PROGRAMM

DES

K. K. EVANGELISCHEN GYMNASIUMS

IN

TESCHEN

AM SCHLUSSE DES SCHULJAHRES

1863.

VERŒFFENTLICHT DURCH DIE DIRECTION.

INHALT:

CZ III 93 | 1863

CZ 469

J 142/96
2,50

Geometrisches Bild binomischer Gleichungen mit imaginären Coëfficienten und die geometrische Bedeutung ihrer Wurzeln,

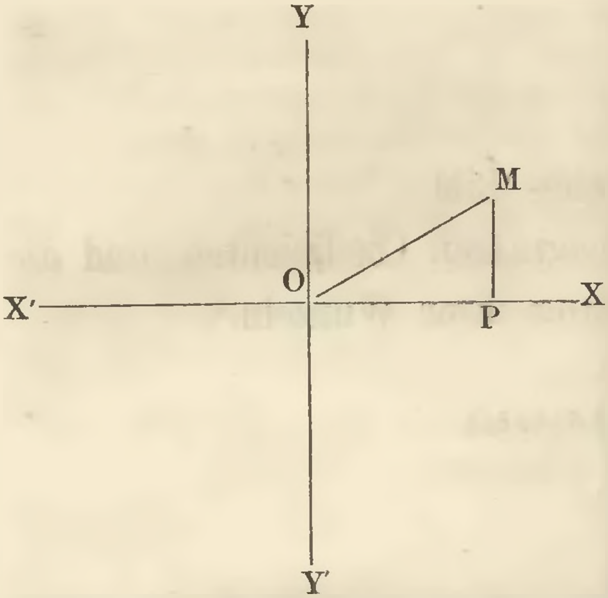
von

Johann Odstrčil.

Die Gleichungen in der Form, wie sie heutzutage gehandhabt werden, erscheinen schon bei Vieta (gestorben 1603). Aber weder vor ihm, noch von ihm selbst wurden die negativen Wurzeln der Gleichungen, noch viel weniger die imaginären berücksichtigt, wiewol schon Cardanus die ersteren erfasst hatte. Diess that aber bald nach Vieta der niederländische Geometer Albert Girard; in seinem Werke „Neue Erfindungen in der Algebra" gibt er schon verschiedene Anwendungen der negativen Wurzeln in der Geometrie; er bezeichnete z. B. das + durch das Vorwärtsgehen in einer Richtung und durch das — das Rückwärtsgehen; auch hatte derselbe schon eine Vorstellung von den unmöglichen Wurzeln. Diese Bedeutung der negativen Wurzeln war aber noch so ungewöhnlich, dass ein späterer Nachfolger Vieta's Thomas Harriot ihre Natur verkannte und dass noch viel später, nachdem man die Realität derselben erkannt hatte, sie noch falsche Wurzeln genannt wurden. Bei der Auflösung schon quadratischer Gleichungen kam man auf imaginäre Zahlen, Zahlen von der Form $a + b\sqrt{-1}$, die man als unmöglich realisierbare verwarf, obgleich man sie in der Analysis mit vielem Nutzen anwandte*). Seit dem Anfange dieses Jahrhunderts jedoch erkannte man, dass sich alle Zahlen durch Linien in einer Ebene darstellen lassen.**)

*) Eulers Abhandlungen: De summo usu calculi imaginariorium in analysi (Nova Acta. Aad. Petropol. T. III. p. 25) und De insigni usu calculi imaginariorum in calculo integrali i. T. XII. p. 3. —

**) Argand, Essai sur une maniére de représenter les quantités imaginaires dans le construction géométriques (Paris 1806). Insbesondere aber Gauss in den Göttinger gelehrten Anzeigen 1831. Weiter ausgeführt, H. Scheffler „Ueber das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie, insbesondere über die geometrische Bedeutung der imaginären Zahlen"; und Wittstein Lehrbuch der Arithmetik (Hannover 1846).



Nimmt man in der Ebene XOY, O als einen festen Punkt an und die Entfernungen der Punkte dieser Ebene als Zahlen, so werden die Entfernungen aller Punkte der OX durch positive, die der OX′ durch negative, die der OY durch positiv imaginäre, die der OY′ durch negativ imaginäre Zahlen angegeben werden können. Die Entfernung irgend eines Punktes M ausser den rechtwinkligen Axen von O kann angegeben werden entweder durch die Länge der Projektionen auf die Axen, so zwar, dass, wenn $OP=a$, $MP=b$ gesetzt wird, die Länge OM durch $a+bi$ ausgedrückt wird. Man könnte aber auch für OM die absolute Länge der $OM=r$ setzen, dann müsste man aber noch die Richtung oder den Winkel, den diese mit der Axe OX einschliesst angeben. Dieses geschieht durch den sogenannten Richtungscoëfficienten, so zwar, dass wenn jener Winkel ϑ heisst

$$OM=a+b\,i=(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$$

indem $r=\sqrt{a^2+b^2}$ und

$$\cos\vartheta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\vartheta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

und somit $\operatorname{tang}\vartheta=\frac{b}{a}$ ist.

Daraus folgt also, dass wenn überhaupt ein Punkt der Ebene die rechtwinkeligen Coordinaten a, b, oder die Polarcoordinaten ϱ, ϑ, hat, die Entfernung OM sich immer ausdrücken lässt durch

$$a+bi, \text{ oder } \varrho\,(\cos.\vartheta+i\sin\vartheta).$$

Man sieht nun ein, dass negative und complexe Zahlen eine Bedeutung in der Geometrie haben.

Die Bedeutung der negativen Wurzeln in der Geometrie hat erst Descartes nachgewiesen. Es sei z. B. die Gleichung

$$x^2+ax+b=0 \text{ gegeben}$$

so setze man $x^2+ax+b=z$.

Ertheilt man nun dem x verschiedene positive und negative Werthe, so wird man verschiedene Werthe für z erhalten, wenn der links stehende Theil berechnet wird; werden nun in den Punkten, deren x in der Gl. (1.) substituiert wurden, Vertikale errichtet und auf diesen die zugehörigen z aufgetragen, und diess gethan für alle möglichen sich stetig ändernden x von $-\infty$ bis $+\infty$, so werden die Endpunkte von den z eine Aufeinanderfolge von Punkten geben, die eine ebene Curve darstellen, und die möglicher Weise an mehreren Punkten die Axe OX durchschneiden wird. Da also für diese Durchschnittspunkte $z=o$ ist, so sind die Abscissen dieser Punkte die Wurzeln der Gleichung $x^2+ax+b=o$ und man sieht ein, dass diese Punkte auf der positiven als auch negativen Seite gelegen sein können.

Dieselbe Methode, nur verallgemeinert, wandte auch Spitzer an um die imaginären Wurzeln einer Gleichung geometrisch darzustellen.*)

Es sei die Gleichung

$$\varphi\ (u) = o.$$

Er gibt nun dem u nicht bloss wie Descartes reelle Werthe sondern auch imaginäre, etwa $x+yi$, und untersucht, welche Werthe von y bei einem bestimmt gewählten x

$$z=\varphi\ (x+yi)$$

reell machen. Seien y_1, y_2, y_3, diese Werthe, so betrachtet man x als die Abscisse, y_1, y_2, y_3... als die Ordinaten von Punkten im Raume, deren dritte Coordinate z man findet, wenn man $x+y_1$, $x+y_2\ i$, $x+y_3\ i$. . . in $\varphi\ (u)$ statt u substituiert. Gibt man dann dem x successive andere und andere Werthe, sucht stets die dazu gehörigen y und z, so erhält man die Coordinaten von Punkten im Raume, die in einem System von Curven liegen, deren Gleichung aus

$$z=\varphi\ (u)$$

hervorgeht, wenn in dieselbe statt u, $x+yi$ substituiert wird. Wird nun der rechtsstehende Theil der Gleichung entwickelt, das imaginäre vom reellen getrennt und für sich gleich 0 gesetzt, so erhält man eine Gleichung, die den Zusammenhang ausdrückt, der zwischen x und y erfüllt sein muss, damit z reell ausfalle. Werden nun derartige x und y in den reellen Theil der Gleichung substituiert, so erhält man ein reelles z und es geben dann diese x, y, z als Coordinaten betrachtet einen Punkt im Raume, und ein anderes System x, y, z, einen zweiten Punkt, und so fort. Alle diese Punkte nun bilden ein System von Curven, welche die Ebene XY in mehreren Punkten durchschneiden können.

Sind diese Durchschnittspunkte in der Abscissenachse gelegen, so sind die Wurzeln reell, sind sie in der Axe der Y. so sind sie rein imaginär; sind die Coor-

*) Allgemeine Auflösung der Zahlengleichungen mit Unbekannten von Simon Spitzer, Wien 1851.

dinaten eines derartigen Durchschnittspunktes a, b, so ist a+bi eine complexe Wurzel der Gleichung φ (u)=o.

In den nachfolgenden Zeilen will ich versuchen auf diese Art den Verlauf des Curvensystems zu zeigen und die Lage seiner Durchschnittspunkte mit der Ebene XY, wenn die vorgelegte Gleichung eine binomische ist, ihre Coëfficienten aber complex sind, wo dann die geometrische Bedeutung der imaginären Wurzeln solcher Gleichungen von selbst hervorleuchten wird.

§. 1.

Eine binomische Gleichung, deren Coëfficienten imaginär sind, lässt sich auf die Form bringen.

$$(a+bi)\, u^n - (r+ti) = 0$$

oder durch Division mit a+bi)

$$u^n - \frac{r+ti}{a+bi} = 0$$

und da sich das unabhängige Glied leicht in einen reellen und imaginären Theil zerlegen lässt auch auf die Form

$$u^n - (p+qi) = 0.$$

Setzen wir nun für u, x+y i und für den nachstehenden Theil z w. so erhalten wir

$$(x+yi)^n - (p+qi) = z.$$

Wird nun $(x+y\,i)^n$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, so erhält man

$$x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y\,i+\binom{n}{2}x^{n-2}(y\,i)^2+\binom{n}{3}x^{n-3}(y\,i)^3+\binom{n}{4}x^{n-4}(y\,i)^4+\ldots-(p+q\;)=z.$$

und das reelle vom imaginären getrennt

$$x^n-\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\binom{n}{4}x^{n-4}y^4-\ldots-p+i\left[\binom{n}{1}x^{n-1}y-\binom{n}{3}x^{n-3}y^3+\binom{n}{5}x^{n-5}y^5\ \ldots\ -q\right]=z.$$

Soll nun z reell ausfallen, so muss der Cöefficient von i gleich Null werden, alsdann ist

$$x^n-\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\binom{n}{4}x^{n-4}y^4-\ldots-p=z,$$

wenn die Werthe von x und y die Gleichung

$$\binom{n}{1}x^{n-1}y-\binom{n}{3}x^{n-3}y^3+\binom{n}{5}x^{n-5}y^5-\ldots-q=0$$

befriedigen. Wir haben schon gesehen, dass zwei zugehörige Werthe von x und y Coordinaten eines Punktes in der Ebene XY darstellen sollen. Es wird also die Gleichung

$$\binom{n}{1}x^{n-1}y-\binom{n}{3}x^{n-3}y+\binom{n}{5}x^{n-5}y^5-\ldots-q=0$$

im Allgemeinen die Gleichung einer Curve oder eines Curvesystems sein.

