Uniwersytet
Ekonomiczny
w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 297 · 2016

Anna Janiga-Ćmiel

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Zarządzania
Katedra Matematyki
anna.janiga-cmiel@ue.katowice.pl

WIELORÓWNANIOWY MODEL DYNAMIKI GOSPODARKI POLSKI I NIEMIEC

Streszczenie: Celem zaprezentowanych w niniejszym artykule badań jest analiza współzależności kształtowania się rozwoju gospodarczego Polski i Niemiec. Zostaną tu przedstawione wielorównaniowe modele GARCH prezentujące wzajemne relatywne powiązania w zakresie dynamiki rozkładów empirycznych, ze szczególnym zwróceniem uwagi na dynamikę wartości oczekiwanych i wariancji.

Słowa kluczowe: model GARCH, rozwój gospodarczy, zmienność.

Wprowadzenie

Pojawiające się problemy z efektywnością wzrostu gospodarczego wymuszają poszukiwanie wykorzystania szans i możliwości jego osiągnięcia. Gospodarka, wzrost gospodarki są pojęciami bardzo skomplikowanymi.

Teorie wzrostu gospodarczego mogą być różne, zależą między innymi od tego, czy mamy do czynienia z gospodarką rozwiniętą, czy gospodarkami rozwijającymi się. W literaturze światowej znajdujemy propozycje analizy wybranych czynników wzrostu gospodarczego, które były rozpatrywane w dotychczasowych teoriach [Noga, Stawicka, 2001]. Nieustannie przeprowadzane badania w dziedzinie identyfikacji cyklu koniunkturalnego czy też związanymi z nimi recesjami występującymi od zawsze dały podstawę rozwiązań wielu przyczyn ich powstawania, wzbogacając nasze doświadczenia i obserwacje.

Prace A.F. Burnsa i W.C. Mitchella, jako jednych z pierwszych autorów klasycznej definicji cyklu, były przełomowe w badaniach koniunktury. Wyniki tych badań zaprezentowano w pracy opublikowanej przez nich w 1946 roku pt. *Measuring business cycles.* Według badaczy klasyczna definicja cyklu koniunkturalnego jest definiowana jako rodzaj wahań obserwowanych w działalności gospodarczej narodów organizujących swą produkcję głównie w przedsiębiorstwach [Burns, Mitchell, 1946].

Przeprowadzane badania są również związane ze zjawiskiem zanikających cykli koniunkturalnych w okresach długotrwałej prosperity [Drozdowić-Bieć, 2006]. Dodatkowo rozwój globalizacji, postęp techniczny, zmiany polityczne istotnie wpływają na postępującą synchronizację cykli koniunkturalnych na świecie. Z drugiej strony każdy cykl różni się od następnego i poprzedniego, co stwarza badaczom problemy w konstruowaniu modeli czy też znajdowaniu uniwersalnych narzędzi kształtowania gospodarek.

Problematyka synchronizacji cykli koniunkturalnych występujących ewentualnych zależności pomiędzy wahaniami gospodarczymi była poddawana analizie między innymi przez Kaisera [2005]. Na podstawie uzyskanych wyników Autor udowodnił, że gospodarka niemiecka, austriacka, francuska, holenderska i belgijska charakteryzują się silnym poziomem synchronizacji cykli koniunkturalnych.

Natomiast Azevedo [2002] wykazał, że cykle koniunkturalne występujące w Szwecji, Finlandii, Wielkiej Brytanii oraz Stanach Zjednoczonych charakteryzują się zjawiskiem wyprzedzania koniunktury strefy euro o ponad rok, z drugiej strony Holandia, Włochy, Japonia oraz Hiszpania charakteryzują się słabszym tempem wyprzedzania, nieprzekraczającym roku.

Ekonomiści Dickerson, Gibson i Tsakalotos [1998] na podstawie przeprowadzanych badań stwierdzają, że amplitudy cykli koniunkturalnych krajów Unii Europejskiej charakteryzują się znaczącymi różnicami, a czynnikiem istotnie wpływającym na stopień ich synchronizacji są występujące związki handlowo-finansowe.

