



Andrzej Paliński

AGH w Krakowie
Wydział Zarządzania
Katedra Informatyki Stosowanej
palinski@zarz.agh.edu.pl

OPCJE RZECZYWISTE I TEORIA GIER W PODEJMOWANIU STRATEGICZNYCH DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Streszczenie: Celem artykułu jest ocena możliwości wykorzystania opcji rzeczywistych w połączeniu z teorią gier do podejmowania decyzji inwestycyjnych zapewniających pierwszeństwo wejścia na rynek. Zastosowanie geometrycznego procesu błędzenia losowego pozwala na wycenę opcji realizacji przedsięwzięcia inwestycyjnego z punktu widzenia lidera lub naśladowcy. Wyliczone wartości opcji pozwalają na znalezienie strategii równowagi w grze inwestycyjnej dla dwóch graczy, którzy wybierają strategię lidera lub naśladowcy. Przykład liczbowy wykorzystujący dwumianowy model wyceny opcji Coxa–Rossa–Rubinsteina wykazał zaskakująco, że dla asymetrycznych graczy o zróżnicowanych nakładach inwestycyjnych, gracz o wyższych nakładach inwestycyjnych z większym prawdopodobieństwem stosuje strategię lidera.

Słowa kluczowe: opcja rzeczywista, teoria gier, model dwumianowy.

Wprowadzenie

Klasyczne już modele opcji rzeczywistych służą do uwzględnienia w analizie rentowności przedsięwzięć inwestycyjnych tzw. elastyczności decyzji. Elastyczność decyzji oznacza możliwości podjęcia dodatkowych działań inwestycyjnych zależnych od zmiany sytuacji rynkowej lub rozwoju działalności operacyjnej. Te dodatkowe działania inwestycyjne mogą dotyczyć rozszerzenia skali aktywności przedsiębiorstwa, zmiany profilu produkcji, ale także zmniejszenia skali lub nawet likwidacji działalności. Obszerny przegląd teorii opcji rzeczywistych można znaleźć w pracy J. Mizerki [2005].

Wspomniane modele nie biorą jednak pod uwagę faktu, że na tym samym rynku może się pojawić konkurencyjny podmiot. Jego wejście na rynek zmieni znacząco dochody przedsiębiorstwa i tym samym obniży rentowność przedsięwzięcia stanowiącego opcję rzeczywistą. Ponadto postępowanie konkurenta i moment jego wejścia na rynek będą zależały od zachowania przedsiębiorstwa dotychczas funkcjonującego na rynku. Tego typu sytuacja wymaga wykorzystania teorii gier do modelowania strategicznych decyzji inwestycyjnych w warunkach konkurencji. W niniejszej pracy zostanie przedstawione podejście łączące teorię opcji rzeczywistych z teorią gier. Dalszy układ pracy jest następujący – w części 1 zawarto założenia teoretyczne modeli integrujących teorię opcji rzeczywistych z teorią gier, natomiast w części 2 wykorzystano model dwumianowy do wyceny hipotetycznej opcji rzeczowej spełniającej założenia teoretyczne przedstawione w pierwszej części pracy. Wartości opcji posłużyły do znalezienia równowagi w grze strategicznej. Praca zakończona jest krótkim podsumowaniem.

1. Model teoretyczny gry w opcję rzeczywistą

Istnieje bogata literatura przedmiotu dotycząca połączenia teorii opcji rzeczywistych z teorią gier, tzw. *real option games* (ROG). Metodyka wyceny opcji rzeczywistych w połączeniu z teorią gier przedstawiona jest w pracach H. Smit i L. Trigeorgis [2003; 2004], a przegląd modeli z tego obszaru można znaleźć w pracy A. Azevedo i D. Paxson [2014]. Podstawowy model ROG zaliczany do gier pierwszeństwa (*preemptive games*) zaprezentowany jest w dalszej części.

Firma ma możliwość poniesienia nieodwracalnych nakładów inwestycyjnych I , które przyniosą dochód zależny od popytu D i ceny na rynku P .