Jene zwei Gleichungen lassen sich jedoch noch auf eine andere Form bringen wenn man nämlich statt $x+y\,i$ den reducierten Ausdruck $r\,(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$ setzt, wo $r=\sqrt{x^2+y^2}$ und $\tang\vartheta=\frac{y}{x}$, so ist bekanntlich nach dem Moivreschen Satze

$$(x+yi)^n=r^n(\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta)$$

dadurch wird aus der Hauptgleichung

$$r^n(\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta)-(p+qi)=z$$

und aus dieser die zwei Gleichungen

$$r^n\cos n\vartheta-p=z \text{ und}$$

$$r^n\sin n\vartheta-q=0.$$

Diese zwei Gleichungen können die zwei früheren durchaus ersetzen und wir werden uns bald der einen bald der andern Form bedienen, je nachdem die eine oder die andere leichter zu handhaben ist.

§. 2.

Betrachtung dieses Curvensystems.

Die erste Frage bei der Eruierung der Eigenschaften dieser Curve wird die sein, ob dieselbe continuierlich verlauft oder in mehrere Curvenzweige sich theilt, welche durch Assymptoten von einander geschieden sind; wir werden also untersuchen, ob die durch die Gleichung

$$\binom{n}{1}x^{n-1}y-\binom{n}{3}x^{n-2}y^2+\binom{n}{5}x^{n-5}y^5-\;.\;.\;.\;-q=0$$

dargestellte Curve Assymptoten habe oder nicht.

Die Form der Gleichung jener Assymptoten, die nicht parallel zur Abscissenaxe sind, wird sein

$$y=kx+l$$

in welcher man k und l noch zu bestimmen hat.

Die Ordinate der Curve, die zu derselben Abscisse gehört, wird sein

$$y=kx+l\pm\varepsilon$$

ε muss die Beschaffenheit haben, dass es mit $\frac{1}{x}$ gleichzeitig verschwindet, indem für unendlich grosse Werthe von x Curve und Assymptote zusammentreffen sollen. Daraus folgt

$$\frac{y}{x}=k+\frac{l\pm\varepsilon}{x}$$

und wenn man zur Limite übergeht

$$\lim.\left(\frac{y}{x}\right)=k+\lim.\frac{1+\varepsilon}{x}=k$$

Es ist also k der Werth gegen den $\frac{y}{x}$ für unendlich wachsende x convergiert. Dividiert man die Gleichung der Curve

$$\binom{n}{1}x^{n-1}y-\binom{n}{3}x^{n-3}y^3+\binom{n}{5}x^{n-5}y^5-\ldots-q=0$$

durch x^n, so erhält man

$$\binom{n}{1}\left(\frac{y}{x}\right)-\binom{n}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3+\binom{n}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^5-\ldots\ldots-\frac{q}{x^n}=0$$

Lässt man x unendlich wachsen so fällt $\frac{q}{x^n}$ weg, schreibt man nun für $\frac{y}{x}=s$ so erhält man die Gleichung:

$$\binom{n}{1}s-\binom{n}{3}s^3+\binom{n}{5}s^5-\ldots\ldots=0\ \ldots\ldots (a)$$

Diejenigen Werthe von s, welche diese Gleichung befriedigen, sind die Werthe von k; man sieht ein, dass derer mehrere sein können. Es handelt sich nur noch um die Bestimmung von l.

Setzt man $y-kx=t$

so ist lim. $t=l$, für unendlich wachsende x, daraus folgt aber:

$$\frac{y}{x}=k+\frac{t}{x}$$

Schreibt man für den links stehenden Theil der Gleichung (a) F (s), so ist

$$x^n F(s) = q \text{ und}$$

$$x^n F\left(k+\frac{t}{x}\right)=q$$

und nach dem Taylorschen Lehrsatze

$$x^n\left[F(k)+\frac{t}{x}F'\left(k+\mu\frac{t}{x}\right)\right]=q,$$

wo μ einen echten Bruch bedeutet und da $F(k)=0$, für $x=\infty$,

$$\text{so ist}\quad x^{n-1}tF'\left(k+\mu\frac{t}{x}\right)=q$$

und wenn man zur Limite übergeht

$$lF'(k)=0,\ \text{da}\ \frac{1}{x}=0\ \text{ist.}$$

somit $l=\frac{0}{F'(k)}=0$, wenn nicht etwa auch $F'(k)$ gleich Null wird, wo dann l unbestimmt wäre.

Suchen wir die Werthe von k zu bestimmen; es gehört dazu die Auflösung der Gleichung

$$F(s) = 0$$

Multipliciert man beiderseitig mit x^n so wird man erhalten:

$$\binom{n}{1}x^{n-1}\ y - \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \binom{n}{5}x^{n-5}y^5 - \ldots\ldots = 0$$

Man braucht also nur in der Curvengleichung das unabhängige Glied q wegzulassen und den Quozienten y/x zu bestimmen um die Tangente des Neigungswinkels der Assymptoten gegen die Abscissenaxe zu finden. Offenbar würde man zu demselben Resultate kommen, wenn man nach den zu der Axe der X nicht parallelen Assymptoten gefragt haben würde, so dass es nur so viel Assymptoten geben kann, als y/x Werthe aus der letzten Gleichung annehmen kann.*)

Um nun k oder y/x zu bestimmen wird es am einfachsten sein, die Gleichung

$$\binom{n}{1}x^{n-1}y - \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \ldots\ldots = 0$$

zu ersetzen durch

$$r^n \sin(n\vartheta) = 0$$

da beide linksstehende Theile die um q verminderten Coëfficienten von i in der entwickelten Gleichung

$$u^n - (p + qi) = z$$

somit durchaus identisch sind.

Da nun r^n für unendlich grosse Werthe von X nicht Null wird, so muss

$\sin(n\vartheta) = 0$ werden.

Dieser Bedingung wird entsprochen werden, wenn $n\vartheta = m\pi$, wo m eine ganze Zahl bedeutet, gesetzt wird, dann ist

$$\vartheta = \frac{m\pi}{n} \text{ und}$$

$$\frac{y}{x} = tg\,\vartheta = tang\frac{m\pi}{n}$$

Von der Richtigkeit dieses Werthes von y/x überzeugt man sich, wenn man ihn oder den sich daraus ergebenden Werth von $y = x\,tg\,\frac{m\pi}{n}$ in die Gleichung

$$\binom{n}{1}x^{n-1}y - \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \ldots\ldots = 0$$

substituiert, welche sich leicht nach einigen Reduktionen als eine identische darstellt.

*) Vorstehenden Satz beweist allgemein für homogene Functionen Cauchy in seinen Vorlesungen über die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie.

Es soll nämlich

$$x^n F\left[tg\left(m\frac{\pi}{n}\right)\right]=0 \text{ sein.}$$

Nun ist aber

$$F(s)=\binom{n}{1}\left(\frac{y}{x}\right)-\binom{n}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3+\binom{n}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^5-\ldots\ldots$$

und

$$F\left[tg\left(m\frac{\pi}{n}\right)\right]=\binom{n}{1}tg\frac{m\pi}{n}-\binom{n}{3}\left(tg\frac{m\pi}{n}\right)^3+\binom{n}{5}\left(tg\frac{m\pi}{n}\right)^5-\ldots\ldots$$

bekanntlich ist aber

$$\sin(nx)=\binom{n}{1}\cos x^{n-1}\sin x-\binom{n}{3}\cos x^{n-3}\sin^3 x+\binom{n}{5}\cos x^{n-5}\sin^5-\ldots\ldots$$

dividiert man auf beiden Seiten mit $\cos x^n$

$$\frac{\sin(nx)}{\cos x^n}=\binom{n}{1}\frac{\sin x}{\cos x}-\binom{3}{n}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^3+\binom{n}{5}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^5-\ldots\ldots$$

oder

$$\frac{\sin nx}{\cos x^n}=\binom{n}{1}tg(x)-\binom{n}{3}(tg\,x)^3+\binom{n}{5}(tg\,x)^5-\ldots\ldots$$

Substituiert man für x, $\frac{m\pi}{n}$ so wird

$$\frac{\sin\left(n\frac{m\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right)^n}=F\left[tg\left(m\frac{\pi}{n}\right)\right]=0\ \ldots\ (b)$$

somit wird auch

$$\binom{n}{1}x^{n-1}y-\binom{n}{3}x^{n-3}y^3+\ldots\ .=x^nF\left[tg\left(m\frac{\pi}{n}\right)\right]=0.\ \ldots\ (c)$$

Würde $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$ sein, so hat es den Anschein, als ob der erste Theil der Gleichung (c) sich nicht auf Null reduzieren würde, weil in der Gleichung (b) der Nenner des ersten Theils $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ wird. Da aber für diesen Fall n gerade sein muss, somit alle Glieder des linksstehenden Theils von (c) x enthalten so wird jedes, somit auch ihre Summe durch Substitution des aus $y=x\ tg\frac{\pi}{2}$ sich ergebenden Werthes für $x=\frac{y}{tg\frac{\pi}{2}}=0$ verschwinden, somit auch die Gleichung (c) richtig bleiben.

Es handelt sich noch darum nachzuweisen, dass l, wirklich 0 sei, diess wird dann der Fall sein, wenn, F′(k) von Null verschieden ist. Nun ist aber

$$F'(s)=\binom{n}{1}-3\binom{n}{3}s^2+5\binom{n}{5}s^4-7\binom{n}{7}s^6+\ldots\ldots$$

und man hat nun zu untersuchen, ob der rechtsstehende Theil dieser Gleichung sich nicht auf Null reduciert, wenn man für s, $tg\frac{m\pi}{n}$ substituiert.

