Uniwersytet
Ekonomiczny
w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 235 · 2015

Marcin Anholcer

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej
Katedra Badań Operacyjnych
m.anholcer@ue.poznan.pl

DWUETAPOWE STOCHASTYCZNE ZAGADNIENIE ROZDZIAŁU[1]

Streszczenie: Zagadnienie rozdziału, zwane również uogólnionym zagadnieniem transportowym (*Generalized Transportation Problem*, GTP), pozwala modelować sytuację, w której ilość towaru opuszczającego dostawców nie jest równa ilości docierającej do odbiorców (z sytuacją taką mamy do czynienia np. w sytuacji transportu towarów szybko psujących się lub w przypadku występowania reklamacji w wyniku braków). W pracy przedstawiono model dwuetapowego GTP z losowym popytem o ciągłym rozkładzie. Zaprezentowany został algorytm rozwiązywania omawianego zagadnienia.

Słowa kluczowe: zagadnienie rozdziału, programowanie stochastyczne.

Wprowadzenie

Zagadnienie rozdziału, zwane również uogólnionym zagadnieniem transportowym (*Generalizaed Transportation Problem*, GTP), pojawia się w wielu praktycznych zastosowaniach. Jego ogólniejsza wersja, uogólnione zagadnienie przepływu o minimalnym koszcie, opisana została szerzej w [Ahuja, Magnanti i Orlin, 1993, rozdział 15]. Tam też znaleźć można różne przykłady zastosowań tego zagadnienia. Różne algorytmy rozwiązywania zadań tego typu i bardziej szczegółowe rozważania znaleźć można m.in. w pracach [Glover, Klingman i Napier, 1972; Goldberg, Plotkin i Tardos, 1988; Ahuja, Magnanti i Orlin 1993,

[1] Niniejsza praca powstała w ramach projektu „*Optymalizacja nieliniowa w wybranych zastosowaniach ekonomicznych*". Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2011/01/D/HS4/03543.

rozdział 15; Wayne, 2002]. Modele uwzględniające zmiany ilości dóbr w trakcie transportu zostały również omówione w [Nagurney, Masoumi i Nagurney, 2013].

Zagadnienie rozdziału było omawiane m.in. w pracach [Balas i Ivanescu, 1964; Lourie, 1964; Balas, 1966]. W pracy [Anholcer i Kawa, 2012] autorzy, badając pewne strukturalne własności dwuetapowych zadań tego typu, wykazali związek między poziomem reklamacji a stopniem złożoności optymalnej sieci dystrybucji.

Stochastyczne zagadnienie rozdziału to jego bliższa rzeczywistości wersja, w której popyt odbiorców nie jest znany. Zakładamy jednak, że znany jest jego rozkład dla każdego z odbiorców. Stosując podejście Dantziga-Madansky'ego, staramy się zminimalizować wartość oczekiwaną całkowitego kosztu transportu, dostaw, magazynowania itd. Przypadek szczególny, a mianowicie stochastyczne zagadnienie transportowe, był analizowany m.in. w pracach [Sikora, Runka i Pyrzyński, 1991; Sikora, 1993a; Anholcer, 2005, 2008a, 2008b]. We wszystkich tych opracowaniach analizowana była metoda wyrównań, w [Anholcer, 2005, 2008a] wykazano jej zbieżność w jednej z ogólnych postaci. W pracach [Anholcer, 2012, 2014] zaprezentowana została metoda wyrównań dla, odpowiednio, stochastycznego zagadnienia rozdziału i nieliniowego zagadnienia rozdziału. Dowiedziono też zbieżności tej wersji metody z wykorzystaniem m.in. twierdzeń przedstawionych w [Bazaraa, Sherali i Shetty, 1993, rozdział 7]. Algorytm zwany iteracyjną metodą lasu (*Forest Iteration Method*) dla stochastycznego zagadnienia transportowego i jego wersję wykorzystującą pojęcie A-lasu dla stochastycznego zagadnienia rozdziału zaprezentowano w pracach [Qi, 1985, 1987].