Cena rynkowa wyrażona jest w następujący sposób:

$$P_t = X_t D(Q), \quad (1)$$

gdzie szok cenowy X_t podlega geometrycznemu procesowi błędzenia losowego:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dz, \quad (2)$$

w którym μ jest dryfem, σ odchyleniem standardowym, a dz – różniczką procesu Wienera o rozkładzie normalnym z wartością średnią równą zero i wariancją dt . Przy czym $0 < \mu < r$, gdzie r jest stopą wolną od ryzyka, $\sigma > 0$ oraz $D(Q)$ jest deterministyczną częścią krzywej popytu, malejącą względem podaży, dla której $D'(Q) < 0$. Podaż jest zależna od liczby firm na rynku, co w przypadku dwóch konkurencyjnych firm prowadzi do $Q \in \{0, 1, 2\}$.

Poniesienie nakładów inwestycyjnych i wejście na rynek może się odbyć równocześnie przez obydwie firmy ($Q = 2$) albo najpierw przez jedną ($Q = 1$), a następnie przez drugą – wtedy dopiero nastąpi wzrost podaży do $Q = 2$. Przez pewien okres pierwsza firma jest liderem, czerpiąc z tego tytułu korzyść – wyższą cenę zależną od części deterministycznej funkcji popytu. Jednakże wraz z upływem czasu może nastąpić wzrost ceny w wyniku realizacji procesu stochastycznego X_t . Opłacalne stanie się wtedy wejście na rynek drugiego producenta – naśladowcy. Najmniej korzystną sytuacją jest równoczesne wejście na rynek obydwu producentów starających się uzyskać pozycję lidera. Niska cena w wyniku wysokiej podaży we wczesnym etapie rozwoju cen rynkowych nie zapewni obydwu producentom wymaganych dochodów.

Biorąc pod uwagę proces stochastyczny X_t , możemy zdefiniować optymalny moment inwestycji naśladowcy oznaczonego indeksem F następująco [Dixit i Pindyck, 1994, rozdz. 5; Huisman i in., 2004; Paxson i Pinto, 2005]:

$$X_F^* = \frac{\beta}{\beta - 1} \frac{(r - \mu)I}{D(2)}, \quad (3)$$

gdzie β jest określone przez:

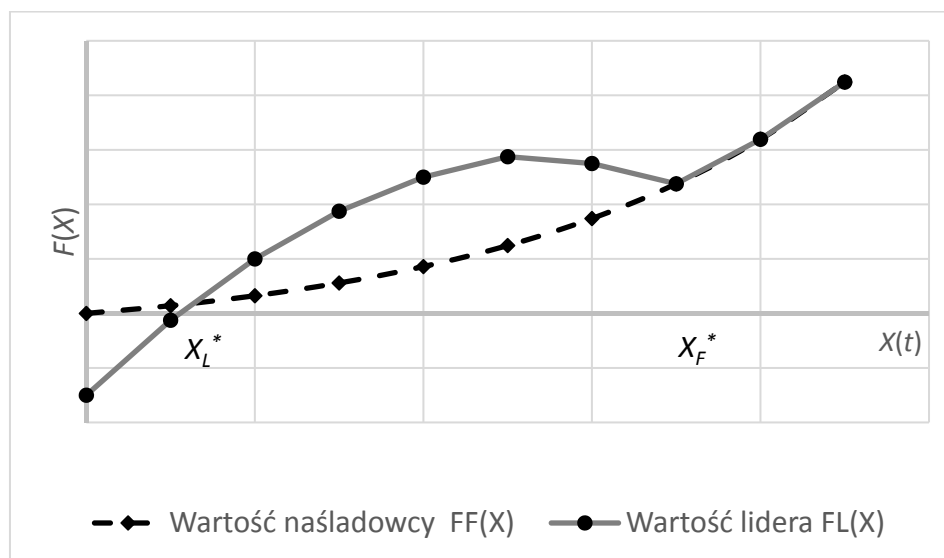
$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} > 0.$$

Funkcja wypłaty naśladowcy, będąca zdyskontowanym strumieniem przepływów pieniężnych z projektu inwestycyjnego, oznaczona jest $F_F(X)$. Funkcja wypłaty lidera zostanie oznaczona analogicznie $F_L(X)$, podczas gdy funkcja wypłaty obydwu firm, w sytuacji gdy zainwestują równocześnie jako liderzy, zostanie oznaczona $F_S(X)$. Zachodzi przy tym $F_L(X) > F_F(X) > F_S(X)$.