Deriviert man die beiden Theile der identischen Gleichung

$$\frac{\sin nx}{\cos x^n} = \binom{n}{1} \operatorname{tg} x - \binom{n}{3} \operatorname{tg} x^3 + \binom{n}{5} \operatorname{tg} x^5 - \dots$$

so erhält man

$$\frac{n\left[\cos x^n \cos nx + \sin nx \cos x^{n-1} \sin x\right]}{\cos x^{2n}} =$$

$$\binom{n}{1} \frac{1}{\cos x^2} - 3\binom{n}{3} \operatorname{tg} x^2 \frac{1}{\cos x^2} + 5\binom{n}{5} \operatorname{tg} x^4 \frac{1}{\cos x^2} - \dots$$

und die ganze Gleichung mit $\cos x^2$ multipliciert

$$\frac{n\left[\cos x^n \cos nx + \sin nx \cos x^{n-1} \sin x\right]}{\cos x^{2n-2}} = \binom{n}{1} - 3\binom{n}{3} \operatorname{tg} x^2 + 5\binom{n}{5} \operatorname{tg} x^4 - \dots$$

Setzt man nun $x = \frac{m\pi}{n}$ somit $nx = m\pi$ $\sin nx = 0$, $\cos nx = \pm 1$, so ist

$$\frac{\pm n}{\cos \frac{m\pi}{n}^{\,n-2}} = \binom{n}{1} - 3\binom{n}{3} \operatorname{tg}\left(\frac{m\pi}{n}\right)^2 + 5\binom{n}{5} \operatorname{tg}\left(\frac{m\pi}{n}\right)^4 - \dots$$

daher $$F'(k) = \frac{\pm n}{\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right)^{n-2}}$$

Man sieht daraus, dass $F'(k)$ nicht Null werden kann.

Es gehen also alle Assymptoten durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems; und es entsteht nun die Frage, wie viel solcher Assymptoten die Curve habe, der Winkel, unter dem sie gegen die Abscissenachse geneigt sind, ist $\frac{m\pi}{n}$ ihre Gleichung

$$y = x \operatorname{tang} \frac{m\pi}{n}.$$

An dem m haftet nur die Bedingung, dass es eine ganze positive oder negative Zahl sei. Es ist jedoch hinlänglich nur positive m, und zwar solche, die kleiner sind als n, zu berücksichtigen. Man braucht also für m zu substituieren 0, 1, 2. 3 … … n—1; die Curve hat n Assymptoten. Eine derselben ist die Abscissenachse, die andere, die nächste bildet mit ihr den Winkel $\frac{\pi}{n}$ die folgende $\frac{2\pi}{n}$ u. s. f.

§. 3.

Den Verlauf der einzelnen Curvenzweige kann man am leichtesten aus ihrer Polargleichung

$$r^n \sin n\vartheta = q,$$

woraus sich $r = \sqrt[n]{\frac{q}{\sin n\vartheta}}$ ergibt, verfolgen.

Wir wissen bereits, dass die Abscissenachse eine Assymptote an die Curve bildet und wollen nun untersuchen, ob die Curve von oben oder von unten der positiven oder negativen Halbachse sich nähert. Es wird dies offenbar abhängen von dem Zeichen von q.

Gewöhnlich wird bei Behandlungen von Polargleichungen der Curven nur der positive Werth von r berücksichtigt, indem der Polarwinkel ϑ von o bis 2π und darüber wachsend gedacht wird. Für den vorliegenden Fall erscheint es aber zweckmässiger, ϑ nur von o bis π wachsend sich zu denken und dafür auch die negativen Werthe von r zu berücksichtigen.*)

Setzen wir also q zuerst positiv voraus; und n wäre ungerade etwa gleich $2m + 1$.

Ist nun $\vartheta = o$, so ist $\sin n\vartheta = o$ und somit $r = +\infty$. Indem ferner ϑ wächst, wird auch $\sin n\vartheta$ wachsen, daher r fortwärend abnehmen, bis $r = \sqrt[n]{q}$ für $\vartheta = \frac{\pi}{2n}$ somit $\sin(n\vartheta) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ wird.

Dieser Werth von r wird ein Minimum sein; denn sobald $\vartheta > \frac{\pi}{2n}$ wird, nimmt $\sin(n\vartheta)$ als der Sinus eines stumpfen Winkels fortwährend ab somit wächst r bis für $\vartheta = \frac{\pi}{n}$ $\sin(n\vartheta) = o$ wird; für diesen Fall muss also r unendlich werden. Der Curvenzweig entfernt sich immer mehr von der positiven Abscissenachse, nähert sich dabei immer mehr dem Anfangspunkte bis $r = \sqrt[n]{q}$ von da an entfernt er sich von demselben und schmiegt sich dabei immer mehr an die unter dem Winkel $\frac{\pi}{n}$ gezogene Gerade an, ohne sie je zu erreichen. Es bleibt also der ganze Curvenzweig zwischen den Schenkeln des Winkels, den die Abscissenachse und die unter dem Winkel $\frac{\pi}{n}$ gezogene Gerade mit einander bilden, eingeschlossen.

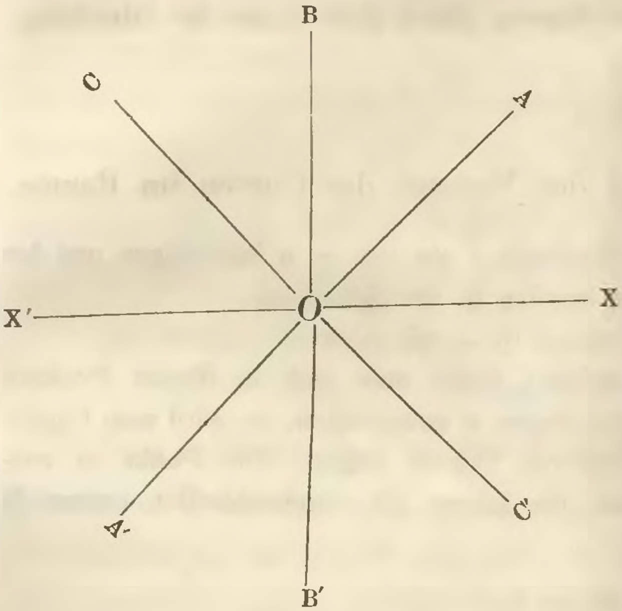
Wird $\vartheta > \frac{\pi}{n}$, so wird $n\vartheta > \pi$, somit $\sin(n\vartheta)$ negativ, daher auch r negativ da q positiv vorausgesetzt worden ist. Es durchläuft aber $\sin(n\vartheta)$ indem es von π bis 2π wächst dieselbe Reihe von Werthen wie früher, welcher nur dem Zeichen nach von den früheren verschieden sind, als nämlich ϑ von o bis $\frac{\pi}{n}$ wuchs. Es werden also auch die Werthe von r ganz dieselben, nur dem Zeichen nach, von den frühern verschieden sein.

Der dadurch bestimmte Curvenzweig wird also mit dem frühern ganz congruent sein, nur in dem Scheitelwinkel der ersten und zweiten Assymptote liegen.

Wächst nun ϑ über $\frac{2\pi}{n}$ hinaus, wird $n\vartheta > 2\pi$ und $\sin(n\vartheta)$ positiv, wiederum aber so wie r dieselbe Reihe von Werthen durchlaufen, die sämmtlich positiv verbleiben

*) Die positiven Werthe von r sind in der Richtung des Schenkels, die negativen in seiner Verlängerung über den Scheitel hin zu nehmen.

und es wird also zwischen der zweiten und dritten Assymptote ein Curvenzweig, der den frühern congruent ist gelegen sein.



Es wird nun ein Leichtes sein sich die Lage und den Verlauf der einzelnen Curvenzweige vorzustellen. Theilt man sich den geraden Winkel X' O X in n gleiche Theile durch die Linien OA, OB, OC .... verlängert sie nach rückwärts in OA', OB', OC'..... so liegt für den angenommen Fall ein Curvenzweig zwischen den geraden XO und AO als Assymptoten, der folgende in dem Scheitelwinkel A'OB' des Winkels, den die folgenden zwei Geraden AO und BO einschliessen, der dritte zwischen BCO und so fort. Die Anzahl dieser Winkel ist 2n, somit die Anzahl der einzelnen Curvenzweige n.

Wenn aber $n = 2m$ gerade ist, so entsprechen jedem Werthe von ϑ zwei Werthe von r, da $r = \pm \sqrt[n]{\frac{q}{\sin\ n\vartheta}}$, wenn nur $\sin n\vartheta$ positiv verbleibt, sonst verbleibt alles wie in dem früher betrachteten Falle. Es wird also der erste Curvenzweig zwischen AOX, der zweite in seinem Scheitelwinkel A'OX' gelegen sein. Zwischen AOB und und A'OB' können keine Punkte des Curvensystems gelegen sein, weil hier $\vartheta > \frac{\pi}{n}$ und $\vartheta < \frac{2\pi}{n}$ oder $n\vartheta > \pi$ und $n\vartheta < 2\pi$ somit $\sin n\vartheta$ und auch $\frac{q}{\sin n\vartheta}$ negativ verbleibt, daher r imaginär ausfällt. Das folgende Paar von Curvenzweigen fällt erst zwischen BOC und B'OC', und so wechselt auch die Lage der übrigen Curvenzweige zwischen den einzelnen Winkeln ab. m Curvenzweige sind oberhalb m unterhalb der Abscissenachse gelegen, ihre Anzahl ist $2\ m=n$.

Wenn q negativ ist, so wird $\frac{q}{\sin n\vartheta}$ negativ sein, wenn ϑ von o bis $\frac{\pi}{n}$ von $\frac{2\pi}{n}$ bis $\frac{3\pi}{n}$ überhaupt von $\frac{2k\pi}{n}$ bis $\frac{(2k+1)\pi}{n}$ wachsen wird; positiv dagegen verbleiben, wenn ϑ Werthe annimmt, die zwischen $\frac{\pi}{n}$ und $\frac{2\pi}{n}$ im Allgemeinen zwischen $\frac{2k-1}{n}\pi$ und $\frac{2k}{n}\pi$ gelegen sind. Zwischen AOX wird also kein Curvenzweig gelegen sein, wohl aber in seinem Scheitelwinkel, wenn n ungerade ist. Ist n gerade, so liegt zwischen den Schenkeln des Winkels AOB sowie zwischen denen seines Scheitelwinkels A'OB' ein Curvenzweig.

Die Anordnung der übrigen Curvenzweige und deren Verlauf ist analog der Anordnung und dem Verlaufe derselben in den früher betrachteten Fällen.

Immer ist die Anzahl der einzelnen Curven gleich dem Grade der Gleichung.

§. 4.

Betrachtung der Werthe von Z und des Verlaufs der Curven im Raume.

Die Werthe von r und ϑ, die die Gleichung r sin $(n\vartheta) = q$ befriedigen, und den Punkten der einzelnen Curven entsprechen werden in die Gleichung

$$r^n(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta) - (p + qi) = z$$

substituiert, ein reelles Resultat oder z liefern; denkt man sich in diesen Punkten Vertikale errichtet und auf diesen die zugehörigen z aufgetragen, so wird man Punkte im Raume bestimmen, die in einem System von Curven liegen. Der Punkt in welchem eine solche doppelt gekrümmte Curve die Ebene XY durchschneidet, entspricht einer Wurzel der Gleichung

$$u^n - (p + qi) = 0.$$

Die Gleichung reduciert sich auf

$$r^n \cos n\vartheta - p = z$$

wobei noch die Gleichung

$$r^n \sin n\vartheta - q = 0 \text{ erfüllt sein muss.}$$

Substituiert man den Wert von $r^n = \frac{q}{\sin n\vartheta}$ in die erstere, so wird man erhalten $q \operatorname{cotg} n\vartheta - p = Z$, in welcher Gleichung ϑ die einzige unabhängige Veränderliche ist. Wir wollen bei dieser Betrachtung mehrere Fälle unterscheiden

1) p positiv, dabei kann q positiv oder negativ sein,

2) p negativ und q positiv oder negativ.

