkowitej dodatniej, czyli tak zwanej *liczby naturalnej*. Dla osób, rozpoczynających (choćby nawet wyższe) studja matematyczne, byłoby jednak rzeczą przedwczesną zastanawianie się nad pytaniem, czym jest liczba naturalna. Osoby takie najlepiej uczynią, jeżeli pojęcie liczby naturalnej przyjmą jako gotowe [1]).

2. Skoro tylko przyjmiemy pojęcie liczby naturalnej jako znane, cała arytmetyka daje się zbudować bez żadnego postulatu, na drodze czysto logicznej. Wszystkie inne rodzaje liczb, z któremi ma do czynienia arytmetyka dzisiejsza, dadzą się wprowadzić drogą definicji, przy rozważaniu zbiorów liczb naturalnych lub zbiorów zbiorów takich liczb. Wobec tego każde twierdzenie analizy daje się wyrazić jako pewne twierdzenie o licz-

---

[1]) Nie chcemy przez to bynajmniej twierdzić, aby zastanawianie się nad gienezą pojęcia liczby całkowitej było rzeczą bezużyteczną; jesteśmy tylko zdania, że badania te (co do których zresztą możnaby się spierać, czy należą do matematyki, czy też do filozofji) nie są odpowiednie dla początkującego matematyka. Istnieje zresztą cała literatura o pojęciu liczby naturalnej: zob. francuskie wydanie Encyklopedji Matematycznej, T. I, vol. I, str. 1—9. Zob. też rozdz. Zagadnienia filoz. matematyki.

bach naturalnych albo zbiorach takich liczb. Dlatego też powiada H. Poincaré: Dzisiaj w analizie pozostają jedynie liczby całkowite lub układy skończone albo nieskończone liczb całkowitych, połączone siecią równości lub nierówności. Matematyka, jak się mówi, zarytmetyzowała się [1]). Pierwszym propagatorem takiej arytmetyzacji był Kronecker (w drugiej poł. XIX w.).

3. Naukę o liczbach całkowitych i o liczbach wymiernych uważa się zazwyczaj jako należycie poznaną już w szkole średniej. Założenia takiego nie można jednak uczynić już co do teorji liczb niewymiernych. W szkole średniej traktowane bywają zazwyczaj tylko pewne klasy liczb niewymiernych i to często w sposób, nie wytrzymujący krytyki naukowej. (W wielu podręcznikach gimnazjalnych np. definicja liczby $\sqrt{2}$ zawiera błędne koło). Dlatego też, jeżeli jest rzeczą pożądaną, aby rozpoczynający wyższe studja matematyczne pogłębił swoje wiadomości z zakresu liczb całkowitych oraz liczb wymiernych [2]), to już rzeczą konieczną jest rozpoczęcie teorji liczb niewymiernych ab ovo.

Jest kilka teorji liczb niewymiernych (wszystkie one powstały dopiero w drugiej połowie ubiegłego stulecia), z których najważniejsze są dwie: teorja R. Dedekinda i teorja G. Cantora.

Jak to należy rozumieć? Czyżby według Dedekinda liczbą niewymierną było co innego niż według Cantora? (A w takim razie, w każdym przypadku trzebaby omawiać, czy liczby niewymierne pojmujemy w znaczeniu Dedekinda, czy też Cantora). Odpowiedź na to pytanie damy po krótkim scharakteryzowaniu obu tych teorji, teraz przytoczymy tylko następującą uwagę Poincarégo: »Matematycy nie badają przedmiotów, lecz stosunki między przedmiotami; obojętnym jest im tedy zastąpienie tych przedmiotów przez inne, byle tylko stosunki pozostały niezmienione« [3]).

4. Teorja liczb niewymiernych Dedekinda oparta jest na

[1]) Nauka i Metoda. Przekład M. H. Horwitza. Warszawa, 1911, str. 92.

[2]) Odpowiednie podręczniki wskażemy przy końcu niniejszego rozdziału.

[3]) Nauka i Hypoteza. Przekład M. H. Horwitza. Warszawa, 1908, str. 23.

pojęciu *przekroju (Schnitt, coupure)*. Przekrojem liczb wymiernych nazywamy podział ogółu wszystkich liczb wymiernych na dwie klasy: A i B, takie, iż każda liczba klasy A jest mniejszą od każdej liczby klasy B. Jeżeli przytym w klasie A niema liczby największej, zaś w klasie B niema liczby najmniejszej, to powiadamy, że przekrój wyznacza *lukę*. (Np. jeżeli do klasy B zaliczymy wszystkie liczby wymierne dodatnie, których kwadrat jest większym od liczby 2, zaś do klasy A wszystkie pozostałe liczby wymierne, to przekrój taki, jak łatwo widzieć wyznaczy lukę). Otóż liczbami niewymiernemi są według Dedekinda symbole, służące do oznaczania przekrojów, dających luki. Liczbę niewymierną, oznaczającą dany przekrój $[A, B]$ uważamy (ex definitione) jako większą od każdej liczby wymiernej klasy A oraz jako mniejszą od każdej liczby wymiernej klasy B.

Aż nadto widocznym jest bezpośredni związek teorji Dedekinda z teorją mierzenia odcinków. Weźmy pod rozwagę odcinki linji prostej o różnej długości. Pewien z nich np. odcinek u przyjmijmy za jednostkę długości. Będziemy mówili, że jakiś odcinek a jest *współmierny* z jednostką długości u, jeżeli istnieje taki odcinek d, który mieści się dokładnie całkowitą liczbę razy zarówno w odcinku a jak i w odcinku u. Wiadomo z gieometrji, że nie każde dwa odcinki posiadają taką własność. Np. jeżeli za jednostkę długości przyjmiemy bok jakiegokolwiek kwadratu, to przekątnia tegoż kwadratu nie będzie z nim współmierna. Ale w tym przypadku możemy wszystkie odcinki, współmierne z bokiem kwadratu, podzielić na dwie klasy, zaliczając do pierwszej wszystkie te, które są krótsze od jego przekątni, — do drugiej zaś te, które są od niej dłuższe. Można z łatwością ustalić pewną ściśle określoną odpowiedniość między odcinkami, współmiernemi z przyjętą jednostką długości z jednej strony a liczbami wymiernemi z drugiej, odpowiedniość, według której każdemu odcinkowi spółmiernemu z jednostką długości odpowiadać będzie pewna liczba wymierna, zwana jego miarą, i odwrotnie. W naszym przypadku przekątnia uskuteczni nie tylko podział na dwie klasy wszystkich współmiernych z bokiem kwadratu odcinków, ale zarazem podzieli na dwie klasy zbiór wszystkich liczb wymiernych, będących ich miarami, i, jak łatwo widzieć, podział ten będzie przekrojem, dającym lukę. Przekątni kwadratu zatym odpowiadać będzie pewna liczba niewymierna.

W ten sposób możnaby też z łatwością każdemu, niewspółmiernemu z jednostką długości odcinkowi, przyporządkować pewną liczbę niewymierną i nazwać ją jego miarą. Każdy odcinek miałby więc oznaczoną miarę (w odniesieniu do danej jednostki długości). Warto zaznaczyć, że odwrotne twierdzenie, t. j. twierdzenie, że każdej liczbie niewymiernej odpowiada odcinek, którego miarą jest ta liczba — nie jest bynajmniej oczywiste. (Jest to tak zwany pewnik[1]) Cantora. Zob. Mathematische Annalen Bd. 5, r. 1872, str. 128). Przy odpowiednim układzie pewników gieometrji można atoli twierdzenie takie udowodnić[2]). Odpowiedniość między odcinkami a liczbami rzeczywistemi, będącemi ich miarami (przez liczbę rzeczywistą rozumiemy liczbę wymierną lub niewymierną) odgrywa rolę przewodnika przy stawianiu definicji działań na liczbach rzeczywistych. Np. dla pojęcia sumy dwu liczb rzeczywistych, które są odpowiednio miarami odcinków a i b, jako całkiem naturalna definicja nasuwa się następująca: jest to miara odcinka, który jest sumą odcinków a i b. (Oczywiście definicja ta może być wyrażona w formie wolnej od wszelkiego pierwiastka gieometrycznego). W ten sposób cała teorja liczb niewymiernych rozwija się całkiem naturalnie, a nadto zyskujemy na poglądowości i nie zatracamy gieometrycznego punktu widzenia.

5. Teorja Cantora oparta jest na pojęciu t. zw. *ciągu podstawowego (Fundamentalreihe)*. Jest to taki ciąg nieskoń-

---

[1]) Co do znaczenia wyrazu »pewnik« odsyłamy do art.: Podstawy Gieometrji, § 3.

[2]) Twierdzenie to daje się dowieść z łatwością, jeżeli przyjąć jako pewnik następującą własność prostej: »Jeżeli wszystkie punkty prostej podzielimy na takie dwie klasy, iżby każdy punkt pierwszej klasy leżał na lewo od każdego punktu klasy drugiej, to istnieje jeden i tylko jeden punkt, oddzielający te dwie klasy« (Pewnik Dedekinda). Można dowieść, że pewnik Dedekinda jest równoważny następującemu pewnikowi Ascoli'ego: »Jeżeli mamy ciąg nieskończony odcinków, których długość zmierza do zera, a każdy następny odcinek leży wewnątrz poprzedzającego, to istnieje jeden i tylko jeden punkt, wspólny tym wszystkim odcinkom«.

czony, z którego, mając dowolną daną liczbę dodatnią ε, możemy zawsze usunąć skończoną liczbę wyrazów tak, iżby wszystkie pozostałe wyrazy różniły się między sobą bezwzględnie mniej niż o ε. (Mathematische Annalen, Bd. 21, str. 567).

O ciągu nieskończonym mówimy, że zmierza do *granicy* g, jeżeli, mając dowolną daną liczbę dodatnią ε, możemy z niego zawsze usunąć skończoną liczbę wyrazów w ten sposób, iżby każdy z pozostałych wyrazów różnił się od liczby g bezwzględnie mniej niż o ε. Można dowieść, że każdy ciąg liczb wymiernych, zmierzający do wymiernej granicy, jest ciągiem podstawowym, ale niekoniecznie naodwrót (Np. ciąg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest podstawowym, ale nie posiada wymiernej granicy).

Weźmy pod rozwagę wszystkie ciągi podstawowe o wyrazach wymiernych, nie posiadające wymiernych granic, i podzielmy je na klasy, zaliczając do jednej i tej samej klasy dwa dane ciągi wtedy i tylko wtedy, jeżeli ciąg różnic odpowiednich wyrazów danych ciągów zmierza do zera. Symbole, służące do oznaczania otrzymanych w ten sposób klas, nazywa Cantor liczbami niewymiernemi.

Można udowodnić, że każdej, określonej wyżej klasie ciągów podstawowych odpowiada oznaczony w zupełności przekrój liczb wymiernych, dający lukę, i naodwrót: każdy taki przekrój odpowiada oznaczonej w zupełności klasie ciągów podstawowych, nie mających wymiernej granicy. Wobec tego możemy dla oznaczania uważanych klas używać tych samych symboli, jakich używamy dla oznaczania przekrojów, dających luki.

W ten sposób będzie można powiedzieć, że liczby niewymierne Cantora są tym samym, co i liczby niewymierne Dedekinda. Teorje Cantora i Dedekinda różnią się więc jedynie sposobem wprowadzania liczb niewymiernych.

6. Z teorją liczb niewymiernych łączy się ściśle teorja t. zw. procesów nieskończonych, t. j. nieskończonych ciągów, szeregów, iloczynów, ułamków ciągłych i t. p. Już np. w samej teorji Cantora tkwi pojęcie ciągu nieskończonego i jego granicy (definicję granicy podaliśmy wyżej). Fakt, że ciąg nieskończony

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

zmierza do granicy g, wyrażamy pisząc

$$\lim_{n=\infty} u_n = g.$$

Dowodzi się, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, iżby dany ciąg nieskończony posiadał oznaczoną granicę (wymierną lub niewymierną) jest warunek, iżby ciąg ten był podstawowym. Ciągi, posiadające oznaczoną granicę, nazywamy *zbieżnemi*.

Jeżeli ciąg u_n posiada tę własność, że, mając daną, jak chcąc zresztą wielką liczbę dodatnią A, możemy zawsze usunąć z niego skończoną liczbę wyrazów tak, iżby każdy z pozostałych wyrazów ciągu był $> A$, to powiadamy, że ciąg u_n wzrasta nieograniczenie i piszemy

$$\lim_{n=\infty} u_n = +\infty.$$

Jeżeli ciąg $v_n = -u_n$ zmierza do $+\infty$, to piszemy

$$\lim_{n=\infty} u_n = -\infty.$$

Ciąg $u_n = u'_n + u''_n$ nazywamy *sumą* ciągów u'_n i u''_n: analogicznie określamy różnicę, iloczyn i iloraz ciągów. Granicą sumy skończonej liczby ciągów jest suma granic tych ciągów. Podobne twierdzenia (z pewnemi zastrzeżeniami co do dzielenia) zachodzą i dla innych działań.

Jeżeli c_0 oznacza liczbę całkowitą ($\gtreqless 0$), zaś każdy z wyrazów ciągu

$$c_1,\ c_2,\ c_3, \ldots$$

przedstawia pewną cyfrę w układzie dziesiętnym, to ciąg ułamków dziesiętnych

$$c_0{,}c_1\,;\ c_0{,}c_1c_2\,;\ c_0{,}c_1c_2c_3\,; \ldots$$

jest zawsze zbieżny; jeżeli g oznacza jego granicę, to piszemy:

$$g = c_0{,}c_1c_2c_3, \ldots$$

i mówimy, że prawa strona tego wzoru przedstawia rozwinięcie liczby g na ułamek dziesiętny. Dowodzi się, że każdą liczbę rzeczywistą można rozwinąć na ułamek dziesiętny.

7. Jeżeli

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots$$

oznacza dany ciąg nieskończony, to symbol postaci

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

nazywamy szeregiem nieskończonym, zaś sumę

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

— n-tym reduktem uważanego szeregu.

Szereg nazywamy zbieżnym, jeżeli ciąg kolejnych jego reduktów jest zbieżny: granicę tego ciągu nazywamy *sumą* uważanego szeregu. Mamy np.:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots$$

Szeregi nieskończone do pewnego tylko stopnia zachowują się analogicznie do szeregów skończonych. Nie w każdym np. szeregu nieskończonym można dowolnie zmieniać porządek składników, nie zmieniając przez to wartości jego sumy. Np. szereg

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \cdots$$

daje sumę zero, ale przez prostą zmianę porządku składników otrzymujemy z niego szereg

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \cdots,$$

którego sumą jest pewna liczba dodatnia.

W nauce o szeregach nieskończonych jest osobny rozdział, zajmujący się warunkami (bądź koniecznemi, bądź wystarczającemi) zbieżności szeregów. Są to tak zwane *kryterja* (cechy) *zbieżności.*

Iloczynem nieskończonym nazywamy symbol

$$u_1\ u_2\ u_3 \ldots,$$

gdzie u_n oznacza dany ciąg nieskończony. Badanie iloczynów nieskończonych sprowadza się do badania ciągów

$$p_n = u_1\ u_2 \ldots u_n$$

(granicę tego ciągu — o ile istnieje — uważamy jako wartość badanego iloczynu nieskończonego).

Ułamkiem łańcuchowym (arytmetycznym), nazywamy symbol

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}},$$

gdzie a_0 oznacza daną liczbę całkowitą $\gtreqless 0$, zaś a_n — dany ciąg liczb naturalnych. Liczbę

$$R_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

nazywamy n-tym reduktem uważanego ułamka łańcuchowego. Dowodzi się, że ciąg reduktów każdego nieskończonego ułamka łańcuchowego arytmetycznego jest zbieżny, a granicą jego jest liczba niewymierna. Liczbę tę uważamy jako wartość badanego ułamka łańcuchowego. Dowodzi się też, że każda liczba niewymierna może być uważana jako wartość pewnego nieskończonego ułamka łańcuchowego arytmetycznego. Liczby niewymierne, spełniające równania drugiego stopnia o wymiernych współczynnikach, dają okresowe ułamki łańcuchowe i naodwrót.

8. Dalszym uogólnieniem pojęcia liczby są t. zw. *liczby zespolone*. Z arytmetyzacyjnego punktu widzenia są to układy dwu liczb rzeczywistych. Liczbą zespoloną jest więc każdy symbol

$$(a, b),$$

gdzie a i b są liczby rzeczywiste. Drogą definicji wprowadzamy pojęcia równości, sumy oraz iloczynu takich symboli, a mianowicie:

I) $(a, b) = (c, d)$ wtedy i wtedy tylko, jeżeli: $a = c$, $b = d$.

II) $$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

III) $$(a, b) . (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Z tych trzech umów można już wyprowadzić całą arytmetykę liczb zespolonych.

Między zbiorem liczb zespolonych typu $(a, 0)$ oraz zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych a istnieje tego rodzaju odpowiedniość, że wyniki tych samych działań nad odpowiedniemi liczbami są zawsze odpowiednie [Np. $(2, 0).(3, 0)+(1, 0)=(7, 0)$; $2.3+1=7$]. Wobec tego piszemy zamiast $(a, 0)$ poprostu a. W ten sposób liczby rzeczywiste są przypadkiem szczególnym liczb zespolonych.

Dla skrócenia liczbę zespoloną $(0, 1)$ oznaczamy literą i oraz nazywamy *jednostką urojoną*. Z przyjętych umów wynika, że

$$(a, b)=(a, 0)+(b, 0).(0, 1)=a+bi.$$

Mamy też (wobec III):

$$i^2=(0, 1).(0, 1)=(-1, 0)=-1.$$

Wobec tego piszemy niekiedy zamiast litery i symbol $\sqrt{-1}$. W ten sposób każdą liczbę zespoloną możemy przedstawić w postaci

$$a+b\sqrt{-1},$$

gdzie a i b są dwie liczby rzeczywiste.

Naszkicowany wyżej sposób wprowadzania liczb zespolonych zawdzięczamy Hamiltonowi (1837). Inaczej wprowadza liczby zespolone Cauchy (1847). Weźmy pod rozwagę wszystkie wielomiany całkowite zmiennej rzeczywistej i o spółczynnikach rzeczywistych. Dwa wielomiany będziemy uważali jako równoważne (łącząc je znakiem równości), jeżeli przy dzieleniu przez i^2+1 dają jednakowe reszty. Każdy wielomian daje się wobec tego (i to w jeden tylko sposób) sprowadzić do postaci $a+bi$ (gdyż jest równoważny reszcie, jaką daje przy dzieleniu przez i^2+1). Z łatwością przekonywamy się, że, wobec przyjętych umów, mamy:

I) $a+bi=c+di$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $a=c$, $b=d$.

II) $$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

III) $$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i,$$

skąd widać, że teorje Hamiltona i Cauchy'ego wychodzą na jedno.

Liczby zespolone dają się z łatwością odwzorować gieometrycznie, mianowicie liczba $a+bi$ bądź jako punkt płaszczyzny o spółrzędnych (a, b), bądź jako odcinek (wektor) równy co do długości i kierunku odcinkowi łączącemu punkt (0, 0) z punktem (a, b). Przy ostatniej interpretacji dodawanie liczb zespolonych jest równoważne dodawaniu wektorów. (Zob. Rachunek wektorów w artykule p. t. Fizyka, t. II Poradnika). Mnożeniu liczb zespolonych również można nadać interpretację gieometryczną.

Można badać nieskończone ciągi, szeregi i t. p. o wyrazach zespolonych. Odpowiednie definicje są analogiczne do odpowiednich definicji dla liczb rzeczywistych, przyczym rolę wartości bezwzględnej odgrywa tu tak zwany *moduł* liczby zespolonej $a+bi$, mianowicie liczba nieujemna $\sqrt{a^2+b^2}$.

Działania na liczbach zespolonych posiadają te same własności co odpowiednie działania na liczbach rzeczywistych (np. przemienność i łączność dodawania i mnożenia; prawo rozdzielności; własność, że iloczyn liczb różnych od zera jest różnym od zera). Okazuje się, że pojęcie liczby nie może już ulec dalszemu uogólnieniu przy zachowaniu wszystkich tych własności. Uogólnić liczby zespolone możemy więc jedynie, poświęcając niektóre z tych własności. Takie uogólnienie przedstawiają np. t. zw. *kwaternjony* Hamiltona.

9. Kwaternjonem nazywamy każdy symbol

$$(a_1, a_2, a_3, a_4),$$

gdzie a_1, a_2, a_3, a_4, są cztery liczby rzeczywiste. Cała arytmetyka kwaternjonów daje się wyprowadzić z trzech następujących umów:

I) $(a_1, a_2, a_3, a_4)=(b_1, b_2, b_3, b_4)$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli

$$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3,\ a_4=b_4$$

II) $(a_1, a_2, a_3, a_4)+(b_1, b_2, b_3, b_4)=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, a_4+b_4)$,

III) $(a_1, a_2, a_3, a_4)\,(b_1, b_2, b_3, b_4)=(a_1\,b_1-a_2\,b_2-a_3\,b_3-$

$$-a_4\,b_4,\ a_1\,b_2+a_2\,b_1+a_3\,b_4-a_4\,b_3,\ a_1\,b_3+a_3\,b_1+a_4\,b_2-$$

$$-a_2\,b_4,\ a_1\,b_4+a_4\,b_1+a_2\,b_3-a_3\,b_2)$$

Iloczyn dwu kwaternjonów zależy wogóle od porządku czynników np.:

$$(0, 1, 0, 0)\,(0, 0, 1, 0)=(0, 0, 0, 1)$$

$$(0, 0, 1, 0)\,(0, 1, 0, 0)=(0, 0, 0, -1).$$

Istnieje nieskończenie wiele różnych kwaternjonów, spełniających równanie $x^2 = -1$.

Badano też liczby ogólniejsze, utworzone przy pomocy układów n liczb rzeczywistych, (tak zwane liczby o n jednostkach). Pewien rodzaj liczb trójjednostkowych (t. zw. *wektory*) zyskał zastosowanie w fizyce. (Odpowiednia literatura podana jest w Fizyce, T. II Poradnika).

---

10. Osobom, pragnącym pogłębić swe wiadomości z nauki o liczbach całkowitych, polecamy:

S. Zaremba. Zarys pierwszych zasad teorji liczb całkowitych. Kraków, nakładem Akademji Umiejętności. 1907. Stron 166. Cena kor. 4.

W przedmowie czytamy: »Przedmiotem dziełka tego jest najelementarniejszy dział arytmetyki teoretycznej. Nie należałoby jednak wywnioskować z tego, że podręcznik ten ma służyć do pierwszego obeznania się z początkami arytmetyki. Dziełko to przeznaczone jest, w pierwszym rzędzie, dla przyszłych nauczycieli matematyki i cel jego polega na wyłożeniu zasad teorji liczb całkowitych w tak ściśle naukowej postaci, aby teorja ta mogła zadość uczynić wymaganiom zawodowego matematyka«.

Dalszy ciąg i dokończenie tej książki stanowi dzieło:

S. Zaremba. Arytmetyka teoretyczna. Kraków, Akademja Umiejętności. 1912. Str. XX + 859. Cena kor. 20.

W przedmowie do tego dzieła powiada autor: »Książkę tę napisałem wogóle dla osób, oddających się głębszym studjom z zakresu analizy matematycznej, przedewszystkiem jednak miałem na myśli przyszłych profesorów matematyki w średnich i wyższych zakładach naukowych«.

Autor opracował w tym dziele pojęcie liczby w sposób możliwie wszechstronny i wyczerpujący, uwzględniając przytym najnowsze zdobycze nauki na tym polu[1]).

Kto pragnie się bliżej zapoznać z Cantor'owską teorją liczb niewymiernych, ten znajdzie ją w dziełku:

---

[1]) Wskazówki, jak studjować to dzieło, znajdzie czytelnik w przedmowie do niego.

W. Sierpiński. Teorja liczb niewymiernych. Wykłady uniwersyteckie. Warszawa 1910. Str. IV+149. Cena kop. 75.

Teorja liczb niewymiernych Dedekinda znajduje się wyłożona krótko w dziełku:

T. Łopuszański. Z podstaw teorji funkcyj. Kraków 1903.

Z artykułów treści dydaktycznej, dotyczących arytmetyki teoretycznej, na uwagę zasługuje:

A. Łomnicki. Kolejne rozszerzanie zakresu pojęcia liczby. »Wiadomości matematyczne«, T. XV, str. 53—78.

S. Zaremba. Wstęp do analizy. Wyd. 2. Nakł. kółka mat.-fiz. U. U. J. w Krakowie, k. 6 (litogr.).

S. Zaremba. Teorja ciągów i szeregów nieskończonych. Wyd. 2 (tamże), k. 3 (litogr.).

W. Sierpiński. Teorja nieskończonych szeregów, iloczynów i ułamków ciągłych. Nakładem Kółka mat.-fiz. U. U. Lwowskiego, k. 2.70 (litogr.).

W. Sierpiński. Arytmetyczna teorja kwaternjonów; k. 0.80 (litogr.).

Z rozpraw klasycznych — polecić należy przedewszystkim zapoznanie się z następującemi:

R. Dedekind. Stetigkeit und irrationale Zahlen. Brunświk, 1872 (Wydanie trzecie: 1905). Cena m. 1.

R. Dedekind. Was sind und was sollen die Zahlen. Brunświk, 1888. (wyd. 3-cie, 1911). Cena m. 1.80.

Heine. Die Elemente der Funktionenlehre. Journal f. reine u. angew. Mathematik, Bd. 74 (1872), str. 172—188. Są tu na kilkunastu stronach treściwie, ale zarazem całkiem ściśle wyłożone (pod wpływem Weierstrassa i Cantora) podwaliny współczesnej analizy. Tam też po raz pierwszy ogłoszoną została drukiem teorja liczb niewymiernych Cantora.

Weierstrass'owską teorję liczb niewymiernych[1]) wyłożył:

V. Dantscher. Vorlesungen über die Weierstrass'sche Theorie der irrationalen Zahlen. Lipsk, 1908. Str. VI+80. Cena m. 2.80.

---

[1]) Teorja Weierstrassa ma dzisiaj już tylko historyczną wartość.

Z podręczników arytmetyki teoretycznej w językach obcych pierwsze miejsce zajmuje:

Stolz und Gmeiner. Theoretische Arithmetik. Część I: Lipsk, 1900. Część II: Lipsk, 1902. Razem stron XI+402. Cena m. 13.20.

Zauważymy wreszcie, że podstawowe wiadomości z teorji liczb niewymiernych, szeregów oraz iloczynów nieskończonych znaleźć można w wielu większych podręcznikach analizy lub rachunku różniczkowego, np. E. Goursat: Cours d'Analyse Mathématique.

Po bliższe szczegóły bibljograficzne odsyłamy do Encyklopedji Matematycznej (wyd. francuskie). T. I vol. I, fasc. 1, 2 i 3.

TEORJA LICZB.

OPRACOWAŁ

WACŁAW SIERPIŃSKI.

Treść: 1. Przedmiot teorji liczb. 2. Stosunek jej do innych działów matematyki. Zastosowania. 3. Krótki rys rozwoju teorji liczb: EUKLIDES; ERATOSTHENES; DIOPHANTES; FERMAT; WILSON; EULER; GAUSS; LEJEUNE-DIRICHLET. 4. Zagadnienia analitycznej teorji liczb. 5. Teorja ciał liczbowych algiebraicznych. 6. Wymagane przygotowanie; porządek studjów. 7. Literatura; dzieła klasyczne; podręczniki.

---

1. Osoby, nie znające bliżej podziału nauk matematycznych, skłonne są do sądzenia, że t e o r j a l i c z b zajmuje się pojęciem liczby w jego fazach kolejnych (liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne, zespolone, wielojednostkowe i t. p.). Tak jednak bynajmniej nie jest: teorja liczb nie jest, ani też nie ma pretensji do tego, żeby być jakąś filozofją pojęcia liczby. To ostatnie bierze ona, już jako gotowe, od arytmetyki, zajmując się sama działem bardzo specjalnym, bo b a d a n i e m w ł a s n o ś c i l i c z b c a ł k o w i t y c h. Z tego też względu możnaby powiedzieć, że nazwa Teorji liczb niezupełnie jest odpowiednią; utrzymała się ona jednak przez tradycję.

2. Co się tyczy związku teorji liczb z innemi działami matematyki, to jest on, jak dotąd, tylko jednostronny: teorja liczb stosuje, mianowicie, w swoich badaniach bardzo chętnie wyniki innych działów analizy a nawet gieometrji (np. rachunek całkowy w analitycznej teorji liczb; geometrja liczb MINKOWSKIEGO), sama natomiast prawie nic im za to nie daje (przynajmniej, co się tyczy stosowania wyników teorji liczb). Wyjątki w tym względzie są bardzo nieliczne; ważniejsze zastosowania znajduje teorja liczb, jak dotąd, tylko w algiebrze wyższej, przy rozwiązywaniu pewnych klas równań (równanie podzielności koła). Z tego też względu obszerniejsze podręczniki algiebry wyższej zawierają zazwyczaj krótki wykład podstaw teorji liczb.

3. Pewne własności liczb całkowitych znane były już w starożytności. W Elementach EUKLIDESA (księga VII-ma) znajdujemy już pojęcie liczb: pierwszych, względnie pierwszych, kwadratowych, sześciennych, doskonałych. EUKLIDES bada podstawowe własności tych pojęć; w szczególności, dla przekonania się, czy dwie dane liczby są względnie pierwsze, podaje metodę, znaną do dzisiaj pod nazwą *algorytmu* EUKLIDESA (Metoda ta, znana z arytmetyki elementarnej, polega na kolejnym dzieleniu większej liczby przez mniejszą, mniejszej przez resztę i t. d.). W księdze IX-tej Elementów dowodzi EUKLIDES, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele (dowód elementarny, znany powszechnie, oparty na uwadze, że, w razie skończonej ilości liczb pierwszych, iloczyn wszystkich liczb pierwszych zwiększony o jedność, byłby liczbą pierwszą, większą od wszystkich liczb pierwszych, co jest absurdem). Z późniejszych matematyków starożytności, zajmujących się teorją liczb, wymienić wypada ERATOSTHENESA (277—194) i DIOPHANTESA.

Sposób elementarny wyznaczania kolejnych liczb pierwszych znany jest i dzisiaj pod nazwą *sita Eratosthenesa*. DIOPHANTES zajmował się rozwiązywaniem równań nieoznaczonych w liczbach całkowitych: stąd nazwa *równań djofantycznych*.

Z matematyków średniowiecza, zajmujących się teorją liczb, największym był bezwątpienia PIOTR FERMAT (1601—1665). Pozostawił on po sobie mnóstwo twierdzeń, niestety jednak bez dowodów. Prawie wszystkich twierdzeń jego dowiedli późniejsi matematycy; pozostało jednak dotąd jedno, znane pod nazwą »wielkiego twierdzenia FERMATA«, którego nie zdołano jeszcze udowodnić (ani też obalić), pomimo że kusili się o to najwięksi matematycy 18-go i 19-go wieku. Twierdzenie to opiewa, że równanie $x^n + y^n = z^n$ nie posiada rozwiązań całkowitych dodatnich (w liczbach x, y, z), jeżeli wykładnik n jest większy od 2. Przy pewnych szczególnych wartościach liczby n twierdzenie to już udowodniono: EULER zrobił to dla $n=3$ oraz $n=4$; DIRICHLET dla $n=5$ i niektórych innych wykładników; KUMMER dla wszystkich wykładników aż do stu.

Matematyk WOLFSKEHL z Darmsztatu, zmarły przed kilku laty, zapisał Tow. Naukowemu w Gietyndze sto tysięcy marek, które mają być wypłacone jako nagroda temu, kto bądź to znajdzie ogólny dowód twierdzenia FERMATA, bądź też wykaże jego fałsz na jednym choćby przykładzie.

Zrozumienie, o co chodzi w twierdzeniu FERMATA, wymaga zaledwie elementarnych wiadomości z matematyki: nie wynika stąd jednak bynajmniej, aby dowód twierdzenia również był elementarny. »Innego zdania — pisze KLEIN — jest w tym względzie szersza publiczność. Skoro się tylko wiadomość o nagrodzie rozeszła za pomocą gazet — bynajmniej zresztą do ogłaszania jej nie upoważnionych — zostaliśmy zasypani »dowodami«: brali w tym udział ludzie wszelkich zawodów, inżynierowie, nauczyciele ludowi, duchowni, bankier, wiele pań i t. d. Wspólne im wszystkim było tylko to, że *nie mieli żadnego pojęcia o poważnym matematycznym znaczeniu zagadnienia*, a też nie starali się o nim poinformować, licząc jedynie na to, że szczęśliwym trafem wpadną na dowód, co oczywiście wychodziło bez wyjątku wręcz naopak«. Sprawozdania z nadsyłanych dowodów z wykazaniem ich błędów drukują się w *Archiv der Math. u. Phys.* od r. 1909 (do r. 1911 było zreferowanych 111 dowodów!)

Z innych twierdzeń FERMATA najbardziej znane, noszące w przeciwstawieniu do poprzedniego nazwę »*małego twierdzenia* FERMATA« opiewa, że jeżeli p oznacza liczbę pierwszą, to wyrażenie $a^p - a$ jest przy wszelkim całkowitym a podzielne przez p (np. 4^7-4 podzielne przez 7, albo $2^{11}-2$ podzielne przez 11). Dowód tego twierdzenia daje się przeprowadzić środkami zupełnie elementarnemi.

Z matematyków XVIII-go wieku wypada nam tu wymienić WILSONA, EULERA, LAGRANGE'A i LEGENDRE'A. Twierdzenie WILSONA opiewa, że liczba $p>1$ jest pierwszą wtedy i wtedy tylko, jeżeli wyrażenie $1.\ 2.\ 3. \ldots . (p-1)+1$ jest podzielne przez p (np. 1. 2. 3. 4. 5. $6+1$ podzielne przez 7, lecz 1. 2. 3. 4. $5+1$ niepodzielne przez 6).

Euler (1707—1782) wzbogacił teorję liczb pewnemi twierdzeniami o podzielności oraz badaniami szczegółowemi t. zw. liczb doskonałych i zaprzyjaźnionych (*Doskonałą* nazywamy każdą liczbę, która się równa sumie wszystkich mniejszych od siebie dzielników, np. $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$. Dotąd znamy tylko dziewięć liczb doskonałych. Trzecią z rzędu jest 496, czwartą 8128: liczby te znał już Nikomachus. Ostatnia, największa ze znanych liczb doskonałych składa się z 37-miu cyfr: jest to liczba $2^{61}(2^{61}-1)$; odkryto ją dopiero w końcu ubiegłego stulecia. Nie wiadomo dotąd, czy istnieją liczby doskonałe nieparzyste). Największą atoli zasługą Euler'a w teorji liczb jest gruntowne studjum t. zw. reszt potęgowych, a w szczególności *reszt kwadratowych* (t. j. reszt, które otrzymujemy przy dzieleniu kolejnych kwadratów przez daną liczbę). Euler jest też ojcem t. zw. teorji form kwadratowych, którą rozwinęli następnie Lagrange i Legendre.

(*Formą kwadratową* nazywamy wyrażenie typu ax^2+ $+bxy+cy^2$, gdzie a, b, c są danemi liczbami całkowitemi [1]).

W teorji form kwadratowych chodzi o przedstawianie danych liczb za pomocą danych form kwadratowych, jakoteż o zagadnienia, dotyczące równoważności dwu form kwadratowych).

Eulerowi zawdzięczamy też pierwszy przykład posługiwania się rachunkiem nieskończonostkowym przy dowodzeniu twierdzeń teorji liczb. Euler wychodzi z tożsamości

$$\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (s>1)$$

gdzie iloczyn po lewej stronie należy rozciągnąć na wszystkie kolejne liczby pierwsze. (Formalny dowód tożsamości nie nastręcza żadnej trudności). Gdy s zmierza, malejąc, do jedności, prawa strona wzrasta nieograniczenie, gdyż szereg $\Sigma\frac{1}{n}$ (t. zw.

[1]) W algiebrze wyrażenie »forma kwadratowa« używane jest w znaczeniu ogólniejszym.

szereg harmoniczny) jest, jak wiadomo, rozbieżny. Stąd wniosek, że iloczyn $\Pi(1-\frac{1}{p})$, rozciągnięty na kolejne liczby pierwsze (t. j. iloczyn $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})\ldots$) zmierza do zera, co jest możliwe oczywiście tylko wtedy, jeżeli liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Mamy tutaj pewną nową metodę dowodu, którą później zastosował z pożytkiem LEJEUNE-DIRICHLET, przy dowodzie t. zw. twierdzenia o postępie arytmetycznym (patrz niżej).

Jako pewien całokształt, jako oddzielna nauka, datuje się teorja liczb dopiero od GAUSSA (1777—1855), mianowicie od ukazania się jego wiekopomnego dzieła Disquisitiones Arithmeticae (Lipsk, 1801). W dziele tym, prócz podstaw dzisiejszej teorji liczb wyłożona jest nauka o podzielności koła (za pomocą cyrkla i linjału), znajdująca się w ścisłym związku z teorją liczb. Spotykamy też tam po raz pierwszy przyjęte obecnie znakowanie t. zw. teorji kongruencji. Dwie liczby a i b nazywamy przystającemi do siebie według modułu m, jeżeli różnica ich jest podzielną przez m, co wyrażamy pisząc $a \equiv b$ (mod. m). Np. $100 \equiv 2$ (mod. 7). Kongruencje mają własności podobne do własności równań: można je np. dodawać, mnożyć stronami (gdy mają ten sam moduł), oraz podnosić obie strony kongruencji do jednej i tej samej potęgi o naturalnym wykładniku. Jeżeli $f(x)$ oznacza wielomian całkowity o całkowitych współczynnikach, to można mówić o rozwiązywaniu kongruencji $f(x) \equiv 0$ (mod. m), podobnie jak się mówi o rozwiązywaniu równania $f(x) = 0$. Analogja między teorją kongruencji a teorją równań nie jest jednak zupełną. GAUSSOWI zawdzięczamy też rozszerzenie pojęcia liczby całkowitej przez wprowadzenie liczb całkowitych zespolonych ($a + b\sqrt{-1}$, gdzie a i b są całkowite).

Z matematyków XIX-go wieku najbardziej zasłużył się teorji liczb LEJEUNE-DIRICHLET (1790—1859), który z powodzeniem stosował metody analityczne do rozwiązywania różnych zagadnień teorji liczb. Między innemi wywnioskował on (w r. 1837) z rozbieżności pewnych iloczynów nieskończonych, że każdy postęp arytmetyczny $ax + b$ ($x = 0, 1, 2, \ldots$), w którym *a* i *b* są liczby względnie pierwsze, zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. (Twierdzenie to przypuszczał już Legendre, nie potrafił jednak go dowieść). W pracy Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie (1849) podaje Lejeune-Dirichlet t. zw. wzory asymptotyczne na wartości średnie różnych funkcji liczbowych. Chodzi mianowicie o rzecz następującą. Różne t. zw. *funkcje liczbowe* (np. liczba dzielników liczby n, suma tych dzielników, liczba rozkładów liczby n na sumę dwu kwadratów, liczba liczb pierwszych względem n i nie większych od n i t. p.) zachowują się napozór nader nieprawidłowo, jeżeli je wyliczać dla kolejnych wartości liczby n (Np. oznaczając przez $\tau(n)$ liczbę dzielników liczby n, mamy: $\tau(1)=1$, $\tau(2)=2$, $\tau(3)=2$, $\tau(4)=3$, $\tau(5)=2$, $\tau(6)=4$, $\tau(7)=2$, $\tau(8)=4$, $\tau(9)=3$, $\tau(10)=4$ i t. d.). Jeżeli jednak oznaczymy przez $T(n)$ sumę pierwszych n wartości kolejnych uważanej funkcji liczbowej, to zazwyczaj udaje się znaleźć taką funkcję $F(n)$, znacznie prostszą i łatwiejszą do obliczania od $T(n)$, która może być uważana jako wartość przybliżona dla $T(n)$, w tym znaczeniu, że błąd stosunkowy zmierza do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie. Np. dla $T(n)=\tau(1)+\tau(2)+\dots+\tau(n)$, gdzie $\tau(n)$ oznacza liczbę dzielników n, znajduje Dirichlet jako taką przybliżoną (t. zw. *asymptotyczną*) wartość, funkcję

$$F(n)=n\,(\lg n+2C-1),$$

gdzie logarytm należy wziąć naturalny (Nepera), zaś C oznacza pewną liczbę stałą $=0{,}5772656649\dots$ (t. zw. stała Eulera). Mamy np.:

$$T(100)=485, \qquad F(100)=476,\dots$$
$$T(1000)=7069, \qquad F(1000)=7062,\dots$$
$$T(10000)=93668, \qquad F(10000)=93647,\dots$$

Gdyby $\tau(n)$ oznaczało sumę wszystkich dzielników liczby n, to jako wartość asymptotyczną odpowiedniej sumy $T(n)$ otrzymalibyśmy

$$F(n)=\frac{\pi^2 n^2}{12}$$

gdzie π oznacza stosunek obwodu koła do jego średnicy (Np. $T(100)=8249$, zaś $\dfrac{\pi^2 . 100^2}{12}=8231,\dots$)

Gdyby symbol $\tau(n)$ oznaczał liczbę liczb pierwszych względem n i niewiększych od n (t. zw. funkcję GAUSSA), mielibyśmy dla odpowiedniej sumy $T(n)$ wartość asymptotyczną

$$F(n) = \frac{3}{\pi^2} n^2$$

Opierając się na tym wzorze, możnaby obliczyć, że prawdopodobieństwo, iż dwie liczby naturalne, wzięte na chybił trafił, będą względnie pierwsze, wynosi $\frac{6}{\pi^2}$.

Najbardziej atoli przyciągało oddawna uwagę matematyków zagadnienie co do ilości liczb pierwszych w danych granicach. Oznaczmy przez $\Pi(x)$ liczbę liczb pierwszych, niewiększych od x. Już EUKLIDES wiedział, że $\Pi(x)$ wzrasta nieograniczenie wraz z x. W roku 1850 w pracy swej Mémoire sur les nombres premiers dowiódł CZEBYSZEW, że stosunek

$$\Pi(x) : \frac{x}{\lg x}$$

pozostaje stale ograniczonym, oraz że nie może zmierzać do innej granicy niż 1, gdy x wzrasta nieograniczenie. (W tejże pracy udowodnił CZEBYSZEW t. zw. *postulat Bertranda*, według którego między a i $2a-2$ znajduje się zawsze co najmniej jedna liczba pierwsza, jeżeli tylko $a > \frac{7}{2}$). Że wypisany stosunek istotnie zmierza do granicy 1, dowiedli (opierając się na badaniach RIEMANNA z r. 1859-go) dopiero w roku 1896-tym HADAMARD oraz DE LA VALLÉE-POUSSIN. Wynik ten został w r. 1909 uogólnionym przez LANDAU'A, który podał wzór asymptotyczny dla ilości liczb pierwszych $\leqslant x$, zawartych w dowolnym postępie arytmetycznym.

5. Wspomniane tutaj wyniki, dotyczące wzorów asymptotycznych, należą do tak zwanej analitycznej teorji liczb. Równocześnie jednak rozwijały się w drugiej połowie ubiegłego stulecia i inne działy teorji liczb, a przedewszystkim t. zw. *teorja ciał liczbowych algiebraicznych*. Liczby algiebraiczne całkowite są uogólnieniem liczb całkowitych zespolonych GAUSSA: są to pierwiastki równań algiebraicznych, których wszystkie spółczynniki są liczbami całkowitemi (zwykłemi), a nadto spół-

czynnik przy najwyższej potędze — jednością. Dla liczb całkowitych algiebraicznych udowodniono szereg twierdzeń, odpowiadających twierdzeniom elementarnej teorji liczb. Dla utrzymania tej analogji w teorji podzielności (np. przy twierdzeniu o jedynym rozkładzie liczby całkowitej na iloczyn samych czynników pierwszych) musiano jeszcze rozszerzyć pojęcie liczby całkowitej przez wprowadzenie t. zw. liczb idealnych (Kummer, 1856). Teorję ciał liczbowych algiebraicznych rozwinęli: Lejeune-Dirichlet, Dedekind, w ostatnich czasach — Hilbert.

6. Osoby, pragnące rozpocząć studjowanie teorji liczb, zaczynać muszą naturalnie od elementów, do których rozumienia potrzebne są skromne wiadomości z arytmetyki i algiebry (mniej więcej wykształcenie czteroklasowe). Nauka o podzielności liczb najbardziej przylega do arytmetyki elementarnej (Należy tu teorja największego wspólnego dzielnika, najmniejszej wielokrotnej, twierdzenie o rozkładzie liczb na czynniki pierwsze i t. p.). Później przejść można do teorji kongruencji, a następnie do teorji form kwadratowych. To wyczerpuje mniej więcej zakres elementarnej teorji liczb.

---

7. W języku polskim drukuje się obecnie podręcznik t. liczb:

W. Sierpiński. Teorja liczb. Kurs uniwersytecki. Bibljoteka mat.-fiz. Wydane z zapomogi Kasy Mianowskiego. Warszawa, 1914.

Podręcznik ten (przeszło 20 arkuszy druku) obejmuje mniej więcej całokształt teorji liczb.

Piękną monografję z teorji liczb ogłosił ś. p.:

E. Poznański. Pierwiastki pierwotne liczb pierwszych. Warszawa, Wende, 1901, stron 64. Cena kop. 60.

Do studjowania tej monografji wystarcza znajomość matematyki elementarnej.

Czym się zajmuje analityczna teorja liczb, dowiedzieć się można z mej publikacji:

Zagadnienia i metody Teorji analitycznej liczb. Wiadomości matem., Tom XIV (1910), str. 113—128.

Dzieła obce:

A) Klasyczne:

A. M. Legendre. Essai sur la théorie des nombres. 3-cie wydanie, Paryż, 1830 (2 tomy in 4-to).

Tłumaczenie niemieckie p. t. Zahlenteorie (tłumaczył H. Maser). Wyd. 2-gie, Lipsk, 1893. T. I str. 442, II-gi str. 453. Cena tomu m. 6.

C. F. Gauss. Disquisitiones Arithmeticae. Lipsk, 1801. Toż samo w I-szym tomie dzieł Gaussa, Gietynga, 1863 (Cena tomu m. 20).

P. G. Lejeune-Dirichlet. Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von R. Dedekind. Wyd. 4-te znacznie różniące się objętością od poprzednich. Brunświk, 1894. Stron XVII+657. Cena m. 15.

L. Kronecker. Vorlesungen über Zahlentheorie, herausg. v. K. Hensel. 2 tomy. Tom I, stron XVI+509 in 8-o. Lipsk, 1901. Cena m. 18.

B) Podręczniki:

P. Bachmann. Zahlentheorie:

I T. Die Elemente der Zahlentheorie. Lipsk, 1892. Str. XII+264 in 8-o. Cena m. 6.40.

II T. Die analytische Zahlentheorie. Lipsk, 1894. Str. XVIII+494 in 8-o. Cena m. 12.

III T. Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Lipsk, 1872. Str. XII+300 in 8-o. Cena m. 7.

IV T. Die Arithmetik der quadratischen Formen. I Abt. str. XVI+668 in 8-o. Lipsk, 1898. Cena m. 18.

V T. Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper. Str. XXII+548 in 8-o. Lipsk, 1905. Cena m. 16.

P. Bachmann. Niedere Zahlentheorie.

I T. str. X+402. Lipsk, 1902. Cena m. 13.

II. T. str. X+480. Lipsk, 1910. Cena m. 16.

P. Bachmann. Grundlehren der neueren Zahlentheorie. Str. XI+270. Lipsk, 1907. Cena m. 6.50.

Książka przeznaczona dla tych, którzy się chcą zapoznać w krótkości z nowszemi działami teorji liczb; przygotowanie wymagane minimalne.

J. Tannery. Introduction à l'étude de la Théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure. Str. X+350. (Teorja liczb, opracowana przez E. Borel'a zajmuje stron 120). Paryż, 1895.

E. Cahen. Éléments de la théorie des nombres. 1900. Cena fr. 12.

Świeżo wyszło:

E. Cahen. Théorie des Nombres. T. I, str. XII+408. (1913).

D. Hilbert. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresb. der deutsch. Math.-Vereinigung. 4 Bd. Berlin, 1894.

Jako przygotowanie do studjowania tego dzieła służyć może:

J. Sommer. Vorlesungen über Zahlentheorie (Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlkörper). Str. VI+361. Lipsk, 1907. Cena m. 11.

Wykład elementarnej teorji liczb znajduje się też u Serreta, Cours d'Algèbre supérieure. Tom II, Paryż, 1885, na str. 1—239.

Odrębny charakter ma dzieło:

H. Minkowski. Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie. Str. VIII+236. Lipsk, 1907. Cena m. 8.

Kto chce poprzestać tylko na krótkich wiadomościach z teorji liczb, ten je znajdzie w Encyklopedji matematyki elementarnej Webera i Wellsteina. T. I, str. 42—53 oraz str. 246—308.

Kogo interesuje specjalnie kwestja rozmieszczenia liczb pierwszych, temu polecamy kapitalne dzieło w tym względzie:

E. Landau. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Tom I, str. XVIII+564. Cena m. 20. Lipsk, 1909. Tom II, str. IX+426. Cena m. 14. Lipsk, 1910.

ALGIEBRA WYŻSZA.

OPRACOWAŁ

WACŁAW SIERPIŃSKI.

Treść: 1. Zasadnicze twierdzenie algiebry. Rozkład wielomianu na czynniki linjowe. Pierwiastki wielokrotne. 2. Funkcje symetryczne pierwiastków. 3. Równania o spółczynnikach rzeczywistych. 4. Przybliżone obliczanie pierwiastków. 5. Rozwiązywanie ogólne równań algiebraicznych; twierdzenie Abela; rozwiązywanie algiebraiczne równań liczbowych. 6. Równania rozwiązalne za pomocą pierwiastków kwadratowych. Równania podzielności koła. 7. Dowody niemożliwości. 8. Ciało algiebraiczne. Nieprzywiedlność. Teorja Galois'a. 9. Równania linjowe. Wyznaczniki. 10. Teorja grup skończonych i podstawień. 11. Literatura.

---

1. Przedmiot algiebry wyższej jest bardzo specjalny: zajmuje się ona badaniem t. zw. równań algiebraicznych. Równaniem algiebraicznym stopnia n-go o jednej niewiadomej x nazywamy równanie postaci

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \tag{1}$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots a_n$ są dane liczby (rzeczywiste lub zespolone), przytym $a_0 \neq 0$. Tak zwane *twierdzenie zasadnicze algiebry* (Gauss) opiewa, że dla każdego takiego równania istnieje przynajmniej jedna taka liczba α (rzeczywista lub zespolona), iż

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0$$

Wynika stąd, jako łatwy wniosek, że dla każdego równania (1) istnieje n oznaczonych w zupełności (przez współczynniki danego równania) liczb

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \tag{2}$$

(między któremi mogą być i równe sobie), takich, iż przy wszelkim x zachodzi równość:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)\ldots \quad (3)$$

Liczby (2) nazywamy *pierwiastkami* równania (1). Każde równanie algiebraiczne n-go stopnia posiada więc dokładnie n pierwiastków (równych lub różnych).

Jeżeli w ciągu (2) mamy k liczb równych tej samej liczbie α, to mówimy, że α jest k-krotnym pierwiastkiem równania (1). Dowodzi się, że każdy k-krotny ($k>1$) pierwiastek równania (1) jest (k-1)-krotnym pierwiastkiem równania

$$na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots 2a_{n-2}x+a_{n-1}=0, \quad (4)$$

i odwrotnie, każdy (k-1)-krotny pierwiastek równania (4) jest k-krotnym pierwiastkiem równania (1). Dla pozbawienia danego równania (1) pierwiastków wielokrotnych wystarczy lewą jego stronę podzielić przez największy wspólny dzielnik lewych stron wzorów (1) i (4). Każdy pierwiastek równania (1) będzie zwykłym (t. j. jednokrotnym) pierwiastkiem otrzymanego w ten sposób równania.

2. Z tożsamości (3) można wywnioskować, że między pierwiastkami oraz spółczynnikami danego równania zachodzi szereg związków, jak np.:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=-\frac{a_1}{a_0}$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_2}{a_0}$$

— — — — — — — — — — —

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

Lewe strony tych równości przedstawiają t. zw. *funkcje symetryczne* pierwiastków $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, t. j. takie wyrażenia, które nie zmieniają swej wartości, jeżeli zastąpimy dwa pierwiastki jeden przez drugi, np. α_1 przez α_2 i naodwrót. Dowodzi się, że każda funkcja symetryczna i wymierna względem pierwiastków równania (1) daje się wyrazić wymiernie przez współczynniki tego równania, przyczym nie zachodzi potrzeba rozwiązywania samego równania dla wyznaczenia wartości takiej funkcji. Z racji tej własności funkcje symetryczne odgrywają ważną rolę w teorji równań algiebraicznych.

3. Jeżeli spółczynniki równania (1) są rzeczywiste i liczba zespolona $\alpha = \xi + i\eta$ jest jednym z jego pierwiastków, to liczba z nią sprzężona $\xi - i\eta$ też jest pierwiastkiem równania (1). Pierwiastki zespolone równania o spółczynnikach rzeczywistych są parami sprzężone: jest ich więc liczba parzysta. Stąd wniosek, że każde równanie stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych posiada co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Twierdzenie to udowadnia się też bezpośrednio, wychodząc z uwagi, że w razie spółczynników rzeczywistych lewa strona wzoru (1), dla dostatecznie wielkich bezwzględnie x, ma znak wyrazu a_0x^n, zatym (wobec nieparzystości n) przybiera zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne, i przeto, jako funkcja ciągła, musi przynajmniej raz przejść przez zero.

4. Błędem byłoby przypuszczać, że głównym celem algiebry wyższej jest wyznaczanie liczbowe pierwiastków równań algiebraicznych, albo też szukanie ogólnych wzorów, wyrażających pierwiastki równania danego stopnia przez jego współczynniki. Wyznaczaniem liczbowym pierwiastków zajmuje się tylko jeden z działów algiebry wyższej, w którym traktowane są metody, pozwalające z dowolnym, danym z góry przybliżeniem, obliczać pierwiastki danego równania o liczbowych współczynnikach. W tym celu uskuteczniamy przedewszystkim t. zw. oddzielenie pierwiastków, które polega na wyznaczeniu takich przedziałów, żeby wewnątrz każdego z nich zawierał się jeden i tylko jeden pierwiastek uważanego równania. Oddzieliwszy pierwiastek, możemy następnie, na podstawie odpowiednich twierdzeń, dowolnie zacieśniać granice, między któremi się zawiera i w ten sposób otrzymać dowolne przybliżenie.

5. Co się tyczy wzorów ogólnych na pierwiastki, to musimy przedewszystkim jasno sformułować samo zagadnienie.

Równanie (1) nazywamy **ogólnym**, jeżeli spółczynniki jego uważamy jako zmienne niezależne. Ogólne rozwiązanie takiego równania polega na wyznaczeniu funkcji $f(a_0, a_1, \ldots a_n)$ takich, iżby wzór

$$a_0[f(a_0, a_1, \ldots a_n)]^n + a_1[f(a_0, a_1, \ldots a_n)]^{n-1} + \ldots + \\ + a_{n-1}f(a_0, a_1, \ldots a_n) + a_n = 0$$

zachodził tożsamościowo ze względu na $a_0, a_1, \ldots a_n$.

Jeżeli nadto żądamy, aby funkcja $f(a_0, a_1, \ldots a_n)$ była kombinacją skończonej liczby działań wymiernych i działania wyciągania pierwiastków naturalnych stopni, dokonanych na zmiennych $a_0, a_1, \ldots a_n$

$$\Bigg(\text{np. } f(a_0, a_1, a_2, a_3) = -\frac{a_1}{3a_0} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \text{ gdzie } p = \frac{3a_0a_2 - a_1^2}{3a_0^2},$$

$$q = \frac{2a_1^3 - 9a_0a_1a_2 + 27a_0^2a_3}{27a_0^3}\Bigg), \tag{5}$$

to mówimy, że chodzi nam o tak zwane algiebraiczne rozwiązanie uważanego równania ogólnego. Abel (1802—1829) dowiódł, że algiebraicznie rozwiązalne są tylko równania ogólne pierwszych czterech stopni. (Wzór (5) przedstawia rozwiązanie algiebraiczne równania ogólnego stopnia 3-go: jest to t. zw. wzór Cardany (1501—1576).

Żadne równanie ogólne stopnia $\geqslant 5$ nie jest więc rozwiązalne algiebraicznie. Są jednak rozwiązalne algiebraicznie pewne klasy równań stopni wyższych, np. tak zwane równania dwumienne $x^n - a = 0$.

Można też mówić o rozwiązywaniu algiebraicznym równań o liczbowych spółczynnikach: np. $\sqrt{3-\sqrt[5]{2}}$ będzie rozwiązaniem algiebraicznym (dla jednego z pierwiastków) równania stopnia 10-go: $(x^2-3)^5+2=0$. Niekażde równanie o liczbowych współczynnikach jest rozwiązalne algiebraicznie, np. równanie

$$x^5 - 4x - 2 = 0$$

nie jest rozwiązalne algiebraicznie.

6. Na szczególniejszą uwagę zasługują te równania, których pierwiastki dają się wyrazić przez dane liczby zespolone $d_1, d_2, \ldots d_k$ z pomocą działań wymiernych i działania wyciągania pierwiastka drugiego stopnia (przyczym działania te mogą występować dowolną, byleby skończoną liczbę razy).

Jeżeli na płaszczyźnie dane są obrazy liczb zespolonych $1, d_1, d_2, \ldots d_k$, to obrazy pierwiastków takiego równania można wyznaczyć za pomocą cyrkla i linjału i naodwrót: jeżeli jakiś punkt p płaszczyzny można wyznaczyć za pomocą cyrkla i linjału, posługując się danemi punktami, będącemi obrazami liczb: $1, d_1, d_2, \ldots d_k$, to punkt p jest obrazem liczby zespolonej, która daje się wyznaczyć za pomocą działań wymiernych i pierwiastków drugiego stopnia przez liczby $d_1, d_2, \ldots d_k$.

W szczególności, liczby zespolone, którym odpowiadają wierzchołki wielokąta foremnego o n bokach, wpisanego w koło o promieniu 1 (przy odpowiednim ustawieniu wieloboku) spełniają równanie dwumienne $x^n - 1 = 0$, a prócz jednego wierzchołka, też równanie $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0$ (tak zwane równanie podziału koła): na to żeby można było za pomocą cyrkla i linjału podzielić koło na n równych części potrzeba więc i wystarcza, żeby powyższe równanie było rozwiązalne za pomocą pierwiastków kwadratowych. Gauss (1777—1855) dowiódł, że jeżeli n jest liczbą pierwszą, to na to potrzeba i wystarcza, iżby liczba n była formy $2^k + 1$ (można więc np. podzielić koło za pomocą cyrkla i linjału na 3, 5, 17, 257 równych części, nie można zaś na 7, 11, 13, 19 i t. p.).

7. Ciekawy rozdział algiebry wyższej stanowią tak zwane *dowody niemożliwości (Unmöglichkeitsbeweise)*. Należy tu cały szereg klasycznych zagadnień konstrukcyjnych, które nie mogą być rozwiązane za pomocą cyrkla i linjału. W języku algiebry znaczy to, że zagadnienia te sprowadzają się do równań, które nie są rozwiązalne w pierwiastkach kwadratowych.

Np. żadne równanie stopnia trzeciego o pierwiastkach niewymiernych nie jest rozwiązalne w pierwiastkach kwadratowych: jako proste wnioski stąd, mamy niemożliwość t. zw. podwojenia sześcianu za pomocą cyrkla i linjału oraz podziału kąta na trzy równe części w przypadku ogólnym (np. nie można podzielić koła za pomocą cyrkla i linjału na 9 równych części).

Do dowodów niemożliwości należy też dowód twierdzenia, że tak zwane równanie nieprzywiedlne trzeciego stopnia o trzech pierwiastkach rzeczywistych i wymiernych współczynnikach nie jest rozwiązalne za pomocą działań wymiernych i działania wyciągania pierwiastków rzeczywistych naturalnego stopnia.

8. W teorji równań wyższych stopni kapitalną rolę od-

grywa pojęcie t. zw. *ciała liczbowego*. Przez ciało liczbowe rozumiemy zbiór liczb taki, że każde z czterech działań wymiernych (z wyjątkiem oczywiście dzielenia przez zero) wykonalne jest na liczbach uważanego zbioru i daje jako wynik liczbę również należącą do tego zbioru. Łatwo widzieć, że każde ciało liczbowe musi zawierać (jako t. zw. podmnogość) zbiór wszystkich liczb wymiernych: jeżeli prócz nich nie zawiera żadnych innych liczb, nazywamy je ciałem wymiernym (i oznaczamy zwykle przez R). Ogólniejszy przypadek przedstawiają tak zwane ciała algiebraiczne, np. zbiór C_1 wszystkich liczb postaci $a+b\sqrt{2}$, gdzie a i b są liczby wymierne, ogólniej, zbiór wszystkich liczb postaci

$$a_0+a_1\theta+a_2\theta^2+\ldots+a_{n-1}\theta^{n-1},$$

gdzie θ oznacza pierwiastek równania n-go stopnia o całkowitych współczynnikach.

O danym wielomianie

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots A_m,$$

którego współczynniki należą do danego ciała liczbowego C, powiadamy, że jest w tym ciele n i e p r z y w i e d l n y, jeżeli nie daje się przedstawić jako iloczyn dwu wielomianów o spółczynnikach należących do C. Wielomian może być nieprzywiedlny w pewnym ciele liczbowym, ale przywiedlny w innym, np. wielomian x^2-2 jest nieprzywiedlny w ciele R, ale przywiedlny w ciele C_1, gdyż

$$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

Niech $f(x)=0$ oznacza równanie stopnia n-go o różnych pierwiastkach, którego spółczynniki należą do ciała C. Dowodzi się, że można zawsze wyznaczyć takie ciało liczbowe L (tak zwane ciało Galois'a danego równania), że każda funkcja wymierna pierwiastków równania $f(x)=0$ należy do L i naodwrót. Na badaniu własności ciała L opiera się tak zwana algiebraiczna teorja równań (teorja Galois'a).

9. Dotychczas omawialiśmy tylko równania o jednej niewiadomej. Z równań o wielu niewiadomych najprostszemi są t. zw. równania linjowe. Układem m równań linjowych o n niewiadomych $x_1, x_2, \ldots x_n$ nazywamy zbiór równań:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

gdzie a_{ik} oraz b_i są liczby dane. W razie $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$ otrzymujemy t. zw. układ równań jednorodnych.

Badanie układu równań linjowych sprowadza się do badania pewnych wielomianów, utworzonych ze współczynników równań: są to t. zw. *wyznaczniki*.

Weźmy np. dwa równania linjowe o dwu niewiadomych:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}$$

Rozwiązania tych równań są

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

(naturalnie, o ile $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$). Oznaczając

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \begin{vmatrix} \alpha, & \gamma \\ \beta, & \delta \end{vmatrix},$$

będziemy mogli nasze rozwiązania przedstawić w postaci:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1, & a_{12} \\ b_2, & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}, & b_1 \\ a_{21}, & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Ogólnie, wyznacznik o n^2 elementach:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots\ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ a_{n1}, & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

przedstawia wspólny mianownik rozwiązań (formalnych) układu n równań linjowych o n niewiadomych:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - - - - - - - - - \\ - - - - - - - - - \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

Wyznaczniki określić można też niezależnie od teorji równań linjowych. Np. wyznacznik D określić możemy (według CAUCHY'EGO) jako wielomian, który otrzymamy, jeżeli rozwiniemy iloczyn

$$a_1 a_2 \ldots a_n (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_1)(a_3 - a_2)\ldots(a_n - a_2)\,.\\ .(a_4 - a_3)\ldots(a_n - a_{n-1})$$

i po rozwinięciu zastąpimy wszędzie a_i^k przez a_{ik} (Więc np. $a_1 a_2(a_2 - a_1) = a_1{}^1 a_2{}^2 - a_1{}^2 a_2{}^1$ należy zastąpić przez $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$). Często wyznaczniki określane są też za pomocą t. zw. definicji zwrotnych (określa się mianowicie wyznacznik o n^2 elementach, zakładając, że wiadomo już, co oznacza wyznacznik o $(n-1)^2$ elementach).

Teorja wyznaczników jest w ścisłym związku z teorją permutacji: można też stąd wysnuć określenie wyznacznika (CRAMER).

Można wreszcie definjować wyznaczniki za pomocą pewnych ich własności charakterystycznych (KRONECKER).

Wyznaczniki, jako narzędzie pomocnicze, odgrywają ważną rolę wszędzie, gdzie mamy do czynienia z układami równań linjowych, a więc, prócz algiebry, w gieometrji analitycznej, w teorji równań różniczkowych, a wyznaczniki nieskończone — w teorji równań całkowych.

10. Do algiebry zaliczana bywa zazwyczaj tak zwana teorja grup skończonych i podstawień [1]).

Grupą skończoną nazywamy skończony zbiór symboli (t. zw. elementów grupy), spełniający następujące trzy warunki:

1) Dla elementów uważanego zbioru ustalone jest pewne działanie, tak zwane *mnożenie*, polegające na podporządkowaniu każdemu układowi (a, b) elementów naszego zbioru pewnego

---

[1]) Por. rozdz.: Teorja grup przekształceń.

elementu c tego zbioru, co wyrażamy, pisząc $ab = c$. Nie jest przytym obojętnym porządek elementów układu (a, b), tak iż ab oraz ba mogą dawać różne wyniki.

2) Określone wyżej »mnożenie« powinno posiadać prawo łączności, t. j. dla każdego układu a, b, c mamy:

$$(ab)c = a(bc)$$

3) Z równości $ab = ac$, jak również z równości $ba = ca$ wynika zawsze: $b = c$.

Liczbę elementów grupy nazywamy jej rzędem.

Mnożenie określamy zwykle dla danej grupy za pomocą tabliczki zwanej *kwadratem Cayley'a*, utworzonej w ten sam sposób, co tabliczka mnożenia Pytagorasa.

Niech $a, b, c, \ldots f$ będą elementy danej grupy, n—jej rząd. Tabliczka Cayley'a wygląda tak:

	a	b	c	......	f
a	$a.a$	$a.b$	$a.c$		$a.f$
b	$b.a$	$b.b$	$b.c$		$b.f$
c	$c.a$	$c.b$	$c.c$		$c.f$
⋮					
f	$f.a$	$f.b$	$f.c$		$f.f$

W kratce, która jest przecięciem się wiersza o nagłówku g oraz kolumny o nagłówku h, mamy wpisany iloczyn gh, czyli pewien element grupy. Takich kratek mamy oczywiście n^2.

Jako przykład grupy skończonej weźmy grupę wszystkich różnych od zera reszt przy dzieleniu przez 7. Elementami naszej grupy będą więc liczby 1, 2, 3, 4, 5 i 6; rzędem grupy będzie $n = 6$. Mnożenie określimy w sposób następujący: ab

ma oznaczać r e s z t ę zwykłego iloczynu liczb a i b przy dzieleniu przez 7. Tabliczka CAYLEY'A będzie tu więc następująca:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Jako drugi przykład weźmy grupę, złożoną z czterech elementów a, b, c, d, za które przyjmiemy liczby: 1, —1, i, —i. Jako mnożenie dla naszej grupy uważajmy zwykłe mnożenie. Tabliczka jego będzie oczywiście następująca:

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	b	a
d	d	c	a	b

Jako trzeci przykład weźmy zbiór funkcji: $a(x)=x$, $b(x)=$

$$=1-x,\ c(x)=\frac{1}{x},\ d(x)=\frac{1}{1-x},\ e(x)=\frac{x-1}{x},\ f(x)=\frac{x}{x-1},$$

przyczym mnożenie elementów naszego zbioru określimy za pomocą wzoru:

$$\varphi\,.\,\psi=\psi(\varphi(x))$$

Łatwo stąd ułożyć następującą tabliczkę naszego działania:

	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	d	c	f	e
c	c	e	a	f	b	d
d	d	f	b	e	a	c
e	e	c	f	a	d	b
f	f	d	e	b	c	a

Grupa ta nie posiada prawa przemienności w mnożeniu, gdyż np.

$$bc = c(b(x)) = c(1-x) = \frac{1}{1-x} = d(x) = d,$$

natomiast

$$cb = b(c(x)) = b\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} = e(x) = e$$

Grupy, posiadające prawo przemienności w mnożeniu nazywają się grupami ABELA (takie są pierwsze dwie wyżej rozpatrzone grupy).

Dowodzi się, że jeżeli g i h oznaczają jeden i ten sam lub też dwa różne elementy danej grupy skończonej, to każde z dwu równań

$$hx = g \text{ oraz } yh = g$$

posiada po jednym i to jednym tylko rozwiązaniu w elementach grupy. (Rozwiązania x i y mogą zresztą być różne). Dla grupy wykonalne są więc (bez zastrzeżeń) oba tak zwane *dzielenia (lewostronne* i *prawostronne).* Odpowiednie ilorazy oznaczane są dla odróżnienia symbolami $\frac{g}{h}$ oraz $g:h$. Dowodzi się dalej że w każdej grupie skończonej istnieje jeden i tylko jeden element e taki, iż równość

$$eh = he = h$$

jest spełniona przez każdy element h grupy. Wobec analogji z liczbą 1 nazywamy taki element *jednością* danej grupy i oznaczamy symbolem 1. Dowodzi się, że dla każdego elementu h grupy oba ilorazy: $\frac{1}{h}$ oraz $1:h$ są identyczne: oznaczamy je symbolem h^{-1} i nazywamy *odwrotnością* elementu h.

Uogólnienie iloczynu równych czynników stanowi potęga o wykładniku naturalnym. Dowodzi się, że dla każdego elementu a istnieje pewna najmniejsza liczba naturalna δ, przy której mamy: $a^{\delta} = 1$; liczbę δ nazywamy *wykładnikiem,* do którego należy element a.

Grupę, której wszystkie elementy dadzą się przedstawić jako kolejne potęgi jednego i tego samego elementu, nazywamy *cykliczną*. Każda grupa cykliczna jest ABELOWĄ. Drugi z podanych wyżej przykładów przedstawia grupę cykliczną, gdyż mamy $c^1 = c$, $c^2 = b$, $c^3 = d$, $c^4 = a$ — jednością w tej grupie jest oczywiście element a. Dowodzi się, że grupa, której rząd jest liczbą pierwszą, jest zawsze cykliczną.

Jeżeli między elementami dwu grup (tego samego rzędu) daje się ustalić tego rodzaju odpowiedniość, przy której iloczyny odpowiednich elementów są zawsze odpowiednie, to grupy takie nazywamy *izomorficznemi*. Dwie grupy izomorficzne różnią się tylko znakowaniem elementów. Pojęcie izomorfizmu odgrywa ważną rolę w teorji grup.

Teorja grup skończonych stoi w ścisłym związku z *teorją podstawień*. Przez podstawienie rozumiemy przejście od układu wskaźników

$$1, 2, 3, \ldots\ldots n$$

do jakiegokolwiek innego układu wskaźników (różniącego się od danego co najwyżej porządkiem):

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$$

Podstawienie to oznaczamy sposobem:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 & \ldots\ldots n \\ a_1, & a_2, & a_3 & \ldots\ldots a_n \end{pmatrix}$$

Przez iloczyn dwu podstawień:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 & \ldots\ldots n \\ a_1, & a_2, & a_3 & \ldots\ldots a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots n \\ b_1, & b_2, & b_3, & \ldots\ b_n \end{pmatrix}$$

rozumiemy podstawienie

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots n \\ b_{a1}, & b_{a2}, & b_{a3}, & \ldots\ldots b_{an} \end{pmatrix}$$

Więc np.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 2, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \end{pmatrix}.$$

Iloczyn dwu podstawień nie jest wogóle przemienny.

Zbiór wszystkich możliwych $n!$ podstawień (z n elementów) tworzy grupę. Pewne podmnogości tego zbioru również mogą tworzyć grupę. Z drugiej strony każda grupa skończona jest izomorficzna pewnej grupie podstawień. Wobec tego badanie grup skończonych jest właściwie równoważne badaniu grup podstawień. (Z punktu widzenia formalnego obie teorje są identyczne).

---

11. Pewne wiadomości z algiebry wyższej potrzebne są każdemu studjującemu matematykę. Minimum tego, co każdy matematyk z algiebry wyższej wiedzieć powinien, znajdzie czytelnik

w Encyklopädie der Elementarmathematik, tom I: Elementare Algebra und Analysis bearbeitet von HEINRICH WEBER. Trzecie wydanie. Lipsk (Teubner) 1909; str. XVIII+532. Cena m. 10.

Algiebra wyższa wyłożona jest tam na str. 211—383. Wykład jasny i przystępny, a zarazem bez zarzutu pod względem ścisłości. Specjalny rozdział (str. 365—383) traktuje o dowodach niemożliwości (§ 108: Konstruktion mit Zirkel und Lineal; § 109: Eine kubische Gleichung ist nicht durch Quadratwurzeln lösbar; § 111: Der irreduzible Fall der kubischen Gleichung; § 112: Darstellung der Einheitswurzeln durch Radikale; § 113: Die Gleichung fünften Grades ist im allgemeinen nicht durch Radikale lösbar; § 114: Historisches zur Algebra).

Chcącym głębiej studjować algiebrę polecamy:

H. WEBER. Lehrbuch der Algebra. 2-gie wydanie. I Bd. Brunświk, 1898, II Bd. tamże, 1899, III Bd. 1908. Cena m. 38.

J.-A. SERRET. Cours d'Algèbre supérieure. Wydanie piąte. Paryż, 1885. Tom I, str. XIII+647. Tom II, str. XII+694. Cena fr. 25. Wyd. 6-te. 1910.

Podręcznik ten jest jaśniejszy i lepiej ułożony od podręcznika WEBERA, który natomiast jest obszerniejszy i nowszy.

O liczbowym rozwiązywaniu równań traktuje:

C. RUNGE. Praxis der Gleichungen. Sammlung Schubert XIV. Cena m. 5.20.

J. SOCHOCKI. Rozwiązywanie równań liczebnych. Bibl. mat.-fiz. Serja IV. Tom II. Cena k. 60 (wyczerpane).

Komu chodzi specjalnie o teorję równań linjowych, ten znajdzie ją wyczerpująco wyłożoną w dziełku:

S. Zaremba. Teorya wyznaczników i równań liniowych. Kraków, nakł. Kółka mat.-fiz. U. U. J. Cena kor. 3.

Obszerniejsze dzieło o wyznacznikach przedstawia:

M. A. Baraniecki. Teorja wyznaczników, kurs uniwersytecki. Paryż, 1879. Str. XXIV+600. Cena fr. 15.

G. Kowalewski. Einführung in die Determinantentheorie. Lipsk, 1909. Cena m. 15.

Do teorji grup skończonych i podstawień polecamy:

E. Netto. Gruppen und Substitutionentheorie. Sammlung Schubert. LV. Cena m. 5.20.

W. Burnside. Theory of groups of finite Order. Cambridge. szyl. 15.

Do teorji niezmienników:

Fr. Meyer. O stanie obecnym teorji niezmienników. Str. II+185. Warszawa, 1899. Odb. z »Prac mat. fiz.«

TEORJA MNOGOŚCI.

OPRACOWAŁ

WACŁAW SIERPIŃSKI.

Treść: 1. Przedmiot teorji mnogości. Pojęcie zbioru. 2. Zbiory równej mocy. 3. Zbiory przeliczalne. Przeliczalność liczb algiebraicznych. 4. Twierdzenie Cantora o możności jedno-jednoznacznego odwzorowania płaszczyzny na odcinku. 5. Własność charakterystyczna zbiorów nieskończonych. 6. Liczby kardynalne. Zagadnienie trichotomji i zagadnienie continuum. 7. Działania arytmetyczne na liczbach kardynalnych. 8. Zbiory uporządkowane. 9. Zbiory podobne. Typy porządkowe. 10. Przekroje. Skoki i luki. Ciągłość zbioru. 11. Ciągi rosnące i malejące i ich granice. Zbiory zamknięte. Zbiory doskonałe. 12. Zbiory dobrze uporządkowane. Liczby porządkowe pozaskończone. Liczby Alef. 13. Indukcja pozaskończona. 14. Twierdzenie Zermeli. 15. Teorja mnogości punktowych. 16. Znaczenie teorji mnogości. Antynomje teorji mnogości. 17. Wymagane przygotowanie. 18 Podręczniki i ważniejsze rozprawy.

---

1. Przedmiotem badań teorji mnogości są zbiory nieskończone. Pojęcie zbioru rozumiemy tu jak najogólniej: może to być zbiór jakichś przedmiotów realnych, lecz równie dobrze zbiór pojęć, albo nawet zbiór zbiorów pojęć. Większość matematyków uważa zbiór za pojęcie pierwotne, nie dające się określić za pomocą prostszych pojęć.

2. O dwu danych zbiorach nieskończonych M i N powiadamy, że są *równej mocy*, jeżeli między elementami ich daje się ustalić odpowiedniość jedno-jednoznaczna (tak zwana odpowiedniość *doskonała*). Rozumiemy przez to takie wzajemne podporządkowanie elementów obu uważanych zbiorów, przy którym każdemu elementowi zbioru M odpowiada jeden i tylko jeden element zbioru N, i naodwrót, każdy element zbioru N odpowiada jednemu i tylko jednemu elementowi zbioru M.

Pojęcie **mocy** jest więc tym dla zbiorów nieskończonych, czym pojęcie **liczby elementów** dla zbiorów skończonych.

Już sama intuicja każe nam przypuszczać, że nie wszystkie zbiory nieskończone są równej mocy. Np. wydaje się na pierwszy rzut oka, że zbiór wszystkich liczb wymiernych jest mocy większej niż zbiór wszystkich liczb całkowitych, zaś mniejszej niż zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Podobnież wydaje się, że zbiór wszystkich punktów płaszczyzny jest mocy większej niż zbiór wszystkich punktów prostej. Ściślejsze badanie przekonywa nas jednak, że nie wszystkie te przypuszczenia są słuszne.

3. Na szczególniejszą uwagę zasługują te zbiory, które są równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb całkowitych dodatnich. Elementy tych zbiorów mogą być ponumerowane w ten sposób, iż każdy element zbioru nosi swój numer i każdy numer oznacza pewien element zbioru. Zbiory takie nazywamy *przeliczalnemi.*

Wyobraźmy sobie pokratkowaną całą nieograniczoną płaszczyznę (fig. 21). Łatwo widzieć, że zbiór wszystkich kratek, na które przez to płaszczyzna zostanie podzielona, jest przeliczalnym. Dla **ponumerowania** wszystkich uważanych kratek możemy np. przyjąć którąkolwiek za pierwszą i, w sposób wskazany na rysunku, obchodzić kolejno spiralną wszystkie kratki.

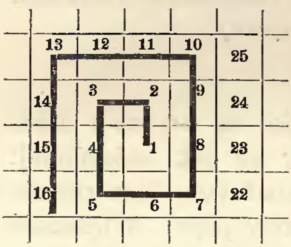


Fig. 21.

Można stąd natychmiast wyprowadzić wniosek, że zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny.

W roku 1873 G. Cantor dowiódł[1]), że zbiór wszystkich liczb algiebraicznych jest przeliczalny, a jednocześnie że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie jest przeliczalny. Była to pierwsza ważniejsza praca z teorji mnogości.

---

[1]) **Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen.** Journal für reine und angew. Mathematik, tom. 77, str. 258.

4. Inne, ciekawe twierdzenie Cantora (ogłoszone w r. 1878) opiewa, że zbiór wszystkich punktów płaszczyzny jest równej mocy ze zbiorem wszystkich punktów prostej. Znaczy to analitycznie, że dwie liczby rzeczywiste można określić za pomocą jednej tylko. Myśl dowodu polega na utworzeniu z dwu danych rozwinięć dziesiętnych

$$0,\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots$$

oraz

$$0,\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \ldots$$

nowego:

$$0,\ \alpha_1\ \beta_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \alpha_3\ \beta_3 \ldots$$

(przez wstawienie cyfr drugiego ułamka między cyfry pierwszego), z któregoby można odczytać dwa pierwsze. (Jest to naturalnie tylko myśl przewodnia dowodu, sam dowód wymaga jeszcze pewnego wykończenia).

5. Zbiór nieskończony może być równej mocy ze swoją częścią właściwą (t. j. częścią, nie zawierającą wszystkich elementów zbioru): np. zbiór wszystkich liczb wymiernych jest równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb całkowitych. Możnaby dowieść, że własność ta jest charakterystyczna dla zbiorów nieskończonych, a więc też określać zbiory skończone, jako takie, które jej nie posiadają (Dedekind).

6. Podzielmy wszystkie zbiory nieskończone na klasy, zaliczając do jednej i tej samej klasy dwa dane zbiory w tym i w tym tylko razie, jeżeli są równej mocy. Wszelki symbol, służący do oznaczania jednej z takich klas nazywamy »*liczbą kardynalną*«.

Niech M i N będą dwa dane zbiory, m i n — odpowiednie liczby kardynalne. Jeżeli zbiór N jest równej mocy z pewną częścią zbioru M, ale nie odwrotnie, to liczbę m uważamy jako *większą* od liczby n i piszemy

$$m > n, \text{ albo } n < m.$$

Np. liczba kardynalna c, odpowiadająca zbiorowi wszystkich liczb rzeczywistych, jest większa od liczby kardynalnej $\aleph_0$ (t. zw. liczby *alef zero*), odpowiadającej zbiorom przeliczalnym. Nie udowodniono jednak dotychczas, że każde dwie dane liczby kardynalne dadzą się połączyć jednym z trzech znaków: $>, <, =$ (Zagadnienie *trichotomji*)[1] Nie rozstrzygnięto też, czy między liczbami $\aleph_0$ i c istnieje jaka liczba kardynalna (Zagadnienie *continuum*).

7. Dla liczb kardynalnych ustalono działania arytmetyczne: dodawanie, mnożenie i potęgowanie.

Połączmy dwa dane zbiory M i N w jeden zbiór S: zbiór ten nazywamy *sumą* zbiorów M i N, zaś jego liczbę kardynalną s — sumą liczb m i n, pisząc $m+n=s$. Np. mamy:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$
$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

8. W teorji liczb kardynalnych odrywamy naszą uwagę (abstrahujemy) od jakości oraz porządku elementów uważanych zbiorów. Istnieje jednak ważny dział teorji mnogości, w którym rozważając zbiory, abstrahujemy jedynie od jakości ich elementów, uwzględniając natomiast ich wzajemne uporządkowanie.

O danym zbiorze G mówimy, że jest *uporządkowanym*, jeżeli co do każdych dwu elementów a i b tego zbioru zawartą jest umowa, wedle której jeden z tych elementów uważamy za wcześniejszy, drugi zaś za późniejszy (np. a wcześniejsze od b, co wyrażamy na piśmie: $a \prec b$), przyczym umowa ta ma być tego rodzaju, że ze związków

$$a \prec b,\ b \prec c$$

wynika zawsze

$$a \prec c.$$

9. Dwa zbiory uporządkowane nazywamy *podobnemi*, jeżeli między ich elementami daje się ustalić taka odpowiedniość doskonała, przy której, skoro a i b są elementami jednego z nich, zaś a' i b' — odpowiedniemi elementami drugiego, to zawsze związek $a \prec b$ pociąga za sobą związek: $a' \prec b'$. Można np. do-

---

[1]) Twierdzenie to byłoby łatwym wnioskiem z pewnego twierdzenia Zermeli (Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, Math. Annalen, 59, p. 514), którego dowód jednak nie wszyscy matematycy uznają za wystarczający (ze względu na nowy pewnik, na którym się opiera. Patrz str. 221). (Por. Zagad. filozofji matem.).

wieść, że zbiór wszystkich liczb wymiernych i zbiór wszystkich liczb algiebraicznych, uporządkowane według wielkości, są podobne.

Podzielmy wszystkie zbiory uporządkowane na klasy, zaliczając do jednej i tej samej klasy wszystkie zbiory podobne. Z każdej klasy wybierzmy po jednym zbiorze, jako przedstawicielu klasy. Wybrane w ten sposób zbiory nazywamy *typami porządkowemi*.

Najprostszym typem porządkowym nieskończonym jest zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich, uporządkowanych według wielkości:

$$1, 2, 3, \ldots n, \ldots;$$

typ ten oznaczamy symbolem ω.

Liczby całkowite ujemne, uporządkowane według ich wielkości względnych, tworzą inny typ:

$$\ldots -3, -2, -1,$$

który oznaczamy symbolem $^*\omega$.

10. Niech G oznacza dany zbiór uporządkowany. *Przekrojem* zbioru G nazywamy każdy podział elementów tego zbioru na dwie klasy A i B takie, iż każdy element klasy A jest wcześniejszym od każdego elementu klasy B. Jeżeli w klasie A istnieje element, późniejszy od wszystkich innych elementów tej klasy (t. zw. element *ostatni*), zaś w klasie B — element wcześniejszy od wszystkich innych tej klasy (t. zw. element *pierwszy*), to powiadamy, że uważany przekrój wyznacza *skok*. Jeżeli natomiast w klasie A niema elementu ostatniego, ani też w klasie B elementu pierwszego, to mówimy, że uważany przekrój wyznacza *lukę*. Zbiór, którego żaden przekrój nie daje skoku, nazywamy *wszędziegęstym*; zbiór, którego żaden przekrój nie daje ani skoku, ani luki, nazywamy *ciągłym*.

11. Każda część H danego zbioru uporządkowanego G przedstawia również zbiór uporządkowany, jeżeli dla elementów zbioru H pozostawimy to samo uporządkowanie, jakie posiadają w zbiorze G. Części danego zbioru uporządkowanego G, które są typu ω, nazywamy *ciągami rosnącemi*, zaś części, które są typu $^*\omega$ — *ciągami malejącemi*. Jeżeli dla danego ciągu rosnącego istnieje w zbiorze G pierwszy element, późniejszy od każdego z elementów ciągu, to element ten nazywamy *granicą* uważanego ciągu; podobnież granicą ciągu malejącego nazywamy ostatni element zbioru G, wcześniejszy od każdego elementu uważanego ciągu (o ile taki element istnieje). Jeżeli każdy ciąg rosnący i każdy ciąg malejący, zawarty w zbiorze G, posiada granicę, to zbiór G nazywamy *zamkniętym* (domkniętym). Zbiór uporządkowany, którego każdy element jest granicą pewnego ciągu rosnącego lub pewnego ciągu malejącego, nazywamy *w sobie gęstym*. Zbiór, który jest jednocześnie w sobie gęstym i zamkniętym nazywamy *doskonałym* (w znaczeniu Cantora).

Pojęcie granicy jest punktem wyjścia dla teorji liczb niewymiernych Cantora, zaś pojęcie przekroju — dla teorji liczb niewymiernych Dedekinda. Pojęcia zbiorów ciągłego, zamkniętego oraz doskonałego odgrywają pierwszorzędną rolę w całej spółczesnej analizie. W teorji mnogości (jak to widać już z podanych definicji), pojęcia te są traktowane z bardzo ogólnego punktu widzenia.

12. Zbiór uporządkowany, którego każda część posiada element pierwszy, nazywamy zbiorem *dobrze uporządkowanym*. Symbole typów porządkowych, odpowiadających zbiorom nieskończonym dobrze uporządkowanym, nazywamy *liczbami porządkowemi pozaskończonemi* albo liczbami Cantora. Dla liczb tych ustalono pojęcie nierówności oraz dodawanie, mnożenie i potęgowanie.

Liczby porządkowe skończone nazywamy liczbami klasy I-szej: mnogość ich jest mocy $\aleph_0$ (przeliczalna). Liczby porządkowe pozaskończone, odpowiadające zbiorom przeliczalnym, nazywamy liczbami klasy II-giej. Moc mnogości wszystkich liczb klasy II-giej oznacza się symbolem $\aleph_1$. Udowodniono, że $\aleph_0 < \aleph_1 \leqq c$, oraz że nie istnieje żadna liczba kardynalna k, spełniająca nierówności $\aleph_0 < k < \aleph_1$; nie rozstrzygnięto natomiast, czy $\aleph_1 < c$, czy też $\aleph_1 = c$. (Zagadnienie *continuum*).

Liczby porządkowe pozaskończone, odpowiadające zbiorom mocy $\aleph_1$, zaliczamy do klasy III-ciej, a moc ich mnogości oznaczamy przez $\aleph_2$ i t. d. O liczbach $\aleph_n$ udowodniono cały szereg twierdzeń.

13. Zbiory dobrze uporządkowane posiadają tę charakterystyczną własność, że do nich stosuje się *zasada indukcji pozaskończonej*. O danym zbiorze uporządkowanym G powiadamy, że do niego stosuje się zasada indukcji pozaskończonej, jeżeli każde twierdzenie T jest słuszne dla wszystkich elementów zbioru G, o ile udowodniono:

1) że twierdzenie T jest słuszne dla pierwszego elementu zbioru G.

2) że słuszność twierdzenia T dla wszystkich elementów zbioru G, wcześniejszych od a, pociąga za sobą jego słuszność dla elementu a (przy dowolnym a).

14. Jednym z nierozstrzygniętych dotąd zagadnień teorji zbiorów dobrze uporządkowanych jest pytanie, czy każdy zbiór da się dobrze uporządkować. Dowiódł tego ZERMELO (l. c., zob. str. 218), ale wprowadzając nowy pewnik, który brzmi: »dla każdej mnogości M zbiorów Z o różnych elementach istnieje mnogość M_0, zawierająca po jednym i tylko jednym elemencie z każdego ze zbiorów Z«.

15. Dwa omówione wyżej działy: teorja liczb kardynalnych i teorja typów porządkowych należą do *abstrakcyjnej teorji mnogości*. Jednym z najważniejszych jej zastosowań jest t. zw. *teorja mnogości punktowych*. Przedmiotem badań ostatniej są zbiory punktów przestrzeni n-wymiarowej (głównie dla $n = 1, 2, 3$).

Specjalny rozdział teorji mnogości punktowych poświęcony jest pojęciu *miary i mnogości mierzalnych* (HANKEL, CANTOR, PEANO, JORDAN, BOREL, LEBESGUE); pojęcia te są podstawą rachunku całkowego. Teorja mnogości punktowych styka się z jednej strony z analizą (teorją funkcji), z drugiej zaś — z gieometrją (topologją).

16. Cała prawie teorja mnogości zbudowana została przez jednego uczonego, mianowicie G. (JERZEGO) CANTORA z Halli (ur. w r. 1845). (Godnym jest zaznaczenia, że, jak przyznaje sam CANTOR, do pierwszych badań z teorji mnogości skłoniła go chęć wyjaśnienia pewnych punktów teorji szeregów trygonometrycznych). Pomimo stosunkowo krótkiego okresu czasu (zaledwie 40-letniego) teorja mnogości zdążyła już nadzwyczajnie się rozwinąć i zająć pierwszorzędne stanowisko w matematyce. Dzisiaj już nawet wykład podstaw matematyki wyższej nie może się obejść bez pewnych wiadomości z teorji mnogości.

Teorja mnogości, zwłaszcza ze względu na szczegółową analizę pojęcia nieskończoności, budzi zainteresowanie śród filozofów; uwagę ich przyciągnęły również pewne pozorne sprzeczności, czyli tak zwane antynomje, które się w ostatnich czasach wyłoniły w teorji mnogości (antynomja Burali-Fortiego, Russella, Richarda). patrz. rozdz. Zagadnienia filoz. matematyki).

17. Cała abstrakcyjna teorja mnogości nie wymaga właściwie żadnych wiadomości pomocniczych z matematyki: konieczną jest jedynie wprawa w rozumowaniu logicznym. Co się zaś tyczy zastosowań matematycznych t. mnogości, to te naturalnie wymagają pewnych wiadomości z działu, którego dotyczą.

---

18. Chcącym rozpocząć studjowanie t. mnogości polecamy:

W. Sierpiński. Zarys teorji mnogości. Bibl. mat.-fiz., Serja III, t. 9. Warszawa, 1912, str. 158. Cena kop. 90. Dalszym ciągiem tej książki są wykłady litografowane p. t. »Teorya mnogości«. Część druga. Lwów, 1913. Nakładem Kółka mat.-fiz. Uczniów Uniw. Lwow.

Z dzieł obcych polecamy przedewszystkim:

A. Schoenflies. Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen. Erste Hälfte: Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen und Theorie der Punktmengen. Str. XII+390. Lipsk i Berlin (Teubner) 1913. Jest to przeróbka połowy pierwszego tomu dzieła:

A. Schoenflies. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Bericht erstattet der deutschen Mathematiker-Vereinigung (Jahresber. der D. Mathematiker-Ver., Bd VIII² oraz Ergänzungsbände II Bd.) Lipsk, Teubner. T. I; str. VI+251 (1900), cena m. 8. T. II; str X+431 (1908), cena m. 12. (Przy czytaniu tomu pierwszego należy uwzględnić sprostowania niektórych błędów, zawarte w T. II-gim, str. 302 i nast.). — Dalej:

G. Hessenberg. Grundbegriffe der Mengenlehre, Gietynga, 1906, str. VIII + 220. Odbitka z »Abhandlungen der Fries'schen Schule« tom I, zeszyt 4, str. 487—706.

Rzecz, jak sam autor zaznacza, przeznaczona głównie dla filozofów.

W. H. i G. C. Young. The theory of sets of points. Cambridge, 1906, str. XII + 316. Cena szyl. 12. (Jak sama nazwa wskazuje, głównie teorja mnogości punktowych). W końcu tej książki (str. 295—309) znajduje się szczegółowa bibljografja teorji mnogości aż do r. 1906.

Sporo wiadomości (zwłaszcza uwag krytycznych) znajduje się też w książce:

E. Borel. Leçons sur la théorie des fonctions. Paryż, 1898, str. X + 136. Cena fr. 3.50.

Osobom, pragnącym szczegółowo studjować teorję mnogości, polecić należy przedewszystkim studjowąnie oryginalnych prac G. Cantora:

Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. 1874 Journal f. r. u. a. Mathematik, Bd. 77, p. 258 - 262.

Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, 1877. Tamże Bd. 84, p. 242—258.

Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten (1869—1883) Mathematische Annalen Bd. 15, p. 1—7, Bd. 17, p. 355—358, Bd. 20, p. 113—121, Bd. 21, p. 51—58, oraz p. 549—591, Bd. 23, p. 453—488. (Zwłaszcza dwie ostatnie części są godne specjalnej uwagi).

Wymienione tutaj prace (wszystkie prócz zawartej w 23-cim tomie Math. Annalen) znajdują się też w przekładzie francuskim w II-gim tomie Acta mathematica (1883) z opuszczeniem ustępów filozoficznych.

De la puissance des ensembles parfaits de points. 1884. Acta mathematica T. IV. p. 381—392.

Beiträge zur Begründung der transfiniten

Mengenlehre. Math. Annalen, Bd. 46, (1895), p. 481—512 oraz Bd. 49 (1897), p. 207—246.

Z innych autorów:

F. Bernstein. Untersuchungen aus der Mengenlehre, Inaugural-Dissertation, Gietynga 1901. Przedruk tegoż w Math. Annalen. Bd. 61 (1905), p. 117—155.

M. Fréchet, Sur quelques points du Calcul Fonctionel. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo T. 22 (1906). Str. 1—74. Thêse, Paryż, 1906.

Les ensembles abstraits et le Calcul Fonctionel, tamże t. 30 (1910) p. 1—26.

E. Jacobstahl. Ueber den Aufbau der transfiniten Aritmetik. Math. Annalen, Bd. 67 (1909) p. 145—194.

E. W. Hobson. On the present state of the theory of aggregates, Brit. Ass. Rep. (Winnipeg) 1910.

Z epoki przedcantorowskiej na uwagę zasługuje (ze względów historycznych i filozoficznych):

B. Bolzano. Paradoxien des Unendlichen. 1851, Lipsk. 2-gie wyd. Berlin, 1889.

TEORJA FUNKCJI ZMIENNYCH RZECZYWISTYCH.

OPRACOWAŁ

WACŁAW SIERPIŃSKI.

Treść: 1. Najogólniejsze pojęcie funkcji jednowartościowej jednej zmiennej. Funkcje odwrotne. Funkcje wielowartościowe. 2. Funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej. Funkcje rosnące i malejące; funkcje monotoniczne. Maxima i minima funkcji. 3. Funkcje ograniczone; dolny i górny kres funkcji. Maximum i minimum funkcji w danym punkcie; funkcje napół-ciągłe. 4. Ciągłość funkcji; ciągłość jednostronna; ciągłość jednostajna. Własności funkcji ciągłych. 5. Różne rodzaje nieciągłości funkcji; funkcje punktowo nieciągłe. Klasyfikacja funkcji nieciągłych według Baire'a. 6. Metoda zagęszczania osobliwości. 7. Wymagane przygotowanie i literatura.

---

1. Pojęcie *funkcji* rozwijało się stopniowo, poczynając od 17-go wieku (Leibniz, Bernoulli, Euler, Fourier, Cauchy, Riemann, Lejeune-Dirichlet).

Najogólniejsza definicja funkcji jednowartościowej jednej zmiennej jest następująca:

Niech P i Q będą dwa dane zbiory o jakichkolwiek elementach; elementy te nie muszą być liczbami. Jeżeli każdemu elementowi p zbioru P został podporządkowany pewien element q zbioru Q, to mówimy, że dla elementów zbioru P została wyznaczona funkcja, której wartości są elementami zbioru Q. Element q, podporządkowany elementowi p, oznaczamy przytym symbolem $f(p)$.

Pojęcie funkcji opiera się więc, jak widzimy, na pojęciu odpowiedniości.

Zbiór Q_1 wszystkich tych elementów zbioru Q, które zostały podporządkowane pewnym elementom zbioru P, nazywamy zbiorem wartości funkcji $f(p)$, określonej dla zbioru P. Zbiór

Q_1 niekoniecznie jest identyczny ze zbiorem Q. Np. jeżeli zbiór P jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, zbiór Q — zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych nieujemnych i jeżeli każdej liczbie rzeczywistej x podporządkujemy jej kwadrat x^2, to, jak łatwo widzieć, zbiorem wartości tak określonej funkcji $f(x) = x^2$ będzie zbiór $Q_1 = Q$. Gdybyśmy jednak, zachowując poprzednie znaczenie zbiorów P i Q, określili funkcję $f(x)$ wzorem $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, to zbiór Q_1 składałby się ze wszystkich liczb dodatnich, mniejszych lub równych jedności, i byłby tylko właściwą częścią zbioru Q.

Może się zdarzyć, że różnym elementom zbioru P odpowiadają zawsze różne wartości funkcji $f(p)$. W takim razie dla każdego elementu q zbioru Q_1 istnieje zawsze jeden i tylko jeden element p zbioru P, taki iż $f(p) = q$; oznaczmy ten element p (jako wyznaczony w zupełności przez q) symbolem $F(q)$. Funkcja $F(q)$ będzie więc określona w zupełności dla zbioru Q_1, przytym zbiorem jej wartości będzie zbiór P. Łatwo przytym sprawdzić, że dla każdego elementu p zbioru P zachodzi równość

$$F(f(p)) = p,$$

zaś dla każdego elementu q zbioru Q_1 zachodzi równość

$$f(F(q)) = q.$$

Funkcję $F(q)$ (określoną dla zbioru Q_1) nazywamy *odwrotną* względem funkcji $f(p)$ (albo: odwróceniem funkcji $f(p)$). Funkcja odwrotna względem funkcji odwrotnej jest, jak łatwo widzieć, identyczna z funkcją daną.

P r z y k ł a d. Niech P oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich i połóżmy dla każdego elementu x zbioru P, $f(x) = \frac{1}{1+x}$; zbiór Q_1 będzie tu, jak łatwo widzieć, zbiorem wszystkich liczb dodatnich mniejszych od jedności, zaś funkcją odwrotną względem $f(x)$ będzie funkcja $F(y) = \frac{1-y}{y}$, określona dla $0 < y < 1$.

Może się zdarzyć, że funkcja odwrotna jest identyczna z funkcją daną: tak jest np. dla $f(x) = x$, lub dla $f(x) = \frac{1}{x}$.

Bardziej złożony przykład takiej funkcji otrzymamy, określając funkcję $f(x)$ wzorem $f(x)=1-x$ dla x wymiernych, zaś wzorem $f(x)=\frac{1}{x}$ dla x niewymiernych; tak zdefinjowana funkcja $f(x)$ będzie określona w całym zbiorze liczb rzeczywistych i będzie w tym zbiorze identyczna ze swym odwróceniem.

Jeżeli pewnym elementom zbioru P podporządkowaliśmy więcej niż jeden element zbioru Q, to mamy do czynienia z *funkcją wielowartościową*. Podporządkujmy np. każdemu nieujemnemu x wszystkie rzeczywiste y, dla których

$$y^2=x;$$

określona w ten sposób funkcja będzie dwuwartościową (z wyjątkiem $x=0$, gdzie jest jednowartościową).

2. Jeżeli, w szczególności, zbiory P i Q składają się z samych tylko liczb rzeczywistych, to mówimy, że funkcja, określona dla zbioru P, której wartości są elementami zbioru Q, jest funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, spełniających nierówności

$$a \leqslant x \leqslant b,$$

nazywamy *przedziałem* (a, b); jeżeli dana liczba x spełnia powyższe nierówności, to mówimy, że *należy* do przedziału (a, b); jeżeli przytym x nie jest ani liczbą a, ani liczbą b, to mówimy, że x *leży wewnątrz* przedziału (a, b). Liczby a i b nazywamy odpowiednio dolną i górną granicą przedziału.

Niech $f(x)$ oznacza funkcję rzeczywistą, określoną dla zbioru X liczb rzeczywistych, zaś x_0 — daną wartość zbioru X. Jeżeli istnieje taki przedział (a, b), iż $a<x_0<b$, oraz że dla każdego x zbioru X, wewnątrz (a, b) nierówność $x<x_0$ daje $f(x)<f(x_0)$ (resp. $f(x)\leqslant f(x_0)$), zaś nierówność $x>x_0$ daje $f(x)>f(x_0)$ (resp. $f(x)\geqslant f(x_0)$), to mówimy, że funkcja $f(x)$ jest dla wartości x_0 *rosnącą* (resp. *nie malejącą*). Podobnież określamy funkcję *malejącą* (resp. *nie rosnącą*) dla danej wartości. Funkcję rosnącą dla każdej wartości zbioru X nazywamy rosnącą w tym zbiorze, albo funkcją *stale* rosnącą. Funkcje stale nie rosnące, lub stale nie malejące nazywamy *monotonicznemi*. Np. funkcja $f(x)=Ex$, gdzie Ex oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x, jest funkcją monotoniczną, nie malejącą (w całym zbiorze liczb rzeczywistych).

Jeżeli dla danej wartości x_0 zbioru X istnieje taki przedział (a, b), iż $a < x_0 < b$, oraz że dla każdego x, różnego od x_0, należącego do X i leżącego wewnątrz (a, b), zachodzi nierówność $f(x) < f(x_0)$, resp. $f(x) > f(x_0)$, to mówimy, że dla wartości x_0 funkcja $f(x)$ daje *maximum właściwe* (resp. *minimum właściwe*). Jeżeli, przy powyższych założeniach, można powiedzieć tylko, że $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$), to mamy do czynienia z *maximum niewłaściwym* (resp. *minimum niewł.*). Maxima lub minima nazywamy *extremami* funkcji. Np. funkcja $f(x) = |x|$ daje dla $x = 0$ minimum; funkcja $f(x) = 1 - x^2$ daje dla $x = 0$ maximum; oba są właściwe. Funkcja, określona warunkami $f(0) = 0$, zaś $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$, dla $x \neq 0$, daje dla $x = 0$ minimum niewłaściwe.

3. Jeżeli istnieje liczba A taka, iż w danym zbiorze X stale $A \leqslant f(x)$, to mówimy, że funkcja $f(x)$ jest *ograniczoną z dołu*; jeżeli zaś istnieje liczba B taka, iż w zbiorze X stale $f(x) \leqslant B$, to mówimy, że funkcja $f(x)$ jest *ograniczoną z góry*. Funkcję ograniczoną z dołu i góry nazywamy po prostu *ograniczoną*. Funkcja może mieć oznaczoną, skończoną wartość dla każdej wartości zmiennej rzeczywistej, a mimo to nie być ograniczoną w żadnym, dowolnie nawet małym przedziale. Taką jest, jak łatwo widzieć, np. funkcja $f(x)$, równa zeru dla x niewymiernych, zaś w razie x wymiernego, równa naturalnemu mianownikowi liczby x, napisanej w postaci ułamka nieprzywiedlnego.

Dowodzi się, że jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczona z dołu, to wśród wszystkich liczb A, dla których w zbiorze X stale

$$A \leqslant f(x),$$

istnieje jedna największa, którą nazywamy *dolnym kresem funkcji (borne inférieure)*. Podobnież określamy *górny kres funkcji* jako najmniejszą ze wszystkich liczb B, dla których stale w zbiorze X:

$$f(x) \leqslant B.$$

Kresy dolny i górny mogą same być lub nie być wartościami funkcji. Np. jeżeli funkcję $f(x)$ określimy dla zbioru X wszystkich liczb rzeczywistych wzorem $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, to dolny kres 0 nie jest wartością funkcji, natomiast górny kres 1 otrzymujemy dla $x=0$.

Dolny i górny kres funkcji $f(x)$, określonej w przedziale (a, b), oznaczamy odpowiednio przez

$$m(a, b) \text{ oraz } M(a, b)$$

(lub: $m(a, b, f(x))$, $M(a, b, f(x))$, jeżeli trzeba wyraźnie zaznaczyć, o jaką funkcję chodzi). Dowodzi się, że jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczoną w przedziale (a, b) i jeżeli x_0 oznacza daną liczbę, leżącą wewnątrz tego przedziału, to istnieją granice

$$\lim_{n=\infty} m\left(x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}\right) \text{ oraz } \lim_{n=\infty} M\left(x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}\right).$$

Granice te oznaczamy odpowiednio przez $m(x_0)$ oraz $M(x_0)$ i nazywamy *minimum* oraz *maximum funkcji $f(x)$ w punkcie x_0*. Różnicę

$$M(x_0)-m(x_0)=\omega(x_0)$$

nazywamy *oscylacją (wahaniem)* funkcji *$f(x)$* w punkcie x_0. Jeżeli

$$f(x_0)=M(x_0),$$

to mówimy, że funkcja $f(x)$ jest *napół-ciągłą z góry* dla wartości x_0; jeżeli zaś

$$f(x_0)=m(x_0),$$

to funkcję $f(x)$ nazywamy *napół-ciągłą z dołu* dla wartości x_0 (Baire). Dowodzi się, że funkcja $\omega(x)$ jest zawsze napół-ciągłą z góry. Warunek $\omega(x_0)=0$ jest koniecznym i wystarczającym na to, żeby funkcja $f(x)$ była ciągłą dla wartości x_0.