Punkt inwestycji lidera uzyskującego pierwszeństwo sprzedaży X_L^* otrzymamy z warunku:

$$X_L^* = \min_X \{X | F_L(X) = F_F(X)\}, \quad (4)$$

co obrazuje rys. 1. Funkcja dochodu lidera jest początkowo szybciej rosnąca, ale po osiągnięciu maksimum ostatecznie zrównuje się z funkcją dochodu naśladowcy.



Rys. 1. Schemat funkcji wartości przedsięwzięcia dla lidera i naśladowcy

- Dla dwóch konkurencyjnych firm istnieją dwie możliwe strategie inwestycyjne:
- 1) inwestować natychmiast, kiedy osiągnie się punkt X_L^* , po to, aby czerpać korzyść z pozycji lidera,
 - 2) powstrzymać się od inwestowania do czasu osiągnięcia punktu X_F^* .

Każda z firm może wybrać dowolną spośród obydwu strategii, co obrazuje tab. 1, zawierająca macierz gry w postaci strategicznej. Pogrubioną czcionką zaznaczone są najlepsze odpowiedzi na strategię przeciwnika.

Tabela 1. Postać strategiczna gry w opcję wczesnej inwestycji

Gracz 1 \ Gracz 2	Inwestować	Czekać
Inwestować	$(F_S(X_L^*), F_S(X_L^*))$	$(F_L(X_L^*), F_F(X_F^*))$
Czekać	$(F_F(X_F^*), F_L(X_L^*))$	$(F_F(X_F^*), F_F(X_F^*))$

W grze są dwa punkty równowagi w strategiach czystych: (inwestować, czekać) i (czekać, inwestować). Ze względu na to, że firmy są identyczne, obydwie wolałyby zostać liderem, gdyż strategia ta dawałaby najwyższą wypłatę. Jednakże równoczesne zastosowanie strategii „inwestować” przez obydwa graczy prowadziłoby do najniższych wypłat $F_S(X)$ dla obu firm. Jedyną możliwą równowagą jest zatem równowaga w strategiach mieszanych. Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo stosowania strategii „inwestować” przez gracza 1. Przez q oznaczmy prawdopodobieństwo stosowania strategii „inwestować” przez gracza 2.

Graczowi 1 jest obojętne, którą strategię zastosuje, zatem:

$$F_S(X_L^*)q + F_L(X_L^*)(1 - q) = F_F(X_F^*)q + F_F(X_F^*)(1 - q), \quad (5)$$

co po przekształceniach daje:

$$q = \frac{F_L(X_L^*) - F_F(X_F^*)}{F_L(X_L^*) - F_S(X_L^*)}. \quad (6)$$

Analogiczny wynik otrzymamy dla prawdopodobieństwa p , gdyż gracze są identyczni, a ich strategie są symetryczne, stąd $p = q$.

2. Implementacja modelu opcji rzeczywistej dla przedsięwzięcia inwestycyjnego na konkurencyjnym rynku

W praktycznych zastosowaniach do wyceny opcji rzeczywistych wykorzystuje się najczęściej model Coxa–Rossa–Rubinsteina (CRR) [Cox, Ross i Rubinstein, 1979]. Jest to iloczynowy (geometryczny) model dwumianowy wyceny opcji amerykańskiej. W modelu dwumianowym przyjmuje się, że wartość instrumentu podstawowego S zmienia się w taki sposób, że w każdej chwili może podążyć tylko w kierunku jednego z dwóch możliwych stanów – w górę (przyrost $u > 1$, z prawdopodobieństwem p), lub w dół (spadek $d < 1$, z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$), osiągając jedną z wartości: uS lub dS . Zakłada się także, że $ud = 1$, stąd $u = 1/d$ [Paliński, 2016]. Przyjmując brak możliwości arbitrażu i neutralność inwestorów względem ryzyka oczekiwana stopa zwrotu z instrumentu podstawowego musi być równa stopie wolnej od ryzyka. Na tej podstawie otrzymuje się wzór na prawdopodobieństwo neutralne względem ryzyka:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (7)$$

