Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 297 · 2016

Stanisław Heilpern

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów
Katedra Statystyki
stanislaw.heilpern@ue.wroc.pl

UBEZPIECZENIA GRUPOWE MAŁŻEŃSTW UWZGLĘDNIAJĄCE ZALEŻNOŚCI*

Streszczenie: W artykule są rozpatrywane grupowe ubezpieczenia małżonków. Przyjmuje się, że w odróżnieniu od podejścia klasycznego, długości życia małżonków mogą być zależne. Struktura zależności jest opisana funkcją łączącą (ang. copula). Wyznacza się wartości aktuarialne trzech rent, a wyniki otrzymane dla różnych funkcji łączących porównuje się z wynikami uzyskanymi dla przypadku niezależności. Rozpatruje się wpływ stopnia zależności na wartości tych rent.

Słowa kluczowe: ubezpieczenia grupowe, zależność, renty, copula.

Wprowadzenie

Artykuł dotyczy grupowych ubezpieczeń małżeństw. Klasyczne podejście do tych zagadnień zakłada, że długości życia poszczególnych małżonków są niezależne [Bowers i in., 1997]. Jednak nie jest to założenie realistyczne. Małżonkowie mogą być narażeni na wspólne ryzyko powodujące zależność długości ich przyszłego życia. Można też zaobserwować wpływ śmierci jednego z małżonków na długość życia drugiego, czyli może tu występować tzw. syndrom złamanego serca [Denuit i in., 2001].

Celem artykułu jest wyznaczenie i zbadanie wartości aktuarialnych trzech rodzajów rent: $a_{xy;\bar{n}|}$, $a_{\overline{xy};\bar{n}|}$ oraz renty wdowiej, a także porównanie przypadków, gdy istnieje wzajemna zależność długości życia małżonków z klasycznie

* Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2013/09/B/HS4/00490.

stosowanym przypadkiem przyjmującym niezależność, zbadanie wpływu stopnia zależności oraz wpływu wyboru odpowiedniej funkcji łączącej na wartości aktuarialne tych rent. Struktura zależności została opisana za pomocą funkcji łączących (ang. *copula*). Artykuł jest rozszerzeniem opracowania Heilpern [2011].

W punkcie pierwszym przedstawiono ogólne pojęcia i założenia dotyczące zagadnień poruszanych w pracy. Funkcje łączące zostały omówione w punkcie drugim, z kolei renty stanowią treść następnego punktu. Ostatni, czwarty punkt zawiera analizę wartości aktuarialnej tych rent. Porównano wartości tych rent z klasycznym przypadkiem zakładającym niezależność. Zbadano też wpływ stopnia zależności na wielkości aktuarialne tych rent.

1. Ogólne pojęcia i założenia

Przedstawimy teraz podstawowe pojęcia i oznaczenia związane z zagadnieniami, które będą tu poruszane. Symbolem T_x^M będziemy oznaczać zmienną losową przedstawiającą dalsze trwanie życia x-letniego męża. Zakładamy, że zmienna ta przyjmuje wartości w skończonym przedziale [0, w_x^M], gdzie w_x^M jest górnym wiekiem x-letniego mężczyzny. Będziemy przyjmować, że $w_x^M = 100 - x.$ Podobnie określamy dalsze trwanie życia y-letniej żony T_y^K , z górnym ograniczeniem wieku w_y^K.

Niech ${}_tp_x^M$ będzie prawdopodobieństwem zdarzenia, że x-letni małżonek będzie żył jeszcze co najmniej t lat. Jest to wartość funkcji przeżycia zmiennej losowej T_x^M określonej wzorem:

$$ {}_tp_x^M = \mathrm{P}(T_x^M > t) = \mathrm{P}(T_0^M > x + t | T_0^M > x) = \frac{\mathrm{P}(T_0^M > x + t)}{\mathrm{P}(T_0^M > x)}. $$

Podobnie określamy prawdopodobieństwo ${}_tp_y^K = \mathrm{P}\left(T_y^K > t\right)$ przeżycia t lat przez y-letnią żonę. Prawdopodobieństwo to można też wyznaczyć na podstawie znajomości intensywności zgonu męża:

$$ \mu_x^M = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \mathrm{P}(T_x^M \le t) $$

formułą:

$$ {}_tp_x^M = exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}^M \, ds \right) $$

lub intensywnością zgonu żony μ_x^K.

W artykule będziemy rozpatrywać zależności między wiekiem męża i żony. W tym celu będzie nam potrzebna znajomość rozkładu łącznego zmiennych T_x^M oraz T_y^K. Łączna funkcja przeżycia, czyli prawdopodobieństwo, że oboje małżonkowie przeżyją jeszcze t-lat, będzie określone symbolem:

$$ {}_tp_{xy} = \mathrm{P}\left(T_x^M > t, T_y^K > t\right). $$

Można je również przedstawić wykorzystując bezwzględny wiek małżonków T_0^M, T_0^K liczony od ich urodzin:

$$ {}_tp_{xy} = \mathrm{P}(T_0^M > x + t, T_0^K > y + t | T_0^M > x, T_0^K > y). $$

Interesować nas też będzie prawdopodobieństwo zdarzenia, że przynajmniej jedno z małżonków przeżyje jeszcze t-lat, czyli:

$$ {}_tp_{\overline{xy}} = \mathrm{P}\left(\max\{T_x^M, T_y^K\} > t\right) = 1 - \mathrm{P}\left(T_x^M \le t, T_y^K \le t\right). \tag{1} $$