4. Funkcję $f(x)$, określoną w zbiorze X, nazywamy *ciągłą* dla wartości x_0 tego zbioru, jeżeli do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę dodatnią δ (zależną wogóle od funkcji $f(x)$, od wartości x_0 i od liczby ε), iżby nierówność

$$|x-x_0|<\delta$$

dla każdej liczby x zbioru X pociągała za sobą nierówność

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Dowodzi się, że definicja ta jest równoważna następującej: Funkcja $f(x)$, określona w zbiorze X, jest ciągłą dla wartości x_0 tego zbioru, jeżeli dla każdego ciągu x_n liczb zbioru X, zmierzającego do x_0, ciąg $f(x_n)$ zmierza do $f(x_0)$.

Jeżeli tylko dla ciągu rosnącego (resp. malejącego) liczb zbioru X, zmierzającego do x_0, ciąg $f(x_n)$ zmierza do $f(x_0)$, to mówimy, że funkcja $f(x)$ jest (w zbiorze X) dla wartości x_0 *ciągłą ze strony lewej* (resp. *prawej*).

Funkcję $f(x)$ nazywamy *ciągłą jednostajnie* w zbiorze X, jeżeli do każdej liczby dodatniej ε można dobrać takie dodatnie δ, iżby dla każdych liczb x' i x'' zbioru X nierówność

$$|x'-x''|<\delta$$

pociągała za sobą nierówność:

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Dowodzi się, że funkcja, ciągła dla każdej wartości zbioru zamkniętego (np. przedziału, z włączeniem granic), jest w tym zbiorze ciągłą jednostajnie oraz ograniczoną.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b) z włączeniem granic i jeżeli y oznacza jakąkolwiek liczbę, pośrednią między $f(a)$ i $f(b)$, to w przedziale (a, b) istnieje przynajmniej jedna wartość x taka, iż $f(x)=y$. Własność tę wyrażamy krótko, mówiąc, że funkcja ciągła nie może przejść od jednej wartości do drugiej inaczej, jak przechodząc przez wszystkie wartości pośrednie. W swoim czasie własność tę uważano za równoważną definicji ciągłości, co jednak było błędnym, gdyż można zbudować funkcje wszędzie nieciągłe, posiadające powyższą własność[1]). Omawianą własność posiada, w szczególności, każda funkcja (ciągła lub nie), będąca pochodną innej funkcji (Darboux).

Funkcja, ciągła w zbiorze zamkniętym, przybiera w tym zbiorze (dla jednej co najmniej wartości zmiennej) wartość równą

---

[1]) Zob. np. H. Lebesgue: Leçons sur l'intégration. Paryż, 1904, str. 90.

swej górnej jakoteż i swej dolnej granicy. Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego, że zbiór wartości funkcji ciągłej w zbiorze zamkniętym jest znowu zamkniętym.

Funkcja, ciągła w pewnym przedziale, jest wyznaczoną w zupełności, jeżeli znamy jej wartości dla jakiejkolwiek mnogości liczb, wszędziegęstej w uważanym przedziale (np. dla wszystkich liczb wymiernych, albo dla wszystkich ułamków postaci $\frac{l}{2^k}$).

Funkcja ciągła funkcji ciągłej jest znowu funkcją ciągłą. Jeżeli funkcja jest jednoznacznie odwracalna (§ 1), to jej odwrócenie jest znowu funkcją ciągłą. Każda funkcja, ciągła w danym przedziale skończonym, daje się w tym przedziale przedstawić jako suma szeregu nieskończonego wielomianów całkowitych o wymiernych spółczynnikach (twierdzenie Weierstrassa); (szereg ten można zawsze obrać tak, iżby był bezwzględnie i jednostajnie zbieżnym w uważanym przedziale).

5. Funkcję, określoną w zbiorze X, która dla danej wartości x_0 zbioru X nie jest ciągłą, nazywamy *nieciągłą* dla wartości x_0 (w zbiorze X). Np. funkcja $f(x) = Ex$ jest nieciągłą dla każdej wartości całkowitej x, zaś ciągłą dla każdej niecałkowitej wartości x. Funkcja, określona wzorem $f(x) = 0$ dla x niewymiernych i wzorem $f(x) = \frac{1}{q}$ dla x wymiernego, równego ułamkowi nieprzywiedlnemu $\frac{p}{q}$ (o naturalnym mianowniku), jest nieciągłą dla każdej wartości wymiernej i ciągłą dla każdej wartości niewymiernej zmiennej.

Jeżeli dla każdego ciągu rosnącego (resp. malejącego) x_n liczb zbioru X, zmierzającego do x_0, ciąg $f(x_n)$ jest zbieżnym ale do granicy różnej od $f(x_0)$, to mówimy, że funkcja $f(x)$ posiada w punkcie x_0 z lewej (resp. prawej) strony *nieciągłość pierwszego rodzaju*. Jeżeli, przy powyższych założeniach co do ciągu x_n, ciąg $f(x_n)$ zmierza do $+\infty$ lub do $-\infty$, to mówimy, że funkcja $f(x)$ wzrasta nieograniczenie (w kierunku dodatnim albo ujemnym), gdy zmienna rosnąc (resp. malejąc) zmierza do x_0. Jeżeli wreszcie funkcja $f(x)$ jest dla wartości x_0 nieciągłą, lecz nie zachodzi żaden z omówionych wyżej przypadków, to powiadamy, że $f(x)$ posiada dla x_0 *nieciągłość 2-go rodzaju* (albo nieciągłość z oscylacjami). Np. funkcja $f(x)$, określona przez wzory $f(0)=0$, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, dla $x \neq 0$, posiada w punkcie $x=0$ nieciągłość 2-go rodzaju (zarówno z lewej, jak i z prawej strony).

Funkcje monotoniczne mogą posiadać co najwyżej nieciągłości pierwszego rodzaju. Dowodzi się, że każda funkcja może posiadać co najwyżej przeliczalną mnogość miejsc nieciągłości pierwszego rodzaju.

Funkcję, która posiada w danym przedziale wszędziegęstą mnogość miejsc ciągłości, nazywamy w przedziale tym *punktowo nieciągłą* (Dini). Granica funkcji ciągłych, o ile istnieje jest funkcją (co najwyżej) punktowo nieciągłą, ale niekoniecznie naodwrót.

R. Baire nazywa *funkcjami klasy pierwszej* funkcje, które, będąc same nieciągłe, dają się przedstawić jako granice funkcji ciągłych. Do klasy drugiej zalicza funkcje nieciągłe, które, nie należąc do klasy pierwszej, dają się przedstawić jako granice funkcji klasy pierwszej, i t. d. Bliższemu badaniu tej klasyfikacji R. Baire i H. Lebesgue poświęcili kilka większych prac.

6. Jeżeli jakaś funkcja posiada daną osobliwość (np. nieciągłość, brak pochodnej, extremum) wewnątrz każdego, do wolnie małego przedziału, to powiadamy, że uważana funkcja posiada *pantachicznie (wszędziegęsto)* daną osobliwość.

Przypuśćmy, że dana funkcja $f(x)$ posiada daną osobliwość, ale nie pantachicznie. Jeżeli przy pomocy funkcji $f(x)$ chcemy zbudować funkcję $F(x)$, którąby posiadała uważaną osobliwość pantachicznie, to powiadamy, że chodzi nam o *zagęszczenie (condensation)* danej osobliwości funkcji $f(x)$. Pierwszy przykład tego rodzaju podał B. Riemann. Oznaczmy wraz z nim symbolem (x) zero, jeżeli x jest formy $k+\frac{1}{2}$ (k całkowite), oraz różnicę między x a najbliższą całością — w przeciwnym przypadku. Funkcja $f(x)=(x)$, jak łatwo widzieć, jest ciągłą wszędzie, z wyjątkiem liczb formy $k+\frac{1}{2}$ (k całkowite). Przy pomocy funkcji (x) Riemann utworzył funkcję

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(nx)}{n^2},$$

pantachicznie nieciągłą (funkcja ta jest jednak całkowalną w znaczeniu RIEMANNA).

HANKEL celem zagęszczenia osobliwości funkcji $f(x)$, posiadającej daną osobliwość w jednym tylko punkcie $x=0$, buduje funkcję

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n f(\sin n\pi x),$$

dobierając stałe c_n tak, iżby wypisany szereg był zbieżny. Jasnym jest, że (o ile wszystkie c_n są różne od zera), wewnątrz każdego, dowolnie małego przedziału, nieskończenie wiele składników wypisanej sumy będzie posiadało żądaną osobliwość[1]): stąd jednak nie wynika jeszcze, iżby ją koniecznie miała posiadać sama suma. Osobliwości składników mogą się bowiem w sumie znosić, a może się nawet zdarzyć, że z dwu składników jeden i tylko jeden posiada w danym punkcie daną osobliwość, a pomimo to suma osobliwości tej nie posiada. Np. w sumie $x+x^2$ drugi i tylko drugi składnik daje minimum dla $x=0$, natomiast suma nie daje dla $x=0$ extremum. Wobec tego metoda HANKELA nie daje gwarancji, że zbudowana w powyższy sposób suma $F(x)$ posiada pantachicznie żądaną osobliwość; w każdym poszczególnym przypadku musimy jeszcze bliżej badać funkcję $F(x)$. Prostszą nieco i ogólniejszą metodę zagęszczania osobliwości podał JERZY CANTOR, który, przy powyższych założeniach co do funkcji $f(x)$, buduje funkcję

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n f(x-a_n),$$

---

[1]) Jeżeli bowiem w oznacza liczbę wymierną, położoną wewnątrz danego przedziału, i jeżeli $w=\frac{p}{q}$, to $\sin n\pi w$ staje się zerem przy wszelkim $n=kq$ (k całkowite) i przeto $f(\sin n\pi x)$ posiada dla $x=w$ daną osobliwość.

gdzie a_n oznacza ciąg nieskończony, którego wyrazy tworzą zbiór liczb wszędziegęsty.

Za pomocą metody zagęszczania osobliwości zbudowano liczne przykłady funkcji, mających pantachicznie dane osobliwości. Tak zbudowano np. funkcje ciągłe, posiadające nieskończenie wiele maximów i minimów w każdym, dowolnie małym przedziale (t. zw. funkcje *wszędzie oscylujące*), przytym posiadające wszędzie pochodną, lub nie posiadające nigdzie pochodnej, funkcje stale rosnące, pantachicznie nie mające pochodnej, funkcje całkowalne, mające w każdym przedziale nieprzeliczalną mnogość miejsc nieciągłości, funkcje, których pochodna wszędzie istnieje, ale jest pantachicznie nieciągłą i t. p.

---

7. Osoby, pragnące studjować teorję funkcji zmiennych rzeczywistych, powinny posiadać gruntowną znajomość teorji liczb niewymiernych i teorji granic, a także pewne wiadomości z teorji szeregów nieskończonych.

Bliższe wskazówki, dotyczące teorji funkcji zm. rzecz. znajdzie czytelnik we francuskim wydaniu Encyklopedji n. matematycznych. Tome II, volume 1, fascicule 1 (wydane w maju 1909), zawiera: Principes fondamentaux de la théorie des fonctions. Exposé d'après l'article allemand de Pringsheim par J. Molk, str. 1—112 (Artykuł ten jest prawie dwa razy większy od odpowiedniego artykułu wydania niemieckiego Encyklopedji). Tome II, vol. 1, fasc. 2 (wydane w czerwcu 1912), zawiera: Recherches contemporaines sur la théorie des fonctions. Rédigé sous la direction de É. Borel. 1) Les ensembles des points. Exposé par L. Zoretti (str. 113—170). 2) Intégration et dérivation. Exposé par P. Montel (str. 171—210). 3) Développements en séries. Exposé par M. Fréchet (str. 210—241).

U. Dini. Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse; deutsch bearbeitet von J. Lüroth und A. Schepp. Lipsk, 1892. Cena m. 12.

J. Tannery. Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. T. I. Paryż, 1904; str. 422. Cena fr. 14.

E. W. HOBSON. The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Cambridge, 1907; str. XVI+772. Cena szyl. 21.

É. BOREL. Leçons sur les fonctions des variables réelles et les développements en séries de polynomes. Rédigées par MAURICE FRÉCHET, avec des Notes par PAUL PAINLEVÉ et H. LEBESGUE. Paryż, 1905. Cena fr. 4.50.

R. BAIRE. Leçons sur les fonctions discontinues. Paryż, 1905. Cena fr. 3.50.

W. SIERPIŃSKI. Zastosowania teorji mnogości do analizy. Wyd. Kółka mat. fiz. U. U. Lwowskiego (litogr.). Lwów, 1911; str. 250. Cena k. 5.

W najnowszych czasach zajęto się takiemi funkcjami, dla których elementy zbioru P (patrz § 1) są same funkcjami (nie zaś liczbami); zob.:

S. PINCHERLE. Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi. In collaborazione con U. AMALDI. Bolonja, 1901; str. 490. Cena fr. 15. Także:

S. PINCHERLE. Équations et opérations fonctionnelles. Encyklopedja nauk matem. (wyd. francuskie), t. II, vol. 5, fasc. I. (W wyd. niem. t. II, cz. I, zesz. 11).

RACHUNEK ROŻNICZKOWY I CAŁKOWY.

OPRACOWAŁ

WACŁAW SIERPIŃSKI.

A. Rachunek różniczkowy.

1. Do studjowania rachunku różniczkowego konieczna jest znajomość teorji liczb niewymiernych, teorji ciągów nieskończonych i granic oraz pojęcia funkcji i ciągłości funkcji. Znajomość tych rzeczy będziemy też zakładali w niniejszym artykule.

2. Twórcami rachunku różniczkowego (a również i całkowego) są Newton (1642—1727) i Leibniz (1646—1716). Główne zadanie rachunku różniczkowego polega na wyznaczaniu *pochodnych* funkcji danych (definicje pochodnej podamy w następnym paragrafie). Zwykle atoli do rachunku różniczkowego zaliczane bywają też ważniejsze zastosowania pojęcia pochodnych w analizie (zastosowania do rozwinięć funkcji na szeregi nieskończone, do wyznaczania maximów i minimów funkcji, do obliczania t. zw. wyrażeń nieoznaczonych i t. p.); zastosowania rachunku różniczkowego do gieometrji stanowią osobny dział, znany pod nazwą *gieometrji różniczkowej.*

Podstawy rachunku różniczkowego zostały ściśle ugruntowane dopiero jednocześnie z teorją liczb niewymiernych i teorją granic, a więc dopiero w drugiej połowie XIX-go stulecia. Nic więc dziwnego, że sami twórcy rachunku różniczkowego oraz ich następcy przedstawiali sobie wiele kwestji dość mętnie. Do takich mętnych pojęć należy pojęcie *różniczki*. Wprawdzie dzisiaj, przy odpowiedniej definicji, dałoby się pojęcie różniczki wprowadzić zupełnie ściśle, jednakże dla początkujących należy polecić przedewszystkim takie podręczniki rachunku różniczkowego, które unikają pojęcia różniczek, tymbardziej że cała matematyka bez pojęcia różniczek doskonale obejść się może.

3. Niech $f(x)$ oznacza daną funkcję, określoną w pewnym przedziale (a, b), zaś x_0 niech oznacza liczbę, należącą do przedziału (a, b) (t. zn. $a \leqslant x_0 \leqslant b$). Jeżeli istnieje taka liczba A, że warunki

$$\left.\begin{array}{l} a \leqslant x_n \leqslant b, \quad x_n \neq x_0 \quad (\text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots) \\ \text{oraz} \\ \lim\limits_{n=\infty} x_n = x_0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

pociągają za sobą zawsze wzór:

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = A \tag{2}$$

(t. j. innemi słowy, jeżeli wzór (2) zachodzi dla każdego ciągu nieskończonego, spełniającego warunki (1)), to mówimy, że funkcja $f(x)$ posiada dla wartości $x = x_0$ *pochodną* i że pochodną tą jest

$$f'(x_0) = A.$$

Dowodzi się, że powyższa definicja pochodnej równoważna jest następującej:

Funkcja $f(x)$ posiada dla wartości $x = x_0$ pochodną $f'(x)$, jeżeli do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę dodatnią δ, iżby dla każdej liczby rzeczywistej h, spełniającej nierówności:

$$a \leqslant x_0 + h \leqslant b, \quad 0 < |h| \leqslant \delta,$$

zachodziła nierówność:

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Wyrażając wzór (2) słowami mniej ściśle, moglibyśmy powiedzieć, że pochodna jest granicą stosunku przyrostu funkcji do przyrostu zmiennej. Pochodną można więc uważać jako miarę prędkości zmiany funkcji.

Pochodna $f'(x)$ danej funkcji $f(x)$, o ile istnieje dla każdej wartości przedziału (a, b), przedstawia nową funkcję zmiennej x w tym przedziale. Funkcja ta znowu może posiadać pochodną, którą nazywamy d r u g ą pochodną danej funkcji i oznaczamy przez $f''(x)$. Podobnież określamy pochodne wyższych rzędów: $f'''(x), \ldots f^{(k)}(x)$ [1].

Np. dla funkcji $f(x) = x^m$ (m naturalne), mamy:

$$f'(x) = mx^{m-1}, \quad f''(x) = m(m-1)x^{m-2}, \ldots.$$

$$f^{(m-1)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.x, \quad f^{(m)}(x) = m(m-1)\ldots 3.2.1.$$

zaś $f^{(m+1)}(x) = 0$ i każda następna pochodna jest zerem.

Dla funkcji $f(x) = \sin x$ jest $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$; dla funkcji $f(x) = \lg x$ ($x > 0$, logarytm naturalny), mamy $f'(x) = \frac{1}{x}$. Dla funkcji $f(x) = e^x$ jest $f'(x) = e^x$, a więc też $f^{(n)}(x) = e^x$ przy wszelkim (naturalnym) n.

4. Ważny dział zajmuje w rachunku różniczkowym t. zw. *różniczkowanie*, t. j. wyznaczanie pochodnych różnych funkcji (wyprowadzanie wzorów na pochodne t. zw. funkcji elementarnych) oraz wywód t. zw. prawideł różniczkowania (t. j. prawideł, jak należy wyznaczać pochodną sumy albo iloczynu dwu lub większej liczby funkcji, gdy znane są pochodne składników lub czynników, jak wyznaczać pochodną funkcji z funkcji — np.: $\lg(\sin x)$, jak wyznaczyć pochodną funkcji odwrotnej, funkcji uwikłanej i t. p.). Dział ten jest nader ważny zwłaszcza dla tych osób, którym rachunek różniczkowy jest potrzebny ze względu na zastosowania. Osoby takie muszą też nabyć pewnej wprawy w wyznaczaniu pochodnych i operowaniu prawidłami rachunku różniczkowego: osiąga się ją przez przerabianie odpowiednich ćwiczeń. (W każdym większym podręczniku rachunku różniczkowego znajdują się takie zadania na różniczko-

---

[1]) Zamiast znakowania $f'(x), f''(x), \ldots$, wprowadzonego przez LAGRANGE'A, używane bywa często też znakowanie: $Df(x)$, $D^2f(x)$, ... lub wyraźniej: $D_xf(x)$, $D^2_xf(x)$, ... (CAUCHY).

wanie). Ostrzec tu jednak należy przed przesadą: kto dobrze poznał i zrozumiał teoretyczną stronę rachunku różniczkowego oraz nabrał pewnej wprawy w różniczkowaniu mniej lub więcej złożonych funkcji, ten nie ma potrzeby dążyć do możności bardzo szybkiego różniczkowania, albo różniczkowania bez błędu bardzo złożonych wzorów (podobnie jak celem nauki arytmetyki nie jest szybkie liczenie i operowanie bez błędu bardzo wielkiemi liczbami). Nie należy też sądzić, że kto umie biegle różniczkować i całkować, ten już posiadł wyższą matematykę.

5. Dawniej sądzono, że każda funkcja ciągła posiada, przynajmniej dla pewnych wartości, pochodną. Dopiero Weierstrass (1815—1897) podał pierwszy przykład funkcji ciągłej, która nie posiada pochodnej dla żadnej wartości zmiennej. Inny przykład takiej funkcji podał H. von Koch za pomocą pewnej prostej konstrukcji gieometrycznej.

Funkcje ciągłe, nie mające pochodnej dla żadnej wartości zmiennej, posiadają tę ciekawą własność, że dają nieskończenie wiele maximów i minimów w każdym, dowolnie zresztą małym przedziale (jak mówimy: oscylują pantachicznie). Własność ta nie pociąga jednak za sobą braku pochodnej: Köpcke dał przykład funkcji pantachicznie oscylującej, mającej pochodną dla każdej wartości zmiennej.

Z drugiej strony istnieją funkcje ciągłe bez oscylacji — np. stale rosnące — nieróżniczkowalne w żadnym przedziale (t. j. nie posiadające pochodnej dla pewnej wszędzie gęstej mnogości wartości zmiennej) (Funkcja Schwarza). Z pewnego twierdzenia Lebesgue'a wynika jednak, że funkcje takie muszą posiadać pochodną, dla pewnych przynajmniej wartości, wewnątrz każdego, dowolnie zresztą małego, przedziału.

Funkcja, posiadająca dla danej wartości pochodną, musi być dla tej wartości ciągłą. Istnieją jednak funkcje pantachicznie nieciągłe, które pantachicznie posiadają pochodną (Westfall).

6. Niech $f(x)$ oznacza daną funkcję ciągłą. Równanie

$$y = f(x)$$

przedstawiać będzie (w kartezjańskim układzie spółrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie) krzywą ciągłą.

Stosunek:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$$

przedstawia, jak wiadomo, tangens kąta, który prosta $M_0 M_n$, łącząca punkty

$$M_0(x_0, y_0) \text{ i } M_n(x_n, y_n),$$

tworzy z osią OX. Granicą tego stosunku będzie więc styczna kąta, który styczna do krzywej w punkcie M_0 tworzy z osią X-ów.

Stąd już widać, jak ważną rolę odgrywają pochodne w teorji krzywych. (Zob. bliżej: G i e o m e t r j a r ó ż n i c z k o w a).

Każda funkcja ciągła posiada też swój odpowiednik mechaniczny. Wyobraźmy sobie punkt M, poruszający się po prostej OP: niech $f(x)$ oznacza odległość punktu M od punktu O po upływie czasu x. Różnica $f(x_n) - f(x_0)$ przedstawiać więc będzie drogę przebytą przez punkt M w czasie od x_0 do x_n: stosunek

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

wyznaczy więc średnią prędkość punktu M w czasie od x_0 do x_n; granicą tego stosunku będzie prędkość punktu M dla czasu x_0. Pochodna funkcji ma więc interpretację mechaniczną jako prędkość ruchu; podobnież drugą pochodną $f''(x)$ możnaby interpretować jako przyśpieszenie. Widzimy stąd, jak ważną rolę odgrywa pojęcie pochodnej w mechanice.

7. Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada dla danej wartości x_0 pochodną, to bieg funkcji $f(x)$ przy przejściu zmiennej przez wartość x_0 jest w ścisłym związku ze znakiem pochodnej $f'(x_0)$: mianowicie, jeżeli pochodna ta jest > 0, to funkcja dla wartości $x = x_0$ jest rosnąca, jeżeli natomiast $f'(x_0) < 0$, to funkcja $f(x)$ maleje dla $x = x_0$. Stąd wniosek, że tam gdzie funkcja osiąga maximum lub minimum (a więc nie jest ani rosnącą, ani malejącą), tam pochodna, o ile istnieje, jest zerem. Jeżeli więc dana funkcja $f(x)$ posiada w danym przedziale (a, b) wszędzie pochodną, to dla wyznaczenia extremów jej w uważanym przedziale, wystarczy uwzględnić te wartości x, dla których pochodna staje się zerem. Istnienie oraz charakter extremów zależy przytym od zachowania się pochodnych wyższych rzędów dla uważanej wartości zmiennej.

Z uwag powyższych widocznym jest znaczenie rachunku różniczkowego przy wyznaczaniu maximów i minimów funkcji. Nie mniejszą rolę odgrywają pochodne przy rozwijaniu funkcji na szeregi, że wspomnimy tylko o szeregach potęgowych.

Jeżeli $f(x)$ oznacza wielomian całkowity m-go stopnia:

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

to mamy wzór:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^m}{m!} f^{(m)}(0),$$

który możemy uważać jako przypadek szczególny rozwinięcia na szereg nieskończony:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots,$$

które zachodzi, o ile funkcja $f(x)$ spełnia pewne warunki. Jest to t. zw. *wzór* MACLAURINA (Wzór ten zachodzi np. dla funkcji $f(x) = \sin x$, $\cos x$, e^x; dalej w pewnych granicach dla x, dla funkcji $\lg(1+x)$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\sqrt[m]{1+x}$).

8. Dla wyjaśnienia pojęcia pochodnych cząstkowych ograniczymy się do przypadku funkcji dwu zmiennych: $f(x, y)$, gdzie x leży w przedziale (a, b), zaś y w przedziale (c, d).

Przy danym $y = y_0$ funkcję $f(x, y_0)$ uważać możemy jako funkcję jednej tylko zmiennej x:

$$f(x, y_0) = \varphi(x).$$

Pochodną tej funkcji $\varphi(x)$ dla wartości x_0 nazywamy *pochodną cząstkową* funkcji $f(x, y)$ względem x w punkcie (x_0, y_0) i oznaczamy przez

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

Podobnież określamy pochodną cząstkową względem y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Funkcje $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ same mogą posiadać pochodne względem x oraz względem y: będą to t. zw. pochodne cząstkowe drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Pochodne cząstkowe odgrywają ważną rolę w analizie, gieometrji, mechanice oraz fizyce matematycznej.

B. Rachunek całkowy.

9. Za czasów Newtona i Leibniza całkowanie określano jako działanie odwrotne względem różniczkowania. Zcałkować daną funkcję $f(x)$ znaczyło to znaleźć jej funkcję *pierwotną*, t. j. taką funkcję $F(x)$, której pochodną jest $f(x)$. Wtedy już zauważono również ścisły związek, jaki zachodzi między całkowaniem funkcji a t. zw. *kwadraturą krzywych*. Jednak rozumowanie, którym się dla wykazania tego związku posługiwano, grzeszyło brakiem należytej ścisłości. Uważano mianowicie miarę pola, ograniczonego krzywą, jako coś istniejącego a priori i liczbowo dobrze określonego, a nadto przyjmowano bez dowodu pewne własności miary.

10. Postaramy się tu przedewszystkim wyjaśnić, w jaki sposób problemat funkcji pierwotnych doprowadził do badania pewnych sum oraz do definicji całki oznaczonej.

Załóżmy, że dla danej funkcji $f(x)$, określonej w przedziale (a, b), istnieje funkcja pierwotna $F(x)$ (a więc taka funkcja, że mamy $F'(x) = f(x)$). Obierzmy jakikolwiek ciąg skończony liczb

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Mamy oczywiście tożsamość:

$$F(b) - F(a) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \ldots + F(x_n) - F(x_{n-1})$$

Ponieważ w każdym przedziale (x_{k-1}, x_k) $(k = 1, 2, \ldots n)$, $F(x)$ posiada oznaczoną skończoną pochodną $f(x)$, więc, w myśl twierdzenia Lagrange'a o przyrostach skończonych (dowodzonego w rachunku różniczkowym), mamy:

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k),$$

gdzie ξ_k oznacza pewną liczbę, leżącą wewnątrz przedziału (x_{k-1}, x_k). W ten sposób otrzymujemy tożsamość:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k).$$

Doprowadza nas to do badania sum postaci

$$S = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k),$$

gdzie ξ_k oznacza pewną liczbę, spełniającą nierówności

$$x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k.$$

Obierzmy teraz jakikolwiek ciąg nieskończony sum

$$S_p = \sum_{k=1}^{n_p} (x_k^{(p)} - x_{k-1}^{(p)}) f(\xi_k^{(p)}),$$

byleby taki, że

$$x_0^{(p)} = a, x_{n_p}^{(p)} = b, 0 < x_k^{(p)} - x_{k-1}^{(p)} \leqslant \varepsilon_p, \text{ dla } k = 1, 2, \ldots n_p,$$

przyczym

$$\lim_{p=\infty} \varepsilon_p = 0.$$

Dowodzi się, że jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b), to wszystkie utworzone w powyższy sposób ciągi S_p zmierzają do wspólnej granicy

$$\lim_{p=\infty} S_p,$$

którą oznaczamy (według Fouriera) symbolem

$$\int_a^b f(x) dx.$$

11. Połóżmy

$$\int_a^t f(x) dx = F(t)$$

przy wszelkim t, należącym do przedziału (a, b). Dowodzi się, że jeżeli funkcja $f(x)$ jest w przedziale (a, b) ciągłą, to dla każdej wartości t tego przedziału mamy

$$F'(t) = f(t).$$

Innemi słowy, jeżeli funkcję ciągłą w danym przedziale zcałkujemy (w granicach od a do t) i otrzymaną w ten sposób funkcję ($F(t)$) zróżniczkujemy (względem t), to otrzymamy znowu daną funkcję ($f(t)$).

Z twierdzenia tego wynika też bezpośrednio, że każda funkcja ciągła posiada swą funkcję pierwotną. (Dowodzi się z łatwością, że dwie funkcje pierwotne jednej i tej samej funkcji różnią się co najwyżej o stałą).

Wobec wypowiedzianego wyżej t. zw. twierdzenia zasadniczego rachunku całkowego, można różniczkowanie i całkowanie poniekąd uważać jako działania względem siebie odwrotne. Dlaczego użyliśmy zastrzeżenia *poniekąd*, wyjaśnimy w następnym paragrafie.

12. Sumy S_p (§ 10) mogą zmierzać do oznaczonej granicy nawet wtedy, jeżeli funkcja $f(x)$ nie jest ciągłą. Zachodzi to np. dla funkcji

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Enx}{n^3},$$

gdzie Ez oznacza największą liczbę całkowitą, nie większą od z. Funkcja ta jest nieciągłą dla każdej wartości wymiernej. Jeżeli dla danej funkcji $f(x)$ (ciągłej lub nieciągłej) wszystkie ciągi sum S_p (utworzonych jak w § 10-tym) zmierzają do tej samej granicy, to mówimy, że funkcja $f(x)$ jest całkowalna w znaczeniu Riemanna i oznaczamy wspólną granicę sum S_p przez

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Lebesgue udowodnił, że na to, iżby funkcja ograniczona $f(x)$ była w przedziale (a, b) całkowalną w znaczeniu Riemanna, potrzeba i wystarcza, iżby wszystkie miejsca nieciągłości funkcji $f(x)$ można było zamknąć w skończony albo przeliczalny zbiór przedziałów o dowolnie małej sumie długości.

Jeżeli funkcja $f(x)$, całkowalna w przedziale (a, b) w znaczeniu Riemanna, nie jest dla wartości $x = t$ ciągłą, to pochodną funkcji

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

może nie być wartość funkcji $f(t)$.

Funkcja całkowalna w pewnym przedziale w znaczeniu Riemanna musi być w tym przedziale co najwyżej punktowo-nieciągłą (to znaczy, że zbiór jej miejsc ciągłości musi być wszędziegęsty); warunek ten nie wystarcza jednak dla całkowalności.

Volterra dał przykład funkcji, posiadającej w przedziale (a, b) wszędzie pochodną, ale pochodna ta nie jest całkowalna w znaczeniu Riemanna (pomimo że jest punktowo-nieciągła, jak każda pochodna, o ile istnieje a nie jest ciągłą).

Widzimy więc, że całkowanie i różniczkowanie poniekąd tylko mogą być uważane jako działanie względem siebie odwrotne.

13. Niech $f(x)$ oznacza dowolną daną funkcję, byleby ograniczoną w przedziale (a, b). Dowodzi się, że w takim razie wśród liczb A, dla których (w uważanym przedziale) mamy stale

$$A \leqslant f(x),$$

istnieje jedna największa m, zaś wśród liczb B, dla których stale

$$f(x) \leqslant B,$$

istnieje jedna najmniejsza M. Liczby m oraz M nazywamy odpowiednio d o l n y m oraz g ó r n y m k r e s e m funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b).

Utwórzmy sumy

$$\overline{S}_p = \sum_{k=1}^{n_p} (x_k^{(p)} - x_{k-1}^{(p)})\, M(x_{k-1}^{(p)}, x_k^{(p)})$$

oraz

$$\underline{S}_p = \sum_{k=1}^{n_p} (x_k^{(p)} - x_{k-1}^{(p)})\, m(x_{k-1}^{(p)}, x_k^{(p)}),$$

gdzie

$$a = x_0^{(p)},\ b = x_{n_p}^{(p)},\ 0 < x_k^{(p)} - x_{k-1}^{(p)} < \varepsilon_p,\ k = 1, 2, \ldots n_p;\ \lim_{p=\infty} \varepsilon_p = 0,$$

przyczym $M(x_{k-1}, x_k)$ oraz $m(x_{k-1}, x_k)$ oznacza odpowiednio górny oraz dolny kres funkcji $f(x)$ w przedziale (x_{k-1}, x_k).

Darboux dowiódł, że przy powyższych warunkach sumy $\overline{S}_p$ zmierzają zawsze do jednej i tej samej granicy

$$\lim_{p=\infty} \overline{S}_p = \overline{I},$$

zaś sumy $\underline{S}_p$ zmierzają zawsze do tej samej granicy

$$\lim_{p=\infty} \underline{S}_p = \underline{I},$$

przyczym

$$\overline{I} \geqslant \underline{I}.$$

Liczby $\overline{I}$ oraz $\underline{I}$ nazywamy odpowiednio *górną* oraz *dolną* całką funkcji $f(x)$ w granicach (a, b) i oznaczamy przez

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} \quad \text{oraz} \quad \underline{\int_a^b f(x)dx}$$

Jeżeli $\overline{I} = \underline{I}$, to funkcja $f(x)$ jest w przedziale (a, b) całkowalna w znaczeniu Riemanna i naodwrót. Mamy wówczas

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{I} = \underline{I}.$$

14. H. Lebesgue postawił sobie następujące zadanie:

Każdej funkcji $f(x)$, określonej w danym przedziale skończonym (a, b), podporządkować liczbę skończoną $\int_a^b f(x)\,dx$ tak, iżby spełnione były zawsze następujące warunki:

1) Dla wszelkich (rzeczywistych) a, b, h:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx;$$

2) Dla wszelkich (rzeczywistych) a, b, c:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$$

3) $$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx$$

4) Jeżeli $f(x) \geqslant 0$ dla $a \leqslant x \leqslant b$, to

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

5) $$\int_0^1 1 . dx = 1$$

6) Jeżeli ciąg $f_n(x)$ zmierza wzrastając do $f(x)$, to całka funkcji $f_n(x)$ zmierza do całki funkcji $f(x)$.

Lebesgue dowodzi, że dla pewnej bardzo obszernej klasy funkcji, zwanych *sumowalnemi (sommables)* można istotnie wyznaczyć podporządkowanie, spełniające 6 wyżej podanych warunków. Dowód ten opiera się na nowej definicji miary (miara Lebesgue'a) oraz funkcji *mierzalnych.*

Każda funkcja całkowalna w znaczeniu Riemanna jest zarazem całkowalną w znaczeniu Lebesgue'a (i obie całki są wtedy równe), ale nie na odwrót: istnieją funkcje całkowalne w znaczeniu (L), które nie są całkowalne w znaczeniu (R). (Np. funkcja $f(x)$, równa zeru dla x wymiernych, zaś jedności dla x niewymiernych).

Za pomocą całek Lebesgue'a można rozwiązać następujące zagadnienia: mając daną funkcję ograniczoną, przekonać się, czy funkcja ta jest pochodną innej funkcji, ewentualnie znaleźć jej funkcję pierwotną. Wystarczy daną funkcję $f(x)$ zcałkować w znaczeniu Lebesgue'a i otrzymaną w ten sposób funkcję $F(x)$ zróżniczkować: jeżeli (w uważanym przedziale) stale $F'(x) = f(x)$, to funkcja $F(x)$ jest żądaną: w przeciwnym razie zadanie nie jest rozwiązalne.

15. Literatura:

Dla początkujących:

J. Tannery. Leçons d'Algèbre et d'Analyse:
Tom I, str. VII+423. Paryż, 1906. Cena fr. 12.
Tom II, str. 636, Paryż, 1906. Cena fr. 12.

B. Niewenglowski. Cours d'Algèbre. Tom II, Paryż. Cena fr. 8.

G. Kowalewski. Grundzüge der Differential- und Integralrechnung; str. IV+452, 1909. Cena m. 12.

Do dalszego studjowania polecamy jedno z dzieł:

C. Jordan. Cours d'Analyse de l'École Politechnique. (Paryż, Gauthier-Villars):

Tom I: Calcul différentiel. Wyd. 3-cie 1909. Cena fr. 17.

Tom II: Calcul intégral. Wyd. 3-cie 1913. Cena fr. 20.

Tom III: Calcul intégral. (Équations différentielles). Wyd. 2-gie, 1896. Cena fr. 15. (Rach. różniczkowy i całkowy wyłożony w całości w pierwszych częściach t. I i II. Dalsze części dzieła zawierają teorję funkcji analitycznych i równ. różniczkowych).

É. Goursat. Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris. Wydanie 2-gie (Paryż, Gauthier-Villars):

Tom I. 1910. Cena fr. 20.

Tom II. 1911. Cena fr. 20.

Tom III wychodzi zeszytami.

Naszego przedmiotu dotyczy tylko część t. I. (Przygotowuje się przekład polski).

Ch. J. de la Vallée-Poussin. Cours d'Analyse infinitésimale. Paryż, 1909.

Tom I, str. XII + 424. Cena fr. 12.

Tom II, str. XVI + 440. Cena fr. 15.

Świeżo wyszło nowe (trzecie) wydanie tomu I-go, znacznie zmienione: str. X+452. Paryż, 1914.

J. Tannery. Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable. Tom I, 1904; str. 422. Tom II, 1910; str. 477. Paryż, Gauthier-Villars.

U. Dini-Lüroth-Schepp. Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse. Str. XVIII + 554. Teubner, 1892. Cena m. 12.

Stolz. Grundzüge der Differential- und Integralrechnung:

I. Teil: Reelle Veränderliche und Functionen. Str. X+460, 1893. Cena m. 8.

II. Teil: Komplexe Veränderliche und Functionen. Str. IX+338, 1896. Cena m. 8.

III. Teil: Die Lehre von den Doppelintegralen. Str. VIII+296, 1899. Cena m. 8.

E. W. Hobson. The Theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's Series. Cambridge, 1907, str. 772. Cena szyl. 21.

H. LEBESGUE. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Paryż, 1904. Cena fr. 3.50.

Zawiera rozdziały: I. Całka przed Riemannem. II. Definicja całki dana przez Riemanna. III. Definicja gieometryczna całki. IV. Funkcje o wahaniu ograniczonym *(à variation bornée)*. V. Szukanie funkcji pierwotnych. VI. Całka określona za pomocą funkcji pierwotnych. VII. Funkcje sumowalne.

Sposób wykładu historyczny.

S. ZAREMBA. Rachunek różniczkowy (litografowane). Wyd. Kółka mat.-fiz. Uczniów Uniw. Jagiell. w Krakowie.

Znający już rachunek różniczkowy i całkowy w wykładzie elementarnym z korzyścią przeczytać mogą:

E. PASCAL. Rachunek nieskończonościowy. Warszawa, 1896. Cz. I: Rachunek różniczkowy; str. 265. Cena rb. 2. Cz. II. Rachunek całkowy; str. 240. Cena rb. 2. (Tłum. z włoskiego).

Do ćwiczeń z rachunku różniczkowego i całkowego godne jest polecenia:

E. PASCAL. Esercizii critici di Calcolo differenziale e integrale. Wydanie drugie. Medjolan, Hoepli. 1909; str. XVI+275. — Mamy przekład polski:

E. PASCAL. Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego. Warszawa, 1909; str. XVI+226. Cena rb. 2.

Z dawniejszych zbiorów ćwiczeń na uwagę zasługują:

M. F. FRENET. Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal. Paryż, 1856, str. X+220.

L. A. SOHNCKE. Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. Halla. Cz. I, wyd. 6, 1903. Cz. I i II, wyd. 5, 1885.

F. TISSERAND. Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal. Wydanie drugie. Paryż, 1896; str. XXIII+524.

RACHUNEK RÓŻNICOWY I SUMACYJNY.

OPRACOWAŁ

WACŁAW SIERPIŃSKI.

Treść: *A.* Rachunek różnicowy: 1. Pojęcie p-tej różnicy; wzór ogólny na p-tą różnicę i jego odwrócenie. 2. Zastosowanie różnic do przekształcania szeregów. 3. Wzór interpolacyjny Lagrange'a; forma reszty Cauchy'ego. Wzór interpolacyjny Newtona. Związek rachunku różnicowego z różniczkowym. Wzór interpolacyjny Borela.
B. Rachunek sumacyjny: 4. Sumowanie dokładne za pomocą prostych wzorów; sumowanie przybliżone. 5. Związek między sumą a całką. Wzór Eulera-Maclaurina. 6. Wzór Poissona. Wzór Fouriera jako szczególny przypadek wzoru Poissona. Uogólnienie wzorów Eulera-Maclaurina i Poissona. 7. Wymagane przygotowanie. Literatura.

A. Rachunek różnicowy.

1. Niech

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3, \dots\ u_n \tag{0}$$

oznacza dany ciąg liczb; utwórzmy kolejne różnice:

$$u_1 - u_0,\ u_2 - u_1,\ u_3 - u_2, \dots\ u_n - u_{n-1}$$

Dla skrócenia oznaczamy te różnice odpowiednio przez:

$$\Delta u_0,\ \Delta u_1,\ \Delta u_2, \dots\ \Delta u_{n-1} \tag{1}$$

Jest więc ogólnie

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k \text{ (dla } k = 0,\ 1,\ 2, \dots\ n-1)$$

Dla ciągu (1), złożonego z n wyrazów, możemy utworzyć $n-1$ nowych różnic:

$$\Delta u_1 - \Delta u_0,\ \Delta u_2 - \Delta u_1, \dots\ \Delta u_{n-1} - \Delta u_{n-2},$$

które oznaczamy odpowiednio przez

$$\Delta^2 u_0,\ \Delta^2 u_1, \dots\ \Delta^2 u_{n-2} \tag{2}$$

Jest więc ogólnie

$$\Delta^2 u_k = \Delta u_{k+1} - \Delta u_k \quad (k = 0, 1, \ldots n-2)$$

Ciąg (2) doprowadza nas do $n-2$ nowych różnic

$$\Delta^3 u_0, \Delta^3 u_1, \ldots \Delta^3 u_{n-3},$$

aż wreszcie dojdziemy do jedynej różnicy $\Delta^n u_0$.

Dla symetrji oznaczamy u_k przez $\Delta^0 u_k$. W ten sposób symbol $\Delta^p u_k$ możemy uważać jako funkcję dwu zmiennych całkowitych nieujemnych p i k, spełniających nierówność $k+p \leqslant n$, określoną wzorami zwrotnemi

$$\Delta^p u_k = \Delta^{p-1} u_{k+1} - \Delta^{p-1} u_k \begin{pmatrix} p = 1, 2, \ldots n \\ k = 0, 1, \ldots n-p \end{pmatrix}$$

P r z y k ł a d. Przyjmijmy $u_k = k^3$, $n = 5$. Mamy więc ciąg

$$0, 1, 8, 27, 64, 125, \tag{0}$$

dla którego ciągiem pierwszych różnic będzie

$$1, 7, 19, 37, 61. \tag{1}$$

Ciągiem drugich różnic będzie:

$$6, 12, 18, 24, \tag{2}$$

ciągiem różnic rzędu trzeciego:

$$6, 6, 6; \tag{3}$$

czwarte różnice będą:

$$0, 0, \tag{4}$$

wreszcie piąta i ostatnia różnica:

$$0 \tag{5}$$

Dotychczas określaliśmy różnice $\Delta^p u_k$ tylko za pomocą wzorów zwrotnych. Łatwo jednak znaleźć i dowieść przez indukcję wzór, pozwalający wyrazić bezpośrednio każdą różnicę $\Delta^p u_k$ przez wyrazy ciągu $u_0, u_1, \ldots u_n$. Wzór ten możemy symbolicznie napisać w postaci:

$$\Delta^p u_k = \text{symb.}\ (u-1)^p\ u^k, \tag{I}$$

gdzie dla wyznaczenia wzoru należy po prawej stronie uprzednio rozwinąć wielomian $(u-1)^p u^k$ i następnie każdą potęgę u^q zastąpić przez u_q.

Załóżmy teraz, że znane są liczby

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0, \ldots\ \Delta^n u_0.$$

Mając te liczby, można wyznaczyć u_n. Mamy bowiem $\Delta u_0 = u_1 - u_0$, skąd $u_1 = u_0 + \Delta u_0$; dalej $\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0 = u_2 - u_1 - \Delta u_0$, skąd $u_2 = u_1 + \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0$ i t. d. Przez łatwą indukcję dochodzimy do wzoru

$$u_k = \text{symb.}\ (1+\Delta)^k u_0, \tag{II}$$

gdzie po rozwinięciu wyrażenia $(1+\Delta)^k u_0$ tak, jak gdyby to był wielomian względem Δ, należy $\Delta^p u_0$ rozumieć jako p-tą różnicę wyrazu u_0.

P r z y k ł a d: Przyjmijmy $u_k = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2$. Mamy tu, jak łatwo obliczyć: $u_0 = 0$, $\Delta u_0 = 1$, $\Delta^2 u_0 = 3$, $\Delta^3 u_0 = 2$, zaś $\Delta^p u_0 = 0$, dla $p > 3$. Wzór (II) daje więc:

$$u_k = \text{symb.}\ (1+\Delta)^k u_0 = u_0 + k\Delta u_0 + \frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0,$$

$$\text{czyli}\ u_k = k + \frac{k(k-1)}{1.2}\cdot 3 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\cdot 2,$$

skąd, po łatwej redukcji:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Widzimy więc, jakie zastosowanie ma rachunek różnic skończonych przy obliczaniu sum typu $1^s + 2^s + \ldots + k^s$.

2. Podamy obecnie przykład zastosowania rachunku różnicowego do przekształcania szeregów.

Załóżmy, że szereg

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

jest zbieżny dla wartości $x \neq 1$. Mamy stąd

$$S(x) = a_0 + x\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n,$$

$$xS(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

skąd wnosimy, że zbieżnym jest szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n . x^n$ oraz że

$$(1-x)S(x) = a_0 + x\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n . x^n,$$

skąd

$$S(x) = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n . x^n.$$

Stąd, przez łatwą indukcję wnosimy, że zbieżnym będzie szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^k a_n . x^n$ przy wszelkim naturalnym k, oraz że będzie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x}\,\frac{\Delta a_0}{1-x} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \frac{\Delta^2 a_0}{1-x} + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{x}{1-x}\right)^{k-1} \frac{\Delta^{k-1} a_0}{1-x} + R_k(x),$$

$$\text{gdzie } R_k(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^k a_n . x^n.$$

Stąd, w razie $\lim_{k=\infty} R_k(x) = 0$, otrzymujemy wzór Eulera:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^k \frac{\Delta^k a_0}{1-x},$$

służący do przekształcania szeregów wolno zbieżnych na zbieżne szybciej. Na szczególniejszą uwagę zasługuje przypadek tego wzoru dla $x = -1$, czyli wzór:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \Delta^k a_0,$$

który zachodzi, jeżeli tylko $\lim_{k=\infty} R_k = 0$, gdzie

$$R_k = \frac{(-1)^k}{2^k} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \Delta^k a_n.$$

W szczególności np., dla $a_n = \frac{1}{n+1}$, otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k}.$$

3. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest znaną dla n wartości zmiennej

$$x = a_1, a_2, \ldots a_n,$$

należących do przedziału (α, β). Chcemy na tej podstawie obliczyć wartość $f(x)$ dla dowolnej danej wartości x w przedziale (α, β).

Tak postawione zagadnienie jest całkowicie nieoznaczonym, nawet w założeniu, że funkcja $f(x)$ jest ciągła, gdyż istnieje nieskończenie wiele funkcji ciągłych, przybierających z góry dane n wartości dla n wartości zmiennej w danym przedziale. Zagadnienie to staje się jednak w zupełności oznaczonym, jeżeli przypuścimy, że $f(x)$ jest wielomianem całkowitym względem x, stopnia niższego od n. W takim razie jedynym jego rozwiązaniem będzie wielomian:

$$P(x) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} f(a_1) + \frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)} f(a_2)$$
$$+ \ldots + \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})} f(a_n) \qquad \text{(III)}$$

Jest to t. zw. *wzór interpolacyjny* LAGRANGE'A (1736—1813). Jeżeli funkcja $f(x)$ nie jest wielomianem całkowitym stopnia niższego od n, to wzór (III) oczywiście nie daje tożsamościowo $f(x) = P(x)$. Można jednak wówczas badać bliżej różnicę $f(x) - P(x)$. W założeniu, że funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (α, β) z włączeniem granic i przynajmniej wewnątrz tego przedziału posiada pochodne aż do rzędu n-go, otrzymujemy dla różnicy $f(x) - P(x)$ wzór;

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

gdzie ξ oznacza liczbę, leżącą wewnątrz przedziału (α, β). Powyższa forma reszty wzoru LAGRANGE'A podaną została przez CAUCHY'EGO (1789—1859).

Inny wzór interpolacyjny podany został przez NEWTONA (1642—1727). Połóżmy

$$f(a+kh)=u_k, \text{ dla } k=0, 1, \ldots n$$

i oznaczmy

$$\Delta^p u_0=\Delta^p f(a),\ h^p=\Delta a^p;$$

będziemy mieli, w razie $\alpha<a<a+nh<\beta$, wzór:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}\frac{\Delta f(a)}{\Delta a}+\frac{(x-a)(x-a-\Delta a)}{2!}\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta a^2}+$$

$$+\cdots+\frac{(x-a)(x-a-\Delta a)\ldots(x-a-(n-1)\Delta a)}{n!}\frac{\Delta^n f(a)}{\Delta a^n}+$$

$$+\frac{(x-a)\ldots(x-a-n\Delta a)}{(n+1)!}f^{(n-1)}(\xi), \text{ gdzie } \alpha<\xi<\beta.$$

Stąd, w szczególności, kładąc $f(x)=Lg_{10}x$, $n=1$, $a\geqslant 1000$, $\Delta a=1$, otrzymujemy wzór:

$$Lg_{10}x=Lg_{10}a+(x-a)\Delta Lg_{10}a-\frac{(x-a)(x-a-1)}{2}\frac{Lg_{10}e}{\xi^2},$$

gdzie $a<\xi<a+1$. Wzór ten usprawiedliwia interpolację przy używaniu tablic logarytmicznych (gdyż, dla $a<x<a+1$, ostatni jego wyraz jest bezwzględnie $<\frac{1}{16.10^6}$ i przeto wpływa dopiero na ósmy znak dziesiętny liczby $Lg_{10}x$).

Co się tyczy wyrażeń $\frac{\Delta^p f(a)}{\Delta a^p}$, figurujących we wzorze NEWTONA, to zauważymy, że można dowieść, iż (w założeniu, że istnieje p-ta pochodna funkcji $f(x)$):

$$\frac{\Delta^p f(a)}{\Delta a^p}=f^{(p)}(a+\theta p\Delta a), \text{ gdzie } 0<\theta<1.$$

Stąd, w razie ciągłości p-tej pochodnej:

$$\lim_{\Delta a=0}\frac{\Delta^p f(a)}{\Delta a^p}=\frac{d^p f(a)}{da^p},$$

co usprawiedliwia znakowanie pochodnych i wskazuje na związek rachunku różnicowego z różniczkowym. Wogóle jednak istnienie lewej strony tego wzoru nie pociąga za sobą istnienia prawej: np. dla $f(x)=|x|$, $p=2$, $a=0$ lewa strona jest zerem, a pochodna $f''(0)$ nie istnieje. Podobnież dla $f(x)=x^3\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ $(f(0)=0)$, gdy $p=2$, $a=0$.

BOREL podał wzór, który pozwala dokładnie wyznaczać wartość funkcji ciągłej $f(x)$ dla każdej wartości rzeczywistej przedziału $(-1, +1)$, w razie jeżeli znamy jej wartości dla każdej liczby wymiernej tego przedziału. Jest to wzór:

$$f(x) = \lim_{q=\infty} \sum_{p=-q}^{q} f\left(\frac{p}{q}\right) P_{p,q}(x),$$

gdzie $P_{p,q}(x)$ są wielomiany całkowite, które mogą być wyznaczone raz na zawsze (t. j. tak, iżby wypisany wzór zachodził dla każdej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale $-1, 1)$ [1]).

B. Rachunek sumacyjny.

4. Przedmiotem *rachunku sumacyjnego* jest obliczanie sum postaci

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} f(n) \tag{1}$$

W napisanym symbolu $f(n)$ oznacza funkcję, określoną przynajmniej dla każdej wartości całkowitej n większej od a i nie większej od b, zaś sumowanie należy rozciągnąć na wszystkie kolejne liczby całkowite, spełniające nierówności:

$$a < n \leqslant b.$$

Wyraźnie więc:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} f(n) = f(Ea+1) + f(Ea+2) + \ldots + f(Eb-1) + f(Eb),$$

gdzie Ex oznacza największą liczbę całkowitą $\leqslant x$.

Znane są przypadki, w których suma powyższa, przy dowolnych a i $b > a$ daje się wyznaczyć przez proste wzory: typowemi przykładami tego rodzaju są postępy arytmetyczny i gieometryczny. Przypadki takie należy jednak zaliczyć do wyjątkowych: wogóle, przy względnie nawet prostej postaci funkcji $f(n)$ suma (1) przez proste wzory dokładnie obliczyć się nie daje. Nie posiadamy np. żadnej prostej metody, pozwalającej dokładnie obliczyć sumę szeregu harmonicznego:

---

[1]) Zob. É. Borel. Leçons sur les fonctions de variables réelles etc. Paryż, 1905, str. 80, jako też: W. Sierpiński. Dowód elementarny twierdzenia Weierstrassa i wzoru interpolacyjnego Borela. Prace mat.-fiz. T. XXII, str. 59—68.

$$\sum_{n>0}^{n \leq k} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$$

przy wielkiej liczbie składników.

Często jednak (a w zastosowaniach prawie zawsze) chodzi tylko o przybliżoną wartość sumy: wystarcza nam np. dokładność do jedności, do jednej dziesiątej, do $\frac{1}{m}$, gdzie m oznacza liczbę składników sumy i t. p. Otóż godną uwagi jest rzeczą że dla większości funkcji $f(n)$ taka przybliżona wartość sumy daje się wyrazić prostym wzorem. Dla lepszego wyjaśnienia tego rozpatrzymy tu bliżej przykład $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Wobec oczywistych nierówności

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} =$$
$$= 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}),$$

mamy

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

Dodając stronami wypisane w ten sposób nierówności dla $n = 2, 3, \ldots k$, oraz nierówność oczywistą:

$$2(\sqrt{2} - 1) < \frac{1}{\sqrt{1}} \leqslant 2\sqrt{1} - 1,$$

otrzymamy, dla $k > 1$, po łatwej redukcji:

$$2\sqrt{k} - 2 < 2\sqrt{k+1} - 2 < \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{k} - 1,$$

skąd

$$-1 < \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} - (2\sqrt{k} - 1) < 0.$$

Jest więc, z błędem mniejszym od jedności:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{k} - 1.$$

Np. suma $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}$, z błędem mniejszym od jedności wynosi 19.

Podobnież możnaby dowieść, że, z błędem mniejszym od jedności mamy:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}=\lg k,$$

zaś, z błędem $<\frac{1}{k}$:

$$\sum_{n=1}^{k}\lg n=k\lg k-k+\tfrac{1}{2}\lg k+\lg\sqrt{2\pi}.$$

(jest to t. zw. *wzór* STIRLINGA).

5. Dla funkcji $f(x)$, ciągłych w przedziale (a, b), istnieje ciekawy związek między wartością sumy (1) a wartością całki:

$$\int_a^b f(x)dx, \tag{2}$$

mianowicie ostatnia przedstawia zazwyczaj przybliżoną wartość sumy (1). Stopień tego przybliżenia zależy oczywiście od natury funkcji $f(x)$ i od granic sumowania.

Z łatwością możemy sobie wytłumaczyć przyczynę tej ciekawej okoliczności. Całkę (2) możemy mianowicie przedstawić w postaci:

$$\int_a^{Ea+1} f(x)dx+\sum_{n>a}^{n\leq b}\int_n^{n+1} f(x)dx-\int_b^{Eb+1} f(x)dx.$$

Wyrazy pierwszy i ostatni nieznacznie tylko wpływają na wartość całego wyrażenia, zaś, w myśl twierdzenia o wartości średniej całki oznaczonej:

$$\int_n^{n+1} f(x)dx=f(\xi_n),\text{ gdzie } n<\xi_n<n+1.$$

Lecz, jeżeli funkcja $f(x)$ ma bieg mniej więcej prawidłowy, to wartość $f(\xi_n)$ mało się różni od wartoścj $f(n)$ (gdyż ξ_n różni się od n mniej, niż o jedność) i przeto w przybliżeniu

$$\int_n^{n+1} f(x)dx=f(n),$$

skąd, również w przybliżeniu:

$$\sum_{n<a}^{n\leqq b}\int_n^{n+1} f(x)dx = \sum_{n>a}^{n\leqq b} f(n)$$

i wreszcie, w przybliżeniu

$$\sum_{n>a}^{n\leqq b} f(n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Więc naprzykład przybliżoną wartością sumy $\sum\limits_{n>a}^{n\leqq b}\frac{1}{\sqrt{n}}$ jest $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{b}-\sqrt{a})$, zaś przybliżoną wartością sumy $\sum\limits_{n>a}^{n\leqq b}\frac{1}{n}$ jest $\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \lg\frac{b}{a}$ i t. p.

Rozważania podobne nie miałyby jednak z punktu widzenia ścisłości matematycznej żadnej wartości, gdybyśmy nie badali granic błędu naszych przybliżeń. W tym celu badamy bliżej różnicę między sumą (1) a całką (2). Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w przedziale (a, b) pochodną i jeżeli ta pochodna jest całkowalna, to dla omawianej różnicy mamy wzór:

$$\sum_{>a}^{n\leqq b} f(n) - \int_a^b f(x)dx = (Eb-b+\tfrac{1}{2})f(b) - (Ea-a+\tfrac{1}{2})f(a) -$$
$$-\int_a^b (Ex-x+\tfrac{1}{2})f'(x)dx \tag{3}$$

Dla wartości bezwzględnej ostatniej całki można często wprost obliczyć górną granicę, zważywszy, że $|Ex-x+\frac{1}{2}|\leqq\frac{1}{2}$; jeżeli otrzymana w ten sposób dokładność nie wystarcza, to można uzyskać większą dokładność, stosując względem całki

$$\int_a^b (Ex-x+\tfrac{1}{2})f'(x)dx$$

całkowanie przez części raz lub wielokrotnie (naturalnie w założeniu, że istnieją odpowiednie pochodne $f''(x)$, $f'''(x)$,... i że są całkowalne). W ten sposób, w razie całkowitych a i b, można dojść do wzoru, którego początkowe wyrazy są

$$\sum_{>a}^{n\leq b} f(n) = \int_a^a f(x)dx + \tfrac{1}{2}[f(b) - f(a)] + \tfrac{1}{12}[f'(b) - f'(a)]$$

$$- \tfrac{1}{720}[f'''(b) - f'''(a)] + \tfrac{1}{30240}[f^{(v)}(b) - f^{(v)}(a)] - \ldots$$

Jest to t. zw. *wzór sumacyjny* EULERA-MACLAURINA. Szereg, którego kilka składników wypisaliśmy po prawej stronie, nie jest wogóle zbieżny i przeto stosowalność jego wymaga uwzględnienia wyrazu uzupełniającego, który (jak to zresztą wynika ze sposobu otrzymania wzoru) można przedstawić w formie całki, zawierającej prócz funkcji Ex pochodną odpowiedniego rzędu funkcji $f(x)$.

6. Ze wzoru (3) § 5-go można otrzymać t. zw. wzór sumacyjny POISSONA (1781—1840). Punktem wyjścia jest tu rozwinięcie

$$Ex - x + \tfrac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi},$$

zachodzące przy wszelkim niecałkowitym rzeczywistym x. Wnosząc to rozwinięcie do wzoru (3), po pewnych przeróbkach otrzymujemy:

$$\sum_{n>a}^{n\leq b} f(n) = \tfrac{1}{2}[\varepsilon(b)f(b) - \varepsilon(a)f(a)] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_a^b f(x) \cos 2\pi nx dx,$$

gdzie $\varepsilon(x)$ oznacza 1 lub 0, zależnie od tego, czy x jest całkowite, czy też nie. Jest to właśnie *wzór sumacyjny* POISSONA. Kładąc w nim w szczególności:

$$a = -\frac{\pi + t}{2\pi}, \quad b = \frac{\pi - t}{2\pi}, \quad \text{gdzie } |t| < \pi, \quad \text{wreszcie } f(x) = F(2\pi x + t),$$

otrzymujemy z łatwością rozwinięcie na szereg FOURIERA:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \text{ gdzie}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx dx\,,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin kx dx.$$

Uogólnieniami wzoru EULERA-MACLAURINA oraz wzoru POISSONA zajmował się WORONOJ [1]), który badał sumy: $\sum_{n>a}^{n\leq b}\tau(n)f(n)$, gdzie $\tau(n)$ oznacza funkcję liczbową (np. liczbę dzielników liczby n, albo liczbę rozkładów na sumę dwu kwadratów).

---

7. Do studjowania podstaw teorji różnic skończonych potrzebne jest (jak to zresztą widać z § 1-go) minimalne przygotowanie: wystarcza znajomość matematyki elementarnej. Do teorji interpolacji potrzebne są nadto pewne wiadomości z algiebry wyższej oraz rachunku różniczkowego; studjowanie rachunku sumacyjnego wymaga nadto znajomości rachunku całkowego.

Literatura:

MARKOFF. Differenzenrechnung (tłumaczenie z rosyjskiego). Lipsk, 1896; str. VI+194. Cena m. 7.

D. SELIWANOFF. Lehrbuch der Differenzenrechnung. Lipsk, 1904; str. VI+92. Cena m. 4.

W. SIERPIŃSKI. Rachunek sumacyjny. Wykłady uniwersyteckie (litografowane). Lwów, 1909; str. 111. Cena k. 1.90.

E. PASCAL. Rachunek nieskończonościowy, tom III.: Rachunek warjacyjny i rachunek różnic skończonych. Warszawa, 1897. Cena rb. 2. — Rach. różnic skończonych, zarys rach. odwrotnego różnic i równ. różnicowych wyłożone na str. 157—247.

Ważniejsze wiadomości z rachunku różnicowego i sumacyjnego można też znaleźć w niektórych większych podręcznikach analizy.

---

1) Zob. Verhandlungen des III Intern. Math.-Kongresses: VORONOI: Sur le développement à l'aide des fonctions cylindriques, des sommes doubles etc., jakoteż, w Annales de l'École Normale t. XXI, jego rozprawę: Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries.

TEORJA FUNKCJI ANALITYCZNYCH.

NAPISAŁ

STANISŁAW ZAREMBA.

Treść: I. Wstęp ogólny: 1. Wymagane przygotowanie. 2. Pojęcie funkcji zmiennej zespolonej. 3. Znaczenie funkcji zmiennej zespolonej. 4. Pojęcie funkcji analitycznej.
II. Porządek studjów i dzieła z zakresu teorji funkcji analitycznych: 5. Ogólne zasady t. f. analitycznych. 6. Głębsze studja z t. f. analitycznych.
III. Zakończenie: 7. Funkcje algiebraiczne i ich całki; funkcje odwrotne takich całek, w szczególności funkcje eliptyczne. 8. Źródła bibljograficzne.

I.

1. Czytanie niniejszego artykułu i studjowanie teorji funkcji analitycznych rozpocząć może z pożytkiem tylko czytelnik, obeznany już z ogólnemi zasadami teorji funkcji **zmiennych rzeczywistych** i **teorji liczb zespolonych pospolitych**, a posiadający przytym gruntowne wiadomości z rachunku **różniczkowego** i rachunku **całkowego**. Zakres powyższych wiadomości może być skromny, o ile chodzi o zaznajomienie się z elementami teorji funkcji analitycznych, ale koniecznym jest gruntowne ich posiadanie. Przy głębszym wnikaniu w teorję funkcji analitycznych koniecznym jest zaznajomienie się w zakresie coraz to większym z gałęziami analizy, wymienionemi wyżej, oraz z teorją **mnogości**.

2. Żeby ułatwić czytelnikowi zorjentowanie się we wskazówkach natury dydaktycznej, które podane zostaną niżej, wytłumaczymy najpierw, czym są funkcje analityczne i jakie są zasadnicze zagadnienia teorji tych funkcji. Sądzimy jednak, że będziemy mogli przytym poprzestać na funkcjach jednej zmiennej.

Nazwijmy przez (Z) oznaczony zbiór liczb zespolonych i załóżmy, że, na podstawie pewnego układu umów, każdej takiej wartości zmiennej [1]) zespolonej z, która równa się jednej z liczb zespolonych zbioru (Z), odpowiada oznaczony zbiór wartości (U) drugiej zmiennej zespolonej u. W takim razie powiadamy, że zmienna zespolona u jest, na podstawie powyższego układu umów, oznaczoną *funkcją zmiennej zespolonej* z. Definicja poprzedzająca określa pojęcie funkcji zmiennej zespolonej w postaci najogólniejszej.

Teorja najelementarniejszych funkcji rzeczywistych doprowadza nas w sposób bardzo naturalny do rozważania pewnych funkcji zmiennej zespolonej. Weźmy naprzykład pod rozwagę równanie:

$$u = f(z), \tag{1}$$

gdzie $f(z)$ oznacza pewien wielomian całkowity zmiennej z Równanie to określa zmienną u jako funkcję zmiennej z nie tylko dla wszystkich wartości rzeczywistych zmiennej z, ale i dla wszystkich wartości zespolonych tej zmiennej. W tym przykładzie zbiór liczb, któryśmy oznaczyli w ogólnej definicji przez (Z), obejmuje wszystkie liczby zespolone bez wyjątku, a zbiór (U) redukuje się tu, dla każdej wartości zmiennej z, do jednej tylko liczby, a mianowicie tej, której, na podstawie równania (1) równa się zmienna u przy rozważanej wartości zmiennej z. Gdybyśmy symbol $f(z)$ uważali za symbol ilorazu dwu wielomianów całkowitych, to zbiór (Z) nie obejmowałby już wszystkich liczb zespolonych, lecz tylko te wartości zmiennej z, z któ rych żadna nie dawałaby zera w mianowniku ilorazu $f(z)$.

Jako nowy przykład funkcji zmiennej zespolonej, rozważymy przypadek, w którym wartość zmiennej u określamy w zależności od wartości zmiennej z równaniem następującym:

$$u^n = f(z), \tag{2}$$

---

[1]) W analizie matematycznej wyraz »zmienna« oznacza liczbę, która pomyślana jest jako coś oznaczonego nie ze względu na swoją wartość, lecz ze względu na stosunek natury pojęciowej, w którym ta liczba znajduje się z pewnemi innemi elementami.

gdzie oznaczyliśmy przez n liczbę całkowitą i dodatnią, a przez $f(z)$ iloraz dwu wielomianów całkowitych zmiennej z.

W tym przypadku zbiór (Z) obejmuje wszystkie te wartości zmiennej z, z których żadna nie daje zera w mianowniku ilorazu $f(z)$, a przytym wartości zmiennej z, należącej do zbioru (Z), odpowiada wogóle taki zbiór wartości (U) zmiennej u, który obejmuje n liczb; jeżeli jednak zmienna z przyjmie taką wartość, przy której $f(z)$ staje się zerem, to zbiór (U) redukuje się do jedynej liczby zero.

3. Przykłady, przytoczone w paragrafie poprzedzającym, tłumaczą nam, dla czego pojęcie funkcji zmiennej zespolonej nie mogło być zupełnie pominięte przez analizę, ale te przykłady nie pouczają nas bezpośrednio ani o przyczynach, które spowodowały rozwój teorji funkcji zmiennych zespolonych, ani o znaczeniu naukowym tej teorji. W rzeczywistości okoliczności, którym teorja funkcji zmiennych zespolonych zawdzięcza swój rozwój oraz w znacznej mierze i swoje znaczenie naukowe, polegają na tym, że przy rozważaniu najelementarniejszych, a zarazem i najważniejszych, funkcji rzeczywistych zmiennych rzeczywistych napotykamy pewne zagadnienia, których zadowalające rozwiązanie w najprostszy sposób znajdujemy w teorji funkcji zmiennej zespolonej. Oznaczmy naprzykład przez x zmienną rzeczywistą i weźmy pod uwagę równania następujące:

(1) $$\varphi(x) = -\sum_{k=0}^{\infty}(1+x)^k$$

i

(2) $$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-x)^k$$

Szereg, stanowiący prawą stronę równości (1), jest zbieżny w obrębie tych wartości zmiennej x, które spełniają nierówności:

$$-1 < 1 + x < 1$$

czyli

(3) $$-2 < x < 0,$$

a szereg, stanowiący prawą stronę równania (2), jest zbieżny w obrębie tych wartości zmiennej x, które spełniają nierówności

$$-1 < 1 - x < 1$$

czyli

$$0 < x < 2.$$

Zatym wzór (1) określa funkcję $\varphi(x)$ wewnątrz przedziału (—2, 0), a wzór (2) — funkcję $\psi(x)$ wewnątrz przedziału (0,+2). Z drugiej strony, na podstawie teorji szeregów gieometrycznych, mamy na funkcję $\varphi(x)$ wzór:

(5) $$\varphi(x) = \frac{1}{x},$$

a na funkcję $\psi(x)$ wzór:

(6) $$\psi(x) = \frac{1}{x},$$

ale wzór (5) zachodzi tylko pod warunkiem, żeby spełnione były nierówności (3), zaś wzór (6) — pod warunkiem, żeby zmienna x spełniała nierówności (4). Możemy więc powiedzieć, że każdy z szeregów (1) i (2) przedstawia funkcję $\frac{1}{x}$, ale każdy wewnątrz innego przedziału. Przykład poprzedzający doprowadza nas do zagadnienia, które możemy sformułować w sposób następujący:

Pewna funkcja rzeczywista $\varphi(x)$ zmiennej rzeczywistej x określona jest w obrębie pewnych wartości zmiennej x, a pewna inna funkcja rzeczywista $\psi(x)$ zmiennej rzeczywistej x jest określona w obrębie pewnych innych wartości tejże zmiennej. Należy podać jakieś ogólne kryterjum do rozstrzygania, czy wartości funkcji $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ uważane być mają za wartości jednej i tej samej funkcji zmiennej x, czy też za wartości różnych funkcji?

Takie kryterjum, które czyniłoby zadość w zupełności powyższym wymaganiom, które zatym mogłoby być zastosowane względem jakichkolwiekbądź funkcji: $\varphi(x)$ i $\psi(x)$, oczywiście nie istnieje, gdyż w każdym szczególnym przypadku można według upodobania albo umówić się, że wartości funkcji $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ uważane być mają za wartości pewnej jednej funkcji, określonej zarówno dla tych wartości zmiennej, dla których funkcja $\varphi(x)$ jest określona, jak też i dla tych, dla których określona jest funkcja $\psi(x)$, albo przyjąć umowę, na podstawie której funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ uważaneby być miały za dwie osobne funkcje. Ale zagadnienie powyższe uważać możemy za postać niedokładną problematu, który w rzeczywistości należy postawić jak następuje:

Wyodrębnić taką klasę (k) funkcji jednej zmiennej, żebyśmy mieli ogólne kryterjum dla rozstrzygania, czy dwu jakimkolwiek, byle do klasy (k) należącym, funkcjom jednej zmiennej $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ odpowiada taka funkcja $f(x)$, także należąca do klasy (k), żeby spełnione były obydwa warunki następujące: 1) W obrębie wszystkich tych wartości zmiennej (x), dla których funkcja $\varphi(x)$ jest określona, wartości tej funkcji należą do wartości przybieranych przez funkcję $f(x)$. 2) W obrębie wszystkich tych wartości zmiennej x, dla których określona jest funkcja $\psi(x)$, wartości funkcji $\psi(x)$ należą do wartości przybieranych przez funkcję $f(x)$.

Ten znów problemat posiada niezawodnie więcej nad jedno tylko rozwiązanie. Istotnie, uzyskamy oczywiście jedno rozwiązanie tego zagadnienia, jeżeli naprzykład powiemy, że klasa (k) obejmuje wszystkie i tylko takie funkcje, z których każda jest funkcją jednoznaczną, określoną dla nieskończenie wielu wartości zmiennej, a nadto posiadającą tę własność, iż odpowiada jej pewien wielomian całkowity, który dla tych wartości zmiennej, dla których rozważana funkcja jest określona, przybiera wartości równe wartościom tej funkcji.

Oczywiście uzyskalibyśmy inne rozwiązanie powyższego problematu, gdybyśmy w dopiero co podanej definicji zastąpili wyrazy »pewien wielomian całkowity« przez wyrazy »iloraz dwu wielomianów całkowitych«.

Po głębszej rozwadze przekonywamy się, że omawiany problemat posiada w rzeczywistości nieskończenie wiele rozwiązań, ale naturalnie z tych rozwiązań nie wszystkie mają jednakową wartość naukową. Już w wieku XVIII-tym odczuwano wyraźnie konieczność rozwiązania powyższego problematu, czego dowodem są różne próby połączone z licznemi błędami, poczynione w tym kierunku, ale rozwiązanie zadowalające uzyskano dopiero w wieku XIX-tym, a to przez wprowadzenie tak zwanych *funkcji analitycznych*, które stanowią szczególną klasę funkcji zmiennej zespolonej. Ostateczne rozwiązanie problematu zawdzięczamy Weierstrassowi, ale jego dzieło było przygotowane przez liczne prace jego poprzedników, pośród których Cauchy, matematyk z I-ej połowy wieku XIX-go, zajmuje jedno z miejsc najwybitniejszych.

Żeby przytoczyć jeszcze choć jeden przykład zagadnienia, które też doprowadza do szczególnej kategorji funkcji zmiennej zespolonej, zwanych funkcjami analitycznemi, i przez teorję tych funkcji może być rozwiązane w zupełności, rozpatrzmy problemat rozwijania danej funkcji $f(x)$ zmiennej rzeczywistej x na szereg Taylora. W teorji funkcji zmiennej rzeczywistej znajdujemy liczne przykłady funkcji, rozwijalnych na szereg Taylora, a więc według wzoru następującego:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{1.2.3\ldots k}(x-a)^k. \tag{7}$$

Jeżeli dla pewnej funkcji $f(x)$ przy oznaczonej wartości liczby a powyższy wzór jest ważny, to okoliczność ta zwykle zachodzi nie dla wszystkich wartości zmiennej x, lecz tylko dla tych wartości zmiennej, które spełniają pewne warunki; często warunki te polegają na nierówności postaci następującej:

$$|x-a| < R,$$

gdzie R oznacza pewną liczbę rzeczywistą dodatnią. O d j a k i c h w ł a s n o ś c i f u n k c j i z a l e ż ą j e j r o z w i j a l n o ś ć n a s z e r e g Taylora i w a r u n k i, p r z y k t ó r y c h p o w y ż s z e r o z w i n i ę c i e z a c h o d z i?

Teorja funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej nie zawsze daje nam odpowiedź na to pytanie. Załóżmy naprzykład, że symbol $f(x)$ przedstawia funkcję:

$$\frac{1}{1+x^2}.$$

Możemy stwierdzić, że w tym przypadku wzór (7) zachodzi, jakąkolwiek wartość rzeczywistą przyjęlibyśmy na a, ale pod warunkiem, żeby zmienna x sprawdzała nierówność:

$$|x-a|<\sqrt{1+a^2}.$$

Jakie są powody, które sprawiają, że funkcja $\frac{1}{1+x^2}$ rozwijalna jest na szereg Taylora z powyższym zastrzeżeniem, wówczas, gdy naprzykład funkcja $\sin x$, która jest daleko mniej prosta, rozwijalna jest na szereg Taylora bez żadnych zastrzeżeń?

Rozporządzając miejscem ściśle ograniczonym, poprzestaniemy na przykładach poprzedzających, ale sądzimy, że i te przekonają czytelnika o doniosłym znaczeniu filozoficznym teorji funkcji analitycznych.

Winniśmy dodać, że teorja funkcji analitycznych, podobnie jak i każda inna teorja, odpowiadająca istotnym potrzebom nauki, nietylko dostarczyła zadowalających rozwiązań zagadnień, przy których ta teorja powstała, ale nadto okazała się przydatną w wysokim stopniu do rozwiązywania całego szeregu innych, pierwszorzędne znaczenie mających zagadnień, które należą nietylko do analizy oderwanej, ale i do analizy stosowanej (mechanika, fizyka matematyczna i t. d.).

4. Każda funkcja zespolona u zmiennej zespolonej z uważana być może jako układ dwu funkcji rzeczywistych dwu zmiennych rzeczywistych. Istotnie, umówiwszy się raz na zawsze, że symbol i przedstawiać ma jednostkę urojoną, mamy:

$$u=P+iQ,$$
$$z=x+iy,$$

oznaczając przez P, Q, x i y liczby rzeczywiste. Otóż orzeczenie, iż pewnej wartości zmiennej z odpowiada jedna lub więcej wartości zmiennej u, wyraża, iż temu układowi wartości zmiennych rzeczywistych x i y, który odpowiada rozważanej wartości zmiennej z, odpowiada jeden układ lub więcej układów wartości na zmienne P i Q. Zatym określenie zmiennej zespolonej u, jako funkcji zmiennej zespolonej z w obrębie pewnego zbioru wartości zmiennej z, niczym innym nie jest, jak tylko określeniem zmiennych rzeczywistych P i Q, jako funkcji zmiennych rzeczywistych x i y w obrębie pewnego zbioru układów wartości tych zmiennych. Stwierdziliśmy więc, że zmienna zespolona u, określona jako funkcja zmiennej zespolonej z, jest tylko układem funkcji rzeczywistych P i Q zmiennych rzeczywistych x i y.

Pojęcie funkcji jakiejkolwiek jest pojęciem natury czysto arytmetycznej, i nietylko może, ale, kiedy chodzi o teorję zupełnie zadowalającą, musi być badane bez opierania się na gieometrji. Z tego jednak nie wynika, żebyśmy w teorji funkcji nie mogli korzystać z interpretacji gieometrycznej pojęć, należących do dziedziny teorji funkcji, w celu skojarzenia faktów, należących do teorji funkcji, z faktami natury gieometrycznej. Możemy nawet dodać, że w przypadkach, kiedy, jak w artykule niniejszym, chodzi nie o wykład zasad teorji funkcji, lecz tylko o ogólne poinformowanie czytelnika w kwestjach dotyczących teorji funkcji, mamy nietylko prawo, ale i obowiązek korzystania z intuicji gieometrycznej celem ułatwienia czytelnikowi zaznajomienia się z przewodniemi ideami omawianej teorji.

Zachowując powyższe znakowania, uważajmy zmienne rzeczywiste x i y za spółrzędne prostokątne punktu pewnej płaszczyzny (T), nadając przytym tej płaszczyźnie nazwę płaszczyzny zmiennej zespolonej z. W takim razie każdej wartości

$$z = x + iy$$

zmiennej zespolonej z odpowiadać będzie na płaszczyźnie (T) pewien punkt z^*. Punkt z^* zowie się obrazem gieometrycznym liczby z, a ta liczba obrazem analitycznym punktu z^*. Każda wartość zmiennej z posiada dokładnie jeden obraz gieometryczny oraz odwrotnie, każdy punkt płaszczyzny (T) posiada dokładnie jeden obraz analityczny. Jeżeli oznaczymy przez (Z) zbiór tych wartości zmiennej z, dla których zmienna u określona została jako funkcja zmiennej z, przez (Z^*) zbiór obrazów gieometrycznych wszystkich tych liczb zespolonych, które razem tworzą zbiór (Z), to określenie zmiennej u jako funkcji zmiennej z w obrębie zbioru wartości (Z) tej zmiennej uważane być może, jako polegające na skojarzeniu z każdym punktem zbioru (Z^*)

oznaczonego zbioru układów wartości na zmienne rzeczywiste P i Q. Żeby wyrazić, iż zmienna u określona została jako funkcja zmiennej z, w obrębie zbioru wartości (Z) tej zmiennej, powiadamy, że zmienna u określona została jako funkcja zmiennej z w obrębie zbioru punktów (Z^*) czyli *dziedziny* (Z^*).

Wartością funkcji u w oznaczonym punkcie z^* dziedziny (Z^*) zowiemy każdą z tych wartości, jakie przybiera funkcja u dla tej wartości zmiennej, której obrazem gieometrycznym jest punkt z^*. Często można, bez spowodowania jakichkolwiek nieporozumień, posługiwać się tym samym symbolem do oznaczenia zmiennej zespolonej i jej obrazu gieometrycznego, a wyraz »punkt« używać zarówno w znaczeniu wyrażenia »obraz gieometryczny« zmiennej, jak też i w znaczeniu wyrażenia »wartości zmiennej«, gdyż liczne są przypadki, w których budowa zdania bez dwuznaczności określa, jaki jest przedmiot, który ma być wzięty pod uwagę. W dalszym ciągu i my wprowadzać będziemy takie uproszczenia w znakowaniu i mowie, o ile nieporozumienie będzie wykluczone.

Układ liczb, jaki tworzy oznaczona wartość z_0 zmiennej z, i jedna z tych wartości, powiedzmy u_0, jakie przybiera w punkcie z_0 oznaczona funkcja u zmiennej z, zowie się *punktem analitycznym* rozważanej funkcji. *Przedłużeniem* oznaczonej funkcji $f(z)$ zmiennej z zowiemy każde takie rozszerzenie jej definicji, żeby w następstwie tego rozszerzenia do istniejących już punktów analitycznych funkcji $f(z)$ przybyła jakakolwiek ilość nowych punktów analitycznych. Przedłużenie funkcji może być dokonane nawet bez rozszerzania dziedziny, w której rozważana funkcja jest określana, a to przez dołączenie do tych wartości, jakie funkcja przybiera w obrębie dziedziny, w której była określona pierwotnie, jeszcze nowych wartości. — Jeżeli np. zmienna zespolona u określona jest jako taka funkcja zmiennej zespolonej z, która spełnia równanie

$$u^2 + z^2 = 1$$

i przybiera przytym tylko wartości, których części rzeczywiste nie są mniejsze od zera, to możemy funkcję u przedłużyć, usuwając z jej definicji warunek odnoszący się do części rzeczywistej jej wartości; w takim razie dziedzina, w której funkcja u jest określona, nie ulega zmianie, ale w punktach, stanowiących pewną część tej dziedziny, funkcja u przybierać będzie dwie wartości zamiast jednej tylko.

W dalszym ciągu oznaczać będziemy przez wyrażenie *funkcyjny element analityczny* [1]) każdą taką funkcję $f(z)$ zmiennej zespolonej z, która czyni zadość warunkom następującym:

1) Dziedzina (D), w której obrębie funkcja $f(z)$ jest określona, obejmuje wszystkie punkty położone wewnątrz oznaczonego koła (C) i tylko punkty położone wewnątrz tego koła. Dziedzinie (D) nadamy nazwę zakresu elementu funkcyjnego analitycznego $f(z)$.

2) Funkcja $f(z)$ w każdym punkcie dziedziny (D) przybiera dokładnie jedną wartość.

3) Funkcja $f(z)$ posiada oznaczoną pochodną $f'(z)$ w każdym punkcie z, położonym wewnątrz dziedziny (D) (czyli we wnętrzu koła (C)). Innemi słowy, jeżeli punkt z położony jest wewnątrz koła (C), to istnieje pewna liczba $f'(z)$, która ma tę własność, iż każdej, byle większej od zera, liczbie rzeczywistej ε odpowiada taka liczba rzeczywista, większa od zera δ, że każda liczba zespolona h, spełniająca nierówności

$$0<|h|<\delta$$

spełnia i nierówność

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)\right|<\varepsilon.$$

Trzeci z warunków, którym funkcja $f(z)$ czyni zadość, jest daleko bardziej ograniczający, aniżeli mogłoby się w pierwszej chwili wydawać: jeżeli przyjmiemy:

$$z=x+iy$$

oraz

$$f(z)=P(x, y)+iQ(x, y),$$

---

[1]) Powyższe wyrażenie nie jest klasyczne. Jednak wprowadzamy je celem uproszczenia mowy, nadmieniając przy tym, że znaczenie, które mu nadajemy, jest trochę odmienne od znaczenia, jakie ma wyrażenie klasyczne »element funkcji analitycznej«.

oznaczając przez x, y, P i Q wielkości rzeczywiste, to można udowodnić, że w następstwie warunku 3-go każda z funkcji $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ nietylko posiada pochodne cząstkowe rzędu pierwszego w każdym punkcie, położonym wewnątrz koła (C), ale nadto wspomniane pochodne są ciągłe i spełniają związki następujące:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial Q}{\partial x}. \end{aligned}$$

W teorji funkcji wykazujemy, że warunek konieczny i wystarczający, ażeby funkcja $f(z)$ spełniała powyższe trzy warunki, polega na tym, żeby w obrębie punktów, położonych wewnątrz koła (C), zachodził wzór postaci następującej:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k,$$

gdzie oznaczyliśmy przez a obraz analityczny środka koła (C) a przez symbole

$$C_0,\ C_1,\ C_2, \ldots$$

liczby zespolone stałe, podlegające temu warunkowi, żeby powyższy szereg był zbieżny w każdym punkcie, położonym wewnątrz koła (C).

Funkcją *monogeniczną* [1]) jednej zmiennej nazywamy każdą i tylko taką funkcję zespoloną u zmiennej zespolonej z, która spełnia warunki następujące:

1) Każdemu punktowi analitycznemu (u_0, z_0) tej funkcji odpowiada taki funkcyjny element analityczny $f_0(z)$, że mamy

$$u_0 = f_0(z_0)$$

i że nadto wszystkie punkty analityczne funkcji $f_0(z)$ są zarazem punktami analitycznemi funkcji u.

2) Jeżeli tylko dwa funkcyjne elementy analityczne, po-

---

[1]) Wyrażenie »funkcja monogieniczna« używane bywa niekiedy w znaczeniu trochę innym od znaczenia przyjętego w tekście.

wiedzmy $f_1(z)$ i $f_2(z)$, są takie, iż wszystkie punkty analityczne każdego z nich są punktami analitycznemi funkcji u zmiennej z, to istnieje pewien ciąg skończony elementów funkcyjnych analitycznych, którego skrajnemi wyrazami są elementy $f_1(z)$ i $f_2(z)$, a w tym ciągu każde dwa wyrazy sąsiednie spełniają dwa warunki następujące:

A) Zakresy wspomnianych funkcyjnych elementów analitycznych posiadają wspólne punkty. Innemi słowy, istnieje część płaszczyzny, należąca do zakresu każdego z tych funkcyjnych elementów analitycznych.

B) W każdym punkcie, wspólnym obu zakresom funkcyjnych elementów analitycznych, elementy te przybierają równe wartości.

Oznaczmy przez u jakąkolwiek funkcję monogeniczną zmiennej zespolonej z. Jeżeli istnieje inna funkcja monogeniczna v tejże zmiennej, obejmująca pośród swych punktów analitycznych wszystkie punkty analityczne funkcji u oraz jeszcze inne punkty, to ten stan rzeczy wyrazimy, mówiąc, że funkcja monogeniczna u może być *analitycznie przedłużona;* przy tych warunkach zbiór wszystkich tych punktów analitycznych funkcji v, które nie są punktami analitycznemi funkcji u, stanowi to, co nazywamy *przedłużeniem analitycznym* funkcji u.

Obecnie możemy już podać ogólną definicję funkcji analitycznych.

Funkcją analityczną[1]) jednej zmiennej zowiemy każdą taką funkcję w zmiennej zespolonej z, która spełnia warunki następujące:

1) Zbiór punktów analitycznych funkcji w obejmuje w każdym razie wszystkie punkty takiej funkcji monogenicznej v, która nie może ulec przedłużeniu analitycznemu. Punkty analityczne funkcji v zowią się punktami regularnemi funkcji w.

---

[1]) Wyrażenie »funkcja analityczna« używane bywa niekiedy do oznaczenia tego, co, przy terminologji przyjętej w tekście, moglibyśmy określić jako funkcję, której wszystkie punkty analityczne należą do tej samej funkcji analitycznej, ale niekoniecznie obejmują wszystkie punkty tej ostatniej.

2) Prócz punktów regularnych zbiór punktów analitycznych funkcji *w* obejmować może, choć nie musi, jeszcze inne punkty, których pełny zbiór wyłącznie zależy od zbioru (P) punktów regularnych i może być określony przy pomocy definicji, której podanie jednak zbyt dalekoby nas zawiodło; nadmienimy tylko, że wszystkie punkty analityczne nieregularne funkcji zowią się punktami *osobliwemi* tej funkcji. Pojęcie funkcji analitycznej może być rozszerzone w ten sposób, aby obejmowało pewną klasę funkcji ilukolwiek zmiennych zespolonych, ale, jakeśmy już mieli sposobność zaznaczyć poprzednio, podanie definicji funkcji analitycznej kilku zmiennych wymaga zbyt obszernych rozważań wstępnych, abyśmy ją mogli podać na tym miejscu.

II.

5. Ze względu na obfitość i różnorodność zastosowań teorji funkcji analitycznych istnieje pewien kompleks wiadomości z tego zakresu, którego nabycie stanowi jeden z warunków ogólnego wykształcenia matematycznego i koniecznie poprzedzać musi wszelkie bardziej specjalne studja, pozostające w związku z teorją funkcji analitycznych. Powyższy kompleks wiadomości z teorji funkcji analitycznych obejmujemy pod nazwą »Ogólne zasady tej teorji«.

Naturalnie niepodobieństwem byłoby dokładnie oznaczyć, co mianowicie z teorji funkcji analitycznych należy do jej zasad ogólnych, co zaś winno być zaliczone do działów specjalnych. Jednakowoż istnieje pewien układ twierdzeń, które niewątpliwie zaliczyć należy do owych »zasad ogólnych« i w niniejszym rozdziale usiłujemy wskazać najlepsze ze znanych nam dzieł, w których czytelnik znajdzie wspomniane twierdzenia.

Ponieważ ogólne zasady teorji funkcji analitycznych stanowią jedną ze składowych części ogólnych zasad analizy matematycznej, przeto nowsze podręczniki z tego zakresu obejmują elementy teorji funkcji analitycznych. Winniśmy dodać, że naszym zdaniem należy, aby czytelnik zaczerpnął pierwsze wiadomości z teorji funkcji analitycznych raczej z ogólnych traktatów o analizie matematycznej, aniżeli z dzieł poświęconych wyłącznie teorji funkcji analitycznych, gdyż w podręczniku, poświęconym ogólnym zasadom analizy matematycznej, znajdzie sposobność do uzupełnienia swojego przygotowania, gdyby zachodziła tego potrzeba.

W języku polskim niema żadnego podręcznika analizy matematycznej, w którymby teorja funkcji analitycznych była należycie uwzględniona. Wobec tego polecamy czytelnikom dzieła obce, a mianowicie:

É. Goursat. Cours d'Analyse mathématique. (Przekład polski w druku).

Tom I: Pochodne i różniczki. Całki oznaczone. Rozwinięcie na szeregi. Zastosowania gieometryczne. Str. VIII+646. Paryż, Gauthier-Villars, 1910. Cena fr. 20.

Tom II: Teorja funkcji analitycznych. Równania różniczkowe. Paryż, 1911. Cena fr. 20.

W pierwszej części t. II-go znajduje się bardzo dobry wykład ogólnych zasad teorji funkcji analitycznych.

O. Stolz. Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. W trzech częściach. Lipsk, Teubner.

Część II-ga. Zmienna i funkcja zespolona. Str. IX+338. Lipsk, 1896. Cena m. 8, opr. m. 9.

Znajdujemy tu zarys ogólnych zasad teorji funkcji analitycznych; wykład, może trochę ciężki, zaleca się ścisłością, z jaką jest prowadzony.

J. Tannery. Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Wyd. 2. Paryż, A. Hermann.

Tom I zawiera: Liczby niewymierne, zbiory, granice, szeregi, iloczyny nieskończone, funkcje elementarne, pochodne. Str. X+424. Cena fr. 14.

Tom II zawiera: Całki oznaczone, rozwinięcie na szeregi, język gieometryczny, funkcje zmiennej zespolonej. Str. 480. Cena fr. 15.

Dzieło to, które pod każdym względem jest bardzo polecenia godne, ma właściwie na celu wykład ściśle naukowy elementów analizy matematycznej. W t. II-im tegoż (z r. 1910) znajdzie czytelnik wykład pierwszych zasad teorji funkcji analitycznych.

O. Stolz und J. A. Gmeiner. Einleitung in die Funktionentheorie in 2 Abteilungen. Lipsk, Teubner.

Część I. Str. VI+242 (r. 1904). Cena opr. m. 6.

Część II. Str. VIII+356 (r. 1905). Cena opr. m. 9.

W dziele tym znajdzie czytelnik obok ściśle naukowego wykładu pierwszych zasad teorji funkcji analitycznych spory zasób pouczających ćwiczeń.

Prócz powyższych dzieł wymienimy, ale już w drugim rzędzie, parę innych, z których też czytelnik mógłby zaczerpnąć elementarne wiadomości z teorji funkcji analitycznych.

H. Burkhardt. Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Lipsk, Veit & Comp. Wyd. 3-ie. 1908. Cena w opr. m. 8.

G. Kowalewski. Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen. Str. IV+455. Cena m. 12.

6. Kto już zdobył podstawowe wiadomości z teorji funkcji analitycznych, a pragnie studja swe dalej posunąć w tym kierunku, ten powinien najpierw skierować swe usiłowania ku temu, aby wyrobić sobie ogólny pogląd na fakty najciekawsze i zagadnienia najważniejsze z zakresu teorji funkcji. Bardzo zachęcamy czytelnika, aby w tym celu zechciał przestudjować dzieło (litografowane) następujące:

Cours de M. Hermite, wydanie 4. Paryż, A. Hermann 1891; str. 293.

O ile wiemy, niema dzieła, któreby przy równych zaletach dydaktycznych, a stosunkowo bardzo małej objętości, odznaczało się takim bogactwem treści i takim szczęśliwym wyborem traktowanych tematów. Zapewne należy poczynić niektóre zastrzeżenia co do ścisłości logicznej wywodów, ale skoro chodzi tylko o ogólnikowe zaznajomienie się z rzeczą i nabycie ochoty do głębszych studjów, to wspomniany brak ścisłości nie może być poczytywany za ważniejszą wadę.

Żeby bliżej zaznajomić się ze stanem teorji funkcji analitycznych w samym końcu wieku 19-go, może czytelnik z korzyścią posługiwać się dziełem następującym:

J. Puzyna. Teorya funkcyj analitycznych. Lwów, w dwu tomach; t. I, 1898; str. XVIII+549. Cena k. 14; t. II, 1900; str. XVI+693. Cena k. 16.

Jest to jedyne dzieło w języku polskim w zakresie teorji funkcji. Nie jest ono wolne od pewnych usterek, a przedewszystkim ujęcie rzeczy nie jest tak głębokie, jak tego możnaby sobie życzyć. Z tych względów nie należy ono do tych, których systematyczne studjowanie moglibyśmy czytelnikowi zalecić, ale winniśmy nadmienić, że praca prof. Puzyny odznacza się bogactwem treści i wskazówek bibljograficznych; z tego powodu dzieło to z wielkim pożytkiem może służyć jako informacyjne.

Z innych obszerniejszych dzieł z zakresu ogólnej teorji funkcji analitycznych wymienimy następujące:

A. R. Forsyth. Theory of Functions of a Complex Variable. Cambridge, University Press, wyd. 2-ie. Cena szyl. 21.

W. F. Osgood. Lehrbuch der Functionentheorie. 2 tomy. Lipsk, Teubner. T. I, wyd. 2; 1912; str. XII+766. Cena m. 17, w opr. m. 18. — T. II w przygotowaniu.

É. H. Fouët. Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. 2-me édition. Paryż, Gauthier-Villars. 3 t. — I. Les fonctions en général; XVI+112; 1907. Cena fr. 3.50. — II. Les fonctions algébriques; les séries simples et multiples; les intégrales; XI+265; 1909. Cena fr. 9. — III. Théorèmes d'existence; les fonctions analytiques au point de vue de Cauchy, de Weierstrass, de Riemann (w przygotowaniu).

Czytelnikowi, posiadającemu już elementy teorji funkcji analitycznych, gorąco zalecamy dziełka wydawnictwa następującego:

É. Borel. Collection de monographies sur la théorie des fonctions. Paryż, Gauthier-Villars.

Każde z dziełek tego wydawnictwa może być nabyte oddzielnie i może być studjowane przez czytelnika, posiadającego bardzo nawet skromny, byle gruntowny, zasób wiadomości. Nie wszystkie wprawdzie z tych dziełek należą bezpośrednio do zakresu teorji funkcji analitycznych, ale, pośrednio przynajmniej, każde z nich przyczynia się do pogłębienia naszych wiadomości i w zakresie teorji funkcji analitycznych.

Również gorąco zalecamy czytelnikowi dzieło następujące:

K. Weierstrass. Abhandlungen aus der Functionenlehre. Berlin, Julius Springer, 1886; str. 262. Cena m. 12.

W tym niewielkim tomiku znajdzie czytelnik kilka podstawowych twierdzeń z teorji funkcji analitycznych, wyłożonych po mistrzowsku przez samego ich odkrywcę.

Bardzo polecenia godne do celów informacyjnych jest małe dziełko następujące:

J. Hadamard. La série de Taylor et son prolongement analytique. Wydawnictwo »Scientia«. Paryż, Gauthier-Villars, 1902; str. 102. Cena fr. 2.

III.

7. Rady, podane w paragrafach poprzedzających, miały na celu ułatwienie czytelnikowi zaznajomienia się z ogólnemi zasadami teorji funkcji analitycznych. Natomiast pominęliśmy zarówno teorje różnych szczególnych funkcji analitycznych, jakoteż i różne zastosowania teorji funkcji analitycznych do analizy matematycznej i do fizyki matematycznej, albowiem przedmioty te należą do najróżnorodniejszych gałęzi nauk matematycznych, nie zaś do właściwej teorji funkcji analitycznych. Jednakowoż istnieją pewne szczególne funkcje analityczne, których teorja bezsprzecznie należy do teorji funkcji analitycznych. Takiemi funkcjami są przedewszystkim *funkcje wymierne, pierwiastki kwadratowe trójmianów stopnia drugiego, funkcje trygonometryczne, funkcje wykładnicze* oraz *funkcje kołowe i logarytmowe.* Wykład teorji tych funkcji znajduje się w każdym dziele poświęconym teorji funkcji analitycznych, gdyż bez uwzględnienia tych szczególnych funkcji wykład ogólnej teorji byłby niemożliwy. Prócz tych najelementarniejszych funkcji istnieją jeszcze pewne klasy funkcji analitycznych, które obejmują jako

przypadek szczególny owe funkcje najelementarniejsze, a których rozwój tak ściśle jest związany z rozwojem ogólnej teorji funkcji analitycznych, że ich teorja zaliczona być musi do części składowych teorji funkcji analitycznych. Funkcjami, które mamy na myśli są funkcje *algiebraiczne, ich całki* oraz *funkcje odwrotne*. Pośród funkcji tej kategorji funkcjami najważniejszemi po funkcjach najelementarniejszych, wymienionych wyżej, są *funkcje eliptyczne*.

Jako godne polecenia elementarniejsze dzieła z zakresu funkcji eliptycznych wymieniamy podręczniki następujące:

P. Appell et A. E. Lacour. Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications. Paryż, Gauthier-Villars, 1897; str. IV+421. Cena fr. 12.

H. Burkhardt. Elliptische Functionen. Lipsk, Veit, wyd. 2-ie. 1906. Cena w opr. m. 11.

J. Tannery et J. Molk. Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Paryż, Gauthier-Villars, 4 t.

I. Introduction. Calcul différentiel (część 1). 1893. Cena fr. 7.50. II. Calcul différentiel (część 2). 1896. Cena fr. 9. III. Calcul intégral (część 1). 1898, Cena fr. 8.50. IV. Calcul intégral (część 2) et Applications. 1902. Cena fr. 9.

Ch. Henry. Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques. Paryż, Nony & Cie, 1895; str. 126. Cena fr. 3.

M. Krause. Theorie der Elliptischen Functionen. Lipsk, Teubner, 1912; str. VI+186. Cena m. 3.60.

Ostatnie dwa wymienione dziełka przedstawiają, w postaci bardzo zwięzłej, zasady teorji funkcji eliptycznych.

Z tegoż zakresu winniśmy jeszcze wymienić dzieło następujące:

H. Halphen. Traité des Fonctions elliptiques. Paryż, Gauthier-Villars. I Théorie. 1886. Cena fr. 15. — II Applications. 1888. Cena fr. 20. — III Fragments. 1891. Cena fr. 8.50.

Jest to dzieło zbyt obszerne, ażeby się mogło nadawać do studjowania systematycznego, ale ma ono bardzo wielką wartość jako dzieło informacyjne. Niestety autor zmarł przed ukończeniem tomu trzeciego, z którego ukazał się tylko mały zeszyt.

W języku polskim mamy szkic:

J. Sochocki. Zasady teorji funkcji eliptycznych. Warszawa, Prace mat.-fiz. 1903; str. 50. Cena kop. 50.

Z zakresu ogólnej teorji funkcji algiebraicznych i ich całek wymieniamy dzieła następujące:

P. Appell et É. Goursat. Théorie des fonctions algébriqes et de leurs intêgrales. Paryż, Gauthier-Villars. 1895, str. X+530. Cena fr. 16.

É. Picard. Traité d'Analyse; t. II-i. Paryż, Gauthier-Villars, wyd. 2-ie, 1905. Cena fr. 18.

K. Weierstrass. Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten. Mathematische Werke, t. IV. Berlin, Mayer & Müller, 1902; str. XIV+631. Cena m. 40.

8. Czytelnika, który potrzebowałby wyczerpujących wskazówek bibljograficznych, odsyłamy do dzieła następującego:

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. (Lipsk, Teubner), a mianowicie do artykułów:

II B. 1. W. F. Osgood. Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen *a)* einer und *b)* mehrerer komplexen Grössen; str. 114;

II B. 2. W. Wirtinger. Algebraische Funktionen und ihre Integrale; str. 161. Oba w t. II2, zesz. I.

II B. 3. R. Fricke. Elliptische Funktionen. Tom II2, zeszyt 2/3 (29 grudnia 1913 r.); str. 177—348.

W tym samym zeszycie:

II B. 4. R. Fricke. Automorphe Funktionen mit Einschluss der elliptischen Modulfunktionen. Str. 349—470.

Dzieło to nie wyszło jeszcze w zupełności, ale pokaźna ilość zeszytów, które już ukazały się, stanowi nieocenione narzędzie do badań z zakresu matematyki.

To samo dzieło wychodzi i w języku francuskim p. t.:

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Lipsk, Teubner; Paryż, Gauthier-Villars.

Wydanie francuskie jest mniej zaawansowane, aniżeli niemieckie, ale jest wzbogacone przez różne uzupełnienia.

Daleko mniej zupełne niż w Encyklopedji n. matemat., a jednakowoż cenne wskazówki natury bibljograficznej z zakresu ogólnej teorji funkcji, a nawet i teorji różnych szczególnych funkcji analitycznych, znajdzie czytelnik w dziele:

E. Pascal. Repertoryum matematyki wyższej. Tłumacz. polskie (z włoskiego) przez S. Dicksteina.

O najnowszych pracach matematycznych wogóle, z zakresu teorji funkcji w szczególności, będzie mógł czytelnik poinformować się w roczniku:

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Berlin, Georg Reiner. Cena roczna zmienna, około m. 40.

Jeszcze świeższe, ale o wiele zwięźlejsze informacje można znaleźć w półroczniku:

Revue semestrielle des publications mathématiques. Lipsk. Teubner. Cena roczna m. 7.

Wychodzi od 1893 r. Wydano 3 tomy spisu rzeczy; każdy tom obejmuje 5 roczników.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE.

OPRACOWAŁ

ZYGMUNT JANISZEWSKI.

---

1. *Równaniem różniczkowym* nazywamy równość, w której wyrażenie wchodzą pochodne funkcji niewiadomej. Przedstawia nam ono zagadnienie takie: znaleźć funkcję, pozostającą w pewnym danym związku ze skończoną ilością swych pochodnych i ze zmienną niezależną. Np. równość [1]):

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin[\varphi(t)]$$

jest równaniem różniczkowym [2]).

2. Najprostszym równaniem różniczkowym jest:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x). \tag{1}$$

Mamy tu znaleźć funkcję, której pochodna równa się danej

---

[1]) Przez małe litery greckie: φ, ψ,... oznaczamy stale funkcje niewiadome. — Często jednak dla skrócenia nie piszemy funkcji niewiadomej wyraźnie w postaci funkcji, lecz oznaczamy tylko jej wielkość (najczęściej przez y); przyczym należy domyślać się, że wielkość ta zależy od danej zmiennej.