[1]p positiv, q positiv, n gerade und $= 2m$, ϑ wachsend von o bis $\frac{\pi}{n}$, $n\vartheta$ von o bis π.

Ist $\vartheta =$ ist $\operatorname{cotg}(n\vartheta) = \infty$, somit auch $z = \infty$, wenn aber 0 wächst nimmt cotg $n\vartheta$ somit auch z stetig ab. Wird $q \operatorname{cotg} n\vartheta = p$ so ist $z = 0$, daraus folgt $\operatorname{tang} \vartheta = \frac{q}{p}$ wobei noch zu merken ist, dass $n\vartheta < \frac{\pi}{2}$ ist. Nennen wir nun den spitzigen Winkel, dessen Tangente $= \frac{q}{p}$ etwa ι, so ist für den Punkt, in welchem die Curve die Ebene XY durchschneidet somit z=0 wird, $\vartheta = \frac{\iota}{n}$.

Um das dazu gehörige r zu finden, substituiere man diesen Werth in die Gleichung

$$r^n \sin n\vartheta = q, \quad \text{somit}$$

$$r^n \sin \tau = q; \text{ zugleich}$$

$$r^n \cos \tau = q; \text{ quadriert und addiert}$$

$$r^{2n} = p^2 + q^2; \text{ daraus ergibt sich}$$

$$r = \sqrt[2n]{p^2 + q^2}, \text{ setzt man}$$

$$\sqrt{p^2 + q^2} = \varrho \text{ so ist } r = \varrho^{\frac{1}{n}}$$

Die Wurzel der Gleichung ist somit

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\tau}{n}$$

Wird ϑ grösser als $\frac{\tau}{n}$ so wird q cotg $n\vartheta < p$ somit z negativ sein. Für $\vartheta = \frac{\pi}{2n}$ somit $n\vartheta\ \frac{\pi}{2}$ ist cotg $n\vartheta = 0$ und $z = -p$, von da an wird auch cotg $n\vartheta =$ negativ verbleiben bis für $\vartheta = \frac{\pi}{n}$ cotg $n\vartheta = -\infty$ und $z = -\infty$ wird.

Ein Curvenzweig also des Curvensystems, den die Gleichung

$$u^n - (p+qi) = \text{darstellt,}$$

bleibt eingeschlossen zwichen den durch OX und OA vertikal gelegten Ebenen seine Projektion auf die Ebene XY ist die zwischen OX und OA gelegene Curve. Dieser Curvenzweig senkt sich von oben, indem er sich von der durch OX gelegten Vertikalebene entfernt, dem Durchschnittspuukte aber fortwärend nähert, bis er die Ebene XY in dem Punkte $\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\tau}{n} + i \sin \frac{\tau}{n}\right]$ durchschneidet, wornach er sich bei dem Punkte, dessen Horizontalprojektion die Coordinaten $q^{\frac{1}{n}}, \frac{\pi}{2n}$ hat, der durch OB gelegten Verticalebene ohne Ende nähert und dabei von XY unendlich entfernt.

Ist n gerade, etwa $= 2m$, so liegt auch in dem Scheitelwinkel von XOA ein Curvenzweig, indem r auch negativ genommen werden kann. Da aber n gerade ist hat r^n denselben positiven Werth wie früher und der zwischen den durch OX' und OA' gelegene Curvenzweig verläuft ebenso wie der zwischen XOA; er durchschneidet die Ebene XY in einem Punkte, dessen Coordinaten $\varrho^{\frac{1}{n}}$ und $\pi + \frac{\tau}{n}$ sind, somit ist $\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\pi + \frac{\tau}{n}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\tau}{n}\right)\right]$ welchen Ausdruck man auch

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\tau}{n} + i \sin \frac{\tau}{n}\right] \left[\cos \frac{2m}{n}\pi + i \sin \frac{2m}{n}\pi\right]$$

schreiben kann, eine zweite Wurzel der Gleichung $u - (p+qi) = o$.

Für die andern Projektionscurven durchläuft ϑ die Werte von $\frac{2\pi}{n}$ bis $\frac{3\pi}{n}$, von $\frac{4\pi}{n}$ bis $\frac{5\pi}{n}$, von $\frac{6\pi}{n}$ bis $\frac{7\pi}{n}$ u. s. f. Setzen wir daher für einen derselben $\frac{2k\pi}{n} + \alpha$, wo α von o bis $\frac{\pi}{n}$ wachsend gedacht wird, somit $n\vartheta = 2k\pi + n\alpha$, so wird cotg $n\vartheta$=cotg $n\alpha$ und da α dieselben Werte wie ϑ in dem Winkel AOX durchläuft, so wird auch x genau dieselben Werte annehmen, somit dieser Curvenzweig mit dem früher betrachteten congruent sein.

Er wird durchschneiden die Ebene XY in dem Punkte dessen Coordinaten $\varrho^{\frac{1}{n}}, \frac{2k\pi}{n} + \frac{\iota}{n}$ sind; sein correspondierender Zweig im Punkte, dessen Coordinaten

$$-\varrho^{\frac{1}{n}}, \frac{2k\pi}{n} + \frac{\iota}{n} \text{ oder}$$

$$+\varrho^{\frac{1}{n}}, \frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n} + \pi \text{ sind.}$$

Die zwei Wurzeln die daraus hervorgehen sind also:

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\iota}{n} + i \sin \frac{\iota}{n}\right] \left[\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right] \text{ und}$$

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\iota}{n} + i \sin \frac{\iota}{n}\right] \left[\cos \left(\frac{2k\pi}{n} + \pi\right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} + \pi\right)\right]$$

diese letztere kann aber auch geschrieben werden:

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\iota}{n} + i \sin \frac{\iota}{n}\right] \left[\cos \frac{2k\pi + 2m\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi + 2m\pi}{n}\right]$$

$$\text{da aber } \cos \frac{2(m+k)\pi}{n} = \cos \frac{2(m-k)\pi}{n}$$

$$\text{und } \sin \frac{2(m+k)\pi}{n} = -\sin \frac{2(m-k)\pi}{n}$$

so könnte man auch die zweite Wurzel schreiben

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\iota}{n} + i \sin \frac{\iota}{n}\right] \left[\cos \frac{2(m-k)\pi}{n} - i \sin \frac{2(m-k)\pi}{n}\right]$$

Alle Paare der Wurzeln der Gleichung liessen sich darstellen unter der Form

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\iota}{n} + i \sin \frac{\iota}{n}\right] \left[\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right]$$

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\iota}{n} + i \sin \frac{\iota}{n}\right] \left[\cos \frac{2(m-k)\pi}{n} - i \sin \frac{2(m-k)\pi}{n}\right]$$

wenn man nur für k Werthe substituiert von 0, 1, 2,.... m,
da aber die Zahlen k und m-k dieselben sind nur in umgekehrter Ordnung, so wird bei der Substitution dieser Zahlen in die zweite Wurzel ein cos $\frac{2(m-k)\pi}{n}$ schon in der ersten Wurzel mit demselben Zeichen, und ein sin $\frac{2(m-k)\pi}{n}$ mit dem entgegengesetzten vorgekommen sind; daher kann man auch die n Wurzeln der Gleichung schreiben unter der Form

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\iota}{n} + i \sin \frac{\iota}{n}\right] \left[\cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2kp}{n}\right].$$

Wenn n ungerade ist, so verlaufen die Curven im Raume ganz auf dieselbe Weise, nur liegen sie zwischen andern Assymptotenebenen. Die erste liegt wohl zwischen XOA.

Der Punkt in welchem sie die Ebene durchschneidet hat die Polarcoordinaten $\varrho^{\frac{1}{n}}, \frac{\tau}{n},$ somit ist eine Wurzel wie früher

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\tau}{n} + i \sin \frac{\tau}{n}\right).$$

Die zweite Curve liegt zwischen B' O A', der Durchschnittspunkt hat die Coordinaten

$$\varrho^{\frac{1}{n}}, \frac{\pi}{n} + \frac{\tau}{n} + \pi$$

somit die Wurzel

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\tau}{n} + i \sin \frac{\tau}{n}\right] \left[\frac{\tau}{n} \cos \frac{n+1}{n} \pi + i \sin \frac{n+1}{n} \pi\right].$$

Die Durchschnittspunkte der übrigen Curvenzweige werden den Radius vektor haben $\varrho^{\frac{1}{n}}$ und die Winkel

$$\frac{2\pi}{n} + \frac{\tau}{n}, \frac{4\pi}{n} + \frac{\tau}{n}, \frac{6\pi}{n} + \frac{\tau}{n}, \ldots \text{ und}$$

$$\frac{3\pi}{n} + \pi + \frac{\tau}{n}, \frac{5\pi}{n} + \pi + \frac{\tau}{n}, \frac{7\pi}{n} + \pi + \frac{\tau}{n} \ldots$$

Die Form eines derartigen Wurzelpaares

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\tau}{n} + i \sin \frac{\tau}{n}\right] \left[\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right]$$

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\tau}{n} + i \sin \frac{\tau}{n}\right] \left[\cos \frac{n\pi + (2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{n\pi + (2k+1)\pi}{n}\right]$$

oder das letztere kann noch geschrieben werden

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\tau}{n} + i \sin \frac{\tau}{n}\right] \left[\cos \left(\frac{n\pi - \widehat{2k+1}\pi}{n}\right) - i \sin \frac{n\pi - \widehat{2k+1}\pi}{n} \pi\right]$$

und da $n = 2m + 1$

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\tau}{n} + i \sin \frac{\tau}{n}\right] \left[\cos \frac{2(m-k)\pi}{n} - i \sin \frac{2(m-k)\pi}{n}\right]$$

Somit werden wie früher alle Wurzeln enthalten sein unter der Form

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\tau}{n} + i \sin \frac{\tau}{n}\right] \left[\cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi}{n}\right]$$

Wäre q negativ, so wird in dem Winkel AOX keine Projektionscurve gelegen sein, wohl aber in dem Winkel BOA. In diesem wächst ϑ von $\frac{\pi}{n}$ bis $\frac{2\pi}{n}$ somit $n\vartheta$ von π bis 2π; setzen wir $\vartheta = \frac{\pi}{n} + \alpha$ so wird beim geraden n $n\vartheta = \pi + n\alpha$ und $z = q \operatorname{cotg} n\vartheta - p$.