Można je też wyznaczyć, korzystając ze wzoru [Youn, Shemyakin, Herman, 2002]:

$$ {}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_{x||y}^M + {}_tp_{y||x}^K - {}_tp_{xy}, \tag{2} $$

gdzie:

$$ {}_tp_{x||y}^M = P(T_0^M > x + t | T_0^M > x, T_0^K > y) $$

jest warunkowym prawdopodobieństwem zdarzenia, że x-letni mąż przeżyje jeszcze t lat, gdy jego żona ma ponad y lat. Podobnie określamy ${}_tp_{y||x}^K$. Ponadto zachodzi zależność ${}_tp_x^M = {}_tp_{x||0}^M$. W przypadku niezależności długości trwania życia męża i żony, czyli zmiennych T_x^M, T_y^K, wzór (2) przyjmuje znaną postać [Bowers i in., 1997]:

$$ {}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x^M + {}_tp_y^K - {}_tp_{xy}. $$

W punkcie 3, przy wyznaczaniu wartości aktuarialnej renty wdowiej, potrzebne nam będzie następujące prawdopodobieństwo:

$$ {}_tp_{x|y} = \mathrm{P}\left(T_x^M \le t, T_y^K > t\right) = $$
$$ = \mathrm{P}(T_0^M \le x + t, T_0^K > y + t | T_0^M > x, T_0^K > y). $$

2. Funkcje łączące

Strukturę zależności dalszego trwania życia małżonków można opisać za pomocą funkcji łączącej (ang. *copula*). Funkcja łącząca C jest łącznikiem między dystrybuantą rozkładu łącznego a dystrybuantami rozkładów brzegowych. Dla dowolnych zmiennych losowych X, Y zachodzi wtedy relacja:

$$\mathrm{P}(X \le x,\ Y \le y) = C(\mathrm{P}(X \le x),\ \mathrm{P}(Y \le y)).$$

Podobną zależność można otrzymać dla funkcji przeżycia:

$$\mathrm{P}(X > x,\ Y > y) = C^*(\mathrm{P}(X > x),\ \mathrm{P}(Y > y)).$$

Tak określona funkcja C^* jest również funkcją łączącą spełniającą dodatkowy warunek [Nelsen, 1999]:

$$C^*(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v).$$

W przypadku niezależnych zmiennych losowych funkcja łącząca przyjmuje prostą postać iloczynu:

$$\Pi(u, v) = uv.$$

Każdą funkcję łączącą C możemy ograniczyć z dołu i z góry, korzystając z nierówności:

$$W(u, v) \le C(u, v) \le M(u, v),$$

gdzie funkcja łącząca $W(u, v) = \max\{0,\ u + v - 1\}$ oddaje silną ujemną zależność, a $M(u, v) = \min\{u, v\}$ silną dodatnią zależność. Funkcje łączące W i M są związane z dolnym i górnym ograniczeniem Frecheta prawdopodobieństw łącznych [Nelsen, 1999].

Korzystając z ograniczeń Frecheta oraz z faktu, że $M = M^*$ i $W = W^*$, można podać dolne i górne ograniczenia prawdopodobieństw zdarzeń, że oboje oraz przynajmniej jedno z małżonków przeżyje jeszcze n lat:

$$\max\{{}_tp_x^M + {}_tp_y^K - 1, 0\} \le {}_tp_{xy} \le \min\{{}_tp_x^M, {}_tp_y^K\},$$

$$1 - \min\{1 - {}_tp_x^M, 1 - {}_tp_y^K\} \le {}_tp_{\overline{xy}} \le 1 - \max\{1 - {}_tp_x^M - {}_tp_y^K, 0\},$$

$$\max\{{}_tp_y^K - {}_tp_x^M, 0\} \le {}_tp_{x|y} \le \min\{1 - {}_tp_x^M, {}_tp_y^K\}.$$

Opierając się na mierze zależności, jaką jest współczynnik korelacji rang Spearmana ρ, niezależności oraz górnych i dolnych ograniczeń Frecheta, możemy modelować strukturę zależności wykorzystując funkcję łączącą Merdii [Denuit i in., 2001]:

$$Me(u, v) = \pi_1 W(u, v) + \pi_2 \Pi(u, v) + \pi_3 M(u, v).$$

Jest to kombinacja wypukła tych trzech funkcji łączących o współczynnikach opartych na współczynniku Spearmana określonych wzorami:

$$\pi_1 = 0{,}5\rho^{2/3}(1-\rho^{1/3}),\ \pi_2 = (1-\rho^{2/3}),\ \pi_3 = 0{,}5\rho^{2/3}(1+\rho^{1/3}).$$

Wiedząc, że mogą wystąpić jedynie zależności dodatnie, a tak zwykle będzie w przypadku badania przeżycia dalszych lat małżonków, możemy zastosować funkcję łączącą Spearmana [Heilpern, 2014] opartą na niezależności, górnym ograniczeniu Frecheta oraz na współczynniku korelacji Spearmana:

$$S(u, v) = (1-\rho)\Pi(u, v) + \rho M(u, v).$$

Natomiast funkcje łączące Ali-Mikhail-Haq (AMH):

$$CA_\alpha(u,v) = \frac{uv}{1-\alpha(1-u)(1-v)},$$

oraz Farlie-Gumbela-Morgensterna (FGM):

$$CF_\alpha(u,v) = uv + \alpha uv(1-u)(1-v),$$

zależne od parametru $\alpha\in[-1; 1]$, oddają jedynie słabe zależności. Jednak możemy je śmiało zastosować, ponieważ zależności tego rodzaju zwykle występują w naszej sytuacji. Zbiór osiągalnych wartości współczynnika korelacji Spearmana jest dla funkcji AMH w przybliżeniu przedziałem [-0,271; 0,478], a dla funkcji FGM [-1/3; 1/3]. Funkcja łącząca FGM spełnia ponadto dwa istotne z punktu widzenia zastosowań warunki: jest kombinacją wypukłą skrajnych przypadków [Nelsen, 1999]:

$$CF_\alpha(u, v) = \frac{1-\alpha}{2}CF_{-1}(u, v) + \frac{1+\alpha}{2}CF_1(u, v)$$

oraz odpowiadająca jej funkcja łącząca przeżycia jest równa:

$$CF_\alpha^*(u, v) = CF_\alpha(u, v).$$

Innym przykładem funkcji łączącej jest funkcja Gumbela:

$$CG_\alpha(u,v) = \exp(-((-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha)^{1/\alpha}),$$

gdzie $\alpha > 1$. Oddaje ona dodatnie zależności zmiennych losowych.