[2]) Równanie to służy do znalezienia kąta (φ) odchylenia wahadła jako funkcji czasu (t).

funkcji. Można tego dokonać z pomocą rachunku całkowego; rozwiązaniem równania (1) jest:

$$\varphi(x)=\int_a^x f(x)dx. \tag{2}$$

Rozwiązanie to podali już sami twórcy rachunków nieskończonostkowych, Leibniz (1646—1716) i Newton (1643—1727). Lecz równość (2) jest rozwiązaniem tylko o tyle, o ile całkę określamy niezależnie od różniczkowania, t. j. jako granicę sumy; gdybyśmy do określenia całki użyli równania (1), jak to czyni Euler i za nim powtarza wiele starszych podręczników, to wzór (2) jest tylko przepisaniem równania (1) w innej formie, powtórzeniem tego samego pytania w innych wyrazach.

Gdy $f(x)$ jest funkcją prostą, to łatwiej jest spostrzec odrazu, jaka funkcja czyni zadość równaniu (1), niż znaleźć całkę (2); więc posługujemy się wzorem (1), by znaleźć $\varphi(x)$, określone przez wzór (2). Lecz jest to tylko zgadnięcie rozwiązania, w tym znaczeniu, że nie mamy żadnej ogólnej reguły, według której moglibyśmy je skonstruować. Taką regułą, ogólną konstrukcją rozwiązania jest właśnie całkowanie: dlatego też musimy uważać teoretycznie wzór (2) za rozwiązanie zagadnienia (1), a nie odwrotnie.

Czy jednak umiemy całkowanie wykonać i czy znamy własności otrzymanej przez zcałkowanie funkcji — to inne pytanie; pytanie, które nie należy do teorji równań różniczkowych. W tej ostatniej uważa się wyrażenia ze znakiem całki za wiadome. W każdej bowiem teorji matematycznej zagadnienie uważamy za rozwiązane (z pewnego punktu widzenia), gdy sprowadzimy je do zagadnienia elementarniejszego, należącego do innej, prostszej teorji.

Wzór (2) pozwala nam bez efektywnego wykonania całkowania poznać pewne własności rozwiązania równania (1). Po pierwsze, że takie rozwiązanie zawsze istnieje, gdy funkcja dana $f(x)$ jest ciągłą [1]). Po wtóre, że rozwiązań tych jest

---

[1]) Wystarcza mniej warunków; istnieją jednak takie funkcje $f(x)$, dla których rozwiązanie to nie istnieje (por. Rachunek całkowy).

nieskończenie wiele: bowiem dolna granica całkowania we wzorze (2), a, jest dowolną. Ogólne rozwiązanie jest całką nieoznaczoną, więc otrzymuje się z któregokolwiek z nich przez dodanie stałej dowolnej.

3. Równania różniczkowe dzielimy na *zwyczajne* i *cząstkowe*, według tego, czy wchodzą w nie pochodne funkcji niewiadomej względem jednej tylko, czy też względem różnych zmiennych (co oczywiście może zachodzić tylko wtedy, gdy funkcja niewiadoma jest funkcją wielu zmiennych).

W badaniu ostatnich napotykamy nowe pojęcia i nowe trudności i teorję ich uważamy za osobny dział matematyki. W tym rozdziale zajmiemy się wyłącznie równaniami różniczkowemi zwyczajnemi.

Możnaby jeszcze wyróżnić układy równań różniczkowych o wielu funkcjach niewiadomych (liczba równań zakłada się równą liczbie niewiadomych funkcji). Lecz taki układ równań można zawsze sprowadzić do jednego równania o jednej funkcji niewiadomej za pomocą różniczkowania i operacji algiebraicznych; według zaś wypowiedzianej wyżej zasady w teorji równań różniczkowych przyjmujemy, że operacje te, jako elementarniejsze, umiemy wykonać, więc i sprowadzenie to możemy uważać za dokonane. Każde zaś równanie różniczkowe (lub układ równań) można znów sprowadzić do układu równań pierwszego rzędu (i to efektywnie, bez żadnych trudności natury algiebraicznej) — co jest dla wielu zagadnień ważniejszym; tak, że klasyfikacja według ilości funkcji niewiadomych układu równania rzędu pierwszego pokrywa się z podaną niżej klasyfikacją według rzędu równania.

Równania różniczkowe o jednej funkcji niewiadomej klasyfikujemy według najwyższego występującego w nich rzędu pochodnej funkcji niewiadomej. Rząd tej pochodnej nazywamy *rzędem* równania. Ogólną postacią równania różniczkowego zwyczajnego n-go rzędu jest więc:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

gdzie F oznacza funkcję daną swych $(n+2)$ zmiennych: argumentu x, funkcji niewiadomej y tego argumentu i jej n pierwszych pochodnych. Gdy F jest wielomianem (lub daje się do niego sprowadzić) względem zmiennych $y, \frac{dy}{dz}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}$ (względem x może być funkcją analityczną jakąkolwiek), to równanie nazywamy *algiebraicznym równaniem różniczkowym;* gdy jest to wielomian pierwszego stopnia (funkcja linjowa), to równanie różniczkowe nazywamy *linjowym.*

Funkcję, będącą rozwiązaniem równania różniczkowego, nazywamy jego *całką (intégrale, Integral);* należy pamiętać, że wyraz »całka« znaczy wtedy co innego, niż w rachunku całkowym. Takich funkcji jest nieskończenie wiele; dadzą się one naogół otrzymać z jednego wzoru, w którym występują pewne stałe *(stałe dowolne),* przez nadawanie tym stałym wartości określonych. Te rozwiązania określone nazywamy *całkami szczególnemi,* ów zaś wzór ogólny — *całką ogólną.* Często obok całek szczególnych równanie różniczkowe posiada jeszcze inne rozwiązanie określone (które więc nie jest objęte wzorem całki ogólnej); takie rozwiązanie nazywamy *całką osobliwą.*

4. Równania różniczkowe znane były od odkrycia rachunku różniczkowego i całkowego; szczególnie do ich poznania przyczynił się Euler (1707—1783). Lecz dzisiejsza ich teorja datuje się od Cauchy'ego (1789—1857) z jednej a Riemanna (1826—1866) z drugiej strony. Pierwszy uczynił zadość wymaganiom ścisłości (przeciw którym grzeszyły specjalnie wieki XVII i XVIII), drugi zaś postawił samo zagadnienie teorji równań różniczkowych w sposób nowy, głębszy i szerszy zarazem.

Zadaniem teorji równań różniczkowych jest poznać funkcję niewiadomą. Dawniejsi matematycy rozumieli to w ten sposób, że trzeba funkcję szukaną przedstawić w postaci analitycznego wyrażenia, utworzonego z pomocą skończonej ilości działań algiebraicznych, elementarnych funkcji przestępnych ($\lg x, e^x$) i całkowań (rozwiązanie *efektywne* w formie skończonej). Ponieważ jednak to się rzadko udawało — zadowalali się znalezieniem szeregu potęgowego, czyniącego zadość równaniu.

Taki szereg — gdy istnieje, co naogół zachodzi — łatwo jest otrzymać. Po rozwiązaniu równania względem pochodnej najwyższego rzędu funkcji niewiadomej z pomocą metody spółczynników nieoznaczonych można określić wszystkie spółczynniki, z wyjątkiem n pierwszych, gdzie n oznacza rząd równania; te n spółczynników są n stałemi dowolnemi. Można je określić przez postawienie warunku, aby funkcja szukana i jej $(n-1)$ pierwszych pochodnych dla danej wartości zmiennej niezależnej przyjmowały dane wartości. Te n warunków nazywamy *warunkami początkowemi.*

Lecz aby ten szereg przedstawiał funkcję, t. j. był naprawdę rozwiązaniem równania, trzeba aby był zbieżny; a priori zaś o tym nic nie wiemy. Tego pytania matematycy przed Cauchym nie zadawali sobie. Dopiero Cauchy uzupełnił ten brak, udowodniając, że gdy pewne warunki są spełnione, szereg powyższy jest zbieżny. Teraz więc dopiero zostało dowiedzione, że, gdy pewne warunki (których tu nie wymieniamy) są spełnione, dla danych warunków początkowych rozwiązanie istnieje i to tylko jedno [1]).

Zbadanie bliższe warunków istnienia rozwiązania przy danych warunkach początkowych oraz warunków, aby było ono jedynym — oto jeden rodzaj nowożytny zagadnień, w znacznej mierze już rozwiązanych [2]).

5. Ale nie wystarczało naprawić nieścisłości dawnych matematyków, aby móc zbudować teorję równań różniczkowych: trzeba było postawić inaczej samo jej zagadnienie, zrozumieć głębiej, co to znaczy: poznać funkcję.

Rozumieć to można w dwojaki sposób: »znać funkcję« — to znaczy albo znać jej określenie, albo znać jej własności [3]).

W pierwszym znaczeniu rozwiązanie równania różniczko-

---

[1]) Jedno analityczne; że nie istnieją rozwiązania nieanalityczne, t. j. nie dające się rozwinąć na szereg potęgowy, czyli że znalezione rozwinięcie na szereg potęgowy jest jedynym rozwiązaniem wogóle, zostało udowodnionym dopiero później.

[2]) Por. cytowany niżej artykuł Painlevégo w Encyklopedji nauk matematycznych.

[3]) Objaśnijmy bliżej tę różnicę. Określenie samo przedstawia już

wego jest nam zawsze wiadome, określeniem jego bowiem jest samo dane równanie[1]); jest to właśnie wynik twierdzenia Cau-

---

pewną własność określonego przedmiotu, i to własność charakterystyczną dlań, tylko do niego należącą. Ale określenie nie podaje wszystkich własności, lecz tylko te, które są do zupełnego określenia konieczne. Wysnucie z danego określenia innych własności danego przedmiotu, powiązanie ich między sobą — to właśnie zadanie matematycznego badania.

Nie szukamy wszystkich własności (to byłoby niemożliwe, bo jest ich zawsze nieskończenie wiele); szukamy własności, które nas interesują lub najbardziej interesują. Znalezienie kryterjów, według których dzielimy własności na interesujące nas i nie interesujące, byłoby ciekawym tematem badań, nie podjętych jeszcze, należących po części do logiki, po części do psychologji — nie do matematyki jednak. Tu zadowolimy się uwagą, że są to własności najbardziej uchwytne oraz własności najbardziej — i najbardziej widocznie — powiązane z największą liczbą innych faktów matematycznych; takie, które grają najważniejszą rolę objektywnie (*logicznie*) i takie, które nam (*psychologicznie*) najwięcej na inne fakty rzucają światła (por. Wstęp ogólny, § 3).

Otóż własność, podana w określeniu, jakkolwiek charakterystyczna, może dla nas wcale nie być (bezpośrednio) interesującą. Zaś interesować nas mogą własności przedmiotu, które go dostatecznie nie charakteryzują (np., czy dana liczba jest wymierną czy nie).

Jeden przykład scharakteryzuje nam dosadnie różne znaczenie wyrażenia »znać funkcję«. Wiemy, że głównym zagadnieniem teorji analitycznej liczb jest poznać rozmieszczenie liczb pierwszych, t. j. poznać funkcję $\Pi(x)$, równą liczbie liczb pierwszych, nie większych od x (p. Teorja liczb, str. 197). Jeśli przez znajomość funkcji będziemy rozumieli możność wyliczenia jej dla każdej wartości x, to funkcja ta jest nam w zupełności wiadoma: wyliczenie to możemy wykonać efektywnie z pomocą elementarnych działań arytmetycznych, znajdując wszystkie liczby pierwsze, nie większe od x. Lecz taka znajomość nikogo nie zadowoli: wyliczyć tę funkcję moglibyśmy zawsze tylko dla przedziału skończonego, czyli o jej ogólnym charakterze nic się nie dowiadujemy z określenia bezpośrednio i z obliczeń jej wartości. Pierwszą myślą było znaleźć na tę funkcję wzór analityczny. Otóż takie wzory utworzono (z pomocą szeregów Fouriera), lecz to w niczym naszych wiadomości o tej funkcji nie powiększyło. Szukamy przeto nie jej określenia analitycznego, lecz własności, które jej wcale nie określają, lecz które nam więcej o niej mówią, bardziej nadają się do utworzenia sobie pojęcia o tej funkcji. Np. staramy się poznać szybkość jej wzrostu (przez wzory asymptotyczne; por. Teorja liczb, str. 196—197).

[1]) To zdanie wydaje się paradoksalnym, że funkcja »niewiadoma«

CHY'EGO, które nas upewnia, że przy danych warunkach początkowych takie określone rozwiązanie istnieje, a więc, że to równanie wraz z warunkami początkowemi naprawdę określa funkcję. Co więcej: mamy wtedy możność podania tego rozwiązania w formie nieskończonego szeregu potęgowego; a więc efektywnie, tylko w formie nieskończonej.

Pozostaje to bliższe poznanie rozwiązania, poznanie jego własności. Dawniej jedyną drogą do tego było znowu rozwiązanie efektywne (w formie skończonej), i dlatego od szukania tego wyrażenia zaczynało się badanie całki równania. Od czasów RIEMANNA przyzwyczailiśmy się badać funkcję, nie znając jej wyrażenia analitycznego, znając tylko jedną jakąś jej własność charakterystyczną (np., że czyni zadość danemu równaniu różniczkowemu); możemy ją poznać, badając bezpośrednio samo równanie [1]), nie rozwiązane efektywnie. Zaś zadowolić się dawnym sposobem postawienia zagadnienia nie możemy z dwu powodów: dlatego, że znalezienie wyrażenia analitycznego rozwiązania nie jest jeszcze poznaniem jego własności: przy bardziej skomplikowanych wyrażeniach, w które wchodzą całki, może to być również trudnym, jak i poznanie tych własności bezpośrednio z równania; po wtóre dlatego, że byłoby to wyłączyć z góry z zakresu badania lwią część równań różniczkowych, gdyż, jak to zostało ściśle udowodnione, tylko wyjątkowe równania dają się rozwiązać efektywnie za pomocą całkowania [2]).

Dziś właśnie te równania interesują nas najbardziej, które nie dadzą się rozwiązać z pomocą znanych funkcji: one bowiem określają nam nowe rodzaje funkcji.

Badanie związku między kształtem równania i wchodzą-

---

jest wiadomą; niewiadoma jest ona w stosunku do innych funkcji wchodzących w równanie o tyle, że jest określoną dopiero przez samo równanie, podczas gdy »wiadome« funkcje muszą być już określone przedtym, niezależnie od równania.

[1]) Można również badać rozwiązanie na podstawie jego rozwinięcia na szereg, które otrzymujemy ogólnemi metodami, ale to nie jest łatwiej. Jest to metoda WEIERSTRASSA.

[2]) Por. Algiebra, § 4 i 5, str. 203—204, gdzie mowa o podobnym rezultacie w teorji równań algiebraicznych.

cemi w nie funkcjami wiadomemi, a jego rozwiązaniem oraz badanie tych nowych rodzajów funkcji określonych za pomocą różnych równań różniczkowych — to dziś główne zadanie teorji tych równań. Widzimy stąd, jak ta część badań nad równaniami różniczkowemi (t. zw. teorja *analityczna* równań różniczkowych) pokrewną jest teorji funkcji analitycznych. I tu przedewszystkim szukamy punktów osobliwych rozwiązania i badamy jego zachowanie się w ich otoczeniu. Najlepiej są nam pod tym względem znane równania różniczkowe linjowe, głównie dzięki pracom Fuchsa (1833—1902).

6. [1]) Równanie różniczkowe linjowe możemy napisać w kształcie:

$$\varphi^{(n)}(x)+a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)\varphi'(x)+a_n(x)\varphi(x)=f(x),$$

gdzie $a_1(x), a_2(x), \ldots a_n(x), f(x)$ oznaczają wiadome funkcje zmiennej niezależnej, $\varphi(x)$ — funkcję niewiadomą, a $\varphi'(x), \varphi''(x) \ldots \varphi^{(n)}(x)$ — jej pochodne. Gdy $f(x)\equiv 0$, to równanie nazywamy *jednorodnym*. Do równania jednorodnego sprowadza się badanie każdego równania różniczkowego linjowego. Tutaj będziemy mówić wobec tego tylko o równaniach jednorodnych, więc o równaniach kształtu:

$$\varphi^{(n)}(x)+a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)\varphi'(x)+a_n(x)\varphi(x)=0.$$

Rozwój swój teorja analityczna równań różniczkowych linjowych zawdzięcza głównie tej własności ostatnich, że całka ich może mieć jako punkty osobliwe [2]) tylko te wartości x, które są punktami osobliwemi dla jednej przynajmniej z funkcji $a_1(x), a_2(x), \ldots a_n(x), f(x)$.

Wynika stąd, że dla każdego równania różniczkowego linjowego znamy a priori, t. j. nie rozwiązując go, jedną z najważniejszych własności jego rozwiązania: punkty osobliwe.

Dla równań różniczkowych linjowych wiemy również a priori, w jaki sposób zależy ich całka ogólna od stałych

---

[1]) Czytelnikowi, mało obznajomionemu z matematyką wyższą, radzimy opuścić §§ 6, 7 i 8.

[2]) t. j. punkty, w których funkcja, rozpatrywana w zakresie zmiennych zespolonych, albo nie posiada żadnej (skończonej) wartości, albo nie posiada (skończonej) pochodnej.

dowolnych; jest ona mianowicie funkcją linjową tych n stałych: $c_1, c_2, \ldots c_n$, t. j.:

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots\ldots + c_n\varphi_n(x),$$

gdzie $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots . \varphi_n(x)$ są to odpowiednio dobrane [1]) całki szczególne równania. Podstawiając $\varphi(x)$ w równanie i pamiętając, że $\varphi_1(x), \ldots . \varphi_n(x)$ są całkami tego równania, łatwo sprawdzić, że i $\varphi(x)$ jest całką; że zaś zależy od n (t. j. liczby równej rzędowi równania) stałych dowolnych, więc jest jego całką ogólną.

Ważne są też badania nad pewnemi specjalnemi typami jednorodnych równań różniczkowych linjowych rzędu 2-go:

$$\varphi''(x) + a_1(x)\varphi'(x) + a_2(x)\varphi(x) = 0,$$

stojące na pograniczu między teorją równań różniczkowych, a innemi gałęziami analizy. Gdy np. $a_1(x) = \frac{1}{x}$, $a_2(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2}$, otrzymujemy *równanie* BESSLA, mające duże znaczenie w fizyce teoretycznej. Pewna szczególna całka tego równania jest *funkcją* BESSLA n-go rzędu (por. Rozwinięcia na szeregi, § 11).

7. Równaniami różniczkowemi linjowemi zajmuje się nietylko teorja analityczna. Są one także przedmiotem zupełnie innych badań.

Najważniejszą wśród nich rolę grają badania nad równaniem typu

$$\varphi''(x) + F(x)\varphi(x) = 0,$$

należące do t. zw. *zagadnień na wartości brzegowe* (*Randwertaufgaben;* por. Teorja równań różniczkowych cząstkowych). Rozpatrujemy tu tylko zmienne rzeczywiste, wobec czego funkcja szukana nie musi być analityczną, choć z równania wynika, że musi mieć pochodną [2]); więc i funkcja $F(x)$ może analityczną nie być. Szukamy takiego szczególnego rozwiązania $\varphi_0(x)$, któreby dla dwu wartości x przybierało dane wartości, t. j. aby

---

[1]) Linjowo niezależne.

[2]) Por. str. 322, a do całego § 7 rozdziały: Rozwinięcia na szeregi i Równania całkowe.

$$\varphi_0(a) = A, \varphi_0(b) = B$$

(warunki brzegowe) gdzie a, b, A, B są dane liczby rzeczywiste. Możemy postawić dwa warunki rozwiązaniu szczególnemu, gdyż, jak wiemy, mamy do rozporządzenia dwie stałe dowolne w ogólnym rozwiązaniu. Lecz to nie są te zwykłe warunki, o których mowa w twierdzeniu CAUCHY'EGO: tam żądaliśmy, by funkcja i jej pochodna dla jednej wartości x, tu — aby tylko sama funkcja, lecz dla dwuch wartości x, przybierała wartości dane. Twierdzenie CAUCHY'EGO nie upewnia więc nas o istnieniu jedynego rozwiązania, odpowiadającego tym warunkom. Zobaczymy też, że rzecz ma się inaczej.

Najprzód rozpatrzymy przypadek, gdy obie wartości brzegowe mają być zerami: $A = 0$ i $B = 0$. Wtedy jedno rozwiązanie, odpowiadające naszym dwu warunkom, zawsze istnieje: $\varphi_0(x) = 0$. To rozwiązanie jednak nie jest interesujące i wcale się nim nie zajmujemy. Zobaczmy, czy mogą istnieć inne. W rozwiązaniu ogólnym, mającym kształt $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$ (p. wyżej § 6, str. 290; przypuszczamy, że jest nam ono znane, t. j. że znamy jakieś $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$), mamy oznaczyć c_1 i c_2 przez warunki brzegowe:

$$\varphi_0(a) = c_1\varphi_1(a) + c_2\varphi_2(a) = 0,$$
$$\varphi_0(b) = c_1\varphi_1(b) + c_2\varphi_2(b) = 0.$$

Otrzymaliśmy więc na oznaczenie c_1 i c_2 dwa równania jednorodne o stałych spółczynnikach $\varphi_1(a)$, $\varphi_1(b)$, $\varphi_2(a)$, $\varphi_2(b)$. Aby ono miało rozwiązanie różne od zera, trzeba, iżby wyznacznik ze spółczynników był zerem (p. Algiebra, str. 207). Należy więc powiedzieć, że w ogólnym wypadku $\varphi_0(x)$, nie równe identycznie zeru, nie istnieje.

Jak się rzecz ma, gdy A lub B nie jest równe zeru? Wtedy na c_1 i c_2 mamy system równań:

$$\varphi_0(a) = c_1\varphi_1(a) + c_2\varphi_2(a) = A$$
$$\varphi_0(b) = c_1\varphi_1(b) + c_2\varphi_2(b) = B.$$

Aby ten system równań miał rozwiązanie, wystarcza, żeby wyznacznik ze współczynników przy c_1 i c_2 nie był zerem. A więc w przypadku $|A| + |B| \neq 0$ rzecz ma się odwrotnie i naogół rozwiązanie istnieje.

Wyznacznik zależy od danego równania czyli od funkcji $F(x)$. Jeżeli tę funkcję zastąpimy przez $\lambda F(x)$, gdzie λ oznacza liczbę stałą, to może się zdarzyć, że przy odpowiednio dobranym λ wyznacznik równa się zeru. Takie wartości λ nazywamy *wartościami własnemi* równania

$$\varphi''(x) + \lambda F(x)\varphi(x) = 0;$$

istniejące zaś wtedy rozwiązania jego, czyniące zadość danym warunkom brzegowym i nierówne identycznie zeru, nazywamy jego *funkcjami własnemi*. Gdy $F(x)$ jest dodatnie dla każdego x między a i b, to wiadomo, że takich wartości własnych istnieje nieskończony ciąg $\lambda_1, \lambda_2 \ldots.$

Badanie układu tych wartości własnych oraz odpowiadających im funkcji własnych jest tu głównym zadaniem. Uogólnienia zagadnienia polegają na dopuszczeniu ogólniejszych funkcji $F(x)$, oraz innych warunków brzegowych (np. $\frac{\varphi'_0(a)}{\varphi_0(a)} = A, \frac{\varphi'_0(b)}{(\varphi_0 b)} = B$). Zagadnienia te powstały z zagadnień fizycznych i badania powyżej scharakteryzowane odgrywają w fizyce ważną rolę.

Do poznania tej teorji polecamy tom 3-ci Traité d'Analyse Picarda (p. str. 297), uczonego, który najbardziej przyczynił się do jej rozwoju.

8. Wspomnijmy jeszcze o jednym rodzaju badań równań różniczkowych linjowych, analogicznym do badań nad równaniami algiebraicznemi. O tych badaniach pisze obszernie Picard we wspomnianym tomie; poświęcone są im także niektóre rozdziały w podręczniku:

L. Königsberger. Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. Lipsk, Teubner, 1889; str. 485; a specjalnie książka:

L. Königsberger. Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. Lipsk, Teubner, 1882; str. 246.

9. Zagadnienie efektywnego rozwiązania równania różniczkowego dla tych nielicznych przypadków, w których to jest możliwe, zeszło zupełnie na drugi plan[1]). Zajmują się i dziś

[1]) Nie znaczy to znów, by je wyrugować zupełnie. Przytym mówimy

zagadnieniem metod rozwiązywania równań różniczkowych za pomocą kwadratur, lecz w innej, ogólniejszej formie, a mianowicie: znaleźć ogólne metody sprowadzania równania różniczkowego do prostszej postaci. Do rozwoju tej części teorji równań różniczkowych przyczyniła się bardzo teorja grup transformacji Lie'ego (1842—1899), (p. rozdział: Teorja grup)[1]).

Jest to też dobry probierz, że podręcznik nie jest napisany w duchu nowoczesnym, gdy szuka tylko wzorów na rozwiązanie równania, nie badając własności tego rozwiązania i zajmuje się przeważnie stroną rachunkową. Nie potrzebujemy chyba dodawać, że podręczniki tego rodzaju odradzamy.

10. Teorja równań różniczkowych jest jedną z najbardziej rozwiniętych i stosowanych teorji matematycznych. Stanowi przeto niezbędną część składową wyższego wykształcenia matematycznego; dla fizyków i astronomów jest to najważniejszy dział matematyki. Całe działy fizyki teoretycznej (szczególniej mechanika) sprowadzają się do badania pewnych równań różniczkowych, zwyczajnych lub cząstkowych. Wogóle równania różniczkowe są jednym z najważniejszych narzędzi badania nietylko w matematyce (głównie w gieometrji różniczkowej), lecz więcej jeszcze w naukach, w których matematyka jest stosowaną w wyższym stopniu.

11. By móc nauczyć się rozwiązywać efektywnie pewne proste typy równań różniczkowych — co dla niektórych zastosowań bywa potrzebne i dostateczne — wystarczy znać rachunek różniczkowy i początki całkowego. Do zrozumienia teorji analitycznej równań różniczkowych koniecznym przygotowa-

---

tu z punktu widzenia matematyki czystej; fizycy, technicy mogą mieć inne wymagania, choć i im dla obliczeń wystarczą przybliżenia, otrzymywane z rozwinięć na szeregi, a w teorji potrzebną im będzie znajomość własności rozwiązania.

[1]) Por. artykuł Vessiota w Encyklopedji (cytowany niżej, str. 298). Za podręcznik specjalnie do teorji Lie'ego służy:

S. Lie. Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, bearb. u. herausgeg. von Dr. G. Scheffers. Lipsk, Teubner, 1891; str. XVI+568. Cena m. 16.

niem jest gruntowna znajomość rachunku całkowego, ogólnej teorji funkcji analitycznych oraz głównych pojęć z algiebry wyższej.

12. Pierwsze wiadomości z teorji równań różniczkowych (głównie rozwiązania łatwiejszych typów) znajdują się w obszerniejszych podręcznikach początków analizy. Te mogą wystarczyć i matematykowi na początek, do zrozumienia innych działów matematyki. Do ogólnego jednak wykształcenia matematyka należy wliczyć głębszą znajomość tej tak ważnej gałęzi matematyki. W tym celu można się posiłkować następującemi podręcznikami:

É. Goursat. Cours d'Analyse mathématique. T. II, wyd. 2-gie: Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Paryż, 1911; str. IV+648. Cena fr. 20 [1]).

Druga połowa tego tomu (stronic 344) poświęcona jest równaniom różniczkowym zwyczajnym (z wyjątkiem rozdziału ostatniego, poświęconego cząstkowym). Stosuje się do tego działu to samo zdanie, co i do całego dzieła: odpowiada wszelkim nowoczesnym wymaganiom nauki pod względem ścisłości, układu, doboru materjału; wykład zwięzły i dosyć trudny. Zawiera w rozdziale pierwszym podane zwięźle różne metody rozwiązywania efektywnego pewnych typów równań różniczkowych; dalej traktuje szeroko dowody istnienia rozwiązania; pozostała część poświęcona jest badaniu rozwiązań (teorji analitycznej), głównie równań różniczkowych linjowych ogólnych (rzędu n-go). Jeden rozdział poświęcony teorji transformacji Lie'ego. Potrąca wiele zagadnień specjalnych. Po każdym rozdziale umieszczone liczne zadania, zawierające często ciekawe same przez się zagadnienia i po większej części dość trudne. Wymagane przygotowanie — to części poprzedzające tegoż dzieła, wyjąwszy rozdziały w tomie drugim o funkcjach eliptycznych i algiebraicznych, które zawierają wiadomości bardziej specjalne.

---

[1]) Pierwsze wydanie tego tomu (1905), jakkolwiek zawiera nieco mniej wiadomości z teorji równań różniczkowych linjowych, może być również używane.

C. JORDAN. Cours d'Analyse. T. III. Paryż, wyd. 2-gie, 1896, str. 542 [1]). W tomie tym równaniom różniczkowym zwyczajnym poświęcono pierwsze 299 stronic. Treść w ogólnym zarysie ta sama, co i u GOURSATA.

Dla niematematyków polecamy podręcznik:

S. KĘPIŃSKI. Podręcznik równań różniczkowych ze szczególnem uwzględnieniem potrzeb techników i fizyków. Część I: Równania różniczkowe zwyczajne. Część II: Równania różniczkowe cząstkowe. — Bibljoteka politechniczna, tom XVIII. Lwów, 1907; str. 195 i 200. Cena każdej części kor. 6.

Treść części I-ej: I. Równania różniczkowe zwyczajne rzędu 1-go. II. Punkty osobliwe równań rzędu 1-go. III. Układ dwu równań jednoczesnych rzędu 1-go. IV. Punkty osobliwe układu równań. V. Równania różniczkowe rzędu 2-ego. VI. Punkty osobliwe równania linjowego jednorodnego rzędu 1-go. VII. Układ n równań jednoczesnych rzędu 1-go. VIII. Równania różniczkowe rzędu n-go. — Część II zawiera dodatek (IV) o funkcjach walcowych BESSLA (str. 164—169).

Podręcznik ten odpowiada nowszym wymaganiom pod względem ścisłości i układu, tak, że może służyć i matematykom.

W. ZAJĄCZKOWSKI. Wykład nauki o równaniach różniczkowych. Paryż, 1877; str. XXIV+904. Cena fr. 25.

Treść: Cz. I. Wiadomości wstępne (str. 1—53). Cz. II. Równ. różn. zwyczajne (str. 57—493). Cz. III. Równ. o różniczkach zupełnych (str. 497—543). Cz. IV. Równ. różn. cząstkowe. (str. 547—852). Dodatek. Teorja ogólna rozwiązań osobliwych równ. różn. zwycz. (str. 855—897).

L. SCHLESINGER. Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. Sammlung Schubert, XIII. Lipsk, 1900; str. 309. Cena m. 8.

Celem tego dziełka jest, jak sam autor zaznacza, zaznajomienie czytelnika z metodami nowoczesnej teorji analitycznej równań różniczkowych (głównie z teorją FUCHSA) w ich naj-

---

[1]) Podczas gdy dwa pierwsze tomy tego dzieła są w pierwszym wydaniu znacznie gorsze, tom 3-ci różni się od wydań późniejszych bardzo nieznacznie, może więc być używany.

czystszej formie. Ogranicza się więc do równań różniczkowych algiebraicznych rzędu 1-go i linjowych rzędu 2-go, których badanie nie komplikuje się akcesorycznemi trudnościami natury innej (np. czysto algiebraicznej). Wskutek tego ograniczenia się co do tematu dziełko to jest bardzo przejrzyste; nie podaje ono, co prawda, wielu wiadomości, ale za to pozwala dobrze zrozumieć ducha teorji FUCHSA i przygotowuje do jej dalszego poznawania. — Za wymagane przygotowanie autor uważa tylko znajomość gruntowną rachunku różniczkowego i całkowego. Jednak powołuje się w wielu miejscach na twierdzenia z teorji funkcji analitycznych i wogóle, by zrozumieć zawarty w tej książce bieg myśli, trzeba być już obznajomionym z tą ostatnią teorją.

Jeszcze więcej ogranicza się KLEIN, bo do równania GAUSSA (pewne specjalne równanie linjowe rzędu drugiego) w swych (litografowanych) wykładach:

F. KLEIN. Über die hypergeometrische Funktion. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1893/94; str. 571 [1]). Cena m. 9.

Wykłady te (właściwie pierwszą ich część) radzimy przeczytać każdemu, choćby już znał traktowany tam przedmiot. Należy on do nielicznych podręczników, pisanych metodą historyczną (p. Wstęp do Stopnia III, str. 127). KLEIN rozwija w nim idee RIEMANNA i swoje, oświetla przedmiot z różnych stron, rzucając mnóstwo ciekawych uwag i pomysłów oraz uwydatniając historyczny bieg myśli matematycznej, różnice między różnemi epokami — nie tyle co do ilości posiadanych rezultatów, ile co do punktów widzenia. Mamy tu na myśli głównie pierwszą połowę wykładów; druga połowa, poświęcona całkowicie jednej nowszej metodzie badania, sprowadzającej badanie rozwiązania do badania trójkątów kulistych, jest zbyt specjalna, aby być ogólnie interesującą. Wykład względnie łatwy.

Dalszym ciągiem poprzedniego jest wykład (także litografowany):

---

[1]) Zauważyć należy, że stronica litografowana, jest to mniej, niż połowa przeciętnej stronicy druku.

F. Klein. Lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Vorlesungen gehalten im Sommersemester 1894; str. 524. Cena m. 8.50.

Traktuje o ogólnych równaniach rzędu drugiego. Wykład ten, napisany naogół w ten sposób, co i poprzedni, zajmuje się jednak mniej stroną historyczną i jest znacznie trudniejszy.

Ktoby chciał zdobyć bardziej specjalne wiadomości, niech szuka ich w dziełach autorów, którzy wsławili się własnemi badaniami na tym polu, a mianowicie:

P. Painlevé. Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm (Septembre, Octobre, Novembre 1895) sur l'invitation de S. M. le Roi de Suède et de Norvège. Paryż, A. Hermann, 1897; str. litografowanych 558 i drukowanych 19 (wstęp). Cena fr. 20.

Dzieło bardzo cenne, zawierające badania specjalne o zachowaniu się rozwiązań równań różniczkowych algiebraicznych w otoczeniu punktów osobliwych.

É. Picard. Traité d'Analyse. Wyd. 2-ie, przejrzane i powiększone. Paryż; t. II, 1905. Cena fr. 18. (O równaniach różniczkowych traktuje tylko rozdz. IX, a mianowicie o dowodach istnienia rozwiązania). T. III: O osobliwościach całek równań różniczkowych. Badanie przypadku, w którym zmienna pozostaje rzeczywistą, i krzywych określonych przez równania różniczkowe. Równania linjowe. Analogja między równaniami algiebraicznemi a równaniami linjowemi. 1908, str. 600. Cena fr. 18.

Tom ten zawiera dużo rozmaitego rodzaju nowych badań (w znacznej części własnych autora) nad równaniami różniczkowemi (p. str. 292, § 7 i 8). W oddzielnych rozdziałach traktuje osobno różne kwestje, nie mające na pozór często ze sobą związku, tak, że, posiadając gruntowne przygotowanie z analizy wyższej (w zakresie Stopnia III), można czytać wiele z tych rozdziałów niezależnie od innych.

Do studjów specjalnych nad równaniami różniczkowemi linjowemi służy książka:

L. Schlesinger. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Lipsk, Teubner; t. I, 1895, str. 486; t. II-1, 1897, str. 532; t. II-2, 1898, str. 446. Cena m. 16 + 18 + 16.

Nadaje się do uzupełnienia wiadomości, szukania bibljografji i t. d., w każdym razie nie do początkowego uczenia się. Zgłębiać teorję lepiej wprost z prac jej twórców, cytowanych w tym dziele.

Dzieje badań nad równ. różn. linjowemi podaje:

L. Schlesinger. Bericht über die Entwickelung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865. Lipsk, Teubner, 1909; str. 133. Cena m. 3. [1])

W Encyklopädie der math. Wiss. poświęcone są równaniom różniczkowym zwyczajnym artykuły:

II A 4a. P. Painlevé. Gewöhnliche Differentialgleichungen: Existenz der Lösungen (t. II-1, zesz. 2/3, 1900, str. 189—229) (por. str. 286). Cena zeszytu m. 7·50.

II A 4b. E. Vessiot. Gewöhnliche Differentialgleichungen: elementare Integrationsmethoden (t. II-1, zesz. 2/3, 1900, str. 230—293) (por. § 9, str. 292).

II A 7a. M. Bôcher. Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen (t. II-1, zesz. 4, 1900, str. 437—463) (por. str. 290). Cena zeszytu m. 4.80.

W wydaniu francuskim wyszły (powiększone) tylko dwa pierwsze artykuły (t. II, vol. 3, fasc. 1; 1910; cena m. 5.60):

II 15. P. Painlevé. Existence de l'intégrale générale. Determination d'une intégrale particulière par ses valeurs initiales (str. 1—57).

II 16. E. Vessiot. Méthodes d'intégration élémentaires. Étude des équations différentielles ordinaires au point de vue formel (str. 58—170).

Najważniejsze artykuły — o teorji analitycznej — jeszcze nie wyszły.

---

[1]) Dodany zupełny spis prac, które się zjawiły w tej dziedzinie od 1865 r. do września 1907 r. (na 73 stronach) zawiera 1742 numery. To może dać pewne pojęcie o rozwoju matematyki i przekonać, że dokładne poznanie całej literatury, choćby takiego poddziału, jak równania różniczkowe linjowe, przechodzi granice ludzkiej możliwości. Byłoby to zresztą zupełnie zbyteczne.

RÓWNANIA FUNKCYJNE, RÓŻNICOWE I CAŁKOWE.

OPRACOWAŁ

ZYGMUNT JANISZEWSKI.

A. Równania funkcyjne i różnicowe.

1. *Równaniami funkcyjnemi* nazywamy równania, które zawierają funkcję niewiadomą. Równania różniczkowe, różnicowe i całkowe (p. niżej) są specjalnemi rodzajami równań funkcyjnych; lecz przez równanie funkcyjne w ciaśniejszym znaczeniu rozumiemy wszelkie równanie funkcyjne różne od tych trzech rodzajów.

Wśród nich najczęściej spotykane są takie, które wyrażają związek między wartościami funkcji niewiadomej dla dwuch dowolnych wartości (x_1 i x_2) argumentu i dla sumy tych wartości ($x_1 + x_2$), a więc postaci (oznaczamy, jak i w poprzednim rozdziale, funkcje niewiadome przez greckie, a wiadome przez łacińskie litery):

$$F[\varphi(x_1),\ \varphi(x_2),\ \varphi(x_1 + x_2)] = 0 \tag{1}$$

dla każdego x_1 i x_2.

Najprostszym takim równaniem jest:

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)=\varphi(x_1+x_2). \tag{2}$$

Rozwiązanie jego przedstawia funkcja

$$\varphi(x)=ax,$$

gdzie a oznacza dowolną liczbę stałą. Jeśli szukamy funkcji ciągłej, czyniącej zadość równaniu (2), to rozwiązanie powyższe jest jedynym [1]).

2. Związek (1), zachodzący dla danego $\varphi(x)$, nazywamy *twierdzeniem o dodawaniu (Additionstheorem)* dla tej funkcji. Np. dla funkcji $\sin x$ jest nim znany wzór:

$$\sin(x_1+x_2)=\sin x_1 \cos x_2+\sin x_2 \cos x_1,$$

który, gdy zastąpimy $\cos x$ przez $\sqrt{1-\sin^2 x}$ i przeniesiemy wszystkie wyrazy na lewą stronę, przedstawi się w postaci (1).

Równanie (1) można uważać, jako zadanie znalezienia funkcji, które posiadają dane twierdzenia o dodawaniu. Można, nie rozwiązując go, z własności funkcji F wyczytać własności niewiadomej φ. Tak np. wiadomo, że gdy F jest funkcją wymierną [2]) swych zmiennych $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ i $\varphi(x_1+x_2)$ (mówimy wtedy, że funkcja φ posiada *algiebraiczne* twierdzenie o dodawaniu), to funkcja φ jest, jeżeli założymy jej ciągłość, funkcją algiebraiczną albo funkcją algiebraiczną funkcji eliptycznej lub wykładniczej.

---

[1]) Istnienie innych nieciągłych i wszędzie skończonych rozwiązań równania (2) pozostaje w związku z twierdzeniem Zermeli o możliwości dobrego uporządkowania każdej mnogości (p. str. 221, § 14). Mianowicie Hamel udowodnił (Math. Ann., t. 60, str. 459—462; bardzo ładna i łatwa rozprawka) z pomocą tego twierdzenia, że takie rozwiązania istnieją.

Odrzucając warunek skończoności, łatwo podać rozwiązanie nieciągłe: jest to funkcja równa ax dla x wymiernego i równa ∞ dla x niewymiernego.

[2]) *Funkcją wymierną* zmiennych $x, y, \ldots$ nazywamy funkcję, dającą się przedstawić jako iloraz dwuch wielomianów względem tych zmiennych (jeden z tych wielomianów może być identycznie równy 1).

Funkcją algiebraiczną zmiennej x nazywamy funkcję analityczną $f(x)$, czyniącą dla każdego x zadość równaniu

$$F(f(x), x)=0,$$

gdzie F jest wielomianem względem $f(x)$ i x.

3. Z innych typów równań funkcyjnych podamy dla przykładu:

$$\varphi(\varphi(x)) = x \text{ i wogóle } \varphi(\varphi\ldots(\varphi(x))\ldots) = x \quad (\textit{równanie} \text{ BABBAGE'A})$$

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + a \quad (\textit{równanie} \text{ ABLA}).$$

Rozwiązania równań funkcyjnych są nieraz bardzo nieoznaczone, tak, że do wyrażenia rozwiązania ogólnego wchodzą funkcje zupełnie dowolne. Np. jeżeli $\varphi_0(x)$ jest rozwiązaniem równania BABBAGE'A, to, jak odrazu widać, jest jego rozwiązaniem i każda funkcja $f(\varphi_0(f_{-1}(x)))$, gdzie f oznacza funkcję zupełnie dowolną, a f_{-1} — jej odwrotność (t. j. funkcję związaną z f równaniem: $f_{-1}(f(x)) = x$). Również jeżeli w równaniu ABLA założymy $a = 0$ (szczególnym przypadkiem takiego równania jest warunek okresowości (6)), to z każdego szczególnego rozwiązania $\varphi_0(x)$ tego równania można utworzyć nowe, $F(\varphi_0(x))$, oczywiście czyniące zadość równaniu przy każdej (jednoznacznej) funkcji F.

4. *Równania różnicowe* — to jedna wyodrębniona klasa równań funkcyjnych, w których występują różnice skończone funkcji niewiadomej, t. j. typu

$$F(x, \varphi(x), \Delta\varphi(x), \Delta^2\varphi(x), \ldots \Delta^n\varphi(x)) = 0 \qquad (3)$$

(gdzie $\Delta\varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x), \ldots \Delta^n\varphi(x) = \Delta^{n-1}\varphi(x+h) - \Delta^{n-1}\varphi(x)$, przyczym h oznacza jakąś stałą oznaczoną dla danego równania; por. rozdz. Rachunek różnicowy, str. 250). Liczba n, t. j. najwyższy z rzędów występujących w równaniu różnic, jest *rzędem równania*.

Wyrażając $\Delta\varphi(x), \ldots \Delta^n\varphi(x)$ za pomocą $\varphi(x)$, $\varphi(x+h), \ldots \varphi(x+nh)$, równaniu (3) nadamy kształt

$$G(x, \varphi(x), \varphi(x+h), \varphi(x+2h), \ldots \varphi(x+nh)) = 0.$$

Jeżeli G jest funkcją linjową (F jest wtedy także funkcją linjową i odwrotnie, gdyż zależność między wyrażeniami $\Delta^k\varphi(x)$ i $\varphi(x+kh)$ $(k = 0, 1, \ldots n)$ jest linjową; p. rozdz. Rachunek różnicowy, str. 251 i 252, wzory (I) i (II)), to równanie różnicowe nazywamy *linjowym*. Teorja równań różnicowych wogóle, a linjowych w szczególności, wykazuje dużo analogji do teorji odpowiednich równań różniczkowych.

Najprostszym równaniem różnicowym jest

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x) &= f(x), \text{ czyli} \\ \varphi(x+h) - \varphi(x) &= f(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Funkcję $\varphi(x)$, określoną przez to równanie, oznaczamy przez

$$\Sigma f(x). \tag{5}$$

Σ jest więc działaniem odwrotnym do działania Δ. Wyrażenie (5) jest analogiczne do całki nieokreślonej. Podobnie jak ta, (5) jest wyrażeniem nieokreślonym i to w wyższym stopniu: mając rozwiązanie $\varphi_0(x)$ równania (4), możemy dodać doń nie tylko stałą dowolną, lecz ogólniej dowolną funkcję perjodyczną o okresie h, a otrzymana funkcja będzie oczywiście również czynić zadość równaniu (4). Mamy więc ogólnie

$$\Sigma f(x) = \varphi_0(x) + g(x),$$

gdzie $g(x)$ oznacza funkcję d o w o l n ą o okresie h, t. j. spełniającą warunek

$$g(x+h) = g(x). \tag{6}$$

Rozwiązanie (5) będzie więc określone w zupełności dopiero po dodaniu warunku, że ma ono przyjmować w przedziale $h > x \geqslant 0$ wartości przepisane z góry.

Wogóle, podobnie jak w rozwiązaniach ogólnych równań różniczkowych występują stałe dowolne, w rozwiązaniach równań różnicowych występują dowolne funkcje perjodyczne o okresie h.

5. Używanie symbolu Σ do oznaczenia działania odwrotnego do Δ usprawiedliwia się następującym rozważaniem.

Z równania (4) mamy

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f(x+kh) = \varphi(x+nh) - \varphi(x) \tag{7}$$

(znaku Σ z e w s k a z a n i e m g r a n i c s u m o w a n i a używamy w zwykłym znaczeniu, t. j. do wyrażenia sumy; por. np. rozdz. R a c h u n e k s u m a c y j n y, str. 256).

Ponieważ wystarczy rozpatrywać x w przedziale od 0 (włącznie) do h (wyłącznie), aby z wzoru (7) określić $\varphi(y)$ dla k a ż d e j d o d a t n i e j wartości argumentu y (kładąc $y = x + nh$

i podstawiając za n kolejno wszystkie liczby naturalne), i ponieważ $\varphi(x) = \Sigma f(x)$ dla x w tym przedziale możemy obrać dowolnie, a więc np. $\varphi(x) = 0$, suma po lewej stronie wzoru (7) przedstawia nam rozwiązanie szczególne równania (4). Rozwiązanie ogólne będzie więc miało dla x dodatniego postać (dla x ujemnego czytelnik znajdzie sam wzór analogiczny, obliczając $\varphi(x - nh)$):

$$\Sigma f(x) = \sum_{k=0}^{k=\mathrm{E}\frac{x}{h}-1} f(x - h\mathrm{E}\tfrac{x}{h} + kh) + g(x - h\mathrm{E}\tfrac{x}{h}),$$

gdzie $g(\xi)$ oznacza funkcję zupełnie dowolną, określoną dla $h > \xi \geqslant 0$, zaś $\mathrm{E}(\xi)$ — największą liczbę całkowitą, $\leqslant \xi$.

Ponieważ obliczeniem sum kształtu (7) zajmuje się rachunek sumacyjny (p. str. 256), więc widzimy, że ten ostatni znajduje się w podobnym stosunku do rachunku różnicowego i teorji równań różnicowych, co rachunek całkowy do rachunku różniczkowego i teorji równań różniczkowych.

---

6. Równania funkcyjne i różnicowe występują tu i owdzie w różnych gałęziach analizy; w ich postaci formułują się też niektóre zagadnienia fizyki; ogólnego jednak zastosowania nie znalazły i są naogół bardzo mało zbadane.

Za źródło bibljograficzne a zarazem do poinformowania się o tej dziedzinie badań może służyć artykuł w Encyklopädie der mathem. Wiss.:

II A 11. S. Pincherle. Funktionaloperationen und Gleichungen. 1905; tom II 1, zeszyt 6. Cena zesz. m. 1.60. (Właściwym równaniom funkcyjnym poświęcone są str. 783—803);

lub lepiej ten sam artykuł (powiększony) w wydaniu francuskim Encyklopedji:

II 26. Équations et opérations fonctionelles. 1912; t. II, vol. 5, fasc. 1. (Rozdział Équations fonctionelles, str. 45—81).

Po polsku (tłum. z włoskiego) mamy szkic teorji równań różnicowych w książce:

E. Pascal. Rachunek nieskończonościowy. T. III, Warszawa, 1897; str. 222—247. Podana literatura przedmiotu.

Rozdziały o równaniach różnicowych zawierają także i niektóre inne podręczniki do rachunku różnicowego (np. Markowa; p. wyżej, str. 261).

Specjalnie do równań różnicowych linjowych istnieje podręcznik: G. Wallenberg und A. Guldberg. Theorie der linearen Differenzengleichungen. Lipsk, Teubner, 1911; str. XIV+288. Cena m. 10.

B. Równania całkowe.

7. Równania funkcyjne odznaczające się tym, że funkcja niewiadoma występuje pod znakiem całki, do niedawna traktowane również dorywczo jak i inne i prawie nie zbadane, w ostatnim lat dziesiątku stały się przedmiotem osobnej teorji; nadano im specjalną nazwę *równań całkowych.*

Stało się to głównie dzięki pracom Volterry, Fredholma, Hilberta i Schmidta. Za datę powstania teorji równań całkowych można uważać rok 1900, w którym Fredholm [1]) wprowadził i rozwiązał równanie

$$\varphi(x)+\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=f(x), \tag{8}$$

t. zw. dziś *równanie całkowe linjowe drugiego rodzaju Fredholma.* (*Równania Volterry* różnią się od równań Fredholma odpowiednich rodzajów tym, że górną granicą całki jest w nich zmienna niezależna, t. j. np. w (8) zamiast b występuje x). $K(x,y)$ i $f(x)$ oznaczają tu funkcje dane rzeczywiste, określone dla wartości rzeczywistych x i y, zawartych w przedziale

---

[1]) Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet, w »Öfversigt af akademiens förhandlingen«. Sztokholm, t. 57 (1900); stronic osiem.

Pierwsze równanie całkowe spotykamy u Fouriera, który rozwiązał w r. 1811 równanie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i y x}\varphi(y)dy=f(x).$$

(Oeuvres, t. 1, str. VII).

Równania takie (gdzie funkcja niewiadoma poza całką nie występuje) zaliczamy dziś do *pierwszego rodzaju.*

od a do b ($a < b$), i ciągłe w tym przedziale; $\varphi(x)$ zaś oznacza funkcję niewiadomą, czyniącą zadość tym samym warunkom. $K(x, y)$ nazywamy *jądrem (Kern)* równania całkowego.

8. Jedyne rozwiązanie równania (8) ma kształt:

$$\varphi(x) = f(x) - \int_a^b \frac{D_K(x,y)}{D_K} f(y) dy, \tag{9}$$

gdzie D_K jest to pewna określona liczba, utworzona z pomocą $K(x, y)$, t. zw. *wyznacznik* FREDHOLMA; zaś $D_K(x,y)$ (*podwyznacznik* FREDHOLMA) jest funkcją dwu zmiennych x i y, określoną i ciągłą w przedziale od a do b, utworzoną z pomocą $K(x, y)$.

Rozwiązanie szukane zawsze więc istnieje, wyjąwszy, gdy $D_K = 0$ [1]).

Otóż okazuje się, że jeśli zamiast funkcji $K(x, y)$ będziemy rozpatrywać funkcję $\lambda K(x, y)$, gdzie λ jest liczbą stałą, czyli będziemy rozpatrywać równanie:

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \tag{10}$$

to w przypadku, gdy jądro jest s y m e t r y c z n e względem x i y (t. j. $K(x, y) = K(y, x)$), będzie istniało zawsze przynajmniej jedno takie λ, dla którego $D_{\lambda K} = 0$ (por. niżej koniec § 10). Wartości te: $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ (może ich być nieskończenie wiele) nazywamy *wartościami własnemi (Eigenwerte)*, należącemi do jądra $K(x, y)$.

Odwrotnie, dla tych właśnie i tylko tych wartości λ będzie miało rozwiązanie równanie *jednorodne*, odpowiadające równaniu (10), t. j. równanie

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = 0, \tag{11}$$

gdzie funkcja wiadoma $f(x)$ jest identycznie równa 0. Równanie jednorodne będzie miało z a w s z e rozwiązanie $\varphi(x) = 0$ identycznie i, gdy $D_{\lambda K} \neq 0$, tylko to jedno. Gdy zaś $D_{\lambda K} = 0$, wtedy

[1]) Gdy $D_K = 0$, to rozwiązanie istnieje wtedy tylko, gdy funkcja $f(x)$ spełnia pewne warunki. Por. przypisek na str. 306.

istnieją rozwiązania równania (11), n i e równe identycznie zeru — a takie jedynie nas obchodzą; nazywamy je *funkcjami własnemi* jądra *(Eigenfunktionen)*.

9. Najważniejszemi zadaniami teorji równań całkowych są: zbadanie układu wartości własnych i zbadanie własności funkcji własnych, należących do danego jądra; dalej zbadanie równań z jądrem niesymetrycznym, lub z jądrem posiadającym punkty osobliwe. Badane są też równania całkowe innych f o r m: równania *pierwszego rodzaju*, równania *nielinjowe*, równania *całkowo-różniczkowe* (t. j. takie, do których wchodzi również pochodna funkcji niewiadomej).

10. Wskazany wyżej stosunek między równaniami całkowemi jednorodnemi i niejednorodnemi, istnienie wartości własnych parametru λ i funkcji własnych przypomina teorję równań różniczkowych linjowych rzędu drugiego przy zmiennych rzeczywistych (p. str. 292). Rzeczywiście istnieje między temi równaniami ścisły związek: równanie różniczkowe linjowe da się sprowadzić do całkowego.

Lecz istnieje inna jeszcze analogja do teorji linjowych równań całkowych i związek ostatniej z zupełnie inną dziedziną matematyki: z a l g i e b r ą f o r m l i n j o w y c h.

Weźmy n niezależnych między sobą równań linjowych algiebraicznych o n niewiadomych i o spółczynnikach rzeczywistych

$$\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ - - - - - - - - - - - \\ - - - - - - - - - - - \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{n,n}x_n = b_n. \end{array} \tag{12}$$

Wiemy (p. rozdz. A l g i e b r a, str. 207), że aby układ ten miał rozwiązania (są one zawsze rzeczywiste) trzeba, iżby wyznacznik, utworzony ze współczynników $a_{k,l}$, nie był zerem; wyjąwszy, gdy w s z y s t k i e b_k są równe zeru[1]) (t. j. gdy wszystkie równania są j e d n o r o d n e): wtedy przeciwnie rozwiąza-

[1]) Gdy $b_1, b_2, \ldots b_n$ nie wszystkie są równe 0, lecz spełniają pewien warunek, to rozwiązanie istnieje i dla wyznacznika równego zeru.

nie — różne od nie interesującego $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots x_n = 0$ — istnieje tylko wtedy, gdy wyznacznik równa się zeru.

Widzimy tu już pewną analogję z równaniami całkowemi. Dla wykrycia jej przyczyny, napiszemy układ równań (12) w innej formie; załóżmy

$$a_{k,k} = 1 + \alpha_{k,k} \qquad \begin{pmatrix} k = 1,\ 2, \ldots n \\ l = 1,\ 2, \ldots n \end{pmatrix}$$
$$a_{k,l} = \alpha_{k,l} \text{ dla } k \neq l$$

i napiszmy równania (12) w formie skróconej:

$$\begin{aligned} x_1 + \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{1,k} x_k &= b_1 \\ x_2 + \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{2,k} x_k &= b_2 \\ -\ -\ -\ -\ &-\ - \\ -\ -\ -\ -\ &-\ - \\ x_n + \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{n,k} x_k &= b_n. \end{aligned} \tag{13}$$

Uważajmy teraz $x_1, x_2, \ldots x_n$ za wartości jednej szukanej funkcji $\varphi(u)$ dla n wartości zmiennej u, a mianowicie dla

$$a,\ a + \frac{b-a}{n-1},\ a + 2\frac{b-a}{n-1}, \cdots a + (n-1)\frac{b-a}{n-1} = b,$$

które ponumerujemy w sposób następujący (zakładając $n-1 = 2^m$):

$$u_1 = a,\ u_2 = b,\ u_3 = a + \frac{b-a}{2},\ u_4 = a + \frac{b-a}{4},$$
$$u_5 = a + 3\frac{b-a}{4}, \cdots u_n = a + (n-2)\frac{b-a}{n-1};$$

zaś $b_1, b_2, \ldots b_n$ i $\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,1}, \ldots \alpha_{n,n}$ uważajmy za wartości funkcji wiadomych $f(u)$ i $\frac{b-a}{n} K(u, v)$ dla tych samych wartości argumentu; t. j.

$$x_k = \varphi(u_k),\ b_k = f(u_k),\ \alpha_{k,l} = \frac{b-a}{n} K(u_k, u_l).$$

Wszystkie nasze równania będą miały postać:

$$\varphi(u_l)+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{b-a}{n}K(u_l,u_k)\varphi(u_k)=f(u_l)\ (\text{dla } l=1,2,\ldots n).\quad(14)$$

Gdy teraz będziemy n zwiększać nieskończenie, nadając mu kolejno wartości $2+1, 2^2+1, 2^3+1,\ldots 2^m+1,\ldots$, to w granicy otrzymamy nieskończoność (przeliczalną) równań kształtu [1])

$$\varphi(u_l)+\int_a^b K(u_l,\,v)\,\varphi(v)dv=f(u_l)\qquad(\text{dla } l=1,\,2,\ldots).$$

Ponieważ zaś funkcje φ, K i f są ciągłe, to równanie to będzie spełnione nietylko dla wartości u_1, $u_2,\ldots$, rozłożonych wszędziegęsto w przedziale (a, b), lecz i dla każdej innej wartości u w tym przedziale; nieskończoność naszych równań algiebraicznych zmieni się w jedno równanie funkcyjne, a mianowicie w równanie (8).

Okazuje się dalej, że t. zw. wyznacznik FREDHOLMA jest granicą wyznacznika układu równań (13). Jasnym jest teraz, dlaczego gra on taką rolę w teorji równań całkowych.

Pozostaje nam teraz tylko wprowadzić parametr λ i jego wartości własne dla układu (13). Gdy zastąpimy $\alpha_{k,l}$ przez $\lambda\alpha_{k,l}$, wyznacznik układu będzie:

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda\alpha_{1,1}, & \lambda\alpha_{1,2}, & \lambda\alpha_{1,3}, & \ldots\ldots & \lambda\alpha_{1,n} \\ \lambda\alpha_{2,1}, & 1+\lambda\alpha_{2,2}, & \lambda\alpha_{2,3}, & \ldots\ldots & \lambda\alpha_{2,n} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ \lambda\alpha_{n,1}, & \lambda\alpha_{n,2}, & \lambda\alpha_{n,3}, & \ldots\ldots & 1+\lambda\alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

Pytamy, czy istnieją wartości λ, dla których wyznacznik ten będzie równy zeru. W tym celu należy rozwiązać równanie

[1]) Według określenia całki mamy bowiem:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{b-a}{n}K\left(u_l,\ a+(k-1)\,\frac{b-a}{n-1}\right)\varphi\left(a+(k-1)\frac{b-a}{n-1}\right)=$$

$$=\int_a^b K(u_l,v)\varphi(v)dv,$$

o ile całka istnieje, co w naszym wypadku jest pewne, gdyż $K(u,v)\varphi(v)$ jest funkcją ciągłą.

względem λ, otrzymane przez przyrównanie go do 0. Gdy założymy:

$$a_{k,l} = a_{l,k} \text{ (t. j. } K(x,y) = K(y,x)),$$

to wyznacznik będzie symetryczny i równanie nasze będzie zawsze posiadało pierwiastki rzeczywiste. To samo jest prawdziwym i w granicy, czyli wartości własne λ dla jądra symetrycznego zawsze istnieją.

W związku z temi badaniami powstała *algiebra form o nieskończonej ilości zmiennych*[1]) i w ślad za tym *gieometrja analityczna o nieskończonej ilości wymiarów.*

11. Za przygotowanie minimalne, naogół potrzebne do studjowania równań całkowych, uważać należy gruntowną znajomosć rachunku różniczkowego i całkowego oraz teorji funkcji zmiennych rzeczywistych; do czytania prac, należących do kierunku Hilberta, należy znać także algiebrę form linjowych. Poza tym do wiadomości potrzebnych najczęściej należą rozwinięcia na szeregi (potęgowe, trygonometryczne i inne), dalej równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe, wreszcie teorja funkcji analitycznych.

12. Równania całkowe mają zastosowania głównie w teorji potencjału i w różnych działach fizyki[2]); zagadnienia z tych teorji właśnie naprowadziły matematyków na badania równań całkowych. Teorja równań całkowych potrzebną jest też do teorji rozwinięć na szeregi.

---

[1]) Układy równań o nieskończonej ilości niewiadomych rozpatrywano i wcześniej nieco, przyczym wprowadzono też wyznaczniki nieskończone (von Koch); wyznaczniki te można także spożytkować w teorji równań całkowych. Teorję ich można znaleźć u Kowalewskiego (p. niżej) w rozdziale 17 (str. 369—455); p. również literaturę na str. 313 i 333.

[2]) Poincaré stosuje je do teorji odpływów i przypływów morza; p. wykład drugi (str. 13—19) w książce:

H. Poincaré. Sechs Vorträge aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Gehalten zu Göttingen von 22—28 April 1909. Lipsk, Teubner, 1910; str. 58. Cena m. 1.80; oraz rozdział X (str. 233—303) w książce:

H. Poincaré. Leçons de Mécanique céleste. Tom III. Théorie des marées. Paryż, Gauthier-Villars, 1910.

Wiele różnych zastosowań równań całkowych w matematyce i poza nią podaje Hilbert w swych »Grundzüge« (p. niżej).

Lecz główna wartość teorji równań całkowych (abstrahując od jej wartości wewnętrznej) polega nie na zastosowaniach do innych działów matematyki, lecz na tym znaczeniu, jakie ma dla całości matematyki: polega na wprowadzeniu nowych płodnych idei oraz na powiązaniu różnych działów w jedną całość. Przez to właśnie teorja ta odsłania nam najgłębsze i najistotniejsze związki między przedmiotami matematyki — a nauka przecież polega na wykrywaniu związków.

Jeden z matematyków niemieckich scharakteryzował to znaczenie wprowadzenia równań całkowych w następujący sposób: W matematyce znaczenie epokowe mają zazwyczaj takie pomysły, które wprowadzają łącznik między dwiema przedtym zupełnie sobie obcemi teorjami czy dziedzinami faktów. Wtedy obie wzbogacają się wzajemnie, gdyż fakty znane w jednej dziedzinie pozwalają odkryć im odpowiadające, a przedtym nieznane fakty w drugiej. Takim pomysłem była gieometrja analityczna, odkrywająca związek pomiędzy gieometrją a algiebrą; takąż rolę odgrywają dziś równania całkowe, odkrywające nam związek pomiędzy algiebrą, równaniami różniczkowemi, rozwinięciami na szeregi i wprowadzające dzięki temu wśród całej masy znanych ale niepowiązanych ze sobą faktów pewien ład, umożliwiający ich opanowanie.

---

13. Dla matematyka, który nie zajmuje się specjalnie funkcjami zmiennych rzeczywistych, teorja równań całkowych nie jest dziś jeszcze konieczną częścią ogólnego wykształcenia matematycznego. Polecamy jednak każdemu przeczytanie przynajmniej klasycznej a krótkiej pracy:

I. Fredholm. Sur une classe d'équations fonctionelles. Acta math., t. 27, 1903, stronic 26.

Właściwa teorja równań całkowych zawarta w §§ 1 i 2 (stronic 13). Praca odznacza się elegancją, czyta się łatwo i wymaga minimalnego przygotowania. — Do klasycznej literatury należą jeszcze prace:

D. Hilbert. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Lipsk, Teubner, 1912; str. XXVI+282 (tom 3-i zbioru »Fortschritte der Mathematischen Wissenschaften in Monographien«, wydawanego przez O. Blumenthala). Cena m. 11.

Książka ta zawiera 6 artykułów (*Mitteilungen*) wraz z ich przedmiotowo uporządkowanym streszczeniem, drukowanych pod tym samym tytułem w Gött. Nachr., math.-phys. Klasse: r. 1904 (str. 49—91 i 213—259), r. 1905 (str. 307—338), r. 1906 (str. 157—227 i 439—480), r. 1910 (str. 355—417 i 595—618). Nowym w niej jest tylko rozdział ostatni: Uzasadnienie teorji kinetycznej gazów (str. 267—282). — Teorji samej poświęcone są artykuły 1-y, 4-y i 5-y, pozostałe zaś zastosowaniom.

E. Schmidt. Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. W trzech częściach. Math. Ann., t. 63 (stronic 40), t. 64 (stronic 14), t. 65 (stronic 30).

Część pierwsza jest uzupełnioną pracą doktorską p. t.:

Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Dissertation. Gietynga, 1905.

Prace Hilberta napisane są ciężko; dla niespecjalisty w tym zakresie bardziej celowym będzie przeczytanie prac Schmidta.

Z podręczników polecamy:

T. Lalesco. Introduction à la théorie des équations intégrales, avec une préface de M. É. Picard. Paryż, A. Hermann, 1912; str. 152. Cena fr. 4 (przekł. polski w przygot.).

Treść: Cz. 1-a (str. 5—18). Równanie Volterry. Cz. 2-a (str. 19—100). I. Równanie Fredholma. II. Badanie głębsze jądra rozwiązującego. III. Jądra specjalne. IV. Równanie Fredholma pierwszego rodzaju. Cz. 3-a (str. 101—139). Równania osobliwe.

Podręcznik ten można uważać za najlepszy z istniejących. Szkoda, że liczne błędy drukarskie (a czasem i nie drukarskie [1])) we wzorach i źle miejscami dobrane znakowanie utrudniają czytanie. Podana wyczerpująca bibljografja przedmiotu.

Z mniej ważnych podręczników wyliczamy lepsze:

M. Bôcher. An Introduction to the study of Integral Equations (w zbiorze: »Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics«, N. 10). Cambridge, 1909; str. 71. Cena szyl. $2^1/_2$.

G. Kowalewski. Einführung in die Determinantentheo-

---

[1]) Zaznaczymy tu tylko istnienie błędu w dowodzie na str. 93.

rie, einschliesslich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten. Lipsk, 1909. Cena m. 16.

A. Korn. Über freie und erzwungene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen. Lipsk, Teubner, 1910; str. 136. Cena m. 5.60.

J. Horn. Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Lipsk, 1910 (Sammlung Schubert, LX). Cena m. 10.

Wszystkie podają tylko najgłówniejsze zarysy teorji równań całkowych; lepiej jest zastąpić je bezpośrednim studjowaniem dzieł klasycznych, przynajmniej Fredholma i Schmidta. — W dwuch z nich równaniom całkowym poświęconych jest tylko parę rozdziałów: u Kowalewskiego 18 i 19 (str. 445—540) u Horna V, VI i VIII (str. 188—332). Kowalewski poświęca dosyć miejsca stronie algiebraicznej równań całkowych.

Tym, którzy chcą poznać teorję równań całkowych ze względu na ich zastosowania, polecamy podręcznik:

B. Heywood et M. Fréchet. L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique. Avec note et préface de J. Hadamard. Paryż, A. Hermann, 1912; str. 165. Cena fr. 5.

Treść: Wstęp (uwagi wstępne; funkcje ortogonalne; str. 1—13). I. Zagadnienia, sprowadzające się do równania Fredholma (zagadnienia, dotyczące potencjału, równania $\Delta V = R(x,y,z) V$ i analogicznych; str. 14—34). II. Równanie Fredholma (metoda iteracji; metoda Fredholma rozwiązanie równ. całk. jednorodnego; równ. Fredholma o jądrze symetrycznym; str. 35—104). III. Rozwiązanie zagadnień postawionych w rozdz. I; (str. 105—140). 2 noty (str. 141—157). Bibljografja prac najważniejszych (str. 159—161).

A. Kneser. Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik. Vorlesungen gehalten an der Universität zu Breslau. Brunświk, 1911; str. 243. Cena w opr. m. 7.

Książkę tego znanego autora trudno uważać za podręcznik. Składa się ona z kilku rozdziałów, z których każdy jest poświęcony innemu zagadnieniu fizyki matematycznej a w których jest rozproszona teorja równań całkowych.

O równaniach całkowo-różniczkowych, a także szerzej o równaniach Volterry, dowiedzieć się można z książki, należącej do zbioru Borela:

V. Volterra. Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, professées à la Faculté des Sciences de Rome en 1910. Paryż, Gauthier-Villars, 1913; str. 164. Cena fr. 5.50.

Treść: I. O funkcjach, które zależą od innych funkcji (str. 1—33). II. Równania całkowe Volterry (str. 34—101). III. Równanie Fredholma (str. 102—137). IV. Równania całkowo-różniczkowe i funkcje przemienne *(permutable)* (str. 138—162).

Również w zbiorze Borela ukazała się monografja o układach równań o nieskończenie wielu niewiadomych:

F. Riesz. Les systemes d'équations linéaires à un einfinité d'inconnues. Paryż, Gauthier-Villars, 1913; str. VI+180. Cena fr. 6.50.

Teorji form nieskończenie wielu zmiennych również poświęcona jest 4-a »Mitteilung« (p. wyżej) Hilberta; zawierać ją będzie także zapowiedziany w zbiorze »Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen« (Teubner) obszerniejszy dwutomowy podręcznik O. Toeplitza p. t. Einführung in die Theorie der Integralgleichungen. (Por. też literaturę rozdz. Rozw. na szer., str. 333.)

Nadmieniamy jeszcze, że w drugiej połowie t. III Cours d'Analyse Goursata, która się jeszcze nie ukazała, ma być zawarta teorja równań całkowych.

Po polsku czasopismo Wektor ogłosiło artykuł informujący o teorji równań całkowych:

J. Puzyna. Zarys teorji równań całkowych. Cztery wykłady na kursie uzupełniającym dla nauczycieli szkół średnich, wygłoszone na Uniwersytecie we Lwowie w dniach 13 i 14 marca 1913 r. Wektor, Rok II, N. 8 i 9. Warszawa, 1913, marzec i kwiecień; str. 15+12.

Literaturę przedmiotu podaje Lalesco i następująca książka o charakterze encyklopedycznym:

H. Hahn. Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen. W dwuch częściach. Lipsk, Teubner. Cz. I, 1911; str. 51. Cena m. 1.20. (Cz. II jeszcze nie wyszła).

Zajmuje się tylko teorją: zastosowań nie uwzględnia.

W Encyklopedji n. mat., w wyd. niem., równaniom całkowym poświęcona jest część cytowanego wyżej (str. 303) artykułu Pincherlego. Wobec olbrzymiego rozrostu tej gałęzi matematyki w ostatnich dziesięciu latach — równania całkowe należą do najbardziej opracowywanych przedmiotów matematyki w tym okresie, możnaby nawet rzec: były przedmiotem modnym — poświęconą jej część artykułu Pincherlego należy uważać za przestarzałą.

ROZWINIĘCIA NA SZEREGI.

OPRACOWAŁ

ZYGMUNT JANISZEWSKI.

---

1. Czytelnik — nawet ten, który o matematyce informuje się po raz pierwszy wogóle dopiero z Poradnika — mógł zauważyć, jak ważną rolę w tworzeniu nowych pojęć w matematyce odgrywa pojęcie granicy; dość wspomnieć pochodną, całkę. Szeregi nieskończone to jeden z najważniejszych przykładów tego.

Większość funkcji, do których wprowadzenia zmuszają nas już względnie proste zagadnienia [1]), nie da się przedstawić jako

---

[1]) Np. znalezienie $\int_1^x \frac{1}{\xi}\, d\xi$ prowadzi do funkcji $\lg x$ (można nawet całkę tę uważać za *określenie* logarytmu), która nie da się przedstawić jako wynik skończonej ilości działań arytmetycznych, wykonanych nad zmienną x, lecz jako granica nieskończonej ich ilości, a mianowicie w postaci szeregu:

$$(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\cdots\cdots\left(\text{czyli } \lg x=\lim_{n=\infty}\left[(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}\right]\right) \text{ dla } 0<x\leqslant 2.$$

wynik wykonywania samych działań arytmetycznych; musimy wprowadzić pojęcie g r a n i c y: np. zwiększając stale, w pewien określony sposób, liczbę działań arytmetycznych, wykonywanych nad zmienną x, rozpatrujemy granicę, do której dąży ich rezultat.

Jedną i tę samą funkcję można przedstawić zawsze jako granicę różnych wyrażeń [1]). Możemy między niemi wybierać; a dla jednolitości teorji, dla łatwiejszego wykrywania różnych związków, dla ekonomji myślenia wreszcie (zaoszczędzenia sobie pracy orjentowania się w coraz to nowych formach) koniecznym niemal jest — przynajmniej podczas jednego badania — wybór ten uskutecznić, sprowadzając wszystkie te wyrażenia do jednego typu.

2. Używamy więc prawie wyłącznie szeregów [2]); z szeregów zaś — bo i to jest forma bardzo ogólna — wybieramy jakiś rodzaj określony; mianowicie żądamy, aby we wszystkich rozpatrywanych szeregach wyrazy jednakowo odległe od początku były wyrażeniami jednego określonego z góry typu (zależnego od numeru porządkowego wyrazu), np. aby były wielomianami, albo funkcjami trygonometrycznemi. Ponieważ mówimy w tym rozdziale tylko o przedstawianiu f u n k c j i za pomocą szeregów, więc i wyrazy szeregu muszą być funkcjami tejże zmiennej [3]). Szereg więc ma postać $f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots$, gdzie, dla każdego n, $f_n(x)$ jest funkcją jednego typu dla wszystkich szeregów danego rodzaju, przyczym typ ten funkcji zmienia się wraz z n; np. $f_n(x)=a_n x^n$, gdzie a_n jest stałą dowolną

---

[1]) Np. powracając do określenia całki $\int_1^x \frac{1}{\xi} d\xi$, t. j. pisząc ją w postaci:

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\frac{x}{n}}+\frac{1}{1+2\frac{x}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{(n-1)x}{n}}\right],$$

mamy drugie wyrażenie na $\lg x$.

[2]) Z innych wyrażeń nieskończonych, używanych w niektórych przypadkach, najważniejszemi są *iloczyny nieskończone* i *ułamki ciągłe nieskończone* (por. A r y t m e t y k a, str. 184—185).

[3]) O ciągach i szeregach o wyrazach s t a ł y c h p. rozdz. A r y t m e t y k a, §§ 6 i 7, str. 182—185.

(por. przykłady podane niżej, § 4). Zakres typu $f_n(x)$ zacieśniamy zwykle tak, aby żadna funkcja nie dała się przedstawić przez więcej niż jeden szereg typu $f_1(x)+f_2(x)+\cdots$ (t. j. żeby dwa różne szeregi tego typu nie mogły być sobie równe dla wszystkich x).

Szeregi, pojęte jako sposób jednolitego przedstawiania funkcji (albo określonych w inny sposób, albo dopiero szukanych), są narzędziem badania wielkiej użyteczności. To przedstawienie funkcji w postaci szeregu danego typu nazywamy *rozwinięciem* funkcji na szereg. Jest ono jedną z najpotężniejszych metod, którą stosujemy na każdym kroku. Pożyteczność i stosowalność tego narzędzia zwiększyła się jeszcze przez znalezienie metod *sumowania* (CESARO, BOREL), pojęcia *zbieżności przeciętnej (en moyenne)* [1]) i metody *formalnego* traktowania szeregów (p. niżej, str. 326).

3. W teorji szeregów, których wyrazami są funkcje — i wogóle tam, gdzie rozpatrujemy dążenie do granicy ciągu funkcji — spotykamy się z nowym pojęciem: *zbieżności jednostajnej.*

Mówimy, że ciąg funkcji $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$, ... dąży do granicy $f(x)$ jednostajnie w rozpatrywanej dziedzinie zmienności D zmiennej x, gdy dla każdego (dowolnie małego) ε można znaleźć takie n_0, że dla $n > n_0$ mamy:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

dla każdego x należącego do dziedziny D. (Sama zbieżność, bez warunku »jednostajna«, zakłada tylko istnienie dla każdego ε liczby n_0 dla każdego x z osobna: dla każdego x to n_0 może być inne; n_0 jest więc funkcją x, nietylko ε. By móc zna-

---

[1]) P. LALESCO, cz. 2-a, IV, (podręcznik cytowany na str. 311).

O *sumowalności* szeregów, t. j. metodzie nadawania określonej wartości niektórym typom szeregów rozbieżnych, i jej znaczeniu, możemy polecić książkę ze zbioru BORELA:

É. BOREL. Leçons sur les séries divergentes. Paryż, Gauthier-Villars, 1901; str. 182. Cena fr. 4.50.

O istocie samego zagadnienia dobrze informuje krótki i jasny artykuł:

H. STEINHAUS. Kilka słów o uogólnieniu pojęcia granicy; stronic 14. Prace Matematyczno-fizyczne, t. XXII, 1911.

leźć n_0 jedno dla wszystkich x, trzeba by n_0 było dla każdego ε funkcją ograniczoną zmiennej x w dziedzinie D.)

Jeśli sumy cząstkowe szeregu (którego wyrazami są funkcje) dążą jednostajnie do granicy, to szereg nazywamy *zbieżnym jednostajnie.*

Pojęcie zbieżności jednostajnej — obok znanego z teorji szeregów o wyrazach stałych pojęcia zbieżności bezwzględnej (t. j. takiej, że szereg, utworzony z wartości bezwzględnych wyrazów danego szeregu, jest także zbieżny) — odgrywa bardzo ważną rolę. Wspomnimy tu, że zbieżność jednostajna szeregu jest warunkiem wystarczającym, by szereg można było całkować wyraz po wyrazie, t. j. aby

$$\int_a^b \lim_{n=\infty} (f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x))dx = \lim_{n=\infty}\int_a^b (f_1(x)+f_2(x)+\cdots f_n(x))dx.$$

Warunek ten nie wystarcza, aby można było szereg różniczkować wyraz po wyrazie; jednak i warunek wystarczający do różniczkowalności wyraz po wyrazie wyraża się za pomocą jednostajnej zbieżności, a mianowicie: aby pochodna sumy szeregu była równą sumie szeregu, utworzonego z pochodnych wyrazów danego szeregu, musi być ten ostatni szeregiem jednostajnie zbieżnym [1]).

4. Dla przykładu weźmy dwa typy szeregów:

1) $f_n(x)$ ma być wielomianem rzędu n-go (zresztą jakimkolwiek) t. j.:

$$f_n(x) = a_{n,0}x^n + a_{n,1}x^{n-1} + \cdots + a_{n,n-1}x + a_{n,n},$$

gdzie wszystkie $(n+1)$ spółczynniki są dowolne. Szeregi te nazywamy *szeregami wielomianów.*

2) $f_n(x) = a_n x^n$; tutaj pozostaje dowolnym w każdym wyrazie tylko jeden spółczynnik a_n. Szereg taki nazywamy *szeregiem potęgowym.*

Drugi typ jest przypadkiem szczególnym pierwszego; mia-

---

[1]) Dowody na podane tu twierdzenia o całkowalności i różniczkowalności szeregu znajdzie czytelnik w każdym podręczniku analizy; najlepiej jednak próbować udowodnić je samemu. W Lehrbuch der Funktionentheorie OSGOODA jednostajnej zbieżności jest poświęcony rozdz. III (str. 81—115).

nowicie, otrzymamy go z pierwszego, przyjmując wszystkie spółczynniki $f_n(x)$ z wyjątkiem $a_{n,0}$ równemi zeru. W pierwszym pozostawiliśmy sobie o wiele więcej swobody wyboru, niż w drugim, w którym ograniczenie posunęliśmy do ostatnich granic. To każe nam już oczekiwać niektórych różnic między ich własnościami; wymienimy najważniejsze. Na szereg wielomianów można rozwinąć każdą funkcję ciągłą określoną w skończonym przedziale [1]); na szereg potęgowy zaś można rozwinąć tylko funkcję analityczną. Natomiast szereg potęgowy jest zupełnie określony, gdy dana jest funkcja, którą ma przedstawiać [2]), szereg wielomianów zaś nie: każdą funkcję można rozwinąć rozmaicie [3]).

Szeregi potęgowe — najważniejsze ze wszystkich — posłużyły WEIERSTRASSOWI (1815—1897) za narzędzie do badania funkcji analitycznych. Ich teorja też należy do teorji funkcji analitycznych (gdyż pojęcie funkcji analitycznej pokrywa się z pojęciem funkcji przedstawionej przez szereg potęgowy; por. rozdz. Teorja funkcji anal., str. 272). Tutaj zajmiemy się wyłącznie innemi szeregami [4]), które służą do rozwijania funkcji

---

[1]) Por. LEBESQUE (cyt. str. 332), str. 48, lub É. GOURSAT, Cours d'Analyse, t. I, wyd. 2-e, str. 507, gdzie podany jest na to twierdzenie WEIERSTRASSA prosty dowód LEBESGUE'A (w 1-ym wyd. podany jest dowód WEIERSTRASSA).

[2]) Nie należy przypuszczać, aby fakt, że $f_n(x)$ zależy od jednego parametru, wystarczał do jego jednoznacznego wyznaczenia przez funkcję.

[3]) Jest to oczywiste, gdyż dodając dowolny wielomian $(n-1)$-ego stopnia do $f_n(x)$ i jednocześnie odejmując go od $f_{n-1}(x)$, nie zmieniamy ani typu szeregu, ani jego sumy; zmieniamy jednak sam szereg, gdyż dwa szeregi uważamy za identyczne tylko wtedy, gdy każdy wyraz jednego jest równy odpowiedniemu wyrazowi drugiego.

[4]) O rozwinięciach, stosowanych głównie dla funkcji analitycznych (a mianowicie, na szeregi różnego typu wielomianów i na szeregi MITTAG-LEFFLERA) wiadomości można znaleźć w dziełach o teorji funkcji analitycznych. Tu wspomnimy tylko, że w zbiorze BORELA wyszły dwie monografje (BORELA i MONTELA), należące do tego działu.

Teorja *szeregów DIRICHLETA,* t. j. szeregów postaci:

$$\frac{a_1}{1^x}+\frac{a_2}{2^x}+\frac{a_3}{3^x}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{n^x}+\cdots \tag{a}$$

— lub ogólniej:

$$a_1e^{-\lambda_1 x}+a_2e^{-\lambda_2 x}+\cdots+a_ne^{-\lambda_n x}+\cdots, \tag{b}$$

tylko w zakresie zmiennych rzeczywistych, i to w przedziale skończonym, t. j. dla wartości x, spełniających nierówności $a \leqq x \leqq b$. Ważnemi one są dlatego, że pozwalają rozwinąć funkcje nietylko analityczne, lecz i t. zw. »dowolne« (p. niżej, § 5).

5. *Szeregi trygonometryczne*, mające kształt:

$$\frac{b_0}{2} + a_1 \sin x + b_1 \cos x + a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x + \cdots$$
$$\cdots + a_n \sin nx + b_n \cos nx + \cdots\ {}^{1)},$$

były pierwszemi, o których dowiedziano się, że mogą przedstawiać funkcje nie analityczne. Epokowe to odkrycie zrobił Fourier (1768—1830). Wielkie znaczenie tego odkrycia zrozumiemy, gdy uprzytomnimy sobie zasadniczą własność funkcji analitycznych: wystarcza określić funkcję analityczną w jakkolwiek małym przedziale, aby ją określić wszędzie. Jeżeli więc — ograniczając się odrazu do zmiennych rzeczywistych i przechodząc do interpretacji gieometrycznej — damy sobie jak najmniejszy łuk np. paraboli, to przezeń jest określona cała parabola. Stąd wyrosło przekonanie (zauważmy, że wszystkie funkcje elementarne są analityczne), że linja, czy też funkcja, to jakaś organiczna, niepodzielna całość, którą można odtworzyć z najmniejszego jej kawałka. Dla tego też uważano, że np. funkcja $y = f(x)$

$$\text{(A)} \qquad f(x) = 2x \qquad \text{dla} \quad 0 \leqq x < 1,$$
$$\text{(B)} \qquad f(x) = 3 - x \qquad \text{dla} \quad 1 \leqq x \leqq 3,$$

(p. fig. 22, gdzie kreskami grubemi bez przerw jest wyobrażona linja odpowiadająca tej funkcji przy spółrzędnych kartezjań-

---

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ jest ciągiem liczb rzeczywistych nieskończenie i monotonicznie wzrastających (dla $\lambda_n = \lg n$, (*b*) sprowadza się do (*a*)) — jest wyłożona w dziele:

E. Landau. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. 2 tomy. Lipsk, Teubner, 1909; tom drugi, księga 6-a, str. 723—883 (krótko także w tomie pierwszym, str. 103—124).

Szeregi Dirichleta oddają duże usługi w analitycznej teorji liczb.

[1]) Pierwszy wyraz, stały, piszemy $\frac{b_0}{2}$, dlatego, żeby wzór (2) (str. 323) był ważny i dla b_0.

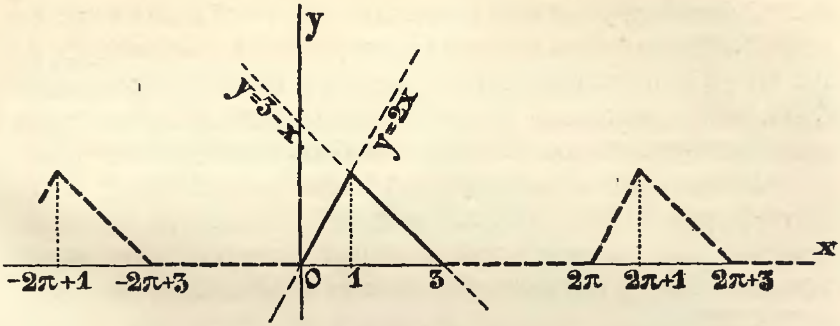


Fig. 22.

skich) nie jest »właściwie« jedną funkcją, lecz że to są dwie różne funkcje, zesztukowane niejako; uważano, że »właściwie« funkcja, która się równa $2x$ w przedziale od 0 do 1, musi się i w każdym innym punkcie równać $2x$.

To przekonanie podtrzymywało to, że do przedstawienia takiej funkcji, jak powyższa $f(x)$, wydawało się koniecznym dać dwa wzory ((A) i (B)): inny dla wartości funkcji w przedziale od 0 do 1, a inny dla jej wartości w przedziale od 1 do 3 (uważano bowiem tylko taką zależność y od x za funkcję właściwą, która się da określić za pomocą jednego wzoru).

Otóż to było złudzenie: jeden wzór zbudowany z pomocą samych działań arytmetycznych i pojęcia granicy, może przedstawiać funkcję nieanalityczną, np. taką, jak wyżej określona $f(x)$, równą w różnych przedziałach różnym funkcjom analitycznym[1]). Fakt ten zrządził, że funkcjom nieanalitycznym —

[1]) Mianowicie funkcja $f(x)$, określona wyżej przez wzory (A) i (B), da się przedstawić w przedziale od 0 do 3 przez (jeden) wzór następujący:

$$\text{(a)} \qquad f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{2x(2-x)^n + (3-x)x^n}{(2-x)^n + x^n}$$

albo przez szereg trygonometryczny:

$$\text{(b)} \quad f(x) = \frac{3}{2\pi} + \frac{4\sin^3 1}{\pi}\sin x - \frac{4\cos^3 1 - 6\cos 1 + 2}{\pi}\cos x + \dots$$

$$\dots + \frac{4\sin^3 n}{\pi n^2}\sin nx - \frac{4\cos^3 n - 6\cos n + 2}{\pi n^2}\cos nx + \dots .$$

t. zw. *dowolnym*, ponieważ możemy im w różnych przedziałach nadawać dowolne wartości, bez względu na to, jakie wartości nadaliśmy im w innym przedziale [1]) — przyznano prawo do miana funkcji i odgrywania roli w matematyce na równi z funkcjami analitycznemi [2]).

Dzięki temu zmieniło się radykalnie pojęcie funkcji i rozszerzyło pole badań; jako zaś narzędzie badania na tym polu, wzamian nie mogących już tu służyć szeregów potęgowych, wysunęły się na pierwszy plan szeregi trygonometryczne [3]).

Wzór (b) może czytelnik wyprowadzić z łatwością sam z pomocą wzorów (2) na str. 323, założywszy $f(x)=0$ dla $3<x\leqq 2\pi$ (jeżeli zastąpić $\sin x$ i $\cos x$ przez ich rozwinięcia na szeregi potęgowe, do wyrażenia (b) będą wchodzić tylko działania arytmetyczne i pojęcie granicy).

Zauważymy, że wzory (a) i (b) przedstawiają tę samą funkcję tylko w przedziale od 0 do 3; np. w przedziale od 3 do 2π wzór (a) przedstawia $3-x$, a wzór (b) — 0.

[1]) W tym też znaczeniu mówimy, że na szereg trygonometryczny można rozwinąć funkcję »dowolną«. Nie należy jednak tego rozumieć, jakoby każda funkcja miała dać się rozwinąć na szereg trygonometryczny (p. niżej, § 6).

[2]) Ale tylko w zakresie zmiennych rzeczywistych. Dlaczego w zakresie zmiennych zespolonych ograniczamy się do funkcji analitycznych, to tłumaczy się do pewnego stopnia tym, że w większości badań musimy ograniczyć się do funkcji posiadających pochodną (przynajmniej pierwszą) w rozpatrywanej dziedzinie; w zakresie zaś zmiennych zespolonych istnienie pochodnej pierwszej pociąga za sobą istnienie pochodnych wszystkich rzędów i zachodzi tylko dla funkcji analitycznych (por. określenie tych funkcji, str. 271).

[3]) Nie należy z powiedzianego wyżej wnioskować, że dziedziny te — szeregów potęgowych (funkcji analitycznych zmiennej zespolonej) i szeregów trygonometrycznych (funkcji dowolnych zmiennej rzeczywistej) — są sobie obce i wzajem niezależne. Przeciwnie, istnieje między niemi związek nader ścisły, tkwiący bardzo głęboko w ich naturze. Dość zauważyć, że szereg potęgowy:

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots,$$

w zakresie ilości zespolonych, $x=r\,(\cos\varphi+i\,\sin\varphi)$, $c_n=a_n+ib_n$, po zastosowaniu wzoru Moivre'a $[(\cos\varphi+i\,\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\,\sin n\varphi]$ przybiera kształt:

$$(a_0+a_1r\,\cos\varphi-b_1r\,\sin\varphi+a_2r^2\,\cos 2\varphi-b_2r^2\sin 2\varphi+\cdots+a_nr^n\cos n\varphi-$$
$$-b_nr^n\,\sin n\varphi+\cdots)+i\,(b_0+b_1r\,\cos\varphi+a_1r\,\sin\varphi+\cdots$$
$$\cdots+b_nr^n\,\cos n\varphi+a_nr^n\,\sin n\varphi+\cdots).$$

Posiadają one bowiem tę ważną własność, że jedną funkcję w przedziale od 0 do 2π można rozwinąć tylko na jeden szereg trygonometryczny (twierdzenie G. CANTORA).

Ograniczamy się tu do przedziału od 0 do 2π, gdyż funkcji rozwijalnej na szereg trygonometryczny można przypisać wartości dowolnie (z pewnemi zastrzeżeniami, p. niżej) tylko w przedziale o wielkości 2π — poza tym przedziałem funkcja przyjmuje perjodycznie te same wartości. Własność ta jest oczywista, ze względu iż 2π jest okresem dla każdego z wyrazów szeregu. Szereg więc (b), podany w przypisku na str. 321, przedstawia funkcję perjodyczną (na fig. 22 odpowiada jej poza przedziałem (0,3) linja gruba przerywana).

Gdy chcemy funkcję rozwinąć w przedziale (a, b), innym niż $(0, 2\pi)$, to posługujemy się szeregiem postępującym według $\sin n \frac{2\pi}{b-a}(x-a)$ i $\cos n \frac{2\pi}{b-a}(x-a)$, zamiast według $\sin nx$ i $\cos nx$.

6. Gdy funkcja $F(x)$ da się rozwinąć [1] na szereg trygonometryczny

$$F(x) = \frac{b_0}{2} + a_1 \sin x + b_1 \cos x + \cdots + a_n \sin nx + b_n \cos nx + \cdots \tag{1}$$

i szereg ten jest jednostajnie [2] zbieżny, to spółczynniki szeregu muszą być wyrażone następującemi wzorami:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \sin nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \cos nx dx \end{aligned} \tag{2}$$

Wzory te łatwo udowodnić, mnożąc obie strony równości (1) odpowiednio: raz przez $\sin nx$, drugi raz przez $\cos nx$, i całku-

---

Gdy teraz r będziemy uważali za stałą, to otrzymamy dwa szeregi trygonometryczne — funkcje zmiennej rzeczywistej φ.

Tym związkiem posługują się w badaniach nad teorją funkcji analitycznych zwłaszcza uczniowie RIEMANNA.

[1]) Rozumie się w przedziale od 0 do 2π; we wszystkim, co następuje o szeregach trygonometrycznych, trzeba się domyślać tego ograniczenia.

[2]) Wystarczą warunki mniej ograniczające, niż zbieżność jednostajna.

jąc obie strony od 0 do 2π. Ze względu na założoną zbieżność jednostajną szeregu, znajdującego się po prawej stronie równości (1), można go całkować, całkując każdy wyraz z osobna (p. § 3). Wtedy po stronie prawej (1) wszystkie wyrazy szeregu znikają, wyjąwszy wyraz zawierający a_n, resp. b_n.

Liczby, otrzymane w ten sposób, nazywamy *spółczynnikami Fouriera* funkcji $F(x)$. Są one określone przez wzory (2) dla każdej funkcji całkowalnej [1]) w przedziale $(0, 2\pi)$ bez względu na to, czy ta funkcja daje się rozwinąć na szereg trygonometryczny, czy nie.

Szereg trygonometryczny, którego spółczynniki określone są przez wzory (2), nazywamy *szeregiem Fouriera* funkcji $F(x)$. Funkcje, dla których wzory (2) tracą znaczenie, nie posiadają i swego szeregu Fouriera. Istnieją szeregi trygonometryczne [2]), zbieżne, rozumie się, niejednostajnie, które nie są szeregiem Fouriera żadnej funkcji. Suma takiego szeregu jest funkcją, rozwijalną na szereg trygonometryczny, którego spółczynniki nie są przedstawialne przez wzory (2).

Z drugiej strony dla funkcji posiadających szereg Fouriera zachodzi pytanie:

Czy szereg Fouriera danej funkcji równa się tej funkcji (t. j. rozwija ją), czy nie.

Są możliwe bowiem, a priori sądząc, trzy przypadki:

1) Szereg, otrzymany za pomocą spółczynników Fouriera danej funkcji, jest rozbieżny i wobec tego żadnej funkcji nie przedstawia [3]).

2) Szereg jest zbieżny, t. j. przedstawia (w przedziale $(0, 2\pi)$) funkcję, ale nie tę, która nam posłużyła do obliczenia jego spółczynników. Wreszcie:

3) Szereg przedstawia daną funkcję.

---

[1]) Do końca rozdziału używamy całek w znaczeniu Lebesgue'a.

[2]) P. niżej cytowaną książkę Lebesgue'a: Séries trigonométriques, § 63, str. 124.

[3]) Wciągając do zakresu badań idee sumowania szeregów (p. przypisek na str. 317), z których pomocą i szereg rozbieżny może przedstawiać funkcję, należy tu zastąpić wyraz »rozbieżny« przez »niedający się zsumować branemi pod uwagę metodami«.

W ostatnim tylko przypadku funkcja jest rozwijalną; w dwu pierwszych — nie.

Otóż wszystkie te przypadki naprawdę się zdarzają.

By mieć prosty przykład możliwości drugiego przypadku, weźmy pod uwagę jakąkolwiek funkcję rozwijalną $f(x)$)np. $f(x)$ określone powyżej na str. 320) i drugą $f_1(x)$ równą $f(x)$ dla wszystkich wartości x, z wyjątkiem jednej (np. dla $x=1$ niech będzie $f_1(1)=0 \neq f(1)$). Spółczynniki Fouriera będą dla obu funkcji $f(x)$ i $f_1(x)$ te same, jak to wynika bezpośrednio z określenia całki (por. Rachunek całkowy, str. 243); więc obu będzie odpowiadał jeden i ten sam szereg, przedstawiający funkcję rozwijalną $f(x)$ (więc zbieżny). Ale szereg ten, równając się funkcji $f(x)$, nie może zarazem równać się funkcji $f_1(x)$. Szereg więc odpowiadający $f_1(x)$ — będąc zbieżnym — nie przedstawia tej funkcji, lecz przedstawia inną, $f(x)$.

Wartości x jednak, dla których wartość funkcji jest różną od wartości sumy swego szeregu Fouriera, są wartościami wyjątkowemi [1]). Zbiór tych wartości nie może wypełniać odcinka, choć może być wszędziegęstym w przedziale $(0, 2\pi)$. Czy szereg Fouriera jakiej funkcji może być rozbieżnym (przypadek 1)) w całym przedziale — dotychczas nie wiadomo. Natomiast wiemy, że każdy szereg Fouriera daje się zsumować pewnemi metodami (np. metodą średnich arytmetycznych) wyjąwszy co najwyżej dla wartości x, tworzących zbiór o mierze zero.

7. Wydawaćby się mogło, że, gdy funkcja nie równa się swemu szeregowi Fouriera, to szereg ten nic nas nie może obchodzić. Tymczasem właśnie spółczynniki Fouriera występują w wielu rozumowaniach bez względu na zbieżność odpowiadającego szeregu i wartość jego sumy.

Za przykład tego może nam służyć wzór (piszemy go odrazu dla uogólnionych spółczynników Fouriera, p. wzór (2a); dla przypadku, gdy $F(x)$ i $G(x)$ są rozwijalne na szereg Fouriera i gdy te szeregi są jednostajnie zbieżne, czytelnik z ła-

[1]) Zbiór tych wartości ma miarę zero; p. Lalesco, Th. d. équations intégrales, str. 95 (twierdzenie Fischera i Riesza).

twością sprawdzi go sam, podstawiając za $F(x)$ i $G(x)$ ich rozwinięcia):

$$\int_a^b F(x)^2 dx = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots$$

i ogólniej

(3) $$\int_a^b F(x)\, G(x)\, dx = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots$$

(liczby b_n są spółczynnikami uogolnionemi Fouriera funkcji $G(x)$). W tym wzorze występują spółczynniki Fouriera funkcji, która może nie być rozwijalną na szereg Fouriera; dla ważności wzoru wystarcza, aby funkcja była ograniczoną i całkowalną.

Drugim przykładem jest twierdzenie: całkując wyraz po wyrazie szereg Fouriera danej funkcji (choćby ten szereg był *rozbieżny)*, otrzymujemy szereg zbieżny, którego suma jest całką danej funkcji. Fakt więc, że spółczynniki Fouriera można obliczyć nawet gdy szereg jest rozbieżny, oddaje wielkie usługi. Szereg odpowiadający funkcji, gdy nie troszczymy się o jego zbieżność, ani o wartość jego sumy, nazywamy rozwinięciem *formalnym* funkcji.

8. Szeregi trygonometryczne tworzą tylko jeden z typów całej klasy podobnych szeregów, posiadających też same zasadnicze własności.

Niech będzie dany ciąg funkcji

(U) $$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots\dots\ f_n(x)\ \dots\dots,$$

określonych w przedziale (a, b). Stawiamy sobie pytanie, czy istnieje dla danej funkcji $F(x)$ w przedziale (a,b) rozwinięcie według powyższego ciągu funkcji, t. j. postaci:

(4) $$F(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x) + \dots$$ [1]).

Odpowiedź na nie zależy od własności funkcji $f_1(x)$, $f_2(x) \dots$ oraz funkcji $F(x)$. Jeżeli jednak układ funkcji (U) posiada pewne własności, to zagadnienie upraszcza się o tyle, że teorja postę-

---

[1]) Zwracamy uwagę na różnicę oznaczeń, które teraz wprowadzamy, z temi, któremi posługiwaliśmy się wyżej (§§ 2 i 4). Tutaj $f_n(x)$ oznacza funkcję z u p e ł n i e o k r e ś l o n ą, gdy tam oznaczało t y p funkcji. Tym typem, t. j. tym, co było przedtym oznaczone przez $f_n(x)$, jest tutaj $a_n f_n(x)$, więc zawiera jedną tylko wielkość nieoznaczoną a_n.

pujących według nich szeregów jest w głównych zarysach taka sama, co i szeregów trygonometrycznych.

Jakież to są własności układu funkcji (U), które nadają szeregom według nich postępującym charakter szeregów trygonometrycznych? Poszukiwania takich własności naprowadziły na szereg nowych pojęć: własności dotyczących układu funkcji (a nie każdej funkcji z osobna). Jedną z ważniejszych jest t. zw. *ortogonalność*.

9. Układ (U) nazywamy ortogonalnym wtedy, gdy dla każdej pary wskaźników m i n, różnych między sobą, zachodzi związek

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x) dx = 0 \qquad (m \neq n). \tag{5}$$

Widocznym jest znaczenie tej własności; np. pozwala nam ona w razie jednostajnej zbieżności szeregu (4) zastosować do dowodu wzoru na jego spółczynniki metodę wyłuszczoną na początku § 6: mnożymy obie strony równości (4) przez $f_n(x)$, a po zcałkowaniu obu stron w granicach od a do b wszystkie wyrazy prawej strony, z wyjątkiem n-ego, znikną; przez co otrzymamy wzory zupełnie analogiczne do wzorów (2):

$$a_n = \frac{1}{\int_a^b (f_n(x))^2 dx} \int_a^b F(x) f_n(x) dx. \tag{2 a}$$

Są to *(uogólnione) spółczynniki* FOURIERA *względem układu* (U). (Jeśli dla $m = n$ całka po lewej stronie (5) jest równą 1, to układ (U) nazywamy *normalnym;* wtedy znika mianownik we wzorze (2a)).

Skąd jednak nazwa »ortogonalność«? Co wspólnego ma wzór (5) z prostopadłością? Odpowiedź na to pytanie rzuci nowe światło na nasz przedmiot, wiążąc go w sposób nieoczekiwany z dziedziną gieometrji analitycznej i algiebry.

Przypomnijmy sobie warunek, aby dwie proste w przestrzeni dwuwymiarowej, łączące z punktem (0,0) odpowiednio punkty (a_1, a_2) i (b_1, b_2) były wzajem prostopadłe. Równania tych prostych są:

$$a_2 x_1 - a_1 x_2 = 0,$$
$$b_2 x_1 - b_1 x_2 = 0.$$

Warunkiem ich prostopadłości jest, aby

$$a_2 b_2 + (-a_1)(-b_1) = 0, \text{ t. j. aby}$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Dla przestrzeni n-wymiarowej [1]) analogiczny wzór — warunek na prostopadłość dwu prostych przechodzących przez początek spółrzędnych (0, 0 .... 0) i odpowiednio jedna przez punkt $(a_1, a_2 \ldots\ldots a_n)$, a druga przez punkt $(b_1, b_2 \ldots b_n)$ — napisany w skróconej formie za pomocą znaku Σ, ma kształt:

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_k b_k = 0. \tag{5 a}$$

W przestrzeni o nieskończonej ilości wymiarów analogicznym wzorem będzie [2]):

$$\int_a^b a_x b_x dx = 0,$$

gdzie a_x i b_x są funkcjami x w przedziale od a do b; oznaczając je w zwykły sposób przez $F(x)$ i $G(x)$, otrzymamy wyżej podany wzór (5).

Uważajmy funkcje, posiadające spółczynniki Fouriera względem układu (U), t. j. określone wzorem (2 a), jako *punkty* przestrzeni *funkcyjnej* o nieskończonej (przeliczalnej [3])) ilości wymiarów; zaś odpowiadający każdej funkcji nieskończony ciąg spółczynników: $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ — za jej spółrzędne [4]).

---

[1]) Por. rozdz.: Gieom. anal., str. 149 i Gieom. synt., str. 163.

[2]) Por. Równ. całkowe, str. 307—308, o sposobie, w jaki przytym mamy przejść do granicy dla n nieskończenie wzrastającego. Tam wprawdzie otrzymaliśmy całkę Riemanna, a tu mówimy o calce Lebesgue'a lecz wiemy, że całki te, o ile istnieją, są sobie równe.

[3]) Por. Teorja mnogości, str. 216.

[4]) Uważając spółczynniki rozwinięcia za spółrzędne funkcji, warunek prostopadłości (5 a) przejść powinien nie we wzór (5), lecz we wzór:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n b_n = 0,$$

gdzie oznaczamy przez b_n spółczynniki rozwinięcia funkcji $G(x)$. Ponieważ

Spółrzędnemi funkcji $f_n(x)$ będą oczywiście same zera, z wyjątkiem a_m, które równa się 1. Znaczy to, że »punkty« $f_1(x)$, $f_2(x)$ i t. d. leżą na osiach spółrzędnych. Lecz proste, łączące odpowiednio początek spółrzędnych z »punktami« $f_m(x)$ i $f_n(x)$, są, według wzoru (5), wzajemnie prostopadłe.

Ortogonalność więc układu (U) tłumaczy się w tym gieometrycznym języku przez ortogonalność układu osi spółrzędnych.

Ciąg potęg 1, x, x^2,.... x^n,.... nie jest układem ortogonalnym i to nam już objaśnia, dlaczego szeregi potęgowe posiadają inne własności, niż szeregi trygonometryczne i analogiczne.

10. Rozpatrzmy jeszcze jedno pojęcie, stosujące się do ciągu funkcji, a grające ważniejszą jeszcze rolę od poprzedniego. Jest nim pojęcie *zupełności* ciągu.

Ciąg (U) nazywamy *zupełnym*, gdy zachodzenie równości

$$\int_a^b g(x) f_n(x) dx = 0 \qquad (n = 1, 2 \ldots), \tag{6}$$

dla każdego n, gdzie $g(x)$ oznacza funkcję ciągłą, nierówną żadnej z funkcji $f_n(x)$, pociąga za sobą równość

$$g(x) = 0$$

w całym przedziale (a, b).