Wynne i Koo [2000] udowodnili, że wpływ na synchronizację koniunktury gospodarczej ma również wymiana handlowa. W swoich pracach uwzględniają tak zwany efekt sąsiedztwa. Polega on na tym, że zwiększona synchronizacja cykli koniunkturalnych jest zauważalna w krajach sąsiadujących, które wykazują większą skłonność do wymiany handlowej niż kraje od siebie oddalone.

Bergman [2004] w swoich pracach udowodnił, że europejskie cykle koniunkturalne są do siebie w wysokim stopniu dopasowane, natomiast poziom synchronizacji jest niższy w okresach niskiej zmienności kursu walutowego.

Reasumując, należy zauważyć, że przez wiele lat powstały różnorodne teorie mające na celu próbę wyjaśnienia istoty problematyki rozwoju gospodarczego, lecz żadna z nich w pełni go nie opisuje. Rozważana problematyka jest bardzo złożonym zjawiskiem, występujące wahania aktywności gospodarczej są zauważalne we wszystkich dziedzinach życia społeczno-gospodarczego, co znajduje swoje odbicie w trudności znalezienia właściwych narzędzi i metod badawczych.

Celem opracowania jest analiza porównawcza rozwoju gospodarczego wybranych krajów: Polski i Niemiec z wykorzystaniem modeli GARCH.

W analizie porównano Polskę z Niemcami, ponieważ jest to państwo, w którym zjednoczenie dwóch państw znacząco wpłynęło na postać systemu gospodarczego, dodatkowo osłabiając jego gospodarkę. Wprowadzane transformacje mające na celu wyrównanie poziomu życia w obu częściach krajów pogarszały wyniki gospodarcze poprzez między innymi brak zdolności do jednoczesnego reagowania na niepokojące zmiany ekonomiczne.

Zaprezentowano etapy konstrukcji oraz postać wielorównaniowego modelu GARCH, który pozwala opisać między innymi zmienne wariancje oraz kowariancje prezentujące wzajemne relacje między badanymi zjawiskami.

Na podstawie wybranych danych empirycznych wyznaczono omawiany model, który może stanowić podstawę podejmowania decyzji pod kątem dalszego rozwoju gospodarczego oraz umożliwić przeprowadzenie analizy niektórych przyczyn zmienności [Fiszeder, 2009]. Zarówno heteroskedastyczność analizowanych procesów rozwoju gospodarczego, jak i autokorelacja składnika reszt mają wpływ na kształtowanie się w rozpatrywanych okresach efektu ARCH.

1. Dane empiryczne

W celu przedstawienia analiz dla wybranych państw (Polska, Niemcy) przygotowano dane empiryczne, korzystając z danych publikowanych przez Główny Urząd Statystyczny oraz na stronie Eurostatu − dane o rocznym poziomie PKB. Wskaźnik PKB stanowi podstawową determinantę zmian w rozwoju gospodarek i zarazem czynnik kształtujący wahania koniunkturalne [Hellwig, 1997]. Za okres analizy przyjęto lata 2001-2012. Wyznaczono wskaźniki rozwoju gospodarczego, dzieląc produkt krajowy brutto przez liczbę ludności w danym kraju. PKB pełni rolę zmiennej syntetycznej [Yamarone, 2006] charakteryzującej w pewnym ujęciu sytuację ekonomiczną kraju, stanowi również miarę poziomu koniunktury gospodarczej w badanym kraju [Hadaś-Dyduch, 2014].

Analizę poszerzono o dostępne w Rocznikach Statystycznych informacje na temat podobnych czynników, jakie uwzględniono do opisu kształtowania zmienności rozwoju gospodarczego wybranych państw [Hadaś-Dyduch, 2015].