We wszystkich wspomnianych dotychczas opracowaniach dotyczących stochastycznej wersji zagadnienia koncentrowano się na ciągłych rozkładach popytu. Jedyną znaną autorowi pozycją, w której brano pod uwagę rozkład dyskretny, jest [Sikora, 1993a], w której opisano sposób wykorzystania metody stopniowej analizy zmiennych do rozwiązania stochastycznego zadania transportowego.

Dotychczas zajmowano się również wyłącznie jednoetapowymi zadaniami rozdziału. Niniejszy artykuł jest pierwszym, w którym poruszany jest problem dwuetapowy. Został w nim zaprezentowany sposób wykorzystania zmodyfikowanej metody wyrównań dla stochastycznego, dwuetapowego zagadnienia rozdziału. Kolejne rozdziały zawierają kolejno: opis problemu, sposób jego rozwiązywania, wyniki eksperymentów numerycznych i końcowe wnioski.

1. Sformułowanie problemu

W liniowym zagadnieniu rozdziału jednorodne dobro transportowane jest od m dostawców do n odbiorców, przy czym jego ilość ulega zmianie w trakcie transportu. W związku z tym ilość x_{ij}, opuszczająca dostawcę i, zostaje zmodyfikowana przez mnożnik r_{ij} (najczęściej będący liczbą z przedziału $(0,1)$, co odpowiada redukcji). Ostatecznie więc odbiorca j otrzymuje od dostawcy i ilość towaru równą $r_{ij}x_{ij}$. Przyjmujemy, że jednostkowe koszty transportu c_{ij} są stałe, popyt b_j każdego z odbiorców musi być w pełni zaspokojony, a podaż a_i żadnego z dostawców nie może być przekroczona. Model można więc zapisać w postaci:

$$\min\left\{f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\right\},$$

p. w.

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij}x_{ij}=b_j, j=1,\dots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\le a_i, i=1,\dots,m,$$

$$x_{ij}\ge 0, i=1,\dots,m, j=1,\dots,n.$$

W stochastycznej wersji problemu wielkości popytu b_j nie są deterministyczne, ale dane jako ciągłe zmienne losowe X_j o funkcjach gęstości φ_j. Dla każdego odbiorcy j znane są jednostkowy koszt nadwyżki $s_j^{(1)}$ i jednostkowy koszt niedoboru $s_j^{(2)}$. Całkowita ilość towaru dostarczona do każdego z odbiorców musi być nieujemna, więc funkcja oczekiwanego dodatkowego kosztu związanego z odbiorcą j ma postać:

$$f_j(x_j)=s_j^{(1)}\int_0^{x_j}(x_j-t)\varphi_j(t)dt+s_j^{(2)}\int_{x_j}^{\infty}(t-x_j)\varphi_j(t)dt,$$

co można łatwo przekształcić do postaci:

$$f_j(x_j)=s_j^{(2)}\big(E(X_j)-x_j\big)+\left(s_j^{(1)}+s_j^{(2)}\right)\int_0^{x_j}\Phi_j(t)dt,$$

gdzie Φ_j jest dystrybuantą popytu odbiorcy j. Łatwo zauważyć, że dla każdego j pierwsze dwie pochodne funkcji oczekiwanego dodatkowego kosztu mają postać:

$$f_j'(x_j)=-s_j^{(2)}+\left(s_j^{(1)}+s_j^{(2)}\right)\Phi_j(x_j),$$

$$f_j''(x_j)=\left(s_j^{(1)}+s_j^{(2)}\right)\varphi_j(x_j),$$

więc każda z funkcji f_j jest funkcją wypukłą. Ostatecznie więc stochastyczne zadanie rozdziału (SGTP) ma postać:

$$\min\left\{f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)\right\},$$

p. w.