Innemi słowy — zważywszy, że równości (6) wyrażają ortogonalność funkcji $g(x)$ do wszystkich $f_n(x)$ — możemy powiedzieć: ciąg jest zupełny, gdy nie istnieje poza nim żadna funkcja ciągła, ortogonalna do wszystkich funkcji tego ciągu, prócz równej identycznie zeru w przedziale (a, b).

Jakie znaczenie gieometryczne ma to nowe pojęcie? Rozpatrzmy znów najpierw przestrzeń o skończonej ilości wymiarów. Niezupełności odpowiadałoby tam istnienie prostej, pro-

---

jednak według wzoru (3) mamy:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n b_n = \int_a^b F(x) G(x) dx,$$

więc warunki te są równoważne.

stopadłej do wszystkich osi rozpatrywanego układu spółrzędnych. Istnienie takiej prostej wskazywałoby, żeśmy utworzyli układ spółrzędnych z za małej ilości osi (mniejszej, niż liczba wymiarów rozpatrywanej przestrzeni), a więc nie zdatny do wyznaczenia wszystkich punktów przestrzeni. Podobnie też rzecz się ma i w przestrzeni o nieskończonej ilości wymiarów: istnieje twierdzenie, że tylko wtedy każda funkcja może [1]) być rozwiniętą na szereg według ciągu (U), gdy ciąg ten jest zupełny.

Twierdzenie to i podana analogja tłumaczy dostatecznie ważność pojęcia zupełności: układem osi spółrzędnych nieprostokątnych można się posługiwać (choć to, naogół, mniej wygodnie), układem osi jednak w liczbie niedostatecznej — nigdy.

11. Po co jednak rozwijać funkcję na jakieś inne, nowe szeregi, kiedy (naogół) w tych samych warunkach można ją rozwinąć na szereg trygonometryczny? zapyta czytelnik.

Pytanie to będzie uzasadnione o tyle, o ile rozwinięcia na szeregi uważać będziemy jedynie za narzędzie badania, gdyż, jak to już wyżej zaznaczyliśmy, do ekonomji w badaniu należy jednorodność używanych środków. Ogólna jednak teorja rozwinięć ma znaczenie teoretyczne: z powyższego już szkicu widać, że otworzyła ona nowe horyzonty przez odkrycie analogji między szeregami a gieometrją analityczną.

Na tym jednak znaczenie tej teorji się nie kończy: ma ona i znaczenie praktyczne (w obrębie matematyki), t. j. jako narzędzie dalszych badań. Żeby to wykazać, wróćmy do teorji równań różniczkowych linjowych (mianowicie do zagadnień na wartości brzegowe; p. rozdz. Równ. różnicz. zwycz., § 7, str. 291). W teorji tej występował specjalny układ funkcji, odpowiadających danemu równaniu, mianowicie ciąg jego funkcji własnych. Tworzą one, po pomnożeniu każdej przez $\sqrt{F(x)}$, układ ortogonalny i zupełny i dowodzi się, że można według nich rozwijać funkcje. Pewne zagadnienia na wartości brzegowe z teorji równań różniczkowych cząstkowych można sprowadzić do wspomnianego typu równań różniczkowych zwyk-

[1]) Choć nie musi; p. Lalesco, l. c., str. 99 i 100 (twierdzenie Picarda).

łych — i przez to rozwiązać — za pomocą takiego właśnie rozwinięcia pewnej funkcji danej.

Stąd możliwość rozwinięcia funkcji według danego układu funkcji pozostaje w ścisłym związku z możliwością rozwiązywania równań różniczkowych, spełniających warunki brzegowe. Podobny stosunek łączy teorję ogólną rozwinięć na szeregi z teorją równań całkowych. To też od czasu, gdy zajęto się tą ostatnią, datuje się i nowy rozwój pierwszej (por. rozdz. Równ. całkowe, str. 310).

12. Ze specjalnych szeregów tego typu, prócz szeregów trygonometrycznych, zostały zbadane i mają zastosowanie (szczególniej w fizyce matematycznej) rozwinięcia według *funkcji* BESSLA czyli *cylindrycznych* (por. Równ. różn. zwycz., str. 290) i według *funkcji kulistych*. Funkcje kuliste, zwane inaczej *wielomianami* LEGENDRE'A, są to wielomiany:

$$X_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}.$$

Czynią one zadość pewnym specjalnym linjowym równaniom różniczkowym rzędu drugiego. Do tych rozwinięć stosuje się większość twierdzeń teorji ogólnej rozwinięć; posiadają one mniejsze znaczenie teoretyczne, a zastosowania ich w matematyce czystej rzadko się zdarzają, wyjąwszy w teorji równań różniczkowych cząstkowych.

---

13. Teorja szeregów FOURIERA należy do podstawowych i najbardziej potrzebnych części matematyki. Każdy matematyk musi je poznać o tyle, by móc się posługiwać niemi, jako narzędziem badań. Do tego wystarczą elementy tej teorji, które można znaleźć w obszerniejszych podręcznikach analizy (np. w I tomie Cours d'Analyse GOURSATA; p. wyżej, str. 248). Do rozumienia ich nie zawsze jest potrzebna znajomość poprzedzających części podręcznika; wystarczy znać dobrze: ogólną teorję funkcji zmiennej rzeczywistej, rachunek całkowy i ogólną teorję zbieżności szeregów.

Obszerniejszym podręcznikiem do studjów, mających na celu zastosowania, jest:

W. E. Byerly. An elementary Treatise on Fourier's Series and spherical, cylindrical, and ellipsoidal Harmonics with applications to problems in mathematical Physics. Boston, 1895; str. 287.

Dużo przykładów; na końcu wiadomości historyczne i bibljograficzne oraz tablice wartości omawianych funkcji.

Do dalszych studjów nad szeregami trygonometrycznemi polecamy książkę ze zbioru Borela:

H. Lebesgue. Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France. Paryż, Gauthier-Villars, 1906; str. 128. Cena fr. 3.50.

Treść: Wstęp: własności funkcji. I. Oznaczenie spółczynników szeregów trygometrycznych, przedstawiających funkcję daną. II. Teorja elementarna szeregów Fouriera. III. Szeregi Fouriera zbieżne. IV. Szeregi Fouriera jakiekolwiek. V. Szeregi trygometryczne jakiekolwiek.

Głównym przedmiotem tej monografji są zagadnienia rozwijalności danej funkcji na szereg trygonometryczny i przedstawiania przez dany szereg trygonometryczny funkcji (t. j. jego zbieżności lub sumowalności). Liczne dane historyczne. Pożądaną jest uprzednia znajomość monografji tego samego autora: Leçons sur l'intégration (z tegoż zbioru Borela; p. wyżej, str. 249). Ostrzegamy, że książka pełna jest błędów drukarskich we wzorach.

Z dziedziny tych samych zagadnień zbieżności szeregów trygonometrycznych i rozwijalności funkcji na nie, klasyczną jest rozprawa:

B. Riemann. Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Habilitationsschrift, 1854. Gesammelte Werke. Lipsk, Teubner; wyd. 1-e 1876; wyd. 2-ie 1892; stronic 39.

Ogólna teorja rozwinięć na szeregi nie została wyłożona dotychczas w żadnej monografji. Pewne wiadomości z tej dziedziny można znaleźć w książce (rozdz. IV):

T. Lalesco. Introduction à la théorie des équations intégrales. Paryż, A. Hermann, 1912; str. 152. Cena fr. 4. (Por. wyżej, str. 311).

Dużo prac z tego zakresu zawierają ostatnie tomy Mathematische Annalen, że wspomnimy tylko pracę E. Schmidta (t. 63). Z prac tego ostatniego por. także artykuł w Rend. Circ. mat. Palermo, 25 (1908), str. 53—77.

Ogólny pogląd na algiebrę form o nieskończenie wielu zmiennych znaleźć można w odczycie:

D. Hilbert. Wesen und Ziele einer Analysis der unendlich vielen unabhängigen Variabeln. Rend. Circ. mat. Palermo, 27 (1909), str. 59—74.

O przestrzeniach funkcyjnych (o nieskończonej ilości wymiarów) p. rozdział ostatni książki S. Pincherlego: Operazioni distributive (p. str. 235) oraz artykuły tegoż autora w wydaniu francuskim Encyklopedji n. mat., tom. II, vol. 5, fasc. 1; (p. Równ. funkcyjne, str. 303), nr. 16—20, str. 24—34.

Artykuły w Encyklopedji nauk matematycznych o rozwinięciach na szeregi (tom II_1, art. A 12 i tom II_3, art. C_3) jeszcze nie wyszły.

Natomiast istnieje książka o treści encyklopedycznej i historycznej:

H. Burkhardt. Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, t. X). Lipsk, Teubner, 1908; str. 1804. W dwuch półtomach; cena każdego m. 30.

ROWNANIA RÓŻNICZKOWE O POCHODNYCH CZĄSTKOWYCH.

NAPISAŁ

STANISŁAW ZAREMBA.

Treść: I. Wstęp ogólny: 1. Wymagane przygotowanie. 2. Pojęcie równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych, układy równań tego rodzaju i ich całki. 3. Ogólny pogląd na teorję równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. II. Porządek studjów i dzieła z zakresu teorji równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych: 4. Uwagi wstępne. 5. Pierwsze studja. 6. Równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego. 7. Równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych wyższych rzędów. 8. Równania całkowe 9. Wskazówki do oddawania się głębszym studjom w zakresie równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych.

I.

1. Do studjów w zakresie teorji równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych przystępować mogą tylko osoby obeznane już z rachunkiem różniczkowym i całkowym (przynajmniej w ogólnych zarysach), a posiadające nadto ogólnikowe przynajmniej wiadomości o teorji funkcji analitycznych i o teorji równań różniczkowych zwyczajnych. Powyższe wiadomości, o ile chodzi o elementarniejsze zagadnienia z teorji równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, mogą nie być rozległe, ale muszą być gruntowne; przy głębszych studjach z zakresu równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych zachodzi konieczność posiadania rozległych wiadomości o gałęziach analizy, wspomnianych wyżej.

2. Każde równanie, przedstawiające związek pomiędzy pochodnemi cząstkowemi jednej lub kilku funkcji dwu lub większej liczby zmiennych niezależnych a samemi temi zmiennemi niezależnemi oraz wspomnianemi ich funkcjami, zowie się *równaniem o pochodnych cząstkowych*. Dwa lub kilka równań o pochodnych cząstkowych stanowią to, co nazywamy *układem* takich równań. Jednakowoż w dalszym ciągu, mówiąc o układzie równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, nie będziemy wyłączać przypadku, w którym w rzeczywistości chodziłoby tylko o jedno równanie.

Oznaczmy przez:

$$x_1, x_2, \dots x_n \ (n > 1) \tag{1}$$

zmienne niezależne, które wchodzą wraz z pewnemi swemi funkcjami

$$z_1, z_2, \dots z_p \ (p \geqq 1) \tag{2}$$

i ich pochodnemi cząstkowemi do oznaczonego układu (U) równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych (nie wyłączając przypadku, w którymby układ (U) obejmował jedno tylko równanie). Jeżeli wskutek podstawienia pewnych funkcji

$$f_1(x_1, x_1, \dots x_n), f_2(x_1, x_2, \dots x_n) \dots f_p(x_1, x_2, \dots x_n) \tag{3}$$

zmiennych (1) odpowiednio zamiast symbolów (2) do równań układu (U) uzyskujemy równości, które zachodzą dla każdego układu wartości zmiennych (1), należącego do wnętrza oznaczonej dziedziny (D), to ten stan rzeczy wyrażamy, orzekając, iż układ funkcji (3) przedstawia w obrębie dziedziny (D) całkę układu (U) równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. Jeżeli naprzykład układ (U) obejmuje jedynie równanie następujące:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial x_2} = 0, \tag{4}$$

to funkcja

$$x_2 - x_1$$

przedstawia całkę powyższego równania; funkcja

$$(x_2 - x_1)^n,$$

gdzie n oznacza jakąkolwiek liczbę stałą, przedstawia drugą całkę tegoż równania; wogóle jeżeli oznaczymy przez $f(s)$ jakąkolwiek funkcję, byle ona posiadała w oznaczonym przedziale (a, b), $(a < b)$ oznaczoną pochodną, to funkcja

$$f(x_2 - x_1) \tag{5}$$

przedstawia całkę równania (4) w obrębie dziedziny, którą określić możemy nierównościami następującemi:

$$a < x_2 - x_1 < b, \tag{6}$$

albowiem mamy

$$\frac{\partial f(x_2 - x_1)}{\partial x_1} = - f'(x_2 - x_1)$$

$$\frac{\partial f(x_2 - x_1)}{\partial x_2} = f'(x_2 - x_1),$$

skąd wynika, że równość:

$$\frac{\partial f(x_2 - x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_2 - x_1)}{\partial x_2} = 0,$$

na którą przechodzi równość (4) po podstawieniu funkcji (5) zamiast symbolu z do tej równości, rzeczywiście zachodzi przy każdym spełniającym nierówności (6) układzie wartości zmiennych x_1 i x_2.

Przy zachowaniu znaczenia nadanego wyżej symbolom (1), (2) i (U) *rzędem* oznaczonego równania (R) układu (U) nazywamy rząd pochodnej cząstkowej rzędu najwyższego, jaka wchodzi do równania (R), a *rzędem układu* (U) rząd tego z równań wspomnianego układu, którego rząd nie jest mniejszy od rzędu żadnego równania rozważanego układu. Np. równanie (4) jest rzędu pierwszego, a układ równań, obejmujący to tylko równanie, jest również rzędu pierwszego.

3. Najważniejsze zagadnienie z teorji równań o pochodnych cząstkowych polega na wyznaczaniu całek tych równań czyli na ich całkowaniu, lecz to zagadnienie ma bardzo wiele stron rozmaitych. Główna przyczyna wielostronności zagadnienia całkowania równań o pochodnych cząstkowych polega na tym. że warunek, aby pewna funkcja była całką oznaczonego równania o pochodnych cząstkowych, czyli sprawdzała to równanie, pozostawia jeszcze wiele nieokreśloności co do owej funkcji.

W paragrafie poprzedzającym stwierdziliśmy np., że dowolna byle posiadająca pochodną, funkcja różnicy

$$x_2 - x_1$$

jest całką następującego równania o pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial x_2} = 0;$$

żeby zatym określić w zupełności funkcję, będącą całką pewnego równania o pochodnych cząstkowych, koniecznym jest oznaczyć pewne warunki dodatkowe, którym rozważana funkcja ma czynić zadość. Otóż, zależnie od natury tych warunków dodatkowych, zagadnienie całkowania rozważanego równania przybiera rozmaite postaci i może być mniej lub więcej trudnym do rozwiązania.

W rzeczywistości istnieje jeszcze inny powód wielostronności zagadnienia całkowania równań o pochodnych cząstkowych. Gdy chodzi o wyznaczenie takiej całki z pewnego równania o pochodnych cząstkowych, która czyni zadość warunkom dodatkowym, określającym ją w zupełności, to możemy tylko w przypadkach wyjątkowo prostych wyznaczyć funkcję z, w sposób tak zupełny, żebyśmy mogli odpowiedzieć na wszystkie ważniejsze pytania, jakie mogą być postawione co do tej całki. Pospolicie zaś, możemy tylko całkę z wyznaczyć w tej mierze, iż na niektóre tylko pytania o niej możemy odpowiedzieć. Wobec tego zagadnienie całkowania oznaczonych równań o pochodnych cząstkowych przybiera różne postaci, zależnie od tego, jakie mianowicie są pytania co do całek, na które pragniemy uzyskać odpowiedź. Naprzykład, zagadnienie omawiane będzie miało inny charakter w przypadku, kiedy chodzi o wyznaczenie liczbowych wartości całki, inny zaś w przypadku, kiedy pragniemy dowiedzieć się o ogólnym charakterze funkcji przedstawiających tę całkę.

A priori możemy nieograniczenie urozmaicać zagadnienie całkowania równań o pochodnych cząstkowych, nawet w przypadku, kiedy chodzi o jedno równanie zupełnie oznaczone, ale postępowalibyśmy w sposób bardzo niefilozoficzny, gdybyśmy nie kierowali się pewnemi ogólnemi zasadami przy stawianiu sobie zadań na całkowanie równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. Wspomniane zasady ogólne wypływają najnaturalniej ze stosunku, w jakim znajduje się teorja równań o pochodnych cząstkowych do innych gałęzi matematyki, a przedewszystkim do nauk przyrodniczych.

Różne zagadnienia z zakresu gieometrji i z zakresu fizyki mogą być sprowadzone do pewnych zadań na całkowanie równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. Oczywiście zadania tej właśnie kategorji z teorji równań o pochodnych cząstkowych winny podlegać przedewszystkim naszym badaniom. Zadania takie są wogóle typu następującego:

Wyznaczyć funkcje

$$u_1, u_2, \ldots u_p$$

zmiennych

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

w taki sposób, żeby wewnątrz oznaczonej dziedziny (D), danej bezpośrednio albo określonej w sposób mniej lub więcej pośredni, te funkcje sprawdzały oznaczony układ (U) równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych i żeby nadto na brzegu dziedziny (D) funkcje te czyniły zadość oznaczonemu układowi warunków (G).

Zadania tego typu zowią się *zadaniami na wartości brzegowe* (po niemiecku: *Randwertaufgaben*).

Żeby podać choć jeden przykład zadania na wartości brzegowe, uważajmy zagadnienie drgań płaskich, poprzecznych struny napiętej. Zwracając się do przypadku, kiedy struna jest dostatecznie cienka, aby uważaną być mogła za linję gieometryczną, oznaczmy przez O i A końce struny i przyjmijmy w płaszczyźnie drgań struny układ spółrzędnych prostokątnych x, y w ten sposob, żeby punkt O był początkiem spółrzędnych, a punkt A położony był na osi odciętych Ox i miał odciętą dodatnią l. Przy tych warunkach rzędna y jakiegokolwiek punktu M struny będzie pewną funkcją $f(x, t)$ odciętej x tego punktu i zmiennej t, określającej chwilę, w której rozważamy spółrzędne punktu M. Zagadnienie, stanowiące przedmiot naszych dociekań, polega oczywiście na wyznaczeniu funkcji $f(x, t)$. Jeżeli oznaczymy przez t_0 chwilę, w której struna została wprowadzona w ruch i przypomnimy sobie, że długość struny oznaczyliśmy przez l, to łatwo spostrzeżemy, że funkcję $f(x, t)$ należy wyznaczyć w obrębie dziedziny, którą określić możemy nierównościami następującemi:

$$(1) \qquad \begin{gathered} t \geqq t_0 \\ 0 \leqq x \leqq l. \end{gathered}$$

Mechanika poucza nas, że w razie drgań dostatecznie małych i jednorodności struny, możemy przyjąć, iż wewnątrz powyższej dziedziny funkcja $f(x, t)$ sprawdza równanie

$$(2) \qquad a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie a oznacza liczbę stałą. Z drugiej strony, ponieważ końce struny są nieruchome, przeto mamy:

$$(3) \qquad f(0, t) = f(l, t) = 0$$

przy wszystkich wartościach na t, byle one sprawdzały związek

$$t \geqq t_0.$$

Wreszcie, ponieważ w chwili $t = t_0$ kształt struny i prędkości jej punktów uważać możemy za dane, przeto mamy:

$$(4) \qquad \begin{cases} f(x, t_0) = \varphi(x) \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)_{t = t_0} = \psi(x) \end{cases} \qquad 0 < x < l$$

gdzie $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są to funkcje dane, określone wewnątrz przedziału $(0, l)$.

Okazuje się, że powyższe warunki określają w zupełności funkcję $f(x, t)$. Zatym teorja małych drgań płaskich struny jednorodnej napiętej sprowadza się do wyznaczenia takiej całki $f(x, t)$ równania (2), która sprawdza to równanie wewnątrz dziedziny (1) i która na brzegu tej dziedziny czyni zadość warunkom (3) i (4).

Zupełne rozwiązywanie zagadnień na wartości brzegowe połączone jest najczęściej z trudnościami, których obecnie nie umiemy przezwyciężyć. Z tego powodu rozważamy nierównie prostsze zagadnienie, które stosownie możnaby nazwać *zagadnieniem na wartości lokalne.* Możemy je przedstawić w sposób następujący: zbadać funkcje

$$z_1, z_2, \ldots z_p$$

zmiennych niezależnych

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

w założeniu, że w obrębie dziedziny, określonej nierównościami postaci

$$|x_i - a_i| < \delta, \ (i = 1, 2, \ldots n),$$

gdzie symbole

$$a_1, a_2, \ldots a_n$$

oznaczają liczby stałe, a liczba δ jakkolwiek małą, byle od zera większą, liczbę rzeczywistą, funkcje

$$z_1, z_2, \ldots z_p$$

sprawdzają pewien układ (U) równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych.

Badanie zagadnienia na wartości lokalne należy uważać za krok przygotowawczy do badania zagadnienia na wartości brzegowe, ale droga od pierwszego do drugiego jest długa i ciężka.

Wobec tego, aż do ostatniej ćwierci wieku XIX-go teorja równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rozgałęziała się na dwa działy, które nie miały prawie żadnej ze sobą styczności.

W jednym z nich badano pewne szczególniej proste, napotykane w fizyce, zagadnienia na wartości brzegowe, a w drugim zagadnienia na wartości lokalne. Dopiero począwszy od ostatnich lat wieku XIX-go zaczęły powstawać kolejno prace, które doprowadziły do matematycznego ugruntowania pojęcia fali i do wysnucia z teorji zagadnienia na wartości lokalne racjonalnej klasyfikacji typów równań o pochodnych cząstkowych, napotykanych w fizyce, i odpowiednich zagadnień na wartości brzegowe. Ale na tym nie kończy się postęp, dokonany w teorji równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych podczas ostatniego trzydziestolecia. W tymże okresie czasu rozwinęły się różne ogólne metody do rozwiązywania zagadnień na wartości brzegowe w całych klasach przypadków, a nadto powstała teorja pewnej klasy równań funkcyjnych, zwanych *równaniami całkowemi*, która oddała nieocenione usługi teorji zagadnień na wartości brzegowe.

Ostatecznie możemy śmiało powiedzieć, że teorja równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych doznała prawdziwego przewrotu w ciągu ostatnich lat trzydziestu i w dobie obecnej jeszcze nie przybrała postaci teorji ostatecznej. Winniśmy jednak nadmienić, że wspomniany przewrót obejmuje tylko równania o pochodnych cząstkowych rzędu drugiego i rzędów wyższych, gdyż teorja równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego ukształtowała się w jedną całość jeszcze przed końcem wieku 19-go.

Żeby uzupełnić powyższy ogólny szkic teorji równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, winniśmy jeszcze parę słów powiedzieć o pewnym kierunku badań z zakresu teorji tych równań, który w dobie obecnej ma już tylko zupełnie drugorzędne znaczenie, ale pominięty być nie może, gdyż najwcześniej powstał w nauce i doprowadził do poprawnego postawienia zagadnienia na wartości lokalne.

Celem badań, które mamy na myśli, było wyznaczenie *całek ogólnych* równań o pochodnych cząstkowych, rozumiejąc przez wyrażenie »całka ogólna oznaczonego układu (U) równań o pochodnych cząstkowych«, układ wzorów zdolnych przedstawić każdą szczególną całkę układu (U) w całej rozciągłości dziedziny, w której ta całka ma być rozważana. Są przypadki szczególne, w których pojęcie całki ogólnej występuje bardzo jasno i z konieczności zwraca naszą uwagę. Rozpatrzmy naprzykład równanie następujące:

(1)
$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0,$$

gdzie z oznacza funkcję n zmiennych

$$x_1,\ x_2, \ldots x_n.$$

Równanie powyższe wyraża, że wartość funkcji z jest niezależna od zmiennej x_1. Zatym na funkcję z mamy niezawodnie ogólny wzór następujący:

$$z = f(x_2, x_3 \ldots x_n), \tag{2}$$

gdzie symbol $f(x_2, x_3 \ldots x_n)$ oznacza funkcję $n-1$ zmiennych

$$x_2, x_3, \ldots x_n. \tag{3}$$

Jeżeli funkcja z podlega jedynie temu tylko warunkowi, aby sprawdzała równanie (1), to funkcja $f(x_2, x_3 \ldots x_n)$ jest zupełnie dowolna. Wobec tego orzekamy, że wzór (2), gdzie $f(x_2, x_3 \ldots x_n)$ jest funkcją dowolną zmiennych (3), przedstawia całkę ogólną równania (1).

Również łatwo stwierdzamy, że na całkę ogólną równania

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = 0,$$

gdzie z oznacza znowu funkcję n zmiennych

$$x_1, x_2, \ldots x_n,$$

mamy wzór następujący:

$$z = \varphi(x_2, x_3 \ldots x_n) . x_1 + f(x_2, x_3 \ldots x_n),$$

gdzie $\varphi(x_2, x_3 \ldots x_n)$ i $f(x_2, x_3, \ldots x_n)$

są dwie funkcje dowolne zmiennych (3).

Moglibyśmy łatwo podać jeszcze wiele innych przykładów analogicznych. Otóż przykłady tego rodzaju zwróciły na siebie uwagę w najpierwszym okresie rozwoju teorji równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, a ponieważ nie wątpiono o możliwości zagadnienia wyznaczenia całki ogólnej w powyższym znaczeniu i sądzono, z drugiej strony, że, po wyznaczeniu tak rozumianej całki ogólnej oznaczonego równania o pochodnych cząstkowych, już łatwo byłoby rozwiązać każde zagadnienie na wartości brzegowe, odnoszące się do rozważanego równania, przeto czyniono wiele wysiłków, ażeby, dla ważniejszych przynajmniej równań różniczkowych, wyznaczyć całki ogólne w znaczeniu powyższym.

Otóż dalsze badania doprowadziły do wyników następujących:

1) Powyższa definicja całki ogólnej zbyt jest ogólna, aby mogła stanowić podstawę do ogólnej teorji równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych; zamiast tej definicji należy przyjąć inną, mniej ogólną. Stwierdzenie tych faktów doprowadziło do rozważania zagadnienia na wartości lokalne i do teorji tak zwanych *całek osobliwych.*

2) Nawet w przypadkach, kiedy całka ogólna oznaczonego równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych w znaczeniu określonym wyżej, jest nam znana, nie zawsze możemy z niej skorzystać do rozwiązywania tych zagadnień na wartości brzegowe, o które nam chodzi.

Ostatecznie w dobie obecnej zagadnienie wyznaczenia całek ogólnych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych w znaczeniu określonym wyżej zasługuje na bliższą rozwagę tylko w pewnych wyjątkowych przypadkach.

II.

4. Na podstawie szkicu, podanego w rozdziale poprzedzającym, możemy z góry powiedzieć, że teorja równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych znajduje się obecnie w stadjum zbyt szybkiego i wielostronnego rozwoju, ażeby mogło istnieć dzieło, w którymby ta teorja wyłożona była z należytą wielostronnością, w sposób odpowiadający spółczesnemu stanowi nauki. Wobec tego czytelnik będzie musiał posiłkować się znaczniejszą ilością dzieł i musi być przygotowany na to, iż pojęcia, zdobyte przy studjowaniu pewnych dzieł, przez nas wskazanych, wypadnie uzupełnić, a nawet zmodyfikować przy studjowaniu innych.

5. Przedewszystkim koniecznym jest, żeby czytelnik zapoznał się w krótkości, ogólnikowo z teorją równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. Takie ogólnikowe wiadomości znajdują się zazwyczaj w obszerniejszych dziełach o rachunku nieskończonostkowym. Czytelnik mógłby te wiadomości zaczerpnąć z następujących dzieł polskich:

Wł. Zajączkowski. Wykład nauki o równaniach różniczkowych. Wyd. Tow. N. ścisłych w Paryżu. Paryż, 1877; str. XXIV+904. Cena fr. 25. (Teorję równ. o poch. cząstk. zawiera cz. IV, str. 547—852).

S. Kępiński. Podręcznik równań różniczkowych. Część II, Lwów, Biblioteka politechniczna, 1907; str. 200. Cena kor. 6.

Winniśmy dodać, że drukuje się obecnie t. III drugiego wydania dzieła następującego:

É. Goursat. Cours d'Analyse mathématique. Paryż, Gauthier-Villars. (Ukazała się połowa zeszytu 1).

Wspomniany tom powyższego dzieła poświęcony jest ogólnej teorji równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, a nazwisko autora jest dostateczną rękojmią, abyśmy mogli śmiało polecić czytelnikowi to dzieło.

6. Zaznaczyliśmy w rozdziale poprzedzającym, że już w wieku XIX-tym teorja równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu 1-go przybrała charakter teorji ostatecznej. Dzięki tej okoliczności istnieją wyborne dzieła, z których można poznać gruntownie tę teorję, ale w języku polskim dzieła takiego nie posiadamy. Musimy więc z konieczności odesłać czytelnika do prac obcych, a mianowicie następujących:

É. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paryż, A. Hermann, 1891; str. 354. Cena fr. 14.

Przekład niemiecki:

É. Goursat. Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Bearbeitet von C. Bourlet. Autorisierte deutsche Ausgabe von H. Maser. Mit Begleitwort von S. Lie. Lipsk, Teubner, 1893; str. XII+416. Cena m. 10.

E. von Weber. Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Lipsk, Teubner, 1900; str. XI+622. Cena m. 24.

S. Lie und G. Scheffers. Geometrie der Berührungstransformationen. T. I. Lipsk, Teubner, 1896; str. XII+694. Cena m. 24.

Prócz powyższych dzieł gorąco polecamy następującą monografję, napisaną po mistrzowsku:

Gaston Darboux. Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Mémoires, présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France. T. XXVII, Nr. 2; str. 243.

Winniśmy zaznaczyć, że głębsze zaznajomienie się z teorją równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego, zbędne przy studjowaniu dawniejszych dzieł (do końca wieku XIX-go) z zakresu zagadnień na wartości brzegowe, napotykanych w fizyce, koniecznym jest do rozumienia pewnych podstawowych prac z tegoż zakresu, o których będzie mowa niżej, a które ogłoszone zostały w ciągu dziesięciolecia ostatniego. Prócz tego teorja równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego ma wielkie znaczenie z jednej strony dla gieometrji, a z drugiej dla mechaniki, ze względu na całkowanie równań dynamiki (zob. np. C. G. J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, wyd. przez A. Clebscha. Berlin, 1866).

7. Przystępując do udzielania rad, dotyczących zaznajamiania się z teorją równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu drugiego i wyższych rzędów, zaznaczamy przedewszystkim, że ten dział jest wybitnie nacechowany właściwościami nauki, która znajduje się jeszcze w stadjum powstawania i dlatego składa się z części, które niekiedy znajdują się ze sobą w bardzo odległym związku.

Czytelnika, który pragnąłby głębiej obeznać się z teorją zagadnienia na wartości lokalne i zagadnieniem wyznaczania całek ogólnych, odsyłamy do dzieł następujących:

É. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. 2 t. Paryż, A. Hermann, 1896, 1898; str. XXII + 478 i VIII + 596.

A. R. Forsyth. Theory of Differential Equations.

Part IV, Vol. V i VI. Cambridge, 1906, University Press; str. XX+478 i XIII+596; cena szyl. 25.

Z powyższych dzieł dowie się czytelnik o wszystkich ważniejszych wynikach, uzyskanych aż do chwili wyjścia tych dzieł, w zakresie zagadnienia na wartości lokalne i teorji całek ogólnych.

Udzielenie porad do zaznajomienia się ze współczesnym stanem nauki w zakresie zagadnień na wartości brzegowe jest o wiele trudniejsze, gdyż niema podręczników nowszych, w których zagadnienia na wartości brzegowe byłyby wyłożone z należytą wielostronnością i w sposób dostatecznie wyczerpujący.

Sądzimy, że najstosowniej byłoby, żeby czytelnik najpierw ogólnikowo rozejrzał się w obecnym stanie badań z zakresu zagadnienia na wartości brzegowe. W tym celu mógłby z korzyścią przeczytać pracę następującą:

S. Zaremba. Pogląd na historyę rozwoju i stan obecny teoryi równań fizyki w czterech odczytach. Odbitka z Wiadomości matematycznych, t. XIII; 1909; str. 77. Cena kop. 50.

W każdym razie doradzalibyśmy czytelnikowi, żeby, przed przystąpieniem do studjowania najnowszych badań z zakresu zagadnienia na wartości brzegowe, poznał wyniki dawniejszych prac. W tym celu polecamy mu dzieła następujące:

B. Riemann. Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen, herausgegeben von K. Hattendorf. Brunświk, Vieweg & Syn, 1882; str. VII+325. Cena m. 8.

H. Weber. Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, nach Riemanns Vorlesungen bearbeitet. Brunświk, Vieweg & Syn. Tom I str. XVIII+526. 1910. Cena m. 12. Tom II str. XIV+575. 1912. Cena m. 15.

G. Kirchhoff. Vorlesungen über mathematische Physik. Tom I. Mechanik. Lipsk, Teubner, wydanie 4, 1897; str. X+464. Cena m. 13.

Powyższe dzieła mogą być studjowane przez czytelnika, który posiada skromne zaledwo wiadomości z rachunku nieskończonostkowego, a metody, które pozna przy studjowaniu tych dzieł, nie utraciły w niczym wartości, którą miały pierwotnie.

Wymienimy obecnie kilka wybitniejszych podręczników nowszych z epoki najszybszego rozwijania się teorji zagadnienia na wartości brzegowe. W dziełach tych znajdzie czytelnik z jednej strony bardzo ścisłe opracowania metod starszych, a z drugiej — zaczątki metod najnowszych.

H. Poincaré. Théorie du potentiel Newtonien. Paryż, G. Carré et C. Naud. 1899; str. 366. Cena fr. 14.

H. Poincaré. Théorie analytique de la propagation de la chaleur. Paryż, G. Carré et C. Naud, 1895; str. 316. Cena fr. 10.

H. Poincaré. Théorie mathématique de la lumière. Paryż, G. Carré et C. Naud, 1892; str. VI+310. Cena fr. 10.

A. Korn. Lehrbuch der Potentialtheorie. 2 tomy. Berlin, Duemmler, 1899, 1901; str. XIV+415 i X+366. Cena m. 9+9.

W dziełach wymienionych powyżej nie napotykamy jeszcze systematycznego zastosowania teorji zagadnień na wartości lokalne do teorji zagadnień na wartości brzegowe oraz do klasyfikacji równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych i do matematycznego ugruntowania pojęcia fali. Tym przedmiotom pierwszorzędnej wagi poświęcone jest dzieło następujące:

J. Hadamard. Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Paryż, A. Hermann, 1903; str. IX+375. Cena fr. 18.

Studjowanie dzieła tego wymaga nieco głębszego i wielostronniejszego wykształcenia w zakresie analizy matematycznej i gieometrji, niż studjowanie dzieł wymienionych poprzednio; w szczególności do studjowania tego dzieła koniecznym jest poprzednie poznanie teorji ogólnej równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego.

Bibljografję przedmiotu znaleźć można przy artykułach Encykl. n. matem., a mianowicie:

II A 7 b. H. Burkhardt i W. F. Meyer. Potentialtheorie (Theorie der Laplace-Poisson'schen Differentialgleichung). Tom II1, zeszyt 4; 1900; str. 40. Cena zesz. m. 4.80.

II A 7 c. A. SOMMERFELD. Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. T. II1, zesz. 4 i 5; str. 67. Cena zesz. 5-go m. 6.

II A 5. E. v. WEBER. Partielle Differentialgleichungen. T. II1, zesz. $^2/_3$, 1900; str. 106. Cena zesz. m. 7.50.

8. W końcu roku 1900 szwedzki matematyk FREDHOLM stworzył teorję pewnej klasy równań funkcyjnych, znanych pod nazwą równań całkowych, albo równań funkcyjnych FREDHOLMA. Równania funkcyjne FREDHOLMA nie należą bezpośrednio do teorji równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, ale twierdzenie podstawowe, odkryte przez FREDHOLMA, wyświadcza nieocenione usługi teorji równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, przedewszystkim, o ile chodzi o zagadnienia na wartości brzegowe.

Po bliższe szczegóły i literaturę odsyłamy czytelników do rozdziału p. t. Równania całkowe.

9. Czytelnik, który pragnąłby głębiej poznać teorję równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, naturalnie nie będzie mógł poprzestać na czytaniu dzieł wymienionych wyżej, lecz będzie musiał studjować rozprawy oryginalne. O tych rozprawach dowiedzieć się można częściowo z cytat w dziełach wymienionych w paragrafach poprzedzających, ale koniecznym będzie posiłkowanie się nadto wydawnictwami ogólnie informacyjnemi z zakresu matematyki, wymienionemi we Wstępie do Stopnia III i w § 8 rozdziału o teorji funkcji analitycznych w niniejszym Poradniku.

TEORJA GRUP PRZEKSZTAŁCEŃ.

NAPISAŁ

STANISŁAW ZAREMBA.

Treść: I. Wstęp: 1. Wymagane przygotowanie. 2. Pojęcie przekształcenia. 3. Iloczyny przekształceń. 4. Pojęcie grupy przekształceń. 5. Pochodzenie i znaczenie pojęcia grupy przekształceń. 6. Grupa ruchów euklidesowskich. 7. Ciągłe grupy przekształceń. II. Wskazówki dla zaznajomienia się z teorją grup. 8. Uwagi ogólne. 9. Wskazówki do ogólnego zaznajomienia się z teorją ciągłych grup przekształceń. 10. Dalsze studja.

I.

1. Przekonamy się niżej, że pojęcie *grupy* należy do tych zasadniczych pojęć matematycznych, które tkwią już w pewnych zagadnieniach natury bardzo elementarnej. Dzięki tej okoliczności możliwą byłoby rzeczą wyjaśnienie jądra pojęcia *grupy* i podanie niektórych zastosowań powyższego pojęcia w postaci przystępnej nawet dla osób, posiadających tylko podstawowe wiadomości z zakresu elementów matematyki. Poincaré wypowiedział nawet zdanie, które autorowi najzupełniej trafia do przekonania, żeby już w szkołach średnich korzystać ze wszystkich sposobności, aby uwydatnić pojęcie grupy.

Należy jednak zaznaczyć, że pojęcie grupy w ten sposób związane jest z wyższemi gałęziami matematyki, iż szersze zastosowania tego pojęcia mogą być zrozumiane tylko przez osoby, które poznały już w ogólnych zarysach gieometrję analityczną oraz zasady rachunku nieskończonostkowego z włączeniem twierdzeń podstawowych o istnieniu całek z teorji równań różniczkowych zwyczajnych i linjowych, rzędu pierwszego, równań różniczkowych cząstkowych. Ponad to konieczne są wiadomości podstawowe z teorji funkcji analitycznych dowolnej ilości zmiennych niezależnych. Nadmieniam jednak, że konieczne są te tylko twierdzenia o funkcjach analitycznych, które odnoszą się do zachowywania się tych funkcji w sąsiedztwie punktów regularnych; natomiast bliższe wiadomości z zakresu teorji punktów osobliwych są zbędne.

W dalszym ciągu założymy, że czytelnik posiada wiadomości powyższe.

2. Oznaczmy przez (Z) jakikolwiek zbiór przedmiotów i załóżmy, że, na podstawie pewnej umowy P, każdemu elementowi a zbioru (Z) (albo tylko pewnego podzbioru tego zbioru) odpowiada drugi oznaczony element a' tegoż zbioru. W takim razie mówimy, że umowa P określa oznaczone *przekształcenie* elementów zbioru (Z); orzekamy jednocześnie, że element a' jest wynikiem przekształcenia elementu a w sposób określony przez umowę P. Dla skrócenia zastępujemy zwykle wyrażenie »umowa określająca oznaczone przekształcenie« przez wyrażenie »oznaczone przekształcenie«. Wobec tego wyrażamy krótko rozważony przed chwilą związek pomiędzy elementami a i a', orzekając, iż przekształcenie P przemienia (albo przekształca) element a w element a'; to samo wyrażamy także mówiąc, że przekształcenie P prowadzi od elementu a zbioru (Z) do elementu a' tegoż zbioru. Jeżeli naprzykład zbiór (Z) jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, a $f(x)$ jest funkcją jednowartościową rzeczywistą zmiennej x, określoną dla wszystkich wartości rzeczywistych zmiennej, to możemy umówić się, że za liczbę, odpowiadającą dowolnie przyjętej liczbie rzeczywistej a uważamy liczbę a', określoną wzorem

$$a' = f(a);$$

w takim razie możemy powiedzieć, że powyższe równanie określa oznaczone przekształcenie liczb rzeczywistych.

Żeby podać jeszcze jeden przykład, uważajmy oznaczoną większą od jednostki liczbę całkowitą n i przyjmijmy za zbiór (Z) zbiór wszystkich permutacji liczb całkowitych $1, 2, 3, \ldots n$.

Jeżeli umówimy się, że uważać będziemy za permutację, odpowiadającą dowolnie przyjętej permutacji.

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$$

liczb

$$1, 2, 3 \ldots n$$

taką permutację

$$\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$$

tychże liczb, w której mamy

$$\beta_i = \alpha_i + 1$$

lub

$$\beta_i = 1,$$

zależnie od tego, czy mamy

$$\alpha_i < n,$$

czy też

$$\alpha_i = n,$$

to tym samym określimy pewne przekształcenie rozważonych permutacji czyli elementów zbioru (Z).

3. Uważajmy znowu pewien zbiór (Z) i załóżmy, żeśmy określili nie jedno tylko przekształcenie rozważanego zbioru, ale cały układ (U) takich przekształceń. Jeżeli teraz oznaczymy przez P_1 i P_2 dwa jakiekolwiek, byle do układu (U) należące przekształcenia, to te dwa przekształcenia posłużyć mogą do określenia nowego przekształcenia (S) zbioru (Z) przez to, że umówimy się, iż za wynik przekształcenia jakiegokolwiek elementu a zbioru (Z) przez przekształcenie S uważać będziemy ten element a'' zbioru (Z), do którego prowadzi przekształcenie P_2 od elementu a', uzyskanego znów przez przekształcenie elementu a przekształceniem P_1. Żeby wyrazić, iż przekształcenie S znajduje się w powyższym związku z przekształceniami P_1 i P_2, mówimy, iż przekształcenie S jest *iloczynem* przekształcenia P_1 przez przekształcenie P_2. To samo wyrażamy symbolicznie przez równość następującą:

$$S = P_1 . P_2.$$

Oznaczmy teraz przez n jakąkolwiek, ale od liczby 2 większą liczbę całkowitą i uważajmy n jakichkolwiek, byle do układu (U) należących przekształceń. Uszeregowawszy te przekształcenia w oznaczonym porządku, oznaczmy ogólnie przez P_i i-te przekształcenia w uzyskanym ciągu przekształceń, a następnie określmy przekształcenia:

$$S_2, S_3, \ldots S_n,$$

przez równości symboliczne

$$S_2 = P_1 . P_2$$

oraz

$$S_{k+1} = S_k . P_{k+1},$$

zaznaczając przy tym, że druga równość ma zachodzić przy każdej od liczby 2 nie mniejszej, a od liczby $n-1$ nie większej wartości wskaźnika k. Przy tych warunkach zowiemy przekształcenie S_n *iloczynem* ciągu przekształceń

$$P_1, P_2, \ldots P_n$$

i piszemy symbolicznie

$$S_n = P_1 . P_2 . P_3 \ldots . P_n.$$

Aby uniknąć wszelkiego rodzaju nieporozumień, zaznaczamy z naciskiem, że iloczyny przekształceń wogóle nie posiadają własności przemienności; łatwo możemy przekonać się o tym na przykładzie następującym: oznaczmy przez α_1, β_1, α_2, β_2 cztery liczby rzeczywiste i uważajmy dwa wzory:

(1) $$y = \alpha_1 x + \beta_1$$

oraz

(2) $$y = \alpha_2 x + \beta_2.$$

Każde z tych równań określa oznaczone przekształcenie zbioru liczb rzeczywistych. Jeżeli oznaczymy przez P_1 przekształcenie określone równaniem (1), a przez P_2 przekształcenie, określone równaniem (2), to przekształcenie jakim jest iloczyn $P_1 . P_2$ przedstawić będziemy mogli przez wzór:

(3) $$y = \alpha_1 \alpha_2 x + \alpha_2 \beta_1 + \beta_2,$$

a przekształcenie $P_2 . P_1$ przez wzór

(4) $$y = \alpha_2 \alpha_1 x + \alpha_1 \beta_2 + \beta_1.$$

Otóż przekształcenia (3) i (4) będą od siebie zawsze odmienne, prócz przypadku szczególnego, kiedy stałe α_1, α_2, β_1 i β_2 sprawadzać będą związek:

$$\alpha_2\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1\beta_2 + \beta_1.$$

4. Uważajmy znowu pewien zbiór (Z) oraz pewien układ (U) przekształceń tego zbioru. Wogóle iloczyny przekształceń układu (U) stanowić będą przekształcenia, które już do układu (U) należeć n i e b ę d ą; jeżeli jednak k a ż d y iloczyn przekształceń układu (U) jest przekształceniem, które także n a l e ż y do układu (U), to ten stan rzeczy wyrażamy, orzekając, iż układ przekształceń (U) stanowi *grupę przekształceń* zbioru (Z) [1]. Jeżeli naprzykład oznaczymy przez (Z) zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, a przez (U) układ wszystkich przekształceń, z których każde określić możemy jako przekształcenie, przemieniające liczbę rzeczywistą x w inną liczbę rzeczywistą y, określoną wzorem

$$y = ax + b, \tag{1}$$

gdzie a i b są liczby rzeczywiste stałe dla rozważanego przekształcenia, to układ (U) oczywiście stanowić będzie oznaczoną grupę przekształceń. Gdybyśmy zaś do układu (U) zaliczali nie wszystkie przekształcenia wspomnianej postaci, a tylko niektóre, to układ (U) mógłby przestać stanowić grupę przekształceń.

5. Gdybyśmy pragnęli uwydatnić w całej pełni znaczenie grup przekształceń, to musielibyśmy wyłożyć główne teorje z tej gałęzi matematyki. Wobec tego możemy tylko pomyśleć o tym, żeby podać w tym kierunku niektóre wskazówki.

P o j ę c i e grupy wyrobiło się najpierw przy sposobności badań nad zagadnieniem algiebraicznego rozwiązania równań algiebraicznych. W tej dziedzinie zbiorem przedmiotów, ulegających przekształceniu, jest zbiór wszystkich permutacji tylu elementów, ile wynosi stopień n podanego równania, a przekształcenie, przemieniające jedną permutację w drugą, zowie się tu *podstawieniem*. Grupy podstawień występują już

[1] Czytelnik znajdzie ogólną definicję pojęcia grupy w artykule następującym: H. Burkhardt. Endliche discrete Gruppen. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. I, A. 6. Nr. 15, str. 217.

wyraźnie w badaniach Lagrange'a, Vandermonde'a, Abla (1802—1829), Cauchy'ego, a w pracach gienjalnego Francuza, Evariste'a Galois'a (1811—1832) znajdujemy już pojęcie grupy podstawień w postaci zupełnie wyodrębnionej wraz z zastosowaniami niezmiernie ważnemi.

Żeby przekonać czytelnika o wielkim znaczeniu naukowym teorji podstawień, wystarczy nadmienić, że dowód twierdzenia podstawowego, według którego ogólne równanie algiebraiczne stopnia n-tego nie jest, w razie nierówności

$$n > 4,$$

rozwiązalne algiebraicznie, polega w zupełności na teorji podstawień; dodajemy, iż wogóle *zagadnienie* wyznaczania przypadków szczególnych, w których równania algiebraiczne stopnia n ($n > 4$) są rozwiązalne algiebraiczne, może być badane tylko na podstawie teorji podstawień.

Mniej więcej około połowy XIX-go stulecia grupy przekształceń wystąpiły wyraźnie w zupełnie innej dziedzinie dociekań matematycznych, a mianowicie w gieometrji.

Badacze, którzy najpierw natrafili w gieometrji na pewne zagadnienia z teorji grup przekształceń i którzy nawet wiele z tych zagadnień rozwiązali, nie wyodrębnili jednak pojęcia grupy przekształceń i nie podejrzewali blizkiego pokrewieństwa napotkanych przez siebie pojęć z pojęciami, należącemi w algiebrze do teorji podstawień. Dopiero w drugiej połowie wieku XIX-go znakomity matematyk norweski Sophus Lie (1842—1899) poznał w całej pełni znaczenie pojęcia grup przekształceń, wyodrębnił to pojęcie i stworzył ogólną teorję grup przekształceń pewnej niezmiernie ważnej kategorji.

6. Sądzimy, że najłatwiej poinformujemy czytelnika o naturze dociekań, jakie mamy na myśli, rozpoczynając od pewnego szczególnego przykładu.

Przyjmijmy w przestrzeni pewien układ spółrzędnych prostokątnych (T_0) i oznaczmy przez (C) pewne ciało sztywne.

Jeżeli przeniesiemy ciało (C) z pewnego położenia P w pewne nowe położenie P', to wartości spółrzędnych jakiegokolwiek punktu A ciała (C) przejdą od pewnego układu wartości x, y, z, do pewnego drugiego układu wartości x', y', z'. Jakiemi funkcjami zmiennych x, y, z, będą zmienne x', y', z'? Żeby na to pytanie odpowiedzieć, wyobraźmy sobie pewien układ (T) spółrzędnych prostokątnych, sztywnie związany z ciałem (C), a przy tym tak dobrany, żeby ten układ zlewał się z układem (T_0) w razie gdy ciało (C) zajmuje położenie P.

Przeniósłszy ciało (C) w położenie P', nadamy tym samym pewne położenie układowi spółrzędnych (T). W tym położeniu układ (T) zleje się z pewnym układem spółrzędnych (T'), odmiennym od układu (T_0). W stosunku do układu (T') spółrzędne punktu A ciała (C) w położeniu P' mieć będą te wartości x, y, z, jakie one miały w stosunku do układu (T_0) w chwili, kiedy ciało (C) zajmowało położenie P.

Z drugiej znów strony, przypomniawszy sobie, żeśmy oznaczyli przez x', y', z' spółrzędne tego punktu ciała (C) w stosunku do układu (P_0), którego spółrzędne w stosunku do układu (T') są x, y, z, spostrzegamy, iż na podstawie elementów gieometrji analitycznej mamy:

$$
\text{(1)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_2 z + a \\
y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + b \\
z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c
\end{aligned}
\right.
$$

gdzie liczby α_i, β_i, γ_i, a, b i c zależą jedynie od względnego położenia układów (T_0) i (T'), spełniając przytym dobrze znane związki:

$$
\text{(2)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 = 1; \qquad \sum_{i=1}^{3} \beta_i \gamma_i = 0 \\
&\sum_{i=1}^{3} \beta_i^2 = 1; \qquad \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \alpha_i = 0 \\
&\sum_{i=1}^{3} \gamma_i^2 = 1; \qquad \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \beta_i = 0 \\
&\begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{vmatrix} = +1
\end{aligned}
\right.
$$

Równania (1) oczywiście stanowią rozwiązanie postawionego pytania.

Powiadam, że zarazem określiliśmy ubocznie pewną grupę przekształceń. Istotnie, oznaczmy przez (Z) zbiór wszystkich przedmiotów, z których każdy jest zespołem spółrzędnych pewnego punktu przestrzeni w stosunku do układu spółrzędnych (T_0) i uważajmy zbiór (U) wszystkich tych przekształceń elementów zbioru (Z), z których każde możemy przedstawić przez układ równań (1), nadając liczbom

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, a, b, c$$

pewien taki układ wartości, przy którym spełnione byłyby związki (2). Łatwo stwierdzić możemy, że zbiór przekształceń (U) stanowi pewną grupę przekształceń elementów zbioru (Z) (albo, jak się często mówi, punktów przestrzeni).

Istotnie, prócz położeń P i P' ciała (C), uważajmy jeszcze jakiekolwiek trzecie położenie P'' tegoż ciała i oznaczmy przez x'', y'', z'' spółrzędne w układzie (T_0) punktu A ciała (C), gdy ciału temu nadajemy położenie P''. Otóż z jednej strony zmienne x'', y'', z'' będą funkcjami zmiennych x, y, z, różniącemi się od funkcji, stanowiących prawe strony równań (1) tylko wartościami spółczynników i wyrazów wolnych, ale spółczynniki te będą oczywiście spełniać równości tegoż kształtu co równości (2).

Z drugiej znów strony, żeby wyrazić zmienne x'', y'', z'' w zależności od x, y, z, możemy najpierw wyznaczyć x'', y'', z'' w zależności od x', y', z', a następnie, do uzyskanych wzorów, podstawić wartości (1) na x', y', z'. Innemi słowy, stwierdzamy (co moglibyśmy potwierdzić łatwym rachunkiem), że iloczyn dwu jakichkolwiek przekształceń z układu (U) jest znowu jednym z przekształceń z tegoż układu.

Ponieważ zaś z tego powodu każdy iloczyn przekształceń, należących do układu (U), jest znowu przekształceniem, należącym do tegoż układu, przeto układ czyli zbiór przekształceń (U) stanowi grupę. Ta grupa zowie się *grupą ruchów euklidesowskich*, albo krócej *grupą euklidesowską*.

Jeżeli przystąpimy do badania, metodą gieometrji analitycznej, własności gieometrycznych ciała (C), to położenie tego ciała w stosunku do układu spółrzędnych będzie mogło wpływać na stopień komplikacji rachunków, ale na ostateczne wyniki pozostanie bez wpływu; wprawdzie uzyskane wyniki będą mogły pozornie zależeć od położenia ciała (C) względem układu spółrzędnych, ale ta zależność będzie tylko pozorna. Jeżeli naprzykład rozważać będziemy dwa punkty A i B ciała (C), to kwadrat ich odległości równać się będzie sumie kwadratów różnic jednoimiennych spółrzędnych i dla tego zależeć będzie pozornie od względnego położenia ciała (C) w stosunku do spółrzędnych; w rzeczywistości jednak wartość powyższej funkcji spółrzędnych punktów A i B bynajmniej zależeć nie będzie od względnego położenia ciała (C) i układu spółrzędnych. Ten fakt możemy oczywiście wyrazić w postaci następującej:

Jeżeli oznaczymy przez (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) dwa elementy zbioru (Z), a przez (x'_1, y'_1, z'_1) i (x'_2, y'_2, z'_2) wyniki przekształceń tych elementów przez jakiekolwiek przekształcenie grupy euklidesowskiej, to w każdym razie zachodzić będzie równość:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = (x'_1 - x'_2)^2 + \\ + (y_1 - y'_2)^2 + (z_1 - z'_2)^2.$$

Uważajmy teraz n elementów

$$(x_i, y_i, z_i) \qquad\qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

zbioru (Z) i oznaczmy ogólnie przez (x'_i, y'_i, z'_i) element, do którego prowadzi od elementu (x_i, y_i, z_i) oznaczone przekształcenie P grupy euklidesowskiej.

Jeżeli tedy pewna funkcja $3n$ zmiennych:

$$f(u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots u_n, v_n, w_n) \tag{3}$$

ma taką własność, iż bez względu na wybór przekształcenia P w grupie Euklidesowskiej, mamy zawsze

$$f(x_1, y_1, z_1 \dots x_n, y_n, z_n) = f(x'_1, y'_1, z'_1, \dots x'_n, y'_n, z'_n), \tag{4}$$

w takim razie wartość, jaką przybiera funkcja (3), gdy nadawszy ciału (C) określone położenie w stosunku do spółrzędnych, oznaczymy ogólnie przez

$$u_i, v_i, w_i$$

spółrzędne pewnego punktu A_i ciała (C), będzie oczywiście wyrażać pewną własność gieometryczną układu punktów

$$A_1, A_2 \ldots A_n.$$

Aby wyrazić, iż funkcja (3) ma własność, polegającą na istnieniu równości (4), mówimy, że funkcja (3) jest *niezmiennikiem* rozważanej grupy. Możemy więc powiedzieć, że każdemu niezmiennikowi grupy euklidesowskiej odpowiada pewna własność gieometryczna sztywnego układu punktów. W rzeczywistości uzupełniwszy jeszcze należycie pojęcie niezmiennika, można słusznie powiedzieć, że, odwrotnie, każdej własności gieometrycznej sztywnego układu punktów odpowiada pewien niezmiennik grupy ruchów euklidesowskich.

Ponieważ zaś ogół własności gieometrycznych sztywnych układów punktów stanowi to, co pospolicie nazywamy gieometrją metryczną czyli euklidesowską, przeto możemy słusznie powiedzieć, że teorja niezmienników omawianej grupy przedstawia zupełny obraz analityczny gieometrji euklidesowskiej.

7. Pojęcia, omawiane w ustępie poprzedzającym, dopuszczają daleko idące rozszerzenie. Uważajmy n zmiennych

$$x_1, x_2 \ldots x_n \tag{1}$$

oraz tyleż funkcji

$$f_i(x_1 \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{2}$$

tych zmiennych i przyjmijmy

$$y_i = f_i(x_1 \ldots x_n), \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{3}$$

zakładając przytym dla prostoty, że funkcje (2) określone są jako jednowartościowe funkcje zmiennych (1) dla wszystkich układów wartości tych zmiennych; czytelnik, jeżeli zechce, może sobie wyobrazić, że zmienne i funkcje, z któremi mamy do czynienia, są zawsze rzeczywiste[1]). Oznaczmy przez R_n zbiór wszyst-

---

[1]) W praktyce najczęściej zdarza się, że funkcje (2) określone są tylko w obrębie pewnej dziedziny i są funkcjami analitycznemi zmiennych zespolonych, ale kiedy chodzi o wytłumaczenie istoty ciągłej grupy przekształceń, to można bez żadnej szkody przyjąć założenia tekstu.

kich przedmiotów, z których każdy jest ciągiem tylu liczb, ile wynosi liczba całkowita n.

Umówmy się nadto, że wyrażenie *punkt rozciągłości* R_n uważać będziemy za mające to samo znaczenie co wyrażenie »ciąg liczb stanowiący jeden z elementów zbioru R_n«. Jeżeli tedy oznaczymy przez a_i wyraz rzędu i ciągu liczb, stanowiącego punkt rozciągłości R_n, to mówić będziemy, że liczba a_i jest spółrzędną i-tą rozważanego punktu. Jeżeli, po przyjęciu tych umów, uważać będziemy jakikolwiek układ n zmiennych, uszeregowanych w pewnym porządku, to każdy układ wartości tych zmiennych stanowić będzie oznaczony punkt rozciągłości R_n, mianowicie ten, którego spółrzędna i-ta $(i = 1, 2 \dots n)$ równać się będzie wartości, jaką ma zmienna i-ta w układzie rozważanym.

Przyjmijmy jeszcze umowę następującą: jeżeli symbole pewnych n zmiennych będziemy tworzyć w ten sposób, iż każdy z tych symbolów będziemy uzyskiwać, zaopatrując pewien oznaczony naprzód symbol we wskaźnik mający jedną z wartości

$$1, 2, 3, \dots n,$$

to wskaźnik, który wchodzi do symbolu którejkolwiek z rozważanych zmiennych, uważać będziemy za liczbę porządkową tej zmiennej. Na podstawie całego kompleksu powyższych umów oczywiście winniśmy powiedzieć, że wzory (3) określają pewne przekształcenie dla punktów rozciągłości R_n, a mianowicie przekształcenie, które przemienia punkt

$$x_1,\ x_2\ \dots .\ x_n$$

w punkt

$$y_1,\ y_2\ \dots .\ y_n,$$

określony wzorami (3).

Załóżmy teraz, że funkcje (2) zawierają jakiekolwiek elementy nieoznaczone, np. dowolne parametry, albo nawet funkcje w mniejszym lub większym stopniu nieoznaczone. W takim razie wzory (3) określać będą oczywiście nie jakieś oznaczone przekształcenie punktów rozciągłości R_n, ale pewien układ (U) przekształceń tej rozciągłości; przy tych warunkach każde przekształcenie układu (U) uzyskamy przez to, że w stosowny sposób usuniemy wszelką nieoznaczoność w kształcie funkcji (2).

Przykład, rozważany w paragrafie poprzedzającym, poucza nas, że może się zdarzyć, iż układ przekształceń (U) stanowić będzie grupę przekształceń rozciągłości R_n.

W dalszym ciągu założymy, że funkcje (2) są w pewnej mierze nieoznaczone, a układ przekształceń rozciągłości R_n, określony przez wzory (3), jest układem, stanowiącym pewną grupę przekształceń (G) rozciągłości R_n. Uważajmy teraz jakikolwiek punkt

$$a_1, a_2 \ldots . a_n \tag{4}$$

w rozciągłości R_n oraz dwa przekształcenia P_1 i P_2, należące do grupy (G). Przekształcenie P_1 przemieni punkt (4) w pewien punkt

$$a'_1, a'_2, \ldots . a'_n,$$

a przekształcenie P_2 przemieni tenże punkt (punkt (4)) w pewien punkt

$$a''_1, a''_2, \ldots . a''_n.$$

Może się wydarzyć, iż, przyjąwszy dowolnie punkt (4) oraz przekształcenie P_1, można zawsze dobrać do punktu (4), przekształcenia P_1 i do dowolnie danej, byle od zera większej liczby rzeczywistej ε, przekształcenie P_2 w taki sposób, żebyśmy mieli

$$|a''_i - a'_i| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots . n).$$

Jeśli ta okoliczność zachodzi, to grupa (G) zowie się *ciągłą grupą przekształceń* rozciągłości R_n [1]). Grupa ruchów euklidesowskich, rozważana w paragrafie poprzedzającym, oczywiście stanowi przykład ciągłej grupy przekształceń.

Pośród ciągłych grup przekształceń rozciągłości n-wymiarowej należy wyróżnić szczególnie ważną klasę grup ciągłych *skończonych*.

Żeby podać definicję tej klasy grup, uważajmy równania następujące:

---

[1]) Definicja ciągłych grup przekształceń często wypowiadana bywa w sposób następujący: oznaczona grupa przekształceń rozciągłości R_n zowie się ciągłą, jeżeli każdemu przekształceniu, należącemu do grupy, odpowiada nieskończenie blizkie przekształcenie, należące do tejże grupy.

(5) $y_i = f_i(x_1 \ldots . x_n, a_1, \ldots . a_r)$ $(i = 1, 2 \ldots . n)$

gdzie funkcje, znajdujące się z prawej strony, są funkcjami $n + r$ zmiennych

$$x_1, x_2 \ldots . x_n, a_1 \ldots . a_r,$$

określonemi bez żadnej już dwuznaczności. Każdemu układowi wartości na

(6) $$a_1, a_2 \ldots . a_r$$

odpowiada oczywiście zupełnie oznaczone przekształcenie punktów rozciągłości R_n. Wobec tego równania (5) określają pewien układ przekształceń (U) punktów rozciągłości R_n, przyczym każdemu układowi wartości na zmienne (6) odpowiada oznaczone przekształcenie, należące do układu (U). Przy tych warunkach zmienne (6) zowią się *parametrami* przekształcenia, określonego przez równości (5), gdy w tych równościach uważamy symbole (6) za symbole liczb nie zależnych od $x_1, x_2 \ldots x_n$ i $y_1, y_2 \ldots y_n$.

Jeżeli układ przekształceń, objętych przez wzory (5), stanowi grupę, to w takim razie mówimy, że wzory (5) określają *skończoną grupę przekształceń rozciągłości* R_n.

Łatwo spostrzegamy, opierając się na ogólnej definicji grupy przekształceń, że warunek konieczny i dostateczny, aby wzory (5) określały grupę przekształceń, polega na tym, żeby równania (5) i równanie

$$z_i = f_i\,(y_1, y_2 \ldots . y_n, b_1, b_2, \ldots . b_r) \quad (i = 1, 2 \ldots . n)$$

pociągały za sobą bez względu na wartości zmiennych

$$x_1, x_2 \ldots . x_n,$$

równania postaci

$$z_i = f_i(x_1 \ldots . x_n, c_1, c_2, \ldots . c_r), \quad (i = 1, 2 \ldots . n)$$

gdzie

$$c_1, c_2, c_3 \ldots . c_r$$

przedstawiają pewne funkcje zmiennych

$$a_1, a_2 \ldots . a_r, b_1, b_2, \ldots . b_r.$$

Jeżeli równania (5) określają pewną grupę przekształceń rozciągłości R_n, a ta grupa jest ciągła (czego warunkiem koniecznym i dostatecznym jest ciągłość funkcji $f_i(x_1,\dots x_n, a_1,\dots a_r)$ uważanych za funkcje parametrów $a_1, a_2 \dots\dots a_r$), to rozważana grupa zowie się ciągłą skończoną grupą przekształceń. Niezmierna zasługa SOPHUSA LIE'EGO polega na tym, iż, wyodrębniwszy ogólne pojęcie grupy przekształceń, stworzył ogólną teorję grup przekształceń ciągłych skończonych, uwzględniając, co prawda, przytym tylko grupy przekształceń, które określić można za pomocą samych tylko funkcji analitycznych.

Przekroczylibyśmy granice tego artykułu i tak już może zbyt obszernego, gdybyśmy uczynili próbę bliższego wyjaśnienia znaczenia naukowego teorji grup przekształceń ciągłych.

Powiemy więc tylko, że teorja ta już wydała nieocenione owoce przy zastosowywaniu jej do najrozmaitszych gałęzi badań matematycznych, a w szczególności w gieometrji i w rachunku całkowym. Sądzimy jednak, żeśmy powiedzieli dosyć, aby czytelnika zachęcić do bliższego poznania omawianych teorji.

II.

8. Pośród różnych grup przekształceń, które napotykamy w poszczególnych gałęziach matematyki oderwanej i matematyki stosowanej, ciągłe grupy przekształceń zajmują stanowisko odrębne. Grupy przekształceń tej właśnie kategorji znajdują ważne zastosowania w tak różnorodnych rodzajach dociekań matematycznych, że teorja tych grup uważana być może za odrębną gałąź matematyki. Inne grupy przekształceń są w ten sposób związane z pewnemi szczególnemi gałęziami matematyki, iż niepodobna ich uważać za przedmioty samoistnych teorji. Tak naprzykład, grupy przekształceń permutacji czyli *grupy podstawień* należą bezsprzecznie do algiebry; inne znów nieciągłe grupy przekształceń należą do teorji funkcji analitycznych i równań różniczkowych zwyczajnych linjowych i t. d. Wobec tego uważamy za właściwy cel niniejszego artykułu podanie porad do studjowania teorji ciągłych grup przekształceń; z pozostałemi grupami przekształceń czytelnik zaznajomi się, studjując te gałęzie matematyki, w których one występują.

Nadmieniamy jednak, że czytelnik znajdzie wiele cennych wskazówek w tym względzie w tomie I, części 1 dzieła: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, w artykułach następujących:

1) I A. 6. BURKHARDT. Endliche discrete Gruppen:

2) I B 2. FR. MEYER. Invariantentheorie.

3) I B 3 c. O. HÖLDER. Galoische Theorie mit Anwendungen.

4) I. B 3 f. A. WIMAN. Endliche Gruppen linearer Substitutionen.

9. Jakkolwiek teorja ciągłych grup przekształceń należy do najnowszych gałęzi matematyki, to znaczenie jej tak jest wielkie, że we współczesnych, obszerniejszych podręcznikach analizy matematycznej, np. w Cours d'Analyse GOURSATA lub w Traité d'Analyse PICARDA znajdujemy już ustępy, poświęcone tej teorji. Jednakowoż ustępy te mogą dać tylko bardzo pobieżne pojęcie o omawianej teorji. Z tego powodu doradzamy czytelnikowi, aby zwrócił się do dzieł poświęconych specjalnie temu przedmiotowi. Dzieł dydaktycznych o teorji skończonych ciągłych grup przekształceń jest już pewna ilość.

Sądzimy jednak, że czytelnik najlepiej uczyni, jeżeli zabierze się do studjowania dzieł, wydanych przy współudziale samego twórcy rozważanej teorji—SOPHUSA LIE'EGO. O ile wiemy, są trzy takie dzieła:

1) S. LIE. Vorlesugen über kontinuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen. Opracował G. SCHEFFERS. Lipsk, Teubner, 1893. Str. XV+810. Cena m. 24.

2) S. LIE. Theorie der Transformationsgruppen, unter Mitwirkung von Prof. ENGEL. Lipsk, Teubner, 1888—93, w trzech tomach. Str. X+632; VII+555; XXVII+831. Cena m. 60.

3) S. LIE. Geometrie der Berührungstransformationen. Lipsk, Teubner, 1896; str. XII+694. Cena m. 24.

Pierwsze ze wspomnianych trzech dzieł najlepiej nad je się do początkowego studjowania teorji grup. Drugie dzieło obejmuje wyczerpujący wykład teorji ciągłych, skończonych grup przekształceń oraz różne bardzo ważne i zajmujące zastosowania tej teorji; w tym właśnie dziele znajduje się nadzwyczaj zajmujące zastosowanie teorji grup do badań nad podstawami gieometrji. Trzecie dzieło, jak to już wskazuje sam tytuł, poświęcone jest pewnej szczególnej kategorji grup przekształceń [1]).

W żadnym z powyższych dzieł nie znajduje się wykład ogólnej teorji *nieskończonych* ciągłych grup przekształceń.

Wogóle, o ile wiemy, niema dzieła dydaktycznego, w którym objęta byłaby ogólna teorja nieskończonych, ciągłych grup przekształceń.

Natomiast jest rozprawa, w której czytelnik znajdzie wszystkie zasadnicze twierdzenia omawianej teorji, a mianowicie:

A. Tresse. Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations. Acta Mathematica, 1894, t. XVIII. Str. 1—88.

Obok powyższych dzieł wymienimy jeszcze krótki podręcznik następujący:

G. Vivanti (w przekładzie francuskim przez Boulanger). Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations. Paryż, Gauthier-Villars, 1904; str. VII+296. Cena fr. 8.

10. W dziełach wymienionych w ustępach poprzedzających czytelnik znajdzie już szereg cytat, które pozwolą mu głębiej przeniknąć teorję grup przekształceń. Kto zaś pragnąłby bliżej zorjentować się w całej literaturze przedmiotu, tego odsyłamy do dwuch artykułów dzieła zbiorowego Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen; artykuły, które mamy na myśli, są następujące:

II A 6 L. Maurer und H. Burkhardt. Kontinuierliche

---

[1]) Mógłby czytelnik także poinformować się o teorji grup z dzieła w języku polskim (przekł. z włoskiego):

E. Pascal. Grupy ciągłe przekształceń. Warszawa, 1903; str. 296. Cena rb. 2 kop. 40.

Transformationsgruppen. T. II 1, zesz. 4, 1900; str. 36. Cena zesz. m. 4.80.

III A B 4*b*. G. Fano. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip. T. III 1, zesz. 2, 1907. Cena zeszytu m. 5.

O ile chodziłoby o prace, które wyszły po wymienionych artykułach Encyklopedji, to naturalnie nic innego nie pozostaje, jak tylko przejrzenie odpowiednich tomów wydawnictwa Jahrbücher über die Fortschritte der Mathematik albo wydawnictwa Revue semestrielle des mathématiques.

RACHUNEK WARJACYJNY.

NAPISAŁ

STANISŁAW ZAREMBA.

I.

1. Studjowanie *rachunku warjacyjnego* można rozpocząć po zaznajomieniu się z ogólnemi zasadami rachunku różniczkowego i całkowego i po nabyciu podstawowych wiadomości z zakresu równań różniczkowych oraz teorji funkcji analitycznych. Winniśmy dodać, że rachunek warjacyjny jest jedną z tych gałęzi matematyki, w których przyzwyczajenie do bardzo ścisłego myślenia logicznego odgrywa rolę wyjątkowo ważną i jest niezawodnie ważniejsze aniżeli posiadanie rozległych wiadomości.

2. Zanim określimy w ogólnych zarysach właściwy charakter zagadnień, stanowiących przedmiot rachunku warjacyjnego, podamy najpierw parę szczególnych przykładów na zagadnienia tej kategorji: sądzimy, że w ten sposób ułatwimy czytelnikowi zrozumienie naszej myśli. Przy podawaniu wspomnianych przykładów dopuścimy się rozmyślnie pewnych nieścisłości, do których powrócimy w paragrafie późniejszym.

Przykład I. Połączyć dwa punkty dane A_1 i A_2, położone w oznaczonej płaszczyźnie (P), taką linją (L), położoną w tej płaszczyźnie, żeby pole powierzchni obrotowej utworzonej przez obrót linji (L) dokoła osi danej (Δ), położonej także w płaszczyźnie (P), było jak najmniejsze.

Jeżeli przyjmiemy oś (Δ), za oś odciętych (oś x-ów) układu spółrzędnych prostokątnych (x, y) punktu płaszczyzny (P) i oznaczymy odpowiednio przez a_1 i a_2 odcięte, a przez b_1 i b_2 rzędne punktów A_1 i A_2, to na pole S powierzchni, jaką utworzylibyśmy przez obrót dowolnie danej linji

$$y = f(x), \tag{1}$$

łączącej punkty A_1 i A_2, wokoło osi (Δ) czyli osi x-ów, mieć będziemy wzór następujący:

$$S = 2\pi \int_{a_1}^{a_2} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx, \tag{2}$$

gdzie oznaczyliśmy przez π stosunek okręgu koła do średnicy i przyjęliśmy wartość dodatnią na pierwiastek.

Warunek, ażeby linja (1) łączyła punkty A_1 i A_2, możemy wyrazić w postaci równań następujących:

$$f(a_1) = b_1\,,\ f(a_2) = b_2. \tag{3}$$

Z tego wynika, że rozważane zagadnienie gieometryczne może być sprowadzone do następującego zagadnienia czysto analitycznego: określić funkcję $f(x)$ w obrębie przedziału (a_1, a_2) w taki sposób, żeby ta funkcja spełniała równania (3) i żeby przytym całka (1) przybrała wartość jak najmniejszą.

P r z y k ł a d II. Wyznaczyć w płaszczyźnie taki łuk (L) danej długości l o końcach A_1 i A_2, również danych, żeby pole, jakie ogranicza ten łuk łącznie z odcinkiem prostolinjowym $A_1 A_2$, było jak największe.

Przyjmijmy osi spółrzędnych prostokątnych (x, y) punktu rozważanej płaszczyzny w taki sposób, żeby punkty A_1 i A_2 znajdowały się na osi x-ów czyli osi odciętych i oznaczmy przez a_1 i a_2 $(a_1 < a_2)$ odcięte punktów A_1 i A_2. Równanie

$$y = f(x) \tag{1}$$

przedstawiać będzie łuk łączący punkty A_1 i A_2, jeżeli tylko zachodzić będą równości

$$f(a_1) = f(a_2) = 0. \tag{2}$$

Żeby zaś długość tego łuku równała się liczbie l, dostateczne jest, żeby funkcja $f(x)$ czyniła zadość równaniu:

(3) $$\int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = l.$$

Ponieważ na pole S_1, ograniczone linją (1) i odcinkiem A_1 A_2, mamy wzór

(4) $$S = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx,$$

przeto doprowadzeni jesteśmy do zagadnienia czysto analitycznego następującego: określić w obrębie przedziału (a_1, a_2) funkcję $f(x)$ w taki sposób, żeby funkcja ta sprawdzała równania (2) i (3) i żeby przytym całka (4) przybrała możliwie największą wartość.

P r z y k ł a d III. Wyznaczyć taką powierzchnię, ograniczoną daną linją zamkniętą (L), żeby jej pole było jak najmniejsze.

Żeby zagadnienie to sprowadzić do zagadnienia z analizy matematycznej, oznaczmy przez x, y, i z spółrzędne prostokątne punktu przestrzeni i zważmy, iż w takim razie możemy przedstawić każdą powierzchnię przez równanie postaci:

(1) $$z = f(x, y).$$

Jeżeli przedstawimy przez

(2) $$\varphi(x, y) = 0$$

równanie rzutu prostokątnego linji (L) na płaszczyznę $z=0$, to warunek, ażeby powierzchnia (1) ograniczona była linją (2), polegać będzie na tym, żeby w punktach linji (2) funkcja $f(x, y)$ przybierała pewne wartości dane, a mianowicie równe spółrzędnym z odpowiednich punktów linji (L).

Z drugiej zaś strony, na pole S powierzchni (1) ograniczonej linją (L) mamy wzór następujący:

(3) $$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

gdzie oznaczyliśmy przez (D) dziedzinę, ograniczoną linją (2) w płaszczyźnie $z=0$. Zatym mamy do rozwiązania zagadnienie następujące: wyznaczyć w obrębie dziedziny (D) funkcję $f(x, y)$ zmiennych x i y w taki sposób, żeby ta funkcja przybierała w punktach linji (2) dane naprzód wartości i żeby przytym całka (3) przybrała jak najmniejszą wartość.

Wszystkie zagadnienia powyższe są szczególnemi przypadkami zagadnienia postaci następującej:

Pewna całka n-krotna I $(n \geqq 1)$ przybiera oznaczoną wartość, skoro tylko określona zostanie pewna funkcja f tylu zmiennych, ile wynosi liczba n: wyznaczyć funkcję f w taki sposób, żeby, przy zadośćuczynieniu pewnym warunkom dodatkowym, całka I przybrała jak najmniejszą albo jak największą wartość.

Powyższe zagadnienie jest oczywiście szczególnym przypadkiem zagadnienia znacznie ogólniejszego, które możemy przedstawić w postaci następującej. Każda z całek

(1) $$I_1, I_2, \ldots . I_p$$

pewnego układu przybiera oznaczoną wartość, skoro oznaczona zostanie każda z pewnych q funkcji

$$f_1, f_2, \ldots . f_q;$$

wyznaczyć te funkcje w ten sposób, żeby przy zadośćuczynieniu pewnym warunkom dodatkowym, pewne k $(0 \leqq k \leqq p)$ z całek układu (1) przybrały jak najmniejsze wartości, a całki pozostałe — wartości jak największe.

Gałąź analizy, poświęcona rozwiązywaniu zagadnień tego rodzaju, nazywa się *rachunkiem warjacyjnym.* Nazwa rachunku warjacyjnego, która utarła się dla powyższej gałęzi analizy, jest niezawodnie nieodpowiednia przyjęła się zaś tylko dla tego, że najdawniejsza ogólna metoda do rozwiązywania rozważanego rodzaju zagadnień polega na pewnej szczególnej postaci rachunku różniczkowego, która ma nazwę rachunku warjacyjnego.

3. Wprowadzenie ścisłości i jasności matematycznej do zagadnień z zakresu rachunku warjacyjnego natrafia na trudności wyjątkowe, wypływające bezpośrednio z samej natury tych zagadnień. Żeby uświadomić sobie trochę bliżej ro-

dzaj tych trudności, powrócimy do przykładów podanych w paragrafie poprzedzającym.

W każdym z tych przykładów sprowadziliśmy pewne zagadnienie gieometryczne do zagadnień z zakresu analizy matematycznej. Otóż przedewszystkim nasuwa się pytanie następujące: czy zagadnienia z zakresu analizy, do których doszliśmy, stanowią rzeczywiście dokładne obrazy analityczne zagadnień gieometrycznych, o które chodziło? Jeden z koniecznych (chociaż nie wystarczających) warunków, aby okoliczność ta zachodziła, polega na tym, żeby powyższe zagadnienia z analizy były same ściśle postawione. Dostatecznym będzie zwrócić się do pierwszego przykładu, żeby przekonać się, iż tak nie jest. W tym przypadku chodzi o wyznaczenie takiej funkcji $\varphi(x)$, żebyśmy mieli

$$\varphi(a_1) = b_1, \quad \varphi(a_2) = b_2$$

i żeby całka

$$(1) \qquad 2\pi \int_{a_1}^{a_2} \varphi(x) \sqrt{1 + \{\varphi'(x)\}^2} dx,$$

nie była większa od żadnej całki postaci

$$(2) \qquad 2\pi \int_{a_1}^{a_2} f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx,$$

gdzie funkcja $f(x)$ sprawdza równania

$$(3) \qquad f(a_1) = b_1, \quad f(a_2) = b_2.$$

Całka (2) ulegać może porównywaniu ilościowemu z całką (1), naturalnie tylko pod warunkiem, żeby całka (2), miała oznaczoną wartość. Ale nawet w przypadku, kiedy funkcja $f(x)$ jest ciągła, całka (2) może nie posiadać żadnej wartości, gdyż pochodna funkcji ciągłej może nie istnieć. Jednakowoż całka (2) może mieć oznaczoną wartość nawet w przypadku, kiedy przy pewnych szczególnych wartościach zmiennej x położonych wewnątrz przedziału (a_1, a_2) pochodna $f'(x)$ przestaje istnieć. Zatym o spełnieniu związku

$$2\pi \int_{a_2}^{a_2} \varphi(x) \sqrt{1 + \{\varphi'(x)\}^2}\, dx \leqq 2\pi \int_{a_1}^{a_2} f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

czyli

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\sqrt{1+\{\varphi'(x)\}^2}\,dx \leqq \int_{a_1}^{a_2} f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

może być mowa tylko w przypadku, kiedy funkcja $f(x)$ sprawdza prócz warunków (3) jeszcze jakieś warunki, ograniczające jej naturę. Jakież mają być te warunki? Czy pochodna $f'(x)$ ma istnieć w każdym punkcie, położonym wewnątrz przedziału (a_1, a_2)? Czy ta pochodna może być nieciągła? Czy dopuszczalnym jest, żeby przy pewnych wartościach zmiennej pochodna ta wogóle przestawała istnieć? Dopiero po odpowiedzeniu na te pytania i na inne, które pomijamy, przybrałoby rozważone zagadnienie postać precyzyjną.

Ten jedyny przykład wystarczy zapewne, ażeby przekonać czytelnika, iż poprawne ze stanowiska analizy postawienie zagadnienia z zakresu rachunku warjacyjnego nie jest rzeczą łatwą. Przy rozwiązywaniu zaś takiego zagadnienia natrafimy naturalnie na trudności o wiele większe. Wprawdzie są liczne przypadki, w których możemy bez wielkich trudności podać takie konieczne warunki na maximum lub minimum pewnej całki, które określają w zupełności nieznane funkcje, ale, po wyznaczeniu ze wspomnianych warunków nieznanych funkcji, pozostaje do sprawdzenia, czy po podstawieniu do całki znalezionych funkcji uzyskujemy rzeczywiście minimum lub maximum, a ścisłe rozstrzygnięcie, czy okoliczność ta zachodzi, jest rzeczą stosunkowo bardzo trudną, wymagającą zazwyczaj bardzo subtelnych rozważań.

Stan rzeczy, który krótko skreśliliśmy, wywarł na rozwój rachunku warjacyjnego wpływ godny wielkiej uwagi. W początkowym okresie rozwijania się rachunku warjacyjnego (Euler, Lagrange, Legendre, Jacobi) nie dostrzegano wszystkich trudności zagadnień z zakresu omawianej gałęzi analizy i przystępowano do zagadnień stosunkowo skomplikowanych. Później zaś (Weierstrass) zwrócono wszystkie usiłowania ku rozwiązywaniu zagadnień najprostszego typu. Z powyższym stanem rzeczy ściśle jest związana jeszcze i ta okoliczność, że dawniejsze prace i podręczniki z zakresu rachunku warjacyjnego bez porównania trudniejsze są do rozumienia dla osób, przywykłych do ścisłości matematycznej, niż prace nowsze.

II.

4. Z uwag, uczynionych w rozdziale poprzedzającym o przebiegu rozwoju rachunku warjacyjnego, wynikają już pewne wskazówki co do najodpowiedniejszego sposobu zaznajamiania się z tą gałęzią analizy matematycznej: 1) do początkowych studjów należy posługiwać się najnowszemi dziełami; 2) korzystniej jest raczej udawać się do dzieł obszerniejszych, specjalnie poświęconych rachunkowi warjacyjnemu, aniżeli do tych rozdziałów podręczników ogólnej analizy matematycznej, w których znajdujemy krótki zarys rachunku warjacyjnego, gdyż subtelnych kwestji, napotykanych w najprostszych nawet zagadnieniach na rachunek warjacyjny, niepodobna należycie wyjaśnić na zbyt szczupłej ilości stronic.

5. W polskiej literaturze naukowej nie posiadamy polecenia godnego dzieła z rachunku warjacyjnego. Wobec tego podajemy tylko dzieła obce. Sądzimy, że najbardziej do początkowych studjów przydatnym dziełem jest podręcznik następujący:

O. Bolza. Vorlesungen über Variationsrechnung. Lipsk, Teubner, 1909; str. IX + 705 + 10. Cena m. 19, w opr. m. 20.

Drugie dzieło, mniej obszerne, ale także nadające się do początkowych studjów z zakresu rachunku warjacyjnego, jest następujące:

A. Kneser. Lehrbuch der Variationsrechnung. Brunświk, 1900; str. XV + 313. Cena m. 8.

Czytelnik znajdzie cenne wskazówki bibljograficzne z zakresu rachunku warjacyjnego w dziele następującym:

E. Pascal. Die Variationsrechnung. Lipsk, Teubner, 1899. (Przekład polski S. Dicksteina p. t. Rachunek warjacyjny i rachunek różnic skończonych. Warszawa, 1897; str. X + 247. Cena rb. 2).

oraz w artykułach Encyklopedji nauk matematycznych:

II A 8. A. Kneser. Variationsrechnung; t. II, zeszyt 5, 1904; str. 55.

II A 8a. E. Zermelo i H. Hahn. Weiterentwickelung der Variationsrechnug in den letzten Jahren; t. II, zeszyt 5, 1904; str. 16. Cena zesz. 5-go m. 6.

Czytelnikowi, który pragnąłby poznać najnowsze kierunki badań z zakresu rachunku warjacyjnego, polecamy dzieło następujące:

J. Hadamard. Leçons sur le calcul des Variations. Paryż, A. Herman, t. I, 1912; str. VII+520. Cena fr. 18.

Drugi tom powyższego dzieła jeszcze nie wyszedł.

GIEOMETRJA RÓŻNICZKOWA.

OPRACOWAŁ

STEFAN KWIETNIEWSKI.

Treść: 1. Przedmioty badania. 2. Główne zagadnienia. 3. Metoda. 4. Dalsze zagadnienia. 5. Zastosowania. 6. Rys historyczny. 7. Wymagane przygotowanie. 8. Literatura.

---

1. Twory gieometryczne, badane w gieometrji różniczkowej, są o tyle ogólniejsze od tych, które bywają rozpatrywane w gieometrji analitycznej, że w gieometrji różniczkowej nie ograniczamy się braniem pod uwagę tylko miejsca punktów, których spółrzędne są funkcjami algiebraicznemi jakiejś zmiennej niezależnej; funkcje te mogą być tutaj ogólniejszej natury; ale ze względu na metodę rozporządzalną (patrz § 3), wymagamy od nich, ażeby miały pewną ilość pochodnych, przynajmniej trzy[1]). Dla ułatwienia wykładu wielu autorów

---

[1]) Patrz »Encyklopädie der math. Wissenschaften« Band III. Teil 1, Heft 1, MANGOLDT, Die Begriffe Linie und Fläche (artykuł w szczegółach przestarzały; lepiej jest posługiwać się wydaniem francuskim, w którym jednak artykuł ten cały jeszcze nie wyszedł). — Badanie pod względem matematycznym krzywych empirycznych, t. j. takich, jakich nam dostarcza przyroda, rysunek albo wyobraźnia, jest dziedziną dotychczas mało opracowaną. Bliższe wiadomości o krzywych empirycznych znaleźć można w wykładach litografowanych: F. KLEIN, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien. Vorlesung gehalten während des Sommersemesters 1901, ausgearbeitet von C. MÜLLER. Lipsk, Teubner, 1902, str. 468. Krzywe analityczne mogą być w ogólności stosowane do badania postaci krzywych empirycznych, o ile chcemy i umiemy zastępować je linjami matematycznemi, gdyż jakkolwiek wązki będzie pasek, za którego pomocą

bierze pod uwagę wyłącznie funkcje analityczne; ale ograniczenie to nie jest istotne.

Linje krzywe płaskie i skośne (t. j. takie, których punkty nie leżą na jednej płaszczyźnie) oraz powierzchnie krzywe rozpatruje się nietylko jako miejsca punktów, ale także jako *obwiednie* prostych i płaszczyzn. Układ ciągły jednoparametrowy prostych, leżących na tej samej płaszczyźnie, wytwarza linję krzywą płaską; układ ciągły jednoparametrowy płaszczyzn wytwarza linję krzywą skośną; układ ciągły dwuparametrowy płaszczyzn wytwarza powierzchnię. Natomiast układy ciągłe linji prostych w przestrzeni prowadzą w ogólności do nowych utworów.

Równania linji prostej w układzie spółrzędnych prostokątnych:

$$x = az + b, \ y = cz + d$$

zawierają cztery stałe istotne, skąd wnosimy, że w przestrzeni jest ∞^4 linji prostych, rozpatrywać więc można układy ciagłe, złożone z ∞^1, ∞^2 i ∞^3 prostych (czyli układy jedno, dwu i trzyparametrowe). Pierwsze prowadzą do *powierzchni linjowych* (np. stożek, hiperboloida jednopowłokowa), drugie stanowią odrębny utwór zwany *kongruencją prostych* (lub *promieni*), trzecie *kompleks prostych.* Przykład kongruencji daje nam zbiór wszystkich prostych, prostopadłych (normalnych) do powierzchni danej; jako przykład kompleksu wskażemy zbiór wszystkich prostych, mających jednakowe nachylenie do danej płaszczyzny. Kongruencje i kompleksy prostych bywają rozpatrywane w gieometrji różniczkowej, można jednak, na początek przynajmniej, poprzestać na linjach i powierzchniach krzywych.

Przy nauce początkowej można zadowolić się rozpatrywaniem dziedziny rzeczywistej, ale dalsza nauka doprowadza

---

przedstawimy krzywą empiryczną, zawsze można znaleźć część krzywej analitycznej, mieszczącą się całkowicie wewnątrz tego paska i przechodzącą przez całą jego długość. Stąd powstał dziwny przesąd, do dziś jeszcze dość rozpowszechniony, że w przyrodzie istnieją tylko krzywe analityczne i że zależności między zmiennemi wielkościami fizycznemi są zawsze analitycznej natury, to znaczy, że wyrażają się przez funkcje, które dają się różniczkować nieskończenie wiele razy i przy rozwinięciu na szereg Taylora dają resztę dążącą do zera.

z konieczności do dziedziny urojonej; rozpatruje się więc zarówno części urojone tworów rzeczywistych, jak i takie twory, które nie zawierają wcale punktów rzeczywistych lub tylko odosobnione. Zakres badań można wreszcie rozszerzyć na przestrzenie wielowymiarowe i nieeuklidesowskie.

2. Ważniejsze zagadnienia gieometrji różniczkowej — pominąwszy rektyfikację krzywych, kwadraturę powierzchni[1]) i t. p., które zaliczyć można do rachunku całkowego — są następujące:

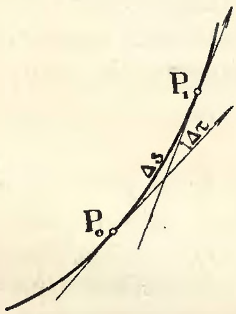


Fig. 23.

Przedewszystkim badanie linji lub powierzchni krzywej w najbliższym otoczeniu punktu obranego na tym tworze. Wprowadza się w tym celu pojęcie *krzywizny*. Obierzmy na krzywej w pobliżu badanego punktu P_0 drugi punkt P_1 i poprowadźmy przez P_0 i P_1 styczne do tej krzywej. Niech będzie Δs długość łuku P_0P_1, $\Delta\tau$ kąt zawarty między stycznemi, wtedy stosunek $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ nazywa się krzywizną średnią łuku P_0P_1. Granicę tego stosunku $\frac{d\tau}{ds}$ przy P_1 dążącym do P_0, nazywamy krzywizną linji krzywej w punkcie P_0. Oznaczając krzywiznę przez K, znajdziemy:

$$K=\frac{d\tau}{ds}.$$

Odwrotność tej wielkości nazywa się *promieniem krzywizny* linji krzywej w punkcie P_0; jest to granica, do której dąży promień koła, przechodzącego przez P_0 i dwa punkty P_1, P_2, położone na krzywej w pobliżu P_0, jeżeli te dwa punkty zbliżają się nieograniczenie do P_0. Koło, które otrzymamy w po-

[1]) Zagadnienia te bywają zwykle w podręcznikach gieometrji różniczkowej pomijane. W Enc. d. math. Wiss. patrz III D 1, 2. MANGOLDT, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen, 1902. Z nowszych prac specjalnych polecamy: Zoard de Geöcze, Quadrature des surfaces courbes, thèse, Paris, 1909.

łożeniu granicznym, nazywa się *kołem ściśle stycznym* do krzywej w punkcie P_0; promień jego $=\frac{1}{K}$.

Przy badaniu krzywych skośnych oprócz *pierwszej krzywizny,* którą tylko co poznaliśmy, uwzględnić jeszcze należy *drugą krzywiznę,* zwaną też *skręceniem.* Jeżeli mianowicie przez dany punkt krzywej A i przez dwa w pobliżu położone punkty P_1, P_2 poprowadzimy płaszczyznę, wówczas płaszczyzna ta zbliża się w ogólności do położenia granicznego, jeżeli punkty P_1 i P_2 dążą do A; w tym położeniu granicznym nazywa się ona *płaszczyzną ściśle styczną* do krzywej w punkcie A. Położenie tej płaszczyzny zmienia się od punktu do punktu. Jeżeli znajdziemy płaszczyzny ściśle styczne w dwu punktach A i B i jeżeli przez $\Delta\beta$ oznaczymy kąt zawarty między niemi, zaś przez Δs długość łuku AB, wówczas stosunek $\frac{\Delta\beta}{\Delta s}$ daje nam przybliżone pojęcie o »szybkości« zmiany położenia płaszczyzny ściśle stycznej w miarę posuwania się wzdłuż krzywej. Granica, do której ten stosunek dąży, jeżeli punkt B zbliża się nieograniczenie do A, nazywa się drugą krzywizną albo skręceniem linji w punkcie A.

Więcej interesujące, zarówno ze względu na bogactwo zagadnień, jak i na odrębność metody jest badanie powierzchni krzywych.

K r z y w i z n ę p o w i e r z c h n i w punkcie zwyczajnym P bada się przy pomocy *przecięć normalnych;* tak nazywamy linje przecięcia powierzchni z płaszczyznami poprowadzonemi przez prostą, przechodzącą przez P i prostopadłą do płaszczyzny stycznej do powierzchni w tym punkcie. Może się zdarzyć, że wszystkie przecięcia normalne mają jednakową krzywiznę w punkcie P; taki punkt nazywa się *kołowym,* albo *punktem krzywizny kulistej;* w przeciwnym razie jedno z przecięć normalnych (i tylko jedno) ma największą krzywiznę, zaś przecięcie prostopadłe do pierwszego ma krzywiznę najmniejszą. Te dwa kierunki do siebie prostopadłe nazywają się *głównemi kierunkami krzywizny;* średnia arytmetyczna odpowiednich krzywizn nazywa się *krzywizną średnią powierzchni w danym punkcie,* zaś ich iloczyn *krzywizną całkowitą* powierzchni w punkcie badanym. Wielkości tej nadajemy znak $+$ lub $-$, zależnie od tego, czy środki krzywizny głównych przecięć normalnych leżą po tej samej czy po przeciwnych stronach płaszczyzny stycznej do powierzchni w punkcie P. W ten sposób kula albo elipsoida ma w każdym punkcie krzywiznę dodatnią; hiperboloida jednopowłokowa [1]) ma w każdym punkcie krzywiznę ujemną. Jeżeli w pobliżu punktu P przetniemy powierzchnię płaszczyzną równoległą do płaszczyzny stycznej w P, wówczas linja przecięcia będzie miała postać, zbliżoną do elipsy, lub będzie złożona z dwu gałęzi jak hiperbola, zależnie od tego, czy krzywizna w P jest dodatnia czy ujemna; z tego względu rozróżniamy na powierzchniach *punkty eliptyczne* i *hiperboliczne*. Jeżeli krzywizna w pewnym punkcie staje się zerem, punkt taki nazywamy *parabolicznym*. Walce i stożki (z wyjątkiem wierzchołka) mają tylko punkty paraboliczne.

Oprócz badania postaci tworów danych, nastręczają się zagadnienia, prowadzące do *znalezienia tworu, odpowiadającego warunkom danym*, jak np. znalezienie obwiedniej układu ∞^1 krzywych płaskich, albo znalezienie powierzchni, która byłaby ograniczona daną linją krzywą skośną zamkniętą, a która miałaby pole jak najmniejsze (powierzchnia minimalna).

Wspomnieć tu jeszcze należy o zagadnieniach, pozostających w związku z ruchami, przy których twory rozpatrywane bądź pozostają bez zmiany (np. obrót na płaszczyźnie linji krzywej ruchomej wzdłuż drugiej krzywej stałej), bądź też podlegają odkształceniom, jak np. rozwijanie powierzchni krzywej na płaszczyznę lub też nawijanie jednej powierzchni na drugą.

Pojęcia takie jak »ruch«, »nawijanie« i t. d. mogą być sformułowane ściśle matematycznie, o czym będzie mowa w paragrafie następnym. Wraz z ich wprowadzeniem otwiera się rozległe pole do dalszych zagadnień (p. § 4).

3. Metoda gieometrji różniczkowej opiera się na gieometrji analitycznej i rachunku nieskończonostkowym.

Twór rozpatrywany określamy zazwyczaj za pomocą równań, którym czynią zadość spółrzędne elementów tego tworu.

[1]) Hiperboloidę jednopowłokową obrotową można otrzymać przez obrót hiperboli dokoła tej osi hiperboli, która nie ma z nią rzeczywistych punktów wspólnych.

Tak np. linja krzywa płaska może być określona przez równanie postaci $y = f(x)$, albo $F(x, y) = 0$, gdzie x, y oznaczają spółrzędne prostokątne punktu krzywej; dogodniej jednak bywa wyrazić obie spółrzędne jako funkcje trzeciej zmiennej, niezależnej (zwanej czasami, choć niewłaściwie parametrem), którą zwykle oznacza się przez t. Jeżeli $\varphi(t)$, $\psi(t)$ są dla pewnej dziedziny zmiennej t funkcjami jednowartościowemi, wtedy równania

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t)$$

określają pewien punkt płaszczyzny dla każdej wartości t, zawartej w tej dziedzinie. Wszystkie te punkty tworzą linję krzywą.

Zamiast spółrzędnych prostokątnych używa się nieraz *spółrzędnych krzywolinjowych*, do których dochodzimy taką drogą:

Równanie

$$\Phi(x, y) = u,$$

w którym u oznacza jakąkolwiek wielkość stałą, przedstawia linję krzywą. Przyjmując dla u coraz to inne wartości, otrzymywać będziemy coraz to inną krzywą; przez każdy punkt x, y płaszczyzny przechodzić będzie jedna i tylko jedna z tych krzywych, o ile Φ jest dla tego punktu funkcją jednowartościową.

Dwa równania postaci

$$\Phi(x, y) = u, \quad \Psi(x, y) = v$$

przedstawiają sieć krzywych, przecinających się po dwie w każdym punkcie płaszczyzny, w którym Φ i Ψ są funkcjami jednowartościowemi. Funkcje te muszą jeszcze spełniać warunek:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial y} \neq 0,$$

gdyż w razie przeciwnym oba równania przedstawiałyby jeden i ten sam układ krzywych.

Każda para wielkości u, v wyznacza parę krzywych, przecinających się w pewnym punkcie x, y płaszczyzny; te wielkości u, v mogą więc być uważane za spółrzędne krzywolinjowe punktu x, y.

Spółrzędne krzywolinjowe są dla utworów płaskich zbyteczne, ale są niezbędne przy badaniu powierzchni; wynikają one bezpośrednio z równań parametrycznych powierzchni. Trzy równania postaci:

$$x = \varphi(u, v);\ y = \psi(u, v);\ z = \chi(u, v),$$

dla których nie wszystkie trzy wyznaczniki funkcyjne:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v},\ \text{i t. d.}$$

są zerami, określają u i v jako funkcje uwikłane zmiennych x i y; po wyrugowaniu u i v otrzymalibyśmy więc równanie postaci:

$$z = F(x, y),$$

to jest równanie powierzchni. Każdej parze wartości u, v odpowiada pewien punkt powierzchni, i odwrotnie; u, v można więc uważać za spółrzędne krzywolinjowe punktu powierzchni. Równanie pomiędzy zmiennemi u, v wyznacza pewną linję krzywą na powierzchni; w szczególności równania

$$u = \text{const.},\ v = \text{const.}$$

wyznaczają na niej sieć spółrzędnych krzywolinjowych.

Weźmy np. powierzchnię daną przez równania:

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = \chi(u).$$

Ażeby znaleźć na tej powierzchni sieć krzywych $u=\text{const.}$, $v = \text{const.}$, przedstawioną za pomocą równań w spółrzędnych kartezjuszowskich, przyjmijmy $u = a$ i wyrugujmy v:

$$x^2 + y^2 = a^2;\ z = \chi(a).$$

Krzywe $u = \text{const.}$ są to więc koła, leżące na płaszczyznach prostopadłych do osi z i mające środki na tej osi. Powierzchnia rozpatrywana jest przeto powierzchnią obrotową, koła $u = a$ są jej *równoleżnikami;* przyjmując $v = b$ i rugując u z dwu pierwszych równań, dostaniemy:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin b}{\cos b} = \text{tg} b,$$

albo:

$$x \sin b - y \cos b = 0.$$

Jest to równanie płaszczyzny, przechodzącej przez oś z; przecięcia takich płaszczyzn z powierzchnią są jej *południkami.*

Za pomocą sposobów powyższych wyznacza się postać i położenie krzywej lub powierzchni względem pewnego układu spółrzędnych; można jednak napisać równanie, określające postać krzywej, niezależnie od jej położenia względem jakiegokolwiek układu spółrzędnych.

Równaniem takim będzie np.

$$K = f(s),$$

gdzie K oznacza krzywiznę linji krzywej w którymkolwiek jej punkcie P, zaś s długość łuku, mierzoną od dowolnie obranego punktu O krzywej do punktu P. Równanie to wyznacza więc krzywiznę linji w każdym jej punkcie. Tego rodzaju równania, niezależne od układu spółrzędnych, nazywają się r ó w n a n i a m i n a t u r a l n e m i k r z y w y c h.

Wielkości K i s można obliczyć, jeżeli krzywa jest dana za pomocą dwu równań postaci

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Znaczenie gieometryczne tych dwu wielkości każe się domyślać, że otrzymane stąd wyrażenia dla K i s mają zawsze te same wartości, niezależnie od wyboru układu spółrzędnych, albo, co na jedno wyjdzie, zachowują swoje wartości przy wszelkich ruchach krzywej w płaszczyźnie, o ile ta krzywa nie zmienia przytym swej postaci. Nie powołując się na znaczenie gieometryczne, można dowieść analitycznie, że tak jest istotnie.

Z określenia krzywizny (p. § 2)

$$K = \frac{d\tau}{ds}$$

można wyprowadzić wzór:

$$K = \frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}^{\,3}},$$

gdzie kreski oznaczają różniczkowanie względem parametru t. Otóż dowodzi się, że wartość tego wyrażenia pozostaje bez zmiany przy wszelkich przekształceniach ruchu (patrz Teorja grup § 6); krzywizna K jest więc n i e z m i e n n i k i e m r ó ż n i c z k o w y m k r z y w e j z e w z g l ę d u n a w s z y s t k i e ruchy w płaszczyźnie. Tę samą własność mają jeszcze wszystkie pochodne krzywizny względem kąta styczności $d\tau$.

Z innych przekształceń, przy których twór rozpatrywany nie pozostaje bez zmiany, na uwagę zasługuje przedewszystkim nawijanie jednej powierzchni na drugą, lub rozwijanie jej na płaszczyznę. Powierzchnia S_1 może być nawinięta na powierzchnię S_2, jeżeli pomiędzy punktami obu powierzchni można ustalić taką odpowiedniość, że każdemu łukowi A_1B_1 powierzchni S_1 odpowiada równy mu łuk A_2B_2 powierzchni S_2.

Zagadnienia tego rodzaju prowadzą do rozpatrywania elementu łuku, obranego na powierzchni ds.

Niech będą spółrzędne x, y, z punktów powierzchni dane jako funkcje parametrów u, v, wtedy będzie:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

gdzie:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2;$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v};$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Wyrażenie powyższe dla kwadratu elementu linjowego ds^2 nazywa się pierwszą formą różniczkową zasadniczą powierzchni (Gauss).

4. Metody, które starałem się naszkicować powyżej, prowadzą same do nowych zagadnień, ogólniejszych od tych, które postawiliśmy sobie na początku. Przedewszystkim zamiast przekształceń ruchu można poddawać powierzchnie jakimkolwiek innym przekształceniom, np. takim, przy których pola pozostają bez zmiany, albo przy których kąty pozostają bez zmiany [1]).

Do innych kategorji ciekawych zagadnień prowadzą poszukiwania powierzchni, spełniających pewne określone warunki.

---

[1]) Inne zagadnienia, dotyczące przekształceń, patrz w rozdziale p. t.: Teorja grup.

Można np. żądać, ażeby główne promienie krzywizny R_1, R_2 w każdym punkcie powierzchni były związane pewnym równaniem $F(R_1, R_2)=0$. Są to t. zw. *powierzchnie* WEINGARTENA. W szczególności równanie $\frac{1}{R_1 R_2}=$ const. prowadzi do *powierzchni o krzywiźnie stałej*; równanie $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0$ do *powierzchni minimalnych*, charakterystycznych przez to, że mają najmniejsze pole ze wszystkich powierzchni, dających się poprowadzić przez krzywą skośną zamkniętą [1]).

Z linji, poprowadzonych na powierzchni, na szczególną uwagę zasługują: *linje krzywizny*, t. j. takie, których styczna w każdym punkcie leży w jednej z głównych płaszczyzn normalnych do powierzchni; *linje gieodezyjne*, dla których płaszczyzna ściśle styczna w każdym punkcie jest prostopadła do płaszczyzny stycznej do powierzchni i które zawierają, jako przypadek szczególny, najkrótsze linje, dające się poprowadzić na powierzchni pomiędzy dwoma punktami; *układy izotermiczne linji*, czyli układy linji, przecinających się pod kątem prostym, jak np. południki i równoleżniki na kuli i t. d.