W pierwszym etapie badania w celu oszacowania odpowiedniego modelu wyznaczono model ARIMA(1,1,1) [Janiga-Cmiel, 2013]. Następnie wykazano, że analizowany składnik losowy jest obciążony autokorelacją [Hosking, 1980; Doman, Doman, 2004]. Wykazano również, że składnik losowy jest heteroskedastyczny [Hong, Shehadeh, 1999] i występują okresy pogrupowanej wariancji [Engel, 1987]. W celu wykrycia występowania efektu ARCH zastosowano zaproponowany w literaturze test Ljunga-Boxa [Demos, Sentana, 1998]. W kolejnym kroku wyznaczone składniki losowe modeli uwzględniono do konstrukcji wielorównaniowego modelu GARCH [Janiga-Ćmiel, 2013].

2. Ogólna postać wielorównaniowego modelu GARCH dla szeregu czasowego

Analizujemy wielowymiarowy proces rozwojów gospodarczych wybranych państw [Engle, 1982]:

$$y_t = (y_{1t},..., y_{kt})^T . \quad (1)$$

Prognozując stany oczekiwane wartości y_t, możemy uwzględnić między innymi model ARIMA(*p,q,s*), gdzie:

$$E(y_t | y_{t-1}, y_{t-2},..., y_{t-p}) = \mu(y_t) . \quad (2)$$

Uzyskujemy wówczas wartości oczekiwane stanu rozwoju gospodarczego w analizowanym okresie *t*. Prognozując wariancję procesów rozwoju gospodarczego, możemy uwzględnić na przykład modele klasy GARCH [Vrontos, Dellaportas, Politis, 2003]. Wyznaczamy wówczas macierz H_t:

$$H_t = E(\varepsilon_t \varepsilon_t^T | y_{t-1},..., y_{t-p}) = Var(\varepsilon_t | y_k : k = t-1,..., t-p) . \quad (3)$$

Zdefiniowana w ten sposób macierz wariancji i kowariancji warunkowej będzie stanowiła podstawę konstrukcji modelu klasy GARCH.

Model ARIMA(*p,q,s*) przedstawiający dynamikę zmiennej y_t uwzględnia reszty modelu η_t. Wówczas macierzą przekształcającą reszty modelu ARIMA w reszty modelu GARCH będzie macierz $H_t^{\frac{1}{2}}$ i przekształcenie to przyjmuje postać:

$$\varepsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} \eta_t . \quad (4)$$

Przekształcenie to można zaprezentować dla przypadku dwuwymiarowego za pomocą równania macierzowego:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11,t}^{\frac{1}{2}} & h_{12,t} \\ h_{12,t} & h_{22,t}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Równanie to wiąże składowe reszt ε_t i η_t za pomocą ocen wariancji i kowariancji warunkowej macierzy H_t. W następnym kroku przekształcamy macierz wariancji i kowariancji do postaci:

$$\begin{bmatrix} h_{11,t}^{\frac{1}{2}} & h_{12,t} \\ h_{12,t} & h_{22,t}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11,t}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ h_{12,t} & h_{22,t}^{\frac{1}{2}} - \frac{h_{12,t}^2}{h_{11,t}^2} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Uwzględniając przekształconą w ten sposób macierz, transformatę reszt ε_t na η_t definiujemy w postaci:

$$\begin{cases} \varepsilon_{1t} = h_{11,t}^{\frac{1}{2}} \cdot \eta_{1t} \\ \varepsilon_{2t} = h_{12,t} \cdot \eta_{1t} + \left(h_{22,t}^{\frac{1}{2}} - \frac{h_{12,t}^2}{h_{11,t}^{\frac{1}{2}}} \right) \eta_{2t} \end{cases}. \tag{7}$$