Prawdopodobieństwa przeżycia zarówno obojga, jak i przynajmniej jednego z małżonków możemy określić korzystając z funkcji łączących. Zachodzą bowiem dla ustalonych x oraz y wzory:

$${}_tp_{xy} = \mathrm{P}(T_x^M > t, T_y^K > t) = C_{xy}^*({}_tp_x^M, {}_tp_y^K),$$

$${}_tp_{\overline{xy}} = 1 - \mathrm{P}(T_x^M \le t, T_y^K \le t) = 1 - C_{xy}(1 - {}_tp_x^M, 1 - {}_tp_y^K).$$

Funkcje łączące C_{xy} zależą od wieku małżonków: x oraz y. W praktyce jest to zwykle niewygodne i lepiej wykorzystać funkcję łączącą C_0 dotyczącą bezwzględnego, zerowego wieku małżonków:

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{xy} &= \mathrm{P}(T_0^M > x+t, T_0^K > y+t \mid T_0^M > x, T_0^K > y) = \\
&= \frac{C_0^*\left({}_{x+t}p_0^M,\ {}_{y+t}p_0^K\right)}{C_0^*\left({}_xp_0^M,\ {}_yp_0^K\right)},
\end{aligned}
$$

$$
{}_tp_{\overline{xy}} = \frac{C_0^*\left({}_{x+t}p_0^M,\ {}_yp_0^K\right) + C_0^*\left({}_xp_0^M,\ {}_{y+t}p_0^K\right) - C_0^*\left({}_{x+t}p_0^M,\ {}_{y+t}p_0^K\right)}{C_0^*\left({}_xp_0^M,\ {}_yp_0^K\right)},
$$

ponieważ:

$$
{}_tp_{x||y}^M = \frac{C_0^*\left({}_{x+t}p_0^M,\ {}_yp_0^K\right)}{C_0^*\left({}_xp_0^M,\ {}_yp_0^K\right)},
$$

$$
{}_tp_{x|y} = \frac{C_0^*\left({}_xp_0^M,\ {}_{y+t}p_0^K\right) - C_0^*\left({}_{x+t}p_0^M,\ {}_{y+t}p_0^K\right)}{C_0^*\left({}_xp_0^M,\ {}_yp_0^K\right)}.
$$

Ponadto zachodzi zależność:

$$
{}_tp_{\overline{xy}} = 1 - \frac{C_0\left({}_{x+t}p_0^M,\ {}_{y+t}p_0^K\right)}{C_0^*\left({}_xp_0^M,\ {}_yp_0^K\right)}.
$$

3. Renty

W artykule będą rozpatrywane trzy rodzaje rent. Pierwszą z nich będzie stała renta wypłacana przez n lat małżeństwu: x-letniemu mężowi i y-letniej żonie, gdy oboje żyją. Jeśli tak określone świadczenie będzie wynosić jednostkę pieniężną, to wartość aktuarialna jest określona wzorem:

$$
a_{xy;\bar{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k\ {}_kp_{xy},
$$

gdzie $v = (1+\xi)^{-1}$, a ξ jest techniczną stopą zwrotu.

Drugą rentą będzie świadczenie wypłacane przez n lat, gdy przynajmniej jeden współmałżonek żyje. Jej wartość aktuarialna jest równa:

$$
a_{\overline{xy};\bar{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k\ {}_kp_{\overline{xy}}.
$$

W obydwu przypadkach można też rozpatrywać renty dożywotnie:

$$a_{xy} = a_{xy;\overline{\infty}|}, a_{\overline{xy}} = a_{\overline{xy};\overline{\infty}|}.$$

Natomiast renta wdowia gwarantuje y-letniej wdowie wypłatę aż do jej śmierci, po śmierci x-letniego męża. Wartość aktuarialna tej renty wynosi:

$$a_{x|y} = \sum_{k=1}^{w_y^K} v^k \, {}_k p_{y||x}^K.$$

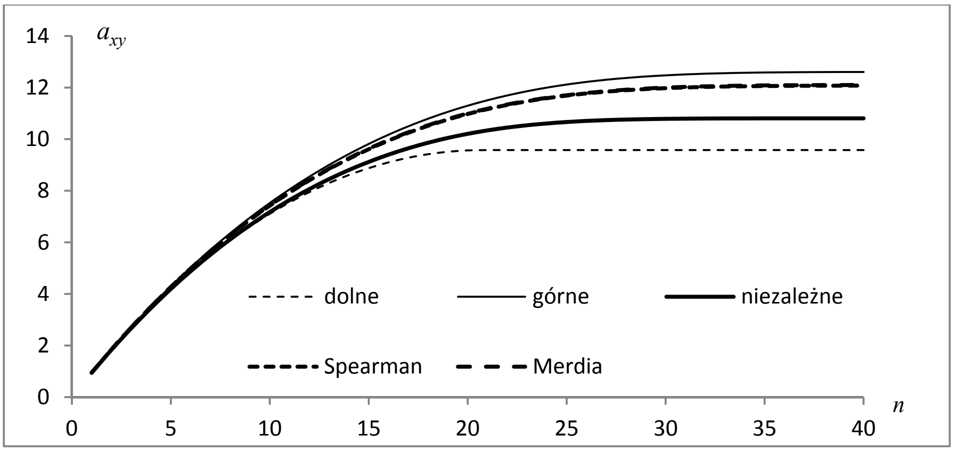
Symbolami $a_{xy;\overline{n}|}^{\perp}$, $a_{\overline{xy};\overline{n}|}^{\perp}$, $a_{x|y}^{\perp}$ będziemy oznaczać wartości aktuarialne tych rent, gdy zmienne losowe T_x^M, T_y^K są niezależne.