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij}x_{ij} = x_j, j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = 1, \dots, m,$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Dotychczas przedmiotem zainteresowań badaczy był taki właśnie, jednoetapowy model. Jak jednak pokazuje praktyka, sieci logistyczne mają przeważnie bardziej złożoną strukturę. W szczególności przydatne są modele, w których występuje przynajmniej jedna warstwa pośrednia (patrz np. [Anholcer i Kawa, 2012; Nagurney, Masoumi i Nagurney, 2013]) odpowiadająca centrom dystrybucji. Właśnie taki model, z jedną warstwą pośrednią, będzie przedmiotem naszych rozważań w dalszej części pracy. Przyjmujemy, że jednorodne dobro transportowane jest od m dostawców do n odbiorców, z wykorzystaniem p punktów pośrednich, przy czym pojemność punktów pośrednich można uznać za nieograniczoną (jest to standardowe założenie w przypadku centrów logistycznych, przez które przesyła się tysiące dóbr jednocześnie – ich pojemność znacznie przekracza ilość poszczególnych dóbr). Przyjmując, że indeksy dostawców, punktów pośrednich i odbiorców to odpowiednio i, h oraz j, mnożniki, koszty jednostkowe transportu i przewozy na trasach od dostawców do punktów pośrednich oznaczać będziemy przez $r_{ih}^{(1)}$, $c_{ih}^{(1)}$ i $x_{ih}^{(1)}$, a na trasach z punktów pośrednich do odbiorców – odpowiednio przez $r_{hj}^{(2)}$, $c_{hj}^{(2)}$ i $x_{hj}^{(1)}$. Ponadto jednostkowy koszt składowania dobra w punkcie pośrednim h i ilość dobra, które przez ten punkt przepływa, oznaczmy przez c_h i $x_h^{(1)}$, zaś ilość dobra, która zostaje dostarczona do odbiorcy j, oznaczać będziemy przez $x_j^{(2)}$. Model przyjmie następującą postać:

$$\min\left\{f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{p} c_{ih}^{(1)}x_{ih}^{(1)} + \sum_{h=1}^{p} c_h x_h^{(1)} + \sum_{h=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} c_{hj}^{(2)}x_{hj}^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j^{(2)}\right)\right\},$$

p. w.

$$\sum_{h=1}^{p} x_{ih}^{(1)} \le a_i, i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ih}^{(1)} x_{ih}^{(1)} = x_h^{(1)}, h = 1, \dots, p,$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{hj}^{(2)} = x_h^{(1)}, h = 1, \dots, p,$$
$$\sum_{h=1}^{p} r_{hj}^{(2)} x_{hj}^{(2)} = x_j^{(2)}, j = 1, \dots, n,$$
$$x_{ih}^{(1)} \geq 0, i = 1, \dots, m, h = 1, \dots, p, x_{hj}^{(2)} \geq 0, h = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n.$$

Zadanie tej postaci oznaczać będziemy 2SGTP. Jego wyjściowa forma uniemożliwia wykorzystanie do jego rozwiązywania metody wyrównań, opisanej m.in. w pracach [Anholcer, 2012, 2014]. Okazuje się jednak, że staje się to możliwe po dokonaniu pewnych transformacji. W przypadku liniowych dwuetapowych (wieloetapowych) zadań transportowych standardową metodą transformacji jest rozszerzenie tablicy transportowej i umieszczenie punktów pośrednich zarówno po stronie dostawców, jak i odbiorców. W przypadku SGTP takie postępowanie byłoby bezcelowe – zmiana rozwiązania wymagałaby, podobnie jak w przypadku zadań liniowych, uwzględnienia struktur zawierających cykle poprawy (w przypadku zadania nieliniowego wymagałoby to rozpatrywania całych rodzin cykli). Problem ten ominiemy, definiując pomocniczy problem o potrójnie indeksowanych zmiennych. Niech x_{ihj} oznacza ilość towaru wysłaną od dostawcy i do odbiorcy j za pośrednictwem punktu pośredniego h. Wówczas odpowiednie zmienne zadania 2SGTP mogą być przedstawione w postaci:

$$x_{ih}^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} x_{ihj},$$
$$x_h^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r_{ih}^{(1)} x_{ihj},$$
$$x_{hj}^{(2)} = \sum_{i=1}^{m} r_{ih}^{(1)} x_{ihj}.$$