Zależność jednych i drugich reszt gwarantuje odpowiednio:

$$E(\varepsilon_t | \, \varepsilon_u : u < t) = 0,$$

$$V(\varepsilon_t | \, \varepsilon_u : u < t) = P H_t P^T, \tag{8}$$

Wyznaczenie powyższych zależności jest konieczne przy konstrukcji modelu vech. Macierz P występująca w równaniu (8) to macierz podobieństwa macierzy wariancji i kowariancji reszt z macierzą rzeczywistą. W przypadku gdyby wyznaczona macierz P była macierzą jednostkową, wówczas otrzymalibyśmy najsilniejsze z możliwych podobieństwa tych macierzy. Wielowymiarowy proces rozwoju gospodarczego wybranych państw, którego dane wyjściowe są przedstawione w macierzy (1), ma wymiar kxn, gdzie k to ilość porównywanych krajów, a n to ilość dokonanych obserwacji. Przedstawiony model wymaga skonstruowania modelu vech, na podstawie którego należy wyznaczyć elementy dolnego trójkąta macierzy $\alpha^{(i)}$. Liczba tych elementów będzie określana wzorem:

$$[k+(k+1)+\cdots+1]^2=\left[\frac{(1+k)k}{2}\right]^2. \tag{9}$$

Model powinien uwzględniać wyraz wolny różny od zera:

$$h_{ij}=\alpha_{ij}+\sum_{i=1}^{q}\alpha_{kl}^{(i)}\varepsilon_{k,t-i}\,\varepsilon_{l,t-i}+\sum_{j=1}^{p}\beta_{kl}^{(j)}h_{kl,t-1}. \tag{10}$$

Dla $k = 2$, $p = q = 1$ model przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} \\ h_{21t} & h_{22t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}+$$
$$+\begin{bmatrix} h_{11,t-1} & h_{12,t-1} \\ h_{21,t-1} & h_{22,t-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Dodatkowo zakładamy, że $\alpha_{12}=\alpha_{21}$, $\beta_{12}=\beta_{21}$ ze względu symetrię całego modelu. W analogiczny sposób przeprowadzamy konstrukcję modeli dla przypadku $k \geq 3$.

Macierz $\tilde{H}_t$ jest warunkową macierzą wariancji i kowariancji szeregów czasowych procesów badanych rozwojów gospodarczych stopnia k, gdzie k to ilość porównywanych gospodarek. Za pomocą P oznaczono diagonalną macierz stopnia k. Przez $\tilde{H}_t$ oznaczamy unormowaną macierz H_t otrzymaną w wyniku przekształcenia:

$$\tilde{H}_t = PH_tP^T. \tag{12}$$

Uwzględniając znaną macierz korelacji, macierz tę można przedstawić za pomocą wzoru:

$$\tilde{H}_t=(r_{ij}\sqrt{h_{ii,t}\cdot h_{jj.t}}). \tag{13}$$

Proces losowy spełnia relację $\tilde{\varepsilon}_t = P\varepsilon_t$ i jest procesem, który podlega charakterystyce VEC-GARCH(p,q). W celu oszacowania parametrów modelu z poszerzoną macierzą kowariancji $\tilde{H}_t$ wyznaczamy zmodyfikowany model vech uwzględniający w opóźnieniach macierzy H_t macierz $\tilde{H}_t$ [Franco, Zakoian, 2009]:

$$vech(\tilde{H}_t)=\tilde{\omega}+\sum_{i=1}^{q}\tilde{\alpha}^{(i)}vech(\tilde{\varepsilon}_{t-i}\,\tilde{\varepsilon}^T{}_{t-i})+\sum_{j=1}^{p}\tilde{\beta}^{(j)}vech(\tilde{H}_{t-j}). \tag{14}$$

W powyższym modelu macierz współczynników przy opóźnieniach oznaczamy odpowiednio:

$\tilde{\alpha}^{(i)}$ – macierz współczynników przy opóźnieniach składnika losowego,

$\tilde{\beta}^{(j)}$ – macierz współczynników przy opóźnieniach macierzy wariancji i kowariancji, przy czym $\tilde{\omega}$ to wyrażenia stałe w poszczególnych modelach:

$$\tilde{\alpha}^{(i)} = \alpha^{(i)}, \ \tilde{\beta}^{(i)} = \beta^{(i)}. \tag{15}$$