4. Wartości aktuarialne rent

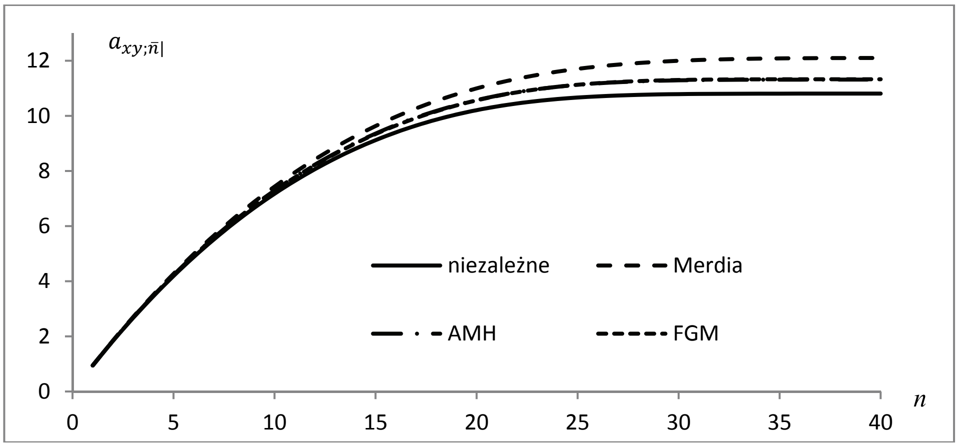
Denuit i in. [2001] przeprowadzili badania dotyczące zależności długości życia współmałżonków. Jedno badanie było oparte na modelu wykorzystującym łańcuch Markowa. Wykorzystano w tym przypadku zagregowane dane z belgijskiego urzędu statystycznego NIS. W drugim badaniu struktura zależności została scharakteryzowana za pomocą funkcji łączących. Niestety w tym przypadku potrzebne były szczegółowe, a nie zagregowane dane. Tych danych nie można było otrzymać od urzędu NIS. Autorzy zebrali je z brukselskich cmentarzy. Współczynnik korelacji rang Spearmana długości życia współmałżonków był równy 0,139. Do otrzymanych danych najlepiej była „dopasowana" funkcja łącząca Gumbela z parametrem $\alpha = 1{,}1015$.

Podobne badania zostały przeprowadzone w Polsce i opublikowane w pracy Heilpern [2011]. Dane szczegółowe liczące 360 jednostek dotyczące długości życia współmałżonków zostały zebrane z dwóch cmentarzy wrocławskich. W tym przypadku otrzymano większą zależność. Współczynnik korelacji Spearmana wynosił $\rho = 0{,}235$, a funkcja łącząca AMH z parametrem $\alpha = 0{,}5879$ najlepiej „pasowała" do danych empirycznych.

Przyjmijmy najpierw, że małżonkowie mają po 60 lat, czyli $x = y = 60$. Wyznaczymy dla różnych n wartości aktuarialne rent $a_{xy;\overline{n}|}$ oraz $a_{\overline{xy};\overline{n}|}$, gdy dalsze długości ich życia są niezależne oraz gdy ich łączny rozkład jest opisany za pomocą funkcji łączącej Merdia i Spearmana dla $\rho = 0{,}235$. Sytuacja ta razem z górnymi i dolnymi ograniczeniami wartości aktuarialnych renty $a_{xy;\overline{n}|}$ została przedstawiona na rys. 1a). Można zauważyć, że między wartościami aktuarialnymi renty, gdy struktura zależności jest opisana funkcjami łączącymi Merdia i Spearmana, nie ma praktycznie różnicy, a wartości te są większe niż w przypadku niezależności. Oznacza to, że gdyby rzeczywista zależność była opisana funkcją łączącą Merdia lub Spearmana, a w praktyce przyjęlibyśmy niezależność, to wartości aktuarialne tej renty byłyby niedoszacowane. Różnica ta rosłaby wraz ze wzrostem czasu realizacji renty *n*, ale stabilizowałaby się po *n* = 30 latach. Rzeczywista wartość byłaby o 12,0% większa, górna granica o 16,6% większa, a dolna o 11,4% mniejsza.



a)



b)

Rys. 1. Wartości aktuarialne renty $a_{xy;\bar{n}|}$ dla różnych funkcji łączących

Źródło: Opracowanie własne.