Ist α unendlich klein etwa gleich ε, so ist $n\vartheta = \pi + n\varepsilon$, $\operatorname{cotg} n\vartheta = \infty$ und da q negativ ist, so ist $z = -\infty$; z nimmt nun ab, bleibt aber negativ bis $n\vartheta = \pi + n\alpha$

K814

$= \pi + \frac{\pi}{2}$ d. h. $n\alpha = \frac{\pi}{2}$ wo die cotg $n\vartheta = o$ wird und das Zeichen ändert; es wird nun cotg $(\pi + n\alpha)$ negativ und wachsend bis

$$q \operatorname{cotg} (\pi + n\alpha) = p \text{ wird; da ist } z = o.$$

Diese Bedingungsgleichung kann ersetzt werden durch die folgende

$$+ q \operatorname{cotg} (2\pi - n\alpha) = p.$$

$$q \operatorname{cotg} (-n\alpha) = p.$$

Bezeichnet man wiederum den kleinsten Bogen arctang $\frac{q}{p}$ mit τ so ist

$$n\vartheta = 2\pi - n\alpha$$

$$\vartheta = \frac{2\pi}{n} - \alpha$$

$$\vartheta = \frac{2\pi}{n} - \frac{\tau}{n}$$

und die Polarcoordinaten dieses Durchschnittspunktes sind $\varrho^{\frac{1}{n}}, \frac{2\pi}{n} - \frac{\tau}{n}$.

Indem ϑ noch weiter wächst, wird cotg $n\vartheta$ fortwährend negativ, somit q cotg $n\vartheta$ und z selbst fortwährend positiv verbleiben bis es für $n\vartheta = 2\pi$ gleich $+ \infty$ wird.

Die Curve erhebt sich also von $- \infty$ kommend längs der durch AO gelegten Ebene; schneidet die Ebene XY und steigt dann fortwährend, indem sie sich der durch BO gelegten Ebene fortwährend nähert.

Ebenso werden sich die übrigen Curvenzweige verhalten.

Da n gerade angenommen wurde, so wird in dem Scheitelwinkel von BOA auch eine Projektionscurve gelegen sein und die Coordinaten der entsprechenden Durchschnittspunkte

$$\varrho^{\frac{1}{n}}, \frac{2\pi}{n} - \frac{\tau}{n} + \pi$$

und somit das Wurzelpaar

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right) + i \sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right] \left[\cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}\right] \text{ und}$$

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right) + i \sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right] \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n} + \pi\right)\right]$$

Die übrigen Durchschnittspunkte werden den Radius $\varrho^{\frac{1}{n}}$ und die Winkel

$$\frac{4\pi}{n} - \frac{\tau}{n}, \frac{6\pi}{n} - \frac{\tau}{n}, \frac{8\pi}{n} - \frac{\tau}{n} \dots \text{ und}$$

die correspondierenden $\frac{4\pi}{n} - \frac{\tau}{n} + \pi, \frac{6\pi}{n} - \frac{\tau}{n} + \pi, \frac{8\pi}{n} - \frac{\tau}{n} + \pi \dots$

ein solches Wurzelpaar lässt sich nun wieder zusammenfassen unter der Form:

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right) + i \sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right] \left[\cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}\right]$$

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right) + i \sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right] \left[\cos\left(\frac{2k\pi + n\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi + n\pi}{n}\right)\right]$$

oder

$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right)+i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left[\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right]$$

$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right)+i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left[\frac{2(m-k)\pi}{n}-i\sin\frac{2(m-k)\pi}{n}\right]$$

oder im allgemeinen alle Wurzeln

$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right)+i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left[\cos\frac{2k}{n}\pi\pm\sin\frac{2k}{n}\pi\right]$$

indem man für k Zahlen setzt, die zwischen den Grenzen o und m eingeschlossen sind.

Ist n ungerade, so liegen die Curvenzweige zwischen den durch BOA, DOC und C'OB'.... gelegten Verticalebenen, und verlaufen auf dieselbe Art.

Die Coordinaten der Durchschnittspunkte sind: $\varrho^{\frac{1}{n}}$ und die Winkel

$$\frac{2\pi}{n}-\frac{\tau}{n},\ \frac{4\pi}{n}-\frac{\tau}{n},\ \ldots\ \text{und}$$

$$\frac{3\pi}{n}-\frac{\tau}{n}+\pi,\ \frac{5\pi}{n}-\frac{\tau}{n}+\pi\ \ldots$$

die Wurzeln

$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right)+i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left[\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right]$$

$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right)+i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left[\cos\frac{(2m+1+2k+1)}{n}+i\sin\frac{(2m+1+2k+1)}{n}\right]$$

oder

$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right)+i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left[\cos\frac{2m+1-(2k+1)}{n}\pi-i\sin\frac{2m+1-(2k+1)}{n}\pi\right]$$

oder

$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right)+i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left[\cos\frac{2(m-k)}{n}\pi-i\sin\frac{2(m-k)}{n}\pi\right]$$

somit alle

$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right)+i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\pm i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

2. p neg. q positiv.

Die durch die Gleichung $q \operatorname{cotg} n\vartheta - p = z$ dargestellte Curve wird aus dem positiven Unendlichen kommen, und sich herabsenken. Bis $\operatorname{cotg} n\vartheta$ negativ geworden und $q \operatorname{cotg} n\vartheta = p$ sein wird, wird ein Durchschnittspunkt stattfinden; die Werthe von z werden hernach negativ bis $-\infty$.

Die Coordinaten der Durchschnittspunkte werden sein

$$\varrho^{\frac{1}{n}},\ \frac{\pi}{n}-\frac{\tau}{n},$$

Die Coordinaten der übrigen Durchschnittspunkte $\varrho^{\frac{1}{n}}$ und

a) wenn n gerade $= 2m$

$$\frac{\pi}{n} - \frac{\tau}{n}, \frac{3\pi}{n} - \frac{\tau}{n}, \frac{5\pi}{n} - \frac{\tau}{n} \ldots \frac{2k+1}{n}\pi - \frac{\tau}{n} \text{ und}$$

$$\frac{\pi}{n} - \frac{\tau}{n}, + \pi, \frac{3\pi}{n} - \frac{\tau}{n} + \pi, \frac{5\pi}{n} - \frac{\tau}{n} + \pi \ldots\ldots \frac{2k+1}{n}\pi - \frac{\tau}{n} + \pi$$

b) wenn ungerade $= 2m + 1$

$$\frac{\pi}{n} - \frac{\tau}{n}, \frac{3\pi}{n} - \frac{\tau}{n}, \frac{5\pi}{n} - \frac{\tau}{n} \ldots\ldots \frac{2k+1}{n}\pi - \frac{\tau}{n} \text{ und}$$

$$\frac{2\pi}{n} - \frac{\tau}{n} + \pi, \frac{4\pi}{n} - \frac{\tau}{n} + \pi, \frac{6\pi}{n} - \frac{\tau}{n} + \pi \ldots\ldots \frac{2k+2}{n}\pi - \frac{\tau}{n} + \pi$$

Die Form eines Wurzelpaares

a.
$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right) \text{ und}$$

$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{2m+2k+1}{n}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2m+2k+1}{n}\pi\right)\right]$$

letzteres kann auch noch geschrieben werden

$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left[\cos\frac{2(m-k)-1}{n}\pi - i\sin\frac{2(m-k)-1}{n}\pi\right]$$

und da $2k+1$ und $2(m\text{-}k)-1$ dieselben ungeraden Zahlen geben, wenn für k die Zahlen 0, 1, 2, ... m—1 substituiert werden, so sind alle Wurzeln enthalten in der Form

$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left[\cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right]$$

b. Die Form zweier Wurzeln

$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left[\cos\frac{2k+1}{n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right] \text{ und}$$

$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left[\cos\frac{2m+1+2k+2}{n}\pi + i\sin\frac{2m+1+2k+2}{n}\pi\right]$$

oder

$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left[\cos\frac{2(m-k)-1}{n}\pi - i\sin\frac{2(m-k)-1}{n}\pi\right]$$

somit sind alle Wurzeln enthalten unter der Form

$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right]\left[\cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right].$$

Wäre nun auch q negativ, und n gerade $= 2$ m, so wird der erste Curvenzweig liegen zwischen AOB. Setzt man $\vartheta = \frac{\pi}{n} + \alpha$, daher $n\vartheta = \pi + n\alpha$, so durchläuft hier α die Werthe von o bis $\frac{\pi}{n}$; dabei ist cotg $n\vartheta$ anfangs positiv, somit q cotg$n\vartheta$ negativ und daher steigt die Curve vom negativen Unendlichen kommend und durchschneidet die Ebene XY, wenn α die Gleichung q cotg $(\pi + n\alpha) = p$ befriedigt. Hierauf werden die Werthe von z positiv und wachsen bis ins Unendliche.

Für den Durchschnittspunkt muss $\cot g\,(\pi + n\alpha) = \frac{p}{q}$ und da $\frac{p}{q}$ positiv ist, muss $n\alpha$ zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ eingeschlossen sein.

Oder es muss

$$\operatorname{tg}\, n\alpha = \frac{q}{p}.$$

setzen wir den kleinsten Bogen der diese Gleichung befriedigt $= \tau$ so ist $\alpha = \frac{\tau}{n}$ und die Coordinaten des Durchschnittspunktes

$$\varrho^{\frac{1}{n}}, \text{ und } \frac{\pi}{n} + \frac{\tau}{n}$$

Die übrigen Curven verlaufen ebenso; ihre Durchschnittspunkte sind

$$\frac{\pi}{n} + \frac{\tau}{n},\ \frac{3\pi}{n} + \frac{\tau}{n},\ \frac{5\pi}{n} + \frac{\tau}{n} \ldots \text{ und}$$

$$\frac{\pi}{n} + \frac{\tau}{n} + \pi,\ \frac{3\pi}{n} + \frac{\tau}{n} + \pi,\ \frac{5\pi}{n} + \frac{\tau}{n} + \pi \ldots$$

Wäre dagegen n ungerade $= 2m+1$

$$\frac{\pi}{n} + \frac{\tau}{n},\ \frac{3\pi}{n} + \frac{\tau}{n},\ \frac{5\pi}{n} + \frac{\tau}{n} \ldots \text{ und}$$

$$\frac{2\pi}{n} + \frac{\tau}{n} + \pi,\ \frac{4\pi}{n} + \frac{\tau}{n} + \pi,\ \frac{6\pi}{n} + \frac{\tau}{n} + \pi \ldots$$

Die Form zweier Wurzeln

a. $$\varrho^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\tau}{n} + i \sin\frac{\tau}{n}\right) \left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi + i \sin\frac{2k+1}{n}\pi\right) \text{ und}$$

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\tau}{n} + i \sin\frac{\tau}{n}\right) \left(\cos\frac{2m-(2k+1)}{n}\pi - i \sin\frac{2m-(2k+1)}{n}\pi\right)$$

alle Wurzeln

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\tau}{n} + i \sin\frac{\tau}{n}\right) \left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm i \sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)$$

b. $$\varrho^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\tau}{n} + i \sin\frac{\tau}{n}\right) \left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi + i \sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)$$

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\tau}{n} + i \sin\frac{\tau}{n}\right) \left(\cos\frac{2m+1-(2k+2)}{n}\pi - i \sin\frac{2m+1-(2k+2)}{n}\pi\right)$$

alle

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\tau}{n} + i \sin\frac{\tau}{n}\right) \left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm i \sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)$$

Fassen wir das alles zusammen, so erscheinen die Wurzeln einer solchen Gleichung in einer der folgenden Formen, je nach Zeichen von p und q.