Macierz P to macierz losowa powiązań między procesami losowymi $\varepsilon_t, \tilde{\varepsilon}_t$:

$$\varepsilon_t = P^{-1} \tilde{\varepsilon}_t. \tag{16}$$

Przekształcone reszty modelu wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$\tilde{\varepsilon}_t = P \ \cdot \varepsilon_t. \tag{17}$$

Macierz stałych:

$$\tilde{\omega} = P \ \cdot \omega. \tag{18}$$

Uwzględniając powyższe zależności, otrzymujemy:

$$h_{sr,t} = \omega_{mr} + \sum_{i=1}^{q} \varepsilon_{t-i}^{T} \alpha_{sr}^{(i)} \varepsilon_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{\substack{s'r'=1 \\ s'>r'}}^{k} \beta_{sr,s'r'}^{(j)} h_{s'r',t-j}. \tag{19}$$

Macierz wariancji i kowariancji warunkowej będzie oznaczona w analizie za pomocą H_t i będzie miała postać $H_t = [h_{ij,t}], i, j = 1,...,5$.

Wprowadzamy oznaczenia:

$$h_t = vech[H_t] = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{22} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Macierz powyższą przedstawiamy jako wektor kolumnowy wierszami kolejno do środkowego wyrazu h_{ij} wiersza dla $i \le j$. Zaprezentowana macierz H_t uwzględnia odpowiednie uporządkowanie kowariancji:

$$h_t = \left[h_{sr,t}\right] = \left[\operatorname{cov}(\varepsilon_{st}, \varepsilon_{rt})_{|\varepsilon_u} \ u < t\right]. \tag{21}$$

Rozwinięcie formuły modelu macierzy kowariancji definiujemy następująco:

$$h_{sr,t} = Cov(\varepsilon_{st}, \varepsilon_{rt} | \varepsilon_u, u < t) = \omega_{sr} + \sum_{i=1}^{q} \sum_{\substack{s',r'=1 \\ s' \geq r'}}^{k} \alpha_{sr,s'r'}^{(i)} \varepsilon_{s',t-i} \varepsilon_{r',t-i} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{\substack{s',r'=1 \\ s' \geq r'}}^{k} \beta_{sr,s'r'}^{(j)} h_{s'r',t-j} . \quad (22)$$

Występujące w tym modelu macierze $\alpha^{(i)}$ oraz $\beta^{(j)}$ to iloczyny Kronekera dodatnio określonych wcześniej macierzy wariancji i kowariancji. Macierz H_t zawiera warunkowe wariancje i kowariancje przy określonych wariancjach i kowariancjach ($t - j$) okresów. Wyznaczamy model ARCH(1,1), dla którego $p = 1$, i oznacza to uwzględnienie jednego opóźnienia macierzy H_t, czyli składnika dotyczącego H_{t-1}. Natomiast wartość $q = 1$ oznacza rozpatrywanie jednego opóźnienia składnika losowego ε_{t-1}. Model wektora $vech(H_t)$ przyjmuje postać:

$$vech(H_t) = \begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11,} \\ \omega_{12} \\ \omega_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11,11} & a_{11,12} & a_{11,22} \\ a_{12,11} & a_{12,12} & a_{12,22} \\ a_{22,11} & a_{22,12} & a_{22,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{1,t-1}^2 \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} b_{11,11} & b_{11,12} & b_{11,22} \\ b_{12,11} & b_{12,12} & b_{12,22} \\ b_{22,11} & b_{22,12} & b_{22,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1,t-1}^2 \\ h_{1,t-1}h_{2,t-1} \\ h_{1,t-1}^2 \end{bmatrix} . \quad (23)$$