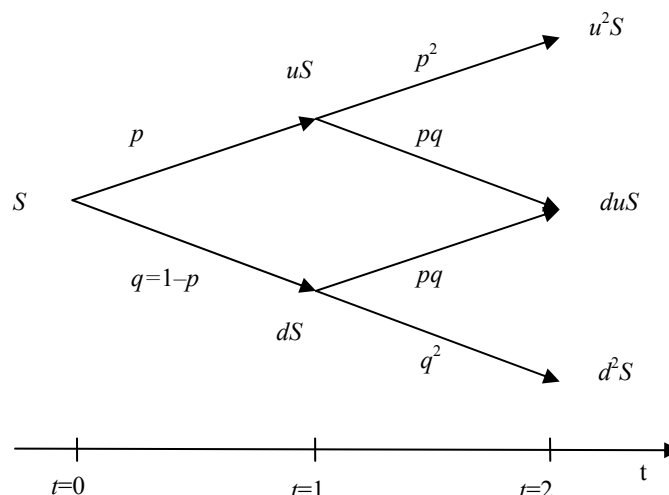
gdzie:

u, d – parametry wzrostu i spadku,

r – stopa wolna od ryzyka,

σ – zmienność instrumentu bazowego (podstawowego).

Idea procesu wartości instrumentu podstawowego przedstawiona jest na rys. 2.



Rys. 2. Proces geometryczny zmiany wartości S instrumentu podstawowego na drzewie dwumianowym

Wartość opcji w dowolnym momencie pomiędzy chwilą jej zawarcia a momentem wygaśnięcia jest sumą jej wartości wewnętrznej oraz wartości czasowej. Wartość wewnętrzna jest wartością opcji w sytuacji, gdyby możliwe było jej natychmiastowe wykonanie. Wartość czasowa jest miarą możliwego wzrostu wartości opcji w okresie do jej wygaśnięcia. Wartość czasowa opcji maleje w miarę zbliżania do terminu wygaśnięcia opcji.

Wartości wewnętrzna opcji kupna wynosi:

$$C = \max(0, S - K), \quad (8)$$

gdzie:

C – wartość wewnętrzna opcji kupna,

S – cena instrumentu podstawowego (bazowego),

K – cena wykonania.

Wartość opcji wyznacza się od węzła końcowego, cofając do początku. Wartość opcji w węzłach wcześniejszych, przy założeniu odroczenia jej wykonania, oblicza się jako wartość oczekiwaną z dwóch późniejszych węzłów zdyskontowaną stopą wolną od ryzyka r . W każdym węźle sprawdza się, czy korzystniejsze jest natychmiastowe wykonanie opcji, czy trzymanie jej kolejny okres Δt , tzn., czy wartość wewnętrzna jest wyższa od wartości opcji przy założeniu opóźnienia jej wykonania.

W celu zbudowania przykładu liczbowego wykorzystującego model teoretyczny ROG przedstawiony w poprzedniej części przyjęto następujące założenia dotyczące opcji realizacji przedsięwzięcia inwestycyjnego:

- Nakłady inwestycyjne ponoszone w ciągu jednego roku wynoszą 15 mln zł.
- Początkowa wartość stochastycznej części ceny (szoku cenowego) wynosi 10 mln zł.
- Maksymalny okres odsunięcia w czasie momentu realizacji przedsięwzięcia wynosi 12 lat.
- Deterministyczny składnik funkcji popytu naśladowcy wyrażony jest funkcją $D(2) = \exp(0,05t)$, gdzie $t = 1, 2, \dots, 12$.
- Deterministyczny składnik funkcji popytu lidera wyrażony jest funkcją $D(1) = -(t-2)(t-14)/30$, gdzie $t = 1, 2, \dots, 12$.
- W przypadku równoczesnej inwestycji graczy deterministyczny składnik funkcji popytu przyjmuje postać $0,5 D(1) + 0,5 D(2)$.
- Stopa wolna od ryzyka wynosi 1,0%, odchylenie standardowe stopy zwrotu z instrumentu bazowego – opcji realizacji przedsięwzięcia inwestycyjnego, wynosi $\sigma = 10,0\%$.
- Wyliczone ze wzoru (7) prawdopodobieństwo arbitrażowe wzrostu ceny wynosi $p = 0,525$, czynnik wzrostu jest równy $u = 1,105$ i czynnik spadku $d = 0,905$.