I. <u>p positiv.</u>

1. q positiv

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\tau}{n} + i \sin\frac{\tau}{n}\right) \left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i \sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

2. q negativ

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right) + i \sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right] \left[\cos\frac{2k}{n}\pi \pm i \sin\frac{2k}{n}\pi\right]$$

II. p negativ.

1. q positiv

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(-\frac{\tau}{n}\right) + i \sin\left(-\frac{\tau}{n}\right)\right] \left[\cos\frac{2k+1}{n}\pi + i \sin\frac{2k+1}{n}\pi\right]$$

2. q negativ

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos\frac{\tau}{n} + i \sin\frac{\tau}{n}\right] \left[\cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm i \sin\frac{2k+1}{n}\pi\right]$$

Bezeichnet man überhaupt den Winkel, dessen Tangente $\frac{q}{p}$, mit τ, so dass er zugleich mit $\frac{q}{p}$ positiv oder negativ sein kann, so lassen sich die Wurzeln auch noch schreiben:

I. wenn p positiv ist

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos\frac{\tau}{n} + i \sin\frac{\tau}{n}\right] \left[\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i \sin {}^{2k}{}_{n}\right]$$

II. wenn p negativ ist

$$\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos\frac{\tau}{n} + i \sin\frac{\tau}{n}\right] \left[\cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm i \sin\frac{2k+1}{n}\pi\right]$$

Wenn man aus den Gleichungen dieses Curvensystems

$$r^n \sin n\vartheta = q$$

$$r^n \cos n\vartheta = z + p$$

ϑ eliminiert, etwa indem man jede quadriert und dann beide addiert, so erhält man

$$r^{2n} = z^2 + 2pz + p^2 + q^2$$

welche Gleichung man, wenn r^{2n} durch $(x^2 + y^2)^n$ ersetzt wird, auch schreiben kann

$$(x^2+y^2)^n = z^2 + 2pz + p^2 + q^2$$

Diese Relation ist offenbar die Gleichung einer Rotationsfläche, deren Rotationsaxe mit der Axe der z zusammenfällt und deren Erzeugungscurve man findet, wenn man sich dieselbe etwa durch die Ebene ZX geschnitten denkt, die Gleichung dieser Ebene ist $y=o$; wird dieser Werth in die Gleichung der Rotationsfläche substituiert, so ist

$$x^{2n} = z^2 + 2pz + q^2$$

die Gleichung der Erzeugungscurve. Man kann nun auch diese Curven im Raume betrachten als hervorgegangen aus dem Durchschnitt dieser Rotationsfläche und der durch die Gleichung

$$\binom{n}{1} x^{n-1} y - \binom{n}{3} x^{n-3} y^3 + \binom{n}{5} x^{n-5} y^5 - \ldots\ldots - q = o \ldots\ldots (m)$$

dargestellten Cylinderflächen.

Wären die Coëfficienten der binomischen Gleichung reell, so hätte man nur in den vorgehenden Gleichungen $q=o$ zu setzen.

Die Gleichung der Rotationsfläche wäre alsdann

$$(x^2+y^2)^n = (z+p)^2 \; . \; . \; . \; . \; (n)$$

Die Gleichung der Leitcurven (m), würde sich, da $q=0$ ist durch die Gleichung der Assymptoten

$$y = x \operatorname{tg}\left(\frac{m\pi}{n}\right) \; . \; . \; . \; (0)$$

ersetzen lassen, woraus man sieht dass für diesen Fall diese Curven sich in ihre Assymptoten verwandeln.

Die Gleichungen (n) und (o) in Verbindung, sind die Gleichungen der Curven im Raume, die die binomische Gleichung

$$u^n - p = 0$$

darstellen, sie sagen aus, dass diese Curven Meridiane einer Rotationsfläche sind, deren Gleichung (n) ist.

Die Ausdrücke für die Wurzeln dieser Gleichung kann man aus den früher ermittelten Wurzeln erhalten wenn nur $q=0$ in denselben gesetzt wird. Dadurch wird $\varrho = p$ und da $\operatorname{tg}\tau = \frac{q}{p} = \frac{o}{p} = 0$, ist auch $\tau = o$, daher sind die Wurzeln dieser Gleichung enthalten unter der Form

$$\text{wenn } p > 0 \qquad p^{\frac{1}{n}} \quad \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \pm i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$\text{wenn } p < 0 \qquad p^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right) \pm i \sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)\right]$$

Ist nun auch $p=1$ und man bezeichnet die n Werthe von

$$1^{\frac{1}{n}} \text{ und } (-1)^{\frac{1}{n}} \text{ mit } [(1)]^{\frac{1}{n}} \text{ und } [(-1)]^{\frac{1}{n}} \text{ so ist}$$

$$[(1)]^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi}{n} \text{ und}$$

$$[(-1)] = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right) \pm i \sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)$$

Es können nun auch die n Werthe des Ausdruckes $\sqrt[n]{p+qi}$ dargestellt werden durch

$$[(p+qi)]^{\frac{1}{n}} = \varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\tau}{n} + i \sin \frac{\tau}{n}\right] [(1)]^{\frac{1}{n}} \text{ für } p > 0$$

$$\text{und } [(p+qi)]^{\frac{1}{n}} = \varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\tau}{n} + i \sin \frac{\tau}{n}\right] [(-1)]^{\frac{1}{n}} \text{ für } p < 0.$$

SCHULNACHRICHTEN.

I. Lehrplan des Schuljahres 1862—63.

Vorbereitungs-Klasse.

Religion, Deutsch, Geographie, Mathematik, Naturgeschichte, Polnisch und Böhmisch, wegen geringen Besuches gemeinschaftlich mit der ersten Klasse.

Erste Klasse.

Klassenlehrer: Johann Kukutsch.

Religion: 2 Stunden Dr. Luthers Katechismus nach Redlichs Ausgabe. Die kleinere Hälfte. *A. Żlik.*

Latein: 8 Stunden. 1. Sem. Grammatik nach Schulz: die regelmässige Formenlehre: Declination, Comparation, Pronomina, Numeralia, Adverbia. Nach 10 Wochen alle 8 Tage Composition, nach Dünnebiers Lehrbuche. 2. Sem.: Schulz: Formenlehre: Genus, Tempora, Modi; Ableitung der Tempora. Regelmässige Conjugation. Gebrauch des Conjunctivs und Infinitivs in den wichtigsten Fällen. Memorieren und Aufschreiben der Vokabeln mit der Uebersetzung. Alle 8 Tage eine Composition, alle 14 Tage ein Pensum nach Dünnebier. *J. Kukutsch.*

Deu sch: 4 Stunden. 1. und 2. Sem.: Die Conjugation, ihr syntaktischer Gebrauch und die Partikeln nach Bauers Grammatik. Ausserdem wurden die 160 starken Verba mit ihrem Ablaut, ihrem Conjunctiv und ihrem Hilfszeitwort memoriert. Mozarts Lesebuch 1. Abth. Alle 14 Tage ein Aufsatz, jede Woche eine Schreibungsübung nach der vom Lehrkörper angenommenen und gedruckten Vorschrift. *J. Kukutsch.*

Geographie: 3 Stunden. Geographie nach Schubert; Karten von Scheda.
Im. Raschke.

Mathemathik: 3 Stunden. 1. Sem.: Arithmetik. Ergänzungen zu den vier Species und den Brüchen; Decimalbrüche nach Močniks Lehrbuch. 2. Sem.: 1 Stunde Wiederholung und Einübung des Obigen. 2 Stunden Geometrische Anschauungslehre. Auf Anschauung basierte Entwickelung der Begriffe der Raumgrössen: Körper, Flächen, Linien, Punkte. Gerade Linien, Richtung und Grösse derselben. Entstehung und Grösse der Winkel, Gleichheit, Aehnlichkeit und Congruenz. Entwickelung der Haupteigenschaften der Dreiecke; Construction derselben und Auflösung einiger geometrischer Aufgaben. *J. Odstrčil.*

Naturgeschichte: 2 Stunden. 1 Sem. Säugethiere nach Pokorny's Lehrbuch. 2. Sem. Insecten, Spinnen und Krustenthiere, Würmer, Weich-, Strahl-, Korallen- und Aufgussthiere nach demselben Lehrbuch. *O. Żlik.*

Zweite Klasse.

Klassenlehrer: Gottlieb Biermann.

Religion: 2 Stunden. Die andere grössere Hälfte des in der ersten Klasse angefangenen Lehrstoffes nach demselben Lehrbuch. *A. Źlik.*

Latein: 8 Stunden. Kleine lateinische Sprachlehre von Dr. Fr. Schulz. Unregelmässigkeiten in den Declinationen, die in der 1. Klasse weniger berücksichtigten Partien der Zahl- und Fürwörter, und Adverbia; Präpositionen und Conjunctionen. Schinnagels Lesebuch: Memorieren, später häusliches Praeparieren. Alle 8 Tage 1 Composition; alle 14 Tage 1 Pensum. — 2. Sem. Unregelmässigkeiten in der Conjugation. Verba anomala, defectiva, impersonalia. Lehre vom Gebrauch des Conjunctivs, Imperativs, Infinitivs. Anwendung der Participien. Schinnagels Lesebuch: Präparation. Composition und Pensum, wie im 1. Semester.
G. Biermann.

Deutsch: 4 Stunden. 1. und 2. Sem. Die Declination und ihr syntaktischer Gebrauch und Wiederholung der Conjugation aus Bauers Lehrbuch. Wiederholung der 160 starken Verba. Lesen und Memorieren aus Mozarts Lesebuch II. Alle 14 Tage ein Aufsatz. Alle Wochen eine Schreibungsübung, Erklärung der eingeführten Schreibungsvorschrift und Dictate darnach.
G. Biermann.