Macierze $\alpha^{(i)}$ oraz $\beta^{(j)}$ dla $i, j = 0,1$ to kwadratowe macierze ocen parametrów. Stopień tych macierzy jest równy ilości elementów danego trójkąta macierzy kowariancji. W związku z powyższym model $h_t = vech(H_t)$ można przekształcić, a rozwinięcie $h_t = vech(H_t)$ przyjmuje następującą postać:

$$h_{sr,t} = \omega_{s,r} + [\varepsilon_{1,t-1}, \varepsilon_{2,t-1}] \begin{bmatrix} a_{sr,11} & \frac{a_{sr,12}}{2} \\ \frac{a_{sr,21}}{2} & a_{sr,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2.t-1} \end{bmatrix} +$$
$$+ [h_{1,t-1}, h_{2,t-1}] \begin{bmatrix} b_{sr,11} & \frac{b_{sr12}}{2} \\ \frac{b_{sr,21}}{2} & b_{sr,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1,t-1} \\ h_{2.t-1} \end{bmatrix} . \quad (24)$$

Natomiast dla $k \geq 3$ postać modelu jest już bardzo rozbudowana.

3. Analiza zależności rozwoju gospodarczego Polski i Niemiec

Celem badania jest analiza występowania możliwych zależności w rozwojach gospodarczych wybranych państw. Do wykrycia tych zależności zostaną wykorzystane modele GARCH. Niniejszy przykład prezentuje porównanie Polski oraz Niemiec.

Pierwszy etap analizy rozwoju gospodarczego Polski i Niemiec obejmuje konstrukcję macierzy H_t, a następnie macierzy H_{t-p} z uwzględnieniem p-opóźnień. Dla Polski i Niemiec wyznaczona podmacierz stopnia drugiego stanów korelacyjnych rozwoju gospodarczego H_t przyjmuje postać:

$$H_t = \begin{bmatrix} 1{,}78 & -0{,}43 \\ -0{,}43 & 1{,}83 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Zgodnie z opisaną wcześniej procedurą w kolejnym kroku wyznaczamy macierz, uwzględniając jedno opóźnienie:

$$H_{t-1} = \begin{bmatrix} 2{,}77 & -0{,}59 \\ -0{,}59 & 5{,}30 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Wykorzystując macierz $vech(H_t) = \begin{bmatrix} 1{,}78 \\ -0{,}43 \\ 1{,}83 \end{bmatrix}$, wyznaczamy $\alpha^{(i)}$:

$$\alpha^{(1)} = \begin{bmatrix} 3{,}16 & -0{,}75 & 3{,}25 \\ -0{,}75 & 0{,}18 & -0{,}7 \\ 3{,}25 & -0{,}78 & 3{,}34 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Podobną procedurę przeprowadzamy, aby wyznaczyć vech dla macierzy H_{t-1}. Otrzymujemy macierz w postaci:

$$vech(H_{t-1}) = \begin{bmatrix} 3{,}99 \\ 1{,}66 \\ 7{,}50 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Macierz β^j dla $j = 1$:

$$\beta^{(1)} = \begin{bmatrix} 15{,}92 & 6{,}62 & 29{,}92 \\ 6{,}62 & 2{,}75 & 12{,}45 \\ 29{,}92 & 12{,}45 & 56{,}25 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

W kolejnym kroku należy wyznaczyć macierze $\alpha^{(2)}$, uwzględniając dla macierzy $\alpha^{(2)}$ opóźnienia H_{t-1}, a dla macierzy $\beta^{(2)}$ macierz H_{t-2}.

Model $vech(H_t)$ opisujący powiązania rozwoju gospodarczego Polski oraz Niemiec przyjmuje w ostateczności postać:

$$\begin{aligned} vech(H_t) = {} & \begin{bmatrix} 0{,}43 \\ 0{,}35 \\ 0{,}27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3{,}16 & -0{,}75 & 3{,}25 \\ -0{,}75 & 0{,}18 & -0{,}7 \\ 3{,}25 & -0{,}78 & 3{,}34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{1,t-1}^2 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 15{,}92 & 6{,}62 & 29{,}92 \\ 6{,}62 & 2{,}75 & 12{,}45 \\ 29{,}92 & 12{,}45 & 56{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1,t-1}^2 \\ h_{1,t-1}h_{2,t-1} \\ h_{1,t-1}^2 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 2{,}18 & -0{,}42 & 2{,}3 \\ -0{,}42 & 0{,}11 & -0{,}23 \\ 2{,}3 & -0{,}23 & 1{,}14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-2}^2 \\ \varepsilon_{1,t-2}\varepsilon_{2,t-2} \\ \varepsilon_{1,t-2}^2 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 5{,}54 & 1{,}15 & 9{,}95 \\ 1{,}15 & 0{,}09 & -1{,}01 \\ 9{,}95 & -1{,}01 & 3{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1,t-2}^2 \\ h_{1,t-2}h_{2,t-2} \\ h_{1,t-2}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{30}$$

Konstrukcja modelu na tym etapie została zakończona, ponieważ dalsze opóźnienia wprowadzane do modelu są nieistotne statystycznie.

Na podstawie uzyskanych wyników można zauważyć, że otrzymany model charakteryzuje się macierzami $\alpha^{(2)}$ i $\beta^{(2)}$ o wariancjach i kowariancjach bezwzględnie niższych niż w macierzach $\alpha^{(1)}$ i $\beta^{(1)}$.

Ostatni etap analizy obejmuje wyznaczenie prognozy wariancji na dwa następne okresy. Otrzymujemy następujące macierze wariancji i kowariancji:

$$H_{t+1} = \begin{bmatrix} 0{,}35 & -0{,}67 \\ -0{,}67 & 0{,}20 \end{bmatrix}, \tag{31}$$

$$H_{t+2} = \begin{bmatrix} 0{,}02 & -0{,}04 \\ -0{,}04 & 0{,}06 \end{bmatrix}.$$

Porównując wariancje (31), otrzymujemy:

$$h_{11,t+1} = 0{,}35 > h_{11,t+2} = 0{,}02\,,$$
$$h_{22,t+1} = 0{,}20 > h_{22,t+2} = 0{,}06\,. \tag{32}$$

Widzimy, że w prognozowanych okresach nastąpi spadek wartości wariancji składników resztowych. Oznacza to, że rozwój porównywanych gospodarek będzie podlegał procesowi stabilizacji. W przypadku wyznaczonych macierzy kowariancja obu reszt jest ujemna oraz:

$$h_{12,t+1} = -0{,}67 \tag{33}$$

co do bezwzględnej wartości jest większa od $h_{12,t+2} = -0{,}04$.

Oznacza to, że z upływem czasu kowariancja badanych rozwojów gospodarczych ulega również tendencji spadkowej, co będzie spowodowane uniezależnianiem się rozwojów gospodarczych analizowanych krajów. Wyznaczone wartości elementów macierzy H_{t+2} są bliskie zera, a także nieistotne statystycznie, więc do wyznaczenia prognoz dalszego rozwoju możemy wykorzystać wyłącznie macierz H_{t+1} .

Podsumowanie

W niniejszym artykule dokonano porównania rozwoju gospodarczego Polski i Niemiec. Zarówno heteroskedastyczność procesów rozwoju gospodarczego, jak i autokorelacja składnika reszt spowodowały znaczące ukształtowanie się w rozpatrywanych okresach efektu ARCH. Zaprezentowane modele przedstawiają stan rozwoju gospodarczego, o czym świadczą wariancje składnika losowego tych modeli. Proces rozwoju gospodarczego jest procesem heteroskedastycznym i autokorelacyjnym, na co wskazuje występowanie efektu ARCH, i stanowi to drugi z czynników decydujących o zastosowaniu tego typu modeli. Modele tak przedstawione mogą być w przyszłości podstawą podejmowania decyzji pod kątem dalszego rozwoju gospodarczego.

Literatura

Azevedo J. (2002), *Business Cycles: Cyclical Comovement within the European Union in the Period 1960-1999. A Frequency Domain Approach*, Working Paper, Banco de Portugal.