5. Gieometrja różniczkowa ma liczne zastosowania w gieodezji, kartografji, kinematyce. Ponieważ postać ziemi można z wystarczającym przybliżeniem przyjąć za kulistą, przeto zadanie kartografji w ogólności sprowadza się do odwzorowania kuli na płaszczyznę, przy zachowaniu pewnych warunków, jako to: równość odpowiadających sobie pól, równość kątów i t. d. Równość długości zachować się nie da, gdyż kula nie jest powierzchnią rozwijalną.

6. Gieometrja różniczkowa powstała jednocześnie z rachunkiem różniczkowym: twórcy jego NEWTON (1643—1727) i LEIBNIZ (1646—1716) interpretowali gieometrycznie rezultaty otrzymane. Znaczniejszy postęp, zarówno pod względem metody, jak rezultatów, zawdzięczamy EULEROWI (1707—1783), który pierwszy używał długości łuku, jako parametru, stosował od-

---

[1]) Ażeby otrzymać model powierzchni minimalnej, wystarczy zanurzyć kawałek zgiętego drutu w roztwór mydła i wyjąć; błonka, rozpięta na drucie, wyobrażać będzie powierzchnię minimalną.

wzorowanie krzywej skośnej na kuli, rozpatrywał linje gieodezyjne, krzywiznę linji na powierzchni, wprowadził parametry u, v i t. d. Z r. 1760 pochodzi twierdzenie EULERA, że dwie płaszczyzny, normalne do powierzchni w jednym z jej punktów i wyznaczające na niej krzywe o krzywiźnie największej i najmniejszej, są do siebie prostopadłe [1]).

Z następców EULERA miejsce wybitne zajmuje G. MONGE (1746—1818) [2]), który za pomocą równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych bada układy powierzchni i wprowadza linje krzywiznowe. Dalszy rozwój gieometrji różniczkowej zawdzięczamy GAUSSOWI (1777—1855) [3]). Rozprawa jego stanowi punkt wyjścia dla nowożytnej teorji powierzchni. Krzywizna zupełna, nawijalność jednej powierzchni na drugą (odwzorowanie izometryczne), teorja linji gieodezyjnych — są to najważniejsze wyniki rozprawy GAUSSA, stanowiące podstawę teorji niezmienników różniczkowych. RIEMANN [4]) i CHRISTOFFEL [5]) rozszerzyli zagadnienie na rozmaitości wielowymiarowe.

7. Kto rozpoczyna naukę gieometrji różniczkowej, może nie rozporządzać rozległym przygotowaniem. Pierwsze wiadomości o stycznych, krzywiźnie, punktach osobliwych, obliczaniu pól i t. d. znaleźć można prawie w każdym, nawet najelementarniejszym podręczniku rachunku różniczkowego i całkowego; w miarę posuwania się naprzód rozporządzać musimy coraz to większemi środkami. W każdym razie do gruntownej pracy w tej dziedzinie przystąpić można dopiero po przejściu obszer-

---

[1]) L. EULER. Recherches sur la courbure des surfaces, Histoire de l'Académie. Berlin, Mémoires XVI, 1760.

[2]) G. MONGE. Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie, Paryż, 1795; wydania późniejsze tegoż dzieła noszą tytuł: Applications de l'analyse à la géométrie, Paryż, 1807, 1809, 1850.

[3]) C. F. GAUSS. Disquisitiones generales circa superficies curvas, Gietynga, 1828; przekład polski: Rozważania ogólne o powierzchniach krzywych, przekład S. FINKELKRAUTA, objaśnienia J. RUDNICKIEGO, przedmowa K. ŻORAWSKIEGO. Warszawa, 1913.

[4]) Über Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Göttinger Abh. XII, 1868.

[5]) Über die Transformation der homogenen differentialausdrücke zweiten Grades. CRELLES Journal LXX, 1869.

nego kursu rachunku różniczkowego i całkowego oraz gieometrji analitycznej i przy jednoczesnym studjowaniu teorji funkcji analitycznych i równań różniczkowych.

8. Literatura [1]).

L. Raffy. Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse (éléments de la théorie des courbes et des surfaces). Cours de la Faculté des Sciences de Paris. Paryż, Gauthier-Villars, 1897; str. VI+251. Cena fr. 7.50.

Wykład jasny, odpowiedni zwłaszcza dla początkujących, ale nie zawiera krzywych płaskich, które zresztą można znaleźć w każdym niemal podręczniku rachunku różniczkowego.

G. Scheffers. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Lipsk, Veit & Co, w dwu tomach.

I. Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume. Wyd. 2, 1910; str. X + 482.

II. Einführung in die Theorie der Flächen. Wyd. 2, 1913.

Podręcznik ten jest najbardziej odpowiedni do nauki, zawiera znaczną liczbę przykładów i ćwiczeń. Twory urojone traktowane są równorzędnie z rzeczywistemi.

L. Bianchi. Lezioni di geometria differenziale. Pisa, 1894, str. VIII + 541. Wyd. 2, 1902, tom I, str. 524.

Wydanie niemieckie tegoż dzieła, w którym dodano rozdział o przestrzeniach wielowymiarowych (w wyd. 2-gim opuszczony):

L. Bianchi. Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von M. Lukat. Lipsk, 1899, wyd. 2, 1910. Cena w opr. m. 24.60.

Dzieło obszerniejsze, wymagające gruntowniejszego przygotowania matematycznego, traktuje teorję powierzchni jako zastosowanie teorji niezmienników form różniczkowych stopnia 2-go.

G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des

---

[1]) Co do literatury przedmiotu — zamieszczam prócz kilku innych książek głównie dzieła, wymienione w przedmowie prof. K. Żorawskiego do przekładu polskiego wspomnianej wyżej rozprawy Gaussa: Disquisitiones.

surfaces et les applications géometriques du calcul infinitésimal. Paryż. 4 tomy:

I. Généralités (Applications à la géometrie de la théorie des mouvements relatifs). Coordonneés curvilignes. Surfaces minima, 1887; str. VI + 513. Cena fr. 15.— (Wyczerpany).

II. Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. Des lignes tracées sur les surfaces. 1889; str. 522. Cena fr. 15.

III. Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces, 1894; str. IV+512. Cena fr. 15.

IV. Déformation infiniment petite et représentation sphérique. 1896; str. 548. Cena fr. 15.

Odrębny charakter ma książka:

E. Cesàro. Lezioni di geometria intrinseca. Neapol, 1896. — Vorlesungen über natürliche Geometrie. Autorisierte deutsche Ausgabe von G. Kowalewski. Lipsk, 1901; str. VI + 341. Cena m. 12.

Autor za punkt wyjścia bierze równania naturalne krzywych i powierzchni i na tej podstawie analitycznej bada te utwory.

Zaznaczymy jeszcze, że obszerniejsze podręczniki analizy zawierają również wykład gieometrji różniczkowej, np.:

É. Goursat. Cours d'Analyse, tom I (przekład polski w druku).

Literaturę działów specjalnych znaleźć można w Repertorjum Pascala, w wydaniu polskim tom II, rozdz. XVI, XVII i XX.

W Encyklopädie der math. Wiss. poświęcono gieometrji różniczkowej część 3 tomu III; tam również czytelnik znajdzie bibljografję przedmiotu.

O modelach i przyrządach patrz Gieometrja Syntetyczna str. 174—175.

TOPOLOGJA.

OPRACOWAŁ

ZYGMUNT JANISZEWSKI.

Treść: 1. Przedmiot topologji. 2. Początki rozwoju. Zagadnienie o 7-u mostach w Królewcu. 3. Twierdzenie EULERA o wielościanach. 4. Klasyfikacja powierzchni. 5. Wstęga MÖBIUSA. 6. Zagadnienie czterech barw. 7. Nowe metody i kierunki badań. 8. Kierunek DEHNA. 9. Kierunek SCHOENFLIESA. 10. Wymagane przygotowanie. 11. Zastosowania topologji; jej znaczenie poznawcze. 12. Topologja jako przedmiot rozrywki. 13. Literatura.

---

1. *Topologia*, zwana także *Analysis situs*, jest nauką o takich własnościach utworów gieometrycznych, które nie znikną, gdy utwory przekształcimy w dowolny sposób ciągły i jedno-jednoznaczny [1]), czyli takich, które nie znikną po dowolnym wygięciu i rozszerzeniu lub skurczeniu się figury (bez rozdarcia i bez zlepienia w jakimkolwiek miejscu) [2]). W pierwszej chwili

---

[1]) t. j. taki, że każdemu punktowi danej figury odpowiada jeden i tylko jeden punkt figury przekształconej (*jednoznaczność*), oraz parze zbliżających się nieskończenie punktów — para punktów, również nieskończenie zbliżających się (*ciągłość*), i odwrotnie. Wyrażenie *jedno-jednoznaczny* (*ein-eindeutig*) oznacza to samo, co odwracalnie jednoznaczny. W tym samym znaczeniu bywa używany po polsku niezbyt udatny wyraz *dwujednoznaczny* (z francuskiego *biunivoque*).

[2]) Poglądowo możemy sobie tak wyobrazić przedmiot naszych badań: jeśli mamy jakiś przedmiot z gnącego się materjału, np. kawałek sznurka ze zszytemi ze sobą końcami, to opisując jego kształt nie będziemy mówili o chwilowych jego własnościach (czy jest on kołem, elipsą lub trójkątem, co zależy od tego, jak go ułożymy), lecz o tych stałych, istotnych własnościach kształtu, które się nie zmieniają wraz ze zmianą warunków; a więc: że nie ma on końców, że jest linją zamkniętą, że posiada taką

można mieć wrażenie, że żadna własność figury przy tak dowolnych przekształceniach nie zostanie zachowana (bo rzeczywiście, prawie żadna z tych, których badaniem zajmują się inne działy gieometrji, zachowaną nie zostaje): możemy trójkąt przekształcić np. na kwadrat, na koło i t. p. i to na dowolnie wielkie lub małe. Jednak po zastanowieniu się staje się oczywistym — co można (i naturalnie trzeba) ściśle udowodnić — że odcinka prostej nie można przekształcić[1]) w sposób ciągły na okrąg koła; należało by chyba zlepić końce odcinka, a to, jak wiemy, nie jest dozwolone. Zamkniętość linji jest więc taką własnością niezmienną, której badaniem zajmuje się topologja.

---

a taką długość. Gdybyśmy jednak w dodatku sobie wyobrazili, że jest on zrobiony z materjału, który rozciąga się i kurczy dowolnie (częściowo własności te posiada guma), to musielibyśmy przestać mówić o jego długości, ograniczając się przy jego opisie do takich własności, jak zamkniętość, t. j. do własności rozpatrywanych właśnie przez topologję. Podobnie, gdy mówimy o kształcie pewnego człowieka, mamy na myśli tylko pewne niezmienne własności tego kształtu (niezmienne wobec przekształceń innych, niż w topologji), gdyż człowiek siedzący ma — w zwykłym znaczeniu, ze stanowiska gieometrji elementarnej — kształt inny, niż człowiek stojący, inny przy zgięciu ręki, a inny przy jej wyprostowaniu (por. przypisek na str. 398).

Tu musimy odrazu rozstrzygnąć jedną mogącą się nasunąć wątpliwość: nasze określenie ciągłości przekształcenia jest niezupełnie zgodne z podanym jego objaśnieniem poglądowym. Gdybyśmy chcieli otrzymać takie przekształcenie zupełnie ogólne, należałoby przyjąć obok giętkości i rozszerzalności jeszcze przenikalność figury. O ile przenikalność odrzucamy, to otrzymamy specjalny dział topologji (*Connexus*), w którym nie rozważa się figury samej w sobie, lecz w stosunku do reszty przestrzeni i rozpatruje tylko przekształcenia całej przestrzeni wraz z daną figurą. Tak np. posiadanie węzła przez linję zamkniętą (model takiej linji otrzymamy zawiązawszy węzeł na kawałku sznurka i potym połączywszy jego końce; p. fig. 24) nie jest jej własnością niezmienną, jeśli będziemy rozpatrywali tę linję samą w sobie; będzie zaś, gdy ją będziemy rozważali w łączności z przestrzenią trójwymiarową, w której się ta linja znajduje.

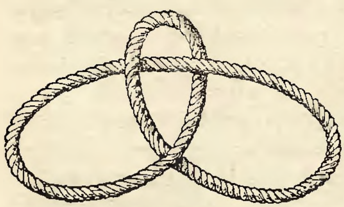


Fig. 24.

[1]) Mówiąc o przekształceniu w tym rozdziale, mamy zawsze na myśli przekształcenie ciągłe i jedno-jednoznaczne.

2. Nauka ta powstała dość późno, w połowie w. XIX. Pierwszą pracą w tym kierunku, napisaną ze świadomością, że mamy tu do czynienia z nauką nową, była praca Listinga: Vorstudien zur Topologie (w Göttinger-Studien 1847 r.). Od niej zwykle datuje się powstanie topologji. Jednak znacznie wcześniej zajmował się różnemi należącemi tu zagadnieniami Euler (1707—1783) (p. niżej).

Prawie jednocześnie z Listingiem zajął się, zmuszony do tego swemi badaniami z teorji funkcji analitycznych, zagadnieniami topologicznemi Riemann (1826—1866) w swej pracy doktorskiej[1]) (1851) oraz w Theorie der Abel'schen Funktionen (1857). Prace Riemanna mają to historyczne znaczenie dla topologji, że pierwsze wykazują jej związek z resztą matematyki (z teorją funkcji analitycznych), co było konieczne do zainteresowania nią ogółu matematyków. Pomimo to jednak topologja pozostala zawsze na uboczu od głównego prądu matematyki w. XIX, gdyż była mu obcą swemi zagadnieniami, metodami i ogólnością przedmiotu, do jakiej prowadziło pojęcie dowolnego ciągłego jedno-jednoznacznego przekształcenia, ogólnością, z którą nie umiano sobie w owym czasie dać rady, a która i dziś jeszcze przy nowych metodach i pojęciach nastręcza poważne trudności. Skutkiem tego rozwój jej był powolny.

Początkowe odkrycia i teorje wyrosły z obserwacji, drogą indukcyjną, empiryczną niemal, jak to było i w innych gałęziach matematyki, które nie są tylko przedłużeniami i rozgałęzieniami już istniejących, lecz wyrastają wprost z podstaw (np. gieometrja elementarna, teorja liczb). Dowody podawane przez pierwszych autorów (Euler, Listing, po części Riemann, Möbius) — o ile oni je wogóle podają — są zupełnie niewystarczające. Pierwsze rozpatrywane tematy były zaczerpnięte z gier i zabaw matematycznych. Jednym np. z tematów Eulera było *zagadnienie o 7-miu mostach w Królewcu:* mosty, rozmieszczone jak na fig. 25, należało przejść jednym ciągiem, przez każdy

---

[1]) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse (Inauguraldissertation).

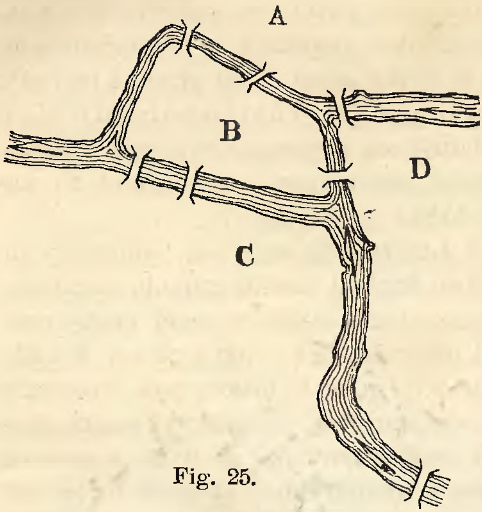


Fig. 25.

raz i tylko raz jeden. EULER wykazał, że zadanie to jest niemożliwe i podał warunek wystarczający i konieczny do tego, aby można było przejść w sposób ciągły po **w s z y s t k i c h** odcinkach linji, złożonej ze skończonej liczby łuków, łączących skończoną liczbę punktów danych, nie przechodząc po **ż a d n y m** łuku **d w a** razy. Warunkiem tym jest, aby nie było wcale punktów, z których wychodzi nieparzysta ilość odcinków lub było ich tylko dwa. Zagadnienie to należy do topologji, gdyż własność linji, że można przejść w sposób ciągły wszystkie jej odcinki, nie zniknie, gdy linję będziemy giąć, kurczyć i rozszerzać, byleby połączenie poszczególnych jej odcinków ze sobą nie uległo zmianie; zagadnienie o 7-miu mostach w Królewcu sprowadzi się zatym do rozważania linji, przędstawionej na fig. 26.

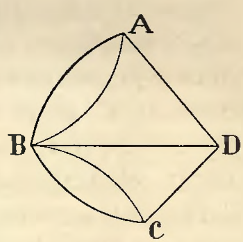


Fig. 26.

3. Do topologji należy także *twierdzenie* EULERA, orzekające, że suma liczby wierzchołków (w) i liczby ścian (s) wielościanu (wypukłego) równa się liczbie krawędzi (k) powiększonej o 2:

$$w + s = k + 2,$$

gdyż stosuje się nietylko do wielościanów. W twierdzeniu tym bowiem chodzi o krawędzie nie jako linje proste i nawet nie jako linje załamania — te ich własności mogą po przekształceniu zniknąć, nie mogłyby zatym być przedmiotem topologji — lecz o krawędzie, jako o **l i n j e p o d z i a ł u** prowadzone na powierzchni zamkniętej (wielościanu); tak samo wierzchołki rozpatrujemy tu tylko jako punkty, w których schodzą się różne łuki wspomnianych linji (które są dla wielościanów krawędziami), a ściany — jako obszary, na które te linje podzieliły rozpatrywaną powierzchnię zamkniętą. Jakkolwiek przekształcimy wielościan, to liczby tych łuków, punktów i obszarów nie zmienią się i pozostaną w tym samym związku, chociaż krawędzie i ściany mogą się powykrzywiać, kanty i kąty pozaokrąglać; związek więc między temi liczbami należy do prawd topologicznych. Przedmiotem badania jest tu wzajemny stosunek 3 rodzai figur gieometrycznych: powierzchni, leżącej na niej siatki linji i leżącego na tej ostatniej zbioru punktów (DEHN nazywa dział topologji, który zawiera takie badania, *Complexus*).

Twierdzenie EULERA nie jest ogólnym: stosuje się tylko do wielościanów [1]), które dadzą się przekształcić na kulę (ten warunek jest spełniony dla wszystkich wielościanów w y p u k ł y c h). Istnieją jednak powierzchnie zamknięte, które są topologicznie różne od kuli (t. j. nie dadzą się na kulę przekształcić); taką przedstawia np. wielościan na fig. 27, do którego też nie stosuje się twierdzenie EULERA, co czytelnik może sprawdzić, przeliczając wierzchołki, krawędzie i ściany [2]).

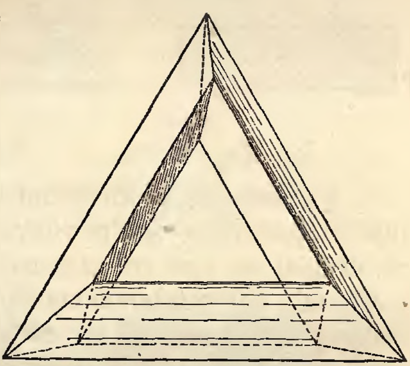


Fig. 27.

4. Zrozumiałym wobec tego jest, że uogólnienie twierdzenia EULERA, które było celem głównej pracy LISTINGA (C e n s u s räumlicher C o m p l e x e, 1861), doprowadziło ostatniego do r o z k l a s y f i k o w a n i a powierzchni. Takąż klasyfikację przeprowadzili RIEMANN i MÖBIUS (1790—1868). Jest to najważ-

[1]) Ogólniej: do powierzchni przekształcalnych n a k u l ę, podzielonych ł u k a m i na obszary, dające się przekształcić n a p o w i e r z c h n i ę k o ł a.

[2]) Wymienimy tu wyczerpujące dzieło o teorji wielościanów:

M. BRÜCKNER. V i e l e c k e und V i e l f a c h e. Theorie und Geschichte. Mit 7 lithographierten und 5 Lichtdruck-Doppeltafeln. Lipsk, 1900; stronic VIII + 227. Cena w oprawie m. 16.

niejszy dział topologji ze względu na zastosowania w teorji funkcji analitycznych, w szczególności funkcji wieloznacznych, które klasyfikujemy według rodzaju odpowiadających im t. zw. *powierzchni* RIEMANNA[1]). Powierzchnie klasyfikujemy według liczby brzegów i według t. zw. spójności. *Spójność* mierzymy maksymalną ilością przecięć, łączących brzegi powierzchni[2]), które można przeprowadzić na powierzchni, nie wywołując jej rozpadnięcia się. Własności te nie znikają przy przekształcaniu. Jako przykład, rozważamy: 1) powierzchnię prostokąta (fig. 28), 2) powierzchnię prostokąta z dwoma otworami (fig. 29) i 3) powierzchnię utworzoną z poprzedniej przez połączenie otworów rurką (fig. 30).

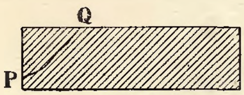


Fig. 28.

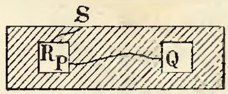


Fig. 29.

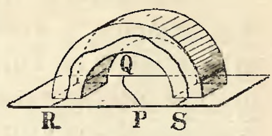


Fig. 30.

Na pierwszej powierzchni każde cięcie (np. linja PQ) wywołuje rozpadnięcie się powierzchni (powierzchnia *jednospójna*), na drugiej zaś i na trzeciej można zrobić po dwa cięcia (np. PQ i RS) tak, aby powierzchnia się nie rozpadła (powierzchnie *trójspójne*). Druga jednak nie da się przekształcić w trzecią, która różni się od niej ilością brzegów.

5. Pojęcia nasze o rozklasyfikowaniu powierzchni uzupełniło ważne odkrycie MÖBIUSA (1858) istnienia *powierzchni jednostronnych*. Powierzchnie, z któremi zwykle mamy do czynienia, są *dwustronne:* dają się one pomalować dwiema farbami, np. na biało i na czerwono[3]), w ten sposób, iż każdy punkt będzie pomalowany i na biało (z jednej) i na czerwono (z drugiej strony powierzchni) i barwy te nigdzie nie będą się ze sobą stykały; chcąc

---

[1]) *Powierzchnia* RIEMANNA jest to forma (lub, jeśli kto woli, uzmysłowienie) rozłożenia wartości funkcji wieloznacznych.

[2]) Na powierzchni bez brzegów, t. j. zamkniętej, za pierwsze przecięcie używana jest linja zamknięta (t. j. linja, która jest przekształceniem koła).

[3]) Podajemy tu poglądowe określenie dwu i jednostronności powierzchni. Naturalnie istnieje określenie ścisle, zupełnie abstrakcyjne.

przejść od jednej barwy do drugiej, trzeba przejść przez brzeg. Tak np. można rozróżniać dwie strony powierzchni koła; podobnie »stronę wewnętrzną« i »zewnętrzną« kuli. Na powierzchni jednostronnej takie pomalowanie na dwie barwy jest niemożliwe: zacząwszy malować np. na czerwono w jednym miejscu, ma-

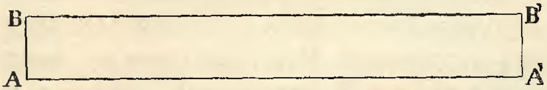


Fig. 31.

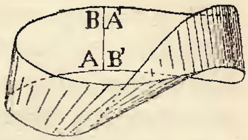


Fig. 32.

lując w sposób ciągły i nie przechodząc przez brzeg, zamalujemy ją całą tak, że na drugą barwę już miejsca nie będzie. Nie można tu więc mówić o »dwuch stronach«. Pierwszym znanym przykładem takiej powierzchni jest *wstęga* MÖBIUSA. Otrzymujemy ją z prostokąta $ABB'A'$ (fig. 31), zwijając go w ten sposób, aby punkt A połączył się z punktem B', a B z A', czyli łącząc bok AB z $A'B'$ po przekręceniu jednego z nich (fig. 32).

6. Do topologji należy także t. zw. *zagadnienie czterech barw*. Chodzi w nim o rozstrzygnięcie, czy do pokolorowania każdej »mapy« (t. j. części płaszczyzny podzielonej na dowolną ilość obszarów częściowych) wystarczą 4 barwy, przyczym wymagamy, aby każde dwa sąsiadujące obszary miały barwy różne[1]).

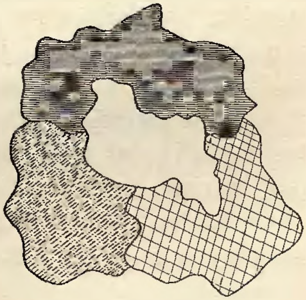


Fig. 33.

Nie znamy żadnego podziału płaszczyzny na obszary, aby takie pokolorowanie z pomocą 4 barw miało być niemożliwe. (Że to może być niemożliwe przy pomocy 3 barw, to wykazuje już fig. 33). Wydaje się bardzo prawdopodobnym, że 4 barwy

[1]) Zadowalamy się i tu sformułowaniem poglądowym.

zawsze wystarczą, dowodu jednak na to dotychczas znaleźć nie udało się [1]).

7. Późniejsi badacze chwycili się ściślejszych środków badania. Tam, gdzie nie wystarczała prosta kombinatoryka (jak w zadaniach, podobnych do zagadnienia o 7-miu mostach), prowadzono badania przy pomocy gieometrji analitycznej z całym aparatem analizy wyższej (Betti, Van Dyck, Poincaré); rozwinęli oni bardzo topologję; zawdzięcza ona najwięcej temu kierunkowi. Wspomnimy przytym, że Poincaré pierwszy badał w topologji figury o więcej niż 3 wymiarach. Badania te jednak, pomimo swych rezultatów, nie wszystkich zadowoliły, gdyż było to badanie nie bezpośrednie, lecz za pośrednictwem pojęć obcych topologji, a o wiele bardziej złożonych niż właściwe pojęcia topologiczne (np. pojęcie całki).

Estetyczne i poznawcze względy wymagały, aby narzędzie badania odpowiadało przedmiotowi badanemu i było odeń prostsze. Możliwym to jednak stało się dopiero w czasach najnowszych, w naszym wieku, gdy uzyskały większą popularność: »metoda aksjomatyczna« (p. Podstawy gieometrji; por. też Zakończenie) i teorja mnogości. Odpowiednio do tych dwuch metod zjawiły się dwa nowe kierunki; za przedstawiciela jednego z nich można uważać Dehna, drugiego — Schoenfliesa.

8. Dehn [2]) rozważa jako przedmioty pierwsze (t. j. nie dające się określić; por. Podstawy gieometrji) w topologji: *punkt, łuk* pomiędzy dwoma punktami [3]), *czaszę*, t. j. część powierzchni, ograniczoną linją zamkniętą (t. j. zamkniętym ciągiem łuków takich, że każde dwa przyległe mają jeden koniec wspólny) i t. d. dla figur więcej wymiarowych.

---

[1]) Zapoznać się bliżej z tym zagadnieniem można z pracy (w której jest też podana dotycząca go literatura):

P. Wernicke. Über den kartographischen Vierfarbensatz. Mat. Ann., t. 58 (1904).

[2]) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, t. III, zesz. 1.

[3]) Możemy przyjąć takie założenie, gdyż, jak wiemy, dwa odcinki (linji prostych czy krzywych) — bez względu na różnice ich długości i krzywizny — są dla topologji tak samo jednakowe, jak dwa punkty lub dwie proste dla gieometrji zwyklej.

Co do tych, nie dających się określić, przedmiotów, topologja stawia szereg założeń (*aksjomatów*; por. Podstawy gieometrji), podzielonych na dwie grupy: postulaty istnienia (istnieje nieskończenie wiele punktów, między dwoma punktami istnieje nieskończenie wiele łuków i t. d.) i postulaty rozkładu (każdy łuk PQ można »rozłożyć« na dwa PR i RQ i t. d.).

W tym ujmowaniu topologji, gdzie zawsze mamy do czynienia ze skończoną ilością elementów, znika pojęcie przekształcenia ciągłego (bo znika pojęcie ciągłości), a zastępuje je *rozkład* należących do figury łuków, czasz i t. d. na dwie części i więcej; topologja staje się częścią kombinatoryki, jak to sam Dehn zaznacza. Należy tu podnieść, że zasługą takiego traktowania rzeczy jest uchwycenie istotnych dla topologji cech figur gieometrycznych i oczyszczenie jej od wszelkich elementów obcych.

9. Lecz jeśli się stoi przy określeniu topologji podanym na początku, jeśli się chce utrzymać związek tej nauki z resztą gieometrji, a nie tworzyć nauki niezależnej o nowych pojęciach pierwszych i nowych aksjomatach, to trzeba odpowiedzieć na pytania: jaka figura jest »łukiem«, jaka »czaszą«; innemi słowy, należy pojęcia pierwsze topologji sprowadzić do pojęć pierwszych dla całej gieometrji, t. j. określić je; aksjomaty zaś nowe udowodnić za pomocą ogólnie przyjętych.

Teorja mnogości daje nam możność zajęcia się tym zadaniem: każda bowiem figura jest to zbiór czyli mnogość punktów. Pytania poprzednie sprowadzają się do następujących: jakie własności musi posiadać mnogość punktów, aby zasługiwała na nazwę łuku i t. d.

Badania te przyniosły inną jeszcze korzyść: wykazały istnienie takich figur gieometrycznych, które nie są ani łukami, ani czaszami i t. d., ani też ich zbiorem w skończonej liczbie, czyli nie dają się sprowadzić do pojęć pierwszych, przyjętych przez Dehna, dla których więc niema miejsca w jego teorji.

Pierwszym i zarazem najbardziej znanym przykładem badań z tej dziedziny jest twierdzenie Jordana (Cours d'Analyse, wyd. 2-ie, 1893 lub 3-ie, 1909 r., t. I, str. 90—100), że każda linja *zwykła* (*simple, einfach*) *zamknięta* (t. j. będąca przekształceniem koła) położona na płaszczyźnie dzieli nie należące do niej punkty tej płaszczyzny na dwie grupy: leżące wewnątrz i zewnątrz linji. Przedtym matematycy przyjmowali to twierdzenie za oczywiste, bez dowodu [1]).

---

10. Jak widać z powyższego przedstawienia treści topologji, jest ona niezbyt jednolita; wynikło to prawdopodobnie z dorywczości, z jaką była zazwyczaj traktowana przez swych twórców; dlatego też różne jej działy wymagają różnego przygotowania.

Traktaty starsze nie wymagają żadnego przygotowania i czytają się łatwo.

Z nowych żadnego również przygotowania nie wymagają prace kierunku Dehna, prace zaś kierunku Schoenfliesa wymagają tylko jednej części teorji mnogości (t. zw. teorji mnogości punktów) oraz pewnego obznajmienia się z podstawami gieometrji. Pomimo to prace, należące tak do jednego, jak i do drugiego z tych dwuch nowych kierunków, wymagają dużego wyrobienia matematycznego i dużej zdolności myślenia abstrakcyjnego.

Wreszcie prace, posiłkujące się przedstawieniem analitycznym, wymagają dosyć dużo wiadomości z analizy wyższej (np. całek krzywolinjowych, wyznacznika funkcyjnego i t. p.), głównie znajomości rachunku całkowego i teorji funkcji zmiennej rzeczywistej.

11. Stojąc sama u podstaw matematyki i tylko na nich się wspierając (na kombinatoryce, teorji mnogości, podstawach gieometrji), topologja znajduje zastosowanie w matematyce jedynie do teorji funkcji analitycznych, nauki najbardziej rozwiniętej (głównie przy całce Cauchy'ego i funkcjach wieloznacznych: *powierzchniach Riemanna*). Wytłumaczyć to można tym, że klasy, na które topologja dzieli figury gieometryczne, są tak obszerne, iż wszystkie inne działy matematyki, mniej rozwinięte od teorji funkcji, nie wyszły poza obręb najpro-

---

[1]) Najprostszy dowód twierdzenia Jordana podaje L. E. J. Brouwer: Beweis des Jordanschen Kurvensatzes. Math. Ann., t. 69 (1910); str. 169—175.

stszych z nich, a więc i nie miały potrzeby oddzielnego ich badania [1]).

Zwykle w większych podręcznikach teorji funkcji analitycznych podawane są potrzebne do ich czytania wiadomości

---

[1]) Poza ten obręb wychodzą niedawno zaczęte i bardzo nieliczne badania nad *krzywemi dowolnemi*, przez co zbliżają się do topologji. Polegają one na badaniu klas krzywych takich, że część ich — w przeciwieństwie do krzywych analitycznych – nie określa całej krzywej. W analizie podobnie ogólne badania rozwinęły się (p. Rozwinięcia na szeregi, § 5) już oddawna. Najbardziej zbadane są krzywe zamknięte wypukłe, t. j. takie, które dowolna prosta przecina najwyżej w dwu punktach; znalazły one bowiem różne zastosowania, np. w teorji liczb, w teorji funkcji.

Najważniejszemi pracami z tej dziedziny są:

H. Brunn. Ueber Ovale und Eiflächen. Inaugural-Dissertation, Monachjum, Ackermann, 1887; str. 42.

H. Brunn. Ueber Curven ohne Wendepunkte. Habilitationsschrift, Monachjum, Ackermann, 1889; str. 74. Są to najpierwsze prace w tej dziedzinie, łatwe i interesujące.

H. Minkowski. Geometrie der Zahlen. Lipsk, Teubner, 1896; drugie wydanie pośmiertne, uzupełnione, 1910; str. 256. Cena m. 9.

Jest to jedno z głównych dzieł z teorji liczb zmarłego niedawno (1909) uczonego niemieckiego, profesora w Gietyndze, w znacznej części poświęcone zajmującym nas badaniom gieometrycznym; napisane bardzo abstrakcyjnie i bardzo trudne, aczkolwiek przygotowania nie wymaga żadnego. (Zastosowania teorji ciał wypukłych do teorji liczb — co jest podstawową ideą »Gieometrji liczb« — znajdują się także w wykładzie przystępnym w ładnej książce Minkowskiego: Diophantische Approximationen; p. Teorja liczb, str. 200.)

H. Minkowski. Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs, w Gesammelte Abhandlungen, wydanych przez D. Hilberta, t. 2, Lipsk, Teubner, 1911; str. 131—229. Napisane łatwiej; także i inne prace w tym zbiorze dotyczą tegoż przedmiotu.

A. Hurwitz. Sur quelques applications géometriques des séries de Fourier. Annales de l'École Normale, serja 3, t. 19, str. 357—408. Praca ta wymaga znajomości teorji szeregów trygonometrycznych. Bogata w rezultaty i wyróżniająca się elegancją, czyta się z prawdziwą rozkoszą estetyczną.

C. Juel. Inledning i Laeren om de grafiske Kurver (avec résumé en français). Kjöbenhavn Skrift, 1899; str. 1—90.

C. Juel. Om ikke-analytiske Kurver. Tamże, 1906; str. 296—355.

Prace te, zawierające dużo rezultatów, są niestety napisane po duńsku. Obszerne sprawozdania podaje Jahrbuch über Fortschritte der Mathematik z r. 1900 i 1907 (t. 31 i 38).

z topologji; w niektórych dość obszernie (np. P. Appel et É. Goursat, Théorie des fonctions algébriques. C. Neumann, Riemanns Theorie der Abelschen Integrale), lecz zazwyczaj nie ściśle, metodą starszych autorów.

Zbudowaną z matematyczną ścisłością teorję topologiczną powierzchni z zastosowaniem do powierzchni Riemanna znajdzie czytelnik w książce, bardzo godnej czytania:

H. Weyl. Die Idee der Riemannschen Fläche (tom V zbioru Math. Vorlesungen a. d. Universität Göttingen). Lipsk, Teubner, 1913; str. X + 169. Cena m. 7.

Poza matematyką topologja zastosowań nie ma [1]).

Kto jednak szuka w matematyce wiedzy czystej, temu — mówimy tu także o niematematykach, mając na myśli szczególniej filozofów — można bardzo polecić zaznajomienie się z topologją w ogólnych zarysach w celu wykształcenia ogólnego. Wykryte bowiem przez topologję paradoksalne własności prostych figur (np. powierzchnia jednostronna) uczą, jak rozumować nie można i jak często poczucie oczywistości polega na przyzwyczajeniu. Nowsze zaś badania, oparte na teorji mnogości, nad intuicyjnemi, zdawałoby się, pojęciami gieometrycznemi, jak np. pojęciem »linji«, wykazują, jak chwiejne są one i jak błędne są określenia, które często są podawane dla tych pojęć.

Niestety krótki i przystępny wykład topologji nie istnieje. Kto nie chce włożyć w poznanie jej wiele pracy, ten musi poprzestać na artykułach o charakterze encyklopedycznym. Najlepiej w takim razie przeczytać artykuł Mangoldta i Zorettiego w wyd. francuskim Encykl. nauk matem. (lub przynajmniej rozdział o topologji, str. 126—142, w Couturata, Les principes des Mathématiques, 1905; tłum. niem., 1910) i artykuł Dehna w wyd. niem. Repertorjum Pascala (p. niżej).

---

[1]) Można przypuścić, że w przyszłości nauki przyrodnicze (głównie opisowe), których przedmioty nie posiadają kształtów ściśle określonych lecz są zmienne w pewnych granicach, zapożyczą właśnie od topologji i od wspomnianej w poprzednim przypisku teorji krzywych dowolnych sposoby opisywania i badania tych kształtów. Dotychczas stoi temu na przeszkodzie mały rozwój powyższych działów matematyki. W każdym razie możnaby zwrócić na nie uwagę przyrodników, którzy szukają dróg nowych.

12. Kto szuka w matematyce rozrywki, znajdzie w topologji więcej może, niż w którymkolwiek innym dziale matematyki, ciekawych zadań i łamigłówek (należą tu i zadania konikowe). Do tego celu polecamy dzieło:

W. Ahrens. Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Lipsk, Teubner, 1901; str. 428. Cena m. 10.

Wykład przystępny dla każdego czyni zarazem zadość wymaganiom naukowym. Podana wyczerpująca bibljografja. Do topologji należą tematy gier i zabaw, opisanych w rozdziałach: XI (zadanie konikowe) i XVI—XIX. W drugim, dwutomowym wydaniu tego dzieła ukazał się dopiero tom I (Teubner, 1910; str. 400. Cena m. 7.50), zawierający rozdziały I—XI, więc topologji trzeba szukać w pierwszym wydaniu.

13. Podręczników do topologji — poza wymienionemi w § 11, a zawierającemi tylko topologję powierzchni — niema; całokształt jej przedstawiony jest w pracy:

III AB 3. M. Dehn und P. Heegaard. Analysis situs. Encykl. der mathem. Wissensch., t. III, z. 1 (1907).

Praca ta jest bardzo nieprzystępna. Czytanie jej wymaga wielkiego wyrobienia zdolności myślenia abstrakcyjnego; przytym nie jest to wykład, lecz raczej zbiór rezultatów.

Jasny, ale bardzo krótki (21 str.) jest artykuł Dehna p. t. Topologie w dziele (por. str. 140):

E. Pascal. Repertorium der höheren Mathematik; 2-ie wyd. niem. T. II, cz. 1: Grundlagen und ebene Geometrie. Lipsk, Teubner, 1910. Cena m. 10. W oryginale i w innych wydaniach (także w polskim Dicksteina) artykułu tego niema; w rozdziale o topologji podany jest tylko szereg określeń i rezultatów, oraz obszerna literatura.

W pracach powyższych nie jest uwzględniony ten dział topologji, któryśmy związali z nazwiskiem Schoenfliesa; co do tego działu, patrz:

A. Schoenflies. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Bericht von... Część 2-a. Lipsk, Teubner, 1908; str. 431.. Cena m. 12.

Do topologji można zaliczyć całą treść tego tomu, z wyjątkiem dwuch pierwszych rozdziałów i ostatniego, więc str. 72—263.

Dzieło to napisane bardzo trudno, metodą, odpowiadającą wszystkim wymaganiom ścisłości, nie jest jednak wolne od błędów, wynikających z niedość ścisłego zastosowania tej metody wskutek wielkiej ilości traktowanego materjału. Dlatego należy tę pracę porównać z artykułem:

L. E. J. Brouwer. Zur Analysis situs. Math. Ann., t. 68, 1910, w którym wykazane są błędy, oraz odpowiedź:

A. Schoenflies. Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn L. E. J. Brouwer, tamże.

Praca Schoenfliesa nie uwzględnia najnowszych rezultatów; szukać ich należy w artykule:

III 2. H. Mangoldt-L. Zoretti. Les notions de ligne et de surface. Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Édition française, Tome III, vol. 1, fascicule 1, 2. Wyszedł dopiero początek tego artykułu w z. 1-m

Polecamy porównać tę pracę z rozdziałami 19—23 zawartego w tym samym zeszycie Encyklopedji (albo w wyd. niemieckim w tym samym zeszycie, co wspomniany artykuł Dehna i Heegaarda; rozdziały: 12—16) artykułu:

III 1. F. Enriques. Principes de la Géometrie.

We wszystkich tych pracach znajdujemy bibljografję przedmiotu.

Ze starszych dzieł, mających prawie tylko historyczne znaczenie, wymienimy:

J. B. Listing. Census räumlicher Complexe. Göttinger Abhandlungen X, 1861; Göttinger Nachrichten, 1867.

A. F. Möbius. Theorie der elementaren Verwandschaft. Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, math.-physik. Klasse, t. 15, 1863; str. 18—57, przedrukowane w Gesammelte Werke, wydanych przez F. Kleina, Lipsk, 1886, t. 2, str. 435—471; oraz:

A. F. Möbius. Zur Theorie der Polyëder und der Elementarverwandschaft (Nachlass), w tym samym tomie dzieł, str. 519—559.

Do najważniejszych prac należą:

W. v. Dyck. Beiträge zur Analysis situs: I Aufsatz. Ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkei-

ten. Math. Annalen 32; stronic 56. II Aufsatz. Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen. Math. Ann. 37; str. 44.

H. Poincaré. Analysis situs. Journal de l'École Polytechnique. Série 2, cahier 1, 1895; stronic 121.

— Complément à l'Analysis situs. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo; t. XIII, 1899; stronic 59.

— Second complément à l'Analysis situs. Proceedings of the London Mathematical Society; t. XXXVII.

— Troisième complément à l'Analysis situs. Bulletin de la Société Mathématique de France, 1901.

— Quatrième complément à l'Analysis situs. Journal de Liouville, 1901.

— Cinquième complément à l'Analysis situs. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1904; stronic 66.

Najważniejszemi są: pierwsza praca, oraz pierwszy i piąty »complément«.

Wiele twierdzeń zasadniczych i ci dwaj ostatni autorowie podają bez dowodu, powołując się tylko na ich oczywistość gieometryczną.

PODSTAWY GIEOMETRJI.

OPRACOWAŁ

ZYGMUNT JANISZEWSKI.

Treść: 1. Zadania Podstaw gieometrji. 2. Dzieje ich powstania. 3. Pojmowanie aksjomatów przez dzisiejszą gieometrję; ich dowolność. 4. Przedmiot gieometrji; zupełność układu aksjomatów. 5. Niesprzeczność i niezależność układu aksjomatów. 6. Metoda aksjomatyczna. 7. Odrzucanie aksjomatów. 8. Metoda Riemanna: gieometrja różniczkowa elementu przestrzeni.

O gieometrjach różnych od gieometrji Euklidesa. 9. Gieometrje nieeuklidesowskie. 10. Metoda gieometrji rzutowej. 11. Metoda gieometrji różniczkowej. 12. Zasadnicze własności płaszczyzn nieeuklidesowskich. 13. Znaczenie i rozwój gieometrji nieeuklidesowskich. 14. Gieometrje niearchimedesowskie. 15. Potrzebne przygotowanie do studjowania Podstaw gieometrji i korzyści tego studjowania. 16. Literatura.

---

1. *Podstawy gieometrji* — jak każde »podstawy« — mają odmienne zadanie poznawcze, niż inne działy gieometrji[1]). Dziedzina zagadnień tego działu leży na pograniczu między logiką a matematyką.

Pierwszą pobudką do podjęcia badań nad podstawami gieometrji było dążenie do ścisłości — ścisłości bezwzględnej w dowodach, jaką przypisuje sobie matematyka, i której brak spostrzega w różnych momentach swego rozwoju. Celem zaś, do którego zmierzają dzisiejsze, dalej prowadzone badania w tym kierunku (ścisłość już została osiągnięta), to także — jak w każ-

---

[1]) Por. do tego § rozdz. Logistyka, § 5.

Mowa tu o podstawach gieometrji matematycznej (por. Wstęp ogólny, str. 9 i 24, oraz niżej, § 4). O zagadnieniach dotyczących »przestrzeni realnej« odsyłamy do rozdziału: Zagad. filoz. mat.

dej nauce — poznanie, lecz poznanie innego rodzaju, niż to, które jest celem innych części gieometrji.

Aby ten rodzaj wiedzy dokładnie zrozumieć, przyjrzyjmy się dwu kierunkom w poznawaniu wogóle: poznać więcej i poznać lepiej (głębiej). — Znając np. pewne własności koła, można przejść do badania innych linji gieometrycznych, a można też poprzestać na znajomości koła, lecz zato starać się je poznać lepiej, poznać więcej jego własności; będziemy wtedy mierzyć swą wiedzę nie ilością poznanych figur, lecz głębokością poznania każdej figury.

Można w tym kierunku »poznawania lepiej« pójść jeszcze dalej i poznania nie tylko nie mierzyć ilością poznanych figur, lecz i nie mierzyć ilością poznanych własności — a tym, jak się zna każdą z własności: jej źródła, jej zależność od innych własności i t. p.

Np. »dobrze znać« w tym znaczeniu twierdzenie Pascala (o sześcioboku wpisanym w koło; p. Gieom. synt., str. 158), to będzie: wiedzieć, z jakich własności koła ono wypływa, a więc, że tylko z rzutowych (czyli, że stosuje się do stożkowych wogóle).

Jeśli zastosujemy to ostatnie rozumienie poznania nie do poszczególnej linji (koła), lecz do całej przestrzeni i jej aksjomatów, jako sformułowań głównych jej własności, to otrzymamy zasadnicze zagadnienie podstaw gieometrji: jakie aksjomaty są od siebie niezależne i jakie wystarczają do zbudowania pewnych teorji gieometrycznych?

2. Początek badań nad podstawami gieometrji należy odnieść do czasu powstania naukowego jej systemu, t. j. do Euklidesa (ok. r. 300 przed Chr.). Euklides wyliczając na czele swego dzieła aksjomaty i odgraniczając je wyraźnie od następujących twierdzeń, przez co stworzył wzór teorji dedukcyjnej, podjął pośrednio zagadnienie podstaw gieometrji. Jednak świadomość tego zagadnienia nie występuje jeszcze u Euklidesa dostatecznie jasno; to też i jego rozwiązanie nie jest zadowalające; głównie dla tego nie, że wyliczył on tylko część tych aksjomatów, których używał.

Rozwój dalszy badań nad podstawami gieometrji zawdzięczamy jednak nie spostrzeżeniu tych braków — spostrzeżenie to zrobiono dopiero w czasach ostatnich — lecz faktowi, że jeden z aksjomatów Euklidesa — aksjomat o równoległych[1]) — wydawał się zawsze niedość oczywistym, aby zasługiwać na miano pewnika, t. j. aby być przyjętym bez dowodu.

Wieki całe trwały daremne próby udowodnienia go. Aczkolwiek badania te stawiały sobie zadanie różne od dzisiejszego zadania podstaw gieometrji i wychodziły z zupełnie innych zapatrywań na istotę ścisłości i istotę aksjomatów gieometrycznych, pomimo to jednak przyczyniły się bardzo do rozwiązania go: wyświetliły mianowicie znacznie rolę aksjomatu o równoległych, wykazując zależność lub niezależność różnych twierdzeń od niego.

Bezowocność tak długotrwałych wysiłków nasunęła myśl, że widocznie pewnik o równoległych nie da się udowodnić wcale z pomocą pozostałych aksjomatów Euklidesa, t. j. nie jest ich logicznym wynikiem; a więc, że założenie, iż jest on błędny, nie pociągnie za sobą żadnej sprzeczności logicznej. Że zaś w matematyce wszystko, co się da całkowicie określić, a nie jest sprzeczne w sobie, istnieje (jako pojęcie), więc istnieje rozciągłość, w której »pewnik o równoległych« nie jest spełniony, która jest właśnie przez to określona. Tak powstała t. zw. *gieometrja Łobaczewskiego*.

Myśl odrzucenia pewnika o równoległych powziął pierwszy Gauss (1777—1855); zajmował się nią już w r. 1795. Nie ogłosił jej jednak, bojąc się, jak się wyraża w liście do Bessla z 29/I 1829, »krzyku Beotów«. Urzeczywistnili ją, niezależnie od siebie, Mikołaj Łobaczewskij w r. 1829 w pracy ogłoszonej po rosyjsku i Jan Bolyai w r. 1832. Możliwym jest, że znali obaj, a przynajmniej drugi, myśl Gaussa (Gauss korespondował o tych kwestjach z ojcem Jana Bolyai'a, Wolfgangiem).

3. Krok ten stanowczy i epokowy, choć nie stworzył jeszcze nauki o podstawach gieometrji (stworzono na razie tylko

---

[1]) Aksjomat ten wypowiadamy zwykle w formie: przez dany punkt do danej prostej, przezeń nie przechodzącej, można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą (t. j. leżącą w tej samej płaszczyźnie i nie przecinającą danej prostej). — U Euklidesa aksjomat ten ma nieco inną formę.

nową gieometrję, której podstawy nie wiele lepiej były znane od podstaw gieometrji euklidesowskiej), wytworzył jednak taki stan rzeczy, że nauka ta stała się koniecznością: należało uprawnić to odrzucenie pewnika o równoległych i, stanąwszy raz na gruncie czysto matematycznym, trzeba było opracować odpowiednio podstawy gieometrji.

Dzięki gieometrji Łobaczewskiego zwrócono uwagę na właściwy przedmiot gieometrji matematycznej oraz na właściwe zagadnienie, dotyczące podstaw gieometrji: nie oczywistość jest dla matematyki kryterjum, co jest aksjomatem, a co nie[1]), lecz to, czy dane zdanie da się za pomocą innych przyjętych już aksjomatów udowodnić lub też obalić, (t. j. czy da się udowodnić jego nieprawdziwość), czy też nie? W pierwszym razie jest ono twierdzeniem, w drugim jest sprzeczne z aksjomatami (za twierdzenie uważać można zdanie z nim sprzeczne), a w trzecim, gdy się ani udowodnić, ani obalić nie da, mamy wolność wyboru: może być przyjęte jako aksjomat, lub też możemy przyjąć — również jako aksjomat — zdanie z nim sprzeczne.

Zrozumienie jednak takiego stanowiska następowało powoli. Zrazu zaczęły się spory, która z tych gieometrji jest prawdziwą. O ile przytym miano na myśli przestrzeń fizyczną, to spory te nas tutaj nie dotyczą[2]). Dla matematyka zaś obie gieometrje są prawdziwe.

Jak mogą być prawdziwe naraz dwie teorje wypowiadające twierdzenia ze sobą sprzeczne! wykrzyknie może niejeden czytelnik. Tak, prawdziwemi nie mogą być jednocześnie dwa twierdzenia ze sobą sprzeczne, dotyczące jednego i tego samego przedmiotu. Lecz gieometrje Euklidesa i Łobaczewskiego dotyczą przedmiotów różnych: jedna mówi o przestrzeni Euklidesa, druga o przestrzeni Łobaczewskiego.

---

[1]) Z punktu widzenia matematyki (dzisiejszej) wogóle nie można mówić o oczywistości aksjomatów gieometrycznych (por. niżej, str. 406), a z dawnego stanowiska, którego dziś nie nazwiemy matematycznym, niejedno twierdzenie jest tak samo oczywiste, jak i pewniki.

[2]) O tych zagadn. p. Zagad. filoz. mat.

Dziwić się, że wypowiadają twierdzenia różne, jest to to samo, co dziwić się, że posiadamy dwa napozór sprzeczne ze sobą twierdzenia: suma odległości punktu krzywej (elipsy) od jej ognisk jest stała, i drugie: suma odległości punktu krzywej (hiperboli) od jej ognisk nie jest stała (bo różnica jest stała). Oba są prawdziwe, lecz każde dla swego tylko przedmiotu; jedno dla elipsy, drugie dla hiperboli. Pytać się zaś, która z przestrzeni jest prawdziwą, byłoby znów to samo, co pytać się, która z dwuch linji — elipsa czy hiperbola — jest prawdziwą.

Co jednak określa każdą z tych przestrzeni, z czego wypływa ta różnica twierdzeń? Określa je właśnie dany zbiór aksjomatów, wyrażających własności zasadnicze danej przestrzeni, tak jak elipsę i hiperbolę określa właśnie stałość sumy, resp. różnicy, odległości dowolnego punktu krzywej od ognisk.

Istnieją więc w matematyce jednocześnie obie te gieometrje i wiele innych jeszcze. Ale nie to ma tak wielkie znaczenie w dziejach myśli, że przybyła nowa gałąź matematyki, lecz sam fakt utworzenia innej gieometrji, to, że odważono się traktować aksjomaty, jako coś dowolnego, co można przyjąć lub odrzucić; czyli, że stały się one z oczywistych, niewzruszonych prawd — założeniami, lepiej: określeniami[1]).

Z dawnych cech pozostała aksjomatom ta, że nie potrzebują dowodu; lecz to nie dlatego, żeby miały być oczywistemi, lecz, że grają rolę określeń. Żadna bowiem własność, użyta do określenia, nie potrzebuje dowodu. Podobnie jak nie trzeba dowodzić, że promienie koła są równe, tak samo nie potrzeba dowodzić, że przez dwa punkty przechodzi tylko jedna prosta, a na płaszczyźnie euklidesowskiej przez dany punkt przechodzi tylko

---

[1]) Dlatego używamy tu wyrazu »*aksjomat*« zamiast »*pewnik*«, gdyż wyraz ten, choć nie polski, lepiej oddaje swą dzisiejszą treść, bo znaczy tyle, co »postulat«, »założenie« (od słowa ἀξίωμα = żądanie).

Nie wszystkie jednak aksjomaty matematyki są takiemi dowolnemi założeniami, jak aksjomaty gieometrji (por. Zagadn. filoz. mat.). Dla tych — jak wogóle dla oznaczenia prawd oczywistych każdej nauki — używamy wyrazu »*pewnik*«. Rozróżnienie to jednak nie jest powszechnie przyjęte; np. w rozdz. Arytmetyka, str. 181 użyty jest wyraz »pewnik« w znaczeniu »aksjomat« (mowa tam o aksjomacie gieometrycznym).

jedna równoległa do danej prostej — bo dlatego właśnie prosta jest prostą, a płaszczyzna euklidesowska płaszczyzną euklidesowską, że posiadają te własności.

To otworzyło drogę nauce o podstawach gieometrji, datującej się od RIEMANNA (1826—1866); idee jej dojrzewały w dziełach całego szeregu późniejszych badaczy, aż znalazły swój wyraz kompletny w dziele HILBERTA, Grundlagen der Geometrie (1899).

4. Przyjrzyjmy się podstawom gieometrji w tej ich postaci, w jakiej widzimy je u HILBERTA. Powiedzieliśmy wyżej (Wstęp ogólny, str. 9 i 24), że przedmiotem gieometrji matematycznej jest nie przestrzeń, (widzialna, fizyczna, jako »miejsce«), lecz »rozmaitość« wogóle, t. j. to, co w tej przestrzeni daje się ująć myślą, co jest podstawą logicznej, dedukcyjnej teorji. Tym może być tylko zbiór aksjomatów: aksjomaty właśnie określają rozmaitość, tworzą przedmiot badania matematycznego.

Pierwszym zatym zadaniem podstaw gieometrji jest: wyszukanie tych wszystkich logicznych momentów, które pozwalają nam w gieometrji rozumować nad przestrzenią, i wyliczenie ich jako aksjomatów, tak, aby rozumowanie opierało się rzeczywiście na tym tylko, co jest wyraźnie w aksjomatach wypowiedziane; czyli, aby gieometrja była rzeczywiście teorją czysto dedukcyjną. Innemi słowy, pierwszym zadaniem jest znalezienie zupełnego układu aksjomatów — zadaniem, którego, jak już wspomnieliśmy, EUKLIDES nie wypełnił.

Jeżeli w badaniu gieometrycznym odejmujemy przestrzeni jej charakter wyobrażeniowy, »przestrzenny« (w ciaśniejszym znaczeniu), tworząc z niej przestrzeń matematyczną, czyli rozmaitość, to i elementy tej przestrzeni — zasadnicze pojęcia gieometrji — muszą również zatracić swój charakter wyobrażeniowy. Cała treść zawarta w takich słowach, jak »punkt«, »prosta«, leży w aksjomatach, które mówią o ich własnościach. Poza tym nie trzeba i nie można — dopóki zajmujemy się podstawami gieometrji — kojarzyć z temi wyrazami żadnych wyobrażeń.

HILBERT zaczyna swoje »Podstawy gieometrji« od takiego objaśnienia[1]): mamy dwa rodzaje »*rzeczy*« *(Ding);* rzeczy jednego rodzaju nazywamy »*punktami*«, rzeczy drugiego rodzaju — »*prostemi*«; między niemi zachodzą związki, wyrażone w podanym układzie aksjomatów. Pierwszy z aksjomatów brzmi: do każdej pary punktów należy jedna prosta, co nazywamy (nazwa zapożyczona z dawnej gieometrji jest tu tylko nazwą stosunku należenia, podporządkowania), że ta prosta *przechodzi* przez te dwa punkty; drugi aksjomat: prosta, przechodząca przez punkty A i B oraz przez punkty A i C, przechodzi przez punkty B i C; i podobnie następne.

I to jest całe określenie: punkt, prosta — to jakieś »rzeczy«; lecz jakie mianowicie, co: liczba, czy przedmiot materjalny, czynność, czy własność — to nas nie obchodzi[2]).

Stąd już wynika, że i takie wyrażenia, jak »leżeć *między* dwoma punktami«, nie mogą mieć swej pierwotnej, wyobrażeniowej treści. Poza tą jednak treścią wyobrażeniową posiada ono jeszcze treść logiczną.

Z istnienia związku, polegającego na »*leżeniu między*«, w gieometrji często wnioskujemy, wyprowadzamy nowe związki; tak np. z dwuch faktów, że (na danej prostej) punkt C leży między punktami A i B, a punkt D między punktami A i C, wnioskujemy, że D leży też między A i B, choć to wcale w dwuch zdaniach powyższych powiedzianym nie jest i choć logika tradycyjna takiego rozumowania nie zna.

To, co pozwala nam na tę czynność logiczną wnioskowania, jest właśnie treścią logiczną wyrazu »między«. W teorji dedukcyjnej musi być ta treść zawarta w jakichś aksjomatach.

---

[1]) Ograniczamy się tu dla prostoty do rozmaitości dwuwymiarowej; Hilbert prowadzi swe badania odrazu dla trzech wymiarów.

[2]) Kto chce koniecznie uważać, że gieometrja bada jedynie rozmaitość przestrzenną, a nie żadną inną (co nie jest prawdą, bo w rzeczywistości badania gieometryczne mają w matematyce o wiele szersze zastosowanie), ten niech uważa tę terminologję i sposób ujęcia rzeczy za tymczasowy, za środek do badań podstaw gieometrji. Po chwili rozwagi przyzna, że jest to środek praktycznie konieczny, by ustrzec się pomieszania wnioskowania ściśle logicznego z aksjomatów z wnioskowaniem opartym na intuicji gieometrycznej; a to rozróżnienie właśnie jest celem badań nad podstawami gieometrji.

Znaleźć takie aksjomaty, określające stosunek »między« — oto zadanie zasadnicze dla podstaw gieometrji. Postawienie go i rozwiązanie jest zasługą Pascha (Vorlesungen über neue Geometrie, 1882). Podajemy je w układzie takim, żeby nie wprowadzać pojęcia płaszczyzny; mówimy więc tu o punktach, należących do jednej prostej.

1) Jeżeli punkt C leży między punktami A i B, to leży i między punktami B i A.

2) Z trzech punktów A, B i C jeden i tylko jeden leży między dwoma pozostałemi.

3) Każdy punkt A dzieli pozostałe punkty na dwa rodzaje tak, że A leży lub nie leży między dwoma danemi punktami zależnie od tego, czy te dwa punkty należą do różnych rodzajów czy też oba do jednego rodzaju.

Z pomocą tych aksjomatów można udowodnić, że (w powyżej przytoczonym przykładzie rozumowania nad stosunkiem »między«) punkt D »leży między« A i B. Jest to więc twierdzenie, choć bylibyśmy byli gotowi je przyjąć za pewnik rozumiejący się sam przez się.

Z tych aksjomatów możemy udowodnić wszystko, co wogóle można wywnioskować z faktu »leżenia między«; wyczerpują więc one treść logiczną tego wyrażenia.

5. Przy wynajdywaniu zupełnego układu aksjomatów podstawy gieometrji mają dwa ważne zadania do wypełnienia; wykazać ich wzajemną niesprzeczność i niezależność. Ponieważ aksjomaty są dowolnemi założeniami, to chcąc do danego układu dołączyć nowy aksjomat, trzeba się upewnić, że nie jest on sprzeczny z poprzedniemi; taka sprzeczność może być bardzo głęboko ukryta, tak, że z samego wysłowienia aksjomatów nie można wiedzieć, czy jest on sprzeczny z danemi, czy nie.

Dla udowodnienia niesprzeczności znamy tylko jedną drogę[1]: opierając się na tym, że liczby całkowite nie mogą mieć własności sprzecznych między sobą, szukamy takiej interpretacji analitycznej pojęć gieometrycznych (»punkt«, »prosta«, »między«,

---

[1]) Por. Zagad. filoz. mat.

i t. d.), żeby układ aksjomatów był spełnionym. Wtedy układ ten, będąc zbiorem własności liczb, nie może prowadzić do sprzeczności.

Tak np. gieometrja analityczna abstrakcyjna, w której punktami nazywamy[1]) pary liczb (x, y), a prostemi nazywamy równania stopnia 1-go o dwuch niewiadomych, jest dowodem niesprzeczności aksjomatów gieometrji euklidesowskiej (na płaszczyźnie). W gieometrji analitycznej abstrakcyjnej bowiem aksjomaty te możemy udowodnić; np., że istnieje jedna tylko prosta, t. j. równanie stopnia 1-go, należące do danej pary punktów (x_1, y_1), (x_2, y_2), przyczym »należącym« do danego punktu nazywamy takie równanie (»prostą, przechodzącą przez punkt«), któremu dana para liczb czyni zadość; że przez dany punkt przechodzi tylko jedna prosta nie przecinająca prostej danej (t. j. równanie stopnia 1-go, posiadające jedno rozwiązanie dane i nie posiadające rozwiązania wspólnego z danym równaniem stopnia 1-go). Aksjomaty gieometrji Euklidesa wyrażają więc własności par liczb i równań, wobec czego sprzecznemi być nie mogą.

Niesprzeczność jest zasadniczym warunkiem, który spełniać muszą pojęcia matematyczne. Przeprowadzenie więc tego dowodu jest konieczne, gdy chcemy się zająć jakąś nową gieometrją o nowym układzie aksjomatów. Niezależność aksjomatów nie ma tego praktycznego znaczenia: nie jest ona potrzebna do zbudowania gieometrji. Jednak zagadnienie to jest ważne dla poznania podstaw gieometrji; należy do zasadniczego zagadnienia podstaw gieometrji: odróżnienia aksjomatów od twierdzeń.

Zależność bowiem jednego aksjomatu od układu innych, jest to możność udowodnienia go za pomocą tych innych aksjomatów; więc taki »aksjomat« jest w tym układzie twierdzeniem, nie aksjomatem.

Gdy wiemy, że dany aksjomat jest niesprzeczny z resztą

[1]) Te pary liczb (x, y) w abstrakcyjnej gieometrji analitycznej nie »wyobrażają«, ani nie »odpowiadają« punktom, tylko same są punktami, gdyż właśnie te pary liczb nazywamy punktami i o nich dowodzimy, że spełniaja aksjomaty dotyczące punktów.

aksjomatów, udowodnienie jego niezależności sprowadza się do udowodnienia, że założenie sprzeczne z nim nie jest sprzeczne z resztą aksjomatów. Gdyby on bowiem był zależny od reszty aksjomatów, to założenie sprzeczne z nim, jako sprzeczne z wnioskiem z pozostałych aksjomatów, byłoby z niemi sprzeczne.

Niezależność więc aksjomatów dowodzi się tą samą metodą, co i niesprzeczność, t. j. przez znalezienie odpowiedniej interpretacji, przykładu z zakresu analizy.

6. Poza znaczeniem poznawczym, jakie ma samo w sobie poszukiwanie układu aksjomatów, przynosi ono jeszcze tę korzyść, że pozwala na szersze o wiele zastosowanie rezultatów gieometrji. Jako przykład tego przytoczymy *zasadę dwoistości* gieometrji rzutowej (p. Gieom. syntetyczna, str. 161). Polega ona na tym, że jeśli w jakimkolwiek twierdzeniu gieometrji płaskiej, wyrażającym własności t. zw. rzutowe[1]), zastąpimy wszędzie wyraz »punkt« przez wyraz »prosta«, oraz wyrażenie »przechodzić przez« przez »leżeć na« i t. p. i odwrotnie, to otrzymamy znów twierdzenie prawdziwe (naogół różne od pierwotnego). Ten na pierwszy rzut oka dziwny fakt dowodzi się prosto: punkt i prosta abstrakcyjne, określone tylko przez układ tych aksjomatów, które nie mówią o mierze (długości odcinka i wielkości kąta), są pojęciami identycznemi, aksjomaty te bowiem można sprowadzić do formy zupełnie symetrycznej względem wyrazów »punkt« i »prosta«[2]).

Dzięki temu badania nad układem aksjomatów nabrały znaczenia metody. Metoda ta, zwana *metodą aksjomatyczną*, polega więc na tym: szukamy w danej teorji zbioru takich własności przedmiotów przez nas badanych (własności te mogą być albo aksjomatami, albo określeniami, albo twierdzeniami), które są konieczne i wystarczające do udowodnienia wszystkich innych twierdzeń teorji. Znalazłszy taki zupełny

---

[1]) Dotyczące przechodzenia prostych przez punkty i leżenia punktów na prostych, lecz nie długości odcinków między punktami i nie wielkości kątów między prostemi. Przykłady p. Gieom. synt. str. 157—159.

[2]) O ile w układzie aksjomatów nie rozróżniamy elementów *niewłaściwych* (t. j. nieskończenie odległych, p. Gieom. synt. str. 162) od właściwych.

układ własności zasadniczych, uważamy go za system aksjomatów, określających przedmioty danej teorji, abstrahując od dawnego ich znaczenia, dawnych określeń i od wszelkich ich własności, które do rozpatrywanej teorji nie należą, t. j. które nie wynikają z powyższego układu aksjomatów. Przedmioty badania stają się dla nas »czymś«, określonym tylko przez wybrane własności-aksjomaty.

Za przykład zastosowania metody aksjomatycznej może służyć, obok wspomnianej zasady dwoistości gieometrji rzutowej, wykład topologji przez Dehna (p. Topologja, str. 394). Przy takim traktowaniu staje się oczywistym, że dana teorja prawdziwą jest nietylko dla pierwotnych swych przedmiotów, lecz i dla wszelkich innych, posiadających własności wyrażone w znalezionych aksjomatach.

Metoda aksjomatyczna jest więc środkiem ekonomicznym w badaniu: wystarczy nam wykazać, że jedna teorja jest oparta na tym samym układzie aksjomatów, co i inna, aby móc z każdego twierdzenia jednej otrzymać, przez prostą zmianę interpretacji wchodzących w nią pojęć, twierdzenie drugiej teorji, którego prawdziwości nie potrzebujemy już dowodzić: jest ono udowodnione przez fakt, że analogiczne twierdzenie pierwszej teorji jest prawdziwe. Przykładem tego służy, oprócz wspomnianej zasady dwoistości w gieometrji syntetycznej, także identyczność gieometrji kul z gieometrją prostych w przestrzeni trójwymiarowej [1]).

Zastosowanie metody aksjomatycznej do niektórych teorji gieometrycznych jest bardzo proste: wystarczy odrzucić pojęcia, które dla danej teorji nie są istotnemi, zabstrahować od nich oraz odrzucić również (z odpowiednio ułożonego układu aksjomatów dla całej gieometrji) aksjomaty dotyczące pojęć odrzuconych. Aksjomaty pozostałe dają układ aksjomatów danej teorji.

Tak otrzymujemy gieometrję rzutową przez zabstrahowanie od pojęcia »miary« (t. j. »długości odcinka« i »wielkości

---

[1]) P. Gieom. synt., str. 164.

O znaczeniu metody aksjomatycznej dla całej matematyki, poza gieometrją, p. Zakończenie, § 3.

kąta«) i jej układ aksjomatów przez odrzucenie aksjomatów, określających pojęcie miary, t. zw. aksjomatów »przystawania«.

7. Takie odrzucanie aksjomatów wraz z odrzuceniem określonych przez nie pojęć trzeba odróżnić od odrzucania aksjomatów przez ich zaprzeczenie, jak to się dzieje z aksjomatem o równoległych w gieometrji Łobaczewskiego. Gieometrje takie, jak rzutowa, powstałe z euklidesowskiej przez odrzucenie pewnych pojęć, są gieometrjami ogólniejszemi od euklidesowskiej: stosują się do przestrzeni Euklidesa i do innych jeszcze; rzutowa gieometrja np. jest prawdziwa (gdy się nie odróżnia elementów w nieskończoności od elementów właściwych) i dla przestrzeni Euklidesa i dla przestrzeni Łobaczewskiego, bo nie zajmuje się temi własnościami, któremi właśnie różnią się między sobą obie przestrzenie.

W gieometrji zaś Łobaczewskiego, odrzucając dany aksjomat, przyjmujemy na jego miejsce inny, sprzeczny z pierwszym: że przez dany punkt można poprowadzić dwie proste, równoległe do danej prostej.

8. Istnieje jeszcze inny kierunek badań podstaw gieometrji, zainicjowany przez Riemanna[1]) (z jego następców wspomnimy Helmholtza i Lieego) nie czysto gieometryczny, lecz posługujący się pojęciami gieometrji różniczkowej.

Metoda ta polega — założywszy, że punkt każdy jest przedstawiony przez parę liczb (x,y)[2]) — na badaniu, jak określić analitycznie dane pojęcie gieometryczne; a więc np. jaką funkcję liczb x_1, y_1, x_2, y_2 nazwać *odległością* punktów (x_1, y_1), (x_2, y_2). Funkcja taka powinna posiadać własności zasadnicze dla danego pojęcia gieometrycznego (np. odległości); własności te, które formułujemy w postaci równań funkcyjnych, najczęściej różniczkowych, powinny być wybrane w ilości wystarczającej do zupełnego określenia funkcji szukanej. Ostatecznie więc badanie sprowadza się do roz-

---

[1]) B. Riemann. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Habilitationsschrift, 1854. Stronic 16. (Gesam. Werke. Lipsk, Teubner, wyd. 1-e, 1876; wyd. 2-ie, 1892).

[2]) Dla gieometrji dwuwymiarowej; dla gieometrji trójwymiarowej przez trójkę liczb (x, y, z) i t. d.

wiązania zagadnienia następującego: znaleźć układ warunków, które ma spełniać funkcja szukana, wystarczający i konieczny do jej definicji[1]).

Ten kierunek badań ma ograniczony zakres dostępnych dlań zagadnień. Po pierwsze, nie doprowadza do wyliczenia wszystkich aksjomatów, bo zakłada możliwość przedstawienia punktów za pomocą spółrzędnych, w czym kryje się już dużo aksjomatów. Np. znikają aksjomaty o »leżeniu między«, które da się wtedy określić z pomocą pojęć analizy »większy« i »mniejszy«. (Por. to, cośmy wyżej powiedzieli o możliwości udowodnienia aksjomatów w gieom. analitycznej, str. 410).

Po wtóre, badania te ograniczają się do skończonej, dostatecznie małej części przestrzeni, t. zw. *elementu przestrzeni* lub inaczej *otoczenia punktu* i nie mówią nam nic o własnościach całej przestrzeni. To spostrzeżenie zawdzięczamy Kleinowi (por. niżej § 11). Badania tego kierunku sprowadzają się w znacznej mierze do gieometrji różniczkowej na krzywych powierzchniach.

O gieometrjach różnych od gieometrji Euklidesa.

9. Ze wszystkich możliwych gieometrji tylko gieometrje t. zw. *nieeuklidesowskie*, historycznie pierwsze, rozwinęły się bardziej i znalazły zastosowania. Podajemy tu główne ich własności, przyczym dla prostoty mówimy o gieometrji na płaszczyźnie.

Nieeuklidesowskiemi nazywamy gieometrje, które powstały przez odrzucenie i zastąpienie innym aksjomatu o równoległych albo aksjomatu o nieskończonej długości prostej (a więc nie każdą, która nie jest euklidesowską). Aksjomat o równoległych brzmi: przez dany punkt do danej prostej można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą[2]). Że wogóle jedną równo-

---

[1]) Jest to metoda, którą Riemann stosował i w innych badaniach matematycznych (p. Zakończenie, § 3, przypisek).

[2]) Przez »prostą równoległą« rozumiemy prostą, nie przecinającą danej prostej, nie zaś: prostą, której wszystkie punkty mają jednakową odległość od danej prostej. W gieometrjach nieeuklidesowskich prostych »równoległych« w znaczeniu drugim niema wcale: miejscem gieometrycznym punktów stałej odległości od danej prostej jest tam krzywa, nie zaś prosta.

ległą poprowadzić można, dowodzi się — z pomocą innych aksjomatów, a wśród nich aksjomatu o nieskończonej długości prostej. Odwrotnie, ten ostatni aksjomat da się udowodnić, gdy założymy istnienie równoległych; możemy więc połączyć go z aksjomatem o równoległych w jedno następujące zdanie:

a) Przez dany punkt do danej nie przechodzącej przezeń prostej można poprowadzić *jedną* i *tylko* jedną prostą równoległą. Odrzucając to zdanie, mamy do wyboru dla zastąpienia go dwa zdania:

b) Przez dany punkt do danej nie przechodzącej przezeń prostej można poprowadzić *więcej niż jedną* równoległą. To jest aksjomat gieometrji Łobaczewskiego. Albo:

c) Przez dany punkt do danej nie przechodzącej przezeń prostej nie można poprowadzić *żadnej* prostej równoległej. To jest aksjomat gieometrji Riemanna.

Jeżeli jedno z tych trzech zdań (aksjomatów Euklidesa, Łobaczewskiego, Riemanna) jest prawdziwe dla jednego punktu i jednej (nie przechodzącej przezeń) prostej, to można udowodnić z pomocą pozostałych aksjomatów że jest prawdziwe dla każdego punktu i każdej (nie przechodzącej przezeń) prostej. Nie może więc istnieć taka gieometrja (zachowująca prócz zdania *a*) wszystkie inne aksjomaty Euklidesa), w którejby przez pewne punkty do pewnych prostych można było poprowadzić równoległe, a przez inne nie, lub przez jeden punkt dwie równoległe do pewnej prostej, a przez inny żadnej lub jedną tylko i t. d.

10. Dla wszystkich tych trzech płaszczyzn gieometrja rzutowa, jak to udowodnił Klein, jest wspólna (por. wyżej § 7, str. 413): wszystkie rzutowe własności figur są w każdej z nich, po dołączeniu elementów w nieskończoności (elementów »niewłaściwych«), te same. Dlatego te trzy gieometrje i płaszczyzny stanowiące ich przedmiot nazywamy odpowiednio: *paraboliczną, hiperboliczną* i *eliptyczną*.

Klein spostrzeżenie to uczynił punktem wyjścia badań nad gieometrjami nieeuklidesowskiemi: wychodząc z ogólnej gieometrji rzutowej, określa stosownie pojęcie długości odcinka z pomocą inwolucji na prostej. Zależnie od tego, czy ta inwolucja będzie paraboliczną, hiperboliczną czy eliptyczną, otrzymamy odpowiednio gieometrję: Euklidesa, Łobaczewskiego lub Riemanna.

Jeżeli zaś ograniczymy się do rozpatrywania elementów właściwych tylko, to różnica między temi trzema płaszczyznami jest taka: płaszczyzna eliptyczna, nie posiadając elementów niewłaściwych, jest identyczna z płaszczyzną gieometrji rzutowej (t. j. płaszczyzną utworzoną przez dołączenie elementów niewłaściwych); jest to powierzchnia zamknięta, jednostronna (p. Topologja, str. 392). Płaszczyznę paraboliczną (euklidesowską) otrzymuje się z niej przez odjęcie jednej prostej (jest to właśnie prosta w nieskończoności), przez co wyjmujemy z każdej prostej jeden punkt. Płaszczyznę hiperboliczną wreszcie otrzymujemy przez odjęcie stożkowej i całej części płaszczyzny, leżącej na zewnątrz[1]) tej stożkowej, przez co część prostych odrzucamy zupełnie, od każdej zaś pozostałej prostej odejmujemy cały odcinek. Stąd widać, dlaczego na płaszczyźnie eliptycznej przez dany punkt do danej prostej niema prostych równoległych, na parabolicznej jest tylko jedna (ta, która przecina się z daną prostą w jej wyjętym punkcie), wreszcie na hiperbolicznej płaszczyźnie nieskończenie wiele (wszystkie proste, które przecinają się z daną prostą w którymkolwiek z punktów wyjętego odcinka).

11. Zwróćmy się do metody gieometrji różniczkowej[2]).

Badania tu prowadzone ograniczają się do kawałka płaszczyzny, otoczenia punktu, przyczym zakładamy, że przestrzeń jest jednorodna, t. j. otoczenie każdego punktu jest jednakowe. Wtedy nie mówimy nic o prostych i równoległych. Jednak, czyniąc pewne założenia co do własności funkcji i odległości, otrzymujemy jako możliwe tylko trzy powyższe gieometrje (różniczkowe, t. j. gieometrje otoczenia punktu); w ten sposób właśnie Riemann otrzymał swoją gieometrję, jako trzeci moż-

---

[1]) Stroną zewnętrzną stożkowej nazywamy tę część płaszczyzny, na której można poprowadzić prostą, nie przecinającą stożkowej.

[2]) P. wyżej § 8, str. 413.

liwy przypadek obok znanych przedtym gieometrji Euklidesa i Łobaczewskiego [1]).

Badania te, jak zauważył Klein [2]), nie mówią nic o całości płaszczyzny.

Dwie płaszczyzny bowiem, czy powierzchnie, mając w otoczeniu każdego punktu te same własności, czyli posiadając tę samą gieometrję różniczkową, mogą się różnić, brane jako całość, swemi własnościami topologicznemi. Najprostszy tego przykład będziemy mieli, porównywając: płaszczyznę i walec kołowy prosty; obie powierzchnie, rozpatrywane same w sobie (nie zaś w przestrzeni trójwymiarowej), posiadają tę samą gieometrję różniczkową. Krzywizna obu jest stała, równa zeru. W całości jednak różnią się bardzo: np. na walcu istnieją »proste« skończonej długości (mianowicie koła przecięcia walca, prostopadłe do tworzących), przez dwa punkty można naogół poprowadzić nieskończenie wiele prostych i t. d. Tak samo riemanowską gieometrję różniczkową mogą posiadać płaszczyzny o różnych własnościach topologicznych. Jedna z nich nadaje się szczególniej do uzmysłowienia sobie gieometrji różniczkowej riemanowskiej: jest to kula. Gdy nazwiemy prostą każde wielkie koło kuli (punktami pozostaną zwykłe punkty), figury mieszczące się na dostatecznie małej (mniejszej od półkuli) części kuli będą posiadały wszystkie własności figur płaskich riemanowskich.

---

[1]) Traktowane w ten sposób płaszczyzny te charakteryzują się swą *krzywizną zupełną* (por. Gieometrja różnicz. str. 377); płaszczyzna Euklidesa ma krzywiznę zero, Łobaczewskiego ujemną, a Riemanna dodatnią. Ponieważ zakładamy jednorodność płaszczyzny w każdym punkcie, więc krzywizna musi być dla każdego punktu jednakowa; są to więc powierzchnie o stałej krzywiźnie. Zauważymy tu zaraz, że wyraz krzywizna jest tu użyty dla oznaczenia pewnych własności funkcji odległości i nie trzeba sobie wyobrażać tych powierzchni jako wygiętych w przestrzeni trójwymiarowej. Zwróćmy się do podanej niżej (str. 418) interpretacji płaszczyzny eliptycznej (a więc o »krzywiźnie« dodatniej) przez wiązkę prostych — co w tej płaszczyźnie jest »krzywego«?

[2]) Por. F. Klein. Odczyty o matematyce (tłum. polskie, Warszawa, 1899), odczyt XI, albo cytowane niżej jego litografowane wykłady o gieometrji nieeuklidesowskiej; p. także:

W. Killing. Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Lipsk, 1885; str. XI+264.

Jednak nie wszystkie pozostałe aksjomaty EUKLIDESA będą spełnione w tej gieometrji, którą nazywamy *kulistą*: istnieją mianowicie pary punktów, przez które przechodzi nieskończoność »prostych« (t. j. kół wielkich), a mianowicie pary punktów, które są końcami jednej średnicy. Interpretację gieometrji riemanowskiej, czyniącą zadość aksjomatom rzutowym, t. j. interpretację gieometrji *eliptycznej*[1]), otrzymamy, rozpatrując wiązkę prostych i płaszczyzn, przechodzących przez jeden punkt przestrzeni trójwymiarowej i nazywając proste »punktami«, płaszczyzny zaś »prostemi«. Kąt między prostemi wiązki będzie »odległością między punktami« i t. d. Czytelnik będzie mógł z łatwością sprawdzić, że ta »płaszczyzna« posiada wszystkie wyliczone tu własności płaszczyzny eliptycznej. Jej stosunek do płaszczyzny »kulistej« (powierzchni kuli) jest taki, że każdemu »punktowi« na niej (t. j. każdej prostej wiązki) odpowiadają dwa punkty na kuli.

Gieometrję hiperboliczną ŁOBACZEWSKIEGO, jeżeli się znów ograniczymy do dostatecznie małego kawałka płaszczyzny, możemy też interpretować w przestrzeni euklidesowskiej na powierzchniach krzywych o stałej ujemnej krzywiźnie. Otrzymać interpretację całej płaszczyzny jest trochę trudniej; przedstawia ją wnętrze koła (bez okręgu; fig. 34), przyczym punkty będziemy nazywali nadal punktami, a za proste będziemy uważali te odcinki (bez końców) prostych, które są zawarte wewnątrz koła. Czytelnik łatwo sprawdzi, że taka »płaszczyzna« posiada wszystkie własności rzutowe płaszczyzny hiperbolicznej. Żeby posiadała jeszcze i własności miarowe, trzeba odpowiednio określić »długość odcinka« i »wielkość kąta« (przedewszystkim tak, aby »prosta« miała długość nieskończoną).

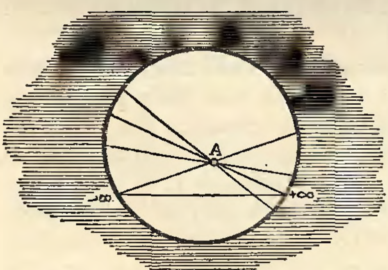


Fig. 34.

[1]) »Eliptyczny« nie jest tu przeciwstawieniem do »kulisty«; nazwy te powstały bowiem na różnych drogach.

12. Przytoczymy kilka główniejszych własności gieometrji nieeuklidesowskich: figur podobnych niema; powierzchnia każdego trójkąta jest mniejszą od pewnej stałej, którą dla każdej płaszczyzny można wyznaczyć [1]) (t. j. nie można w płaszczyźnie nieeuklidesowskiej zwiększać nieograniczenie pola trójkąta); przy nieograniczonym zmniejszaniu trójkąta, zachodzące w nim stosunki metryczne dążą do granicy, która przedstawia stosunki metryczne trójkąta euklidesowskiego [2]).

Na płaszczyźnie hiperbolicznej (Łobaczewskiego) przez każdy punkt nazewnątrz danej prostej przechodzi nieskończenie wiele prostych nie przecinających danej, zawartych między dwiema skrajnemi (często tylko do tych skrajnych nie przecinających ograniczają stosowanie nazwy równoległych w gieometrji Łobaczewskiego). Długość prostej i pole całej płaszczyzny są, jak i u Euklidesa, nieskończone.

Na płaszczyźnie eliptycznej (Riemanna) każde dwie proste przecinają się. Długość prostej, która jest linją zamkniętą, i pole płaszczyzny są skończone; wszystkie proste mają długość jednakową.

13. Gieometrje nieuklidesowskie rozwijają się bardzo mało. Usprawiedliwia się to tym, że prawdopodobnie dalsze badania nad figurami gieometrji nieeuklidesowskich nie odkryłyby fak-

---

[1]) W gieometrji miarowej tak Riemanna, jak i Łobaczewskiego występuje we wzorach pewna liczba stała, zwana »krzywizną«. Dla płaszczyzny Euklidesa »krzywizna« równa się 0, dla płaszczyzn nieeuklidesowskich jednak jest ona różną od zera (ujemna dla płaszczyzny Łobaczewskiego, dodatnia dla płaszczyzny Riemanna) i można jej nadawać różne wartości. Możnaby więc powiedzieć, że istnieje nieskończenie wiele różnych gieometrji Riemanna i nieskończenie wiele różnych gieometrji Łobaczewskiego, różniących się między sobą wartością występującej w nich stałej. Jednakowoż różnica ta sprowadza się do wyboru jednostki miary; uważać (z punktu widzenia matematyki) te gieometrje za różne byłoby to tak, jakgdybyśmy uważali dwa wzory gieometrji euklidesowskiej za różne, gdyby w nich była przyjęta inna jednostka miary kąta, np. w jednym radjan, a w drugim stopień, lub kąt prosty.

[2]) Wyrażając się nieściśle, mówimy, że nieskończenie mała część płaszczyzny nieeuklidesowskiej (np. powierzchni kuli) jest euklidesowska.

tów zasadniczo nowych (tylko bardziej skomplikowane) w porównaniu ze znanemi z gieometrji euklidesowskiej; a jak mówi Poincaré[1]) »nie odbywa się dalekiej podróży, by zobaczyć widoki zupełnie podobne do tych, jakie spotykamy u siebie; tyle różnych przedmiotów domaga się zwrócenia naszej uwagi, że tylko najważniejsze mają prawo do tego«.

Najciekawszą jest gieometrja elementarna[2]) i gieometrja form nieciągłych, mianowicie podział płaszczyzny na równe (przystające) wielokąty. Tutaj bowiem znajdujemy fakty nowe, własności zasadniczo różne dla każdej z trzech gieometrji; ten też dział gieometrji nieeuklidesowskich ma ważne zastosowania. Np.: podział płaszczyzny Łobaczewskiego na wielokąty równe jest podstawą teorji funkcji automorficznych, odgrywając w niej podobną rolę, jak podział płaszczyzny Euklidesa na równoległoboki w teorji funkcji eliptycznych.

14. Z innych gieometrji poza nieeuklidesowskiemi wspomnimy tu gieometrje niearchimedesowskie (Veronese, Hilbert). Odrzucają one t. zw. aksjomat Archimedesa, który orzeka, że z mniejszego z dwu danych odcinków można zawsze, przez dodanie go do siebie skończoną ilość razy, utworzyć odcinek większy od większego z danych. Innemi słowy, aksjomat ten wyklucza istnienie odcinków nieskończenie małych (aktualnie); gieometrje niearchimedesowskie zaś zakładają ich istnienie.

---

15. Przygotowanie potrzebne do studjowania podstaw gieometrji — to najprzód pewne wyrobienie zdolności myślenia abstrakcyjnego. Wiadomości do aksjomatycznych, czysto gieometrycznych badań trzeba bardzo niewiele: wystarczy znajomość gieometrji elementarnej (pożądanym jest pewne obznajomienie się z gieometrjami nieeuklidesowskiemi) i zasady gieometrji analitycznej. Do badań zaś kierunku Riemanna trzeba mieć przy-

[1]) Analysis situs, Journal de l'École Polytechnique, 2 série, 1 cahier, wstęp, str. 2. Mówi to w zastosowaniu do badań nad krzywizną powierzchni w przestrzeni wielowymiarowej.

[2]) Wszystkie własności przytoczone wyżej należą do gieometrji elementarnej.

gotowanie takie, jak do gieometrji różniczkowej na krzywych powierzchniach i dobrze jest znać tę ostatnią.

Również nie trzeba żadnych wiadomości do elementarnej gieometrji nieeuklidesowskiej, tak, jak i do elementarnej gieometrji euklidesowskiej. Nauka jej nie nastręcza żadnych trudności. Do dalszych badań potrzebną jest znajomość zasad gieometrji różniczkowej (teorji powierzchni) i gieometrji rzutowej oraz spółrzędnych trójkątowych, resp. czworościanowych.

Pomimo, że nie potrzeba posiadać dużo wiadomości do badań aksjomatycznych, nie radzimy matematykowi zabierać się do nich, aż przy końcu studjów; wcześniej nie odniesie z nich należytego pożytku. Natomiast ci, którzy muszą poprzestać na mniejszym wykształceniu matematycznym, a dla których celem studjów są nietylko praktyczne zastosowania matematyki, niech uważają podstawy gieometrji za należące do elementów tego wykształcenia i w każdym razie włączą je do programu swych studjów bez względu na swe przygotowanie, nie zrażając się ani napotykanemi z początku trudnościami, ani tym, że nie osiągną z nich tej korzyści, jaką odnosi matematyk należycie przygotowany.

Studjowanie podstaw gieometrji ma dla matematyka głównie znaczenie kształcące i daje możność wniknięcia w tajne źródła praw matematycznych. Szczególniej jednak należy je polecić: 1° nauczycielom matematyki, 2° filozofom.

Pożyteczne będzie ono i fizykom, jako wzór jasnego opracowania podstawowych pojęć i rozgraniczania rezultatów dedukcji od rezultatów doświadczenia.

16. Do krótkiego poinformowania się o gieometrjach nieeuklidesowskich może służyć dość elementarny artykuł:

P. Mansion. Pierwsze zasady metageometryi, czyli geometryi ogólnej. Przetłum. S. Dickstein. Warszawa, 1897; str. 46. Cena kop. 60.

Treść: 1) Wstęp. 2) Zarys historyczny. 3) Definicje i cztery postulaty. 4) Postulaty piąty i szósty. Trzy gieometrje. 5) 26 twierdzeń elementarnych wspólnych trzem gieometrjom. 6) Twierdzenia wspólne gieometrji euklidesowskiej i gieometrji Łobaczewskiego. 7) Twierdzenia charakterystyczne gieometrji euklidesowskiej i gieometrji Łobaczewskiego. 8) Twierdzenia charakterystyczne gieometrji riemanowskiej. 9) Streszczenie. Istota postulatów 5-go i 6-go. 10) Zarys głównych twierdzeń metagieometrji. Niemożność udowodnienia postulatów. 11) Gieometrja fizyczna. 12) Metagieometrja i kantyzm. Dodatek: gieometrja jako fizyka matematyczna odległości.

Do studjowania gieometrji nieeuklidesowskiej polecamy:

R. Bonola. Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non-euclidee; jest to rozdział (str. 247—363) cytowanej niżej książki zbiorowej: F. Enriques. Questioni riguardanti le matematiche elementari (lub w wydaniu niemieckim: Fragen der Elementargeometrie, w którym rozdział ten jest nieco obszerniejszy).

Treść: Cz. I. Historja badań nad równoległemi (str. 248—261). Stworzenie gieometrji nieeuklidesowskiej (kierunek elementarny) (str. 261—271). Dalszy rozwój gieometrji nieeuklidesowskiej. A) Kierunek metryczno-różniczkowy (str. 271—282). B) Kierunek rzutowy (str. 282—295). Cz. II. Teorja ogólna równoległych (str. 295—306). Gieometrja wiązki niewłaściwej (str. 306—314). Gieometrja hiperboliczna (str. 314—338). Gieometrja eliptyczna (str. 338—364).

Do poznania rozwoju historycznego gieometrji nieeuklidesowskiej nadaje się:

R. Bonola. La Geometria non-euclidea. Bolonja, 1906; str. 213; lub powiększone tłumaczenie niemieckie Liebmanna pod tytułem:

— Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung (t. IV zbioru »Wissenschaft u. Hypothese«). Lipsk, Teubner, 1908; str. VIII+245. Cena m. 5.

Do czytania tej książki może wystarczyć przygotowanie elementarne.

Do nauki podstaw gieometrji polecamy:

F. Schur. Grundlagen der Geometrie. Z 63 figurami. Lipsk, Teubner, 1909; str. X+192. Cena m. 6, w opr. m. 7.

Treść: 1. Postulaty (aksjomaty) rzutowe (str. 5—13). 2. Twierdzenia Desargues'a i elementy idealne. Kolineacja środkowa i punkty harmoniczne (14—27). 3. Postulaty ruchu i twierdzenie Pascala (28—45). 4. Twierdzenie podstawowe gieometrji rzutowej i rachowanie odcinkami rzutowemi (46—70). 5. Podstawowe wzory metryczne gieometrji nieeuklidesowskiej (71—102). 6. Aksjomat o równoległych (102—140). 7. Uzasadnienie ogólnej gieometrji płaszczyzny na samej płaszczyźnie (141—161). 8. Postulat ARCHIMEDESA (162—189). Skorowidz alfabetyczny.

Nie podaje dowodów niesprzeczności i niezależności aksjomatów.

Nietyle do nauki, ile do poinformowania się, a także uzupełnienia wiadomości polecamy doskonałe dzieło zbiorowe:

F. ENRIQUES. Fragen der Elementargeometrie I. Teil. Prinzipien der Geometrie. Wydanie niemieckie H. THIEMEGO. Lipsk, Teubner, 1911; str. X + 366. Cena m. 10.

Spis rozdziałów:

F. ENRIQUES. O znaczeniu filozoficznym zagadnień, dotyczących podstaw gieometrji.

F. ENRIQUES. Uwagi o nauczaniu gieometrji naukowej.

U. AMALDI. O pojęciu prostej i płaszczyzny.

A. GUARDUCCI. Przystawanie i ruch.

G. VITALI. O zastosowaniu postulatu ciągłości w gieometrji elementarnej.

U. AMALDI. O nauce równoważności.

G. VAILATI. Nauka o proporcjach.

R. BONOLA. O teorji równoległych i o gieometrjach nieeuklidesowskich.

To tłumaczenie jest wydaniem znacznie powiększonym w stosunku do oryginału (Questioni riguardanti la geometria elementare). Późniejsze powiększone wydanie włoskie (przekład polski w druku) wyszło pod tytułem:

F. ENRIQUES. Questioni riguardanti le matematiche elementari. Tom I: Critica dei principii. Bolonja, 1912; str. 649. Cena fr. 25.

(Do tego wydania zostały dołączone rozdziały, dotyczące arytmetyki: F. ENRIQUES. Liczby rzeczywiste. D. GIGLI. O liczbach zespolonych o jednej i o więcej jednostkach.)

D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie. 4[1]), durch Zusätze und Literaturhinweise von neuem vermehrte und mit 7 Anhängen versehene Auflage (tom VII zbioru »Wissenschaft u. Hypothese«). Lipsk, Teubner, 1913; str. VI+258. Cena m. 6.

Klasyczne to dzieło, niezbędne do głębszego studjowania, nie nadaje się do nauki na początek, gdyż większości dowodów nie podaje (mogłoby służyć do encyklopedycznego poinformowania się o rezultatach).

F. Klein. Nicht-Euklidische Geometrie. Vorlesung gehalten während des Wintersemesters 1889—90 (I, str. 365) und Sommersemesters 1890 (II, str. 238). Gietynga, 1892 lub 1893 (wydanie drugie, prawie niezmienione); litografowane.

Gorąco polecamy to dzieło. Nie jest ono przeznaczone do nauki systematycznej, lecz zawiera bardzo dużo różnorodnych wiadomości (także historycznych) i oświetleń przedmiotu. Klein podkreśla tu zasadnicze punkty teorji i wskazuje na różnice między różnemi metodami. Wogóle jest to książka wysoce kształcąca; wymaga pewnej znajomości gieometrji rzutowej (szczególniej spółrzędnych rzutowych) oraz gieometrji różniczkowej.

O ogólnym stanie badań nad podstawami gieometrji informuje szczegółowo bardzo dobry artykuł w Encyklopedji nauk mat., powiększony w wydaniu francuskim:

III 1. F. Enriques. Principes de la géometrie. T. III, vol. I, fasc. 1. 1911; str. 1—147; z dodatkiem:

III 1*a*. A. Schoenflies. Notes sur la géometrie non-archimédienne; str. 148—151.

(W wydaniu niem.: III A B 1 F. Enriques, Prinzipien der Geometrie. T. III 1, zesz. 1. 1907; str. 1—129).

Encyklopedyczne wiadomości czerpać też można z drugiego wydania niemieckiego Repertorjum E. Pascala, tom II, część pierwsza (p. wyżej Wstęp do st. III, str. 139).

Tu jeszcze należy częściowo wiele książek, wymienionych niżej przy omawianiu strony filozoficznej zagadnienia, głównie książka Russlla, o podstawach gieometrji.

---

1) Wydanie 3-cie różni się niewiele; 2-gie nie zawiera 2 not, poza tym różni się też niewiele. Natomiast pierwsze jest przestarzałe (np. zawiera jeden zbyteczny »Anordnungsaxiom«, nie formułuje »Vollständigkeitsaxiom«).

Do poznania aksjomatyki specjalnie gieometrji rzutowej polecamy:

F. Enriques. Lezioni di geometria projettiva. Wyd. 2-e. Bolonja, 1904. Tłumacz. niem.:

— Vorlesungen über projektive Geometrie. Lipsk, 1903; str. 169. (Spis rozdziałów p. Gieom. synt.).

Gieometrja niearchimedesowska Veronesego i jej podstawy zostały wyłożone w dziele:

G. Veronese. Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Padwa, 1891; str. 628. Także w tłumaczeniu niemieckim:

— Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Übersetzt von A. Schepp. Lipsk, 1894; str. XLVI + 710.

Dużo wiadomości o gieometrji niearchimedesowskiej, w szczególności o badaniach najnowszych, zawiera też cytowany wyżej artykuł Enriquesa w Encyklopedji n. mat.

P. Stäckel und F. Engel. Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. Ze 145 figurami i kopją listu Gaussa. Lipsk, Teubner, 1895; str. X + 325. Cena m. 9.

Zawiera poprzedzone wstępami wyjątki z pism następujących autorów: Euklides, J. Wallis, G. Saccheri, J. H. Lambert, K. F. Gauss, F. K. Schweikart i F. A. Taurinus; oraz spis chronologiczny prac (wydrukowanych do r. 1837), dotyczących aksjomatu o równoległych.

Niektóre odnoszące się tu dzieła starsze wyszły w wydaniu Ostwalda: Klassiker der exakten Wissenschaften.

Gauss, Beltrami, Riemann, Helmholtz, Lie, Poincaré. Ob osnowanijach Gieometriji. Wydane przez wydział fiz.-mat., wyd 2., uzupełnione. Kazań, 1895; str. 121. Cena rb. 1.25.

Jest to zbiór wyjątków z dzieł tych uczonych, w tłumaczeniu rosyjskim.

Bibljografję podaje:

M. J. Sommerville. Bibliography of non Euclidian Geometry including the theorie of parallels, the foundation of geometry and space of *n* dimensions. Londyn, Harrison and Son, 1912. Cena szyl. 10.

TEORJA PRAWDOPODOBIEŃSTWA.

OPRACOWAŁ

STEFAN MAZURKIEWICZ.

A) Ogólna teorja prawdopodobieństwa.

1. Ustalonej definicji *prawdopodobieństwa*, jako przedmiotu matematycznej teorji prawdopodobieństwa, dotychczas niema. W paragrafie niniejszym przedstawiamy punkt widzenia t. zw. teorji klasycznej, w następnym — obecny stan zagadnienia i współczesne próby jego rozwiązania.

Teorja prawdopodobieństwa powstała jako odrębny dział matematyki w wieku XVII. Impuls do jej stworzenia dały gry hazardowe: prace, które ją naukowo ugruntowały, poświęcone były rozwiązaniu pewnych zagadnień, które nastręczyły się przy grze w kości (Pascal (1623—1662), Fermat (1601—1665))[1]. Dalszy rozwój teorji prawdopodobieństwa, w ciągu wieków XVII i XVIII, polegał na wynajdywaniu i rozwiązywaniu coraz to nowych zagadnień tego typu[2]), dalej na usta-

[1]) Przykłady tego rodzaju zagadnień znajdzie czytelnik w § 5-tym.

[2]) Bogatego materjału dostarczyły loterje.

laniu i porządkowaniu pojęć, które się przytym urabiały i wytwarzaniu metod analitycznych, nadających się do rozwiązywania odpowiednich zagadnień, wreszcie na przenoszeniu tych pojęć i metod do innych dziedzin (statystyka) drogą analogji. Okres ten zamyka dzieło Laplace'a: Théorie analytique des probabilités (1812). Obejmuje ono całkowity dorobek naukowy wieków poprzednich, usystematyzowany w teorję, która nosi nazwę *klasycznej*.

Gry hazardowne, które, historycznie rzecz biorąc, teorję tę spowodowały, stały się dla niej modelem i według tego modelu kształtowała ona zasadnicze swoje pojęcia [1]). Przykład, który niżej podaję, wskazuje, w jaki sposób analiza tego stanu rzeczy, który jest nam dany przy obserwowaniu prostej gry losowej, doprowadza do *klasycznej definicji prawdopodobieństwa*.

Definicja ta brzmi:

»Prawdopodobieństwo zdarzenia jest stosunkiem liczby przypadków, sprzyjających zdarzeniu, do liczby przypadków możliwych, t. j. sprzyjających i nie sprzyjających, pod warunkiem atoli, aby wszystkie przypadki możliwe były oraz jednakowo możliwe« [2]).

Otóż, już w życiu codziennym charakteryzujemy pewne zdarzenia przyszłe, jako mniej lub więcej prawdopodobne. Jeżeli np. rzucamy kostką sześcienną (możliwie foremną i jednorodną), której boki odpowiednio opatrzone są numerami 1, 2... 6, wówczas już na pierwszy rzut oka wydaje się nam, że wyrzucenie jedynki jest mniej prawdopodobne, niż wyrzucenie jednego z pięciu numerów pozostałych, a równie prawdopodobne, jak wyrzucenie piątki. Analizując rzecz bliżej, widzimy, że przy każdym rzucie jest sześć możliwych przypadków: albo 1, albo 2... albo 6. Wiemy, że jeden i tylko jeden z tych przypadków zajść musi, natomiast nie wiemy który, co więcej, nie możemy oznaczyć żadnej różnicy w sposobie realizowania się tych przy-

---

[1]) Odbiło się to w terminologji np. »nadzieja matematyczna«, »ryzyko matematyczne«.

[2]) Laplace: Théorie analytique des probabilités (cytata w przekładzie W. Gosiewskiego).

padków i wiemy, że przy wyrobie kostki starano się usunąć wszelkie takie różnice[1]). Jest wobec tego rzeczą naturalną uważanie tych przypadków a priori za jednakowo możliwe. Definicja klasyczna pozwala nam teraz wyrazić liczbowo owe intuicyjnie, z gruba wyczuwane różnice między prawdopodobieństwami poszczególnych, możliwych zdarzeń przy rzucie. Każde z tych prawdopodobieństw wyraża się przez liczbę nie ujemną, nie większą od jedności, przyczym prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego (w danym wypadku wyrzucenia jakiegoś numeru) równa się jedności, prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego zeru. Co więcej, prawdopodobieństwa te będą miały wartość objektywną, pozwolą nam w pewnej mierze przewidywać, jaki będzie przebieg zdarzeń: jeżeli mianowicie wykonamy większą liczbę, np. tysiąc rzutów, wówczas częstości względne zdarzeń będą naogół mniej więcej równe przypisanym im prawdopodobieństwom, tym dokładniej, im większa jest ilość rzutów. W szczególności zdarzenia, których prawdopodobieństwa są bardzo małe, zdarzać się będą bardzo rzadko i praktycznie mogą uchodzić za niemożliwe.

Z definicji klasycznej wynikają dwa zasadnicze twierdzenia teorji prawdopodobieństwa:

I. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym: prawdopodobieństwo, że jedno przynajmniej z pomiędzy n wyłączających się[2]) zdarzeń zajdzie, równa się sumie przynależnych tym zdarzeniom prawdopodobieństw.

II. Twierdzenie o prawdopodobieństwie złożonym: prawdopodobieństwo, że zajdzie zarówno zdarzenie a, jak i zdarzenie b, równa się iloczynowi prawdopodobieństwa zdarzenia a przez prawdopodobieństwo zdarzenia b, obliczone w założeniu, że zdarzenie a zaszło[3]). Jeżeli przytym ostatnie prawdopodobieństwo równa się prawdopodobieństwu bezwzględnemu zdarzenia b (t. zn. obliczonemu niezależnie od tego, czy

[1]) Oczywiście zakładamy jeszcze, że intencje grającego nie mogą wpływać na rezultat rzutu.

[2]) To znaczy takich, że co najwyżej jedno z nich może zajść.

[3]) Wywód tego twierdzenia wymaga pewnego aksjomatu, sformułowanego wyraźnie dopiero przez Markowa.

a zaszło, czy nie), wówczas zdarzenia *a* i *b* nazywamy *niezależnemi* [1]). Analogiczną jest definicja wzajemnej niezależności większej liczby zdarzeń. Zdarzenia niezależne grają wielką rolę w teorji prawdopodobieństwa, między innemi dlatego, że analityczne ich opanowanie jest bez porównania łatwiejsze. Z tego powodu, w celu otrzymania choć przybliżonych rezultatów, często zakłada się niezależność tam, gdzie faktycznie nie należałoby się jej spodziewać.