Geschichte und Geographie: 3 Stunden. 1. Sem. Einleitung in die Weltgeschichte, Geschichte von den Indern bis zum Tode Alexanders des Grossen nach Dr. Becks Lehrbuch. Gleichlaufend Geographie Vorderasiens, Griechenlands und des östlichen Mittelmeeres nach Wandkarten von Kiepert. 2. Sem. Geschichte von Roms Gründung bis zum Fall des weströmischen Reiches. Geographie Italiens, des ganzen Mittelmeeres, des westlichen und mittlern Europas. In beiden Semestern Kartenzeichnen. *K. Gazda.*

Mathematik: 3 Stunden. 1. Sem. Arithmetik 2 Stunden. Verhältnisse, Proportionen, einfache Regel-de-tri und darauf beruhende Rechnungsarten nach Močnik's Lehrbuch. Geometrische Anschauungslehre. 1 Stunde Flächenberechnung geradliniger Figuren nach Hillardt's Tafeln. 2. Sem. Arithmetik. 1 Stunde wälsche Praktik und Uebungen der Rechnungen des 1. Sem. Geometrische Anschauungslehre. 2 Stunden Pythagoräischer Lehrsatz, von der Bildung bestimmter Quadrate, Verwandlung und Theilung geradliniger Figuren. *O. Źlik.*

Naturgeschichte: 2 Stunden. 1. Sem. Vögel, Amphibien, Fische nach Pokorny's Lehrbuch. 2. Sem. Erklärung der Pflanzenorgane und des Linné'schen Systems nach demselben Lehrbuche; Uebung im Beschreiben, Unterscheiden und Bestimmen der um Teschen wild wachsenden und angebauten Pflanzen. *O. Źlik.*

Dritte Klasse.

Klassenlehrer: Paul Kaisar.

Religion: 2 Stunden. Zusammenhängende Darstellung der christlichen Glaubenslehre nach Palmer. *A. Źlik.*

Latein: 6 Stunden. 1. Semester 2 Stunden. Grammatik nach Schulz. §. 180—235 der Syntax (Gebrauch der Casus). Alle 14 Tage eine Composition und 1 Pensum nach Süpfles 1. Thl. 1—204 mit Auswahl. Lectüre 4 St. Historia antiqua ed. Hoffmann lib. VIII. und IX. 2. Sem. 2 St. Grammatik. Wiederholung des im ersten Semester abgehandelten Lehrstoffes und Dazunahme der §. §. 236—239 (Syntaktische Eigenthümlichkeiten im Gebrauche der Adjektiva und Pronomina) Süpfle 1. Thl. Nr. 1—204 mit Auswahl. Lectüre 4 Stunden. Historia antiqua l. IX. X. Bildung von Sätzen. Präparation, Composition und Pensum wie im 1. Semester. *P. Kaisar.*

Griechisch: 5 Stunden. 1. Sem. Auswahl des Nothwendigsten aus der Laut- und Flexionslehre bis zu dem Verbum auf ω inclusive nach Curtius Grammatik. Memorieren und Präparieren. Schenkels Lesebuch 1 bis 39. — 2. Sem. Aus Curtius Grammatik. Verba contracta bis zu den Verbis auf μι. Aus Schenkels Lesebuche 40—74. Alle 14 Tage ein Pensum oder 1 Composition. *G. Friedrich.*

Deutsch: 3 Stunden. 1. und 2. Sem. Mozarts Lesebuch III. — Wiederholung der Formen- und Satzlehre in bestimmten Aufgaben aus Bauers Grammatik. — Alle 14 Tage ein Aufsatz abwechselnd zu Hause und in der Schule gearbeitet.— Vortrag memorierter Lesestücke. *K. Gazda.*

Geschichte und Geographie: 3 Stunden. 1. Sem. Vom Falle des weströmischen Reiches bis Rudolf von Habsburg nach Dr. Becks Lehrbuch. 2. Sem. Fortsetzung der Geschichte des Mittelalters und neuere Geschichte bis zum westphälischen Frieden, nach demselben Lehrbuche. Gleichlaufend Geographie nach Brettschneiders historischen Karten. *P. Kaisar.*

Mathematik: 3 Stunden. 1. Sem. Arithmetik nach Močnik's Lehrbuch. Die 4 Species in Buchstaben, Lehre von den Klammern, Potenzieren. Geometrische Anschauungslehre nach Hillardts Tafeln. Proportionalität der Linien, Aehnlichkeit geradliniger Figuren, einige Anwendungen der Lehre von der Congruenz und Aehnlichkeit der Dreiecke. — 2. Sem. Arithmetik 1 Stunde Quadrat- und Kubikwurzeln, Permutationen und Combinationen. Geometrische Anschauungslehre 2 Stunden. Linien, Winkel und Verhältnisse im Kreise, Constructionen in und um den Kreis, Kreisberechnung, Ellipse.

O. Źlik.

Naturgeschichte und Physik: 2 Stunden. 1. Sem. Mineralogie nach Fellöcker. Terminologie. Uebung im Beschreiben einzelner Mineralien. 2. Sem. Physik nach Kunzek. Von den Körpern und ihren Veränderungen; von den auf ihre kleinsten Theilchen wirkenden Kräften. *O. Źlik.*

Vierte Klasse.

Klassenlehrer: Karl Gazda.

Religion: 2 Stunden. Fortsetzung des in der 3. Klasse begonnenen. Christliche Sittenlehre. *A. Źlik.*

Latein: 6 Stunden. 1. Sem. 2 Stunden grammatische Uebungen nach Schinnagls Grammatik. Wiederholung der Casuslehre, dann §. 61—117 (Gebrauch der Adjectiva; dann vom Comparativ, Superlativ, von den Numeralibus, Pronominibus, Temporibus und Modis). Alle 14 Tage ein Pensum und 1 Composition nach Süpfle 1. Thl. Nr. 205—260. Ebenso daraus die mündlichen Uebungen nach Auswahl. Lectüre 4 Stunden Julii Caesaris de bello gallico ed. Hoffmann lib. I. II. Präparation. 2. Sem. 2 Stunden Grammatik nach Schinnagl §. 117—148 (Moduslehre, Relativsätze. Accusativus cum Infinitivo, Participium, Gerundium, Supinum). — Composition und Pensum wie im 1. Sem. nach Süpfle 1 Thl. Nr. 260—307, nach Auswahl. Ebenso mit Auswahl die mündliche Uebung. Lectüre: Caesar de bello gallico ed. Hoffmann lib. IV. und die 20 ersten Capiteln von VI. Das Vorzüglichste aus der Prosodie und Metrik. Ovidii Metamorph. ed. Grysar, lib. I. v. 89—162; 163—415. Präparation. *K. Gazda.*

Griechisch: 4 Stunden. 1. Sem. Alle 4 Stunden Curtius Grammatik. Wiederholung der Verba auf ω, Einübung der ersten Klasse der Verba auf μι §. 302—318. Alle 4 Stunden Lectüre aus Schenkel's Lesebuch. Verba auf μι bis zu der zweiten Klasse derselben Nr. 75—83. 2. Sem. Alle 4 St. Curtius Grammatik. Wiederholung der 1. Klasse der Verba auf μι, zweite Klasse derselben; 8 Klassen der unregelmässigen Verba §. 318—333. — Lectüre aus Schenkl's Lesebuch Nr. 84—102 mit Auswahl. Alle 14 Tage ein Pensum und eine Composition abwechselnd in beiden Semestern. *K. Gazda.*

Deutsch: 3 Stunden. 1. Sem. Mozarts Lesebuch fürs U. G. 4. Thl. Dabei Wiederholung der Formen- und Satzlehre nach Bauer's Grammatik. Alle 14 Tage ein Aufsatz, darunter sogenannte Geschäftsaufsätze. Vortrag memorierter Lesestücke. Die Hauptstücke der deutschen Metrik, sonst wie im 1. Sem. *J. Kukutsch.*

Geschichte und Geographie: 3 Stunden. 1. Sem. Von der Reformation bis zum Wiener Congress nach Dr. Becks Lehrbuch. Geographie nach Dr. Brettschneider's historischen Wandkarten. 2. Sem. Geschichte und Geographie Oesterreichs; Vaterlandskunde nach einem Leitfaden aus dem k. k. Schulbücherverlag und einer Flussnetzkarte. Ueberblick der Entstehung der Monarchie. *Im. Raschke.*

Mathematik: 3 Stunden. 1. Sem. Arithmetik; 2 Stunden nach Močnik; Zusammengesetzte Verhältnisse und darauf gegründete Rechnungsarten. Anschauungslehre 1 Stunde nach Močnik's Stereometrie. Lage der Linien und Ebenen gegen einander; körperliche Winkel. 2. Sem. Arithmetik 1 Stunde. Zinseszinsrechnung; Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. Anschauungslehre 2 Stunden. Hauptarten der Körper, ihre Gestalt und Grössenbestimmung. *O. Źlik.*

Physik: 3 Stunden. 1. Sem. Statik, Dynamik, Akustik. 2. Sem. Magnetismus und Elektricität. Vom Licht. Nach Kunzek. *J. Odstrčil.*

Fünfte Klasse.

Klassenlehrer: Heinrich Sittig.

Religion: 2 Stunden. Historischer Ueberblick über die Entfaltung der christlichen Kirche nach Palmer's Leitfaden. *G. Klapsia.*

Latein: 6 Stunden. 1. Sem. Lectüre 5 Stunden Livii lib. I. 1—22, 40—49; II. 23—33, IV. 7—9, VI. 1—33, VII. 23—27. IX. 1—16, XXI. 1—25. 1 Stunde grammatisch-stylistische Uebungen mündlich aus Süpfle 1. Thl. 335—406 mit Auswahl. Monatl. 1 Composition und 2 Pensa. 2. Sem. 5 Stunden Lectüre. Ovidii Trist. lib. I. 1, V. 3 und 14; Fastorum lib. V. 379—414, Metam. lib. V. 294—571, 642—678, VII. 1—158, XI. 1—84, XIII. 1—398. 1 Stunde grammatisch-stylistische Uebungen mündlich aus Süpfle 2. Thl. 1—116, mit Auswahl; schriftlich ebenso. Composit. und Pensa wie im 1. Sem. Schulz F. Grammatik.

H. Sittig.

Griechisch: 5 Stunden. 1. Sem. 1 Stunde Syntax nach Curtius; 1 Stunde eingehende Behandlung der Congruenzlehre, der Lehre vom Nomen, Genus, Artikel Casus. §. 362—443. 4 Stunden Lectüre. Schenkels Chrestomathie aus Xenophon (IV) I. 9, (VI) IV. 1—3, (VIII) IV. 7 &; durch 2 Monate hernach Homeri Ilias ed. Hochegger I. und II. 2. Sem. 1 Stunde Curtius Syntax; Präpositionen, Pronomina, Genera des Verbums §. 443—483. 4 Stunden Lectüre. Homeri Iliadis III. IV. VI. Alle 4 Wochen ein Pensum oder 1 Composition durch beide Semester.