Tak zdefiniowane przedsięwzięcie inwestycyjne jest odpowiednikiem opcji kupna. Korzystając z modelu CRR wyliczono dla naśladowcy wartość opcji realizacji przedsięwzięcia na kwotę 5,42 mln zł, którą przy sprzyjających wartościach popytu rynkowego można zrealizować w ostatnim, 12 roku.

Analogicznie obliczono wartość opcji dla lidera, która wyniosła 7,32 mln zł. Realizacja tej opcji w 6. roku jest rozwiązaniem optymalnym przy założeniu korzystnych wartościach funkcji popytu, co obrazuje rys. 3. Wykonanie opcji następuje w momencie, w którym wartość oczekiwana trzymywania opcji jest niższa niż wartość natychmiastowego jej wykonania. Dla przykładu – w 6. roku dla najwyższego wierzchołka procesu wzrostu funkcji wypłaty wartość czasowa opcji wynosi 23,4 mln zł, będąc zdyskontowaną wartością oczekiwaną dwóch przyszłych wartości opcji: $0,99 \times (0,525 \times 27,3 \text{ mln zł} + 0,475 \times 19,6 \text{ mln zł})$, podczas gdy wartość wewnętrzna jest równa 23,9 mln zł, jako różnica bieżącej wartości funkcji wypłaty i nakładów inwestycyjnych: $38,9 \text{ mln zł} - 15,0 \text{ mln zł}$.

W przypadku równoczesnej realizacji inwestycji przez obydwu graczy starających się uzyskać pozycję lidera wartość opcji, która zostanie zrealizowana w 6. roku, wyniesie jedynie 3,73 mln zł dla każdego z graczy. Jest to mniej niż wartość opcji naśladowcy. Co więcej, wykonanie opcji równoczesnej inwestycji powinno nastąpić w 7. roku, gdyż zwiększyłoby to wartość opcji do 4,21 mln zł.

Rok	1	2	3	4	5	6	7
D(t)	1,30	1,60	1,83	2,00	2,10	2,13	2,10

							20,1
							42,3
						18,2	27,3
						38,9	
					16,5	23,9	16,5
					34,6		34,6
				14,9	20,3	14,9	19,6
				29,8		31,8	
			13,5	17,1	13,5	16,8	13,5
			24,7		28,3		28,3
			14,2	12,2	13,9	12,2	13,3
		12,2				26,1	
		19,5		24,4		11,1	11,1
	11,1	11,6	11,1	11,4	11,1		23,2
	14,4		20,3		23,2		8,2
10,0	9,3	10,0	9,0	10,0	8,7	10,0	
10,0		16,0		20,0		21,3	
7,3	9,0	7,0	9,0	6,6	9,0	6,3	9,0
	11,8		16,6		19,0		19,0
	5,2	8,2	4,9	8,2	4,5	8,2	4,0
		13,1		16,4		17,5	
		3,4	7,4	3,0	7,4	2,5	7,4
			13,6		15,6		15,6
			2,0	6,7	1,5	6,7	0,7
				13,4		14,3	
				0,8	6,1	0,4	6,1
					12,7		12,7
					0,2	5,5	–
						11,7	
						–	5,0
							10,4
							–

Wartość szoku cenowego							
Wartość funkcji wypłaty							
Wartość opcji							

Nota: Wytluszczoną czcionką zaznaczono okresy, w których korzystna jest realizacja opcji.

Rys. 3. Drzewo procesu wzrostu wartości funkcji wypłaty lidera i wartości opcji dla pierwszych 7 lat

Przebieg gry przedstawiony jest na tab. 2. Sytuacja jest zgodna z analizą teoretyczną przedstawioną w poprzedniej części artykułu – w grze są dwie równowagi w strategiach czystych, zawierające najlepsze odpowiedzi na strategię przeciwnika dla każdego gracza – zaznaczone pogrubioną czcionką.