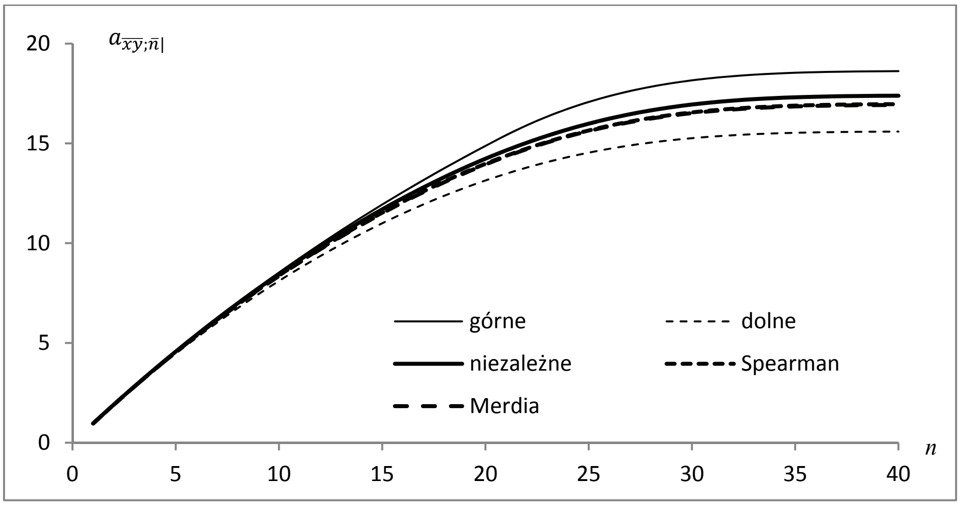
Na rysunku 1b) zostały przedstawione wartości aktuarialne renty $a_{xy;\bar{n}|}$, gdy struktura zależności bezwzględnego (zerowego) wieku małżonków została opisana za pomocą funkcji łączącej AMH, FGM, niezależności oraz Merdia. Parametry funkcji łączących zostały tak dobrane, aby odpowiadający im współczynnik rang Spearmana wynosił $\rho = 0{,}235$ – tyle, ile otrzymano w badaniach przedstawionych w pracy Heilpern [2011]. Dla funkcji łączącej AMH parametr był równy $\alpha = 0{,}5879$, dla funkcji FGM $\alpha = 0{,}7049$, a dla funkcji Merdia $\pi_1 = 0{,}0729$, $\pi_2 = 0{,}6192$ oraz $\pi_3 = 0{,}3079$. I w tym przypadku, przyjmując niezależność, nie doszacowujemy wartości tej renty, gdyby rzeczywista struktura zależności długości życia współmałżonków byłaby opisana funkcją łączącą AMH lub FGM. Wartości aktuarialne renty dla tych dwóch funkcji łączących również są praktycznie nierozróżnialne. Nie jest więc istotne w tym przypadku, którą funkcję łączącą wybierzemy do obliczeń. Powyżej $n = 30$ lat następuje stabilizacja, a wartości tak wyznaczonej renty są wtedy większe o 4,5% od renty otrzymanej, gdy zakładamy niezależność, oraz o 6,9% mniejsze, gdyby struktura zależności była opisana za pomocą funkcji łączącej Merdia (patrz tabela 1). W tabeli 1 znajdują się względne wartości aktuarialne renty $a_{xy;\bar{n}|}$ dla różnych funkcji łączących. Za punkt odniesienia przyjęto funkcję łączącą AMH.

Tabela 1. Wartości aktuarialne renty $a_{xy;\bar{n}|}$ dla różnych funkcji łączących

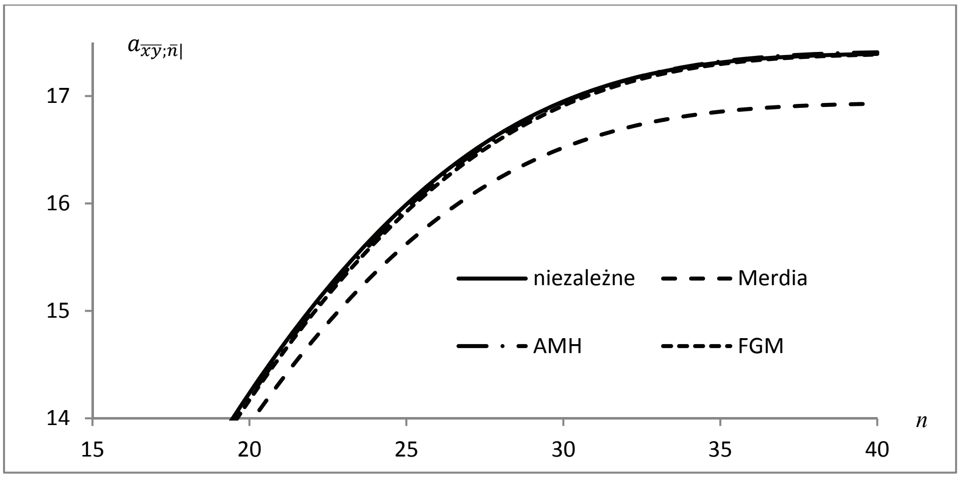
n	5	10	20	30	40
AMH	4,229	7,295	10,573	11,289	11,316
Niezależne	0,992	0,984	0,965	0,956	0,955
Merdia	1,010	1,019	1,040	1,063	1,069
Spearman	1,009	1,018	1,038	1,061	1,067
FGM	0,999	0,998	0,999	1,001	1,001

Źródło: Opracowanie własne.