Przyjmując

$$c_{ihj} = c_{ih}^{(1)} + r_{ih}^{(1)} c_h + r_{ih}^{(1)} c_{hj}^{(2)},$$
$$r_{ihj} = r_{ih}^{(1)} r_{hj}^{(2)},$$

otrzymujemy następującą postać modelu (pomijamy zbędny górny indeks zmiennej $x_j^{(2)}$):

$$\min\left\{f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} c_{ihj}x_{ihj} + \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)\right\},$$

p. w.

$$\sum_{h=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} x_{ihj} \leq a_i, i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{p} r_{ihj}x_{ihj} = x_j, j = 1, \dots n,$$

$$x_{ihj} \geq 0, i = 1, \dots, m, h = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n.$$

Zadanie to ma postać bardzo zbliżoną do SGTP, co pozwala zastosować do jego rozwiązywania odpowiedni wariant metody wyrównań (por. [Anholcer, 2012, 2014]). Nie można przenieść metody bezpośrednio (zakresy sumowania w warunkach ograniczających nie są rozłączne, jak to ma miejsce w SGTP, gdyż w obu grupach warunków występuje indeks h), jednak przedstawiony w kolejnym podrozdziale algorytm pozwala na znalezienie optimum.

2. Metoda rozwiązywania

Aby rozwiązać zadanie za pomocą metody wyrównań, wprowadzamy dodatkowe zmienne $x_{i,0,0}$. Przyjmujemy przy tym, że $c_{i,0,0} = 0, r_{i,0,0} = 1$ dla $i = 1, \dots, m$, i $f_0(x_0) \equiv 0$. Wówczas zadanie przyjmuje następującą postać:

$$\min\left\{f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} c_{ihj}x_{ihj} + \sum_{j=0}^{n} f_j(x_j)\right\},$$

p. w.

$$\sum_{h=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} x_{ihj} + x_{i,0,0} = a_i, i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{p} r_{ihj}x_{ihj} = x_j, j = 1, \dots n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} r_{i,0,0} x_{i,0,0} = x_0$$

$x_{ihj} \geq 0, i = 1, \dots, m, h = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n,$

$x_{i,0,0} \geq 0, i = 1, \dots, m.$

Warunki KKT dla tego zadania mogą zostać zapisane w następującej postaci $(i = 1, \dots, m, h = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n)$:

$$c_{ihj} + r_{ihj} f_j'(x_j) \geq u_i, x_{ihj} = 0,$$

$$c_{ihj} + r_{ihj} f_j'(x_j) = u_i, x_{ihj} > 0.$$

Poniższy algorytm jest zbieżny do punktu KKT. Dowód zostanie pominięty, gdyż jest analogiczny do dowodów zamieszczonych w pracach [Anholcer, 2012, 2014].

Algorytm 1: Algorytm dla dwuetapowego stochastycznego zagadnienia rozdziału

1. *Inicjalizacja*. Wyznacz rozwiązanie początkowe zgodnie ze wzorem:

   $x_{ihj} = 0, i = 1, \dots, m, h = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n,$

   $x_{i,0,0} = a_i, i = 1, \dots, m.$

   Wyznacz sumy przywozów do poszczególnych odbiorców:

   $$x_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i, j = 0, \\ 0, j \neq 0. \end{cases}$$

   Wyznacz początkowe wartości pochodnych cząstkowych:

   $k_{ihj} = c_{ihj} + r_{ihj} f_j'(0), i = 1, \dots, m, h = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n,$

   $k_{i,0,0} = 0, i = 1, \dots, m.$

   Przejdź do kroku 2.