Tabela 2. Postać strategiczna gry w opcję wczesnej inwestycji

Gracz 1 \ Gracz 2	Inwestować	Czekać
Inwestować	(3,73; 3,73)	(7,32; 5,42)
Czekać	(5,42; 7,32)	(5,42; 5,42)

Zastosowania strategii mieszanej prowadzi do równowagi obliczonej zgodnie ze wzorem (6): (0,53 Inwestować + 0,47 Czekać; 0,53 Inwestować + 0,47 Czekać), zapewniającej obydwu graczom wypłatę równą 5,42 mln zł. Równowaga ta nie jest paretooptymalna, gdyż przy braku koordynacji strategii daje łącznie graczom 10,84 mln zł. Gdyby możliwa była koordynacja strategii polegająca na ustaleniu lidera i naśladowcy, ich łączna wypłata wyniosłaby 12,74 mln zł.

Nieznacznie różniące się podejście do wyceny opcji rzeczywistej w warunkach konkurencji, rozpatrujące decyzje strategiczne w każdym węźle drzewa dwumianowego, prezentują N. Ferreira, J. Kar i L. Trigeorgis [2008]. Podejście to prowadzi jednak do podobnych rezultatów, jak przedstawione w niniejszej pracy.

Interesujące jest to, jakie będą strategie niesymetrycznych graczy. Załóżmy, że drugi z graczy ma niższe nakłady inwestycyjne, wynoszące 10 mln zł. Funkcje wypłaty obydwu graczy, zarówno jako lidera, jak i naśladowcy, pozostaną takie same. Zmieniają się natomiast wartości opcji realizacji przedsięwzięcia dla gracza o niższych nakładach inwestycyjnych. Wartość opcji naśladowcy, którą można wykonać w ostatnim, 12. roku, wynosi 9,37 mln zł. Wartość opcji lidera wynosi 11,92 mln zł i można ją zrealizować analogicznie do przypadku symetrycznego w 6. roku. W sytuacji równoczesnej inwestycji wartość opcji dla gracza 2 o niskich nakładach będzie równa 8,00 mln zł. Przebieg gry asymetrycznych graczy przedstawiony jest w tab. 3.

Tabela 3. Postać strategiczna gry w opcję wczesnej inwestycji dla asymetrycznych graczy

Gracz 1 \ Gracz 2	Inwestować	Czekać
Inwestować	(3,73; 8,00)	(7,32; 9,42)
Czekać	(5,42; 11,92)	(5,42; 9,37)

Gra ma dwie równowagi w strategiach czystych, analogiczne do równowag w grze symetrycznej. Równowaga w strategiach mieszanych, obliczona zgodnie ze wzorem (6), ale odrębnie dla każdego z graczy, przyjmuje natomiast wartość: (0,64 Inwestować + 0,36 Czekać; 0,53 Inwestować + 0,47 Czekać). Jest to zaskakujący wynik, gdyż inwestor o wyższych nakładach inwestycyjnych będzie z większym prawdopodobieństwem starał się uzyskać pozycję lidera. Wynika to z faktu, że inwestor o niższych nakładach ma „mniej do stracenia” w przypadku równoczesnej inwestycji obydwu graczy, a gracz o wyższych nakładach więcej zyskuje przyjmując pozycję lidera.

Wypłata gracza 1 o wysokich nakładach wyniesie bez zmian 5,42 mln zł, podczas gdy wypłata gracza o niskich nakładach inwestycyjnych wyniesie 9,37 mln zł. Jest to rozwiązanie dalekie od optymalności w sensie Pareto. W przypadku koordynacji strategii, gdyby liderem był gracz o wysokich nakładach, łączna wypłata graczy wyniosłaby 16,74 mln zł, gdyby natomiast liderem był gracz o niskich nakładach, łączna wypłata osiągnęłaby 17,34 mln zł.