W przypadku renty $a_{\overline{xy};\bar{n}|}$ sytuacja jest odwrotna. Przyjęcie założenia o niezależności długości trwania życia małżonków spowoduje przeszacowanie wartości aktuarialnej tej renty, gdyby zależność ta była opisana w rzeczywistości funkcją łączącą AHM czy FGM. Jednak różnice te są minimalne. Gdybyśmy przyjęli funkcję łączącą Merdia, to różnica nie przekroczy 2,8%, a dla przypadków skrajnych, dolnego i górnego ograniczenia nie będzie większa niż 10%. Natomiast stabilizacja dla większych wartości *n* jest w tym przypadku trochę mniejsza. Odpowiednie wykresy znajdują się na rys. 2a i 2b. W tym przypadku z praktycznego punktu widzenia nie jest w zasadzie istotne, jaką funkcję łączącą weźmiemy do wyznaczania aktuarialnej wartości renty. Można śmiało założyć nawet niezależność długości życia małżonków.



a)

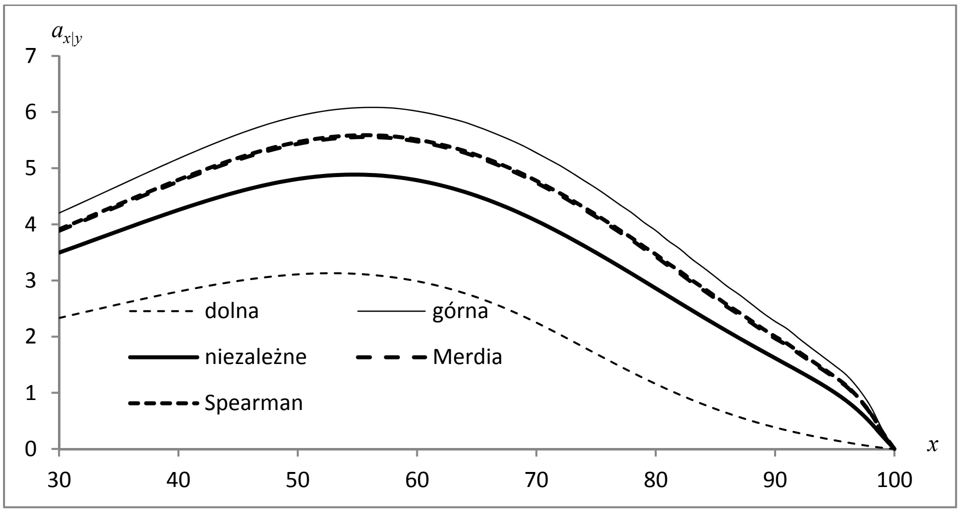


b)

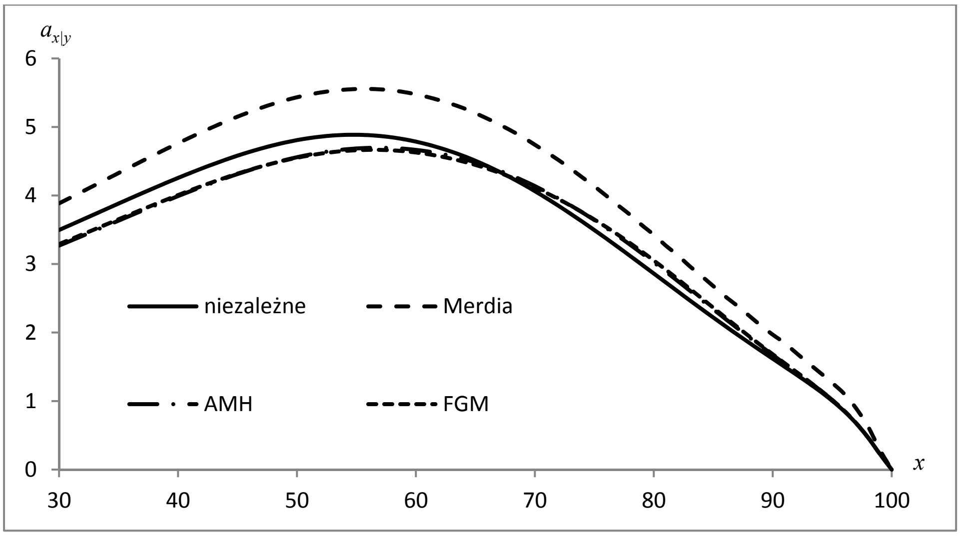
Rys. 2. Wartości aktuarialne renty $a_{\overline{xy};\overline{n}|}$ dla różnych funkcji łączących

Źródło: Opracowanie własne.

Na rysunku 3 przedstawiono wykresy wartości aktuarialnych renty wdowiej $a_{x|y}$ dla różnego wieku x śmierci męża. Największe wartości, gdy założymy niezależność długości życia małżonków, występują dla $x = 55$. Wtedy dolna granica jest mniejsza o 35%, a górna większa o 30%. Różnice te są wyraźnie większe niż w przypadku dwóch pierwszych rent. Dolna granica wraz ze wzrostem wartości x dąży gwałtownie do zera. Natomiast gdy struktura zależności jest opisana funkcjami łączącymi Merdia lub Spearmana, otrzymujemy wartości aktuarialne renty wdowiej mniejsze niż w przypadku niezależności.



a)



b)

Rys. 3. Wartości aktuarialne renty wdowiej dla różnych funkcji łączących

Źródło: Opracowanie własne.

Porównując wartości aktuarialne renty wdowiej dla przypadku, gdy struktura zależności jest opisana funkcjami łączącymi AMH i FGM z klasycznym założeniem o niezależności, otrzymujemy sytuację odmienną niż dla pozostałych dwóch rent. W tym przypadku dla wieku $x \leq 66$ wartości aktuarialne renty dla niezależności są większe niż dla funkcji łączących AMH i FGM. To znaczy przyjmując założenie o niezależności wieku małżonków, gdy w rzeczywistości ich struktura zależności jest opisana funkcją łączącą AMH lub FGM, które są w zasadzie nierozróżnialne, przeszacowujemy ich wartości. Różnice jednak nie przekraczają 7% (tabela 2). Dla wieku $x > 66$ wartości dla niezależności są już mniejsze, wystąpi efekt niedoszacowania, jednak już trochę mniejszy.