2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa stała się, w drugiej zwłaszcza połowie wieku XIX, przedmiotem ożywionej i wszechstronnej krytyki, wychodzącej bądź od matematyków (Bertrand, Poincaré), bądź też od logików (v. Kries). Z zarzutów, które postawiono, wymieniamy dwa, naszym zdaniem najważniejsze. Pierwszy z nich dotyczy pojęcia jednakowej możliwości, które definicja klasyczna zakłada jako gotowe, a które jest niejasne i właściwie samo wymaga definicji. Widzieliśmy, że w przypadku najprostszych gier hazardownych, gdzie utworzenie schematu przypadków jednakowo możliwych naogół nie nastręcza trudności, występuje cały szereg różnorodnych momentów: a więc nasza subjektywna niezdolność do wyszukania różnic w sposobie realizowania się poszczególnych przypadków, dalej nasza wiedza, dotycząca warunków, przy których wykonywamy próbę (znajomość budowy kostki przy rzucie), wreszcie, moment czysto objektywny, zgodność rzeczywistego przebiegu zdarzeń z przewidywaniem teorji. O ile akcentujemy pierwszy z tych momentów, czyniąc go jedynym kryterjum jednakowej możliwości (Stumpf), wówczas owa zgodność objektywna (o ile zachodzi) będzie niewyjaśniona, a zresztą może jej nie być wcale; próba zaś wysunięcia na pierwszy plan drugiego momentu i stworzenia objektywnej teorji prawdopodobieństwa (v. Kries) nie doprowadziła do określonej definicji jednakowej możliwości.

Z kolei przechodzimy do drugiego zarzutu. Wspomniane wyżej charakterystyczne zachowanie się częstości względnej

---

[1]) Definicja powyższa jest asymetryczna (t. zn. *a* gra w niej rolę odmienną od *b*), stosunek jednak niezależności jest symetryczny.

poszczególnych zdarzeń przy grach hazardownych (zjawisko wyrównania statystycznego), może występować również i w takich wypadkach, gdzie a priori zupełnie nie można utworzyć schematu przypadków jednakowo możliwych. Zachodzi to w statystyce. Jeżeli naprzykład rozpatrujemy grupy nowonarodzonych, wówczas stosunek liczby chłopców do ogólnej liczebności grupy jest mniej więcej stały, o ile tylko grupa jest dość obszerna. Jeżeli rozpatrywać szereg grup, wówczas odpowiednie częstości względne wahać się będą dokoła pewnej liczby p mniej więcej tak, jak gdyby dla każdego nowonarodzonego płeć określała się przez ciągnienie z urny, zawierającej gałki białe (chłopcy) i czarne (dziewczynki) w stosunku $p : 1-p$. Teorja klasyczna mówiła w tym wypadku o prawdopodobieństwie a posteriori. Prawdopodobieństwem tym operowano tak samo, jak prawdopodobieństwem a priori, choć, ściśle biorąc, nie podpada ono wcale pod definicję klasyczną. Okazuje się więc, że ostatnia jest zbyt ciasna, że nie obejmuje wszystkich wypadków, w których stosowanie metod teorji prawdopodobieństwa prowadzi do rezultatów, mających wartość objektywną.

Matematyk niemiecki G. Bohlmann podał w r. 1908[1]) ciekawą próbę ominięcia tych trudności przez zastosowanie metody aksjomatycznej[2]). Polega ona na tym, że nie określamy, czym jest w istocie swojej prawdopodobieństwo, lecz ograniczamy się do podania w formie aksjomatów zasadniczych jego własności, przedewszystkim tych, które wyrażają się w twierdzeniach o prawdopodobieństwie całkowitym i złożonym. Aksjomaty te pozwalają nam zbudować matematyczną teorję prawdopodobieństwa, rzecz prosta jednak naogół[3]) nie przypisują

---

[1]) Por. G. Bohlmann. Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung (Atti del quarto congresso internationale dei matematici in Roma, t. III, Rzym 1909), oraz artykuł o matematyce ubezpieczeniowej w Encyklopedji Nauk Matematycznych.

[2]) Por. Podstawy Gieometrji.

[3]) Wyjąwszy wypadek, w którym zdarzenie jest pewne lub niemożliwe; ma ono wtedy prawdopodobieństwo równe odpowiednio: jedności (aksjomat 1-y Bohlmanna) albo zeru.

poszczególnym zdarzeniom określonego a priori prawdopodobieństwa, jak to czyniła definicja klasyczna. Przy przejściu do zastosowań należy każdorazowo wymienić, jakim zdarzeniom przypisywać będziemy prawdopodobieństwa i w jaki sposób będziemy obliczać te prawdopodobieństwa. Wprowadzamy przez to układ postulatów, który charakteryzuje dany dział zastosowań. Układ taki podał Bohlmann dla matematyki ubezpieczeniowej [1]). Oczywiście a priori nie możemy powiedzieć, czy postulaty te dadzą nam rezultaty zgodne z doświadczeniem.

3. Z innych pojęć teorji prawdopodobieństwa najważniejszemi są pojęcia *zmiennej ewentualnej*, *wartości prawdopodobnej*, oraz *zboczenia średniego*. Jeżeli x jest zmienną rzeczywistą i jeżeli dla każdego przedziału (λ_1, λ_2) określone zostało prawdopodobieństwo, aby x zawierało się w tym przedziale, innemi słowy, prawdopodobieństwo, aby zachodziła nierówność:

$$\lambda_1 \leqq x \leqq \lambda_2,$$

wówczas nazywamy x *zmienną ewentualną*. Typowym przykładem takiej zmiennej jest wysokość wygranej, czy też przegranej gracza, biorącego udział w grze hazardownej. Praktycznie ważne są dwa wypadki:

a) Zmienna może przyjmować tylko skończoną liczbę różnych wartości: $x_1, x_2 \ldots x_n$ z prawdopodobieństwem odpowiednio równającym się: $p_1, p_2 \ldots p_n$. Zakłada się przytym, że jest: $\sum^i p_i = 1$, t. zn., że jedną z tych wartości zmienna musi przyjąć. W wymienionym przykładzie mamy właśnie taki stan rzeczy.

b) Zmienna może przyjmować wszystkie wartości rzeczywiste, przyczym istnieje taka funkcja ciągła, nieujemna $\varphi(x)$, że prawdopodobieństwo nierówności:

$$\lambda_1 \leqq x \leqq \lambda_2$$

wyraża się przez całkę oznaczoną

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(x) dx.$$

---

[1]) W pracy cytowanej wyżej.

Funkcja $\varphi(x)$ nazywa się *dyspersją* zmiennej (Verteilungsfunction)[1]. Taki stan rzeczy przyjmuje się, jako założenie, w wielu zastosowaniach; w teorji błędów, naprzykład, zakładamy, że wartość błędu dostrzeżenia jest zmienną ewentualną o określonej ciągłej dyspersji (którą nazywamy w tym wypadku *prawem błędów*)[2].

Wartością prawdopodobną (wartością średnią, nadzieją matematyczną) zmiennej x nazywamy liczbę:

$$(x) = \sum x_i \, p_i \text{ [3]}$$

zaś *zboczeniem średnim* liczbę:

$$m(x) = \sqrt{\sum^i (x_i - (x))^2 \, p_i}.$$

Znaczenie tych liczb uwydatni się w § następnym, przy omawianiu prawa wielkich liczb, tu zaznaczamy tylko, że wartość prawdopodobna i kwadrat zboczenia średniego czynią zadość *prawu rozdzielności:*

$$(x+y) = (x) + (y)$$
$$[m(x+y)]^2 = [m(x)]^2 + [m(y)]^2,$$

przyczym pierwsza z tych równości zachodzi zawsze, druga — w razie, jeżeli zmienne x i y są od siebie niezależne[4].

---

[1]) Zamiast jednej zmiennej można także rozpatrywać układ s zmiennych: $x_1, \ldots x_s$, przyczym prawdopodobieństwo, że punkt o spółrzędnych $x_1, \ldots x_s$ znajduje się w obszarze s-wymiarowym D, określone jest przez całkę wielokrotną $\int_{(D)} \varphi(x_1, \ldots x_s) dx_1 \ldots dx_s$. Dyspersja φ jest wtedy funkcją s zmiennych.

[2]) Logicznie możliwe są inne jeszcze wypadki: zakres możliwych wartości zmiennej mógłby być przeliczalny, możnaby także pomyśleć, że wypadki *a)* i *b)* są skombinowane ze sobą. Założenie, że funkcja $\varphi(x)$ ma być ciągłą jest zdaje się zbyteczne; wystarcza zapewne całkowalność w znaczeniu Lebesgue'a. Zaznaczam jeszcze, że wiele podręczników (Gosiewski, tak samo Encyklopedja nauk matem.) operuje prawdopodobieństwami »nieskończenie małemi«, co nie jest ściśle.

[3]) Wzory na (x) i $m(x)$ piszemy tylko dla wypadku *a)*; w wypadku *b)* zamiast sum występują całki, zresztą nic się nie zmienia.

[4]) Zachodzi to wtedy, jeżeli dla każdych λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 prawdopodobieństwa nierówności

$$\lambda_1 \leqq x \leqq \lambda_2 \text{ i } \mu_1 \leqq y \leqq \mu_2$$

są niezależne; analogiczną jest definicja wzajemnej niezależności większej liczby zmiennych.

4. Najważniejszym działem teorji prawdopodobieństwa są twierdzenia zwane *prawami wielkich liczb*. Stanowią one teoretyczną podstawę tego, co w § 2 nazwaliśmy wyrównaniem statystycznym. Najprostsze z nich (*twierdzenie* BERNOULLI'EGO, udowodnione w r. 1713) orzeka: jeżeli pomyślimy szereg złożony z n prób niezależnych i takich, że w każdej z nich prawdopodobieństwo pewnego zdarzenia E jest stale równe p, wówczas, przy dostatecznie wielkiej liczbie prób, częstość względna zdarzenia E w naszym szeregu będzie się dowolnie mało różniła od p, z prawdopodobieństwem dowolnie blizkim jedności. DE MOIVRE, a po nim LAPLACE, nadali twierdzeniu temu formę bardziej dokładną, przez podanie wzoru asymptotycznego na prawdopodobieństwo, aby rezultat prób zawierał się w danych granicach. Jeżeli mianowicie oznaczymy przez x liczbę prób, które dały zdarzenie E, wówczas prawdopodobieństwo, że x zawarte będzie w granicach $np + \lambda_1 \sqrt{2npq} \leqq x \leqq np + \lambda_2 \sqrt{2npq}$ $(\lambda_1 < \lambda_2)$, dąży dla nieskończenie rosnącego n do granicy:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-t^2} dt.$$

W następstwie twierdzenie to zostało przez LAPLACE'A, a potym CZEBYSZEWA i jego uczniów uogólnione na wypadek, gdy próby dają nam poszczególne wartości zmiennych ewentualnych $y_1, y_2, \ldots$ Oznaczając przez n liczbę prób, przez y sumę zmiennych, a więc kładąc

$$y = y_1 + y_2 + \ldots . y_n,$$

badamy tu prawdopodobieństwo, aby odchylenie zmiennej y od jej wartości prawdopodobnej (y) zawierało się w pewnych granicach. Okazuje się, że w celu otrzymania dogodnych wzorów asymptotycznych, trzeba odchylenie to mierzyć zboczeniem średnim zmiennej y[1]), a więc rozpatrywać prawdopodobieństwo nierówności:

$$\lambda_1 \sqrt{2}\, m(y) \leqq y - (y) \leqq \lambda_2 \sqrt{2}\, m(y),\ \lambda_1 < \lambda_2,$$

które oznaczymy przez $P(\lambda_1, \lambda_2)$. Najlepiej zbadanym jest wy-

---

[1]) Uwaga ta wykazuje ważność tego pojęcia.

padek, w którym zmienne są niezależne. Okazuje się, że przy pewnych, bardzo ogólnych założeniach, w stosunku do zmiennych $y_1, y_2, \ldots$ jest wtedy:

$$\lim_{n=\infty} P(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-t^2} dt.$$

Istnieją dwie metody, które pozwalają udowodnić to zasadnicze twierdzenie: metoda czynnika nieciągłego, w zasadzie pochodząca od LAPLACE'A a wydoskonalona zwłaszcza przez LIAPUNOWA, oraz metoda momentów CZEBYSZEWA i MARKOWA. Funkcja $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ występuje nader często w roli dyspersji przy zastosowaniach (np. jako prawo błędów)[1]. Prawo wielkich liczb pozwala nam nieraz zrozumieć, dlaczego tak jest. Jeżeli np. założymy, że błędy pewnego dostrzeżenia są spowodowane przez wielką liczbę niezależnych od siebie przyczyn, z których każda powoduje t. zw. błędy elementarne[2]), wówczas z prawa wielkich liczb wynika, że prawo błędów w przybliżeniu będzie miało postać:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}.$$

Otóż zdaje się, że takie założenie w wielu wypadkach dokładnie odpowiada rzeczywistości.

5. Podręczniki teorji prawdopodobieństwa zawierają, prócz twierdzeń ogólnych, mnóstwo zagadnień szczególnych, a raczej zadań, typu następującego: przypisujemy zdarzeniom $A, B, C\ldots$ oznaczone prawdopodobieństwa $p(A), p(B), p(C)\ldots$; chodzi o znalezienie prawdopodobieństwa $p(x)$ pewnego zdarzenia x, będącego oznaczonym połączeniem zdarzeń $A, B, C\ldots$, lub też wynikiem takich połączeń. Prawdopodobieństwa $p(A), p(B), p(C)$, będące punktem wyjścia, muszą być wybrane zgodnie z aksjomatami (np. jeżeli A i B są zdarzeniami, które mamy uważać za niezależne, zaś C polega na jednoczesnym ich zachodzeniu,

---

[1]) Mówimy wtedy, że dyspersja zachodzi według *prawa wykładniczego*, lub *prawa* GAUSSA.

[2]) Błędom tym przypisuje się pewne własności dodatkowe.

wówczas musi być $p(C)=p(A)\cdot p(B)$). Skądinąd mogą być dowolne; ustalenie ich jest rzeczą umowy [1]) i nie może podlegać dyskusji matematycznej. Zazwyczaj staramy się utworzyć schemat przypadków jedynie możliwych i wyłączających się i te przypadki uważamy właśnie za owe zdarzenia A, B, C... będące punktem wyjścia.

Wyróżniamy dwa główne typy takich zagadnień.

a) Liczba zdarzeń A, B, C... jest skończona. Należą tu zadania wynikające z gier losowych. Przykłady:

1) Zadanie de Moivre'a: znaleźć prawdopodobieństwo, że suma oczek wyrzuconych przy rzucie n kośćmi wyniesie s (zakładamy, że prawdopodobieństwo wyrzucenia jedną kością k oczek jest dla $k=1, 2... 6$ równe $\frac{1}{6}$ i że rzuty są między sobą niezależne).

2) Z μ urn, z których każda zawiera m gałek białych, n czarnych, losujemy po jednej gałce; jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania w ten sposób α gałek białych (zakładamy, że prawdopodobieństwo wylosowania którejkolwiek gałki z danej urny równa się $\frac{1}{m+n}$ i że ciągnienia są między sobą niezależne)? Zadania takie rozwiązujemy bądź metodą teorji połączeń (kombinatoryki), bądź metodą równań różnicowych. Pierwsza nawiązuje wprost do klasycznej definicji prawdopodobieństwa. Przypuszczalny przebieg zdarzenia staramy się rozłożyć na przypadki, które w myśl przyjętych założeń byłyby jedynie możliwe, jednakowo możliwe i wyłączające się wzajemnie. Obliczamy następnie liczbę N wszystkich tych przypadków oraz liczbę n tych z pośród nich, które sprzyjają zdarzeniu x. Jest wtedy:

$$p(x)=\frac{n}{N}.$$

Metoda równań różnicowych, wydoskonalona zwłaszcza przez Laplace'a, stosuje się wtedy, jeżeli prawdopodobieństwo szukane jest funkcją pewnych zmiennych całkowitych, nieujemnych x_1, x_2... x_n (w przykładzie (2) zmiennemi takiemi są μ i α). O ile można między wartościami szukanego prawdo-

[1]) Oczywiście rezultaty, które otrzymamy, będą miały w odniesieniu do rzeczywistości wartość jedynie hipotetyczną.

podobieństwa ustalić dla różnych wartości zmiennych pewien związek, wówczas związek ten ma postać równania różnicowego i zadanie sprowadza się do:

wyznaczenia wprost szukanego prawdopodobieństwa dla pewnych wartości zmiennych, w celu otrzymania warunków początkowych w ilości dostatecznej;

oraz scałkowania danego równania, przy uzyskanych warunkach początkowych.

b) Prawdopodobieństwa gieometryczne. Są to zadania typu następującego: znaleźć prawdopodobieństwo, aby pewien twór gieometryczny, czyniący zadość warunkom (A), spełniał zarazem warunki (x).

Przykład: dane są krzywe wypukłe K_1 i K_2, z których pierwsza leży wewnątrz drugiej; obliczyć prawdopodobieństwo, aby prosta, przecinająca K_2, przecinała zarazem K_1. Celem rozwiązania takiego zagadnienia ustalamy przedewszystkim spółrzedne danego tworu gieometrycznego[1]); załóżmy, że jest ich n: $x_1 \ldots x_n$. Zachodzenie warunku (A), resp. warunku (x), wyraża się wtedy tak: punkt analityczny $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ leży wewnątrz pewnego obszaru (D_A), resp. (D_x). Jeżeli założymy, że wewnątrz obszaru (D_A), dla zmiennych $(x_1 \ldots . x_n)$ została określona dyspersja $\varphi(x_1 \ldots x_n)$, wówczas prawdopodobieństwo szukane wyrazi się przez iloraz całek oznaczonych:

$$p(x) = \frac{\int_{D_x} \varphi(x_1 \ldots x_n) dx_1 \ldots dx_n}{\int_{D_A} \varphi(x_1 \ldots x_n) dx_1 \ldots dx_n}$$

Zakłada się zwykle $\varphi(x_1 \ldots x_n) = \text{const.}$ Wynik zależy oczywiście od wyboru funkcji φ oraz spółrzędnych[2]); ten ostatni jest zupełnie dowolny i zazwyczaj staramy się uskutecznić go tak, aby całkowania można było wykonać efektywnie.

Zagadnienia na prawdopodobieństwa gieometryczne spro-

---

[1]) T. zn. — układ liczb, któryby twór ten jednoznacznie określał por. Gieometrja analityczna.

[2]) Nieuwzględnienie tej okoliczności prowadzi do pozornych paradoksów (*paradoks BERTRANDA*).

wadzają się tym sposobem do wyliczania całek i stanowią dobre ćwiczenie w tym kierunku.

6. W klasycznej teorji prawdopodobieństwa odgrywało ważną rolę t. zw. prawdopodobieństwo przyczyn. Zakładamy, że pewne zdarzenie A może być skutkiem n przyczyn: B_1, $B_2 \dots B_n$; przyczyna B_i posiada prawdopodobieństwo $p(B_i)$ i powoduje zdarzenie A z prawdopodobieństwem $p_i(A)$ $(i=1, 2 \dots n)$. Przypuśćmy, że zdarzenie A istotnie zaszło, nie wiadomo jednak, przez którą ze swoich możliwych przyczyn zostało spowodowane; pytamy, jakie jest prawdopodobieństwo, że przyczyną tą było B_i.

Ogólne rozwiązanie tego zagadnienia podane zostało przez Laplace'a. Ważne są jednak tylko pewne specjalne jego formy, z których wymienimy jedną: pewne zdarzenie x, zostało w n próbach zaobserwowane m razy; jakie jest prawdopodobieństwo, że prawdopodobieństwo zdarzenia x zawiera się w granicach $\lambda_1 \leqq p(x) \leqq \lambda_2$? Otóż, jeżeli założymy, że wymienione prawdopodobieństwo a priori, t. zn. przed wykonaniem prób w przedziale (0, 1) posiada dyspersję $\varphi=\text{const}$, wówczas jako odpowiedź na powyższe pytanie z ogólnego wzoru Laplace'a otrzymamy przez uszczególnienie t. zw. *wzór Bayes'a*, na którym teorja klasyczna opierała zastosowanie teorji prawdopodobieństwa do statystyki.

Dzisiaj wzór Bayesa ma znaczenie tylko historyczne, nasamprzód bowiem można się obyć bez niego, stawiając kwestję inaczej, przez co nawet zyskuje się na prostocie, po wtóre jego stosowalność opiera się na założeniach hipotetycznych, których naogół nie można nawet sprawdzić, a co do których wiadomo, że nie zawsze są spełnione. Trzeba poznać ten dział teorji prawdopodobieństwa głównie dlatego, że jest niezbędny do rozumienia prac dawniejszych autorów [1]).

7. Teorja prawdopodobieństwa nie jest niezbędnym składnikiem wykształcenia matematycznego, zapoznanie się jednak

[1]) Wzór Bayesa gra ważną rolę w t. zw. pierwszym uzasadnieniu teorji błędów Gauss'a, wyłożonym w Theoria motus corporum coelestium. Zaznaczam, że w tym wypadku nie można go otrzymać przez uszczególnienie z wzoru Laplace'a, nie zmieniając znaczenia elementów, wchodzących w skład ostatniego.

z ogólnemi jej zasadami jest dla matematyka bardzo pożądane. Poza tym teorja prawdopodobieństwa, ze względu na zastosowania swoje, jest ważną dla wielu kategorji niematematyków, przedewszystkim dla astronomów (teorja błędów), ekonomistów (statystyka matematyczna i matematyka ubezpieczeniowa), antropologów, biologów i psychologów (biometryka). Do czytania podręczników wystarcza znajomość rachunku całkowego i różniczkowego, oraz najprostszych własności funkcji $\Gamma(x)$[1]; pożądaną jest pewna wprawa w obliczaniu całek oznaczonych.

Naogół matematycy powinni przystępować do teorji prawdopodobieństwa nie wcześniej niż w trzecim roku studjów. Zasadnicze pojęcia teorji prawdopodobieństwa, są, jak to zaznaczaliśmy, niezupełnie ustalone; tkwi w nich wiele trudności niewyjaśnionych, przytym podręczniki nawet dobre, grzeszą naogół nieścisłością, czytanie więc, o ile ma przynieść korzyść odpowiednią, winno być krytyczne, a to wymaga umysłu już wyrobionego matematycznie.

---

8. Najodpowiedniejszą dla początkujących jest krótka i przystępna książka:

É. Borel. Éléments de la théorie des probabilités. Wyd. 2, Paryż, 1910. Hermann et Fils, str. 191. Cena fr. 6.

Polecamy ją w szczególności niematematykom oraz tym matematykom, którzy pragną poprzestać na ogólnym zaznajomieniu się z przedmiotem.

Z dzieł obszerniejszych wymieniamy cztery:

Wł. Gosiewski. Zasady rachunku prawdopodobieństwa. Warszawa, 1906. Bibl. Mat.-Fiz. str. X + 265. Cena rb. 2.

Książki tej nie możemy polecać początkującym, jest bowiem dość trudna, miejscami niejasna i nieścisła (np. dowód

[1]) Funkcja określona przez wzór:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Własności, o które tu chodzi (*wzór Stirlinga*), wyłożone są w każdym podręczniku analizy nieskończonostkowej.

twierdzenia Bernoulli'ego, zwł. str. 106), wreszcie zawiera błędy (np. na str. 97 uzupełnienie prawa wielkich liczb). Matematyk jednak już skądinąd obeznany z przedmiotem nie powinien jej pomijać, zawiera bowiem wiele pomysłów oryginalnych i ciekawe próby pogłębienia teorji klasycznej. Charakterystyczną dla autora jest dążność do łączenia dedukcji matematycznych z rozważaniami filozoficznemi.

J. Bertrand. Calcul des probabilités. Wyd. 2. Paryż, 1907, str. LVII + 322. Cena fr. 12.

A. Markow. Isczislenije wierojatnostiej. Wyd. 3. Petersburg, 1913, str. IV + 381. Cena rb. 3.

Istnieje przekład niemiecki z 2-go wydania rosyjskiego (H. Liebmanna):

A. Markoff. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Lipsk, Teubner. 1912; str. VII + 317. Cena m. 12.

H. Poincaré. Calcul des probabilités. Wyd. 2, Paryż, 1912 (Gauthier-Villars); str. 333. Cena fr. 12.

Podręcznik Bertranda, najwięcej przystępny z wymienionych, zawiera dużo przykładów, zadań i cennych uwag krytycznych. Dzieła Markowa i Poincarégo są jednak głębsze, bogatsze w treść i (zwłaszcza pierwsze) ściślejsze. Na uwagę specjalną zasługują w książce Markowa rozdziały poświęcone prawu wielkich liczb, zaś w podręczniku Poincarégo teorja błędów [1]) oraz rozdział ostatni (zagadnienia rozmaite).

Odmienny nieco charakter ma dzieło:

E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Wyd. 2. Lipsk, Teubner. T. I, 1908; str. X + 410. Cena m. 12. T. II. 1910; str. X + 470. Cena m. 14.

Ogólnej teorji prawdopodobieństwa poświęcona jest połowa pierwszego tomu; dalsze rozdziały tego tomu zawierają teorję błędów i biometrykę, tom zaś drugi: statystykę matematyczną i matematykę ubezpieczeniową.

Autor zamierzał objąć całokształt teorji prawdopodobieństwa, dał jednak dzieło niezupełne, niedość pogłębione i nieścisłe, które od Théorie analytique Laplace'a różni się, jak kompilacja od systemu. Dotyczy to zwłaszcza tomu 1-go.

---

[1]) Zaznaczam jednak, że uzasadnienie prawa Gaussa podane w rozdziale XI jest niedostateczne: rozumowanie § 134 (str. 193) jest nieścisłe.

Z dzieł klasycznych wymieniam tylko:

Laplace. Essai philosophique sur les probabilités. Oeuvres complètes. Tom VII-y. Paryż, 1886; str. 832. Cena fr. 35.

Laplace. Théorie analytique des probabilités. (W tym samym t. VII dzieł zbiorowych).

Pierwsze z tych dzieł, stanowiące wstęp do drugiego, daje dokładny i piękny obraz klasycznej teorji prawdopodobieństwa i jest ze wszechmiar godne polecenia. Co do drugiego, które zawiera właściwą teorję matematyczną, to czytanie go nastręcza duże trudności i, jak sądzę, może być korzystne w wyjątkowych tylko wypadkach.

Prócz ściśle matematycznej istnieje obszerna literatura omawiająca teorję prawdopodobieństwa z punktu widzenia filozofji. Należy tu w pewnej mierze Essai philosophique Laplace'a. Z dzieł późniejszych podaję:

J. v. Kries. Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung. Fryburg, 1886.

K. Stumpf. Ueber den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Berichte d. bayrischen Akademie (hist.-phil. Classe). 1892.

J. Łukasiewicz. Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Kraków, 1913; str. 75.

O rozwoju teorji prawdopodobieństwa informuje:

E. Czuber. Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. Lipsk, 1899; str. VIII + 279. Cena m. 8.

Książka ta zawiera bibljografję przedmiotu, przedrukowaną w książce Gosiewskiego (z uzupełnieniami dotyczącemi literatury polskiej i rosyjskiej). Wskazówki bibljograficzne znaleźć można również u Markowa oraz w Encyklopedji Nauk Matem. (wyd. franc. I, 4, zeszyt I-y; artykuł Czubera i Le Roux).

B) Zastosowania teorji prawdopodobieństwa.

1. Zakres zastosowań teorji prawdopodobieństwa rozszerza się nieustannie, obejmując coraz to nowe dziedziny. W sprawie zastosowań do fizyki matematycznej (*mechanika statystyczna*) odsyłamy do tomu II Poradnika, ograniczając się tutaj do podania krótkich uwag, dotyczących teorji błędów, statystyki matematycznej, matematyki ubezpieczeniowej i biometryki. Zaznaczam, że poznanie w ogólnych choćby zarysach pojęć i metod, które te nauki wytworzyły, oraz właściwego im punktu widzenia posiada wysoką wartość ogólnokształcącą. Można w tym celu posługiwać się interesującą i pięknie napisaną książką:

É. Borel. Le hasard. Paryż, 1914; str. IV + 311. Cena fr. 3.50.

Do czytania jej wystarcza znajomość matematyki w zakresie szkoły średniej.

2. Zadaniem teorji błędów jest podanie metody *wyrównywania dostrzeżeń* sprzecznych oraz uzasadnienie tej metody z punktu widzenia teorji prawdopodobieństwa. Mierząc jedną i tę samą wielkość empiryczną x kilkakrotnie, np. n razy, otrzymujemy z powodu nieuniknionych w dostrzeżeniu błędów naogół n różnych wartości. Chcąc teraz przypisać wielkości niewiadomej pewną określoną wartość, musimy w pewien sposób skombinować ze sobą rezultaty dostrzeżeń, biorąc np. ich średnią arytmetyczną. Proces ten nazywamy wyrównaniem (Ausgleichung). Obecnie używa się niemal wyłącznie jednego tylko sposobu wyrównywąnia dostrzeżeń, mianowicie t. zw. *metody najmniejszych kwadratów.* Uzasadnienie ze stanowiska teorji prawdopodobieństwa tej metody i wyrównania wogóle opiera się na spostrzeżeniu, że błędy dostrzeżeń, a przynajmniej pewne ich kategorje, płynąc z mnóstwa niezależnych i krzyżujących się wzajemnie źródeł, nabierają dla nas charakteru zdarzeń przypadkowych, zmiennych od dostrzeżenia do dostrzeżenia, występujących niejako na »chybił, trafił«, że wskutek tego przy wyrównywaniu kompensują się wzajemnie[1]. Dokładniej ujmujemy ten stan rzeczy, przypisując błędom określoną dyspersję (prawo błędów). Przejście do metody najmniejszych kwadratów może teraz nastąpić w dwojaki sposób. W tak zwanym pierwszym uzasadnieniu GAUSSA dochodzi się przez zastosowanie wzoru BAYESA, oraz pewnego postulatu (t. zw. *postulatu średniej arytmetycznej*) do przyjęcia prawa błędów w postaci:

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2};$$

metoda najmniejszych kwadratów występuje wtedy jako najbardziej korzystny sposob wyrównywania. Uzasadnienie to było jednak z różnych względów kwestjonowane i obecnie jest zarzucone przez większość matematyków[2]. Przy tak zwanym drugim uzasadnieniu, podanym również przez GAUSSA, metoda najmniejszych kwadratów jest tylko jednym z wielu korzystnych sposobów wyrównywania[3]. Prawu błędów nie przypisuje się wtedy określonej postaci, lecz tylko pewne ogólne własności. Fakt, że naogół (choć nie zawsze) prawo błędów wyraża się w przybliżeniu przez funkcję wykładniczą, wyjaśnia się przez prawo wielkich liczb (p. wyżej).

Matematyka interesuje w teorji błędów głównie strona teoretyczna, a więc jej uzasadnienie. Powinien więc zapoznać się z nią z podręczników ogólnej teorji prawdopodobieństwa, cytowanych wyżej. Najlepiej i najbardziej wszechstronnie przedstawia rzecz POINCARÉ. Dobrze jest również przeczytać klasyczne rozprawy GAUSSA:

C. GAUSS. Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Werke, tom IV; str. 3—53.

C. GAUSS. Supplementum theoriae combinationis. Werke, tom IV; str. 57—93.

---

[1] Oczywiście nie dotyczy to t. zw. *błędów systematycznych*, których wartość w całej serji dostrzeżeń jest m. w. stałą. Usuwanie tych błędów jest rzeczą techniki obserwacyjnej.

[2] H. SEELIGER podał przykład, w którym nie sprawdza się postulat średniej arytmetycznej (Astr. Nachr. 142. 1893).

[3] Rachunkowo sposób ten jest najdogodniejszy.

Istnieją przekłady francuski i niemiecki:

C. Gauss. Méthode des moindres carrés. Paryż, 1855; str. 112 (przekład J. Bertranda).

C. Gauss. Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate. Berlin, 1887 (przekład Börscha i Simona).

Czytelnicy natomiast, którym chodzi o stosowanie teorji błędów, muszą przedewszystkim poznać dokładnie technikę rachunkową metody najmniejszych kwadratów. W krótkich zarysach jest ona zwykle wyłożona w większych podręcznikach gieodezji i astronomji (dwie te nauki najczęściej ją stosują) np. w Astronomji teoretycznej Rudzkiego (por. Astronomja), obszerniej w specjalnych podręcznikach, z których wymieniamy dwa:

A. Danielewicz. Metoda najmniejszych kwadratów (Bibl. mat.-fiz.) Warszawa, 1904; str. X+186 t. X. Cena rb. 1.20.

Technika metody najmniejszych kwadratów jest tu przedstawiona bardzo dobrze; wykład poparty przykładami liczbowemi. Mniej zadowalającym jest uzasadnienie metody.

F. Helmert. Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Wyd. 2, Lipsk, 1907; str. XVIII + 578. Cena m. 16.

Układ tej książki jest niezbyt przejrzysty, a sposób wykładu nie zawsze jasny. Natomiast zawiera ona dużo uwag historycznych, wskazówki bibljograficzne, wreszcie informacje o pewnych zagadnieniach, przez mniejsze podręczniki pomijanych, a zarówno teoretycznie, jak i praktycznie ważnych (badanie błędów dostrzeżeń — rozdz. IV, ekonomja dostrzeżeń — rozdz. IX).

Dalsze wskazówki bibljograficzne podaje artykuł:

Bauschinger-Andoyer. Enc. Nauk Mat., wyd. franc., Tom I. vol. 4. fasc. 2. 1908.

3. Ze spółczesnych zagadnień *statystyki matematycznej* wymienimy przedewszystkim następujące: w jakich warunkach można przypisać pewnemu zdarzeniu, którego częstość względna w pewnej serji prób, lub w szeregu takich serji, jest nam znana, — stałe prawdopodobieństwo matematyczne od próby do próby i od serji do serji. Teorja klasyczna przyjmowała istnienie takiego prawdobodobieństwa, ilekroć tylko wspomniana częstość względna, przy dostatecznej liczebności rozpatrywanych serji, podlegała od serji do serji wahaniom stosunkowo niewielkim, — określonego jednak sprawdzianu w tym względzie nie posiadano. Zasługą W. Lexisa jest podkreślenie konieczności ustalenia takich sprawdzianów oraz podanie t. zw. kryterjów dyspersyjnych, które pozwalają dokładniej porównywać rzeczywiście zachodzącą częstość względną danego zdarzenia z tą, którejby spodziewać się należało, w założeniu, że zdarzenie to posiada stałe prawdopodobieństwo matematyczne.

Statystyce matematycznej poświęcona jest część pierwsza tomu II-go cytowanej powyżej książki Czubera. Poza tym wymieniam tylko zbiór rozpraw Lexisa:

W. Lexis: Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik. Jena, 1903. Str. 253. Cena m. 6.

4. Za pośrednictwem statystyki matematycznej wiąże się z teorją prawdopodobieństwa t. zw. *matematyka ubezpieczeniowa* [1]). Praktycznie jest to dział bardzo ważny, — teoretycznie jednak nie posiada wielkiego znaczenia, z tego więc względu ograniczamy się do podania literatury. Podręczniki podzielić można na dwie kategorje: *a*) elementarne, które nie wymagają od czytelnika znajomości matematyki wyższej, *b*) takie, które zakładają znajomość rachunku nieskończonostkowego. Z dzieł kategorji *a*) wymieniam:

A. Loewy. Versicherungsmathematik. Lipsk, 1910 (Sammlung Göschen), str. 175. Cena fen. 90.

Książeczka napisana jasno i przystępnie, dla początkujących najodpowiedniejsza.

A. Danielewicz. Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych. Warszawa, 1896 (Bibl. mat. fiz.); str.

---

[1]) Związek ten jest dość luźny i przez niektórych autorów kwestjonowany (np. K. Wagner: Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung. Jena, 1898).

W każdym razie uwydatnia się on najsilniej w takich działach matematyki ubezpieczeniowej, które praktycznie nie mają wielkiego znaczenia (teorja ryzyka).

VIII + 335 + XLIII (Tablice). Cena rb. 2 (na wyczerpaniu).

Książką tą trudno posługiwać się obecnie ze względu na przestarzałe znakowanie.

C. Landré. Mathematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung. Wyd. 4. Jena, 1911; str. XXVI, 528. Cena m. 17.

Obszerny podręcznik, przeznaczony głównie dla praktyków; ustępy, wymagające znajomości matematyki wyższej, oznaczone są przez ujęcie numerów w nawias i mogą być pomijane przy czytaniu.

Co do dzieł drugiej kategorji, wyróżnić należy część drugą tomu II-go książki Czubera, cytowanej w ogólnej teorji prawdopodobieństwa. Poza tym:

U. Broggi. Versicherungsmathematik. Lipsk-Berlin, 1911, str. VIII + 360. Cena m. 8. Istnieje również przekład francuski Lattés'a.

Książka ta najsilniej podkreśla związek matematyki ubezpieczeniowej z teorją prawdopodobieństwa.

Institute of actuaries' textbook of the principles of interest, life annuities and assurances and their practical application. Wyd. 2. Londyn.

Part. I: Interest by R. Todhunter, 1901.

Part II: Life contingencies by G. King, 1902.

Podręcznik bardzo szczegółowy i sumiennie opracowany.

B. Maleszewski. Tieorja i praktika pensjonnych kass. Petersburg 1889—1890. 3 tomy:

T. I. Teorja matematyczna długoterminowych operacji finansowych.

T. II. Część 1. Statystyka matematyczna. Część II. Teorja ubezpieczeń życiowych wogóle i różnego rodzaju emerytur w szczególności.

T. II. Dopełnienia (Różne wiadomości pomocnicze z matematyki).

T. III. Zbiór tablic do obliczeń.

Wskazówki bibljograficzne zawiera znakomicie opracowany artykuł: Technique de l'assurance sur la vie (Bohlmann i Poterin du Motel) w wydaniu francuskim. Encykl. Nauk Matem. (Tom I, vol. 4, fasc. 4).

Z licznych czasopism, poświęconych matematyce ubezpieczeniowej wymieniamy:

Journal of the Institute of Actuaries. Londyn (od r. 1850).

Zeitschrift für die gesammte Versicherungswissenschaft. Berlin (od 1901, — pod redakcją A. Manesa).

Czasopisma te, zwłaszcza drugie, nie są poświęcone wyłącznie matematyce ubezpieczeniowej, lecz ubezpieczeniom wogóle.

5. Ogół metod statystycznych w zastosowaniu do badania tworów świata organicznego obejmujemy nazwą *biometryki*. (Kollektivmasslehre). Za właściwych jej twórców uważać należy Galtona i Pearsona, którzy dali początek t. zw. kierunkowi angielskiemu. Podczas gdy rozwijający się równocześnie kierunek niemiecki, nawiązujący do Fechnera, a reprezentowany głównie przez Bruhnsa i Lippsa, dąży do stworzenia metod zupełnie ogólnych, któreby pozwalały ująć każdą możliwość, dającą się przewidzieć, — kierunek angielski jest bardziej empiryczny i stara się dobrać metody analityczne tak, by pozwalały zbadać w sposób o ile możności dokładny i dogodny te przypadki, które zachodzą rzeczywiście; jak dotąd, metody angielskie okazały się bardziej płodne. Zadaniem biometryki jest badanie cech nie poszczególnych indywiduów, lecz grup indywiduów (np. wzrostu pewnej grupy ludzkiej). Zakładamy, że dla danej grupy dana cecha jest zmienną ewentualną o określonej dyspersji i że poszczególne indywidua grupy stanowią niejako próby, dające nam poszczególne wartości zmiennej. W tym założeniu możemy przez zbadanie dostatecznie dużej ilości indywiduów grupy w przybliżeniu wyznaczyć hipotetyczną dyspersję danej cechy oraz określić współzależność między różnemi cechami (co jest zadaniem *teorji korelacji*). Co do literatury, wymieniamy przedewszystkim dwa podręczniki, z których pierwszy bardzo godny polecenia, należy do kierunku angielskiego, drugi do niemieckiego.

G. Yule. An Introduction to the theory of Statistics. Wyd. 2. Londyn, 1912: str. XV + 381. Cena szyl. 12.

Podręcznik przeznaczony przedewszystkim dla niematematyków; zawiera około stu zadań i obfite wskazówki bibljograficzne. Do czytania go wystarcza znajomość matematyki w zakresie szkoły średniej oraz metody spółrzędnych.

H. Bruhns. W a h r s c h e i n l i c h k e i t s r e c h n u n g u n d K o l l e k t i v m a s s l e h r e. Lipsk, 1906; str. VIII + 310 + 18. Cena m. 7.80

Zawiera dużo ciekawych rozdziałów, lecz pisany jest ciężko i nieprzystępnie.

Poza tym istnieje szereg referatów, które przedstawiają biometrykę w zastosowaniu do poszczególnych nauk. W języku polskim istnieje referat tego typu:

J. Czekanowski. Z a r y s m e t o d s t a t y s t y c z n y c h w z a s t o s o w a n i u d o a n t r o p o l o g j i. (Wyd. Warsz. Tow. Naukowego). Warszawa, 1913; str. IV + 228. Cena k. 50.

LOGISTYKA.

OPRACOWAŁ
ZYGMUNT JANISZEWSKI.

Treść: 1. Określenie logistyki; łączność jej z matematyką. 2. Różnica między logistyką a logiką tradycyjną. Niepopularność logistyki. 3. Jej rozwój. 4. Jej podział i treść. 5. Jej zadania. 6. Analiza zdań. 7. Znaczenie logistyki. Potrzebne przygotowanie. 8. Literatura.

---

1. *Logistyka* (zwana także *logiką symboliczną* i *logiką matematyczną*) jest to logika formalna[1]) (t. j. nauka o formach czystej myśli), posługująca się metodą matematyczną; ściślej mówiąc: metodą, którą dotychczas na większą skalę stosowała tylko matematyka. Dlaczego mówimy o niej tu, w dziale o matematyce, tłumaczą względy następujące:

a) logistyka ujęta jest w postaci rachunku *(algiebra logiki)*, matematykę zaś uważamy za naukę o wszelkich rachunkach.

b) jest ona jedyną nauką, mogącą mieć w matematyce zastosowanie;

c) w niektórych działach (np. teorji stosunków) traktuje o tych samych przedmiotach, co i matematyka, tylko szerzej ujętych;

d) rachunek logistyczny ma interpretację nietylko logiczną, lecz i matematyczną, należy więc bezsprzecznie i do matematyki (mianowicie do teorji mnogości[2])).

---

[1]) Lepiej może: część logiki formalnej, nie wszystkie bowiem badania logiczne znalazły swe miejsce w logistyce i prawdopodobnie wiele z nich nie da się poprowadzić jej metodami.

[2]) Obok interpretacji tego rachunku, należącej do teorji mnogości, możliwą jest jeszcze interpretacja, należąca do teorji liczb; p. niżej przypisek pierwszy na stronicy 453.

2. Logistyka różni się od logiki tradycyjnej nietylko metodą badania; różni się także sposobem stawiania zagadnień. Dzięki tym dwum różnicom powstała trzecia: różnica w treści; logistyka bowiem objęła takie przedmioty badania i osiągnęła takie rezultaty, jakich logika dawna nie znała zupełnie. Wreszcie, wskutek stosowania przez logistykę metody matematycznej, wynikła jeszcze jedna, zewnętrzna i dlatego najbardziej rzucająca się w oczy różnica: używanie symbolistyki. Ostatnia cecha stała się przyczyną niepopularności logistyki wśród filozofów.

Wielu, nie znając logistyki, sądzi ją po tej zewnętrznej stronie, myśląc, że cała jej oryginalność polega na przetłumaczeniu rezultatów tradycyjnej logiki na język symbolów. Tak nie jest: wszystkie twierdzenia i dowody logistyki można wypowiedzieć w zwykłym języku, a nie stracą one nic ze swej oryginalności; *wyrażenie* ich straci natomiast dużo na zwięzłości, precyzyjności i jasności. Na szczęście logistykę tworzyli matematycy, którzy wiedzieli, jak jest niezbędnym prawie, przy bardziej złożonych pojęciach i zawilszych dedukcjach, przedziwnie zwięzły język symbolów. Prawda, że przyswojenie go sobie — i wogóle wniknięcie w rozumowania logistyczne (podobnie jak w matematyczne) — wymaga dużej zdolności myślenia abstrakcyjnego i *pracy*. To nam lepiej jeszcze tłumaczy niepopularność logistyki.

Nie należy tylko przypuszczać, że logistyka jest dalszym rozwinięciem scholastycznych teorji sylogizmu i że uzupełnia je nowemi szczegółami; te teorje ze swemi Barbarami, Celarensami i t. d. nie mają może bardziej zdecydowanego wroga niż logistyka, która wykazuje ich czczość i brak naukowości (por. np. Padoa, *La logique déductive*, str. 76—79). Logistyka poprzestaje na jednej formie sylogizmu, formułując natomiast wiele innych, zupełnie niezależnych praw logicznych, które *naprawdę* w rozumowaniach ciągle stosujemy. A jak często i dziś jeszcze można spotkać twierdzenie, że nasze rozumowanie polega na dwu tylko zasadach: sprzeczności i sylogizmu!

3. Pierwszym który zastosował metodę t. zw. matema-

tyczną do logiki, był wielki LEIBNIZ (1646—1716); nie doszedł on jednak do zadowalających go rezultatów i nic prawie z badań swych nie ogłosił [1]).

Dopiero w połowie wieku XIX, w Anglji, zjawił się cały szereg pisarzy, zajmujących się czystą formalną logiką w najbardziej abstrakcyjnej formie; ci chwycili się znowu metody matematycznej. Pierwsi z nich — to matematycy: DE MORGAN (1806—1871) i G. BOOLE (1815—1864); drugiego można uważać za twórcę rachunku logicznego. Dalej wymienić należy JEVONSA i PEIRCE'A. W Niemczech [2]) E. SCHRÖDER nadał ostatecznie rachunkowi logicznemu jego postać dzisiejszą w pracy: Der Operationskreis des Logikkalkuls (1877; str. 37) oraz rozwinął go w swym obszernym trzytomowym dziele: Vorlesungen über die Algebra der Logik.

W ostatnią fazę rozwoju wprowadzili logistykę G. PEANO i B. RUSSELL (p. § 6).

4. Już logika tradycyjna wyróżnia dwa zasadnicze elementy myśli: *pojęcie* i *sąd*. Odpowiednio do tego istnieją dwie teorje logiczne: jedna zajmuje się stosunkami, zachodzącemi między pojęciami, druga — stosunkami, zachodzącemi między sądami. Ciekawą jest rzeczą, że dwu tym różnym teorjom odpowiada jeden i ten sam rachunek, t. j. twierdzenia ich dadzą się wyrazić w jednakowej symbolicznej formie, podobnie, jak jednakowemi są pod względem swej formy twierdzenia rzutowe dla punktów płaszczyzny i dla prostych płaszczyzny (p. Gieom. synt., str. 161 i Podstawy gieom., str. 411). Dwie te teorje logiczne możemy uważać za dwie interpretacje jednego rachunku formalnego.

---

[1]) O jego pracy w tej dziedzinie poinformuje najlepiej obszerne dzieło: L. COUTURAT. La logique de Leibniz, d'après des documents inédits. Paryż, Alcan, 1901.

[2]) Jednocześnie ze SCHRÖDEREM, a niezależnie od niego i dawniejszych logistyków, napisał G. FREGE algiebrę logiki p. t. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens (Halla, 1879; str. VIII + 88). Używa on zupełnie odmiennej symbolistyki.

Podstawowym związkiem, jaki może zachodzić między elementami tego rachunku, jest

$$a \subset b$$

co[1]) ma w różnych interpretacjach różne znaczenia, a mianowicie:

1) w teorji pojęć — że pojęcie b jest ogólniejszym od pojęcia a, czyli klasa przedmiotów, odpowiadających pojęciu b, zawiera klasę przedmiotów, odpowiadających pojęciu a. To samo znaczenie posiada symbol ten w matematyce, w teorji mnogości: znaczy on, że zbiór a jest zawarty w zbiorze b.

2) w teorji sądów wzór ten znaczy, że sąd b wynika z sądu a, t. j.[2]), że gdy a jest sądem prawdziwym, to i b jest sądem prawdziwym.

Z punktu widzenia zaś matematyczno-formalnego, t. j., gdy rozpatrujemy rachunek sam, jako taki, abstrahując od jego interpretacji, stosunek ten określają dwa postulaty, czyli aksjomaty (por. Podstawy gieometrji, str. 406, oraz Zakończenie, § 3):

1) $a \subset a$ *(zasada tożsamości)*;

2) jeżeli $a \subset b$ i $b \subset c$, to $a \subset c$ *(zasada sylogizmu)*.

Postulaty te, jak łatwo sprawdzić, są w obu interpretacjach prawdziwe.

Prawie wszystkie inne pojęcia algiebry logiki dadzą się zdefinjować za pomocą stosunku $\subset$. Więc równość $a = b$ określa się jako jednoczesne zachodzenie obu stosunków: $a \subset b$ i $b \subset a$.

Innych określeń formalnych nie podajemy, zadowalając się objaśnieniem znaczenia najważniejszych z tych pojęć w każdej interpretacji zosobna.

Iloczyn logiczny $a \times b$ (albo w symbolistyce Peany: $a \cap b$) oznacza: 1) klasę (zbiór) przedmiotów, należących jednocześnie do klasy a i do klasy b; 2) sąd »a i b«, t. j. sąd, będący wypowiedzeniem jednoczesnym obu sądów a i b.

---

1) W znakowaniu autorowie różnią się między sobą. Jedni używają znaku $\subset$ w przeciwnym kierunku ($\supset$), inni bardziej złożonego znaku $\in\!\!\!\!-$, inni wreszcie znaku $<$.

2) »Wynikanie« jest tu pojmowane trochę inaczej (szerzej), niż w języku potocznym.

Suma logiczna $a+b$ (albo: $a \cup b$) oznacza: 1) klasę przedmiotów, należących przynajmniej do jednej z klas a i b; 2) sąd »a albo b«, t. j. sąd orzekający, że jeden przynajmniej z sądów a i b jest prawdziwy.

Negacja $\bar{a}$ oznacza: 1) klasę przedmiotów, nie należących do klasy a; 2) sąd »nie a« t. j. sąd: »a jest fałszywe«.

Jedynka logiczna 1 (u PEANY V, od »veritas«) oznacza: 1) »wszystko«, t. j. klasę, zawierającą wszystkie przedmioty rozpatrywanej kategorji; 2) sąd prawdziwy.

Zero logiczne 0 (u PEANY Λ) oznacza: 1) »nic«, klasę pustą, nie zawierającą wcale elementów (np. klasę przedmiotów, odpowiadających pojęciu sprzecznemu w sobie); 2) sąd fałszywy[1]).

5. Z określeń i aksjomatów (obok dwuch wymienionych, określających reguły operacyjne związku $\subset$, jest jeszcze parę innych aksjomatów) wyprowadza się wszystkie inne twierdzenia logistyki; każde z nich musi być ściśle dedukcyjnie udowodnione z pomocą reguł formalnych rachunku, bez odwoływania się do znaczenia symbolów, któremi operujemy[2]).

---

[1]) Podamy tu jeszcze jedną interpretację algiebry logiki, należącą do teorji liczb: zakres przedmiotów rachunku tworzy w tej interpretacji zbiór dzielników jednej (dowolnie obranej) liczby. Iloczyn logiczny dwuch przedmiotów tego rachunku — to największy wspólny dzielnik; suma logiczna — to najmniejsza wspólna wielokrotność; zero logiczne — to 1, a jedynka logiczna — to liczba obrana; wzór $a \subset b$ będzie tu znaczył podzielność liczby b przez liczbę a.

[2]) Dla charakterystyki rachunku logistycznego podaję tu kilka twierdzeń najprostszych:

$a \times a = a$ (*prawo tautologji*; dzięki niemu w algiebrze logiki występują tylko wielomiany stopnia 1-go);

$a + a = a$;

$(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ (*prawo rozdzielności dla mnożenia)*;

$(a \times b) + c = (a+c) \times (b+c)$ (*prawo rozdzielności dla dodawania*);

$a \times 0 = 0$, $a \times 1 = a$, $a + 0 = a$, $a + 1 = 1$;

$\overline{(a+b)} = \bar{a} \times \bar{b}$, $\overline{(a \times b)} = \bar{a} + \bar{b}$ (*twierdzenia DE MORGANA)*;

$\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$.

[Chcąc uniknąć rażącej może sprzeczności z wzorami arytmetyki, Twierdzenia te są często niemniej oczywiste od aksjomatów. Wydaćby się mogło, że zbytecznym jest ich dowodzenie. Jednak nie o wzmocnienie pewności tu chodzi, lecz o wykazanie związku między temi prawdami i o znalezienie zupełnego układu niezależnych od siebie praw logicznych. Zadaniem bowiem każdej prawdziwej nauki (w ciaśniejszym znaczeniu) jest wynajdywanie związków między faktami danej dziedziny (temi faktami są dla logiki prawa logiczne), nie zaś ich gromadzenie tylko [1]).

Przytoczymy tu dwa takie rezultaty logistyki, nieznane chyba przedtym zupełnie:

1) Symetryczność między teorją pojęć a teorją sądów.

---

w której symbole $+$, $\times$, 0 i 1 znaczą co innego, można używać symbolistyki Peany, t. j. znaków $\cup$, $\cap$, Λ, V].

We wzorach tych uderza zupełna symetrja względem znaków $+$ i $\times$ nie istniejąca w arytmetyce). Symetrja ta ciągnie się przez całą algiebrę logiki.

[1]) Zaznaczamy, że logistyka nie ma też wcale na celu (bezpośredniej przynajmniej) korzyści praktycznej. Nie dlatego wprowadza się symbolistykę logistyczną i analizuje pojęcia, sprowadzając je do ich składników pierwotnych, aby w ten sposób myśleć, rozumować i pisać — jak nie dlatego fizycy tworzą teorję dźwięków, by pomóc muzykom w komponowaniu i aby pisać nuty w kształcie równań matematycznych (co zresztą nie wyłącza możliwości pośredniego spożytkowania teorji akustyki dla rozwoju muzyki). Logistyka przez odkrycie nowych form rozumowań, przez wyćwiczenie myślenia może się przyczynić do rozwoju innych nauk; jest to jednak tylko możliwość i byłoby to jej działaniem ubocznym — celem jej bezpośrednim w zastosowaniu do innych nauk może być tylko wyświetlenie ich budowy logicznej.

Że symbolistyka logiczna nie ma na celu zastąpienia języka zwykłego, wyraźnie zastrzega to Frege (Begriffsschrift, str. V): »Stosunek mojego języka symbolów do języka zwykłego będę mógł wykazać najlepiej, gdy go przyrównam do stosunku mikroskopu do oka. Oko, dzięki temu, że posiada rozległą stosowalność i ruchliwość, pozwalającą mu naginać się do różnych okoliczności, ma wyższość nad mikroskopem. Rozpatrywane jako aparat optyczny ma ono wprawdzie wiele niedokładności, które zwykle nie są dostrzegane jedynie z powodu ścisłego związku oka z życiem duchowym. Dopiero gdy dla celów naukowych wymagana jest wysoka dokładność odróżniania, oko już nie wystarcza. Mikroskop natomiast do takich celów jest wybornie przystosowany, lecz dlatego właśnie do wszystkich innych jest nieprzydatny«.

2) Symetryczność między funkcjami logicznemi wyrazów »*i*« i »*albo*« (t. j. między mnożeniem i dodawaniem logicznym).

6. Omówione w § 4 pojęcia stanowią przedmiot wykończonej i klasycznej już dziś teorji, dla której niektórzy autorowie rezerwują nazwę *algiebry logiki*. Inne nowe rezultaty polegają na dalej posuniętej analizie zdania; zawdzięczamy je głównie Peanie.

Logika tradycyjna nie analizuje budowy bardziej złożonych zdań. Dla niej istnieje tylko forma: *A* jest *B*. A przecież używamy całego szeregu wyrazów nic nie oznaczających (ani przedmiotów, ani cech, ani czynności), które jednak nie są beztreściwemi dodatkami językowemi, lecz wpływają na sens zdania; posiadają więc pewną rolę logiczną, ale jaką? Które z nich dadzą się zastąpić kombinacjami z innych, a które posiadają wartość oryginalną? Takiemi wyrazami są: »*i*«, »*albo*«, »*nie*«, któreśmy już napotkali w algiebrze logiki, jako mnożenie i dodawanie logiczne oraz przeczenie.

Zaznajomienie się z tą analizą jest potrzebne dla matematyka, jeśli chce rzeczywiście oprzeć swe rozumowanie na ostatnich zasadach logicznych. W przeciwnym razie w zdaniach jego, w wysłowieniach twierdzeń będą tkwiły wyrażenia, których nie będzie umiał odcyfrować z zupełną precyzją (konieczną w dowodach matematycznych). To odbija się czasem na prawidłowości rozumowań matematycznych. Wiemy np., jak jest niejasny dla matematyków początkujących wzajemny stosunek słów »każdy« i »wszystkie«, co powoduje często błędne rozumowania.

Zresztą, właśnie matematyka położyła przez swą tylowiekową praktykę większe zasługi na tym polu analizy logicznych elementów zdania, niż krótko trwające badania logistyczne (nie mówiąc już o logice dawnej). Np. sama zanalizowała treść logiczną takich wyrazów, jak »*między*« (p. Podstawy gieometrji, str. 408—409).

7. Pewne zaznajomienie się z logistyką należy polecić każdemu, kto chce mieć pojęcie o dzisiejszym stanie logiki, szczególniej więc fachowym filozofom, a poniekąd i matematykom (ostatnim także z powodów, wyłuszczonych wyżej w § 1). Staje się zaś ona dla nich niezbędną, jeśli zechcą się zająć filozofją

matematyki. Przedewszystkim jednak tym, którzy zajmują się specjalnie logiką (nie w znaczeniu metodologji, bo logistyka nie jest — podkreślamy to raz jeszcze — narzędziem ani metodą[1])); radzimy nie sądzić o logistyce ze słyszanych zdań o niej, nieuzasadnionych niczym, a polegających na niezrozumieniu jej celów, ani też nie odstraszać się jej wyglądem zewnętrznym, lecz zajrzeć do treści jej wzorów i porównać jej rezultaty z rezultatami tradycyjnej arystotelesowskiej logiki formalnej.

Rzeczywiście, pomimo iż przeciwnicy logistyki są — a szczególniej byli — liczni, to jednak trudno wymienić coś poważnego z ich pism o niej: dowcipne i pełne głębszych myśli, a złośliwe rozdziały książki Science et Méthode Poincarégo, traktujące o logistyce, są raczej satyrą, niż krytyką. Zresztą zarzuty Poincarégo dotyczą raczej zastosowań logistyki do matematyki i poglądów filozoficznych niektórych logistyków (por. Zagad. filoz. mat.), niż samej logistyki. Zarzuty innych polegają na różnych nieporozumieniach lub wykazują tylko, że logistyka nie wyczerpuje całego obszaru logiki, że są zagadnienia, na które logistyka odpowiedzi dać nie może. To jednak nie zmienia faktu, że są zagadnienia, na które odpowiedź dała ona — i tylko ona.

Przyznaje to wyraźnie P. Natorp (neokantysta z t. zw. »szkoły marburskiej«) w zdaniu, streszczającym jego krytykę logistyki (Logische Grundlagen der exakten Wissenschaften, str. 85):

»To, co mamy jej [logistyce] do zarzucenia, to tylko, że uważa się za logikę wogóle (dass sie »die« Logik zu sein behauptet), gdy tymczasem to, co opracowuje z uznania godną ścisłością i zupełnością, jest tylko jedną częścią logicznego zadania i to nie najważniejszą«.

---

[1]) Że jednak czasem rachunek logistyczny może mieć znaczenie metody i ułatwić wyciąganie wniosków, wykazuje następujący przykład (Schröder, Vorl. ü. d. Algebra d. Logik, t. I; str. 387): Zdanie »każde a, które nie jest b, jest b« skłonni bylibyśmy uważać za sprzeczne samo w sobie. Rachunek logiczny, łatwiej niż zwykłe rozumowanie, wykaże, że zdanie to znaczy to samo, co: »każde a jest b«.

Przytoczymy tu jeszcze zdanie E. Husserla (Logische Untersuchungen, t. I; str. 252 i 253):

»Ostatniemi czasy matematycy zawładnęli nawet tworzeniem teorji sylogistycznej, która zawsze zaliczaną była do dziedziny najściślej należącej do filozofji, i ona, ta teorja pozornie zdawna wykończona, w ich ręku rozwinęła się w sposób niespodziewany. Zarazem odkryli teorje nowych rodzajów wnioskowania, które logika tradycyjna przeoczyła albo na których się nie poznała, i wykształcono je z subtelnością prawdziwie matematyczną«.

»Lekceważenie, z jakim logicy filozoficzni lubią mówić o matematycznych teorjach wnioskowania, nie zmienia w niczym tego, że forma matematyczna opracowania przy tych, jak przy wszystkich ściśle rozwiniętych teorjach (trzeba też wyraz ten brać we właściwym znaczeniu) jest jedyną naukową, jedyną, która daje systematyczną zwartość i zakończoność i która pozwala przejrzeć wszystkie możliwe pytania i wszystkie możliwe formy ich rozwiązania«.

Do logistyki nie trzeba żadnego przygotowania (nawet elementarnej matematyki); przydatną jednak być może pewna znajomość metod i ducha podstaw gieometrji i arytmetyki.

---

8. Do pobieżnego encyklopedycznego poinformowania się o logistyce, polecamy:

L. Couturat. Die Prinzipien der Logik; stronic 65. (Encyklopädie der philosophischen Wissenschaften, wydawana przez Rugego, tom I (Logik); Tybinga, 1912; str. 275). W artykule tym uwzględniona jest nowa teorja typów Russella. Albo:

L. Couturat. Les principes des mathématiques (Bibliothèque de philosophie contemporaine). Paryż, Alcan, 1905; str. 310. Cena fr. 5. Logistyce są tu poświęcone str. 7—43. — Książka ta wyszła także w tłum. niemieckim:

— Die philosophischen Prinzipien der Mathematik, deutsch von C. Siegel. Lipsk, 1910.

Są to popularyzacje prac Russella. Dowodów twierdzeń nie podają.

Bardzo krótki i przystępny, lecz systematyczny wykład najważniejszych twierdzeń algiebry logiki znajduje się w artykule:

Poretsky. Exposé élémentaire de la théorie des égalités logiques à deux termes. (Revue de Métaphysique et de Morale, t. VIII, 1900).

Prace powyższe nie wymagają żadnego przygotowania. Stanowią one minimum tego, co potrzebne do poinformowania się o logistyce; to też polecamy je głównie jako uzupełnienie wykształcenia ogólnego.

Do popularyzujących dzieł zaliczyć należy i obszerniejszy wykład logistyki, który wyszedł w Revue de Métaphysique et de Morale, a także osobno w wydaniu książkowym:

A. Padoa. La logique déductive dans sa dernière phase de développement. Paryż, Gauthier-Villars, 1912; str. 106. Cena fr. 3.25.

Autor należy do szkoły Peany i traktuje przedewszystkim o pojęciach logicznych, wprowadzonych przez tego matematyka. Sporo miejsca poświęca kwestji znakowania; dowodów prawie nigdy nie podaje; ze względu jednak na zawarte uwagi może interesować i specjalistę (szczególnie rozdział ostatni, str. 96—104). Książka napisana jasno i interesująco.

Do algiebry logiki w ciaśniejszym znaczeniu (p. str. 455) polecamy matematykom jeden z dwuch podręczników:

E. Stamm. Algebra logiki. Warszawa, 1912 (odbitka z Wiadomości Matematycznych, t. XV i XVI); str. 119; albo krótszy:

L. Couturat. L'Algèbre de la Logique (w zbiorze Scientia, Série physico-math., Nr. 24). Paryż, Gauthier-Villars, 1905; str. 100. Cena fr. 2. Przekład angielski:

— The Algebra of Logic. Open Court Pub. & Co, 1914. Cena szyl. $3^1/_2$.

Obaj autorowie zwracają główną uwagę na stronę matematyczną rachunku. Wykład zwięzły, choć bardzo jasny (szczególniej Couturata), dla czytelnika nie przywykłego do matematycznego myślenia może być uciążliwym; nie nastręcza jednak żadnych poważnych trudności. W książce Stamma niektóre rozdziały mają znaczenie wyłącznie dla matematyków (np. dowody niesprzeczności i niezależności układu aksjomatów, rozszerzenie zakresu rachunku).

Wzorowany na powyższym podręczniku Couturata, lecz co do treści odpowiadający tylko pierwszej jego połowie, jest polski wykład Łukasiewicza, zamieszczony jako dodatek w jego pięknej książce:

J. Łukasiewicz. O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa. Studjum krytyczne. Kraków, 1910; str. 212. Cena kor. 4.

Nieco obszerniejszym od podręcznika Couturata jest:

E. Schröder. Abriss der Algebra der Logik. Bearbeitet im Auftrag der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von Dr. Eugen Müller. W 3 częściach. Lipsk, Teubner. Część 1: Elementy; 1909; str. 150. Część 2: Teorja sądów, Funkcje, Równania i Nierówności; 1910; str. 51—159. Cena m. 1.60 + 4.

Część trzecia, która jeszcze nie wyszła, ma zawierać teorję stosunków [1]). Podręcznik ten, mniej jasny w układzie od podręcznika Couturata, zwraca większą nieco uwagę na stronę filozoficzną.

Krótki wykład logistyki z uwzględnieniem pojęć, wprowadzonych przez Peanę, znajduje się w książce:

C. Burali-Forti. Logica matematica. Medjolan, Hoepli, 1894; str. 158. Cena fr. 1.50.

Wykład systematyczny, dość krótki; zawiera dużo przykładów.

A. N. Whitehead and B. Russell. Principia mathematica. Tom I. Cambridge, 1910. Cena szyl. 25.

Jest to najważniejsze i najobfitsze w treść dzieło o logistyce i podstawach matematyki. Autorowie budują w nim teorję logistyki na podstawie *teorji typów* Russella (por. Zagad. filoz. mat., § 6).

---

[1]) Niektórzy autorowie używają wyrazu »*względność*« zamiast »*stosunek*«.

Wykład samej teorji typów znajduje się oprócz tego jeszcze w artykule:

B. Russell. La théorie de types logiques. Revue de Métaphysique et de Morale, 1910.

Po polsku mamy dobre streszczenie teorji tej w pracy:

L. Chwistek. Zasada sprzeczności w świetle nowszych badań Bertranda Russella. Kraków, nakładem Akad. Um., 1912; str. 67.

E. Schröder. Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik). Lipsk, Teubner. Tom I, 1890; str. XII+717. Tom II, część I, 1891; str. XV+400. Część II, wydana przez E. Müllera, 1905; str. XXIX+206. Tom III, część I, 1895; str. VIII+649. Część II jeszcze nie wyszła. Cena m. 16+12+8+16.

Wykład algiebry logiki, zawarty w dwuch pierwszych tomach tego dzieła, aczkolwiek posiada duże znaczenie historyczne, mało komu może być dziś polecony: dla początkującego jest za długi (może tylko być używany do wyjaśnienia jakichś niezrozumiałych punktów w innych podręcznikach, szczególniej dla niematematyków); dla znających przedmiot jest za rozwlekły, nadaje się tylko do przeglądania. Zawiera bardzo dużo objaśnień, uwag, czasem ciekawych, częściej zbytecznych, przynajmniej dla obznajomionego czytelnika. Parę rozdziałów poświęcono analizie języka, porównaniu języka codziennego z językiem symbolów i t. p. Z matematycznego punktu widzenia ciekawe są dodatki (»Anhang«) w tomie pierwszym. Samych jednak twierdzeń z algiebry logiki w tych grubych tomach jest bodaj nie więcej, niż w Algèbre de la Logique Couturata, lub w wydanym przez Müllera: Abriss. Wstęp filozoficzny, napisany w duchu Stuarta Milla, można opuścić. W końcu tomu pierwszego podana obszerna bibljografja.

Natomiast tom 3-i, poświęcony teorji stosunków, jest jednym z najważniejszych dzieł w tej dziedzinie. Zasady teorji stosunków, wyłożone krótko na podstawie tego tomu, zawiera artykuł:

J. Lüroth. Aus der Algebra der Relative. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, tom 13, 1904; str. 73—111.

Po polsku bardzo krótkie wiadomości z teorji stosunków (względności) znajdują się w książce:

W. Sierpiński. Zarys teorji mnogości. Warszawa, 1912. Cena kop. 90.

Jako źródło bibljograficzne i historyczne obok Schrödera najlepiej może służyć:

J. Venn. Symbolic Logic. Londyn, Macmillan, 1881; wydanie 2-ie, 1894.

Jako wyczerpujące repertorjum logistyki służyć może wymieniony we Wstępie do St. III (str. 146) Formulaire Peany.

Do historji logistyki istnieje tylko interesująca niewielka książeczka:

L. Liard. Les logiciens anglais contemporains. Paryż, 1878; str. 177.

Druga jej część poświęcona jest historji logiki formalnej w Anglji. Wadą książki jest, że niesłusznie wywodzi logistykę z teorji kwantyfikacji orzeczenia.

Z nowszej literatury wymienimy prace polskie, ogłaszane w Przeglądzie filozoficznym w latach 1911—1913, prof. J. Łukasiewicza i jego szkoły (K. Ajdukiewicz), a także S. Leśniewskiego. Ostatni wprawdzie nie posiłkuje się symbolistyką i rachunkiem logicznym, lecz pomimo to musimy zaliczyć go do logistyków ze względu na sposób stawiania zagadnień i ścisłość rozumowań — zgodnie z naszym zdaniem, że symbolistyka jest tylko formą zewnętrzną badań logistycznych.

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE MATEMATYKI.

OPRACOWAŁ

ZYGMUNT JANISZEWSKI.

---

1. Nagłówek powyższy ma znaczenie dość nieokreślone i szerokie — znacznie szersze, niż treść samego rozdziału. Przeto uważamy za stosowne określić zasady, według których zrobiliśmy wybór zagadnień i wskazać przynajmniej na istnienie tych innych, pominiętych zagadnień i ich literatury.

Ograniczamy się więc do zagadnień:

1) wchodzących rzeczywiście — d z i ś — w zakres filozofji;

2) o charakterze specjalnie matematycznym i obchodzących specjalnie matematyków;

3) należących do logiki i teorji poznania;

wreszcie ograniczamy się:

4) do ich strony matematycznej.

Ad 1. Nazwy »filozoficzny« często nadużywa się, nadając ją zagadnieniom matematycznym, które mają znaczenie filozoficzne. O tych czytelnik musi się informować z matematyki — w zakres kompetencji filozofji one nie wchodzą [1]) (dotyczące działy matematyki wskazaliśmy we Wstępie do Stop. III, str. 120—121, *a)* i *d)*).

Niektóre z tych zagadnień w czasie, gdy nie były jeszcze matematycznie, ściśle opracowane, były przedmiotem dyskusji filozoficznych. Dyskusje te należą dziś do historji i tam należy szukać wiadomości o nich. Do historycznie najważniejszych należy dyskusja o podstawach rachunku różniczkowego. Poinformować się o tej dyskusji filozoficznej (ale nie o samym zagadnieniu!) można z książek:

Cohn. Geschichte des Unendlichkeitsproblems. Lipsk, 1896.

H. Cohen. Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte. Berlin, 1883.

Cytujemy tu tylko historyczną część tej książki. Poglądy samego Cohena na tę kwestję nie wytrzymują krytyki matematycznej.

Ad 2. To rozszerzanie się wyłącznej kompetencji matematyki na dziedziny, pierwotnie podlegające dyskusji filozoficznej, uskutecznia się często nie bez reszty: wyjaśnienie, sprecyzowanie badanych pojęć odbywa się kosztem ich treści, przez oddzielenie tego, co jest w nich istotnie matematycznym i pozostawienie filozofji lub naukom przyrodniczym badania niematematycznej części ich treści. Tak więc nie do matematyki należeć będzie zagadnienie, czy istnieją w przyrodzie aktualnie nieskończenie małe odcinki, oraz zagadnienie (obejmujące poprzednie), czym jest i jakie ma własności przestrzeń fizyczna. Zagadnień tego rodzaju — jako dotyczących przedmiotów nie matematycznych — nie zaliczamy do filozofji matema-

---

[1]) Ostrzegamy, że wśród filozofów rozpowszechnione są błędne pojęcia o niektórych zagadnieniach tej kategorji, czynionych często przedmiotem spekulacji filozoficznych (np. o nieskończenie małych aktualnych, o gieometrjach nieeuklidesowskich). Czytelnik, dla którego literatura matematyczna o tych kwestjach jest niedostępna (za trudna), znajdzie wiele wiadomości w popularnej książce Couturata (p. niżej, § 18).

tyki; wskutek jednak aktualności zagadnienia o naturze przestrzeni i jego ścisłego związku z podstawami gieometrji (matematycznej), poświęcamy mu tutaj osobną część rozdziału.

Pomijamy jednak i zagadnienia, dotyczące bezspornie matematyki, lecz będące ogólnemi, zasadniczemi problematami filozofji, tak, że omówić je i podać ich literaturę znaczyłoby napisać zarys dziejów filozofji i wymienić znaczną część ogólnej literatury filozoficznej [1]).

Ad 3. Opuszczamy również część zagadnień, należących już ściśle do filozofji matematyki, np. zagadnienia metafizyczne i fenomenologiczne (istota przedmiotów matematyki, rodzaj ich bytu)[2]), metodologiczne (metody dowodów, klasyfikacja działów matematyki), psychologiczne (*a)* psychologja matematyka, t. j. związek uzdolnień i zajęć matematycznych z innemi objawami życiowemi [3]); *b)* różnice uzdolnień i psychologja twórczości [4]); *c)* psychologja myślenia matematycznego [5]); *d)* psychologja matematyki — że się tak wyrażę — t. j. badanie czynników psycho-

---

[1]) W ten sposób traktuje filozofję matematyki:

L. Brunschvicg. Les étapes de la philosophie mathématique. Paryż, Alcan, 1912. Cena fr. 10. (Obszerne sprawozdanie w Revue de Mét. et de Mor., t. XXI, 1913, przez P. Boutroux).

[2]) P. np. E. Husserl. Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchungen. Tom I (tom II nie wyjdzie). Halla, 1891; str. 323.

[3]) Por.: H. Fehr. Enquête de »l'Enseignement mathématique« sur la méthode du travail des mathématiciens. Paryż-Gienewa, 1908; str. 126.

E. Maillet. Les rêves et l'inspiration mathématiques (Enquête et Resultats. Extrait du Bulletin de la Société Philomatique, 1905).

E. Toulouse. Enquête médico-psychologique sur la supériorité intellectuelle. Henri Poincaré. Paryż, Flammarion, 1910.

[4]) Por. H. Poincaré. La valeur de la Science. Rozdział pierwszy.

F. Klein. Odczyty o matematyce. Przekład S. Dicksteina. Warszawa, 1899. (Wykład pierwszy).

S. Błachowski. Kilka uwag o psychologji typów matematycznych. Odbitka z »Wszechświata«. Warszawa, 1912; stronic 19.

[5]) P. np. B. Schanoff. Die Vorgänge des Rechnens. Ein experimenteller Beitrag zur Psychologie des Rechnens. Lipsk, 1911. Cena m. 2.80. Por. też cytowaną wyżej książkę Husserla.

logicznych, wpływających na kierunek i formy rozwoju matematyki: na obiór zagadnień, na sposób ich stawiania, na wymagania, stawiane dowodom i teorjom[1]), estetyczne (rodzaj i warunki piękna teorji matematycznych), historjozoficzne — cały ten długi szereg zagadnień pomijamy, gdyż nie umielibyśmy wiele o nich powiedzieć, ani wskazać do nich literatury, t. j. z tego samego powodu, z którego pomijamy dotyczące specjalnie matematyki zagadnienia np. z hygieny, anatomji i biologji, (dziedziczność uzdolnień, mózg matematyka[2])), społeczne (np. wartość społeczna matematyki[3])) i t. p., a mianowicie, że zagadnienia te nie były nigdy przedmiotem ciągłych, naukowych badań; istnieją co do nich tylko rozproszone, luźne uwagi i dorywcze spostrzeżenia, co najwyżej jakieś odosobnione studjum[4]).

Ad 4. Zagadnienia filozofji, których przedmiotem jest analiza podstawowych pojęć nauk specjalnych, należą poniekąd i do tych nauk specjalnych; w stosunku do tych przedmiotów badania filozoficzne różnią się od badań specjalnych kierunkiem zainteresowania i, co za tym idzie, sposobem badania. Filozo-

---

[1]) Por. Wstęp ogólny, § 3, str. 11 i Równania różniczkowe zwyczajne, str. 287 (przypisek).

[2]) Por. P. J. Möbius. Ueber die Anlage zur Mathematik. Ausgewählte Werke, t. VIII. Wyd. 2-ie powiększone. Lipsk, 1907; str. 264; z 59 tablicami.

Treść: I. Od czego zależy i co wywołuje uzdolnienie do matematyki. 1. Wstęp ogólny. 2. Przykłady rozwoju wybitnych matematyków. 3. O rachmistrzach. 4. O matematyczkach. 5. O warunkach istnienia talentu matematycznego (dziedziczność, znaczenie odżywiania, rasy i t. d.). II. O dostrzegalnych oznakach uzdolnienia do matematyki (»organ matematyczny« mózg i czaszki matematyków) (str. 153). III. Rozprawa Galla o zmyśle liczb (str. 221).

Autor stara się bronić teorji Galla co do lokalizacji różnych zdolności w mózgu.

[3]) Por.: A. Pringsheim. Über Wert und angeblichen Unwer der Mathematik (p. wyżej, str. 14, przypisek).

[4]) Takie spostrzeżenia i uwagi, dotyczące najrozmaitszych stron matematyki i życia matematyka, można znaleźć w zbiorze cytat Ahrensa (p. Wstęp do Stop. III, str. 127) i w ankiecie Fehra (p. wyżej, przypisek trzeci na str. 464).

ficzne badanie stawia sobie za cel poznanie, czym jest sam przedmiot badany, jako taki; w naukach specjalnych zaś szuka się przedewszystkim związków badanego przedmiotu z innemi. Np. matematyków obchodzi głównie, czy jedna forma rozumowania da się sprowadzić do drugiej i czy jest prawdziwą (tę część zagadnienia nazywamy jego stroną »matematyczną«); mniej natomiast — filozoficzne kwestje klasyfikacji sądów na analityczne i syntetyczne, na sądy »a priori« i sądy »a posteriori«, na intuicyjne i racjonalne.

2. Rozpatrywane dziś zagadnienia filozoficzne matematyki dadzą się podzielić na dwie grupy: *a)* zagadnienia, dotyczące charakteru przedmiotów i twierdzeń matematyki; *b)* zagadnienia istnienia pewnych przedmiotów matematyki i poprawności pewnych rozumowań.

3. Zagadnienie zasadnicze, dotyczące prawd matematycznych, stanowi pytanie: czy dowody matematyczne są w zupełności dedukcyjne i a priori, czy też, nie różniąc się zasadniczo od dowodów, spotykanych w innych naukach, opierają się w ostatniej instancji na indukcji i doświadczeniu. Ostatniego poglądu bronią empirycy (np. Locke, J. Stuart Mill), odrzucając aprjoryczność ostatecznych podstaw dowodów matematycznych, t. j. *pewników*, i uważając je za prawdy, które, stwierdzane od dzieciństwa codziennym doświadczeniem, tak przeniknęły nasz sposób myślenia, że nie zdajemy sobie sprawy z ich pochodzenia doświadczalnego [1]).

Pominiemy tu jednak ten spór, nie zatrzymując się rów-

---

[1]) Nie mówimy tu o aksjomatach gieometrji matematycznej, ani żadnej innej teorji formalnej, gdzie aksjomaty są częściami składowemi określeń. Mówimy tylko o pewnikach w ciaśniejszym znaczeniu, t. j. jako prawdach oczywistych, nie dających się udowodnić (p. wyżej, przypisek na str. 406). Istnieniu takich prawd przeczą tylko skrajni nominaliści, którzy we wszystkich pewnikach widzą określenia, umowy (konwencje). Jednak wielu (Frege, Russell) przeczy istnieniu osobnych pewników matematycznych, twierdząc, że wszystkie prawdy matematyczne są wynikiem pewników logiki.

Nie mówimy tu także o pewnikach gieometrji przestrzeni rzeczywistej, gdyż to jest kwestja zupełnie inna, niż traktowana tu kwestja pewników matematycznych. O tym p. niżej, §§ 14—16.

nież nad pośrednim poniekąd poglądem KANTA, który uważa, że sądy matematyczne są a p r j o r y c z n e, jednak nie czysto logiczne *(analityczne)*, lecz *syntetyczne*, t. j. opierają się na czystym oglądzie zmysłowym (reine sinnliche Anschauung a priori) — gdyż za daleko by nas to zawiodło w dziedzinę filozofji (por. § 1, *ad* 2) i przejdziemy do aktualnej dziś wśród matematyków dyskusji nad zasadą *indukcji zupełnej* między POINCARÉM a logistykami.

Obie strony uważają sądy matematyczne za niezależne od doświadczenia, lecz podczas gdy logistycy widzą w dowodzeniu matematycznym tylko sądy, wynikające z zasad czysto logicznych (w liczbie skończonej i dających się wyliczyć), POINCARÉ uważa rozumowanie matematyczne za swoiste, polegające na zasadach, będących *sądami syntetycznemi a priori* [1]).

Prawda, że zasady te możnaby zaliczyć do zasad logicznych i wtedy sprowadzić rozumowanie matematyczne do dedukcji logicznej; lecz nic nas nie upewnia, że tak powiększony zbiór zasad logicznych w y s t a r c z y r a z n a z a w s z e do udowodnienia wszystkich twierdzeń matematycznych, które znajdziemy w przyszłości. Można również przypuścić — i to jest mniemanie POINCARÉGO — że matematyka będzie zawsze zmuszona odwoływać się do coraz nowych sądów syntetycznych, których lista nigdy nie zostanie wyczerpaną.

Ta strona zagadnienia jest tylko sprawą mniemania, wiary: żadna strona nie może udowodnić swego przypuszczenia (nie widzimy nawet żadnej metody dla rozstrzygnięcia takiej kwestji).

Jako przykład rozumowania syntetycznego a priori POINCARÉ podaje zasadę *indukcji matematycznej* (zwanej także *indukcją zupełną*) czyli *wnioskowania z n na* $n+1$. Polega ona na tym, że j e ż e l i p e w n e t w i e r d z e n i e j e s t p r a w d z i w e d l a $n=1$, o r a z p r z y p u s z c z e n i e j e g o p r a w d z i w o ś c i d l a $n=n_0$ p o c i ą g a z a s o b ą p r z y j ę c i e j e g o p r a w d z i w o ś c i d l a $n=n_0+1$, t o j e s t o n o p r a w d z i w e d l a k a ż d e g o n. Logistycy twierdzą, że zasadę tę można

[1]) Trudno bliżej orzec, skąd pochodzić mają według POINCARÉGO te sądy syntetyczne a priori; zdają się one jednak nie mieć nic wspólnego z kantowskiemi formami czystego oglądu zmysłowego.

udowodnić za pomocą zasad logicznych, lub że tworzy ona część składową określenia ciągu liczb naturalnych. Poincaré nie uznaje tych dowodów (zarzuca im np. używanie określeń niepredykatywnych, p. niżej, str. 470), nie uznając zarazem możliwości jakiegokolwiek określenia ciągu liczb naturalnych (p. niżej, str. 469).

Zasadę indukcji zupełnej można udowodnić, przyjąwszy za pewnik np. własność ciągu liczb naturalnych, że wśród każdego zbioru liczb całkowitych dodatnich istnieje jedna najmniejsza; wtedy ten pewnik będzie dla Poincarégo sądem syntetycznym a priori, nie dającym się wydedukować analitycznie z zasad logiki.

Najważniejszemi artykułami, dotyczącemi tego sporu, są:

H. Poincaré. Sur la nature du raisonnement mathématique. Revue de Métaphysique et de Morale, t. II; albo w książce:

H. Poincaré. La Science et l'Hypothèse, stronica 19 i dalsze.

E. Zermelo. Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète. Acta mat., t. 32 i w tymże tomie odpowiedź:

H. Poincaré. Réflexions sur les deux notes précédentes.

A. Padoa. La valeur et les rôles du principe d'induction mathématique. Stronic 9. Wydrukowane W Proceedings of the fifth international Congress of Mathematicians. Cambridge, 1913.

4. Spór o charakter indukcji zupełnej jest, jak widać z poprzednio powiedzianego, w znacznej mierze sporem o istotę liczb naturalnych. I wogóle pogląd na charakter prawd matematycznych zależy od poglądu na charakter przedmiotów, których dotyczą. Jeżeli więc komu przedmioty matematyki wydają się pochodzenia doświadczalnego (np. Mill), ten będzie prawdopodobnie uważał i dotyczące ich prawdy za zdobyte na drodze doświadczalnej; kto twierdzi, że przedmioty matematyki dadzą się określić za pomocą pojęć logiki (np. Frege, Russell), ten będzie, należy przypuszczać, twierdził, że i dotyczące ich

prawdy dadzą się udowodnić z pomocą prawd logicznych; kto zaś przedmiotom matematyki przypisuje charakter odrębny, swoisty (np. Poincaré, Kant), ten zapewne przypisze tak samo odrębny charakter i jej twierdzeniom; kto wreszcie jest skrajnym nominalistą i widzi w przedmiotach matematycznych jedynie nazwy, dla tego prawdy ich dotyczące będą tylko umowami co do sposobu używania tych nazw i konsekwencjami z nich płynącemi.

Przechodząc do teorji, zajmujących się istotą przedmiotów matematycznych, zatrzymamy się tylko nad poglądami, dotyczącemi liczb całkowitych.

Z punktu widzenia teorji formalnej wszystkie te poglądy dadzą się ująć w dwie kategorje: 1) liczby naturalne dadzą się określić; 2) określenie ich jest niemożliwe.

Pierwszego stanowiska bronią logistycy.

Określenia są dwojakiego rodzaju: wyraźne (Frege, Russel) i przez postulaty (Peano; por. Zakończenie, § 3). Określenia wyraźne otrzymuje się, wychodząc z pojęcia mocy zbioru (więc pojęć: zbiór i podporządkowanie jedno-jednoznaczne).

Literatura.

G. Frege. Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. Jena. Tom 1, 1893; str. 253. Tom II, 1903; str. 265.[1])

B. Russell. The Principles of Mathematics[2]).

A. N. Whitehead and B. Russell. Principia mathematica.

L. Couturat. Les principes des mathématiques.

R. Dedekind. Was sind und was sollen die Zahlen. Brunświk, 1887; wyd. 3-ie, 1911. Cena m. 1.80.

E. Zermelo. Artykuł cytowany w § poprzedzającym.

L. Kronecker. Über den Zahlbegriff. Journal für Mathematik, t. 101, 1887, albo w Philos. Aufsätze, Ed. Zeller gewidmet, 1887.

G. Peano. Formulaire de Mathématiques, 1903.

---

[1]) Poprzednio Frege wydał książkę tejże treści p. t.: Grundlagen der Arithmetik (Jena, 1884).

[2]) Treść tego dzieła i dwuch następnych p. niżej, str. 486 i nast.

G. Peano. Sul concetto di numero. Rivista di Matematica, t. I, 1891.

A. Padoa. Théorie des nombres entiers absolus. Revue de Mathématique, Turyn, t. VIII, 1902; str. 45—54; por. też cytowany wyżej odczyt w Cambridge.

M. Pieri. Sopra gli assiomi aritmetici. Boll. dell' Accad. Gioenia di Scienze naturali di Catania.

5. Zagadnienia, poruszone w poprzednich paragrafach, znajdują się, że tak powiemy, poza obrębem działalności matematyka: jakiekolwiek będzie on miał poglądy na nie, czy też nie będzie ich mieć wcale, to nie wywrze — przynajmniej bezpośrednio — wpływu na jego pracę w obrębie matematyki i w tym obrębie nie utrudni porozumienia z innemi matematykami. Bez względu na to, za co uważają liczby naturalne albo indukcję matematyczną, wszyscy matematycy będą się niemi posługiwać w jednakowy sposób. Istnieją jednak i takie kwestje sporne, które mają wpływ bezpośredni na aktualną pracę matematyczną. Dotyczą one ważności pewnych rozumowań matematycznych i przedmiotowości niektórych pojęć matematycznych.

Takich sporów spotykamy w ciągu dziejów matematyki wiele, np. o ilości urojone, o rachunki nieskończonostkowe, o sumowanie szeregów, o zasadę ciągłości Ponceleta. Pomijamy je tutaj, gdyż należą one już tylko do historji — matematycy przeszli nad niemi do porządku dziennego — i przechodzimy odrazu do kwestji spornych dzisiaj.

6. Jedna z tych kwestji należy do logiki formalnej: dotyczy poprawności określeń. Mianowicie Poincaré postawił (z powodu odkrycia antynomji) warunek, aby określenia były *predykatywne*, uważając określenia niepredykatywne za zawierające błędne koło. *Niepredykatywnym* zaś nazywa Poincaré każde określenie, posługujące się pojęciem zbioru, którego elementem jest przedmiot określany; uważa on bowiem, że nie możemy określić zbioru, nie umiejąc określić przedtym wszystkich jego elementów. Przykładem określenia niepredykatywnego jest według Poincarégo określenie liczby, występującej w antynomji Berry'ego (p. niżej, str. 476).

Jeśli więc mówimy: zbiór elementów, posiadających jakieś określone własności, to według Poincarégo rozumiemy przez to zbiór tylko tych elementów, które dadzą się określić bez pomocy tego zbioru. Tę poprawkę Poincarégo trudno jednak przyjąć, bo, jak zauważył Zermelo (Math. Ann., t. 65, str. 117), ona sama wykracza przeciw zasadzie predykatywności określenia, w imię której została uczyniona: określenie bowiem zbioru z poprawką Poincarégo jest samo niepredykatywne! Nie możemy bowiem — ze stanowiska Poincarégo — wiedzieć, jakie elementy zbioru są określone bez jego pomocy (bo to wymagałoby, aby zbiór był określony wcześniej od swych elementów, co się sprzeciwia poglądom Poincare'go), a tymsamym, jakie do niego należą.

Poincaré przejął pojęcie niepredykatywności z pracy Russella, który z tego pojęcia rozwinął później swą teorję typów logicznych. Teorja ta stawia w sposób jasny większe jeszcze ograniczenia, niż predykatywność Poincarégo; Russell przyjmuje jednak nowy pewnik *sprowadzalności*, który to ograniczenie do pewnego stopnia niweczy. Ostatnio Chwistek wykazał sprzeczność tego pewnika sprowadzalności z postulatem Poincarégo (przyjmowanym też i przez Russella) określalności za pomocą skończonej ilości wyrazów (p. paragraf następny).

Literatura.

J. Richard. Artykuł w Acta math., t. 30, 1906 i w Revue générale des Sciences, 1905.

H. Poincaré. Dernières Pensées, rozdz. IV: La logique de l'Infini; stronic 39; artykuły: w Revue de Mét. et de Mor., 1906 i w Acta math., t. 32, 1909.

E. Zermelo. Artykuły: w Math. Ann., t. 65 (Neuer Beweis...) i w Acta math., t. 32, 1909.

B. Russell. La théorie de types logiques. Revue de Mét. et de Mor., 1910, oraz

A. N. Whitehead and B. Russell. Principia mathematica.

L. Chwistek. Zasada sprzeczności w świetle nowszych badań Bertranda Russella. Kraków, nakła-

dem Akad. Umiej., 1912; str. 67 (w szczególności str. 14—15 oraz rozdz. II i IV).

7. POINCARÉ stawia drugi jeszcze postulat: każdy rozpatrywany w matematyce przedmiot trzeba umieć określić za pomocą skończonej ilości wyrazów. Ten postulat ma bardzo licznych zwolenników, zwłaszcza we Francji (np. BOREL, LEBESGUE; także ENRIQUES, RUSSELL). Strona przeciwna twierdzi, że istnieją takie przedmioty, których określić *(indywidualnie)* nie możemy, bo do zupełnego określenia każdego z osobna potrzebaby było nieskończonej liczby wyrazów, które jednak możemy — jako rodzaj — wciągać w zakres rozważań matematycznych.

Różnica ta pochodzi z różnicy poglądów filozoficznych na istotę *istnienia*, na byt idealny. Dwa te obozy odróżniamy dziś w matematyce nazwami: *realistów* i *idealistów*[1]. O filozoficznej różnicy między temi dwoma kierunkami, jako źródle sporu, można się poinformować z dwuch artykułów, napisanych każdy przez zwolennika innego kierunku, lecz starającego się w zasadzie przedstawić objektywnie oba poglądy:

H. POINCARÉ. Dernières Pensées, rozdz. V: Les Mathématiques et la Logique; stronic 20.

Z. JANISZEWSKI. O realizmie i idealizmie w matematyce. Odczyt habilitacyjny (rozszerzony), wygłoszony d. 11 lipca 1913 r. na posiedzeniu Wydziału filozoficznego Uniwersytetu we Lwowie (ukaże się wkrótce).

Dla bezpośredniego poznania tych poglądów polecamy przeczytanie:

J. HADAMARD, É. BOREL, R. BAIRE, H. LEBESGUE. Cinq lettres sur la théorie des ensembles. Bulletin de la Société mathématique de France, t. 33.

Jest to nader ciekawa dyskusja HADAMARDA (»idealisty«) z pozostałemi trzema autorami (»realistami«).

---

[1]) Terminów tych używamy dziś w przeciwnym znaczeniu, niż w filozofji średniowiecznej; w terminologji średniowiecza możnaby dzisiejszych idealistów nazwać realistami.

O samym postulacie POINCARÉGO można się bliżej dowiedzieć z artykułów:

H. POINCARÉ. Réflexions sur les deux notes précédentes[2]). Acta mathematica, t. 32, 1909; stronic 5.

H. POINCARÉ. La Logique de l'Infini, § 6. Revue de Mét. et de Mor., 1909; albo Dernières Pensées, rozdz. IV.

H. POINCARÉ. Über transfinite Zahlen (stronic 4); wykład 5-ty w książce: Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Lipsk, Teubner, 1910; str. 60. Cena m. 2.40.

Por. także cytowaną wyżej książkę CHWISTKA, str. 48—51.

8. Prostemi konsekwencjami wskazanej wyżej różnicy poglądów są rozbieżności między matematykami, dotyczące teorji mnogości, głównie liczb pozaskończonych i wogóle nieskończoności.

Realiści (np. BOREL) wymagają, aby rozpatrywać wyłącznie takie rodzaje mnogości, dla których można efektywnie podać przykłady. Idealiści uważają zbiór za określony, gdy jest dana cecha charakterystyczna tworzących go elementów (t. j. taka cecha, którą posiadają wszystkie elementy omawianego zbioru i tylko te elementy); realistom takie określenie nie wystarcza: żądają oni ponad to, by była podana (lub wynikała z określenia) metoda, pozwalająca nam określić dowolny element określanego zbioru (za pomocą skończonej ilości wyrazów). Tej własności nie posiadają zbiory nieprzeliczalne. Dlatego liczba porządkowa Ω i odpowiadająca jej liczba kardynalna $\aleph_1$ (p. Teorja mnogości, str. 220), dla których określenia posługujemy się zbiorami, nie czyniącemi zadość postulatowi realistów, są kwestjonowane przez ostatnich. Lecz, ponieważ w takim określeniu zbioru za pomocą podania cechy charakterystycznej elementów prawie wszyscy widzą przyczynę antynomji (p. niżej, § 10), więc i idealiści robią ograniczenia w dopuszczaniu zbiorów. Już G. CANTOR rozróżniał zbiory mogące i nie mogące być przedmiotem badania matematycznego (*konsistente* i *inkon-*

---

[2]) SCHOENFLIESA i ZERMELI.

sistente Mengen), nie dając jednak żadnej reguły dla ogólnego odróżnienia jednych od drugich.

Ograniczenia różni robią różne. Wspomnimy tylko teorję Zermeli, który stosuje tu metodę aksjomatyczną (p. Podstawy gieometrji, str. 411); stawia mianowicie układ aksjomatów-warunków i dopuszcza w swej teorji tylko te zbiory, które czynią zadość tym aksjomatom. Poincaré zrobił mu zarzut, że brak dowodu niesprzeczności aksjomatów; Zermelo bowiem nie może powoływać się na ich oczywistość, gdyż odrzuca, jako sprzeczne z niemi, inne własności zbiorów, wydające się nie mniej oczywistemi, a nie podaje kryterjum, któreby uprawniało ten wybór.

Zaznaczymy tu jeszcze, że Russell w swym nowym dziele Principia mathematica odrzuca pierwotność pojęcia zbioru i określa je, opierając się na swej teorji typów logicznych i pewniku sprowadzalności.

Literatura.

H. Poincaré. — p. §§ poprzednie; (szczególniej: La Logique de l'Infini).

E. Zermelo. Grundlagen der Mengenlehre. Math. Ann., t. 65.

G. Hessenberg. Mengenlehre. W książce: Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. II. Jahrgang, 1911. Zawiera teorję Zermeli.

D. Hilbert. Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik. Odczyt na III międzynarodowym kongresie matematycznym w Heidelbergu. Wyszedł w sprawozdaniach kongresu i jako VII dodatek w »Grundlagen der Geometrie« (stronic 17).

J. König. Sur les fondements de la théorie des ensembles. Acta matematica, t. 30, 1906.

J. König. Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre, Lipsk, Veit, 1914; str. 259. Cena m. 8.

A. N. Whitehead and B. Russell. Principia matematica.

O aktualnej nieskończoności piszą:

G. Cantor. Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuale Unendliche. Zeitschrift für Ppilosophie und philosophische Kritik. Halla, t. 88.

G. Cantor. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. Tamże, t. 91 i 92. Por. też:

G. Cantor. Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. V. Math. Ann., t. 21, str. 549—591 (w tłum. francuskim w Acta math. część filozoficzna tego artykułu jest opuszczona).

L. Couturat. De l'Infini mathématique. Paryż, Alcan, 1896; str. 655.

B. Russell. The Principles of Mathematics.

9. Tutaj także należy i dyskusja nad pewnikiem Zermeli (*Auswahlprinzip;* p. Teorja mnogości, str. 221) i jego twierdzeniem, że każda mnogość może być dobrze uporządkowaną. Realiści odrzucają pewnik Zermeli [1]).

Dyskusja ta zawarta jest w artykułach (wyliczamy i niektóre artykuły, podnoszące inne zarzuty przeciw dowodowi Zermeli) J. Königa, F. Bernsteina, A. Schönfliesa, É. Borela w tomie 60 Math. Ann., i w zawierającym odpowiedź na nie artykule E. Zermeli: Neuer Beweis..., w Math. Ann., t. 65; oraz w cytowanych wyżej: Cinq lettres, Neue Grundlagen Königa i wykładzie Poincarégo w Sechs Vorträge.

O pewniku Zermeli jeszcze przed Zermelą pisał F. Bernstein w Nachrichten d. Ges. d. Wiss. in Göttingen, math.-phys. Klasse, 1904.

10. Przystępujemy do rozpatrywania faktu, który dał właściwą pobudkę powyższym dyskusjom, teorjom logicznym i badaniom nad podstawami logiki, arytmetyki i teorji mnogości a mianowicie do antynomji czy paradoksów.

Nie mówimy tu o sofizmatach — sprzecznościach, polegają-

---

[1]) Zwracamy z naciskiem uwagę, że realiści nie przeczą pewnikowi Zermeli, tylko twierdzą, że jest dla nich niezrozumiałym, pozbawionym treści. Jeśli zaś przeczą, to zdaniu, którego Zermelo wcale nie wypowiadał, mianowicie że my umiemy z każdego zbioru zbiorów wykonać wybór postulowany w pewniku Zermeli.

cych na mniej lub więcej zręcznie ukrytym błędzie w rozumowaniu (którego wykrycie jednak nie nastręcza dla matematyka żadnej trudności); ani o prawdach paradoksalnych, które, aczkolwiek są sprzeczne z naszemi dotychczasowemi pojęciami lub zgoła nie dają się wyobrazić, nie zawierają jednak żadnej sprzeczności logicznej (np. że część może być równa całości, że krzywa ciągła nie posiada stycznej w żadnym punkcie, twierdzenia dotyczące mnogości punktów wszędzie gęstych i doskonałych nigdzie nie gęstych); ani nawet takich sprzecznie brzmiących wypowiedzeń, których wytłumaczenie nastręcza już pewne trudności, jak to, że w »przypadku ogólnym« linją przerwy funkcji analitycznej jest okrąg koła zbieżności jej rozwinięcia na szereg potęgowy, oraz, że w »przypadku ogólnym« tak nie jest (p. np. Hadamard, La Série de Taylor et son prolongement analytique, str. 33); wiemy, że przyczyna tkwi w niejasności wyrażenia w »przypadku ogólnym«; takich niejasnych pojęć nie dopuszczamy jednak przy ścisłym wyrażaniu twierdzeń, tak, że z tego źródła nie możemy otrzymać formalnej, udowodnionej sprzeczności.

Antynomje, do których przechodzimy, są to sprzeczności formalne i wyraźne, udowodnione ściśle w tym znaczeniu, jak i inne twierdzenia matematyki. Większość matematyków wprawdzie znajduje w tych dowodach niepoprawności, ale każdy znajduje inne.

Wymieniamy tu najważniejsze antynomje:

Antynomja Berry'ego (jest ona uproszczeniem *antynomii Richarda*). »Najmniejsza liczba dodatnia całkowita, nie dająca się określić za pomocą zdania w języku polskim o mniej niż 100 wyrazach« jest pojęciem prowadzącym do sprzeczności, aczkolwiek taka liczba istnieć musi. Musi istnieć, bo wszystkich liczb, dających się określić z pomocą zdań, nie zawierających 100 wyrazów danego słownika jest liczba nie większa, niż liczba tych zdań, a zdań tych jest liczba skończona. Więc istnieją liczby, nie dające się określić za pomocą 100 wyrazów danego słownika; wśród nich (jak w każdym zbiorze liczb całkowitych) istnieje najmniejsza. Ta jest w zupełności określona przez zdanie napisane wyżej w cudzysłowie, zawierające mniej niż 100 wyrazów; to jest sprzecznością, gdyż liczba ta według swego określenia przez takie zdanie nie powinna się dać określić.

Antynomja RUSSELLA. »Zbiór zbiorów, które nie są swym własnym elementem« prowadzi również do sprzeczności. Bowiem istnieją zbiory, które nie są własnemi elementami; np. zbiór ludzi nie jest człowiekiem, a więc nie jest swoim elementem; (za przykład zbioru, który jest sam swoim elementem, może służyć »zbiór wszystkich zbiorów«: zbiór wszystkich zbiorów jest sam zbiorem, a więc własnym swym elementem; jednak istnienie takich zbiorów — kwestjonowane przez wielu — jest obojętne dla ważności naszego dalszego rozumowania). Zbiór, określony przez zdanie w cudzysłowie, nie może ani być, ani nie być własnym elementem, gdyż każde z tych założeń prowadzi do sprzeczności.

Antynomja BURALI-FORTI'EGO. Przedmiotem jej jest »liczba porządkowa zbioru wszystkich liczb porządkowych (uporządkowanego w sposób naturalny)«. Taka liczba porządkowa (pozaskończona) istnieje, bo zbiór wszystkich liczb porządkowych pozaskończonych jest — jak łatwo udowodnić — dobrze uporządkowany. Z drugiej strony ona nie może być równą żadnej liczbie porządkowej, bo jest od każdej większą. Stąd sprzeczność.

Wyliczyliśmy najcharakterystyczniejsze antynomje. Do nich należy doliczyć jeszcze (NELSON i GRELLING sprowadzają ją do jednej formy z antynomjami RUSSELLA i BURALI-FORTI'EGO) znaną w starożytności p. t. »*kłamca*«: »Zdanie, które wypowiadam, jest fałszywe«, utworzoną przez EUBULIDESA, ucznia EUKLIDESA Z MILETU, założyciela szkoły Megarejskiej (około r. 400 przed Chr.).

W celu wyjaśnienia tych antynomji powstała obfita literatura. Do niej należą wyżej cytowane prace E. ZERMELI, B. RUSSELLA, D. HILBERTA, J. RICHARDA, J. KÖNIGA, L. CHWISTKA, i H. POINCARÉGO oraz rozdział V książki Science et Méthode.

Szczególniej zwracamy uwagę na pracę:

K. GRELLING und L. NELSON. Bemerkungen zu den Paradoxieen von Russell und Burali-Forti. Abhandlungen der Friesschen Schule; Neue Folge; t. II, zesz. 3; Gietynga, 1907—1908. Cena m. 4.40.

Antynomja Burali-Forti'ego została ogłoszona w artykule:

C. Burali-Forti. Una Questione sui numeri transfiniti. Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, t. XI.

11. Do ważnych zagadnień filozoficznych matematyki należy kwestja dowodu niesprzeczności układu aksjomatów. O ile aksjomaty traktowane są jako prawdy oczywiste, t. j. jako pewniki, to ich niesprzeczność zagwarantowana jest tą oczywistością. Jeżeli jednak są założeniami dowolnemi, to tę niesprzeczność trzeba udowodnić i do tego prowadzi jedna droga (p. Podst. gieom., str. 409): wyszukanie przedmiotów, spełniających te założenia, a więc ostatecznie oparcie się na oczywistości pewnych własności tych przedmiotów (zwykle na pewnikach arytmetyki).

Inną metodę dowodu niesprzeczności podał Hilbert w swym odczycie: Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik (p. wyżej, str. 474). Polega ona na wykazaniu bezpośrednim, że żadne dwa wnioski z danego układu aksjomatów nie mogą być ze sobą sprzeczne. Metoda Hilberta spotkała się z zarzutami z różnych stron; godzi się na nią w zasadzie Poincaré; p. jego artykuły w Revue de Mét. et de Mor., 1905 i 1906, powtórzone w krótszej formie w rozdziale »Nowe logiki« książki Science et Méthode.

Zagadnienia filozoficzne dotyczące przestrzeni.

12. Rozróżniamy tu trzy zagadnienia, dotyczące przestrzeni (w literaturze często są one traktowane razem):

1) Zagadnienia gienezy idei, czy wyobrażenia, przestrzeni: czy ideę przestrzeni posiadamy a priori, czy jest nam daną przez doświadczenie; skąd i jak powstała.