Podsumowanie

Obszerne badania z zakresu opcji rzeczywistych służą znalezieniu najlepszej metody wyznaczania wartości opcji w sytuacji braku notowań giełdowych instrumentu podstawowego, jakim jest rzeczowy projekt inwestycyjny. Badania te nie biorą jednak pod uwagę możliwości pojawienia się na rynku konkurencyjnych podmiotów, gdyż wykracza to poza problem samej wyceny opcji rzeczowej jako odpowiednika opcji finansowej.

Przedstawiona w niniejszej pracy analiza wskazuje na to, jak znaczący wpływ na wartość opcji ma zachowanie strategiczne potencjalnego konkurenta. Rozważany w pracy model wywodzi się z tak zwanych gier w opcję rzeczywistą (*real option games*), których podstawą jest zróżnicowanie dochodów lidera i naśladowcy w procesie wchodzenia na rynek.

W prostym przykładzie liczbowym wzięto pod uwagę strategie konkurencyjnych firm w przypadkach jednakowych i różnych wartości nakładów inwestycyjnych, i ich wpływ na realizację przedsięwzięcia – opcji rzeczowej. Brak koordynacji strategii prowadzi do nieoptymalnych w sensie Pareto decyzji konkurentów. Jest to szczególnie zaskakujące z tego powodu, że gracz o wyższych nakładach inwestycyjnych z większym prawdopodobieństwem próbuje zostać liderem, obniżając dodatkowo paretooptymalność równowagi w grze. Możliwym rozwiązaniem wydaje się zastosowanie mechanizmu sygnalizacji, dzięki któremu inwestor o niższych nakładach próbowałby narzucić swoją pozycję jako lidera drugiemu graczowi o wyższych nakładach.

Literatura

- Azevedo A. i Paxson D. (2014), *Real Options Game Models: A Review*, "European Journal of Operational Research", Vol. 237, No. 3, s. 909-920.
- Cox J., Ross S. i Rubinstein M. (1979), *Option Pricing: A Simplified Approach*, "Journal of Financial Economics", No. 7, s. 229-263.

- Dixit A. i Pindyck R. (1994), *Investments under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Ferreira N., Kar J., Trigeorgis L. (2008), "Option Games": Filling the Hole in the Valuation Toolkit for Strategic Investment, "McKinsey Working Paper on Risk", No. 7.
- Huisman K., Kort P., Pawlina G., Thijssen J. (2004), *Strategic Investment under Uncertainty: Merging Real Options with Game Theory* [w:] T. Dangl, M. Kopel, W. Kürsten (eds.), *Special Issue on Real Options – Ergänzungsheft Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB)*, 3/2004, Gabler, Wiesbaden.
- Mizerka J. (2005), *Opcje rzeczywiste w finansowej ocenie efektywności inwestycji*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Poznań.
- Paliński A. (2016), *Opcje rzeczywiste w podejmowaniu decyzji inwestycyjnych na przykładzie budowy podziemnego magazynu gazu*, „Nafta-Gaz”, nr 1, s. 39-45.
- Paxson D. i Pinto H. (2005), *Rivalry under Price and Quantity Uncertainty*, "Review of Financial Economics", No. 14, s. 209-224.
- Smit H. i Trigeorgis L. (2003), *Real Options: Examples and Principles of Valuation and Strategy*, Oxford University Press, <http://hdl.handle.net/1765/12258> (dostęp: 17.06.2016).
- Smit H. i Trigeorgis L. (2004), *Strategic Investment. Real Option and Games*, Princeton University Press, Princeton–Oxford.

REAL OPTIONS AND GAME THEORY IN STRATEGIC INVESTMENT DECISION MAKING

Summary: The aim of the article is to analyze the possibility of utilization of real options in conjunction with the game theory to make investment decisions providing preemptive entry. The use of geometric random walk process allows to value an option for the investment project – as leader or follower. The calculated values of the options allow to find equilibrium strategy in the investment game for two players, who choose the strategy of the leader or the follower. The numerical example using a binomial option pricing model of Cox-Ross-Rubinstein showed surprisingly that for asymmetric players with different capital expenditures, the player with higher investment costs more likely uses the strategy of the leader.

Keywords: real option game, preemptive game, binomial model.