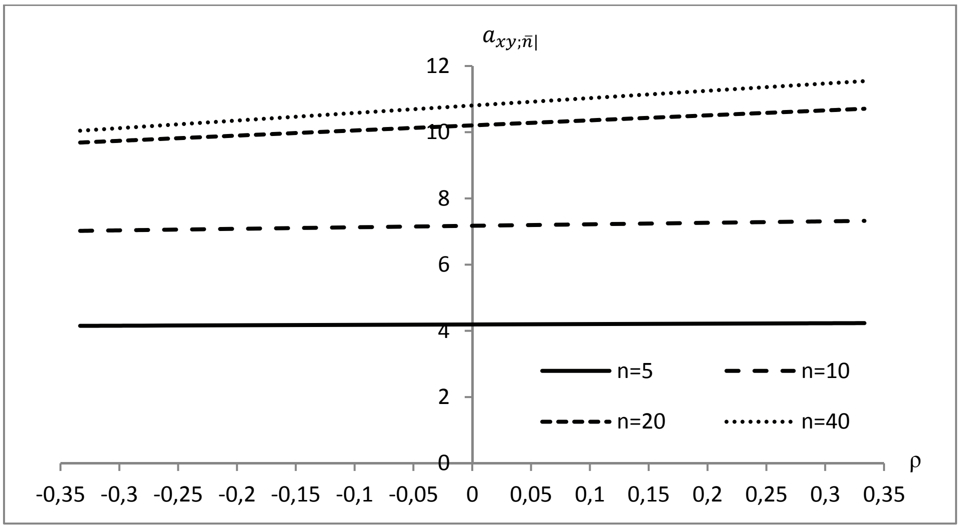
Tabela 2. Wartości aktuarialne renty wdowiej dla różnych funkcji łączących

x	30	40	50	55	60	70	80	90
AMH	3,270	3,992	4,559	4,687	4,666	4,138	3,024	1,673
Niezależne	1,069	1,066	1,055	1,043	1,026	0,982	0,946	0,967
Merdia	1,188	1,193	1,192	1,185	1,174	1,146	1,134	1,177
Spearman	1,196	1,201	1,199	1,192	1,181	1,154	1,146	1,197
FGM	1,006	1,004	0,998	0,995	0,992	0,995	1,009	1,006

Źródło: Opracowanie własne.

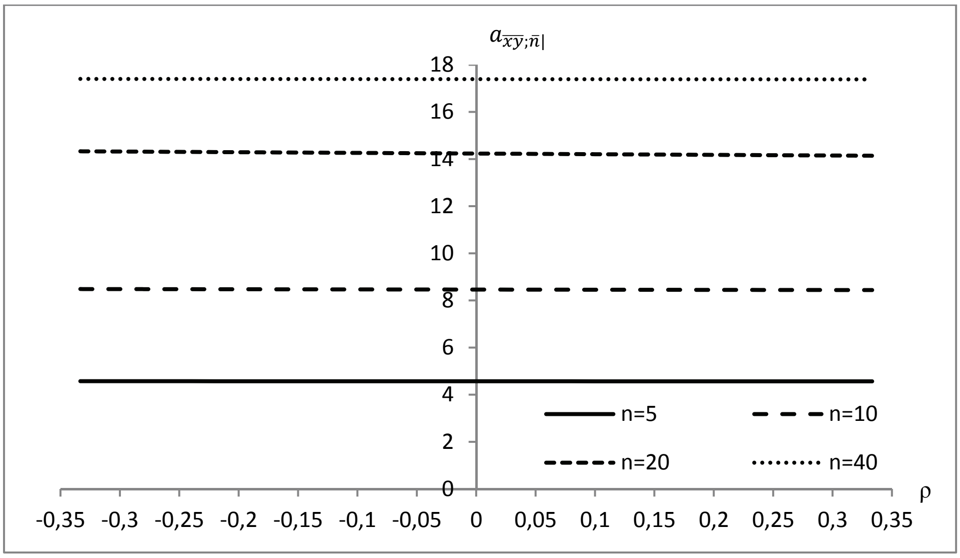
Przeprowadzimy teraz analizę wpływu stopnia zależności na wartość aktuarialną wspomnianych rent. W tym celu założymy, że struktura zależności jest opisana funkcją łączącą FGM. Na rysunku 4 przedstawiono wykres wartości aktuarialnych renty $a_{xy;\overline{n}|}$ w zależności od różnych wartości parametru tej funkcji łączącej oddających wartości współczynnika korelacji rang Spearmana ρ. Rozpatrzono cztery przypadki długości trwania renty n = 5, 10, 20 i 40. Widzimy, że wraz ze wzrostem wartości stopnia zależności rosną wartości aktuarialne renty oraz wzrost ten jest większy. Zależności są prawie liniowe. Natomiast w przypadku renty $a_{\overline{xy};\overline{n}|}$ (rys. 5) wykresy wartości aktuarialnej tej renty są prawie stałe. Zależność jest tutaj nieznacznie malejąca.

W przypadku renty wdowiej nie ma już takiej regularności (rys. 6). Rozpatrzone zostały trzy przypadki wieku x śmierci męża: 50, 65 oraz 90. Dla $x = 50$ wartość aktuarialna renty wdowiej maleje prawie liniowo wraz ze wzrostem stopnia zależności. W przypadku $x = 68$ stopień zależności nie ma większego wpływu na wielkość renty, przyjmuje ona prawie stałą wartość 4,258. Natomiast dla wieku $x = 90$ wartości renty nieznacznie rosną wraz ze wzrostem wartości współczynnika korelacji. Wzrost ten jest większy dla ujemnych wartości tego współczynnika.