Wśród broniących doświadczalnego pochodzenia idei przestrzeni istnieją dwa główne kierunki: wywodzących przestrzenność z wrażeń dotyku (Poincaré [1])) i wywodzących ją z wrażeń

[1]) Poincaré przeczy doświadczalnemu pochodzeniu gieometrji realnej, t. j. jej aksjomatów, czyli własności matematycznych przestrzeni, lecz samej

wzrokowych. Z literatury wspomnimy głównie cytowane niżej (str. 488—489) książki H. POINCARÉGO oraz:

H. HELMHOLTZ. Handbuch der Physiologischen Optik. Wydanie 3-ie. Tom III: Die Lehre von den Gesichtswahrnehmungen; wydał i uzupełnił J. v. KRIES. Hamburg i Lipsk, Voss, 1911; str. VIII + 564. Cena m. 24.

Najnowszym dziełem jest:

S. WITASEK. Psychologie der Raumwahrnehmung des Auges. Heidelberg. Cena m. 6.

W książce tej podana jest literatura przedmiotu.

2) Zagadnienie, czym jest przestrzeń: czy ma swój własny byt (DESCARTES), czy jest tylko własnością ciał (LEIBNIZ), czy formą subjektywną naszego oglądu (KANT) i t. d. Zagadnienie to, zgodnie z tym, co powiedzieliśmy w § 1, *ad* 2, pomijamy; pewne wiadomości o nim można znaleźć w literaturze, cytowanej przy zagadnieniu 1) i 3).

3) Zagadnienie, jaką jest przestrzeń, t. j. jakie posiada własności matematyczne, jaką posiada gieometrję. Tym wyłącznie zagadnieniem zajmiemy się w następnych paragrafach.

13. Wyrazem »gieometrja« oznaczamy trzy różne pojęcia. By móc rozważać zagadnienia, dotyczące przestrzeni, musimy uświadomić sobie tę trójznaczność [1]) i odgraniczyć każde z tych pojęć.

Rozróżniamy:

a) gieometrję ciał, t. j. badanie przestrzennych własności ciał;

b) gieometrję przestrzeni (idealnej), t. j. badanie tego, co pozostanie po zabstrahowaniu od ciał;

c) gieometrję matematyczną, t. j. badanie rozmaitości, czyli zbioru przedmiotów idealnych, powiązanych aksjomatami i przez nie określonych (por. Wstęp ogólny, str. 9 i 24, i Podstawy gieometrji, § 4); taką rozmaitość otrzymamy np. abstrahując od przestrzenności przestrzeni i pozostawiając

---

przestrzeni przypisuje pochodzenie doświadczalne, uważając ją za wytwór subjektywny.

[1]) Por. artykuł ENRIQUESA w Encyklopedji n. mat. (p. wyżej, str. 424). Możnaby się doszukać z łatwością więcej znaczeń.

tylko jej formę matematyczną, t. j. związki między jej elementami.

Tylko w ostatnim znaczeniu gieometrja należy do matematyki; co do niej nie istnieją specjalne zagadnienia filozoficzne. Gieometrję w pierwszym znaczeniu musimy zaliczyć do nauk przyrodniczych, w drugim zaś do filozoficznych (do metafizyki w ścisłym znaczeniu). Nadmienimy odrazu, że przedmiotowość gieometrji w tym drugim metafizycznym znaczeniu uważamy za problematyczną.

14. Stosunki przestrzenne spostrzegamy na ciałach, znajdujących się w tej przestrzeni. Chcąc sobie uprzytomnić przestrzenność — rozpatrujemy ciało. Tak samo o stosunkach wielkości możemy powziąć wiadomość tylko za pomocą materji: najprościej przez przykładanie miary. Jest to czynność fizyczna, jest to znajdywanie stosunków między c i a ł a m i (ciałem mierzonym, a m i a r ą, którą może być np. pręt żelazny albo taśma); pośrednio zaś dopiero mierzenie to daje nam wiadomość o stosunkach przestrzeni idealnej, i to dopiero wtedy, gdy przyjmiemy cały szereg założeń natury fizycznej, z których najważniejsze brzmi: sama zmiana położenia ciała nie zmienia jego rozmiarów. Założenie to niema w sobie nic koniecznego; łatwo wyobrazić sobie, że (z jakiejś nieznanej nam przyczyny) wszystkie ciała po przesunięciu w pewnym kierunku rozszerzają się w tym kierunku, i to każde ciało jednakowo, kurczą się zaś, przesunięte w kierunku odwrotnym. Wtedy dwa ciała, których długości, po zmierzeniu jedną miarą, okazały się równe, będą nierówne, a mianowicie to dłuższe, które leży dalej we wspomnianym kierunku.

Mówiąc o niezmienności lub zmienności rozmiarów w zależności od położenia, zakładamy, że istnieje jakaś »długość« sama w sobie, że posiadanie przez ciało pewnej długości znaczy coś więcej, niż przystawanie tego ciała do innego ciała (miary). Doświadczalnie nie mamy żadnej możności (mówimy o niemożliwości t e o r e t y c z n e j, nie zaś wynikającej z niedokładności instrumentów) sprawdzić, które np. z dwuch przypuszczeń — niezmienności rozmiarów czy też ich zmienności w jednym kierunku — jest prawdziwe. I nietylko nie możemy przypuszczeń tych sprawdzić, lecz wogóle nie mają one żadnego sensu (znaczenia), dopóki nie wprowadzimy pojęcia długości, jako pierwotnego, a wraz z nim i przestrzeni idealnej; przyjęcie jednak tych pojęć nasuwa poważne trudności (p. niżej).

Z rozważań POINCARÉGO wynika, że to, co nam może powiedzieć doświadczenie, dotyczy własności ciał (ich przystawania do siebie), te zaś mogą być dla każdego ciała inne. Chcąc mieć j e d n ą gieometrję — co jest konieczne ze względu na wygodę i na ekonomję myślenia — trzeba zrobić hipotezę czy fikcję niezmienności rozmiarów ciał jakiegoś rodzaju (np. spotykanych w przyrodzie ciał stałych), lub jakąś inną. Będzie to niczym n i e s p r a w d z a l n e p r z y p u s z c z e n i e, o ile mu nadamy znaczenie metafizyczne (t. j. rozmiary ciał będziemy mierzyć przestrzenią idealną); będzie zaś tylko *sposobem mówienia,* nie wprowadzającym nic hipotetycznego (w znaczeniu: niepewnego), gdy nie będziemy się odwoływać do przestrzeni idealnej.

Możemy więc te hipotezy, będące właściwie u m o w a m i, wybierać dowolnie. Zależnie zaś od tego, jaką wybierzemy hipotezę, otrzymamy taką lub inną gieometrję. Niema więc, według POINCARÉGO, sensu pytać, czy np. prawdziwą jest gieometrja EUKLIDESA, czy gieometrja ŁOBACZEWSKIEGO; k a ż d a z nich będzie prawdziwą, gdy przyjmiemy odpowiednie umowy. Należy więc pytać: jakie trzeba uczynić umowy, by otrzymać gieometrję EUKLIDESA, j a k i e, by otrzymać gieometrję ŁOBACZEWSKIEGO i t. d.

Poglądy swe przedstawia POINCARÉ w książkach swych, cytowanych niżej (str. 488—489).

15. Jeżeli przyjmiemy (co się zwykle czyni) potrzebne założenia fizyczne, a więc, że spotykane zwykle w przyrodzie ciała, t. zw. stałe, nie zmieniają swych rozmiarów przy zmianie położenia [1]), to, przy takim założeniu, m i a ł o b y s e n s p y t a ć, czy dla »naszej« przestrzeni prawdziwą jest jedna z trzech geo-

[1]) Można s k o n s t r u o w a ć takie ciała stałe, któreby zmieniały swe rozmiary przy zmianie położenia, t. j. przestały przystawać do ciał, któ-

metrji Euklidesa, Riemanna lub Łobaczewskiego i która z nich mianowicie. Jednak odpowiedzieć na to pytanie, nawet przy założeniu, że jedna z tych trzech gieometrji jest prawdziwą (t. j. że są spełnione aksjomaty gieometrji rzutowej), może być niemożliwym — i to nie niemożliwym praktycznie, przy dzisiejszych środkach doświadczalnych, lecz niemożliwym teoretycznie, t. j. że metoda rozstrzygnięcia tej kwestji, jaką jedynie możemy sobie dziś pomyśleć, nie może dać rezultatów przy żadnym udoskonaleniu naszych przyrządów. Taki przypadek zachodziłby właśnie, gdyby w rzeczywistości przestrzeń nasza była euklidesowską.

Metoda rozstrzygnięcia, którą z trzech gieometrji — Euklidesa, Łobaczewskiego czy Riemanna — posiada nasza przestrzeń, polega na sprawdzeniu jakiegokolwiek związku metrycznego, różnego dla każdej z tych trzech gieometrji, np. związku między kątami trójkąta.

Związek taki przedstawi się w kształcie równości dla gieometrji euklidesowskiej, w kształcie zaś nierówności dla gieometrji nieuklidesowskich; np. dla kątów trójkąta suma ich jest w gieometrji Euklidesa równa dwum kątom prostym, a w gieometrji Łobaczewskiego mniejsza i w gieometrji Riemanna większa od dwuch kątów prostych.

Ponieważ jednak stwierdzenie równości wymaga pomiarów bezwzględnie ścisłych, a te są niemożliwe, więc nigdy nie będziemy mogli doświadczalnie udowodnić, że nasza przestrzeń jest euklidesowską; natomiast, jeżeli nasza przestrzeń posiada gieometrję Łobaczewskiego albo Riemanna, to możliwym teoretycznie jest — przy zrobionych założeniach! — dowód tego. Pomiary bowiem dają nam zawsze tylko nierówności: np. gdy zmierzymy najsubtelniejszemi narzędziami, że długość danego pręta jest 9 cm., to znaczy, że ta długość a jest większa od 9 cm — ε, a mniejsza od 9 cm + ε, gdzie ε oznacza granicę błędów dla danego instrumentu. Te granice błędów prawdopodobnie będziemy mogli zmniejszyć

---

rych niezmienność założyliśmy. Założenie więc nasze musimy ograniczyć do ciał zwykle w przyrodzie spotykanych.

jeszcze bardzo, lecz będą one zawsze większe od zera — chybaby były znalezione jakieś metody, o których dziś nie mamy najmniejszego pojęcia, i których możliwość jest najzupełniej nieprawdopodobna.

Tak samo przy zmierzeniu kątów trójkąta, gdyby przestrzeń nasza była rzeczywiście euklidesowską, otrzymywalibyśmy zawsze wynik, że suma ich jest mniejszą od $180^0 + \varepsilon$ i większą od $180^0 - \varepsilon$; a więc rezultat, pozostawiający jeszcze wszystkie trzy możliwości. Natomiast, gdyby nasza przestrzeń posiadała gieometrję RIEMANNA albo ŁOBACZEWSKIEGO, to moglibyśmy się o tym przekonać, gdyby nasze narzędzia miernicze zostały dostatecznie udoskonalone, tak, aby granice błędów były dostatecznie małe. Bo otrzymalibyśmy wtedy w końcu dla sumy S kątów trójkąta nierówności: $S < 180^0 + a + \varepsilon$ i $S > 180^0 + a - \varepsilon$, gdzie a ma wartość bezwzględną większą od granicy błędów ε; wtedy dla a dodatniego będziemy mieli gieometrję RIEMANNA, a dla a ujemnego — gieometrję ŁOBACZEWSKIEGO.

16. Z rozważań POINCARÉGO wynika, że dla nauk przyrodniczych przestrzeń idealna jest to hipoteza czy fikcja, służąca nam do prostszego opisu zjawisk. Że przestrzeń idealna nie interesuje również matematyki — wspominaliśmy już parokrotnie. Kwestja przestrzeni idealnej i jej własności — to kwestja wyłącznie filozoficzna [1]).

Rozpowszechnione jest zdanie, że posiadamy bezpośrednie poznanie przestrzeni, że poznajemy pewne proste własności, wyrażone w pewnikach z taką pewnością, jak prawdy podstawowe arytmetyki; i że mianowicie aksjomaty EUKLIDESA są temi pewnikami. Zdanie to, jak wynika z rozważań powyższych, może się stosować tylko do przestrzeni idealnej [2]).

Według tego poglądu prosta musi posiadać własności prostej euklidesowskiej — jeżeli jaki przedmiot doświadczenia lub przedmiot matematyczny nie będzie posiadać tych własności, to nie bę-

---

[1]) Przedmiotem badań filozoficznych jest również przestrzeń wzrokowa i ogólniej — nasze wrażenie przestrzenności. Co do niej, najbardziej interesującym jest zagadnienie gienezy, o której p. wyżej § 12, 1).

[2]) Nie do wzrokowej, gdyż ta nie jest euklidesowską — np. niema w niej prostych równoległych.

dzie prostą. Prosta zaś ma posiadać własności prostej euklidesowskiej n i e *ex definitione*, bo nie jest to spór o nazwę: w zdaniu tym tkwi przypuszczenie, że mamy jakąś ideę a priori prostej przestrzennej i że ta prosta posiada właśnie cechy prostej euklidesowskiej. Rozpatrzmy tę ideę »prawdziwej prostej«.

Weźmy jedną z najprostszych własności prostej: mając odcinek prostej, można go w obie strony przedłużać nieskończenie, przyczym końce nigdy się nie spotkają [1]). W gieometrji RIEMANNA prosta tej własności nie posiada.

Nie możemy twierdzić, że to, co w przyrodzie uważamy za linje proste, np. promienie światła, osie obrotu ciał stałych, wyciągnięte nitki, nie spotkają się przy dostatecznie wielkim przedłużeniu (lecz gdyby się spotkały, to możemy powiedzieć, że to nie są proste — doświadczenie nic tu rozstrzygnąć nie może, tak samo jak, naodwrót, nasza idea prostej nic nie może nam powiedzieć o wyniku doświadczeń). Nasza idea prostej zdaje się jednak posiadać tę własność: poczuwamy jakąś konieczność przypisania jej nieskończoności i niezamkniętości. Żeby ten sąd jednak mógł być poczytany za bezwzględnie pewny, trzeba by nie zawierał żadnej niejasności; trzeba, by wchodzące weń pojęcia były, że użyjemy terminologji DESCARTESA, jasne i wyraźne.

W nasz sąd wchodzi przedewszystkim pojęcie »prostej«. Czy jest dla nas ono rzeczywiście jasne? Można o tym wątpić. Czy nie zlewa się dla nas z prostą przestrzeni wzrokowej? A pamiętajmy, że nie o tej mówimy; rozważamy przestrzeń nie wzrokową, lecz idealną (wszystko jedno, czy przypisujemy jej byt objektywny, czy też uważamy ją tylko za subjektywną formę postrzegania — zawsze odróżniamy ją od przestrzeni wzrokowej).

Nie tu miejsce wypowiadać się w tej trudnej kwestji fenomenologicznej. Podkreślamy tylko jeden ważny rezultat naszych rozważań: toczący się spór filozoficzny nie może dotyczeć ani świata doświadczalnego, ani rozmaitości matematycznych. Chodzi

[1]) Że się spotkają w »nieskończoności« to znaczy właśnie — jest to wyrażenie symboliczne — że się nie spotkają wcale.

o to, czy posiadamy ideę prostej przestrzennej, o oznaczonych własnościach gieometrycznych i czy te własności są własnościami prostej euklidesowskiej; oraz czy ta idea jest niezbędną do ujmowania zjawisk świata zewnętrznego[1]).

Zrozumienie istoty tego sporu jest niezmiernie ważne — gdyż w znacznej mierze polega on na nieporozumieniach.

Z literatury, traktującej specjalnie o filozofji gieometrji, wymienimy:

B. Russell. An Essay on the Foundations of Geometry. Cambridge, 1897. Tłumaczenie francuskie, poprawione i powiększone:

— Essai sur les fondements de la Géométrie. Traduction par A. Cadenat, revue et annotée par l'auteur et par L. Couturat. Paryż, 1901; str. X + 274.

Treść: Wstęp. Określenie zagadnienia przez związek jego z logiką, psychologją i matematyką (1—8). I. Krótka historja metagieometrji (9—68). II. Wykład krytyczny kilku dawniejszych teorji filozoficznych gieometrji (69—149). III A. Aksjomaty gieometrji rzutowej (150—186). III B. Aksjomaty gieometrji metrycznej (1. swobodnego ruchu, 2. wymiarów, 3. odległości) (186—224); IV. Konsekwencje filozoficzne (225- 254).

H. Poincaré. Des fondements de la géométrie. Revue de Mét. et de Mor., t. 7, 1899, str. 251—279. W tymże tomie odpowiedź:

B. Russell. Sur les axiomes de la géométrie. Str. 684—707.

Odpowiedź na ten artykuł znajduje się w tomie następnym:

H. Poincaré. Sur les principes de la géométrie. 1900; str. 73—86.

Zagadnieniom filozoficznym, dotyczącym przestrzeni, poświęcone są w części wszystkie dzieła, wymienione w § 18. Por. także:

F. Enriques. Questioni riguardanti... Rozdział pierwszy (p. Podst. gieom., str. 423).

---

[1]) Ostatniego zdania broni np. Natorp w niżej cytowanej książce.

Z literatury (bardzo obfitej), broniącej istnienia przestrzeni idealnej absolutnej i jej euklidesowskości, nie znamy nic, mającego wartość naukową. Są to tylko mniemania, odczucia niedostatecznie zanalizowane, albo błędne dedukcje, oraz dyskusje z matematykami, polegające na nieporozumieniach i nieznajomości matematyki [1]).

17. Do studjowania filozofji matematyki należy znać dobrze teorję mnogości, arytmetykę, podstawy gieometrji i podstawowe pojęcia analizy nieskończonostkowej; następnie konieczną jest znajomość logistyki; wreszcie potrzebne jest ogólne wykształcenie filozoficzne.

Do czynnej jednak pracy na tym polu to nie wystarczy: koniecznym jest głębsze zrozumienie matematyki, czego można oczekiwać tylko od tych, którzy sami w tej dziedzinie pracowali w sposób twórczy. Niech przykład tylu filozofów, którzy, mając duże nawet wykształcenie matematyczne, popełnili w swych pracach nad filozofją matematyki błędy matematyczne i wykazali niezrozumienie (choć nie nieznajomość!) matematyki, działa tu odstraszająco. Brak znowu filozoficznego wykształcenia powoduje często u matematyków, zajmujących się temi zagadnieniami, niezrozumienie filozoficznej ich strony, przeoczenie po prostu całej masy zagadnień.

18. Wymienimy tu niektóre ważniejsze książki z filozofji matematyki, które zawierają pewien całokształt.

B. Russell. The Principles of Mathematics; t. I. Cambridge, 1903; str. XXIX + 534.

Treść: I. Pojęcia matematyki nie dające się określić. II. Liczby. III. Wielkości. IV. Porządek. V. Nieskończoność i ciągłość. VI. Przestrzeń. VII. Materja i ruch. Dodatek *A*. Teorja logiczna i arytmetyczna Fregego. Dodatek *B*. Teorja typów.

Zamiast drugiego tomu wyszło dzieło:

---

[1]) Przykładem takiej książki jest:

B. Bornstein. Prolegomena do filozofji gieometrji. Warszawa, wyd. Kasy im. Mianowskiego, 1912, str. 133. Cena rb. 1.

Por. krytykę tej książki przez S. Straszewicza, w Wektorze, 1912.

A. N. Whitehead and B. Russell. Principia mathematica. Cambridge; t. I, 1910; str. 666; t. II, 1912. Cena szyl. 25 + 30. Tom III w druku.

Pierwsza z książek Russella ma charakter filozoficzny; druga, opracowana wspólnie z Whiteheadem, jest napisana w języku symbolicznym logistyki i charakter jej jest bardziej matematyczny; przytym autorowie zarzucają w niej swe dawne stanowisko w sprawie pojęcia zbioru, rozwijając nową teorję typów (p. wyżej, § 6), która służy im tu za podstawę teorji.

Są to najważniejsze może dzieła z tej dziedziny. Popularyzacją pierwszego z nich jest książka:

L. Couturat. Les principes des mathématiques. (Ze zbioru: Bibliothèque de philosophie contemporaine). Paryż, Alcan, 1905; str. VIII + 310. Cena fr. 5. Tłum. niemiec.:

— Die philosophischen Principien der Mathemathik, deutsch von C. Siegel. Lipsk, 1908. Cena m. 8.50.

Treść: Wstęp. I. Zasady logiki. II. Pojęcie liczby. III. Pojęcie porządku. IV. Kontinuum. V. Pojęcie wielkości. VI. Gieometrja. Wnioski. Nota I. O teorji mnogości. Nota II. O pojęciu grupy. Dodatek (str. 235—308) Filozofja matematyki Kanta.

Dzieło Couturata, przystępne i zawierające ciekawe myśli tego doskonałego popularyzatora, można polecić każdemu.

G. Frege. Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. Jena; t. I, 1893, str. 253; t. II, 1903, str. 265.

Bardzo cenne dzieło, zawierające podstawy logiki i arytmetyki, napisane odrębną symbolistyką.

G. Peano. Formulaire de Mathématiques. Turyn, t. I, 1895.

Dzieło zbiorowe, którego zadaniem jest wyłożyć całokształt najważniejszych teorji matematyki, opierając się wyłącznie na zasadach logiki, a posługując się jedynie symbolami, bez pomocy języka obcego.

Bardziej filozoficzny charakter mają dzieła następujące:

F. Enriques. Problemi della scienza. Bolonja. Tłum. niem. K. Grellinga:

— Probleme der Wissenschaft. (Ze zbioru: Wissenschaft und Hypothese, XI, 122). Lipsk, Teubner, 1910. Cz. I. Wirklichkeit und Logik. Str. X + 258 + 16. Cz. II. Die Grundbegriffe der Wissenschaft. Str. 259—599. Cena m. 4 + 5.

P. Natorp. Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften (Ze zbioru Wissenschaft und Hypothese, XII). Lipsk, Teubner, 1910; str. XX + 416. Cena m. 6.60.

Treść: I. Zadanie logiki nauk ścisłych. II. System zasadniczych funkcji logicznych. (Ilość. Jakość. Stosunek. Modalność). III. Liczba i rachunek. IV. Nieskończoność i ciągłość. V. Kierunek i wymiar jako determinacje czystej liczby. VI. Czas i przestrzeń jako utwory matematyczne. VII. Czasowo-przestrzenny porządek zjawisk i zasady matematyczne nauk przyrodniczych.

Autor jest neokantystą ze szkoły marburskiej. Podana obszerna bibljografja przedmiotu.

M. Winter. La méthode dans la philosophie des mathématiques. (Ze zbioru: Bibl. philos. contemp.). Paryż, Alcan, 1911. Cena fr. 2.50.

Może służyć do krótkiego poinformowania o głównych prądach w filozofji matematyki. Bez większej wartości filozoficznej.

G. Mannoury. Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik. Haarlem, 1909; str. 279.

Treść: Cz. I. Podstawy arytmetyki. Rozdz. 1. Jedność i wielość. 2. Liczba. Skończoność i nieskończoność. 3. »Własność podstawowa« arytmetyki. 4. Rozszerzenie pojęcia liczby. Zasada permanencji. 5. Liczby niewymierne. Wielkość i liczba. Cz. II. Podstawy gieometrji. 1. Logika matematyczna. 2. Gieometrografja. Linja prosta. 3. Gieometrje nieeuklidesowskie. 4. Rozważania ogólne o pojęciu przestrzeni.

Książka ciekawa głównie ze względu na to, że referuje poglądy różnych autorów, podając przytym obszerne cytaty.

Odrębny charakter mają cztery książki, wydane w zbiorze Bibliothèque de Philosophie scientifique (Paryż, Flammarion, cena tomu fr. 3.50):

H. Poincaré. La Science et l'Hypothese.

— La Valeur de la Science.

— Science et Méthode.

— Dernières Pensées.

Tłumaczenia niemieckie trzech pierwszych należą do zbioru. Wissenschaft und Hypothese (Lipsk, Teubner):

— Wissenschaft und Hypothese. Tłum. F. i L. Lindemann, z objaśnieniami F. Lindemanna. Wyd. 2-ie, 1906; str. 346 (str. 245—336 zajmują objaśnienia). Cena m. 4.80.

— Der Wert der Wissenschaft. Tłum. E. Weber. Z uwagami i dodatkami H. Webera. Wyd. 2-ie, 1910; str. 251. Cena m. 3.60.

— Wissenschaft und Methode. Tłum. F. i L. Lindemann (w przygotowaniu).

Tłumaczenia polskie:

— Nauka i Hypoteza. Tłum. M. H. Horwitz pod redakcyą L. Silbersteina. 1908; str. 200.

— Wartość nauki. Tłum. L. Silberstein. 1908; str. 180.

— Nauka i Metoda. Tłum. M. H. Horwitz. 1911; str. 222.

Te pięknie, nieco w sposób feljetonowy, napisane książki należą do najważniejszych w tej dziedzinie. Mają one tendencję popularyzatorską i są dostępne poniekąd i dla niematematyków. Przestrzegamy jednak, że ich łatwość jest pozorną: należyte zrozumienie zawartych w nich głębokich myśli jest trudnym i dla matematyka. Szczególniej utrudnia rozumienie dyskretna ironja autora, której łatwo nie dostrzec.

Najwięcej prac o zagadnieniach filozoficznych matematyki wychodzi w czasopiśmie filozoficznym:

Revue de Métaphysique et de Morale. Paryż, Collin. Wychodzi co dwa miesiące. Cena numeru fr. 3; rocznie z przesyłką fr. 15.

HISTORJA MATEMATYKI

OPRACOWAŁ

STEFAN KWIETNIEWSKI.

A. Historja matematyki wogóle.

Treść: 1. Zadanie i metoda historji matematyki. 2. Zależności przyczynowe w rozwoju matematyki. 3. Źródła. 4. Historja historji matematyki. 5. Wymagane przygotowanie. 6. Specjalizacja. 7. Wskazówki dla pracujących samodzielnie. 8. Zagadnienia dotychczas nieopracowane. — 9. Literatura: *a)* Podręczniki. *b)* Czasopisma. *c)* Książki treści informacyjnej. *d)* Życiorysy. *e)* Wydania klasyków.

---

1. Historja poszczególnej nauki może sama stać się nauką, jeżeli dąży do wybrania z nieskończonego mnóstwa szczegółów tego, co jest w nich zasadnicze, do rozpoznania konieczności w zjawiskach rzeczywistych. Tak mówi znany historyk matematyki Hankel [1]. Ale czy można w rozwoju wszystkich teorji matematycznych dopatrzeć się konieczności? G. Cantor [2]) uważa, że matematykę czystą należałoby raczej nazwać »matematyką wolną«, gdyż stwarza najzupeł-

---

[1]) H. Hankel. Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Lipsk, 1874.

Nie dający się dosłownie przetłumaczyć tekst niemiecki brzmi:

»Die Geschichte einer Wissenschaft kann selbst Wissenschaft werden, wenn sie es versucht, aus der unendlichen Fülle des Einzelnen das Bestimmende herauszuheben, in dem Wirklichen das Notwendige zu erkennen«.

[2]) Jerzy (Georg) Cantor, twórca teorji mnogości; później będzie mowa o Maurycym Cantorze, historyku.

niej dowolne przedmioty badania [1]). Gdybyśmy w myśl tego zdania przypuścili, że przedmioty badania i ich teorja powstają w umyśle matematyka niezależnie od jakichkolwiek pobudek zewnętrznych, wówczas zadanie historyka ograniczyłoby się do ułożenia spisu chronologicznego odkryć matematycznych. Te dwa pojęcia krańcowo odmienne: pojęcie zbioru faktów, wywołanych niczym nie skrępowaną wolą ludzką, i pojęcie konieczności dziejowej stanowią granice naturalne, między któremi rozpościerają się badania nad historją nauki, przyczym istnieje stałe dążenie do wciągania coraz to większej ilości faktów pod pojęcie konieczności dziejowej. Pozostawiając na uboczu treść filozoficzną tego pojęcia, otrzymamy w historji nauki wystarczający jego obraz, jeżeli potrafimy powiązać oddzielne fakty w jednolitą całość, wywołującą w umyśle naszym wrażenie ciągłości; zauważywszy przerwę w ciągłości, poszukujemy faktów, któreby mogły wypełnić przerwę; spostrzegszy nagły zwrot, badamy odpowiedni moment z większą skrupulatnością i nieraz zdołamy wykazać, że nagłość zwrotu była tylko pozorna; widząc gwałtowne wahanie się zdarzeń w pewnej epoce, staramy się wytknąć kierunek pośredni, dokoła którego wahania się odbywają. Jest to wymaganie, stawiane dzisiaj każdej nauce: pragnąc pewną dziedzinę faktów uczynić przystępniejszą, zrozumialszą, wiążemy fakty w ten sposób, ażeby myśl nasza mogła swobodnie biec równolegle do nich; wówczas potrafi wyprzedzać fakty znane, odtwarzać nieznane i przewidywać przyszłość z większym lub mniejszym prawdopodobieństwem.

Pojęcie konieczności, wynajdywanie przyczyn i skutków występuje tu tylko jako metoda badania.

Narzędzia, za pomocą których wiążemy fakty, powinny być zawsze te same, przyczym jak najmniej liczne i jak najprostsze; te narzędzia to prawa historyczne: ewolucja, zależności przyczynowe i t. d.

2. Objawy zależności przyczynowej, z jakiemi będziemy mieli do czynienia w historji matematyki, są

---

[1]) Grundlagen der allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Lipsk, 1883. Str. 8.

bardzo różnorodne. Jeżeli po gruntownym zbadaniu przecięć stożkowych, jako krzywych stopnia drugiego, zaczęto badać systematycznie krzywe stopnia trzeciego, do czego też sama metoda (spółrzędnych kartezjuszowskich) okazała się najzupełniej odpowiednią — widzimy w tym naturalny objaw samodzielnego, wewnętrznego rozwoju matematyki: całokształt wiedzy matematycznej w danej epoce daje powód do nowych zagadnień i dostarcza metod do ich rozwiązania; że w danym przykładzie czynnym był gienjusz Newtona, to mogło jedynie przyspieszyć rozwiązanie zagadnienia i, być może, nadać mu pewne indywidualne piętno.

Gdybyśmy jednak chcieli wyjaśnić fakt, że nauka grecka upadła i zjawiła się w 1000 lat później wśród mało oświeconych narodów północnych, które nigdy dawniej nie pielęgnowały nauki na szerszą skalę — musielibyśmy uwzględnić wojny, stosunki handlowe i wędrówki narodów na terenie Europy: jednym słowem, musielibyśmy poszukiwać przyczyn w historji powszechnej, w ogólnych dziejach narodów Europy i Azji; dowiedzielibyśmy się wówczas, że naukę grecką zawdzięczamy przeważnie Arabom, którzy ją odnaleźli i roznieśli po Europie, a także Grekom, wypartym z ojczyzny po zdobyciu Konstantynopola przez Turków.

Szybki rozrost matematyki i zainteresowanie się nią ogółu w wieku XVI i XVII dają nam przykład zależności tej nauki od ogólnego stanu umysłowego Europy, od odkryć gieograficznych, od ruchów filozoficzno-religijnych, od nowych wynalazków (drukarstwo), od rozwoju sztuki (perspektywa), a zwłaszcza od powołania na nowo do życia nauk doświadczalnych (Galileusz).

Mniej wyraźnie pod względem przyczynowym przedstawia się zagadnienie: dlaczego wśród tych do niedawna nieoświeconych narodów północnych, na całej długości Europy, zjawiają się naraz gienjusze tej miary co Kopernik, Kepler, Descartes i Newton, dzięki którym powstają nowe, o wiele donioślejsze metody matematyczne, aniżeli te, które nam pozostawili Grecy?

Na takie pytania odpowiedzi zadowalających nie umiemy dawać.

W działalności poszczególnych uczonych można się nieraz dopatrzeć ich wpływu wzajemnego na siebie, czy to za pośrednictwem dzieł, czy też przez stosunki bezpośrednie lub przez korespondencję.

Można wreszcie wspomnieć o drobnych, często bardzo poziomych przyczynach, oddziaływających na badaczy poszczególnych, jak np. o beczkach wina, które natchnęły Keplera do badań nad obliczaniem objętości ciał obrotowych, lub o więziennym odosobnieniu, w którym Poncelet obmyśla nową metodę gieometrji rzutowej.

Pozostaje jeszcze znaczna liczba faktów, dla których albo wcale nie znajdujemy odpowiedniego miejsca w systemacie konieczności dziejowej, albo które umieszczamy w nim pod pewnym przymusem; ale, bądź co bądź, w miarę doskonalenia się techniki badań historycznych, stosunkowa ilość takich faktów stale się zmniejsza.

3. Ważniejsze źródła, z których historja matematyki czerpie materjał, są następujące:

Książki i inne druki.

Księgi pisane, rękopisy, listy i t. p.

Inne zabytki porozumiewania się ludzi za pomocą znaków: tablice, pokryte pismem klinowym, hieroglifami i t. d.

Tradycja ustna.

Przedmioty, będące dziełem rąk ludzkich, a których budowę potrafimy sobie wytłumaczyć za pomocą pewnej myśli matematycznej: piramidy egipskie, zmniejszone kopje obrazów (podobieństwo figur), plany, przyrządy rachunkowe, rysunkowe i miernicze i t. d.

Wreszcie zwyczaje, mowa, zdobnictwo mogą nam dostarczyć pewnych wskazówek, dotyczących epoki i sposobu zaznajamiania się danego ludu z liczbami i figurami gieometrycznemi.

W przypuszczeniu, że niema zasadniczych różnic pomiędzy psychologją ludzi różnych epok i różnych krajów, oraz, że jednostka przebywa w skróceniu te same stadja rozwoju umysłowego, co i całe społeczeństwo, możemy odtworzyć najprawdopodobniejszy przebieg dziejów myśli matematycznej od epoki tworzenia się pojęć elementarnych aż do jej stanu dzisiejszego.

Podobnie jak paleontolog odtwarza zaginione organizmy z ich szczątków, w przypuszczeniu, że prawa biologiczne nie ulegają zmianie, tak samo historyk odtwarza nieznane epoki lub poszczególne momenty, przyjmując za zasadę niezmienność praw historycznych i psychologicznych.

4. Uwagi powyższe stosują się do tego stanowiska, które historja matematyki zajęła dopiero w drugiej połowie w. XIX. Wprawdzie już autorowie greccy dostrzegali w rozwoju nauki ciągłość i oddziaływanie wpływów zewnętrznych[1]), ale bądź co bądź notują przeważnie rozrost, przybywanie nowych pojęć i teorji, nie zwracając baczniejszej uwagi na te przemiany wewnętrzne, którym podlegają pojęcia, metody i teorje, już poprzednio przyjęte przez naukę. Sposób, w jaki zaczęto pisać historję matematyki po odrodzeniu nauk, był jeszcze więcej powierzchowny. Z początku zadowalano się wzmiankami biograficznemi i wykazem tytułów dzieł; później zaczęto również podawać ich treść[2]), nie badając jednak wzajemnej zależności.

W każdym razie prace te dostarczyły dużo cennego materjału późniejszym historykom. Myśl stworzenia rozumowej historji matematyki można skonstatować na początku w. XVIII[3]),

---

[1]) Proklos Diadochos z V wieku pozostawił fragment jednego z dawniejszych autorów (przypuszczalnie Eudemosa z Rodos), zawierający następujące zdania: »Ponieważ potrzeba rozważać również początki sztuki i nauki w obecnym okresie, przeto podajemy do wiadomości, że podług większości gieometrja została naprzód wynaleziona przez Egipcjan, biorąc początek z pomiarów gruntu. Gdyż było im to potrzebne ze względu na wylewy Nilu, który zacierał granice ich własności. Ale nie jest nic dziwnego, że odkrycie tej, jak i innych nauk, powstało z potrzeby, gdyż wszystko, będące w stanie stawania się, postępuje od niedoskonałości ku doskonałości. Od wrażenia zmysłowego do rozważań myślowych, od nich do rozumnego poznania prowadzi właściwe przejście«.

[2]) Johann Christoph Heilbronner, Versuch einer mathematischen Historie, Frankfurt, 1739. — Tenże, Historia matheseos universae, Lipsiae, 1742.

[3]) Pierre Rémond de Montmort w Essay d'Analyse sur les jeux de Hazard, wyd. 2 r. 1713, ogłasza swój list, zawierający następujące słowa:

ale urzeczywistnienie tej myśli nastąpiło w kilkadziesiąt lat później, kiedy MONTUCLA ogłosił swe znakomite dzieło.

Koniec wieku XIX przynosi nowy, znaczny postęp, dzięki krytycznie i wszechstronnie opracowanemu dziełu MORITZA CANTORA, licznym monografjom, czasopismom specjalnym, poświęconym wyłącznie historji matematyki, oraz odkryciom dawnych zabytków.

5. Kto pragnie rozpocząć systematyczną naukę historji matematyki, powinien znać działy podstawowe matematyki wyższej, pozatym inne przedmioty w zakresie stopnia drugiego, w szczególności historję powszechną, gieografję, fizykę i kosmografję. Należy mieć również wiadomości z historji kultury, historji filozofji oraz historji nauk doświadczalnych [1]. Niezależnie od tego czytelnikowi wypadnie nieraz zwrócić się czy to do obszerniejszego podręcznika jednej z wymienionych nauk, czy też do encyklopedji. Oczywiście trzeba też mieć pod ręką atlas, nietylko nowożytny, ale i historyczny. Znajomość języków starożytnych nie jest niezbędna, ale pożądana.

Zanim jednak czytelnik rozpocznie czytanie systematyczne podręcznika, powinien już mieć pewne wyobrażenie o przedmiocie. Rzut oka na tablicę chronologiczną [2], przeczytanie

---

»Byłoby bardzo do życzenia, ażeby ktoś zechciał zadać sobie trud nauczenia nas, jak i w jakim porządku odkrycia matematyczne następowały po sobie i komu je zawdzięczamy. Opracowano historję malarstwa, muzyki, medycyny; dobra historja matematyki byłaby dziełem o wiele ciekawszym i pożyteczniejszym. Jaką rozkosz mielibyśmy, widząc zlewanie się metod, przyłączanie nowych teorji, począwszy od najdawniejszych aż do naszych czasów. Takie dzieło, dobrze napisane, mogłoby być uważane za historję umysłu ludzkiego, gdyż w tej nauce, więcej niż w każdej innej, człowiek okazuje znakomitość inteligiencji, którą Bóg mu dał, ażeby go wynieść nad wszelkie inne stworzenia«. Słowa te przytacza MONTUCLA w przedmowie do swego dzieła.

[1] Wiadomości te zaczerpnąć można z Poradnika.

[2] Orjentowanie się w czasie znakomicie mogą ułatwić tablice chronologiczne, pomieszczone w dziele: FERD. ROSENBERGER. Die Geschichte der Physik in Grundzügen mit synchronistischen Tabellen der Mathematik, der Chemie und beschreibenden Naturwissenschaften sowie der allgemeinen Geschichte. BRUNŚWIK. I. Geschichte der Physik im Altertum und im Mittelalter.

wstępu historycznego do którego z podręczników elementarnych, stworzy już pewną ramę, w której dobrze jest naszkicować na początek kilka wybitniejszych momentów, chociażby tylko dzieje gieometrji greckiej i ważniejsze odkrycia wieku XVII (Descartes, Newton) za pomocą jednej z książek popularnych, wymienionych w Stopniu II (najlepiej: Tannery).

Dla osiągnięcia pełniejszego obrazu, należy czytać życiorysy i listy uczonych, zapoznawać się bezpośrednio z dziełami, mającemi znaczenie historyczne, wreszcie — przy sposobności — oglądać przedmioty i zwiedzać miejscowości, mające związek z historją matematyki; pozatym zadowalać się musimy kopjami, rysunkami i opisami. Kto chce dokładnie poznać autora, wniknąć w bieg jego myśli, nieraz zupełnie odmienny od nowożytnego, nie powinien gardzić żadnym szczegółem; drobne napozór szczegóły mogą ułatwić nam dostrojenie się myślą do badanej epoki, do badanego autora. Niewielu jest zresztą matematyków, którzy, jak mówi P. Staeckel, »z uprzejmą otwartością pozwalają zaglądać do swoich warsztatów umysłowych«; do takich należą Kepler i Euler; wielu natomiast uczonych, zwłaszcza z wieku XVII i XVIII, używa słów raczej do ukrywania swych myśli.

6. Kto po przestudjowaniu podręcznika historji matematyki pragnąłby iść dalej w tym kierunku, ma wiele ponętnych dróg przed sobą. Przedewszystkim można, za pomocą obszerniejszego podręcznika i prac specjalnych, postarać się o osiągnięcie zupełniejszego obrazu dziejów myśli matematycznej; można też postawić sobie za zadanie dokładne poznanie najznakomitszych matematyków wszystkich epok i krajów, lub choćby tylko jednego z nich, ale już z jak największą skrupulatnością i wszechstronnością.

Inne zadanie będzie: poznać dokładnie historję mate-

1882 (str. X + 175). II. Geschichte der Physik in der neueren Zeit. 1884 (str. VIII+406). III. Geschichte der Physik in den letzten Hundert Jahren. 1887—90 (str. XII + 826). Tablice zajmują w tomie I str. 150—169, w II str. 368—397, doprowadzone są do r. 1779. W czterech kolumnach równoległych mieszczą się: 1. Fizyka. 2. Matematyka. 3. Chemja i nauki przyrodnicze opisowe. 4. Historja powszechna.

matyki w oznaczonej epoce, albo w jednym tylko kraju, a więc w szczególności w Polsce, lub w kraju o odrębnej zupełnie kulturze, jak Indje lub Chiny; można wreszcie obrać za specjalność badanie historji pewnej poszczególnej gałęzi matematyki: gieometrji, teorji liczb; albo historję rozwoju pisowni matematycznej. Bardzo ciekawa jest również sprawa zależności między rozwojem matematyki czystej i innych objawów życia kulturalnego lub poszczególnych nauk.

Na granicy między historją matematyki, historją kultury i psychologją leżą zagadnienia, dotyczące tworzenia się pojęć matematycznych u ludów pierwotnych. Idąc jeszcze dalej, możemy zainteresować się instynktem matematycznym u zwierząt (np. komórki pszczół).

Różnorodność typów umysłowych matematyków, korelacja między różnemi objawami ich działalności, trybu życia oraz warunków zewnętrznych, mogą być badane na podstawie ich prac naukowych, listów i życiorysów, przy pomocy wyników psychologji doświadczalnej oraz samoobserwacji, zapoczątkowanej niedawno przez ankiety Mailleta i Fehra (por. str. 129, przypisek).

Upodobanie do pewnych szczególnych liczb (np. u Pitagorejczyków) i form gieometrycznych (np. złoty podział) oraz wyszukiwanie ich w przyrodzie ustąpiły dziś miejsca poszukiwaniom więcej racjonalnych praw przyrody, lepiej odpowiadających zasadzie ciągłości i prostoty, ale ze stanowiska historycznego i one zasługują na uwagę, jako punkt wyjścia dla późniejszych teorji (np. teorja liczb), oraz jako pierwowzory praw przyrody; najwyraźniejsza metamorfoza upodobań kabalistycznych w poszukiwania praw przyrody dokonywa się w umyśle Keplera. Również wszelkie błędy i przesądy w matematyce mogą być przedmiotem ciekawych studjów.

Nakoniec jeszcze jeden subtelny i trudny temat: historja rozwoju pojęć podstawowych i ścisłości rozumowania matematycznego.

Trzeba tu wyraźnie zaznaczyć, że tematy te mogą być opracowane z należytym zrozumieniem jedynie po przestudjowaniu kursu historji matematyki [1]). Że gruntowna znajomość języków starożytnych i wschodnich, etnologji, psychologji, nauk przyrodniczych itd. oddać przy tym może znakomite usługi, rozumie się samo przez się, gdyż bez korzystania ze źródeł oryginalnych niewiele da się zrobić.

7. Na zakończenie kilka wskazówek dla tych, którzyby pragnęli pracować samodzielnie u źródeł i ogłaszać rezultaty swych prac drukiem. Wobec zaniedbania, jakie u nas panuje na tym polu, praca taka, zwłaszcza o historji matematyki w Polsce, bardzo jest pożądana [2]).

1. Zawsze zwracać się do źródeł. Podręczniki i monografje dostarczają informacji o nich, ale przed wyprowadzeniem nowych wniosków, należy informacje te sprawdzić ze źródłami oryginalnemi. Zdarzało się, że błędy przez całe stulecia przechodziły z książki do książki, gdyż autorowie nie zadawali sobie trudu sprawdzania cytat.

2. Jak najskrupulatniejsze cytowanie literatury, którą posługujemy się przy danej pracy. Tytuł powinien być zawsze podany bez żadnych zmian i skróceń; zanotować też należy, z którego wydania korzystamy. Przy cytowaniu nie z oryginału, ale z drugiej ręki, trzeba podać również źródło, z którego cytata została wzięta.

3. Jakkolwiek charakter naszego języka wymaga polszczenia niektórych nazwisk, zwłaszcza łacińskich, to jednak zmiany takie mogą być nieszkodliwe tylko w książkach popularnych, których czytelnicy nie będą sięgali do źródeł; w pracach spe-

---

[1]) Możnaby tu jeszcze dodać łatwiejsze tematy, jak historja organizacji pracy naukowej, albo historja nauczania matematyki, ale te tematy, nie wymagające dużego przygotowania matematycznego, zwykle bywają opracowywane nie przez matematyków, lecz przez historyków i pedagogów; zaznaczyć wszakże należy, że drugi z tych tematów — historja nauczania — ze wszech miar zasługuje na gruntowne opracowanie ze stanowiska matematycznego, tymbardziej, że sprawa ta jest dziś aktualna wobec reform, jakim podlega teraz nauczanie matematyki w szkołach.

[2]) Porównaj pouczającą recenzję P. Staeckela o Vorlesungen über Geschichte der Mathematik Cantora. Goettingische Gelehrte Anzeigen, 1900, Nr. 3.

cjalnych, zwłaszcza przy tytułach, należy zachować pisownię oryginalną imienia i nazwiska, lub zlatynizowaną przy omawianiu dzieł, pisanych po łacinie.

4. Referując czyjąś pracę, uwzględnić stanowisko autora, wystrzegać się podstawiania mu myśli własnych; wnioski własne starannie oddzielać od słów autora.

5. Wystrzegać się niedoceniania autorów dawnych przez stosowanie do nich skali nowożytnej.

6. W razie różnicy zdań, przytaczać poglądy cudze, sprzeczne z naszemi.

8. Z zagadnień, których opracowanie powinno być podjęte w najbliższej przyszłości, STAECKEL wymienia następujące:

Uprzystępnienie ukrytego materjału drukowanego i niedrukowanego, zwłaszcza rękopisów arabskich, dotyczących matematyki greckiej, rękopisów włoskich z wieków średnich, listów z wieku XVIII, przechowywanych w bibljotekach; uzupełnienie prac nad metodami rachunku praktycznego i nad powstaniem oraz rozpowszechnianiem się układu dziesiętnego i cyfr.

---

9. Literatura.

a) Podręczniki.

H. G. ZEUTHEN. Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Vorlesungen. Kopenhaga, 1896, str. VII + 342.

— Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. Éd. franç. par I. MASCART. Paryż, 1902, str. IX + 296.

Treść: Wstęp. Matematyka grecka. Matematyka indyjska. Wieki średnie.

H. G. ZEUTHEN. Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert. Deutsch von R. MEYER. Lipsk, 1903, str. VIII + 434. (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Heft XVII). Cena w opr. m. 17.

Treść: Wstęp. I. Przegląd historyczny i biograficzny II. Analiza wielkości skończonych. III. Powstanie i początki rozwoju rachunku nieskończonostkowego.

Książki te, przeznaczone dla studentów matematyki i dla nauczycieli, stanowią jedną całość i są najodpowiedniejszym ogólnym podręcznikiem historji matematyki; niespecjalista może na nim poprzestać (uzupełnić tylko należy wiek XVIII i XIX np. podług Balla, patrz niżej), kto chce się specjalizować w historji matematyki, powinien od niego zacząć. Szczegółowe cytaty bibljograficzne pominięte, główny nacisk położony na rozwój myśli matematycznej i metod. Życiorysy matematyków XVI i XVII wieku w związku z historją powszechną, pomieszczone są w rozdziale I. Dowodzenia często zmodernizowane.

W. W. Rouse Ball. A short account of the history of mathematics. Londyn, 1888, wyd. 5, 1912; str. XXIV + 522. Tłumaczenia: włoskie D. Gambioli i G. Puliti, przejrzał G. Loria. Bolonja I, 1913; str. X + 284. II 1904; str. VI + 439. Francuzkie: L. Freund. I Paryż, 1906; str. VII + 422, II, 1908; str. VIII + 275.

Książka ta jest o wiele przystępniejsza od poprzedniej, dobra dla niematematyków, znających początki matematyki wyższej; doprowadzona blizko do końca wieku XIX, ale nowsze czasy są w niej traktowane pobieżnie. Podana szczegółowa literatura.

Gino Loria. Le scienze esatte nell'antica Grecia. Medjolan, Hoepli, 1914, str. 969; (projektuje się przekład na język polski).

H. Hankel. Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Lipsk, 1874; str. 410. Cena m. 9.

Dzieło niedokończone, wydane po śmierci autora; brak gieometrji klasycznej. Jest ono pod pewnemi względami przestarzałe, ale zasługuje na przeczytanie ze względu na głębokie ujęcie przedmiotu.

Jako pobieżne uzupełnienie może posłużyć książeczka:

H. Hankel. Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Tybinga, 1869, str. 36, wyd. 2. 1885.

M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Lipsk. 4 tomy.

I. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Wyd. 3, 1907; str. VI + 941. Cena w opr. m. 26.

II. Von 1200—1668. Wyd. 2. 1900; str. XII + 943. Cena m. 28.

III. Von 1668—1758. Wyd. 2. 1901; str. X + 923. Cena m. 27.

IV. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik herausgegeben von... unter Mitwirkung der Herrn V. Bobynin, A. v. Braunmühl, F. Cajori, S. Günther, V. Kommerell, G. Loria, E. Netto, G. Vivanti, C. R. Wallner. Von 1759—1799. 1908, str. VI + 1113. Cena m. 36.

Jest to dzieło najważniejsze z historji matematyki, niezbędne dla każdego, pragnącego zapoznać się dokładniej z przedmiotem. Poprawki i uzupełnienia patrz niżej. Do nieopracowanego w tym dziele wieku XIX korzystać należy z Encyklopädie der math. Wissenschaften (patrz Wstęp do stopnia III).

Wobec postępów, jakie historja matematyki poczyniła w ostatnich czasach, dzieła dawniejsze nie mogą już być używane jako podręczniki, ale do poinformowania się w różnych zagadnieniach specjalnych mogą oddać duże usługi:

Jean Etienne Montucla. Histoire des mathématiques dans laquelle on rend compte de leur progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; ou l'on expose le tableau et le developpement des principales découvertes dans toutes les parties des Mathématiques, les contestations qui se sont élevées entre les Mathématiciens, et les principaux traits de la vie des plus célèbres. Nouvelle édition, considérablement augmentée, et prolongée jusque vers l'époque actuelle. Paryż. 4 tomy. 1799—1802.

I. an VII. Str. VIII + 739 + XII tablic. Do początku wieku XVII.

II. an VII. Str. 717 + XIV tablic. Wiek XVII. Szczegółowy spis alfabetyczny do tomów I i II.

III. an X. (1802). Achevé et publié par J. DE LALANDE. Z portretem MONTUCLI. Str. VIII + 832 + XVII tablic. Część wieku XVIII.

IV. an X. (1802). Achevé et publié par J. DE LALANDE. Z portretem DE LALANDE'A. Str. 688 + II tabl. Wiek XVIII Życiorys MONTUCLI przez AUGUSTE-SAVINIEN LE BLOND, z uzupełnieniami DE LALANDE'A. Spis do tomów III i IV.

ABRAHAM GOTTHELF KÄSTNER. Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des XVIII Jahrhunderts, Gietynga, 1796—1800. 4 tomy.

I. Arithmetik, Algebra, Elementargeometrie, Trigonometrie, Praktische Geometrie, bis zum Ende des sechszehnten Jahrhunderts. 1796; str. X + 708.

II. Perspectiv, Geometrische Analysis und höhere Geometrie, Mechanik, Optik, Astronomie. Erster Zeitraum bis zum Ende des sechszehnten Jahrhunderts. 1797; str. XIV + 759.

III. Reine Mathematik, Analysis, praktische Geometrie. bis an CARTESIUS. Sammlungen von Werken für unterschiedene Wissenschaften. 1799; str, XIV + 484.

IV. Mechanik, Optik, Astronomie. Zweyter Zeitraum vom Anfange des siebenzehnten Jahrhunderts bis um desselben Mitte. Nachtrag zu vorigen Bänden. 1800; str. XIV + 516.

Próby przedstawienia rozwoju matematyki w związku z ogólnym życiem kulturalnym znajdzie czytelnik w następujących książkach:

A. ARNETH. Die Geschichte der reinen Mathemathik. Stuttgart, 1852. (Neue Encyklopädie der Wissenschaften und Künste, III Band, Nr. 2). Str. VI + 291.

Książka napisana bardzo przystępnie; przestarzała, zwłaszcza pod względem przyrodniczym.

M. CANTOR. Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker. Halla, 1863.

G. LIBRI. Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle. 4 tomy. Paryż, 1837—41; wyd. 2-ie. Halla, 1865. Uwzględnia stosunki społeczne, religijne i t. d.

Z dzieł, traktujących o historji poszczególnych działów nauki, wybitniejsze miejsce zajmują:

M. CHASLES. Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. Paryż, 1837; wyd. 3-cie, 1889; str. 851. — Geschichte der Geometrie, übersetzt von Sohncke. Halla, 1839.

GINO LORIA. Il passato e il presente delle principali Teorie geometriche. Turyn, 1888. Wyd. 2-ie, 1896; str. XX + 346. — Przeszłość i stan obecny najważniejszych teorji gieometrycznych. Przełożył S. DICKSTEIN. 1889; stronic VIII + 112. Cena kop. 30.

A. v. BRAUNMÜHL. Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, I Teil. Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen. Lipsk, 1900, str. VII + 260; II Teil. Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Lipsk, 1903, str. XI + 264. — Wyborna książka, zarówno pod względem treści jak i formy przedstawienia.

Pozatym odsyłamy czytelnika do literatury przy innych rozdziałach oraz do książek informacyjnych.

Podręczniki elementarne — patrz Stopień II.

Historja nauczania matematyki jest przystępnie opracowana w książce:

F. PAHL. Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts. Lipsk, Quelle i Meyer, 1913, str. X + 368. Cena m. 10.60.

Opracowania więcej specjalne:

F. UNGER. Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart. Lipsk, 1888, str. 240.

KEHR. Geschichte der Methodik des deutschen Volksschulunterrichts, Band III: JÄNICKE i SCHURIG. Geschichte der Methodik des Unterrichts in den mathematischen Lehrfächern, Gotha, 1888.

S. Günther. Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis 1525. Berlin, 1887, str. VI + 408 (Monumenta Germaniae Paedagogica, tom III).

W. W. Rouse Ball. A History of the study of mathematics at Cambridge. Rozdz. I—VII. Działalność profesorów. VIII—X Organizacja nauczania, egzaminy. XI Historja uniwersytetu.

b) Czasopisma.

Bibliotheca mathematica, herausgegeben von Gustav Eneström. Stockholm, serja 2-a, 1—13, 1887—94; serja 3-a, 1, 1900 i nast.

Oprócz monografji historycznych, pismo to zawiera stałą rubrykę poprawek i uzupełnień do Geschichte der Mathematik Cantora, które przy studjach specjalnych należy bezwarunkowo uwzględnić.

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Rzym 1—20, 1868—87.

Jako dalszy ciąg tego pisma wychodzi:

Bollettino di bibliografia e storia delle scïenze matematiche. Pubblicato per cura di Gino Loria. Turyn. 1, 1898 i nast.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. In zwanglosen Heften. Lipsk. 1, 1877 i nast.

Inne czasopisma również zamieszczają często rozprawy historyczne.

c) Książki treści informacyjnej.

I. C. Poggendorff. Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, enthaltend Nachweisungen über Lebensverhältnisse und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen u. s. w. aller Völker und Zeiten. Lipsk. 4 tomy. I. A—L. 1863. Str. VIII + 1583. II. M—Z. 1863. Str. 1467. III. 1858 bis 1883. herausgegeben von B. W. Feddersen und A. I. v. Oettingen. 1898. Str. VIII + 1496. IV. Die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend. Herausgegeben von A. v. Oettingen. 1904. Str. XIII + 1718.

Zawiera krótkie, kilkuwierszowe informacje biograficzne oraz tytuły prac.

Felix Müller. Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellenliteratur. Lipsk, 1892; str. IV + 102.

A. Favaro. Saggio di cronografia dei matematici dell'antichità (a. 600 a. C.—a. 400 d. C.) Padwa, 1875.

E. Wölffing. Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichniss der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. T. Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Uebersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. Lipsk, 1903. (Abhandl. Gesch. d. mathem. Wiss. XVI), str. XXXVI + 416.

Podane: autor, tytuł, wydawca, cena. Układ podług treści; 313 rozdziałów; w każdym rozdziale tytuły ułożone alfabetycznie podług autorów. Obszerny wstęp, omawiający inne wydawnictwa bibljograficzne.

d) Życiorysy.

Pięknym, barwnym stylem odznaczają się francuskie życiorysy (zwłaszcza Arago):

B. de Fontenelle. Éloges des académiciens. 3 tomy. Paryż, 1719.

N. C. de Condorcet. Éloges des académiciens de l'Académie Royale morts depuis 1666 jusqu'en 1699. Paryż, 5 tomów. 1773 i 1799.

F. Arago. Notices biographiques. (Oeuvres complé-

tes, publ. par M. J. Barral, I; str. 638, II; str. 703, 1854, III; str. 628, 1855). Paryż. — Na język niemiecki przełożył W. Hankel. 3 t. Lipsk, 1856.

J. Bertrand. Éloges académiques. Nouvelle série: Poinsot, Cosson, Chasles, Cordier, Paris, Cauchy, Tisserand, Viéte, Galilée, D. Papin, Clairaut, Euler, d'Alembert et Lagrange, Abel, Galois, Faraday, Pasteur. Avec un éloge historique de Joseph Bertrand par G. Darboux. Paryż, 1902; str. LI + 411.

Wymieniamy jeszcze kilka oddzielnych biografji największych matematyków, odsyłając czytelnika pozatym do książek informacyjnych (wydania kompletne klasyków również zawierają życiorysy).

A. Görland. Aristoteles und die Mathematik. Marburg, 1899; str. VIII + 211.

Bunte. Über Archimedes, mit besonderer Berücksichtigung der Lebens- und Zeitverhältnisse, sowie zweier von demselben herrührender Kunstwerke. Programm. Leer, 1877.

T. L. Heath. Diophantus of Alexandria. A study in the history of greck Algebra. Wyd. 2. Cambridge, 1910; str. VI + 387.

Millet. Histoire de Descartes. 2 t. Paryż. I, 1867, II, 1870.

J. J. Fahie. Galileo: his life and works. Londyn; 1903; str. XVI + 365.

D. Brewster. The life of Sir Isaac Newton. Londyn, 1832. Wyd. 2, 2 t. 1860. — Tłum. niemieckie, Goldberg Lipsk, 1833; franc., Peyrot. Paryż, 1836.

Ferd. Rosenberger. Isaac Newton und seine physikalischen Principien. Ein Hauptstück aus der Entwicklungsgeschichte der modernen Physik. Lipsk, 1895. Str. VI + 636.

Guhrauer. Gottfried Wilhelm von Leibniz. 2 tomy. Wrocław, 1842; Nachtrag, 1846.

F. A. T. Winnecke. Gauss. Ein Umriss seines Lebens und Wirkens. Brunświk, 1877.

A. Forti. Intorno alla vita ed alle opere di Luigi Lagrange. Pistoja, 1868. Wyd. 2. Rzym, 1869.

I. Didion. Notice sur la vie et les ouvrages du général Jean Victor Poncelet. Paryż, 1869.

Ch. Lucas de Pesloüan. N. H. Abel. Sa vie et son oeuvre. Paryż, 1906. Str. XIII + 169.

C. A. Valson. La vie et les travaux du baron Cauchy. Paryż, 1868. 2 t.

Lebon. Henry Poincaré. Biographie, bibliographie analytique des écrits. Paryż, Gauthier-Villars, 1909.

Do ogólnej charakterystyki matematyków polecić można:

P. I. Möbius. Ueber die Anlage zur Mathematik. Lipsk, 1900, wyd. 2-e, 1907. — Zawiera życiorysy i portrety wielu matematyków. Wnioski autora przyjmować trzeba z pewną ostrożnością.

W. Ahrens. Scherz und Ernst in der Mathematik. Lipsk, Teubner, 1904, str. X + 522. — Zbiór cytat wziętych z pism matematyków różnych czasów i różnych narodowości.

e) Wydania klasyków[1]).

Kto pragnie poznać dokładnie działalność naukową jednego z autorów, powinien zwrócić się do wydania kompletnego jego prac. Dotychczas wydano wszystkie dzieła około 300 matematyków; wydania takie zawierają przeważnie, oprócz prac naukowych, szczegółowe życiorysy i korespondencje. Tytuły znaleźć można w ogólnych bibljografjach matematycznych (patrz niżej, punkt *e*); tutaj podajemy tylko dzieła najznakomitszych uczonych, pragnąc ułatwić poszukiwanie ich w bibljotekach. Zaznaczamy, że czytanie klasyków jest wogóle trudne; przystępniej pisali: Galilei, Kepler, Descartes, Euler i Abel. Wytworna powściągliwość Lagrange'a jest wzorem dla później-

---

[1]) Tytuły wydań klasyków cytuję podług:

F. Müller. Führer durch die mathematische Literatur mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften. Lipsk i Berlin, 1909; str. X + 252. Cena w opr. m. 8.

szych matematyków. GAUSS odznaczał się nadzwyczajną ścisłością.

EUCLIDIS Opera omnia. Ediderunt et latine interpretati sunt J. L. HEIBERG, A. H. MENGE. Lipsk, 1883 i nast. I, Elementa ed. HEIBERG, libb. 1—4; str. X + 333, 1883; II, libb. 5—9; str. XXII + 437. 1884; III, lib. 10; str. VI + 417, 1886; IV, libb. 11—13; str. VI + 423, 1885; V, Elementorum qui feruntur libb. 14—15 et scholia in elementa cum prolegomenis criticis et appendicibus. Str. CXIII + 738, 1896; VI, Data cum commentariis Marini et scholiis antiquis ed. Menge. Str. LXII + 336, 1896; VII, Optica, opticorum recensio Theonis, Catoptrica, cum scholiis antiquis ed. HEIBERG, Str. LV + 362, 1895.

Wszystkich tomów będzie 12. Jako uzupełnienie wyszło: ANARITII. Elementorum Euclidis commentarii, ed. M. CURTZE. Str. XXIX + 390, 1899.

Istnieją też liczne dawniejsze wydania EUKLIDESA, których tu wymienić niepodobna. Por. też Stopień II, str. 87.

ARCHIMEDIS Opera omnia cum commentariis Eutocii. E codice Florentino recensuit, latine vertit notisque illustravit J. L. HEIBERG. 3 voll. Lipsk, 1880—81. I; str. XII + 499; II, str. VIII + 468; III, str. XCII + 525. — Z drugiego, zupełnie zmienionego i uzupełnionego wydania wyszły dotąd I, 1910; str. XI + 455; II, 1913; str. XVIII + 554.

The works of ARCHIMEDES. Edited in modern notation, with introductory chapter, by T. L. HEATH. Cambridge, 1897. Str. CLXXXVI + 326.

ARCHIMEDES VON SYRAKUS Vorhandene Werke. Aus dem griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen begleitet von ERNST NIZZE. Stralsund, 1827.

Oeuvres d'ARCHIMÈDE, traduites littéralement avec un commentaire par F. PEYRARD. Paryż, 2 t. 1807; wyd. 2, 1808.

APOLLONII PERGAEI quae Graece exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. HEIBERG. Lipsk, 2 tomy. I, str. XII + 541, 1890; II, str. LXXXV + 361, 1893.

HERONIS ALEXANDRINI. Opera quae supersunt omnia.

Lipsk, 4 tomy. I, 1. 1899; str. LXXII + 514. — I, 2, 1899, str. 182. — II, 1. 1900; str. XII + 415. — III, 1903; str. XXI + 366.

Wydanie dzieł PTOLEMEUSZA — zob. w Poradniku artykuł: Historja Astronomji.

DIOPHANTI ALEXANDRINI Opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est P. TANNERY. Lipsk, 2 t. I, Diophanti quae exstant omnia continens, 1893, str. IX + 481. II, Continens pseudepigrapha, testimonia veterum, Pachymerae paraphrasin, Planudis commentarium, scholia vetera. 1895, str. XLVII + 298.

Le opere di GALILEO GALILEI. Edizione nazionale sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia. Pubbl. de A. FAVARO. Firenze I—XVIII, 1890—1906.

IOANNIS KEPLERI Astronomi Opera omnia. Edidit CHR. FRISCH. 8 v. Frankfurt i Erlangen. 1858—71.

Uzupełnienie: Ungedruckte wissenschaftliche Korrespondenz zwischen JOHANN KEPLER und HERWART VON HOHENBURG. Hrsg. von C. ANSCHÜTZ. Sitzungsberichte der K. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Praga, 1886, str. 118.

BLAISE PASCAL. Oeuvres mathématiques et philosophiques, publ. par BOSSUT. 5 t. Haga i Paryż, 1779; wyd. 2. przez LEFÉVRE'A. 6 t. Paryż, 1819.

Oeuvres de P. DE FERMAT, publiées par les soins de PAUL TANNERY et CHARLES HENRY sous les auspices du ministère de l'instruction publique. Paryż, 3 tomy. I. Oeuvres mathématiques diverses. Observations sur Diophante; str. XXXVII + 440, 1891. II. Correspondance, str. XII + 514, 1894. III. Traductions par P. TANNERY. 1. Des écrits et fragments latins de Fermat. 2. De l'Inventum novum de Jacques de Billy. 3. Du Commercium epistolicum de Wallis; str. XVI + 611, 1896.

Oeuvres de DESCARTES, publiées par CHARLES ADAM et PAUL TANNERY, sous les auspices du Ministére de l'instruction publique. Paryż, I., Correspondance (Avril 1622 — Févr. 1638); str. CV + 589. 1897. II. Correspondance (Mars 1638 — Déc. 1639); str. XXIII + 653, 1898. III. Correspondance (Janv. 1640 — Juin 1643), str. IV + 722, 1899. IV. Correspondance (Juillet 1643 — Avril 1647), str. VI + 708, 1901.

V. Correspondance (Mai 1647 — Févr. 1650), str. 669, 1903. VI. Discours de la méthode et Essais, str. XIV + 727. 1903. VII. Meditationes de prima philosophia, str. XVI + 612, 1904. VIII. Principia philosophiae, 1906. IX. Méditations et principes. Trad. fr., str. X + 244, str. XX + 358. 1904.

Wydanie jeszcze nie ukończone. Dawniejsze, kompletne:

Renati Descartes. Opera omnia. Amstel. 1692—1701. 9 t.

Leibnizens Mathematische Schriften, herausg. von Carl. Imm. Gerhardt. I. Abt. Bd. I—IV, Berlin, 1849 i 1850 (Briefwechsel), III—IV, Halla, 1855—1859 (Briefwechsel). II. Abt. I. Halla, 1858 (Dissertatio de arte combinatoria. De Quadratura arithmetica circuli, ellipseos et hyperbolae. Caracteristica geometrica. Analysis geometrica propria. Calculus situs. Analysis infinitorum. Beilagen). II. Halla, 1860 (Dynamica). III. Halla, 1863 (Initia mathematica. Mathesis universalis. Arithmetica. Algebraica. Geometria. Leibniz an den Freiherrn von Badenhausen).

Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern, hersg. von C. J. Gerhardt. Neue Aufl. I. Berlin, 1898, str. XXVIII + 766.

Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz, hrsg. von C. J. Gerhardt. Halla, 1875—82. 7 t.

Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen und technischen Inhalts. Hrsg. von E. Gerland. Lipsk, 1906, str. 256. (Abh. z. Gesch. d. math. Wiss. Heft XXI).

Isaac Newton, Opera quae exstant omnia, commentariis illustravit Sam. Horsley. 5 t. Londyn. I. (Arithmetica universalis. Tractatus de rationibus primis ultimisque. Analysis per aequationes numero terminorum infinitas. Excerpta quaedam ex epistolis ad series fluxionesque pertinentia. Tractatus de quadratura curvarum. Geometria analytica sive specimina artis analyticae. Methodus differentialis. Enumeratio linearum tertii ordinis), 1779. II. (Philosophiae naturalis principia mathematica. Lib. 1, 2. De motu corporum). 1779. III. (Principia l. 3. De systemate mundi. De mundi systemate. Theoria lunae. Lectiones opticae). 1782. IV. (Opticks. Letters on various subjects in natural philosophy. Letter to Mr. Boyle on the cause of gravitation. Tabulae duae, Calorum altera, altera refractionum. De problematibus Bernoullianis. Propositions for determining the motion of a body urged by two central forces. Four lettres to Dr BENTLEY. Commercium epistolicum de varia re mathematica. Additamenta commercii epistolici ad historiam fluxionum Raphsoni). 1782. V. (Przeważnie pisma teologiczne). 1785.

Brakujące w tym wydaniu listy NEWTONA znaleźć można w: Commercium epistolicum J. COLLINS et aliorum de analysi promota. Par J. B. BIOT et F. LEFORT, Paryż, 1856; str. XV + 293.

Kompletne wydanie dzieł EULERA zaczęło wychodzić od r. 1911 u Teubnera w Lipsku, staraniem szwajcarskiego Towarzystwa przyrodników. Redakcję objęli F. RUDIO, A. KRAZER i P. STÄCKEL. Z dawniejszych wymieniam ważniejsze: [1])

L. EULER. Opuscula varii argumenti. 3. t. Berlin 1746—51.

— Opuscula analytica 2 t. Petersburg. 1783—85 Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII. siècle. Par P. H. FUSS. 2 t. Petersburg, 1843. (Zawiera dużo listów EULERA).

— Opera minora collecta. Commentationes arithmeticae collectae, ed. P. H. et NIC. FUSS. 2 t. Petersburg. 1849.

— Opera posthuma mathematica et physica, anno 1844 detecta. ED. P. H. et NIC. FUSS. 2 t. Petersburg. 1862.

Oeuvres de LAGRANGE, publ. par les soins de J. A. SERRET et G. DARBOUX, sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique. Paryż, 14. t. I. Série. I—VII (Mémoires imprimés dans les Recueils des Académies de Turin, de Berlin et de Paris; Pièces diverses publiées séparément) 1867—77; II. Série. 1879 do 92. VIII—XIV. (Les Ouvrages didactiques, la Correspondance et les Mémoires inédits). VIII. (Résolution des équations numériques) 1879. IX. (Théorie des fonctions analytiques) 1881. X. Leçons sur le calcul des fonctions) 1884. XI. (Mécanique analyti-

---

[1]) Zwracamy jeszcze uwagę na tanie wydanie:

L. EULER. Vollständige Anleitung zur Algebra. Reclams Universalbibliothek Nr. 1802—05. Cena w opr. m. 1.20.

que I. Statique) 1888. XII. (Mécanique analytique II. Dynamique) 1889. XIII. (Correspondance de LAGRANGE avec CONDORCET, LAPLACE, EULER et divers savants) 1892.

NIELS HENRIC ABEL. Oeuvres complètes. Nouv. éd. publ. aux frais de l'État Norvégien par M. M. L. SYLOW et S. LIE. 2 t. Chrystjanja, Lipsk I; str. VIII + 621. II, str. IV + 340. 1881.

CARL FRIEDRICH GAUSS. Werke. Hrsg. von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 10 t. Lipsk, 1870—1908. I. Disquisitiones arithmeticae. 2. Abdruck; str. 478. 1876. II. Höhere Arithmetik. 2. Abdr.; str. 528 und Nachtrag zum 1. Abdr. des 2. Bandes; str. 33. 1876. III. Analysis, 2. Abdr.; str. 499. 1876. IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie, 2. Abdr.; str. 492. 1880. V. Mathematische Physik, 2 Abdr.; str. 642. 1877. VI. Astronomische Abhandlungen, 2 Abdr.; str. 664. 1874. VII. Theoria motus corporum coelestium. Astronomischer Nachlass; str. 650. 1906. VIII. Ergänzungen zu I—IV; str. 458. 1900. IX. Geodätische Nachträge zu Bd. IV; str. 528. 1903. X. Biographisches. Briefwechsel.

A. L. CAUCHY. Oeuvres complètes publ. sous la direction scientifique de l'Académie des sciences, Série I, T. I—VIII, Paris, 1882 i nast.

Od roku 1889 firma W. Engelmann w Lipsku wydaje pod ogólną redakcją W. OSTWALD'A, w tłumaczeniu niemieckim, rozprawy z zakresu nauk ścisłych, mające szczególnie ważne znaczenie historyczne, pod ogólnym tytułem: Klassiker der exakten Wissenschaften. Dotychczas wyszło blizko 200 tomików w cenie od 0.70 do 5.80 marek.

B. Historja matematyki w Polsce.

Treść: 1. Zadanie historji matematyki w Polsce. 2. Przygotowanie wymagane. 3. Rzut oka na szerzenie się wiedzy matematycznej w Polsce. 4. Działalność wybitniejszych matematyków. 5. Wpływ nauki polskiej na rozwój matematyki. 6. Działalność naukowa matematyków poza ich specjalnością. 7. Literatura: *a)* Opracowania poszczególnych działów. Historja metodyki nauczania matematyki. *b)* Monografje i życiorysy. *c)* Dzieła i rozprawy mające znaczenie historyczne. *d)* Opisy maszyn matematycznych, wynalezionych przez Polaków. *e)* Bibljografje. *f)* Bibljoteki.

---

1. Mówiąc o specjalizacji w zakresie historji matematyki, wspominałem o badaniu historji matematyki w poszczególnych krajach, zwłaszcza w Polsce. Temat ten zasługuje na bliższe rozpatrzenie.

Dzieje matematyki w Polsce są odbiciem nauki zachodnio-europejskiej na podłożu ogólnego ruchu umysłowego w Polsce; badanie ich polegać więc będzie na rozpatrywaniu:

a) Działalności naukowej matematyków polskich;

b) Oddziaływania wzajemnego matematyki polskiej i zagranicznej;

c) Oddziaływania wzajemnego pomiędzy ogólnym ruchem umysłowym w Polsce i szerzeniem się oraz rozwijaniem wiedzy matematycznej.

Co się tyczy punktu *a*, to najważniejsze są oczywiście własne odkrycia naukowe matematyków polskich; poza tym wziąć należy pod uwagę szerzenie wiedzy za pomocą wykładów i podręczników (oryginalnych i tłumaczonych), korespondencję naukową z innemi matematykami, stawianie i rozwiązywanie zagadnień, stosowanie matematyki do innych nauk (kalendarz, fizyka, nauki techniczne i t. d.). Wogóle punkt ten stanowi podstawę dla *b* i *c*.

W punkcie *b*, oprócz pytania głównego, jakie odkrycia uczonych polskich stanowią trwały i powszechnie uznany nabytek matematyki, rozpatrujemy przyczynki uczonych polskich do szerzenia się wiedzy matematycznej za granicą za pomocą wykładów i książek; z drugiej strony rozpatrujemy działalność uczonych i instytucji naukowych zagranicznych, mających przeważny wpływ na naukę polską.

Punkt *c* ma charakter najogólniejszy: oprócz czynników już wyłuszczonych uwzględnić tu należy: instytucje oświatowe i naukowe; przenikanie matematyki do innych objawów umysłowości, jak np. (w wiekach średnich) do nauk kościelnych, medycyny i astrologji; popieranie nauk matematycznych, powstrzymywanie ich rozwoju lub zwracanie ich w oznaczonym kierunku przez władze kościelne i państwowe lub przez osoby prywatne (przywileje, fundacje, represje); wpływ walk religijnych i wstrząśnień politycznych i wiele innych.

2. Historja matematyki w Polsce, uważana w tym ostatnim znaczeniu (punkt *c*), przedstawia pewną całość logiczną i staje się, w myśl słów Hankla (A, § 1), odrębną nauką; zasługuje więc nietylko na to, ażeby matematycy i historycy z nią się zapoznali, ale może też być przedmiotem specjalizacji; jednakże nie należy w tym przypadku zadowalać się historją matematyki czystej; trzeba raczej wziąć pod uwagę historję nauk matematycznych wogóle.

Do specjalizacji takiej zachęcić powinna i ta okoliczność, że nie mamy jeszcze systematycznego opracowania tego przedmiotu, a obfity materjał, spoczywający w bibljotekach (zwłaszcza Uniwersytetu Krakowskiego) w drobnej części zaledwie został dotychczas zużytkowany. Materjał ten może być lepiej opracowany przez badaczy polskich, znających dobrze dzieje swego narodu, aniżeli przez uczonych zagranicznych; uczeni obcy, zwłaszcza niemieccy, zasugiestjonowani upadkiem politycznym Polski i wzrastającą potęgą własnego kraju, okazują zbyt wielką skłonność do zaliczania zasług nauki polskiej w poczet swojej własnej (por. § 4).

Co się tyczy koniecznego przygotowania (por. A §§ 5 i 6), wystarczy tu nadmienić, że wykształcenie średnie, poparte gruntowną znajomością matematyki elementarnej, stanowi dostateczną podstawę do czytania wielu prac z zakresu historji matematyki w Polsce; jednakże, ze względu na brak odpowiedniego opracowania, nie wystarcza do otrzymania zupełnego obrazu przedmiotu. Dla specjalisty zaznaczyć należy konieczność znajomości łaciny oraz historji literatury polskiej; znajomość języków nowożytnych (niemieckiego, francuskiego, rosyjskiego i włoskiego) jest potrzebna zwłaszcza dla tych, którzy opracowują czasy nowsze, mianowicie prawie od końca wieku XVIII.

3. Skromne początki nauk matematycznych zaczęły się rozpowszechniać w Polsce wraz z chrześcijaństwem. Przy kościołach i klasztorach zaczęto zakładać szkoły, których głównym przeznaczeniem było przygotowywanie księży z pośród ludności miejscowej. Przedmioty, wykładane w tych szkołach, były to szczątki dziewięciu nauk, uprawianych w szkołach dawnego Rzymu. Dwie z tych nauk, które nie miały zastosowania w kulcie religijnym i służyły tylko do celów praktycznych, mianowicie medycynę i architekturę, zarzucono, zachowując jedynie gramatykę, retorykę, djalektykę (trivium), muzykę, arytmetykę, gieometrję i astronomję (quadrivium). W kulcie chrześcijańskim znalazły zastosowanie te wszystkie siedm nauk; pominąwszy trywjum i muzykę, których zastosowanie jest oczywiste, trzy pozostałe nauki służyły do układania, a przynajmniej zrozumienia kalendarza. Pewne położenia ciał niebieskich uważano za znaki, za pomocą których Bóg oznajmia, kiedy i jaką uroczystość należy obchodzić, kiedy wszyscy mieszkańcy ziemi mają się radować lub umartwiać. Zjawianie się znaków takich na niebie można przewidywać za pomocą mozolnych rachunków. Tak więc początki nauk matematycznych wprowadzono do Polski dla celów kościelnych; jednakże w niektórych szkołach uczono nieco rachunków kupieckich i miernictwa.

Wraz z założeniem uniwersytetu w Krakowie i z nawiązaniem bliższych stosunków z narodami oświeconemi, zwłaszcza z Włochami, rozpoczyna się zainteresowanie matematyką czystą, a także astrologją; osoby prywatne fundują katedry tych nauk, ciż sami profesorowie wykładają je przez cały szereg lat, specjalizując się tym sposobem, dzięki czemu wykłady matematyczne w Krakowie nabierają znacznego rozgłosu; i jakkolwiek nauka była jeszcze ściśle spleciona z różnemi przesądami, a wyrażenie: »ars mathematica« (sztuka matematyczna) było czasami używane w znaczeniu czarnoksięstwa, to jednak byli i tacy profesorowie, którzy się zajmowali wyłącznie matematyką czystą i astronomją teoretyczną, stwarzając atmosferę umysłową, sprzyjającą rozwojowi gienjuszu Kopernika. Następnie, wraz z ogólnym obniżeniem się poziomu naukowego w Uniwersytecie Krakowskim, podczas walk religijnych i okresu reakcji katolickiej, który charakteryzuje przeważny wpływ jezuitów na życie umysłowe kraju, wykłady matematyki podupadają i rzadko kiedy zjawia się wybitniejsza siła nauczycielska, wprowadzająca do swych wykładów zdobycze wiedzy, dokonane na Zachodzie.

W okresie tym matematyka przedostaje się do coraz to szerszych warstw ludności, ale w zakresie bardzo szczupłym. Szkoły straciły już charakter zakładów przygotowujących do stanu duchownego, ale głównym, niemal wyłącznym ich celem jest ciągle jeszcze podtrzymywanie potęgi Kościoła, zagrożonej niesnaskami wewnętrznemi i naporem dysydentów oraz szerzeniem się wolnej myśli; nowozałożony zakon jezuitów zamierzał osiągnąć ten cel przez opanowanie umysłów młodzieży za pośrednictwem szkół; ilość uczącej się młodzieży wzrasta, ale przeważnie otrzymuje bardzo skąpe wiadomości z matematyki, która rzadko tylko była uprawiana w szkołach jezuickich w szerszym zakresie; szkoły dysydenckie miały również przedewszystkim cele religijne na widoku i zaniedbywały nauki ścisłe. Nie lepiej działo się w upadającej Akademji Krakowskiej i w szkołach, pozostających pod jej zwierzchnictwem. Obie instytucje oświatowe — Akademja i Zakon jezuitów — staczały z sobą zawzięte walki nie tyle o naukę lub zasady, ile o przywileje; i jeszcze w przededniu niemal założenia Komisji Edukacyjnej Akademja stara się podnieść swoje znaczenie nie przez prace naukowe, lecz przez kanonizację jednego ze swych profesorów; natomiast odrzuca wszelkie projekty, zmierzające do podniesienia jej poziomu naukowego.

Tymczasem w Europie Zachodniej, zwłaszcza we Francji, wraz z ogromnym postępem nauk ścisłych i pozostającemi z nim w związku dążeniami do wyzwolenia myśli ludzkiej z więzów religijnych, wzrasta w społeczeństwach żądza oświaty, idącej z duchem czasu. Przeciw szkołom jezuickim, nie czyniącym zadość tym wymaganiom, powstają coraz gwałtowniejsze ataki zakończone zwycięstwem: po dwuwiekowym istnieniu zakon Jezuitów został zniesiony, szkoły ich w krajach katolickich [1]) zamknięte. Dla szkolnictwa nastała nowa era. W Polsce Komisja Edukacyjna, pragnąc dostarczyć młodzieży wiadomości, potrzebnych do podniesienia dobrobytu społeczeństwa, a także pragnąc uszlachetnić wychowańców przez naukę, wprowadza do szkół średnich gieometrję Euklidesa, arytmetykę i algiebrę w zakresie zbliżonym do dzisiejszego. Matematyka wyższa zostaje wprowadzona do uniwersytetów i do nowozałożonego korpusu kadetów.

Rozbiór Polski i ogólna reakcja, która później zapanowała w Europie, uniemożliwiły urzeczywistnienie zamierzeń Komisji Edukacyjnej: wraz z państwem rozpadła się organizacja szkół narodowych i przeszła w ręce obce. Szkolnictwo w Europie z kościelnego staje się przeważnie państwowym; łacinę, jako język wykładowy w szkołach średnich i wyższych wypierają języki państwowe; pod wpływem pomyślnych wyników, osiągniętych przez reformatorów wychowania, utrwala się zbyt daleko idący pogląd, że przez odpowiednie wychowanie można ukształtować umysł ludzki stosownie do życzenia; nauczaniu szkolnemu nadaje się przeważnie charakter wychowawczy; za cel wychowania stawia się wyrobienie uległych a pracowitych obywateli państwa i zdolnych a gorliwych urzędników. Nauczaniu matematyki reformatorzy urzędowi szkolnictwa nadają pierwszorzędne znaczenie, przypisując mu własności wdrażania młodzieży do prawidłowego myślenia, do zamiłowania porządku oraz do dokładności w robocie. Matematyka staje się więc ważnym przedmiotem egzaminacyjnym w szkołach średnich ogólnokształcących.

W zaborach pruskim i austryjackim odrębne szkolnictwo polskie zostaje odrazu skasowane i zastąpione ogólnopaństwowym, natomiast w zaborze rosyjskim, w okresie liberalizmu Aleksandra I, szkoły polskie rozwijają się świetnie; uniwersytet wileński, rywalizujące z nim Liceum Krzemienieckie i Akademja jezuicka w Połocku mają wykłady matematyki wyższej, a Wilno odznacza się wybornym zespołem profesorów.

---

[1]) W granicach państwa rosyjskiego istniały nadal, do roku 1820.

Upadek liberalizmu rosyjskiego pociąga za sobą zagładę szkół polskich i ostateczną dezorganizację życia naukowego w Polsce. Wprawdzie językiem wykładowym pozostał nadal język polski, zastąpiony państwowym dopiero po ostatnim powstaniu, ale uciążliwa, formalistyczna, nie wolna od szykan kontrola władz centralnych, częste i radykalne zmiany w programie i ustroju, a także sprowadzenie szkół w całym państwie, od Kamczatki do Kalisza, do jednego poziomu obniżyło stan oświaty w Polsce.

Dobę najnowszą charakteryzuje podniesienie znaczenia matematyki w szkole średniej, nie uważanej już za przedmiot wychowawczy, ale jako przygotowanie do nauk technicznych i do lepszego pojmowania przyrody i życia. Pogląd ten, występujący coraz silniej w Europie Zachodniej, znalazł odbicie w szkołach polskich Galicji i Królestwa, nie doprowadził jednak, jak dotychczas, do lepszych wyników. Przywrócenie polskiego języka wykładowego w szkołach rządowych zaboru austryjackiego, a później w szkołach prywatnych zaboru rosyjskiego, dało podnietę do usiłowań w kierunku poprawy nauczania matematyki, ale nie wyszliśmy jeszcze poza stadjum mniej lub więcej udatnych prób i projektów.

4. [1]) Z działalności naukowej matematyków polskich, ściśle związanej z dziejami szkolnictwa powyżej naszkicowanemi, wymienię tutaj tylko momenty najważniejsze.

Najdawniejszą ze znanych nam prac matematycznych, napisanych przez Polaków, jest O p t y k a WITELONA, pochodząca z końca wieku XIII i zawierająca, zwłaszcza w księdze I, dużo wiadomości z gieometrji.

O najdawniejszych wykładach matematycznych w Akademji Jagiellońskiej informują zachowane w bibljotece uniwersyteckiej dwa rękopisy: A l g o r y t m z roku 1397, zawierający cztery działania i wyciąganie pierwiastków stopnia 2-go i 3-go, akt fundacyjny (1402) matematycznej w uniwersytecie Jagiellońskim katedry, fundowanej przez krakowianina JANA STOBNERA,

---

[1]) Dokładne tytuły prac, wzmiankowanych w tym paragrafie, podane są w »Literaturze«.

kilka rękopisów treści matematycznej z pierwszej ćwierci XV stulecia oraz trzecia księga Euklidesa, odpisana w roku 1444 przez Jana z Olkusza. Marcin Król z Żórawicy około r. 1450 wprowadza trygonometrję, wykładaną na sposób arabski, a więc udoskonalony w porównaniu z wykładem ptolemeuszowskim.

Najwybitniejszym profesorem Akademji w wieku XV był Wojciech z Brudzewa († 1495); prace jego jednak dotyczą przeważnie astronomji.

W wieku XVI drukuje się w Krakowie w języku łacińskim Arytmetyka Jana z Łańcuta (1513) i Algorytm Sacro Bosco (1522); obie te książki służą przez długi czas za podręczniki. Trygonometrja Kopernika wychodzi w Witemberdze w r. 1542. W tym czasie zaczęto już wydawać podręczniki w języku polskim: Algorytm Kłosa (1538), Algorytm Bernarda Wojewódki, Kraków, 1553; drugie wydanie w Krakowie, 1574, a wreszcie trzecie w Wilnie, 1602 i Gieometrję Grzepskiego (1566).

Okres walk wewnętrznych i sporów Akademji z Jezuitami o przywilej nauczania odbija się ujemnie na życiu naukowym Krakowa. Oprócz nowych podręczników, nie przedstawiających znaczniejszego postępu w porównaniu z dawniejszemi, ukazuje się w tym czasie szereg prac jednego tylko profesora matematyki, wyrastającego znacznie ponad miarę przeciętną, mianowicie Jana Brożka (Broscius 1585—1652). Z prac jego najważniejszą dla historji matematyki jest: Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum (1652), w której podaje zupełnie oryginalne badania nad wielokątami gwiaździstemi. Mało jest znanym (niesłusznie) i wspominanym inny znów matematyk (i fizyk) polski, Brożkowi współczesny i z nim zaprzyjaźniony: Dr. Stanisław Pudłowski († 1645), którego prace matematyczne, nigdy nie wydane, a dochowane w jednym z rękopisów Bibljoteki Jagiellońskiej, zdradzają wielkie oczytanie oraz nadzwyczajną pomysłowość.

Inne szkoły wyższe Rzeczypospolitej: Akademja Zamojska, założona w roku 1599, Kijowska i Kolegja jezuickie: we Lwowie, założone przez Jana Kazimierza, w Wilnie, w Połocku założone przez Stefana Batorego i w Poznaniu, jakkolwiek miewały wybitnych nauczycieli matematyki, jednakże żywszej działalności naukowej nie wykazały. Wielkie zdobycze matematyczne wieku XVII przechodzą dla Polski niemal niepostrzeżenie. Natomiast dwaj matematycy polscy, nie wykładający w naszych szkołach, utrwalili swe nazwiska w historji matematyki: Maciej Głoskowski († 1658), który wydał anonimowo książkę p. t.: Geometria peregrinans, zawierającą nowe zagadnienia z miernictwa i Adam Kochański, jezuita, profesor szkół zagranicznych (w Moguncji, Florencji, Pradze i Ołomuńcu), później matematyk nadworny Jana Sobieskiego. Kochański jest autorem znanego powszechnie sposobu przybliżonego wyprostowania okręgu koła.

W wieku XVIII ruch umysłowy, poprzedzający rewolucję francuską, zaczyna oddziaływać i na Polskę: wprawdzie nie za pośrednictwem Akademji Krakowskiej, wówczas całkiem zaabsorbowanej kosztowną sprawą kanonizacji Jana Kantego i wynajdywaniem wybiegów w celu ukrycia jego liberalnej działalności, o której sama najzupełniej zapomniała [1]), — ale powstają w Warszawie nowe szkoły, niezależne ani od Akademji, ani od jezuitów i mające program znacznie rozszerzony. Początek reformy szkolnictwa odnieść można do r. 1740, kiedy Stanisław Konarski, pijar (1700—1773), zakłada w Warszawie Collegium Nobilium; specjalnie dla historji nauczania matematyki ważniejsza jest data założenia korpusu kadetów (1766), do którego wprowadzono wykłady matematyki wyższej. Zainteresowanie się nauką wzrasta i poza szkołami: biskupi Józef i Andrzej bracia Załuscy zakładają w r. 1746 bibljotekę publiczną; książę Józef Aleksander Jabłonowski wyznacza fundusz na nagrody za prace z dziedziny gieometrji, mechaniki, fizyki i historji Polski; król Stanisław August wyznacza stypendja dla młodzieży, kształcącej się zagranicą, powstają pisma popularno-naukowe i t. d.

Ilustracją zainteresowania się społeczeństwa zagadnieniami matematycznemi jest niezwykły fakt rozstrzygnięcia w r. 1780

---

[1]) Jan Kanty (1397—1473), profesor Akademji Jagiellońskiej, dowodził zwierzchnictwa Soboru nad papieżem; kanonizowany w r. 1767.

przez Sąd Marszałkowski w Warszawie sprawy o kwadraturę koła pomiędzy ks. Kocem, profesorem filozofji, a porucznikiem Korsonichem [1]).

Społeczeństwo polskie było więc już przygotowane do reformy szkolnej w szerokim zakresie, której dokonała Komisja Edukacyjna, obejmując zarząd nad szkołami pojezuickiemi. Na użytek szkół z polskim językiem wykładowym ukazuje się szereg podręczników, z początku tłumaczonych, później oryginalnych. Jako pierwszy podręcznik gieometrji analitycznej i rachunku różniczkowego wychodzi w tłumaczeniu J. Jakubowskiego: Nauka matematyki Bézouta (1781), przeznaczona dla szkół wojskowych. Dla szkół średnich, na zamówienie Komisji, pisze matematyk szwajcarski Lhuilier podręczniki arytmetyki (1778), gieometrji (1780) i algiebry (1782). Książki te, wydane w dobrym przekładzie ks. Jędrzeja Gawrońskiego, ustalają polską terminologję matematyczną.

Obok podręczników (z których na wyróżnienie zasługuje: Jana Śniadeckiego Rachunku algiebraicznego teorja, przystosowana do linji krzywych, 1782 — jeden z najlepszych ówczesnych podręczników gieometrji analitycznej wogóle) i rozpraw o nauczaniu matematyki, pomieszczanych w różnych czasopismach (Dziennik Warszawski, Dziennik Wileński, Rocznik Tow. Warsz. Przyj. Nauk i t. d.), ukazują się prace teoretyczne Michała Hubego (1737—1807), Karola Hubego (1766—1845), Jana Śniadeckiego (1756—1830), Kajetana Garbińskiego (1796—1848). Adrjan Krzyżanowski (1788—1852) stara się rozstrzygnąć kwestję pewnika o równoległych [2])

---

[1]) Por. A. Wejnert. Zabytki dawnych urządzeń sądowych, część czwarta, Warszawa, Orgelbrand 1872, a także w Bibljografji Żebrawskiego Nr. 1695—1709.

[2]) Określając kąt jako część płaszczyzny, zawartą między dwiema przecinającemi się prostemi, Krzyżanowski w taki sposób dowodzi, że suma kątów trójkąta równa się dwu kątom prostym: suma kątów wewnętrznych trójkąta i suma kątów wierzchołkowych wypełniają razem całą płaszczyznę; a ponieważ te dwie sumy są sobie równe, przeto każda z nich równa się połowie płaszczyzny, czyli dwu kątom prostym. Dowód ten jest oczywiście nieścisły, ponieważ zasadza się na sumowaniu i porównywaniu wielkości nieskończonych. O pewniku tym p. artykuł: Podstawy gieometrji.

(»O trudnościach, zachodzących w wykładzie zasad gieometrji elementarnej«. Pam. Umiej. szt. i nauk Warszawa, 1825).

Założenie Towarzystwa Przyjaciół Nauk w Warszawie (1800), Towarzystwa Naukowego w Krakowie (1817) i uniwersytetu w Warszawie (1816)[1]) podtrzymuje działalność naukową matematyków polskich. Działalność tę hamuje później powrót rządów reakcyjnych w państwie rosyjskim; ruch piśmienniczy znacznie słabnie. Matematycy polscy, rozproszeni po obcych krajach, wykładają i piszą w językach obcych; jedynie w Paryżu szczupłe grono emigrantów zakłada (1870) »Towarzystwo Nauk ścisłych«, wydające własne czasopismo (»Pamiętnik«) i szereg podręczników. W ostatniej ćwierci wieku XIX wzmaga się ruch piśmienniczy w zaborach rosyjskim i austryjackim: w Warszawie wychodzi od r. 1883 zbiór podręczników pod ogólnym tytułem: »Biblioteka matematyczno-fizyczna«, od r. 1888 czasopismo »Prace matematyczno-fizyczne« i od 1897 »Wiadomości matematyczne«. W Krakowie ważniejsze prace z dziedziny matematyki wydaje Akademja Umiejętności. Rok 1905 zaznaczył się otwarciem w Królestwie szeregu szkół z językiem wykładowym polskim oraz założeniem »Koła matematyczno-fizycznego« w Warszawie.

5. Nie jest rzeczą łatwą zdać sobie sprawę, jaki wpływ wywarła matematyka polska na ogólny stan umysłowy Europy; to jednak jest pewne, że zagranica wpływ ten dzisiaj ocenia zbyt nizko; u nas widoczna jest skłonność do przesady bądź w jednym, bądź w drugim kierunku.

W wiekach średnich uniwersytet krakowski miał duży rozgłos w Europie, głównie ze względu na matematykę, astronomję i astrologję[2]), a pierwszy rektor odnowionej Akademji

---

[1]) Najwybitniejszym profesorem matematyki w Uniwersytecie Warszawskim i w Szkole Głównej był Augustyn Frączkiewicz (1798—1883). Liczne jego prace pomieszczały Roczniki Towarzystwa Naukowego Krakowskiego i Pamiętnik (warszawski) umiejętności czystej i stosowanej.

[2]) M. Wiszniewski, Hist. Literatury, tom IV, str. 361 i 362, przytacza dwa następujące świadectwa: »Cracovia praecipua regni civitas in qua artium liberalium scola floret, arte mathematica celebris« (Eneas Silvius

Jagiellońskiej, Stanisław ze Skarbimierza, powiedział w mowie inauguracyjnej: »A jeśli niektóre podksiężycowe krainy udarował (Bóg) obfitością owoców, inne winnicami, inne wielością oliwy, inne płodnością zwierząt domowych, inne roślinami bujnemi, inne kosztownemi kamieńmi, inne potwornemi zwierzęty, inne różnobarwnemi farbami, inne różnemi rodzajami kruszców i wonności, samą tylko Polskę bliżej północnego bieguna przysuniętą nie tyle drogiemi kamieńmi i kruszcem, jak duchowną ozdobą rozmaitych nauk odznaczyć raczył«. Adrjan Krzyżanowski [1]), profesor Uniwersytetu Warszawskiego, nazywa Polaków w. XVI najoświeceńszym narodem w Europie, natomiast zdaniem Józefa Łukaszewicza, [2]) bibljotekarza w bibljotece Raczyńskich w Poznaniu, matematyka nigdy w Polsce nie kwitła, a jedynie astrologja.

Niektórzy niemieccy historycy matematyki przypisują najwybitniejsze objawy nauki polskiej Niemcom, pozostałe zaś lekceważą zupełnie; tak np. M. Cantor nazywa Kopernika Niemcem, a cały Uniwersytet Krakowski zalicza do niemieckich [3]).

Piccolomini, późniejszy papież Pius II). »Przy tym kościele (św. Anny w Krakowie) jest wielka i sławna Akademja, której chlubą są mężowie uczeni i głośnego imienia, w której daje się wiele wyzwolonych nauk: retoryka, poetyka, filozofja, fizyka. Najlepiej tam atoli zakwitła astronomja; w całych Niemczech sławniejszej nauki astronomji niemasz« (Hartmann Schedel, r. 1473).

[1]) Dawna Polska ze stanowiska jej udziału w dziejach postępującej ludzkości, 1843; wyd. 2-e (z życiorysem autora przez H. Skimborowicza), Warszawa, 1857.

[2]) Historja szkół, t. I str. 56.

[3]) »Krakau muss in dieser Aufzählung deutscher Universitäten auch genannt werden. Das »Krokaw« des XV Jahrhunderts ist wenig mit dem heutigen Krakau zu vergleichen. Hatten auch ursprünglich Polen die Stadt gegründet, so waren doch seit dem XII und XIII Jahrhunderte deutsche Ansiedler hingezogen worden, welche mit deutscher Sprache, mit deutschem, d. h. in diesem Falle mit Breslau-Magdeburgischem Rechte eine eigene Gemeinschaft bildeten. In deutschen Händen befand sich der ganze Grosshandel, und nur so ist eine Zugehörigkeit Krakaus zum Hansabunde zu verstehen. Ein Sprosse einer in Krakau angesiedelten deutschen Grosshandelsfamilie hat in der Geschichte der Astronomie eine umwälzende Rolle gespielt« (M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, tom II, wyd. 2-e, str. 252). — Wbrew argumentacji p. Cantora

Przykłady te wystarczą, jak sądzę, ażeby ustrzec czytelnika od zbytniego dowierzania jednostronnym opinjom o matematyce polskiej.

Rozważmy teraz, jakie momenty trzeba brać pod uwagę w powyższym zagadnieniu.

Wpływy umysłowości polskiej były dodatnie i ujemne. Polska, która stała w rzędzie krajów, uprawiających w szerokim zakresie astrologję, a której ruch umysłowy był przez dłuższy przeciąg czasu skrępowany przez reakcję jezuicką, niezawodnie wywierała pewien wpływ wsteczny, ale doniosłość jego ocenić się nie da. Zważywszy jednak, że astrologowie, obok przesądów i bezużytecznych lub szkodliwych praktyk, roznosili nieco wiedzy matematycznej i budzili zamiłowanie do nauki; zaś jezuici, jakkolwiek powstrzymywali swobodny rozwój myśli ludzkiej, ale rozpowszechniali przynajmniej część wiedzy, którą uważali za nieszkodliwą, a między ich nauczycielami i misjonarzami byli nieraz zdolni matematycy, — nie możemy tych dwu czynników uważać za wyłącznie ujemne; mamy tu raczej do czynienia z oddziaływaniem wzajemnym pomiędzy wiedzą a błędami, pomiędzy uciskiem i wyzwoleniem myśli.

Przechodząc do czynników dodatnich, rozróżniamy: *a)* szerzenie wiedzy za pomocą wykładów i podręczników; *b)* wpływ na rozwój wiedzy za pomocą rozpraw, dyskusji i korespon-

---

i pomimo prawa Magdeburskiego i handlu niemieckiego, Uniwersytet Krakowski zasługuje na miano polskiego, o ile go nie nazwiemy międzynarodowym, jakiemi właściwie były wszystkie Uniwersytety średniowiecza (por. K. Morawski, Historja Uniwersytetu Jagiellońskiego, t. II, str. 289); w życiu umysłowym Niemiec odgrywał niezaprzeczoną rolę o tyle, że dużo Niemców przyjeżdżało do Krakowa na studja; jednak liczba profesorów Niemców była nie bardzo znaczna, jak to widać ze »Spisu profesorów Akademji Krakowskiej około połowy XV wieku«, podanego przez M. Wiszniewskiego w t. V. Hist. lit. pols., str. 372. Na liczbę ogólną 92 profesorów mogło być, sądząc z nazwiska lub miejsca urodzenia, Niemców w każdym razie nie więcej niż 25. Czy te wszystkie nazwiska niemieckie należą do Niemców, tego nie mam możności sprawdzić. Z nazwisk pozostałych są dwa włoskie, dwa węgierskie i dwa skandynawskie; przewaga elementu polskiego jest więc ogromna. O pochodzeniu Kopernika p. »Historja Astronomji« w Poradniku.

dencji naukowej; *c)* odkrycia naukowe większej wagi, pozostające w nauce jako trwały nabytek.

a) Do roku mniej więcej 1530 Uniwersytet Krakowski miał licznych uczniów cudzoziemców, zwłaszcza Niemców i Węgrów; później napływ cudzoziemców do wyższych szkół polskich ustaje niemal zupełnie. Natomiast wielu matematyków polskich wykładało w szkołach cudzoziemskich; z dawniejszych najwybitniejszym jest Kochański (wiek XVII); w dobie porozbiorowej najwięcej ich spotykamy w uniwersytetach rosyjskich; z miejscowości pozaeuropejskich, w Lima (Peru) wykładają Władysław Kluger, Władysław Folkierski i Edward Habich (1835 do 1909). Z dzieł dawniejszych, używanych jako podręczniki, były rozpowszechnione poza granicami Polski: Optyka Witelona, Trygonometrja Kopernika i Geometria peregrinans Głoskowskiego.

b) Począwszy od Kochańskiego, który umieszczał swe prace w »Acta Eruditorum«, nieraz matematycy polscy zasilają pisma obce rozprawami naukowemi, ale ilość ich, z wyjątkiem rosyjskich, jest nieznaczna. Celem obeznania świata zagranicznego z przedmiotami badań i wydawnictwami swemi Akademja Umiejętności w Krakowie wydaje od roku 1889 w języku francuskim »Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie«.

c) Donioślejszych odkryć, któreby pozostawiły trwały i wyraźny ślad w teorjach matematyki spółczesnej, nauka polska nie wydała. Zwykle spotykamy się w podręcznikach tylko z dwoma nazwiskami polskiemi: Kochańskiego i Hoene-Wrońskiego (1778—1853), którzy pracowali poza granicami kraju. Pierwszy wsławił się swoją metodą wyprostowania okręgu koła, dającą dla π cztery znaki dziesiętne dobre; drugi pozostawił ogromną ilość prac z dziedziny matematyki, filozofji, fizyki i nauk technicznych. Z prac Wrońskiego drobna część zaledwie została dotychczas krytycznie zbadana (por. § 6 oraz monografje S. Dicksteina, podane w literaturze), ale niektóre znalazły już zastosowania w teorji funkcji i w algiebrze.

Reasumując, możemy powiedzieć:

1-o że ważniejsze metody, teorje i zagadnienia matematyczne, rozpatrywane na Zachodzie (choć dochodziły z pewnym opóźnieniem), były znane i uprawiane w Polsce w wieku XV, w pierwszej połowie w. XVI i począwszy od zreformowania szkół przez Komisję Edukacyjną;

2-o że matematycy polscy brali żywy udział w szerzeniu wiedzy matematycznej wśród swoich i obcych;

3-o że wielu matematyków polskich w swych pracach oryginalnych posiłkuje się metodami własnemi, indywidualnemi;

4-o że bezpośredni udział nauki polskiej w formowaniu dzisiejszych pojęć i teorji matematycznych był bardzo nieznaczny.

6. Oprócz działalności w zakresie swojej specjalności, matematycy polscy brali nieraz czynny udział w innych objawach życia umysłowego. Przedewszystkim w czasach dawniejszych każdy niemal matematyk zajmował się matematyką stosowaną i naukami doświadczalnemi; wyraźna specjalizacja występuje dopiero w drugiej połowie wieku XIX.