2. *Sprawdzanie optymalności*. Dla każdego i wyznacz:

   $v_i = \min\{k_{ihj} | h = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n \vee h = j = 0\},$

   $w_i = \max\{k_{ihj} | (h = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n \vee h = j = 0), x_{ihj} > 0\}.$

Niech $\left(h^{\star\star}(i), j^{\star\star}(i)\right)$ będzie parą indeksów (h, j), dla której $k_{ihj} = v_i$ i niech $\left(h^{\star}(i), j^{\star}(i)\right)$ będzie parą indeksów (h, j), dla której $k_{ihj} - v_i = w_i$. Oblicz
$\alpha = \max\{w_i | i = 1, \dots, m\}$.
Niech $i^\star$ będzie indeksem i, dla którego $w_i = \alpha$. Jeżeli $\alpha < \varepsilon$, to STOP. Otrzymane rozwiązanie zadowalająco blisko optimum. W przeciwnym przypadku przyjmij $h^{\star\star} = h^{\star\star}(i^\star)$, $h^\star = h^\star(i^\star)$, $j^{\star\star} = j^{\star\star}(i^\star)$ oraz $j^\star = j^\star(i^\star)$. Jeżeli $j^{\star\star} = j^\star$, przejdź do kroku 3. W przeciwnym razie przejdź do kroku 4.

3. *Zmiana rozwiązania (wariant pierwszy).*
Zmień rozwiązanie zgodnie z wzorami:

$x_{i^\star h^\star j^\star} \coloneqq 0,$

$x_{i^\star h^{\star\star} j^{\star\star}} \coloneqq x_{i^\star h^{\star\star} j^{\star\star}} + x_{i^\star h^\star j^\star}.$

Wróć do kroku 2.

4. *Zmiana rozwiązania (wariant drugi).*
Niech

$\delta^-(\lambda) = f'_{j^\star}\left(x_{j^\star}\right) - f'_{j^\star}\left(x_{j^\star} - \lambda\right),$

$\delta^+(\lambda) = f'_{j^{\star\star}}\left(x_{j^{\star\star}} + \lambda\right) - f'_{j^{\star\star}}\left(x_{j^{\star\star}}\right).$

Niech $\lambda^\star$ będzie rozwiązaniem równania

$r_{i^\star h^\star j^\star}\delta^-(\lambda) + r_{i^\star h^{\star\star} j^{\star\star}}\delta^+(\lambda) = w_{i^\star}.$

Jeżeli $\lambda^\star > x_{i^\star h^\star j^\star}$, podstaw

$\lambda^\star \coloneqq x_{i^\star h^\star j^\star}.$

Zmień rozwiązanie zgodnie ze wzorami:

$x_{i^\star h^\star j^\star} \coloneqq x_{i^\star h^\star j^\star} - \lambda^\star,$

$x_{i^\star h^{\star\star} j^{\star\star}} \coloneqq x_{i^\star h^{\star\star} j^{\star\star}} + \lambda^\star,$

$x_{j^\star} \coloneqq x_{j^\star} - r_{i^\star h^\star j^\star}\lambda^\star,$

$x_{j^{\star\star}} \coloneqq x_{j^{\star\star}} + r_{i^\star h^{\star\star} j^{\star\star}}\lambda^\star.$

Jeżeli $j^\star = 0$, podstaw

$k_{i,0,0} \coloneqq k_{i,0,0} - \delta^-(\lambda^\star), i = 1, \dots, m.$

W przeciwnym razie podstaw

$k_{ihj^\star} \coloneqq k_{ihj^\star} - r_{ihj^\star}\delta^-(\lambda^\star), i = 1, \dots, m, h = 1, \dots, p.$

Jeżeli $j^{\star\star} = 0$, podstaw

$k_{i,0,0} \coloneqq k_{i,0,0} + \delta^{+}(\lambda^{\star}), i = 1, \dots, m.$

W przeciwnym razie podstaw

$k_{ihj^{\star\star}} \coloneqq k_{ihj^{\star\star}} + r_{ihj^{\star\star}}\delta^{+}(\lambda^{\star}), i = 1, \dots, m, h = 1, \dots, p.$

Wróć do kroku 2.