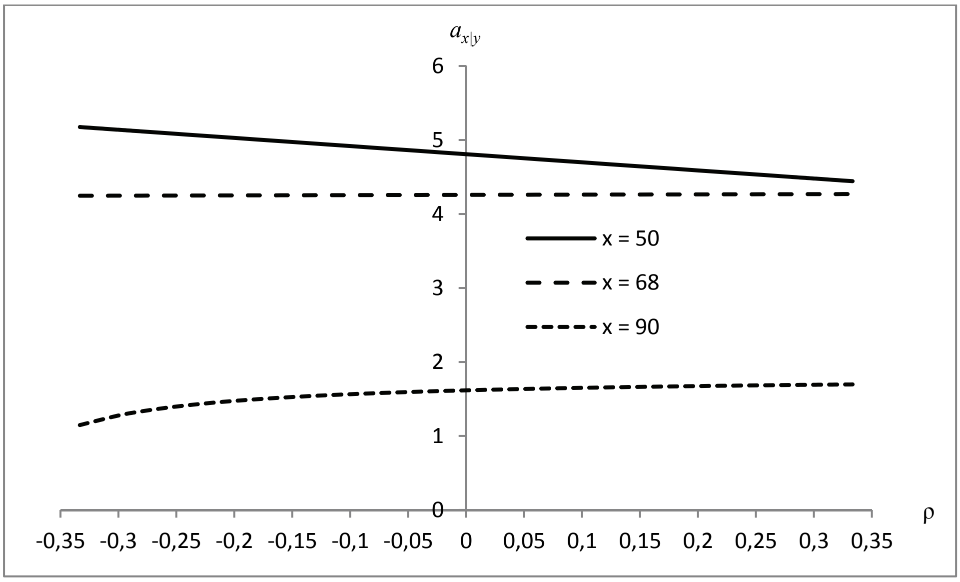
Rys. 4. Wartości aktuarialne renty $a_{xy;\bar{n}|}$ dla różnych wartości stopnia zależności

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 5. Wartości aktuarialne renty $a_{\overline{xy};\bar{n}|}$ dla różnych wartości stopnia zależności

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 6. Wartości aktuarialne renty wdowiej dla różnych wartości stopnia zależności

Źródło: Opracowanie własne.

Podsumowanie

W artykule rozpatrywano grupowe ubezpieczenia małżeństw. W odróżnieniu od klasycznego podejścia, zakładającego niezależność długości życia małżonków, przyjęto ich zależność. Strukturę zależności opisano funkcją łączącą. Wyznaczono wartości aktuarialne trzech rodzajów rent. Porównywano ich wartości dla przypadku niezależności oraz struktury zależności zadanej funkcjami łączącymi uwzględniającymi stopień zależności zadany współczynnikiem korelacji Spearmana zgodny z badaniami empirycznymi.

Otrzymane wyniki wskazują jednak na niezbyt duże różnice tych wartości, zwłaszcza w przypadku renty $a_{\overline{xy};\bar{n}|}$. Nie ma większego znaczenia, czy wykorzystujemy do obliczeń wartości aktuarialnych tych rent funkcję łączącą AMH czy FGM. Nieco większe różnice występują, gdy porównujemy klasyczny przypadek niezależności z tymi funkcjami łączącymi. Dla renty $a_{xy;\bar{n}|}$ różnica ta nie przekracza 5%, a dla renty wdowiej nie jest większa niż 6%. Większe różnice występują w przypadku funkcji łączącej Merdia, ale nie przekraczają one 12% dla renty $a_{xy;\bar{n}|}$ oraz 21% dla renty wdowiej. W przypadku renty $a_{\overline{xy};\bar{n}|}$ różnice te są minimalne, w najgorszym razie nie większe niż 3%.

Przedstawione w artykule wyniki mogą pomóc w wyznaczaniu wartości aktuarialnych wybranych rent w bardziej realistyczny sposób niż klasyczny model przyjmujący niezależność. Dzięki temu można uniknąć przeszacowania czy niedoszacowania tych wartości. Jest to ważne z punktu widzenia działalności firmy ubezpieczeniowej. Ponadto uzyskane wyniki wskazują, że nie jest w zasadzie istotne, jaką funkcję łączącą wybierzemy. Często wystarczy sama znajomość stopnia zależności długości życia małżonków.

Literatura

Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J., Jones D.A., Nesbitt C.J. (1997), *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois.

Denuit M., Dhaene J., Le Bailly de Tilleghem C., Teghem S. (2001), *Measuring the Impact of a Dependence among Insured Lifelengths*, „Belgian Actuarial Bulletin", No 1 (1).

Heilpern S. (2011), *Wyznaczanie wielkości renty w zależnych grupowych ubezpieczeniach na życie*, „Prace Naukowe UE Wrocław", nr 230.

Heilpern S. (2014), *Ruin Measures for a Compound Poisson Risk Model with Dependence Based on the Spearman Copula and the Exponential Claim Sizes*, „Insurance: Mathematics and Economics", No 59.

Nelsen R.B. (1999), *An Introduction to Copulas*, Springer, New York.

Youn H., Shemyakin A., Herman E. (2002), *A Re-examination of Joint Mortality Functions*, „North Amer. Actuarial J.", No 6 (1).

MULTIPLE LIFE INSURANCES OF SPOUSES TAKING INTO ACCOUNT DEPENDENCES

Summary: The multiple life insurance of spouses are investigated. We assumed that the lifelenghts of spouses may be dependent in contrast to classical approach. The dependent structure is described by the copula. We compute the actuarial values of three annuities and we compare the results obtained for different copulas with those obtained for the independence. We investigate the impact of the degree of dependence on the value of such annuities.

Keywords: multiple life insurance, dependence, annuities, copula.