Aż po ostatnią ćwierć XVIII-go stulecia wszyscy niemal matematycy polscy byli duchownemi, ale nie odznaczyli się ani jako wybitni kaznodzieje, ani jako autorowie dzieł teologicznych. W publicystyce odznaczył się Brożek, który polemizował z jezuitami w sprawach szkolnych. Śniadecki[1]) pisał dzieła filozoficzne, Krzyżanowski historyczne.

Wielkie zagadnienia filozoficzno-przyrodnicze lub społeczne zajmowały zawsze matematyków polskich nie mniej — może więcej jeszcze — niż matematyków zachodnio-europejskich. Do tej kategorji należy znakomite odkrycie Kopernika, o którym tu jednak mówić nie będziemy[2]), wypada nam więc, choć w krótkich słowach, zwrócić uwagę na tę stronę umysłowości polskiej — przeważnie zresztą mało owocną.

Zagadnienia o budowie wszechświata, o przyszłych losach ludzkości i o sposobie wpływania na nie zajmowały w okresie

---

[1]) Prace filozoficzne Śniadeckiego i innych matematyków polskich są scharakteryzowane w książce: H. Struve. Historja logiki jako teorji poznania w Polsce. Warszawa 1911, str. 10+541. W zakończeniu (str. 520—536) autor podaje charakterystykę umysłowości polskiej.

[2]) Patrz »Astronomja« w Poradniku.

przedjezuickim nietylko umysły astrologów, ale odbijają się także w dziełach czysto matematycznych; ażeby zdać sobie z tego sprawę, wystarczy przeczytać ekscentryczną przedmowę Grzepskiego do jego Gieometrji.

W okresie jezuickim przytrafiają się tu i ówdzie, w podręcznikach wydawanych u nas, próby — nieoryginalne zresztą — uzgodnienia nauk ścisłych z Biblją; są to ostatnie wysiłki utrzymania zwierzchnictwa religji nad nauką. Z okresu tego mamy jeszcze do zanotowania niezwykły fakt odosobniony, wyprzedzający o jakie sto lat inne fakty tego rodzaju, a zmierzający do zespolenia ludzi pomiędzy sobą i z przyrodą, mianowicie pomysł Włocha [1]), ale powzięty na ziemi polskiej i z inicjatywy Polaka: pomysł wprowadzenia u wszystkich narodów wspólnej miary długości, której jednostką byłaby długość wahadła sekundowego.

W wieku XIX trzy wielkie zagadnienia, powyżej zaznaczone, które zaprzątały umysły średniowieczne — w zmienionej oczywiście postaci — stały się przedmiotem nauk specjalnych (astronomja i fizyka, meteorologja i statystyka, technika i medycyna). Jako nowe zagadnienie — przynajmniej u nas — występuje natomiast poszukiwanie praw przyrody, których pierwowzorem jest newtonowskie prawo ciążenia powszechnego. Wstrząśnienia polityczne, którym w końcu w. XVIII i na początku XIX podlegała Europa wogóle, a Polska w szczególności, narzucają myślicielom zagadnienia, czy i społeczeństwa ludzkie ulegają podobnym prawom; niektórzy matematycy polscy starają się zużytkować swą wiedzę do rozstrzygnięcia tych zagadnień, do wynalezienia praw najogólniejszych, które rządzą przyrodą i którym społeczeństwa podlegają, lub same sobie narzucić powinny. Najznamienniejszym przedstawicielem tego kierunku jest Wroński, którego prace, zmierzające do zreformowania całokształtu wiedzy ludzkiej, do oparcia religji na podstawach naukowych, do złączenia ludzkości w jedną Unję Powszechną, do racjonalnego zużytkowania sił przyrody, zawierają, obok roz-

[1]) Tito Livio Burattini (w brzmieniu spolszczonym: Tytus Liwjusz Boratyni), inżynier, dzierżawca mennicy krakowskiej, † 1682. Do zajęcia się tym zagadnieniem zachęcił Burattiniego Pudłowski.

działów mglistych i niezrozumiałych, pomysły prawdziwie gienjalne i istotne odkrycia, dotychczas jeszcze nie wszystkie zbadane i wyzyskane [1]).

Z matematyków późniejszych zagadnienia takie podejmował Władysław Gosiewski (1844—1911), który, nawiązując do leibnicowskich monad, starał się za pomocą teorji prawdopodobieństwa ująć w prawa matematyczne istotę bytu, życia, szczęśliwości i t. d.[2]). Prace jego również nie zostały jeszcze krytycznie zbadane.

Pierwsze dziesiątki lat wieku ubiegłego wyróżniają się obfitością rozpraw popularnych o matematyce, o sposobach jej nauczania, o jej wpływie na umysły i t. d. Z prac tych przebija wiara w potęgę matematyki i w możliwość doskonalenia ludzkości przy jej pomocy. Tak np. J. Łęski[3])(1760—1825) zakończył jedno ze swoich przemówień następującemi słowami Laplace'a:

»Zachowujmy starannie, powiększajmy skład tych wzniosłych wiadomości, rozkoszy istot myślących. Wyjednały one wielkie usługi żegludze i gieografji; lecz największym onych dobrodziejstwem jest, że rozproszyły trwogę, sprawioną fenomenami świata i wytępiły błędy, powstające z niewiadomości prawdziwych naszych stosunków z przyrodzeniem; błędy tym szkodliwsze, że porządek społeczeństwa jedynie na tych stosunkach zasadzać się powinien. Prawda, sprawiedliwość, ludzkość oto są jego niezbędne prawa. Daleką niech będzie od nas niebezpieczna ta maksyma, że jest czasem pożytecznie od niej się oddalać i oszukiwać albo ujarzmiać ludzi dla utwierdzenia ich szczęśliwości: fatalne doświadczenia dowiodły po wszystkie czasy, że te święte prawa nigdy nie są bezkarnie zgwałconemi«.

---

[1]) Tow. Nauk ścisłych w Paryżu ogłosiło w r. 1870 konkurs na ocenienie prac matematycznych Wrońskiego. Złożono tylko jedną pracę, którą Towarzystwo uznało za nie zasługującą na nagrodę.

[2]) O zasadzie najprawdopodobniejszego bytu. Prace matematyczno-fizyczne, tom 3, 1892, str. 51—68. — Co to jest życie? Wszechświat, 1893, str. 305—306.

[3]) Józef Franciszek Łęski. Krótki rys życia Michała Hube. Roczn. Warsz. Tow. przyj. nauk, t. XII r. 1818. Słowa przez niego przytoczone, stanowią zakończenie dzieła Laplace'a: »Exposition du système du monde« w wydaniu z r. 1808.

7. Literatura.

a) Opracowania poszczególnych działów znaleźć można w krótkości w Encyklopedji wychowawczej p. n. Algiebra, Arytmetyka, Gieometrja i Matematyka. Obszerniej we wstępach do niektórych podręczników, a mianowicie:

I. Badowski. Gieometrja elementarna. Warszawa, 1894: Gieometrja elementarna w Polsce, str. XLVIII — LVIII (tylko w pierwszym wydaniu).

W. Zajączkowski. Gieometrja analityczna. Warszawa, 1884: Gieometrja analityczna w Polsce, str. XXXII — XXXVIII.

A. Czajewicz. Trygonometrja płaska i kulista. Warszawa, 1891: Krótki rys rozwoju trygonometrji, str. XI — XXX, uwzględnia szczególnie prace matematyków polskich.

O działalności naukowej profesorów szkół wyższych poinformować się można w opracowaniach historji tych szkół; w szczególności:

K. Morawski. Historja Uniwersytetu Jagiellońskiego. Średnie wieki i odrodzenie. Kraków, 1900. Tom II, księga III. Rozdział IV: Do dziejów matematyki i astronomji w Krakowie, str. 293—324.

J. Bieliński. Królewski Uniwersytet Warszawski (1816—1831). Tom II. Warszawa, 1911, str. 111—166.

J. Bieliński. Uniwersytet wileński (1579—1831). Kraków, 1899—1900, 3 tomy.

L. Finkel i S. Starzyński. Historja uniwersytetu lwowskiego. Lwów, 1894, str. XVI + 351 + 442.

O działalności matematyków polskich w Paryżu:

W. Folkierski. Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu; jego początki i rozwój. Prace mat.-fiz., tom VI, 1895, str. 151—176.

Opracowania te nie zawierają rozbiorów krytycznych oddzielnych prac matematycznych; krótkie streszczenie prac, mających większe znaczenie historyczne, pomieszcza M. Cantor w swojej historji (p. str. 501), a mianowicie: Brożek (Bd. II str. 685), Głoskowski (Bd. II, str. 686), Kochański (Bd. III, str. 22). Po informacje dokładniejsze odsyłamy czytelnika do monografji specjalnych lub do prac oryginalnych.

Do historji nauczania matematyki materjały znaleźć można w Encyklopedji wychowawczej (w artykule »Polska« M. Straszewskiego przedstawiona jest historja szkolnictwa), w historjach i sprawozdaniach oddzielnych szkół (p. np. historję wyżej wymienionych uniwersytetów), w Historji Szkół Łukaszewicza, w Dziejach Wychowania Karbowiaka (Petersburg, 1898), w Archiwum do Dziejów Oświaty (wydawnictwo Akad. Umiej. w Krakowie), w czasopismach naukowych, dawnych i teraźniejszych, w wydawanych przez Wierzbowskiego materjałach p. t. Komisya Edukacyi narodowej i jej szkoły w Koronie (1780—1793) i t. p.

b) Monografje i życiorysy.

Witelo:

L. Wituski. O życiu i dziele optycznem Vitellona. Poznań, 1870, str. 80.

Nieco szczegółów biograficznych, streszczenie dzieła i porównanie z poprzednikami.

C. Baeumker. Witelo, ein Philosoph und Naturforscher des XIII Jahrhunderts. Münster, Aschendorfsche Buchhandlung, 1908 (Beiträge zur Geschichte der Philosophie des Mittelalters, Bd. III, Heft 2).

Podane są w tej pracy nowe, a bardzo interesujące i ważne szczegóły, dotyczące życia i działalności naukowej Witelona.

Marcin Król:

Gieometrja Marcina Króla, pierwszy raz z rękopisu z XV wieku wydana przez L. Birkenmajera, Warszawa, 1895; str. IX + 82.

Kopernik:

Ks. I. Polkowski. Żywot Mikołaja Kopernika, wyd. 2, Gniezno, 1873.

L. Birkenmajer. Mikołaj Kopernik. Tom I. Studja i materjały, wyd. nakładem Akademji Umiejętności, Kraków, 1900, str. XIII + 711.

Rozdział IX. Matematyka Kopernika, str. 220—241, oraz uzupełnienie Nr. 4, str. 680—681.

Herbest:

J. Grabowski. Benedykta Herbesta Arithmetica Linearis, Cracoviae, 1577. Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademji Umiejętności, serja III, tom 13, dział A. Kraków, 1913 (str. 401—415).

Brożek:

J. N. Franke. Jan Brożek (J. Broscius) akademik krakowski, 1585—1652. Jego życie i dzieła, ze szczególnem uwzględnieniem prac matematycznych. Wyd. Akad. Um. Z portretem. Kraków, 1884, str. IX + 303.

Głoskowski:

J. N. Franke i A. Jakubowski. Maciej Głoskowski, matematyk polski XVII wieku. Kraków, 1878, str. 34.

Gorczyn:

J. Grabowski. Jana Aleksandra Gorczyna nowy sposób arytmetyki z 1647 roku. Odbitka z »Nowych Torów«. Warszawa, 1914; str. 47. Cena kop. 60.

Burattini:

A. Favaro. Intorno alla vita ed ai lavori di Tito Livio Burattini, fisico Agordino del secolo XVII Studi e ricerche. Wenecja, 1896, 4-o, str. 140, Estratto dalle Memorie del R. Istituto Veneto di scienze Vol. XXV. Nr. 8.

Solski:

A. Krzyżanowski. O życiu uczonem Stanisława Solskiego. Rozprawa napisana i na posiedzeniu publicznem Królewsko-Warszawskiego Uniwersytetu, dnia 31 lipca 1822, czytana przez ... Warszawa, 1822, in 4-o, str. 50.

Kochański:

T. Żebrawski. Wiadomość o Adamie Kochańskim. Kraków, 1862, str. 12 i tablica.

S. Dickstein. Korespondencja Kochańskiego i Leibniza według odpisów Dr. Bodelmanna, wydana przez ... Warszawa, 1902, str. 85. (Odbitka z prac mat.-fiz. tom XII, 1901 i XIII, 1902).

F. Kucharzewski. Statyka Kochańskiego. Odbitka ze Sprawozdania z posiedzeń Tow. Naukowego Warsz., wydz. nauk matematycznych i przyrodniczych. Rok III, zeszyt 7, Warszawa, 1910; str. 18.

Jan Śniadecki:

M. Baliński. Pamiątki o Janie Śniadeckim, jego życiu prywatnem i publicznem i dziełach jego. Wilno, 1865. Tom I, str. 919, II str. 511.

S. Dickstein. O korespondencji Jana Śniadeckiego z Akademją Nauk w Petersburgu. Odbitka z Wiad. Mat. VII. Warszawa, 1903, str. 10.

Wroński:

S. Dickstein. Hoene-Wroński. Jego życie i prace. Kraków, 1896, str. IV + 368, z portretem.

S. Dickstein. Katalog dzieł i rękopisów Hoene-Wrońskiego. Kraków, 1896, str. VIII + 111.

Tegoż autora szereg monografji w Pracach mat.-fiz.

Życiorysów pozostałych matematyków poszukiwać należy w encyklopedjach ogólnych, w opracowaniach historji szkół, w których wykładali, oraz we wspomnieniach pośmiertnych, pomieszczanych w czasopismach naukowych.

c) Dzieła i rozprawy, mające większe znaczenie historyczne:

Vitelionis Thuringopoloni. Opticae libri decem. A. Federico Risnero Basileae, 1572, str. 474 in folio. Jest to trzecie wydanie drukiem tej pracy.

T. Kłos. Algorithmus: To iesth nauka Liczby: Polską rzeczą wydana: przez Xiędza ... Na trzy się części dzieli, pierwsza będzie o osobach liczby, wtora o Regule detri. Trzecia o rozmaitych rachunkach y o społkach kupieczkich. Cracoviae ex Officina Ungleriana, 1538, 8-o kart 31.

Jest to prawdopodobnie pierwsza arytmetyka, wydana w języku polskim.

Tož samo w nowym wydaniu M. Baranieckiego, Kraków, 1889, str. XXIV + 56.

N. Copernicus. De lateribus et angulis triangulorum Vittenbergae, 1542.

Przekład niemiecki:

Die Trigonometrie von Copernicus. Übersetzt von Menzzer. Halberstadt, 1857, 4-o, str. 21, Jahresbericht über die höhere Bürgerschule zu Halberstadt.

S. Grzepski. Geometria, to iest Miernicka Nauka, po polsku krótko napisana z Graeckich i z Łacińskich ksiąg. Teraz nowo wydana roku 1566 w Krakowie.

Odbitka książki Grzepskiego wyszła w Warszawie w r. 1861.

J. Broscius. Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum. Gdańsk, 1652.

S. Solski (1622—1701). Geometra polski, to iest nauka rysowania, podziału, przemieniania y rozmierzania liniy, angułów, figur y brył pełnych. Kraków. Księga I, 1683; II, 1684; III, 1686.

A. Kochański. Observationes cyclometricae ad facilitandam praxin accomodatae. Acta eruditorum. Lipsk, 1685.

Praca ta dotyczy rozwinięcia okręgu koła.

T. L. Burattini. Misura universale. Vilna, 1675. Tož samo, Kraków, 1897. Tož samo w tłumaczeniu polskim, z przedmową L. Birkenmajera, p. t. Miara powszechna. Kraków, 1897, str. V + 32 i 4 tabl.

B. Siruć. Arytmetyka prostacka. Wilno, 1777. Zawiera naukę pisania liczb, dodawania i odejmowania za pomocą trzech tylko znaków: I, $\wedge$, $\times$.

Jan Śniadecki. Rachunku algebraicznego teorya przystosowana do linii krzywych. Kraków, 1783. Tom I, str. 312; tom II, str. 192.

Jan Śniadecki. Trygonometrja kulista. Wilno, 1817. Toż samo po niemiecku: Sphärische Trigonometrie, Lipsk, 1828.

Dzieła Jana Śniadeckiego, wydane przez M. Balińskiego. Warszawa, 1836—39, tomów 7, z życiorysem.

Lhuilier. Arytmetyka dla szkół Narodowych. Warszawa, 1778.

Lhuilier. Gieometrja dla szkół Narodowych Warszawa, 1780.

Lhuilier. Algebra dla szkół Narodowych. 1782. Dołączony krótki zbiór historji matematycznej (kart 8).

Trzy powyższe podręczniki Lhuiliera, napisane z polecenia Komisji Edukacyjnej, tłumaczył ks. Jędrzej Gawroński.

I. Zaborowski. Logarytmy dla szkół Narodowych. Warszawa, 1787. Mantysy sześciocyfrowe.

Elementarz dla szkół parafialnych narodowych. Cz. IV. Nauka rachunków. Kraków, 1785.

F. Sapalski. Geometrya wykreślna z zastosowaniem do perspektywy, cieniów, gnomoniki, kamieniarstwa, ciesiołki i innych konstrukcyy, wypracowana dla użytku Szkoły Woyskowey Applikacyyney. Tom I. Warszawa, 1822; str. 282 i tabl. 35.

Ks. R. Skolimowski. Kurs Rachunku wyższego napisany i wykładany w Szkole Applikacyjnej Wojskowej. Warszawa, 1823. Cz. I, str. 212; cz. II, str. 424+63+6 (litografowane).

L. Buchowski. Początki wyższej Analizy, czyli zasady Rachunku Różniczkowego i Całkowego z zastosowaniem do nayważnieyszych materyy w Matematyce czystey. Poznań, 1822; str. XXIV+230.

M. Hube. De sectionibus conicis. Lipsk, 1755 (autor, wydając tę pracę, miał zaledwie lat 17).

K. Hube ogłasza szereg prac z dziedziny algiebry i gieometrji analitycznej w Rocznikach Tow. naukowego krakowskiego (Tomy IV—XVIII).

K. Garbiński. Wykład syntetyczny własności powierzchni skośnych z ich przystosowaniem do konstrukcyi machin. Warszawa, 1822.

Prace Wrońskiego patrz *b)*, katalog Dicksteina.

Wykazy prac nowszych patrz *e)*.

d) Opisy maszyn matematycznych, wynalezionych przez Polaków.

A. Stern. Rozprawa o machinie arytmetycznej. Rocznik Towarzystwa warszawskiego Przyjaciół nauk XII, 1818.

J. Zaremba. Planimetr, narzędzie geometryczne, wymierzające powierzchnię wszelkich figur prostokreślnych bez wykreślenia i rachunku. Wynalazł... Puławy, 1829, str. VIII + 28 + 2 tabl.

J. J. Baranowski. Taxe machine, 1848. — Application de la Taxe machine, 1894.

T. Kucharzewski. Planimetry polskie i ich wynalazcy. Warszawa, 1902, str. 46 + VIII tablic. Odbitka z Przeglądu Technicznego.

Br. Abdank Abakanowicz. Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications. Ètude sur un nouveau système d'intégrateurs mécaniques. Paryż, Gauthier-Villars, 1886; str. X + 156.

Tegoż autora artykuł p. t. Integratory w dziele zbiorowym »Ognisko«, wydanym na jubileusz Jeża w r. 1882.

Integrator Abakanowicza jest udoskonaleniem integratora wcześniejszej daty, którego pierwotny pomysł należy się Wawrzyńcowi Żmurce († 1889), prof. Uniwersytetu we Lwowie. Zob. tego autora Wykład matematyki na podstawie ilości o dowolnych kierunkach, t. II, Lwów, 1864, str. 606 i nast.

e) Bibljografje.

Najobfitszy wykaz prac matematycznych, niezbędny dla każdego, kto się interesuje tym przedmiotem, jest:

T. Żebrawski. Bibljografja piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki, oraz ich zastosowań. Kraków, 1873, stronic III + 617. Dodatek 1886, str. 155 [1]).

Autor zebrał tu przeszło 3000 rękopisów i druków, poczynając od w. XIII do roku 1830.

Tytuły najważniejszych prac, które wyszły po roku 1870, są pomieszczone w następujących spisach:

Katalog wydawnictw Akademji Umiejętności w Krakowie, Kraków, 1910, str. VIII + 252. Cena rb. 1.

Spis rzeczy zawartych w tomie I—X Prac matematyczno-fizycznych. Prace matematyczno-fizyczne, tom X. Warszawa. 1899—1900.

Spis rzeczy zawartych w tomach XI—XX, tom XX. Warszawa, 1909.

Katalog literatury naukowej polskiej, wydawany przez Komisję bibljograficzną Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akad. Umiej. w Krakowie, wychodzi w zeszytach kwartalnych od r. 1901.

A. Łaparewicz. Bibljografja nauczania przedmiotów matematyczno-fizycznych w zakresie średnim. Sprawozdania z posiedzeń Koła Matematyczno-fizycznego w Warszawie. Rok 1909, III. Warszawa, 1910, str. 95—133 (obejmuje okres czasu od r. 1897 do 1910).

Prace, dotyczące historji matematyki, podaje:

S. Dickstein. Wiadomość bibljograficzna o badaniach historyczno-matematycznych w Polsce, Prace matematyczno-fizyczne tom II. Warszawa, 1890, strona 247—264. Dopełnienia: tom III, 1892, str. 184—186.

Epokę Uniwersytetu Wileńskiego opracował:

J. Bieliński. Stan nauk matematyczno-fizycznych za czasów Wszechnicy Wileńskiej. Szkic bibliograficzny. Prace mat.-fizyczne, tom II. Warszawa, 1890; str. 265—432.

Wielkie usługi oddawać może Bibljografja polska Estreichera, a w sprawach, dotyczących historji nauczania:

---

[1]) Ciąg dalszy przygotowują pp. Dickstein i Łaparewicz.

L. Finkel. Bibljografja historji polskiej. Kraków, Akad Umiej. Część II, 1895, Rozdz. IV: Oświata.

f) Bibljoteki.

Wszystkie większe bibljoteki w Polsce zawierają materjały do badań historyczno-matematycznych; miejsce dominujące zajmuje Bibljoteka Jagiellońska, potym Bibljoteka Kórnicka pod Poznaniem, Ossolineum we Lwowie, bibljoteka publiczna (pouniwersytecka) i bibljoteka im. Wróblewskich w Wilnie, oraz bibljoteka uniwersytecka w Kijowie (zawierająca archiwum liceum Krzemienieckiego). Poza granicami Polski najobficiej dział ten jest reprezentowany w Bibljotece Publicznej w Petersburgu, do której została wcielona w roku 1795 Bibljoteka Załuskich.

Z mniejszych bibljotek prywatnych dużo materjału posiada »Bibljoteka pedagogiczna polska Adama Szymańskiego«. Kraków. Al. Mickiewicza 25.

Większość rękopisów i rzadkich druków Wrońskiego jest własnością Bibljoteki Kórnickiej, ale obecnie są one w dyspozycji Akademji Umiejętności w Krakowie. Znaczna ilość rękopisów Wrońskiego jest też w posiadaniu p. Zenona Przesmyckiego (Mirjama) w Warszawie.

Najważniejsze dawne rękopisy są opisane w katalogach:

W. Wisłocki. Katalog rękopisów Bibljoteki Uniwersytetu Jagiellońskiego. Część I. Wstęp. Rękopisy 1—1875. Kraków, 1877—1881, str. LI + 448. Część II. Rękopisy 1876—4176. Indeks, str. 876 + LXXXI.

J. Czubek. Katalog rękopisów Akademji Umiejętności. Kraków, 1906, str. III + 313.

Co do innych jeszcze szczegółów, dotyczących bibljotek, katalogów, rękopisów, dawnych druków i t. p., zob. artykuł »Historja Astronomji« (w Poradniku)[1]).

---

[1]) Uważam sobie za miły obowiązek podziękować prof. L. Birkenmajerowi za udzielenie mi niektórych cennych wskazówek przy pisaniu artykułu niniejszego.

ZAKOŃCZENIE.

NAPISAŁ

ZYGMUNT JANISZEWSKI.

Treść: 1. Współczesny rozwój matematyki. Rewizja podstaw matematyki. 2. Powstanie nowych gałęzi matematyki. Teorja mnogości. Pojęcie grupy. 3. Metoda aksjomatyczna. 4. Badania funkcji zmiennych rzeczywistych. 5. Przyszłość matematyki. Antynomje teorji mnogości. 6. Znaczenie matematyki.

---

1. Matematyka jest dziś w pełni swego rozwoju. Posuwamy się naprzód z szybkością olbrzymią. Wartość plonu pracy naszego pokolenia ocenić krytycznie będą mogły wprawdzie dopiero pokolenia przyszłe, obfitość jednak tego plonu widzimy już dzisiaj.

Nie mamy tu na myśli zdobyczy matematyki w XIX stuleciu, nie cofamy się o lat 100 lub nawet 50: co do trwałej wartości zdobyczy tego okresu wątpliwości już być nie może. Prawie wszystkie działy matematyki, którymi dziś się zajmujemy, albo w tym czasie powstały, albo uległy gruntownemu przeobrażeniu: wzbogaciły się nowemi, zasadniczemi pojęciami; zostały ugruntowane według wymagań matematycznej ścisłości (Abel, Cauchy), przeciw której grzeszył często wiek XVIII; zagadnienia bądź powstały nowe, bądź w nowy sposób zostały postawione. Jednym słowem, każda piędź matematyki, nasz cały sposób myślenia przesiąknięte są twórczemi pierwiastkami, pochodzącemi z tego okresu. Aby sobie to uprzytomnić, dość wspomnieć nazwiska: Gauss i Cauchy, Galois, Abel, Poncelet, Dirichlet, Riemann, Kummer, Weierstrass, — których część lub całość działalności na ten przypada okres.

Tutaj ograniczamy się do doby świeższej i, mówiąc »dziś«, mamy na myśli tylko ostatnie mniej więcej lat czterdzieści. Do tego okresu już można zaliczyć nową krytyczną rewizję matematyki — tym razem samych jej podstaw, mającą na celu wyrugowanie nietylko błędnych rozumowań, jak w okresie poprzednim, lecz wogóle powoływania się na intuicję, i oparcia całej matematyki na podstawach wyłącznie logicznych i wyłącznie logicznych rozumowaniach. Dzieło to dokonane zostało przez DEDEKINDA, WEIERSTRASSA, CANTORA — w analizie, a w gieometrji zaczęte przez PASCHA i uwieńczone dziełem HILBERTA Grundlagen der Geometrie[1]).

2. W tym ostatnim okresie czasu powstało też wiele nowych teorji matematycznych, że wspomnę tylko równania całkowe (VOLTERRA, FREDHOLM), funkcje automorficzne (KLEIN, POINCARÉ), a nawet całe gałęzie matematyki: teorja grup przekształceń LIEEGO i jedna z najwspanialszych i najoryginalniejszych teorji matematyki, wielkie dzieło gienjuszu JERZEGO CANTORA — teorja mnogości. Ta ostatnia, przyjmowana zrazu niechętnie, nawet wyśmiewana, gdy tylko zdobyła sobie choć częściowe uznanie, wywarła ogromny wpływ na całą matematykę; przedewszystkim zaś na niej oparto podstawy analizy nieskończonostkowej i gieometrji. I to jest jedna z najbardziej charakterystycznych cech matematyki dzisiejszej.

Wpływ ten przyczynił się do nowego rozwoju różnych działów matematyki. Odkąd zaczęto znane teorje *wyrażać* w języku teorji mnogości, dzięki skojarzonym z temi terminami pojęciom, metodom i odkryciom tej teorji, zaczęto też stawiać sobie nowe, płodne pytania. Weźmy przykład: każdy wiedział, że dowolna funkcja analityczna posiada punkty osobliwe, — że więc istnieje *zbiór* punktów osobliwych. Nikomu jednak nie przychodziło na myśl badać ten zbiór, jako taki, sam w sobie; zresztą brakło do tego środków. Myśl ta jednak nasunąć się musiała, gdy użyto tu wyrazu *mnogość*: *mnogość punktów osobliwych*. Wtedy postawiono pytanie: jakie własności musi posiadać taka mnogość (oczywistym jest, że punkty osobliwe nie mogą tworzyć dowolnej mnogości) — a teorja mnogości określiła i zanalizowała różne własności zbiorów — oraz:

[1]) Por. *Arytmetyka*, str. 178 i *Podstawy gieometrji*.

jaki zachodzi związek między własnościami tej mnogości z jednej strony, a innemi własnościami funkcji z drugiej. To samo można powiedzieć i o pojęciu »grupy«[1]), które w tym dopiero okresie zostało wprowadzone i uzyskało wielkie, dominujące znaczenie we wszystkich niemal gałęziach matematyki, stając się jednym z węzłów, który je łączy w jedną całość. Cechuje też ono matematykę współczesną niemniej od pojęcia mnogości.

3. Inną wybitną cechą dzisiejszej matematyki jest t. zw. metoda aksjomatyczna (p. Podstawy gieometrji, str. 411). Doprowadzona przez Hilberta do swego rozkwitu w badaniach nad podstawami gieometrji, zaczęła być potym stosowaną i do innych gałęzi matematyki; dla całego szeregu teorji (np. topologji, teorji grup, teorji mnogości) wyszukujemy układu aksjomatów koniecznych i wystarczających do ugruntowania tych teorji. Dążenie do takiego sposobu ujmowania teorji matematycznych rozwija się coraz bardziej. Pochodzi to z jednej strony z potrzeby ekonomji: wiemy bowiem, że metoda aksjomatyczna pozwala na przeniesienie całych teorji z jednej dziedziny do drugiej, gdy tylko każda z tych dziedzin ma tę samą grupę aksjomatów; zaoszczędza więc pracy dowodzenia twierdzeń tej drugiej teorji. Z drugiej strony metoda ta pozwala wniknąć głębiej w istotę teorji, wyszukując te własności przedmiotów, na których się ta teorja opiera.

Metoda aksjomatyczna używana bywa jeszcze w inny sposób — rzec by można: w odwrotnym kierunku — jako metoda wprowadzania nowych pojęć; przyczynia się więc w sposób bezpośredni do rozwoju matematyki. Mianowicie szuka się wtedy nie dla danych pojęć układu aksjomatów (któreby wystarczyły do zbudowania danej teorji), lecz, przeciwnie, szuka się nowych pojęć, czyniących zadość pewnym warunkom: te warunki traktuje się jako układ postulatów, czyli aksjomatów i przez ten

---

[1]) Ponieważ pojęcie grupy jest trudniejszym, ograniczamy się tylko do wymienienia go. Por. wyżej: Teorja grup przekształceń, a o roli pojęcia grupy: F. Klein. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen, 1872; przedrukowane w Math. Ann., t. 43 (1893) (tak zwany Erlanger Programm).

układ określa się szukane pojęcie. Tak np. wprowadza swoją całkę LEBESGUE [1]).

Metoda aksjomatyczna jest najwyższym osiągniętym punktem na drodze tego rozwoju abstrakcji, który zaznaczyliśmy we Wstępie ogólnym. Abstrahujemy tu bowiem od wszystkich własności indywidualnych badanych przedmiotów, tak, że pozostaje tylko logiczna forma rozumowań, tworzących daną teorję [2]).

4. Kierunek dzisiejszy rozwoju matematyki zdaje się być nacechowanym także większym rozwojem badań funkcji zmiennych rzeczywistych wogóle (do których należy i teorja równań całkowych). Może główną tu przyczyną jest, że w tej dziedzinie można badać ogólniejsze funkcje, gdy tymczasem przy zmiennych urojonych musimy zazwyczaj ograniczać się do funkcji analitycznych [3]). To rozszerzenie zakresu badań na funkcje prawie dowolne — a w gieometrji na figury prawie dowolne (por. Topologja, str. 397, przypisek) — nastąpić mogło dopiero dziś, dzięki teorji mnogości i badaniom nad podstawowemi pojęciami analizy, których wynikiem było wprowadzenie tak subtelnych pojęć, niezbędnych w badaniach o charakterze ogólniejszym, jak całka LE-

---

1) Jest to właściwie metoda, której wprowadzenie, stanowiące epokę w matematyce, wiąże się z nazwiskiem RIEMANNA, — dziś tylko przeistoczona w formę metody aksjomatycznej. Metoda ta polega na określaniu nowych pojęć nie wprost (t. j. za pomocą wzoru lub metody konstrukcji), lecz za pomocą postulatu, aby szukane pojęcie spełniało pewne warunki. (Por. LEBESGUE, Leçons sur l'intégration, str. 99—100, oraz Podstawy gieometrji, str. 413).

Jako przykład metody aksjomatycznej może służyć ładny artykuł: H. STEINHAUS. Der Begriff der Grenze, Math. Ann. t. 71, str. 88—96.

2) Teorje takie, które abstrahują od konkretnego znaczenia swego przedmiotu i tylko zajmują się formą logiczną rozumowania, wnioskowania z jednego faktu o drugim, nazywamy *formalnemi*. W szczególności rachunek nazywamy formalnym, gdy, zapominając, co oznaczają symbole, któremi operujemy, pamiętamy tylko reguły samego rachunku, t. j. aksjomaty. Por. Logistyka, str. 452.

3) Pozostaje to także w związku z wymaganiami fizyki, która nie może ograniczać się do funkcji analitycznych, natomiast w przeważającej liczbie przypadków operuje tylko wielkościami rzeczywistemi.

besgue'a. Skoro zaś te badania ogólniejsze stały się możliwe, zwrócono się do nich, raz dla tego, że ogólność znajdowanych prawd ma wartość sama w sobie, po wtóre — że przy rozwiązywaniu zagadnień, dotyczących funkcji bardzo regularnych i prostych, natrafiamy na zagadnienia pomocnicze, których rozwiązanie jest koniecznym warunkiem rozwiązania pierwszych, a które dotyczą utworów mniej prostych, często bardzo nieregularnych. Ażeby fakt ten nie wydał się nam zbyt dziwnym, przypomnimy, że np. pochodna funkcji ciągłej może być nieciągłą, że funkcja analityczna na linji osobliwej (gdy funkcja jest na niej określona) może być bardzo »kapryśną« (np. być nieciągłą, lub nigdzie nie posiadać pochodnej).

Jako przykład badań w tym kierunku wymienię prace Baire'a o funkcjach nieciągłych.

5. Oto kilka rysów matematyki dzisiejszej; nasuwa się pytanie, czego oczekiwać możemy od jutra? Nie chcemy przepowiadać; jedno można jednak o tej matematyce jutra powiedzieć: musi ona rozwiązać w sposób zadowalający wszystkich niepokojące dziś pytanie: czym są antynomje teorji mnogości. A że kwestja ta stoi na pograniczu matematyki i logiki, więc można się spodziewać bliższego zetknięcia się tych dwuch nauk [1]).

6. Zastosowania matematyki są coraz większe i szersze: granica ich obejmuje już dzisiaj nawet takie np. nauki, jak gieologję, nauki biologiczne i społeczne.

Naogół stosowane są wciąż te same, co i dawniej, działy i metody matematyki, które zdobywają tylko dalej idące zastosowanie głównie za pośrednictwem fizyki. Jednak i tu odkryto

---

[1]) O najważniejszych zagadnieniach z różnych gałęzi matematyki, czekających rozwiązania, traktuje znany odczyt Hilberta: Mathematische Probleme, wypowiedziany na II międzynarodowym kongresie matematyków w Paryżu, w r. 1900, ogłoszony w oryginale, po niemiecku, w Gött. Nach. (1900) i w Archiv. f. Math. u. Phys., serja 3, t. 1 (1901), a w tłumaczeniu francuskim (z małemi uzupełnieniami) w Comptes Rendus du Congrès. Część tych zagadnień została już rozwiązana.

Popularniejszym jest artykuł Poincarégo p. t. L'avenir des mathématiques, stanowiący rozdział II jego książki: Science et Méthode (str. 19—42).

nowe drogi: zastosowano teorję grup do krystalografji i chemji; rachunek prawdopodobieństwa do fizyki (do teorji kinetycznej gazów), biologji i psychologji; stworzono rachunek wektorów, niezbędny do ekonomicznego i przejrzystego opisu całego szeregu zjawisk fizycznych. Z nowopowstałych teorji matematycznych bardzo ważne zastosowania znalazła teorja równań całkowych.

Wobec tego rozwoju swych zastosowań matematyka rozpowszechnia się coraz bardziej, stając się coraz to niezbędniejszym narzędziem dla coraz to szerszych kół. Matematyka jednak nie zadowala ten wzrost jej znaczenia. Chciałby dla niej miejsca godniejszego: pragnąłby, aby matematyka zrozumiana była wreszcie jako cel, jako bezpośrednie, niewyczerpane źródło szczęścia, które jest udziałem niewielu Jej poświęconych. Oby ono choć w części stało się dostępne kołom szerszym, a matematyka stawała się potrzebą duchową coraz bardziej ogólną i coraz bardziej niezbędną!

DZIAŁ INFORMACYJNY.
(ORGANIZACJA PRACY MATEMATYCZNEJ)

OPRACOWAŁ

ZYGMUNT JANISZEWSKI.

---

1. Uniwersytety są dziś najważniejszemi instytucjami naukowemi, a dla zaczynających studja (w dziedzinie matematyki przynajmniej) jedynie ważnemi [1]).

---

[1]) Pisząc o uniwersytetach wogóle, mamy na myśli: 1-o wydział t. zw. filozoficzny, a w szczególności matematykę; 2-o uniwersytety francuskie, niemieckie, austryjackie (polskie, czeski i niemieckie), szwajcarskie (niemieckie i francuskie), belgijskie, wreszcie poniekąd włoskie.

Uniwersytety rosyjskie pod charakterystykę niżej podaną nie podpadają. Są to raczej szkoły, więcej jeszcze ze względu na panującą w nich tradycję i atmosferę wśród profesorów i studentów, niż na istniejące przepisy, ograniczające swobodę nauki; dlatego nawet najlepsze (Moskwa, Petersburg, Odessa), gdzie wśród profesorów znajdujemy czasem znanych matematyków (Liapunow, Stiekłow, Markow), nie mogą być polecane, tymbardziej, że ani plan wykładów, ani same wykłady nie odpowiadają dzisiejszemu stanowi wiedzy.

Pomijamy również uniwersytety angielskie i amerykańskie, które różnią się swym ustrojem bardzo znacznie od poprzednio wymienionych.

Ponieważ chodzi nam o usunięcie pewnych nieporozumień, więc wskażemy najprzód, czym one nie są. Uniwersytety nie są szkołami takiemi, do jakich przywykliśmy; nie zmuszają do nauki, nie kontrolują; nie przepisują jej planu, ani porządku, ani czasu, ani zakresu; nie prowadzą studenta na pasku, nadają mu tylko do pewnego stopnia kierunek (przez ogólne wskazówki, sposób prowadzenia wykładów); nie dają wiedzy zaokrąglonej (nie mówiąc już o całkowitej), nie mają nawet żadnego stałego planu, któryby był wyczerpywany w wykładach i wymagany przy egzaminach; to wszystko zależy od każdorocznej decyzji profesorów, przyczym studentom jest jeszcze pozostawiana swoboda wyboru.

Ci, którzy nie studjowali na uniwersytetach zachodnich, wyobrażają sobie, że tam nimi pokierują i wszystko »wytłumaczą«; w tych oczekiwaniach — na szczęście — zawodzą się. Uniwersytety nadają tylko kierunek i udzielają wskazówek ogólnych, lecz nie krępują, jak to robi szkoła, i zmuszają do samodzielności.

Uniwersytet zachodnio-europejski jest to zespół środków pracy naukowej (bibljoteki, laboratorja, zbiory modeli i t. d.),ześrodkowanie i współdziałanie ludzi pracujących naukowo —

(o angielskich powiemy tylko tyle, że niema tam obecnie żadnego wybitnego matematyka), a także innych nie wymienionych tutaj krajów, nieraz dobre, lecz nie mające dla nas praktycznego znaczenia ze względu na język. Po informacje o nich wszystkich odsyłamy do książek (w pierwszych dwuch podana literatura przedmiotu): Uniwersytety. Nadbitka z V części, zesz. II, wyd. 1 Poradnika dla Samouków. Warszawa, 1905. — Handwörterbuch der Staatswissenschaften. — Minerva, Jahrbuch der gelehrten Welt.

O Anglji informują wydawane przez różne uniwersytety: Calendar of the University, lub The Student's Handbook; por. też t. II Poradnika: Fizyka.

Uniwersytety szwajcarskie i austryjackie — bez względu na język wykładowy — należą do tego samego typu, co i niemieckie. Pewne znaczniejsze różnice przedstawiają uniwersytety francuskie. Tam, gdzie się typy niemiecki i francuski różnią, piszemy najprzód o niemieckim, a potym wskazujemy różnice, zachodzące dla typu francuskiego. Włoskie różnią się głównie od powyższych tym, że w nich jest do pewnego stopnia skrępowana swoboda studentów kierowania swą własną nauką (przepisane wykłady i egzaminy); poza tym zbliżają się do typu niemieckiego.

od wybitnych uczonych aż do zaczynających studja — oddziaływanie, którego najwidoczniejszym środkiem (choć nie najważniejszym) są wykłady i seminarja. Uniwersytet jest to instytucja, ułatwiająca zarówno uczenie się, jak i pracę twórczą każdemu ze swych członków, lecz nie ucząca ich we właściwym znaczeniu [1]).

Kto jest studentem pewnego uniwersytetu lub choćby wolnym słuchaczem (a często i to jest zbyteczne, bo wykłady w wielu uniwersytetach, np. we Francji, we Włoszech, są publiczne) ma prawo (lecz nie obowiązek [2])) słuchać wykładów (bezpłatnie lub za opłatą) i należeć do seminarjów, jakie sam sobie wybierze, oraz ma prawo korzystania z pomocy naukowych, które dla matematyka redukują się do książnic i zbiorów modeli.

2. Jak to już zauważyliśmy we Wstępie do Stopnia III, głównym środkiem do zdobycia wykształcenia matematycznego są książki. Zacznijmy więc od książnic. Książnice można podzielić na *ogólne* i *podręczne specjalne*, t. zw. *seminaryjne*. Przy każdym uniwersytecie jest bibljoteka *uniwersytecka*, należąca do typu pierwszego; w niektórych miastach bywają jeszcze miejskie lub państwowe (np. w Monachjum, Berlinie, Paryżu) i te są zazwyczaj bardzo zasobne. W bibljotekach uniwersyteckich, szczególnie przy uniwersytetach mniejszych, zbiór książek matematycznych bywa bardzo niewielki: szukać ich należy w książnicach seminaryjnych, istniejących przy każdym uniwersytecie, z wyjątkiem francuskich; posiadają one zawsze najważniejsze podręczniki i wystarczają w pierwszych latach studjów. Natomiast w bibljotekach uniwersyteckich można zwykle znaleźć czasopisma, przynajmniej z lat ostatnich. Posiłkować się jeszcze można książnicami stowarzyszeń studenckich: np. w Paryżu: Sale des Réunions des Étudiants de la Faculté

---

[1]) Naturalnie, uniwersytet ma jeszcze swą stronę prawno-państwową: nadaje prawa, egzaminuje, wymaga pewnych kwalifikacji od wstępujących nań i t. d.; p. §§ 14 i 15.

[2]) Na wielu uniwersytetach obowiązkiem jest tylko zapisać się na pewną ilość godzin wykładów (w Austrji 10 g. tygodniowo, w Niemczech 5 g.), wszystko jedno jakich, choćby z innego wydziału. We Francji niema nawet tego obowiązku.

des Sciences w Sorbonie. *Książnice politechniczne* posiadają zazwyczaj bardzo bogaty zbiór książek matematycznych i są również dostępne dla studentów uniwersytetu, zwykle po wypełnieniu pewnych formalności, albo złożeniu kaucji, lub wreszcie uiszczeniu opłaty.

3. Z książnic podręcznych, o ile nam wiadomo, jedna tylko posiada czasopisma matematyczne prawie w komplecie: Czytelnia matematyczna *(Mathematisches Lesezimmer)* przy uniwersytecie w Gietyndze. Każdy członek (opłata wynosi 5 marek semestralnie; członkiem może być i niestudent) otrzymuje klucz i może wchodzić do czytelni dopóki gmach uniwersytetu jest otwarty, t. j. w dnie powszednie od 8 rano do 8 wieczorem. Czytelnia ta pod względem ilości i doboru dzieł matematycznych (posiada także dzieła fizyczne, oraz dzieła dotyczące historji, filozofji, dydaktyki i różnych zastosowań matematyki) może rywalizować z największemi książnicami. Ze względu zaś na czas otwarcia i to, że jest podręczną (książki bierze się z półek samemu, bez wypełniania jakichkolwiek formalności), przewyższa ogromnie wszystkie książnice pod względem dogodności w użytkowaniu. W czytelni tej znajdują się też opracowania wykładów bieżących oraz wielu wykładów z lat poprzednich (Hilberta, Minkowskiego i t. d.).

Wymienimy tu kilka najbogatszych książnic: Berlin: królewska, uniwersytecka, seminaryjna; Monachjum: państwowa, uniwersytecka, politechniczna, »Deutsches Museum«, seminaryjna; Lipsk: uniwersytecka, seminaryjna; Gietynga: uniwersytecka i wspomniana wyżej czytelnia matematyczna; Paryż: Bibliothèque Nationale (za specjalnym pozwoleniem; potrzebne poręczenie wydaje dla Polaków Bibljoteka polska przy ulicy Quai d'Orlean), uniwersytecka w Sorbonie (tylko dla studentów), św. Gienowefy (publiczna); Londyn: British Museum.

4. Przejdźmy do naszych książnic. Bibljoteka Jagiellońska posiada bardzo bogaty zbiór czasopism matematycznych; bogatą jest także książnica seminaryjna. We Lwowie oprócz bibljoteki uniwersyteckiej i seminaryjnej istnieje bogatsza od nich książnica politechniczna. W Warszawie trzeba się posiłkować głównie bibljoteką uniwersytecką (wstęp za oka-

zaniem paszportu wolny dla każdego; za kaucją można pożyczać do domu); znajdują się w niej najważniejsze czasopisma i podręczniki. Książki matematyczne w Warszawie można jeszcze znaleść w następujących książnicach: Towarzystwa Bibljoteki publicznej (ul. Koszykowa 24); Koła matematyczno-fizycznego (Bracka 18); Stowarzyszenia techników (Włodzimierska 5); Muzeum przemysłu i rolnictwa (Krak.-Przed. 66).

5. Książnice nasze nie dorównywają wprawdzie wymienionym wyżej zagranicznym, jednak w pierwszych paru latach nauki wystarczą zupełnie.

Książnice mają wielkie znaczenie dla starszych studentów, szczególniej gdy muszą sięgać po artykuły oryginalne, rozrzucone po różnych czasopismach [1]). Początkujący mogą nawet obejść się bez bibljoteki, nabywając tych kilka potrzebnych im podręczników na własność (często muszą to czynić nawet mając obok bibljotekę, gdyż dobre podręczniki początkowe są zwykle rozchwytane).

Z książnic można korzystać i nie będąc na miejscu, przez pocztę. Specjalnie zwrócimy tu uwagę na t. zw. korespondencje między książnicami, polegające na tym, że bibljoteka miejscowa, jeśli sama nie posiada książki poszukiwanej, wypożycza ją na żądanie czytelnika z innej książnicy tegoż kraju. Takie porozumienie istnieje między wszystkiemi państwowemi książnicami pruskiemi, jak również między austryjackiemi (nie wyłączając Krakowa i Lwowa) oraz między włoskiemi. W specjalnych wypadkach można sprowadzać książki z bibljotek, nie należących do danego związku, np. z książnic zagranicznych względem tej, z której korzysta się bezpośrednio.

W kwestjach bibljograficznych informuje Institut International de Bibliographie w Brukseli (rue du Mu-

---

[1]) Artykuły takie na własność można otrzymać tylko albo zwracając się wprost do autora z prośbą o przysłanie odbitki, o ile je jeszcze posiada, albo drogą antykwarską. Zwracamy tu uwagę na wydawane przez antykwarnie katalogi dzieł matematycznych (artykułów i książek) będących u nich do nabycia; np. katalogi antykwarni: Mayer & Müller w Berlinie, G. Fock w Lipsku, G. Bowes & Bowes w Cambridge i t. p.

sée 1), z filjami w Paryżu, Wiedniu i Zurychu. Instytut podaje np. spisy tytułów z pewnego działu lub do pewnej kwestji, za opłatą 5 centimów od tytułu.

W Berlinie istnieje Auskunftsbureau der deutschen Bibliotheken (adres: Berlin N. W. 7, Königliche Bibliothek), którego zadaniem jest informowanie, czy szukana książka znajduje się w którejkolwiek z bibljotek niemieckich. Należy podać dokładny tytuł szukanej książki i źródło, z którego się czerpie o niej wiadomość, z dołączeniem 10 fenigów za każdą poszukiwaną książkę oraz marek na odpowiedź.

Bliższe wiadomości we wszelkich sprawach, dotyczących korzystania z książnic oraz z zakresu bibljografji (np. jak i gdzie szukać niedokładnie nam znanych tytułów książek i t. p.) można znaleść w broszurze:

H. Füchsel. Wie benutzt man die Universitätsbibliothek? Lipsk, 1913; str. 46. Cena m. 0.50.

6. Wykłady uniwersyteckie [1]) można podzielić na dwa rodzaje: kursowe *(Kursus-Vorlesungen)* i specjalne *(Spezial-Vorlesungen)*. Pierwsze obejmują przedmioty, które według poglądu panującego w danym uniwersytecie każdy matematyk powinien znać; powtarzają się one perjodycznie, co rok lub co dwa. Drugie nie są określone żadnym programem; zależą od zainteresowań osobistych wykładającego.

Program [2]), opracowany przez profesorów w Gietyndze, wymienia następujące przedmioty jako kursowe:

Rachunek różniczkowy i całkowy. — Gieometrja analityczna. — (Te dwa wykłady, tworzące t. zw. »Anfangsvorlesungen«, powtarzają się co roku, lecz wykłada je co roku kto inny; trwają przez dwa semestry, zaczynając się w półroczu letnim). — Algiebra i teorja

---

[1]) Mamy tu głównie na myśli typ niemiecki uniwersytetu; o Paryżu p. niżej § 7.

[2]) Ratschläge und Erläuterungen für die Studierenden der Mathematik und Physik an der Universität Göttingen. Lipsk, Teubner. Por. też:

Ratschläge für die Kandidaten des höheren Lehramtes in Mathematik und Physik an der Universität Jena.

liczb. — Gieometrja rzutowa. — Gieometrja różniczkowa. — Teorja funkcji analitycznych. — Równania różniczkowe. — Mechanika teoretyczna. — Potencjał i wogóle równania różniczkowe cząstkowe fizyki. — Matematyka elementarna ze stanowiska wyższego. (Wykłady te są powtarzane co 4 semestry).

Program ten jest ze znanych nam najobszerniejszy. Na wielu mniejszych uniwersytetach część z tych nauk nie jest wykładana; najczęściej są pomijane: algiebra, teorja liczb i gieometrja rzutowa.

O zakresie wykładów specjalnych nic bliższego powiedzieć nie można; na uniwersytetach mniejszych, gdzie jest dwuch, trzech wykładających, tych wykładów specjalnych o poziomie wyższym czasem niema wcale. W wielkich ośrodkach matematyki, jak Gietynga, Berlin, jest ich bardzo wiele i są bardzo różnorodne. Pomimo to i tam nie można liczyć na możność wysłuchania wykładów przynajmniej o wszystkich klasycznych teorjach (choćby tych, którym w Poradniku zostały poświęcone osobne rozdziały). Tak np. topologja, teorja grup Liego, podstawy gieometrji nie są wykładane nawet na najlepszych uniwersytetach [1]).

7. Uwaga o szczupłym zakresie, obejmowanym przez wykłady, dotyczy w większej jeszcze mierze Paryża. Wykłady, odpowiadające »kursowym«, są tylko następujące: 1) Matematyka przygotowawcza do studjowania nauk fizycznych (głównie rach. różn. i całk. i mechanika). — 2) Rachunek różniczkowy i całkowy. — 3) Gieometrja różniczkowa. — 4) Mechanika teoretyczna.

Wobec braku wykładów w zakresie elementarniejszym (gieometrji analitycznej, algiebry, arytmetyki teoretycznej oraz

---

[1]) Spis wykładów na każdy semestr na uniwersytetach niemieckich, austryjackich z językiem wykładowym niemieckim i szwajcarskich podaje: Vorlesungs-Verzeichniss der Universitäten, Technischen Hochschulen und Fach-Hochschulen von Deutschland, Deutsch-Österreich und der Schweiz. Wychodzi w Monachjum co semestr. Cena fen. 60.

rachunków nieskończonostkowych w wykładzie odpowiednim dla początkujących — Francuzi przechodzą te przedmioty przed wstąpieniem do uniwersytetu), naszym maturzystom, zaczynającym studja w Paryżu, pozostaje tylko wykład 1), nieodpowiedni dla matematyków.

Wykład 2), prowadzony przez prof. É. Goursata, jest nieco skróconym powtórzeniem jego znanego podręcznika Cours d'Analyse i obejmuje zakres całej analizy: rachunki nieskończonostkowe, szeregi, szeregi trygonometryczne, funkcje analityczne, równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe.

Wykład 4) prof. P. Appella jest również skróconym powtórzeniem 3-tomowego podręcznika tegoż autora p. t. Mécanique rationnelle.

Wykłady pozostałe, zarówno w Sorbonie (prof. Darboux, Picard, Borel, Lebesgue i inni), jak i w Collège de France[1]). są zupełnie specjalne; treść ich jest co roku inna, lecz prawie zawsze należy do zakresu analizy (w ciaśniejszym znaczeniu) lub gieometrji różniczkowej. Wyjątek stanowi jeden wykład teorji liczb prof. Cahena.

8. Ważniejszemi od wykładów są — o ile są umiejętnie prowadzone — ćwiczenia i seminarja, gdyż nie dadzą się zastąpić czytaniem książek, ani nawet samodzielnym przerabianiem zadań.

Seminarja są dwuch rodzajów; w jednych, zwanych także ćwiczeniami (ważniejszych dla ogółu uczących się), prowadzący seminarjum daje zadania i zagadnienia do rozwiązania; w drugich (seminarja dla starszych) słuchacze uczestniczący w seminarjum sami wygłaszają referaty na tematy bądź obrane przez siebie, bądź wskazane przez prowadzącego seminarjum. Te dwa typy często się zlewają w coś pośredniego. W Paryżu są tylko ćwiczenia, t. j. seminarja pierwszego rodzaju.

Seminarja, szczególniej drugiego typu, przynoszą biorącym

---

[1]) Collège de France jest to instytucja państwowa dla wykładów publicznych (bezpłatnych), gdzie powołują najbardziej zasłużonych uczonych; z matematyków wykładają tam prof. Hadamard i Humbert.

w nich udział czynny jeszcze tę korzyść, że dają możność zetknięcia się z profesorami [1]).

9. Uniwersytety oprócz wykładów dla studentów urządzają jeszcze wykłady matematyki dla nauczycieli gimnazjalnych i szkolnych. Takie kursy wakacyjne dla nauczycieli bywają za granicą urządzane np. przez uniwersytet w Gietyndze, zaś u nas przez uniwersytety we Lwowie i w Krakowie a w Warszawie przez Koło mat.-fiz. [2]).

Dla lepiej przygotowanego nauczyciela naszego może być jednak korzystniej wyjechać za granicę na czas pewien, np. na miesiąc, w czasie funkcjonowania uniwersytetu (mamy na myśli prawie wyłącznie Gietyngę), niż na kurs wakacyjny. Półrocze letnie w Niemczech i Szwajcarji zaczyna się około 1-ego maja i kończy się z początkiem sierpnia. Przyjeżdżając do Gietyngi w czerwcu, gdy w szkołach w Królestwie zaczynają się wakacje, można dużo skorzystać z uniwersytetu, nie zapisując się nań. Gietynga w tym czasie zaludnia się nauczycielami i uczonemi, przybywającemi z różnych stron. Wykładów można słuchać za zezwoleniem wykładającego, dopełniając sobie ich początek z opracowań, leżących w Czytelni matematycznej.

---

[1]) O nauce matematyki na uniwersytetach różnych krajów obszernie i dobrze informują wydawnictwa Międzynarodowej Komisji Nauczania; np.:

R. v. Sterneck. Universitäten. (Berichte ü. d. math. Unterricht in Österreich, zeszyt 7). Wiedeń, 1912.

J. H. Graf. Der math. Unterricht a. d. schweizerischen Universitäten. Gienewa i Bazylea. Cena fr. 2.25.

Enseignement supérieur. (Rapport de la Sous-commision française). Publié sous la direction de M. A. de Saint-Germain (zbiorowe). Paryż; str. 123. Cena fr. 4.

Atti della Sottocommissione italiana (zbiorowe).

(Spis tych wydawnictw znajduje się w Proceedings of the fifth international Congress of Mathematicians, t. II. Cambridge, 1913).

[2]) Bliższych informacji udzieli redakcja Wektora lub zarząd Koła. Zwracamy uwagę samouków w ciaśniejszym znaczeniu na te Kursy Koła, jak również na wykłady systematyczne, urządzane przez Tow. Kursów Naukowych, nie ustępujące czasem odpowiednim wykładom na uniwersytetach zachodnio-europejskich.

Zresztą można dużo skorzystać i nie słuchając wykładów: z czytelni, z seminarjów i z towarzystwa matematyków.

10. Obcowanie z matematykami, rozmowy matematyczne, cała atmosfera naukowa, otaczająca lepsze uniwersytety — to jest najważniejszym dla studjącego, ważniejszym niż wykłady, książnice i seminarja. Początkujący nie mogą jednak liczyć na stosunki bezpośrednie z profesorami i docentami, przynajmniej za granicą. Starsi profesorowie — »sławy«, które przyciągają słuchaczów — są zazwyczaj dostępni tylko dla tych, którzy piszą prace pod ich kierunkiem. Tak jest w Niemczech; w Paryżu zaś nawet dla starszych studentów stosunek osobisty z profesorami prawie zupełnie jest wyłączony. Tylko docenci (których właściwie we Francji niema) zbliżają się do studentów chętniej, głównie jednak do starszych.

Pozostają więc do stosunków matematycznych głównie koledzy — i te stosunki najwięcej dają korzyści. Chodzi tu o atmosferę naukową, aby wszędzie i ciągle: na korytarzu uniwersyteckim i na ulicy, przy obiedzie i na przechadzce, rozmawiać i słyszeć rozmowy o matematyce, widzieć ludzi i przedmioty ją przypominające, czuć, że wkoło wre natężona praca naukowa, rodzą się nowe idee. To pobudza do pracy, wzmaga wytrwałość w studjach, poddaje nowe myśli; nie pozwala zasklepić się w jednym zagadnieniu, zmuszając do zapoznawania się z przemianami, dokonywającemi się w poglądach matematycznych, i z nowemi zdobyczami matematyki. To też wtedy jedynie, gdy się utrzymuje stosunki naukowe, można naprawdę korzystać z pobytu na uniwersytecie. Dlatego ważnym jest zakładanie kółek matematycznych i należenie do nich [1]).

Przy uniwersytetach niemieckich istnieją niemieckie sto-

---

[1]) Mamy tu na myśli takie »kółka«, których celem jest nie bierne wysłuchiwanie referatu kolegi, lecz stawianie i rozwiązywanie zagadnień, podnoszenie i rozjaśnianie trudności. Dla tego, kto wogóle posiada zdolności matematyczne, prowadzenie zebrań w ten sposób nie powinno nastręczać trudności, nawet w pierwszym roku studjów; pożądanym jest, aby tu właśnie nie oglądać się na pomoc starszych. Mniej zdolni będą wciągnięci i jeśli nie będą umieli sami zagadnień stawiać, to zawsze można wymagać, by się s t a r a l i postawione rozwiązywać.

warzyszenia studenckie matematyczne (Mathematische Vereine). Pożytecznemi są one o tyle, że są miejscem nawiązywania stosunków matematycznych; jednak zebrania ich są to zebrania towarzyskie (z zachowaniem tradycji burszowskich), poprzedzane tylko odczytem.

U nas istnieją kółka matematyczne studenckie we Lwowie i w Krakowie, do których należenie bardzo polecamy.

Powtarzamy — atmosfera naukowa jest najcenniejszym z tego, co daje uniwersytet. Taka atmosfera panuje stale w Gietyndze, która jest od wieku (obok Paryża i Berlina) ośrodkiem ruchu matematycznego. Pod tym względem Gietynga jest jedyna.

W większości małych uniwersytetów atmosfery tej niema, i do tych nie warto jechać. W Paryżu zaś studenci nie znajdą atmosfery matematycznej wskutek rozpraszającego życia i braku stosunku z profesorami.

11. Stowarzyszenia matematyczne mają też za główne zadanie utrzymanie atmosfery naukowej. Członkiem ich może zazwyczaj zostać każdy. Najważniejszemi z nich są: Société mathématique de France; Deutscher Mathematiker-Verein; Circolo matematico di Palermo.

W Warszawie mamy Koło matematyczno-fizyczne. (Zebrania odbywają się co miesiąc. Składka roczna rb. 10; członkowie otrzymują bezpłatnie czasopismo Wektor, w którym drukują się sprawozdania Koła).

12. Dopomaganie do nawiązywania stosunków pomiędzy matematykami jest również głównym zadaniem międzynarodowych kongresów matematycznych.

Członkiem ich może być każdy, uiszczając pewną opłatę. Odbywają się co cztery lata. 1-szy był w Zurychu (1896), 2-gi w Paryżu (1900), 3-ci w Heildelbergu (1904), 4-ty w Rzymie (1908), 5-ty w Cambridge (1912), 6-ty ma się odbyć w 1916 r. w Sztokholmie.

Matematycy polscy zbierają się na Zjazdach polskich przyrodników i lekarzy, tworząc oddzielną sekcję. Ostatni (10-ty) zjazd odbył się w 1911 r. w Krakowie; następny ma odbyć się w lecie r. 1915, we Lwowie.

13. Obok uniwersytetów i stowarzyszeń najważniejszemi ośrodkami, organizującemi pracę matematyczną, są czasopisma. Wyjąwszy czasopisma o charakterze bardziej popularnym i poświęcone kwestjom pedagogicznym, są to luźne zbiory mniejszych i większych prac specjalnych z matematyki czystej, zawierających nowe badania z oryginalnemi wynikami; wychodzą zeszytami w mniej lub więcej regularnych odstępach czasu. Z wyjątkiem francuskich, wszystkie większe czasopisma przyjmują artykuły pisane w języku angielskim, francuskim, niemieckim i włoskim. Najważniejszemi czasopismami są (w nawiasie obok tytułu podajemy używane przy cytowaniu skrócenia tytułu):

Acta mathematica (Acta); redaktor Mittag-Leffler. Sztokholm.

Mathematische Annalen (Mat. An.) Klein, Hilbert, v. Dyck, Blumenthal. Lipsk, Teubner.

Journal für reine und angewandte Mathematik (J. f. M. lub Journal Crellego lub Journal Borcharda). Hensel. Berlin.

Journal de Mathématiques pures et appliquées (J. d. M. lub Journal Liouville'a lub Journal Jordana); Jordan. Paryż.

Annales scientifiques de l'École Normale (An. d. l'É. N.); Picard. Paryż.

American Journal of Mathematics (Am. Journ.). Baltimore.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (Rendiconti lub Rend. Cir. Pal.); Guccia. Palermo.

Transactions of the American Mathematical-Society (Am. Trans.).

Bulletin de la Société Mathématique de France (Bull. Soc. Math.); Paryż.

Jahresbericht der Deutscher Mathematiker-Vereinigung. Lipsk.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris (C. R). Paryż.

Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Göttinger Nachr.). Gietynga.

U nas drukują artykuły matematyczne następujące pisma:

Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie. Classe de sciences math. et nat. Série A. Kraków.

Prace matematyczno-fizyczne; Dickstein. Warszawa.

Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Warszawa.

Wiadomości matematyczne; Dickstein. Warszawa.

Wektor; Wojtowicz. Warszawa.

---

14. Po wiadomości o warunkach przyjęcia do uniwersytetów i o egzaminach odsyłamy do sekretarjatów uniwersyteckich lub do stowarzyszeń studenckich polskich [1]). Tu wspominamy tylko zasady ogólne przyjmowania na uniwersytet, z prawem zdawania egzaminów doktorskich i innych (przy mniejszych kwalifikacjach można często być jeszcze przyjętym bez prawa zdawania egzaminów).

W Austrji (wraz z Galicją) i w Niemczech wymagana jest matura gimnazjalna (z 8-u klas) lub z gimnazjum realnego. W Niemczech nadto wymagają, aby ta matura była państwowa; w Austrji przyjmują maturzystów wielu szkół polskich. W Niemczech są ograniczenia dla obywateli państwa rosyjskiego.

W Szwajcarji przyjmują maturzystów szkół polskich, nie wyłączając szkół realnych. Nie posiadający matury mogą zdawać egzaminy wstępne.

We Francji określonych reguł niema: nie posiadający matury francuskiej (Baccalauréat) muszą wnieść (o ile możności na parę miesięcy przed rozpoczęciem roku szkolnego) podanie do ministra o zwolnienie od niej. Zazwyczaj wystarczają te same kwalifikacje, co i w Szwajcarji.

---

[1]) Adresy stowarzyszeń studenckich polskich drukują dzienniki; można je znaleść także w warszawskim kalendarzu, wyd. na rzecz Pogotowia ratunkowego (rozdział: uczelnie zagraniczne), gdzie są podane też warunki przyjęcia na uniwersytety oraz pewne wiadomości praktyczne (np. koszty utrzymania).

W Paryżu o warunkach przyjęcia i egzaminach do wszystkich uczelni francuskich informuje:

Bureau de renseignement scientifique w Sorbonie. (Można zwracać się także w języku niemieckim lub angielskim).

15. Dyplomy są wszędzie dwu rodzajów: nauczycielski i doktorski. Są one wzajemnie niezależne. Prócz tego w Szwajcarji, Francji i Belgji istnieje jeszcze stopień niższy: licencjat.

Licencjat w Paryżu różni się od innych zarówno swym znaczeniem (bywa bardziej ceniony od doktoratów wielu uniwersytetów innych państw), jak i rodzajem egzaminów. Właściwie istnieją tylko egzaminy na t. zw. »Certificat d'Études supérieures«. Na takie świadectwa można zdawać z rozmaitych przedmiotów, z których matematyka dotyczyć mogą następujące:

Matematyka przygotowawcza do studjów fizycznych (analiza i mechanika), zwana inaczej Mathématique générale. — Rachunek różniczkowy i całkowy (egzamin z wykładu prof. Goursata obejmuje, wbrew nazwie, całość analizy; por. wyżej str. 551). — Analiza wyższa (egzamin z treści wykładów z semestru letniego prof. É Picarda). — Gieometrja wyższa (egzamin z treści wykładów z semestru zimowego prof. G. Darboux). — Przedmiot ostatnich dwu egzaminów zmienia się co roku wraz z treścią wykładów. — Mechanika teoretyczna. — Mechanika nieba. — Fizyka matematyczna. — Astronomja pogłębiona (approfondie). — Mechanika fizyczna i doświadczalna. — Fizyka ogólna i t. d.

Egzaminy z tych przedmiotów są od siebie zupełnie niezależne i z każdego otrzymuje się oddzielne świadectwo. Posiadający trzy takie świadectwa otrzymują dyplom licencjatu.

Licencjat wolno zdawać po roku studjów na uniwersytecie francuskim [1]).

[1]) Do zdania go w rzeczywistości trzeba liczyć — zależy to bardzo od obranych przedmiotów — od 2 do 5 lat przygotowania (które naturalnie

Licencjaty i egzaminy nauczycielskie na innych uniwersytetach (znacznie łatwiejsze) pomijamy, zaznaczając tylko, że w zakres ich wchodzi fizyka, a często i astronomja, chemja i mineralogja.

Głównym warunkiem otrzymania doktoratu jest złożenie oryginalnej pracy matematycznej, zawierającej nowe rezultaty. Wszędzie, oprócz Austrji, wymagane jest jej wydrukowanie.

Tam, gdzie są licencjaty, egzamin doktorski można składać dopiero po otrzymaniu licencjatu [1]).

Po złożeniu pracy doktorskiej zdaje się (wyjąwszy we Francji) jeszcze egzaminy ustne z matematyki i z przedmiotów innych, jako pobocznych (w Niemczech i Austrji — z dwuch).

Warunkiem koniecznym przypuszczenia do egzaminu doktorskiego jest być pewien określony czas słuchaczem uniwersytetu; z tego jeden rok na uniwersytecie, w którym się doktoryzuje, lub przynajmniej na uniwersytecie tego samego państwa (Austrja). W Austrji czas ten wynosi 4 lata, w Niemczech — 3 lata, we Francji — rok, w Zurychu — rok i t. d.[2]).

Czas rzeczywisty, potrzebny do przygotowania się do doktoratu i napisania pracy doktorskiej (co wogóle nie dla każdego jest dostępne, przynajmniej na lepszych uniwersytetach niemieckich i francuskich, a szczególnie w Paryżu, gdzie praca doktorska musi posiadać większą wartość naukową) jest o wiele dłuższy od przepisanego przez uniwersytet. Minimum — to 4 lata przy zdawaniu doktoratu tam, gdzie to zrobić łatwiej. Prze-

---

można przebyć częściowo na innych uniwersytetach). Zauważymy, że egzaminy te są naogół bardzo trudne i wymagają, prócz znacznej wiedzy, także pewnej dozy zdolności; bardzo częstym jest fakt, że nawet bardzo pracowitych przez kilka lat z kolei spotyka niepowodzenie przy tym samym egzaminie.

[1]) Do doktoratu t. zw. »de l'Université« w Paryżu wystarcza mieć dwa dyplomy »Certificat d'Études supérieures«.

[2]) O egzaminach w Anglji p.: The examination Statutes lub The Students Handbook to the University and Colleges of Oxford (cena szyl. $2\frac{1}{2}$) i podobne dla innych uniwersytetów.

cięciowo trzeba poświęcić na przygotowanie się do doktoratu i otrzymanie go od 6 do 8 lat.

16. Wybierającym się na uniwersytet radzimy:

1-o. Jeżeli kto nie ma możności przebyć w uniwersytecie dłużej, t. j. co najmniej 5 lat, to powinien zacząć uczyć się samodzielnie, korzystając z pomocy, którą może mieć na miejscu, albo lepiej pojechać tylko na jeden semestr (do Gietyngi lub do Galicji) i zdobywszy tam metody pracy, wrócić i uczyć się samemu, by dopiero po dobrym przygotowaniu wyjechać na dłużej.

2-o. O ile możności studjować w Gietyndze, choćby jako wolny słuchacz, co daje takie same prawa korzystania z uniwersytetu (przy przyjmowaniu na wolnych słuchaczy istnieją utrudnienia dla obywateli państwa rosyjskiego).

3-o. Zmieniać uniwersytety. Przez to nabiera się krytyki i szerszego poglądu. — Na początku należy przynajmniej na jednym uniwersytecie przebyć dwa, trzy lata, gdyż dopiero przy dwuletnim co najmniej pobycie można nawiązać i wyzyskać znajomości z matematykami. Natomiast w późniejszych latach, gdy można lepiej wyzyskać krótki pobyt na uniwersytecie (zrozumieć każdy wykład, zapoznawać się z profesorami), można je zmieniać częściej, o ile się nie zacznie pracy pod kierunkiem jakiegoś profesora.

4-o. Z pomiędzy uniwersytetów, w których szczególniej warto przebyć czas jakiś, polecamy szczególniej paryski (Sorbonę). Roczny lub dwuletni pobyt tam dla starszego studenta może być bardzo pożyteczny. Jednak stałe studjowanie w Paryżu stanowczo odradzamy a przedewszystkim odradzamy wyjazd do Paryża początkującym (por. wyżej § 7 o wykładach w Paryżu i § 10).

5-o. Nie mogącym wyjechać do Gietyngi polecamy studjowanie w uniwersytecie lwowskim lub krakowskim. Matematyka w tych uniwersytetach stoi nie gorzej, jeśli nie lepiej, niż na innych uniwersytetach austryjackich i szwajcarskich, a choćby ze względów językowych Polakowi łatwiej z nich korzystać. Jednak polecamy je z tym zastrzeżeniem, że pobyt (choćby przez semestr w roli wolnego słuchacza) w którym z wielkich centrów matematycznych (Gietynga, Berlin lub Paryż) jest prawie konieczny.

6-o. Gdyby kto nie mógł i w Austrji wstąpić na uniwersytet (np. z powodu matury realnej), to pozostaje Szwajcarja, Belgja i Paryż (naturalnie najlepszy wśród uniwersytetów francuskich). Radzimy w takim razie na początek Szwajcarję (np. 2 lata), potym Paryż. Na uniwersytetach szwajcarskich za mało czuje się życia matematycznego. Jedynie w Zurychu jest lepiej, szczególniej ze względu na politechnikę, na której jest specjalny wydział matematyczny oraz bardzo bogata czytelnia. Na ten wydział matematyczny nie radzimy się zapisywać, można zeń jednak korzystać, będąc studentem uniwersytetu. Wykładają tam między innemi Hurwitz i Weyl; na uniwersytecie wykłada obecnie prof. Zermelo. Może być też korzystne w Zurychu pisać pracę doktorską, co w Paryżu jest trudne wobec wyłączonej pomocy profesorów. Z innych uniwersytetów szwajcarskich — gdyby kto chciał mieć język wykładowy francuski — może jeszcze być brana w rachubę Gienewa. Tym jednak, którzy chcą wyjechać do Paryża lub do Szwajcarji ze względu na to, że gdzieindziej nie mogliby być przyjęci na słuchaczów zwyczajnych, radzimy studjować w roli słuchaczy nadzwyczajnych lub wolnych w jednym z uniwersytetów poprzednio wspomnianych, a do Paryża lub Szwajcarji wyjechać tylko na rok lub dwa dla zdania egzaminów [1]).

7-o. Mając już obraną specjalność, udać się na uniwersytet, najlepiej niemiecki lub włoski, w którym znajduje się wybitny uczony, pracujący w tej specjalności. Uniwersytety włoskie są bardzo godne polecenia, szczególniej ze względu na łatwość stosunków z profesorami; włoski zaś język jest dla znającego francuski lub łacinę niezmiernie łatwy, tak że nie może stanowić przeszkody.

Z uniwersytetów włoskich najciekawszemi dla matematyków są:

---

[1]) Przypominamy, że jeden rok pobytu na miejscowym uniwersytecie uprawnia tak w Paryżu, jak i w Zurychu do zdawania doktoratu lub licencjatu. Zaliczenie więc semestrów z innych uniwersytetów jest zbyteczne.

Bolonja (ENRIQUES, PINCHERLE), Rzym (VOLTERRA), Piza (DINI), Padwa (VERONESE, LEVI-CIVITÀ, SEVERI), Turyn (PEANO)[1].

---

[1]) Adresy matematyków można znaleźć w sprawozdaniach z kongresów; podają je także:

Annuario del Circolo Matematico di Palermo.

STROBEL. Adressbuch der lebenden Physiker, Mathematiker und Astronomen; specjalnie zaś niemieckich:

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Lipsk, Teubner.

DOPEŁNIENIA.

Treść: I. Do Wstępu ogólnego i Wstępu do Stopnia III podał Z. JANISZEWSKI.

II. Do Stopnia I, II i III (gieometrja analityczna, syntetyczna i wykreślna) podał S. KWIETNIEWSKI.

III. Do Stopnia III (arytmetyka, teorja liczb, algiebra, teorja mnogości, rachunek różniczkowy i całkowy, równania różniczkowe zwyczajne, równania funkcyjne, różnicowe i całkowe, równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych, podstawy gieometrji, teorja prawdopodobieństwa, dział informacyjny) podali W. SIERPIŃSKI i S. MAZURKIEWICZ.

I.

WSTĘP OGÓLNY.

Do str. 17, odnośnik 2:

Można zaznajomić się z tym kierunkiem z książki:

ZAWADZKI WŁ. Zastosowanie matematyki do ekonomji politycznej. Wilno, 1914. Cena rb. 3.

Do str. 21:

Z literatury o matematyce i popularyzującej matematykę wymienimy:

De la Méthode dans les Sciences. Paryż, Alcan. Wyd. 2-gie, 1910. Artykuł: J. TANNERY: Mathématiques pures; str. 31—72.

Kultur der Gegenwart. Część III, dział I. Lipsk, Teubner, 1914; str. 161. Cena m. 6. Zawiera artykuły: A. VOSS. Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der

Gegenwart. — H. E. TIMERDING. Die Verbreitung mathematisches Wissens und mathematischer Auffassung.

WSTĘP DO STOPNIA III.

Do str. 135:

E. M. HORSBURGH. Modern instruments and methods of calculation. A handbook of the Napier tercentenary exhibition. Londyn, G. Bell and Sons; 1914; str. VII+343. Cena 6 szyl.

Oprócz opisu przyrządów matematycznych, z dobremi ilustracjami, zawiera między innemi życiorys NAPIERA (przez G. A. GIBSONA), artykuł o wyjątkowo zdolnych rachmistrzach (W. G. SMITH).

Do str. 140:

Do literatury encyklopedyczno-informacyjnej należy:

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker Lipsk, 1913, Teubner; str. 463. Cena m. 7. (Wychodzi perjodycznie).

II.

STOPIEŃ I.

Do str. 45:

S. KAMIŃSKI. Arytmetyka dla samouków. Wydana staraniem wieczornych kursów technicznych dla rzemieślników przy szkole mechaniczno-technicznej H. Wawelberga i S. Rotwanda. Warszawa, 1913; str. 142. Cena kop. 50.

Treść: I. Cztery działania. II. Ułamki. III. Procenty. IV. Liczby mianowane. V. Stosunki i proporcje.

Książka ta może zastąpić książeczki BRZEZIŃSKIEGO i RÓŻAŃSKIEGO; dla starszych samouków jest od nich odpowiedniejsza.

Do str. 46-b:

J. MALANOWICZ. Rzuty gieometryczne (gieometrja wykreślna dostosowana do potrzeb przemysłu i rzemiosł). Podręcznik dla szkół technicznych i zawodowych. Warszawa, 1913, str. 110. Cena kop. 75.

STOPIEŃ II.

Do str. 51:

A. H. Whitehead. Wstęp do matematyki. W przekładzie Wł. Wojtowicza. Warszawa, 1914; str. 226. Cena kop. 70.

Do str. 76;

W. Frank. Arytmetyka i algebra dla IV i V klasy. Lwów. Nakł. Tow. nauczycieli szkół wyższych, 1913; str. 251. Cena koron 3.

Treść (w skróceniu): Działania na liczbach algiebraicznych, wielomianach i ułamkach. Stosunki i proporcje. Zmienność funkcji, djagramy. Równania st. 1-go. Potęgi i pierwiastki.

J. Mihułowicz. Podręcznik arytmetyki dla klasy szóstej. Lwów. Nakładem Tow. nauczycieli szkół wyższych, 1913; str. 104. Cena kor. 1.60.

Treść: I. Logarytmowanie. II. Funkcja logarytmowa i wykładnicza. III. Równania stopnia drugiego z jedną niewiadomą. IV. Rozszerzenie zakresu liczb przez równania stopnia drugiego. *A)* Liczby niewymierne. *B)* Liczby urojone. V. Niektóre równania stopni wyższych. VI. Równania stopnia drugiego z dwiema niewiadomemi.

Do str. 80:

H. Vuibert. Les anaglyphes géométriques. Paryż, Vuibert, 1912; str. 32. Cena fr. 1.50.

Zbiór obrazów stereoskopowych w dwu kolorach dopełniających, z odpowiednim objaśnieniem. Patrząc na rysunki przez dwubarwne okulary (dołączane do każdego egzemplarza), widzimy jakgdyby modele druciane figur stereometrycznych w przestrzeni.

K. Giebel. Anfertigung mathematischer Modelle. (»Mathemat. Bibliothek«, wyd. przez W. Lietzmanna i A. Wittiga). Lipsk, Teubner, 1915; str. 22. Cena f. 80.

Książka podaje wskazówki, do których łatwo zastosować się przy pomocy środków domowych.

Do str. 85:

E. v. Huntington. O podstawowych twierdzeniach algiebry. Przełożył Wł. Wojtowicz. Warszawa, 1914. Odbitka z »Wektora«; str. 42. Cena kop. 50.

Treść: I. Wstęp. II. O dodawaniu kątów i o mnożeniu odległości. III. Oderwana teorja tych działań. IV. Przykład gieometryczny algiebry liczb zespolonych. Układ punktów na płaszczyźnie. V. Oderwana teorja algiebry liczb (ilości) zespolonych. Dodatki.

»Głównym moim celem jest możliwie najprostsze przedstawienie wyników niektórych nowożytnych badań nad podstawami logicznemi algiebry. Zresztą materjał ułożyłem w ten sposób, żeby czytelnik, który pragnąłby poznać więcej faktów algiebraicznych, a nie chciał zagłębiać się w rozstrząsanie podstaw logicznych nauki, znalazł w części IV systematyczny wstęp do algiebry liczb zespolonych, który można czytać niezależnie od reszty artykułu« (wyjątek ze wstępu).

J. Hadamard. Sur la méthode en géométrie (Notes extraites des leçons de Géométrie plane). Paryż, Colin; str. 40. Cena fr. 1.50.

Treść: *A.* O metodzie w gieometrji; *a)* twierdzenia do dowodzenia; *b)* miejsca gieometryczne. Zadania konstrukcyjne. *c)* metoda przekształceń. *B.* O postulacie Euklidesa. *C.* O zagadnieniu kół stycznych. *D.* O polu.

Do str. 88:

G. Kowalewski. Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. Wyd. 2-e, Lipsk, Teubner, 1913. (Aus Natur und Geisteswelt, Nr. 197); str. 106. Cena m. 1.25.

Ze względu na ścisłość i jasność wykładu, podręcznik ten nadaje się lepiej od innych do osiągnięcia wiadomości elementarnych z rachunku różniczkowego i całkowego.

S. Zaremba. Wstęp do Analizy. (por. dopełnienie do Arytmetyki, str. 569).

Do str. 93:

M. Hrycak. Kwadratura koła w rozwoju historycznym, z przedmową J. Puzyny. Lwów, 1914; str. 65. Cena hal. 90.

Przystępnie przedstawiona historja zagadnienia.

A. Witting und M. Gebhardt. Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Math. Bibliothek, XV, Lipsk, Teubner, 1913; str. 61. Cena fen. 80.

Wyjątki z ważniejszych dawnych dzieł matematycznych niemieckich i innych, w tłumaczeniu niemieckim. Wyłącznie matematyka elementarna.

Do str. 94:

Wł. Włodarski. Krótka terminologja nauk fizyczno-matematycznych w zakresie szkół średnich. (Słownik ros.-polski). Warszawa, 1915; str. 34. Kop. 20.

Rozdziały: Arytmetyka, gieometrja, trygonometrja, fizyka. Słowniczek ten jest opracowany z zupełną znajomością rzeczy; można więc na nim polegać, ale zakres jego jest bardzo elementarny i nie wyczerpuje nawet kursu szkoły średniej podług nowszych programów.

METODYKA NAUCZANIA.

Do str. 104, odnośnik:

A. Gutzmer. Die Tätigkeit d. deutsch. Ausschusses f. d. math. u. naturwiss. Unterricht i. d. Jahren 1908—1913. Lipsk, Teubner, 1914. Cena m. 11.

Do str. 106:

W. Krzanowski. Przewodnik metodyczny do nauki rachunków zastosowany do nowych podręczników szkolnych. Przemyśl, nakładem autora.

Część II, na klasę II. 1911; str. 85. Cena kor. 1.20 (Liczby do 100; pojęcie ułamków).

Część III, na klasę III. 1912; str. 121. Cena kor. 1.20. (Powtórzenie. Liczby do 1000. Liczby wielorakie. Ułamki zwyczajne. Liczby dziesiętne).

Część IV, na klasę IV. 1913; str. 164. Cena kor. 1.20. (Rozdziały jak w części III, z rozszerzeniem zakresu liczb poza 1000, dodaniem wiadomości z gieometrji i innych).

Bell's Outdoor and indoor experimental arithmetics. Teachers book. Londyn, 1914; str. XII+377. Cena 3 szyl. 6 p.

Umiejętnie ułożony zbiór zadań podług programu Board of Education.

Z prac Komisji międzynarodowej do nauczania matematyki zasługuje na wyróżnienie:

D. KATZ. Psychologie und mathematischer Unterricht. Lipsk, Teubner, 1913; str. 119. Cena m. 3.20.

Treść: Wstęp. Psychologja matematyki i jej nauczania. Psychologja rysunku matematyczno-technicznego i artystycznego. Psychologiczne i pedagogiczne wykształcenie nauczycieli.

Z nowszych zbiorów zadań można polecić:

D. B. MAIR. Exercises in mathematics. Londyn, Macmillan, 1914; str. 469. Cena rb. 2.50.

Strona doświadczalna uwzględniona. Zakres niższy, aniżeli w naszych szkołach średnich.

Do str. 108:

T. P. NUNN. The teaching of mathematics. Cambridge Handbooks for teachers. 1915.

— The teaching of algebra (including trigonometry). Londyn, Longmans & Co. Str. XIV+616.

— Exercises in algebra (incl. trigonometry). Part I. X+356+answers, 357—421. Part II. XI+514+answers, 515—551. Londyn, Longmans & Co. Cena 4 szyl. i 6 sz. 6 p.

Książka BRANFORDA wyszła w przekładzie niemieckim p. t. Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität. Lipsk, Teubner, 1913. Cena m. 6.

Do str. 110:

F. KLEIN. Elementarmathematik vom höheren andpunkte aus. Teil II: Geometrie. Nowe wydanie (drugie), 1914; str. VIII + 547.

H. WEBER u. J. WELLSTEIN. Encyklopädie d. Elementar-Mathematik (in 3 Bdn.) 2 Bd. Elemente d. Geometrie. Bearb. v. H. WEBER, J. WELLSTEIN u. W. JACOBSTHAL. Wyd. 3. Lipsk, Teubner, 1915; str.. XIV+594. Cena m. 12.

Do str. 111:

F. Enriques. Zagadnienia dotyczące gieometrji elementarnej. T. I. Krytyka podstaw. Z drugiego wydania włoskiego przełożyli St. Kwietniewski i Wł. Wojtowicz. Wyd. Kasy im. Mianowskiego. Warszawa, 1914; str. IV+331. Cena rb. 1 kop. 50. (Tom II w druku).

STOPIEŃ III.

GIEOMETRJA ANALITYCZNA.

Do str. 150:

Podręcznik Gantera i Rudia wyszedł w nowym wydaniu: część I (płaszczyzna), wyd. 8-e, 1913; str. VIII + 191; część II (przestrzeń), wyd. 5-e, 1913; str. X + 194.

Do str. 151:

Ukazał się tom III gieometrji analitycznej B. Niewęgłowskiego w wydaniu nowym (1914).

G. Salmon. Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Nach der freien Bearbeitung v. W. Fiedler neu herausg. v. prof. F. Dingeldey. 8 Aufl. I. Tl. Lipsk, Teubner, 1915; str. XXX+452. Cena m. 12.

Do str. 152:

G. Salmon. A treatise on the analytic geometry of three dimensions. Edited by R. A. P. Rogers. 5 edition, vol. II. Londyn, Longmans and Co; 1915; str. VII+334. Cena szyl. 7 p. 6.

GIEOMETRJA SYNTETYCZNA I WYKREŚLNA.

Do str. 169:

J. Steiner. Konstrukcje gieometryczne wykonane za pomocą linji prostej i stałego koła. Przełożył St. Kwietniewski. Wyd. Kasy im. Mianowskiego. Warszawa, 1915; str. VIII+69. Cena kop. 45.

Treść: Przedmowa tłumacza. Uwagi wstępne. I. Niektóre własności figur prostolinjowych i oparte na nich konstrukcje, wykonane wyłącznie za pomocą linjału. — II. O niektórych własnościach koła. — III. Rozwiązanie wszystkich zadań gieometrycznych za pomocą linjału, jeżeli jest dane stałe koło. Dodatek: Zadania mieszane oraz wskazówki dotyczące ich roz wiązania za pomocą linjału i stałego koła. — Do zrozumienia tej książeczki przygotowanie specjalne nie jest konieczne; wystarcza znajomość matematyki elementarnej w zakresie szkoły średniej. Jedynie do rozwiązywania zadań, pomieszczonych w dodatku, potrzebne są wiadomości z gieometrji rzutowej.

Do str 170:

Pomiędzy podręcznikami gieometrji syntetycznej, godnemi polecenia, pomieścić należy:

L. Cremona. Elementi di geometria projettiva. Turyn, 1873. Przekłady: francuski (Dewulf) Paryż, 1875; niemiecki (Trautvetter) Stuttgard, 1882; angielski (Lendesdorf) Oxford, 1894; nowe wydanie 3-cie (Milford) 1914.

Veblen i Young. Projective Geometry, tom I. Londyn, Ginn; str. 342. Cena szyl. 15.

F. Enriques. Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe v. H. Fleischer. Mit e. Einführungswort von F. Klein. Wyd. 2. Lipsk, Teubner, 1915; str. XIV+354. Cena m. 9. — Przygotowuje się przekład polski.

Profesor politechniki lwowskiej K. Bartel wydał kurs litografowany Gieometrji wykreślnej.

III.

ARYTMETYKA.

S. Zaremba. Wstęp do Analizy.

Książka przeznaczona jest dla osób posiadających wykształcenie średnie i ma na celu przygotowanie do studjów wyższych z zakresu matematyki:

T. I. Rozdz. I. Dedukcyjny charakter matematyki i pojęcie dowodu matematycznego. Rozdz. II. Pojęcia pomocnicze; symbolika; zasada indukcji matematycznej. Rozdz. III. Pojęcie wielkości. Rozdz. IV. Podstawy teorji odcinków prostolinjowych. Warszawa, 1914; str. 124. Cena kop. 60.

T. II. Liczby rzeczywiste. Rozdz. I. Mierzenie odcinków współmiernych z jednostką i liczby wymierne. Rozdz. II. Ogólne zasady teorji działań podstawowych. Rozdz. III. Teorja działań podst. przy pewnych szczególnych warunkach. Rozdz. IV. Mierzenie odcinków niewspółmiernych z jednostką; liczby niewymierne; ogólne pojęcie liczby bezwzględnej. Rozdz. V. Liczby względne. Ogólne pojęcie liczby rzeczywistej. (W druku).

T. III. Różne uzupełnienia z zakresu matematyki elementarnej. (W druku).

T. IV. Teorja ciągów, granic i szeregów. (W druku).

W tomach III i IV są liczne ćwiczenia.

Do str. 189:

Dedekind R. Ciągłość a liczby niewymierne; z 4 niezmienion. wyd. przeł. St. Straszewicz, Warszawa, 1914; str. VII+17. Cena kop. 45.

Do str. 190:

Teorji szeregów poświęcony jest podręcznik:

T. J. I'A. Bromwich. An introduction to the theory of infinite series. Londyn, Macmillan, 1908; str. XIV+511. Cena szyl. 15.

Treść: I. Ciągi i granice. II. Szeregi o wyrazach dodatnich. III. Szeregi wogóle. IV. Zbieżność absolutna. V. Szeregi podwójne. VI. Iloczyny nieskończone. VII. Szeregi funkcji. VIII. Szeregi potęgowe. IX. Szeregi trygonometryczne. X. Szeregi i iloczyny o wyrazach zespolonych. XI. Szeregi rozbieżne i asymptotyczne. Dodatek 1. Arytmetyczna teorja liczb niewymiernych i granic. Dodatek 2. Definicje logarytmu i funkcji wykładniczej. Dodatek 3. Kilka twierdzeń o całkach nieskończonych i funkcji Gamma. Przykłady. Indeks całek, iloczynów i szeregów specjalnych. Indeks ogólny.

Książka jasna i przystępna, sposób traktowania ścisły. Jest to najbardziej zupełny podręcznik z tej dziedziny. Podnieść należy jako zaletę specjalną, wielką ilość przykładów i zadań; przerobienie ich wprowadzi czytelnika w różnorodne dziedziny analizy. (Projektuje się przekład polski).

TEORJA LICZB.

Do str. 198:

Wyszło z druku:

W. Sierpiński. Teorja liczb. Warszawa, 1914; str. 10+412. Cena rb. 1 kop. 80.

Do str. 200:

D. N. Lehmer. List of prime numbers from 1 to 10.006.721. Washington, D. C. Carnegie Institution of Washington, 1914; str. XV+133. Cena dol. 5.

Encyclop. des sciences mathém. T. I. (3 vol.) Théorie des nombres. Rédigé dans l'éd. allem. sous la direction de prof. Fr. Meyer. Fasc. 5 (385—480). Lipsk, Teubner, 1915. Cena m. 3.

ALGIEBRA.

Do str. 213:

Istnieje przekład niemiecki algiebry Serreta:

J. A. Serret. Handbuch der höheren Algebra. Deutsche Uebersetzung von G. Wertheim. Wyd. 2., dwa tomy: I, 1878; str. VIII + 528. Cena m. 9. — II, 1879; str. VIII + 574. Cena m. 10.

Do str. 214:

Zwracamy uwagę, że książka Meyera (o teorji niezmienników) jest tylko historyczno-informacyjną; za podręcznik służyć nie może.

Do nauki systematycznej posługiwać się można krótką książką:

L. E. Dickson. Algebraic invariants. N. York, 1914, J. Wiley and sons. (London, Chapman and Hall); str. X+100. Cena szyl. 5 p. 6

lub starszą i obszerniejszą:

F. Faà di Bruno. Einleitung in die Theorie der binären Formen. Mit Unterstützung von N. Noeter. Deutsch bearbeitet von Th. Walter. Lipsk 1881; str. VII + 379. Cena m. 10.80.

TEORJA MNOGOŚCI.

F. Hausdorff. Grundzüge der Mengenlehre. Lipsk. Veit & Comp. 1914; str. VIII + 476. Cena m. 20.

Jest to, jak sam autor uprzedza w przedmowie, podręcznik, w którym wyłożone są podstawy (Hauptsachen) teorji mnogości. Wyższych wiadomości przygotowawczych nie wymaga się od czytelnika; książka może być czytana z pożytkiem przez każdego, mającego pewną wprawę w myśleniu abstrakcyjnym; w szczególności polecić ją można słuchaczom matematyki. Są jednak w książce ustępy, które mogą zainteresować i fachowców teorji mnogości (zwłaszcza ze względów metodycznych i formalnych). Dowody są pełne i szczegółowe, jak zresztą tego wymaga teorja mnogości — nauka, w której niema niczego, coby było zrozumiałym samo przez się, w której prawda często bywa paradoksalną, zaś fałsz miewa często wszelkie pozory prawdy.

F. Hausdorff. Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen. Mathematische Annalen. Bd. 65 (1908), str. 435—505.

J. König. Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre. (Wydanie pośmiertne z portretem autora). Lipsk, Veit & Comp. 1914; str. VIII + 259. Cena m. 8.

Do str. 223:

E. Borel. Leçons sur la théorie des fonctions. Eléments et principes de la théorie des ensembles; applications à la théorie des fonctions. Wyd. 2. Paryż, 1914. Gauthier-Villars. Cena fr. 7.50.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY.

Do str. 247:

G. H. Hardy. Wykłady elementarne z dziedziny analizy. Z 2 wyd. angiel. przełożył Wł. Wojtowicz. Wyd. Kasy im. Mianowskiego. Warszawa, 1916. Cena rb. 3.

Treść: I. O zmiennych rzeczywistych. II. O funkcjach zmiennej rzeczywistej. III. O liczbach zespolonych. IV. O granicach funkcji zmiennej całkowitej dodatniej. V. O granicach funkcji zmiennej ciągłej. O funkcjach ciągłych i nieciągłych. VI. O pochodnych i całkach. VII. Dalsze twierdzenia z rach. różniczkowego i całkowego. VIII. O zbieżności szeregów nieskończonych i całek nieskończonych. IX. Funkcje logarytmiczne i wykładnicze zmiennej rzeczywistej. X. Ogólna teorja funkcji logarytmicznych, wykładniczych i kołowych. Dodatek I. Dowód twierdzenia, że każde równanie posiada pierwiastek. Dodatek II. O granicach podwójnych.

W druku przekład polski:

M. Ed. Brahy. Exercices méthodiques de Calcul Différentiel. Paryż, Gauthier-Villars, 1905, str. 263.

— Exercices méthodiques de Calcul intégral, Paryż, Gauthier-Villars. 1910; str. 302.

Do str. 248:

Opuścił prasę przekład niemiecki tomu I Goursat'a:

E. Goursat. Lehrbuch d. Analysis. I Bd. Nach der 2 Aufl. des französ. Originals übersetzt v. Dr. F. James Schwarz. Mit e. Begleitwort v. prof. dr. G. Kowalewski. Lipsk, Veit, 1914; str. XII+591. Cena m. 12.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE.

Do str. 295:

C. Jordan. Cours d'analyse de l'École politechnique. 3 éd. T. 3. Équations différentielles. Paryż, Gauthier-Villars, 1915; str. 631. Cena fr. 15.

RÓWNANIA FUNKCYJNE, RÓŻNICOWE I CAŁKOWE. — RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE O POCHODNYCH CZĄSTKOWYCH.

Do str. 313 i 344:

E. Goursat. Cours d'analyse mathématique; 2 éd., entièrement refondue. T. 3: Intégrales infiniment voisines. Équations aux dérivées partielles de second ordre. Équations intégrales. Calcul des variations. Paryż, Gauthier-Villars, 1915; str. 674. Cena fr. 20.

PODSTAWY GIEOMETRJI.

Mario Pieri. Gieometrja elementarna oparta na pojęciach »punktu« i »kuli«. Przedstawił włoskiemu Tow. naukow. G. Castelnuovo, aprobował G. Segre. Z oryginału włoskiego przełożył St. Kwietniewski. Wyd. Kasy im. Mianowskiego. Warszawa, 1914. Cena kop. 75.

Do str. 423:

F. Enriques. Zagadnienia dotyczące gieometrji elementarnej. T. I. Krytyka podstaw. Z drugiego wydania włoskiego przełożyli: St. Kwietniewski i Wł. Wojtowicz. Warszawa, 1914; str. IV+331. Cena rb. 1 kop. 50. (Tom II w druku).

TEORJA PRAWDOPODOBIEŃSTWA.

Do str. 440:

E. Czuber. Warscheinlichkeitsrechnung u. ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik u. Lebensversicherung. I Bd. Warscheinlichkeitstheorie, Fehlerausgleichung, Kollektivmasslehre. 3 sorgf. durchges. und erweit. Aufl.; str. XII+462; 1914. Cena m. 14.

DZIAŁ INFORMACYJNY.

Do str. 549 odnośnik 2:

F. Klein. Bericht über d. heutigen Zustand d. mathemat. Unterrichts a/d. Universität Göttingen. (Nadb. z »Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterr.«). 1915, Lipsk, Teubner; str. 181—190. Cena fen. 40.

SKOROWIDZ NAZWISKOWY.

OPRACOWAŁ

STEFAN MAZURKIEWICZ.

Objaśnienie. Skorowidz nazwiskowy jest spisem:

a) Autorów dzieł matematycznych lub pozostających w związku z matematyką, poleconych lub omówionych w Poradniku; — skrócony tytuł dzieła podany jest (rozstawionym drukiem) przy nazwisku autora.

b) Tych uczonych, których poglądy, zagadnienia, metody, twierdzenia i t. p. wspomniane są w tomie niniejszym. Nazwiska, mające znaczenie podrzędne (np. tłomaczy, autorów przedmów, autorów cytowanych przygodnie) — są pominięte.

Liczby oznaczają stronice; przy dziełach cytowanych — liczba podana tłustemi czcionkami oznacza stronicę, na której po raz pierwszy tytuł danego dzieła podano dokładnie. — Tytuły dzieł są skrócone.

Skróty: Enc. — Encyklopedja, Enc. n. mat. — Encyklopedja nauk matematycznych, prz. — przekład, wyd. — wydanie, ang. — angielski, fr. — francuski, niem. — niemiecki, pol. — polski, rozsz. — rozszerzony, Sk. rzecz. — Skorowidz rzeczowy.

SKOROWIDZ RZECZOWY.

OPRACOWAŁ

S. MAZURKIEWICZ.

Objaśnienie. Skorowidz rzeczowy jest spisem:

a) podanych w poszczególnych artykułach t e r m i n ó w matematycznych (t. zn. nazw przedmiotów matematycznych), np. funkcja, zbiór ciągły, szereg Dirichlet'a;

b) omówionych tamże t e o r j i, m e t o d, w z o r ó w, t w i e r d z e ń i z a g a d n i e ń, np. Analityczna gieometrja, Zagadnienie continuum, Zastosowania teorji prawdopodobieństwa;

c) wyrazów, mających wartość praktyczną dla czytelnika; tu należą np. wyrazy: Książnice, Uniwersytety, Adresy matematyków.

Cyfry oznaczają stronice; skrót *T.* (Tablica podziału matematyki) oznacza, że dany dział matematyki wymieniony został w Tablicy (Wstęp ogólny, str. 22). — Skróty St. I, St. II, St. III, l., d., — należą do następujących po nich stronic i znaczą:

St. I, St. II, St. III — że odpowiedni wyraz znajduje się w Stopniu I, II, III matematyki;

l. (literatura) — znaczy, że na odpowiednich stronicach podano literaturę, dotyczącą danego przedmiotu, czy teorji;

d. (definicja) — że na wymienionej stronicy odpowiedni wyraz został zdefinjowany.

PORADNIK DLA SAMOUKÓW

WYKAZ WYDANYCH DRUKÓW W PORZĄDKU CHRONOLOGICZNYM:

SERJA I:

Nr.		
I.	**Matematyka. — Nauki przyrodnicze. — Bibljografja z zakresu zastosowań nauk przyrodniczych.**	Warszawa, **1898**, str. XIV+397. Cena k. 50 (wyczerp.).
II.	**Nauki filologiczne i historyczne**	Warszawa, **1899**, str. XIV+695. Cena k. 80 (wyczerp.).
III.	**Nauki społeczno-prawne i filozoficzne**	Warszawa, **1900**, str. VII+432. Cena k. 80 (wyczerp.).
IV.	**Matematyka. — Nauki przyrodnicze** (wyd. 2-ie). .	Warszawa, **1901**, str. XLII + 728. Cena rb. 1 (wyczerp.).
V.	**N. filozoficzne. — Nauka wychowania. — Oświata.**	Warszawa, **1902**, str. CXIII + 492. (Z ilustr.). Cena rb. 1.20.

SERJA II i III:

VI.	**Świat i Człowiek. I.** Rozwój wszechświata. Rozwój życia organicznego. Rozwój kultury.	Warszawa, **1903**, str. 558 (z ilustr.). Cena rb. 2 (wycz.)
VII.	**Świat i Człowiek II.** Rozwój stosunków społecznych. Rozwój życia psychicznego. Rozwój moralności i sztuki. — Uniwersytety . . .	Warszawa, **1905**, str. 559—1013+VIII+137. (z ilustr.). Cena rb. 2 (wycz.).
VIII.	**Uniwersytety.** (Informacje o uniwersytetach zagranicz. Statystyka studentów-Polaków). Nadbitka z VII tomu wydawnictw Poradnika	Warszawa, **1905**, str. 134. Cena kop. 50 (wyczerp.).
IX.	**Katalog rozumowany Poradnika dla Samouków.** (Wskazówki dla korzystających z Poradnika)	Warszawa, **1906**, str. 15. Cena kop. 5.
X.	**Dzieje Myśli. I.** Rozwój metod. Wiedza ludów pierwotnych. Dzieje astronomji i fizyki. . .	Warszawa, **1907**, str. XXXI+296 (z ilustr.). Cena rb. 1.50
XI.	**Dzieje Myśli. III.** Historja nauki o ziemi. Dzieje nauk biologicznych i antropologji	Warszawa, **1907**, str. 140. (z ilustr.). Cena rb. 2.

XII. **Świat i Człowiek. I.** Wyd. drugie. Pojęcie rozwoju. Rozwój wszechświata. Rozwój ziemi . . . . Warszawa, **1908**, str. XVI+215. (z ilustr.). Cena rb. 1.35.

XIII. **Dzieje Myśli. IV.** Historja psychologji i językoznawstwa . . . . Warszawa, **1909**, str. 300. Cena rb. 1.50.

XIV. **Dzieje Myśli. II.** Historja chemji, mineralogji i matematyki . . . . Warszawa, **1911**, str. 279. (z ilustr.). Cena rb. 1.50.

XV. **Świat i Człowiek. II.** Wyd. drugie. Rozwój życia organicznego. Gienealogja roślin i zwierząt. Pochodzenie i rozwój człowieka Warszawa, **1912**, str. 321. (z ilustr.). Cena rb. 1.60.

XVI. **Świat i Człowiek. III.** Wyd. drugie. Rozwój kultury. Rozwój mowy. Rozwój stosunków gospodarczych . . . . Warszawa, **1912**, str. 356. (z ilustr.). Cena rb. 1.80.

XVII. **Świat i Człowiek. IV.** Wyd. drugie. Rozwój społeczny śród zwierząt i ludzi. Rozwój moralności. Rozwój życia psychicznego. Rozwój w dziejach sztuki. Znaczenie rozwoju świata i człowieka . . - . . . . . . Warszawa, **1913**, str. 355. (z ilustr.). Cena rb. 2.

XVIII. **Poradnik dla Samouków. T. I.** Wydanie nowe, przerobione. O zmianach w wyd. nowym. O Nauce. Matematyka . . . . . . Warszawa, **1915**, str. XXXIX+618. (z 34 figur. i 1 tablicą). Cena rb. 2 kop. 40.

XIX. **Poradnik dla Samouków. T. II.** Wyd. nowe. Fizyka, gieofizyka, meteorologja (druk na ukończeniu) . . . . Warszawa, **1916**.

W DRUKU:

XX i XXI. **Poradnik dla Samouków. T. III i IV.** Wyd. nowe. (Chemja, krystalografja, m neralogja, petrografja, gieologja, paleontologja, gieografja, astronomja) . . . .

W PRZYGOTOWANIU:

XXII i XXIII. **Poradnik dla Samouków. T. V i VI.** Wyd. nowe. (Botanika i zoologja) . . . .