3. Eksperymenty obliczeniowe

W celu zbadania sprawności algorytmu rozwiązano pewną liczbę losowo wygenerowanych zadań testowych. Rozpatrywano dwa typy rozkładów popytu: jednostajny $U(0, u)$ i wykładniczy $Exp(\lambda)$, przy czym u i λ losowano jednostajnie z przedziałów odpowiednio $[15,20)$ i $[0{,}5, 0{,}6)$. Jednostkowe koszty transportu (dla obu etapów) były losowane jednostajnie z przedziału $[2,4)$, koszty obsługi w punktach pośrednich z przedziału $[1,2)$, koszty nadmiaru z przedziału $[1,2)$, koszty niedoboru z przedziału $[5,10)$, współczynniki redukcji z przedziału $[0{,}8, 0{,}9)$, a wielkości podaży z przedziału $[10,20)$. W przypadku zadań z rozkładem jednostajnym optymalna długość kroku wyznaczana była w sposób dokładny (równanie pozwalające wyznaczyć długość kroku jest wówczas równaniem kwadratowym), zaś w przypadku rozkładu wykładniczego – za pomocą jednowymiarowej metody Newtona. Algorytm został zaimplementowany w Java SE i uruchomiony na PC z procesorem Intel(R) Core(TM) i7-2670 QM CPU @2.20 GHz. Wygenerowano i rozwiązano po 1000 losowo wygenerowanych zadań o rozmiarach: $(m, p, n) = (10, 5{,}10), (10, 5{,}20), (100, 10{,}100), (100, 10{,}200)$, czyli łącznie 8000 zadań. Czasy rozwiązywania w milisekundach (AVG – średni, DEV – odchylenie standardowe, MIN – najkrótszy, MAX – najdłuższy) przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Wyniki eksperymentów (czasy rozwiązywania w milisekundach)

Typ zadania	$U(0, u)$ 10×5×10	$U(0, u)$ 10×5×20	$U(0, u)$ 100×10×100	$U(0, u)$ 100×10×200	$Exp(\lambda)$ 10×5×10	$Exp(\lambda)$ 10×5×20	$Exp(\lambda)$ 100×10×100	$Exp(\lambda)$ 100×10×200
AVG	0,084	0,295	263,521	4189,788	2,043	4,566	1767,378	10 196,754
DEV	0,344	0,833	301,112	3063,958	14,160	16,254	2158,949	8133,343
MIN	0,000	0,046	31,000	796,000	0,150	0,620	156,000	1717,000
MAX	7,115	12,543	2542,000	23 666,000	390,160	326,990	24 102,000	65 818,000

Jak widać, algorytm szybko (średnio w czasie do 10 sekund) rozwiązuje zadania o stosunkowo dużych rozmiarach. W przypadku najmniejszych testowanych zadań czas rozwiązywania jest rzędu dziesiątek mikrosekund.

Podsumowanie

W pracy omówiono dwuetapowe stochastyczne zagadnienie rozdziału z ciągłym rozkładem popytu i przedstawiono efektywny algorytm jego rozwiązywania. Opisaną metodę można z powodzeniem zastosować do rozwiązywania zadań z większą liczbą etapów. Wymagałoby to wprowadzenia wielokrotnie indeksowanych zmiennych i wykonania analogicznych przekształceń, jak w przypadku zadania dwuetapowego.