Bergman M. (2004), *How Similar Are European Business Cycles*? Working Paper, Lund University, Department of Economics.

Burns F., Mitchell W.C. (1946), *Measuring Business Cycle*, "Studies in Business Cycles NBER" (New York).

Demos A., Sentana E. (1998), *Testing for GARCH Effects: A One-Sided Approach*, "Journal of Econometrics", 86.

Dickerson A.P., Gibson H.D., Tsakalotos E. (1998), *Business Cycle Correspondence in the European Union*, Empirica.

Drozdowić-Bieć M. (2006), *Wskaźniki wyprzedzające*, Prace i Materiały Instytutu Rozwoju Gospodarczego, SGH, Warszawa.

Doman M., Doman R. (2004), *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Poznań.

Engel R.F. (1987), *Multivariate ARCH with Factor Structures – Cointegracion in Variance*, Discussion Paper 87, University of California, San Diego.

Engle R.F. (1982), *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom*, "Econometrica".

Fiszeder P. (2009), *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.

Franco Ch., Zakoian J.M. (2009), *GARCH Models. Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, NY.

Hadaś-Dyduch M. (2014), *Wielowymiarowa analiza relacji gospodarczych w rejonie śląskim* [w:] W. Szkutnik (red.), *Problemy społeczno-ekonomiczne w relacjach międzynarodowych. Analiza modelowa rozwoju regionów*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice.

Hadaś-Dyduch M. (2015), *Polish Macroeconomic Indicators Correlated-prediction with Indicators of Selected Countries* [w:] M. Papież and S. Śmiech (eds.), Proceedings of the 9th Professor Aleksander Zelias International Conference on Modelling and Forecasting of Socio-Economic Phenomena, Conference Proceedings, Foundation of the Cracow University of Economics, Cracow.

Hellwig Z. (1997), *Ekspansja gospodarcza Polski końca XX wieku*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań.

Hong Y., Shehadeh R.D. (1999), *A New Test for ARCH Effects and Its Finite-Sample Performance*, "Journal of Business and Economic Statistics", 17.

Hosking J. (1980), *The Multivariate Portmanteau Statistic*, "Journal of American Statistical Association".

Janiga-Ćmiel A. (2013), *Analiza zależności przyczynowych rozwoju gospodarczego Polski i wybranych państw Unii Europejskiej*, Studia Ekonomiczne, Zeszyty Naukowe Wydziałowe nr 159, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice.

Janiga-Ćmiel A. (2014), *Dynamiczna analiza procesów rozwoju gospodarczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice.

Kaiser M. (2005), *Euro Zone: Uncompleted Convergence*, "BNP PARIBAS Conjoncture", No. 7, p. 20-33.

Noga M., Stawicka M. (red.) (2009), *Modele rozwoju gospodarczego dla Polski w dobie integracji europejskiej i globalizacji*, Wydawnictwo CeDeWu, Warszawa.

Vrontos I.D., Dellaportas P., Politis D.N. (2003), *A Full-factor Multivariate GRACH Model*, “Ecomometrics Journal”.

Wang P. (2003), *Financial Econometrics. Methods and Models*, Routledge Chapman & Hall.

Wynne M.A., Koo J. (2000), *Business Cycles under Monetary Union. A Comparison of the EU and US*, Economica.

Yamarone R. (2006), *Wskaźniki ekonomiczne: przewodnik dla inwestora*, Wydawnictwo Helion, Warszawa.

A MULTI-EQUATION MODEL OF DYNAMICS OF POLISH AND GERMAN ECONOMY

Summary: The study examines the development of Polish economy as well as the economies of selected countries in the period from 2002 to 2013. Models based on the GDP growth in particular countries were built. A comparative analysis of the development of economies in the countries concerned (Poland, Germany) is presented. A multivariate GARCH model was built. The theory of the construction of a multivariate GARCH model and its estimation method are discussed.

Keywords: GARCH model, economic development, volatility.