Literatura

Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. (1993), *Network Flows. Theory, Algorithms and Applications*, Prentice Hall.

Anholcer M. (2005), *Zbieżność metody wyrównań dla nieliniowych zadań alokacji* [w:] K. Piasecki, W. Sikora (red.), *Z prac Katedry Badań Operacyjnych*, „Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Poznaniu", nr 64.

Anholcer M. (2008a), *Analiza porównawcza wybranych algorytmów rozwiązywania nieliniowych zadań alokacji dóbr jednorodnych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.

Anholcer M. (2008b), *Porównanie działania wybranych algorytmów rozwiązywania nieliniowych zadań alokacji* [w:] D. Kopańska-Bródka (red.), *Metody i zastosowania badań operacyjnych 2007*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice.

Anholcer M (2012). *Algorithm for Stochastic Generalized Transportation Problem*, „Operations Research and Decisions", Vol. 22, No. 4.

Anholcer M. (2014), *On the Nonlinear Generalized Transportation Problem*, submitted.

Anholcer M., Kawa A. (2012), *Optimization of Supply Chain via Reduction of Complaints Ratio*, „Lecture Notes in Computer Science", Vol. 7327.

Balas E. (1966), *The Dual Method for the Generalized Transportation Problem*, „Management Science", Vol. 12, No. 7, Series A, Sciences.

Balas E., Ivanescu P.L. (1964), *On the Generalized Transportation Problem*, „Management Science", Vol. 11, No. 1, Series A, Sciences.

Bazaraa M.S., Sherali H.D., Shetty C.M. (1993), *Nonlinear Programing. Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons Inc., New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore.

Glover F., Klingman D., Napier A. (1972), *Basic Dual Feasible Solutions for a Class of Generalized Networks*, „Operations Research", Vol. 20, No. 1.

Goldberg A.V., Plotkin S.A., Tardos E. (1988), *Combinatorial Algorithms for the Generalized Circulation Problem*, SFCS'88 Proceedings of the 29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science.

Lourie J.R. (1964), *Topology and Computation of the Generalized Transportation Problem*, „Management Science", Vol. 11, No. 1, Series A, Sciences.

Nagurney A., Yu M., Masoumi A.H., Nagurney L.S. (2013), *Networks against Time. Supply Chain Analytics for Perishable Products*, Springer Briefs in Optimization, Springer.

Qi L. (1985), *Forest Iteration Method for Stochastic Transportation Problem*, „Mathematical Programming Study", Vol. 25.

Qi L. (1987), *The A-Forest Iteration Method for the Stochastic Generalized Transportation Problem*, „Matematics of Operations Research", Vol. 12, No. 1.

Sikora W. (1993a), *Problem transportowy z losowym popytem odbiorców*, „Przegląd Statystyczny", t. XXXIX, nr 3-4.

Sikora W. (1993b), *Modele i metody optymalnej dystrybucji dóbr*, „Zeszyty Naukowe" – seria II, Prace Doktorskie i Habilitacyjne, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań.

Sikora W., Runka H., Pyrzyński D. (1991), *Optymalizacja przepływów w sferze dystrybucji dóbr jednorodnych*, Grant nr H\12\209\90-2, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań.

Wayne K.D. (2002), *A Polynomial Combinatorial Algorithm for Generalized Minimum Cost Flow*, „Mathematics of Operations Research", Vol. 27, No. 3.

TWO-STAGE STOCHASTIC GENERALIZED TRANSPORTATION PROBLEM

Summary: The Generalized Transportation Problem (GTP) allows to model a situation, where the amounts of goods delivered to the destinations are not equal to the amounts leaving the supply points (this is the case i.e. when perishable goods are transported or some complaints occur because of products' defects). In the article a model of two-stage stochastic GTP (2SGTP) has been presented, where the demands of customers are given as continuous random variables. An algorithm for such type of problems has been presented.

Keywords: generalized transportation problem, stochastic programming.