H. Sittig.

Deutsch: 2 Stunden. 1. und 2. Sem. Kurzer Ueberblick der deutschen Literatur bis Klopstock. Mozart's Lesebuch für Oberg. I. zum Lesen, Memorieren und freiem Vortrag und Sprachübungen durch Wiedergabe der gelesenen Stücke und ihrer Erklärung. — Am Schlusse jedes Semesters ordnen die Schüler selbst schriftlich die gelesenen Stücke nach Gattungen und die Schriftsteller chronologisch. Alle 14 Tage 1 Aufsatz; Besprechung der corrigierten Aufsätze in der Schule.

H. Sittig.

Geschichte und Geographie: 3 Stunden. 1. Sem. Geographie und Geschichte der orientalischen Länder und Völker. Geographie Griechenlands und hellenische Geschichte bis zu den Perserkriegen nach Ramshorn's Lehrbuch 1. Abth. und histor. Wandkarten von Kiepert. 2. Sem. Fortsetzung bis zur Schlacht bei Chäronea. Macedonien und das Reich Alexanders bis zur Unterjochung der Theile desselben durch die Römer nach demselben Lehrbuche.

G. Biermann.

Mathematik: 4 Stunden. 1. Sem. 2 Stunden Arithmetik nach Močnik. Algebraische Ausdrücke im allgemeinen; die 4 Species mit Buchstabengrössen, Folgelehren der Division. Brüche. 2 St. Planimetrie nach Močnik. Gerade Linien und geradlinige Figuren. 2. Sem. 2 Stunden Arithmetik. Kettenbrüche, Verhältnisse und Proportionen und darauf sich gründende Rechnungsmethoden. 2 Stunden Planimetrie. Krumme Linien und von ihnen begränzte Figuren.

J. Odstrčil.

Naturgeschichte: 2 Stunden. 1. Sem. Mineralogie nach Fellöcker. Terminologie, Systematik, Uebung im Beschreiben der Mineralien, die wichtigsten Thatsachen der Geologie. 2. Sem. Botanik nach Leunis. Terminologie, das Linne'sche und Decandolle'sche System. Uebungen im Bestimmen und Beschreiben der Pflanzen. Einiges aus der Paläontologie und geographischen Verbreitung der Pflanzen. *O. Źlik.*

Sechste Klasse.

Klassenlehrer: Gottlieb Friedrich.

Religion: 2 Stunden. Ausführlichere auf das reifere Gemüt berechnete Auseinandersetzung des christlichen Glaubens und Lebens nach Dr. Palmer's Lehrbuch. Einleitung in die christliche Glaubenslehre. *G. Klapsia.*

Latein: 6 Stunden. 1. Sem. 5 Stunden Lectüre. Caesar de bello civili lib. I. 1—24 und II. 1—12 mit Auswahl. Ciceronis orat. I. in Catilinam. Praeparation. — 1 Stunde gramm.-styl. Uebungen nach Süpfle II. Thl. Nr. 105—236 mit Auswahl. Alle 14 Tage 1 Pensum und alle 4 Wochen 1 Composition. Benützung der Grammatik von Schulz. 2. Sem. Lectüre 5 St. Sallustii Jugurtha. Virg. Aen. lib. I. ed Hoffmann und Präparation. — 1 Stunde gram.-styl. Uebungen wie im I. Sem.; alle 14 Tage ein Pensum und alle 4 Wochen 1 Comp. Grammatik nach Schulz. *G. Friedrich.*

Griechisch: 5 Stunden. 1. Sem. 1 St. Curtius Syntax. Wiederholung der Casuslehre; eingehende Behandlung der Tempora, Modi in unabhängigen Sätzen §. 484——518. — 4 Stunden Lectüre: Homeri Iliadis ed. Hochegor l. IX, XV, XIX, XXII. 2. Sem. 1 Stunde nach Curtius Syntax in abhängigen, Aussage-, Frage-, Absichts-, hypothetischen-, Relativ- und Temporalsätzen. §. 519—558. 4 Stunden Lectüre: Herodot ed. Wilhelm V. 55—65; VI. 6—66, VII. Alle vier Wochen 1 Pensum oder 1 Composition durch beide Semester. *G. Friedrich.*

Deutsch: 3 Stunden. 1. und 2. Sem. Literargeschichtlicher Ueberblick wie in der V. Klasse. Mozarts Leseb. II. gebraucht, wie in der V. Klasse. Am Schlusse jedes Semesters fertigen die Schüler aus den Angaben des Lesebuches eine literargeschichtliche Zeittafel. — Alle 14 Tage ein Aufsatz. Besprechung der corrigierten Aufsätze in der Schule. *Im. Raschke.*

Geschichte und Geographie: 3 Stunden. 1. Sem. Geographie und Geschichte Italiens von den ältesten Zeiten bis auf Constantin I. nach Ramshorn's Lehrbuch und Kiepert's histor. Wandkarte. — 2. Sem. Von Constantin bis zum Untergange des weströmischen Reiches und von der Völkerwanderung bis zu den Kreuzzügen nach demselben Lehrbuche und Brettschneider's historischen Wandkarten. *G. Biermann.*

Mathematik: 3 Stunden. 1. Sem. 2 Stunden Algebra nach Močnik: Von den Potenz- und Wurzelgrössen und Logarithmen. 1 Stunde Geometrie nach Močnik: Ellipse, Parabel, Hyperbel; Stereometrie: gerade Linien und Ebenen im Raume, besondere Eigenschaften der Körper und deren Oberfläche. 2. Sem. 1 Stunde Algebra: Gleichungen des ersten Grades. 2 Stunden Geometrie: Kubikinhalt der Körper; ebene Trigonometrie. *O. Žlik.*

Naturgeschichte: 2 Stunden. Zoologie nach Leunis. — 1. Sem. Mammalia, Aves, Amphibia, Pisces. 2. Sem. Arthrozoa, Gastrozoa, Paläontologie und geographische Verbreitung der Thiere. *O. Žlik.*

Siebente Klasse.

Klassenlehrer: Johann Odstrčil.

Religion: 2 Stunden. Ausführlichere, auf das reifere Gemüt berechnete Auseinandersetzung des christlichen Glaubens und Lebens, nach Dr. Palmers Lehrbuch. Christliche Sittenlehre. *G. Klapsia.*

Latein: 5 Stunden. 1. Sem. 1 Stunde gram.-stil. Uebungen nach Süpfle 2 Thl. 306 etc.; alle 14 Tage 1 Pensum, monatlich 1 Composition. — Lectüre 4 St. Cic. orat. pro Milone, Privatlectüre pro lege Manilia. 2. Sem. gram.-stil. Uebungen nach Süpfle II. Thl. Fortsetzung. Monatlich eine Comp., alle 14 Tage ein Pensum. — Lectüre. Virg. Aeneidos lib. II, VII, VIII. Pensum und Comp. wie im 1. Sem. *Dr. K. Burkhard.*

Griechisch: 4 Stunden. 1. Sem. Alle 14 Tage grammatische Uebungen nach Curtius Syntax; alle 4 Wochen 1 Pensum oder 1 Comp. Lectüre: Sophocles Electra ed. Bergk. 2. Sem. Alle 14 Tage gramm.-stil. Uebungen, Pensa und Compositionen wie im 1. Sem. — Lectüre: Demosthenes orat. Olynth. I. Philip I. de pace. Homeri Odyss. I. *H. Sittig.*

Deutsch: 3 Stunden. 1. Sem. Das Nibelungenlied und das Thierepos aus Weinhold's mhd. Lesebuch. In der Lectüre die mhd. Lautlehre. — Ein grösseres Gedicht von Lessing, Göthe oder Schiller. Alle 14 Tage ein Aufsatz. Freie Vorträge klassischer Gedichte. 2. Semester. Das Hofepos Lyrik, Gnomik und Prosa aus Weinhold mhd. Lesebuch, und kurzer Ueberblick über die deutsche Literaturgeschichte von Wulfila bis zum 30jährigen Kriege nach einer chronologischen Tafel. Mhd. Formenlehre. Aufsatz und Vortrag wie im ersten Semester. *Im. Raschke.*

Geschichte und Geographie: 3 Stunden. 1. Sem. Von den Kreuzzügen bis zum Tode Friedrichs III. nach Ramshorn's Lehrbuch und Brettschneider's historischeu

Wandkarten. 2. Sem. Fortsetzung bis zum Schlusse des Mittelalters und neuere Geschichte bis zum westfälischen Frieden nach demselben Lehrbuch.

P. Kaisar.

Mathematik: 3 Stunden. 1. Sem. 2 Stunden Algebra nach Močnik: Unbestimmte Gleichungen ersten Grades, quadratische Gleichungen, höhere und Exponentialgleichungen. 1 Stunde Geometrie nach Močnik: Anwendung der Algebra auf Lösung geometrischer Aufgaben, Elemente der analytischen Geometrie, Coordinatensysteme, gerade Linien. 2. Sem. 1 Stunde Algebra: Progressionen, Combinationslehre, binomischer Lehrsatz. 2 Stunden Geometrie: Fortsetzung der analytischen Geometrie; Linien der zweiten Ordnung. *J. Odstrčil.*

Physik: 3 Stunden. 1. Sem. Von den Körpern überhaupt, Chemie inbegriffen, Statik. 2. Sem. Dynamik; Wellenbewegung; Akustik — nach Kunzek.

J. Odstrčil.

Philosophische Propädeutik: 2 Stunden. Formelle Logik nach Beck. *G. Friedrich.*

Achte Klasse.

Klassenlehrer: Dr. Karl Burkhard.

Religion: 3 Stunden. Ein von christlicher Philosophie getragener Ueberblick der ewigen Thatsachen und Wahrheiten, zu deren Verkündigung die christliche Kirche berufen ist. Nach Dr. Hagenbach's Leitfaden. *G. Klapsia.*

Latein: 5 Stunden. 1. Sem. 1 St. gram.-stil. Uebungen nach Seyfferts Pal. Cic. Mat. XI. Fortsetzung. Alle 14 Tage 1 Pensum, alle Monate 1 Comp. — 4 Stunden Lectüre: Taciti Annales lib. XIV; Cicero de oratore Präparation. — 2. Sem. 1 Stunde gram.-stil. Uebungen wie im 1. Sem. — Lectüre 4 Stunden. Cic. de oratore (Fortsetzung). Horat. ed. Grysar. Odorum lib. III; Satyr. I. 1. 4; II, 2. 6. Epist. II, 1. 3. Vornahme von ungelesenen Partien aus früher gelesenen Schriftstellern. Pensa und Compositionen wie im 1. Semester.

Dr. K. Burkhard.

Griechisch: 5 Stunden. 1. Sem. Alle 14 Tage stilistische Uebungen. Alle 4 Wochen ein Pensum oder 1 Composition. Lectüre. Platons Apologie, Kriton, Protagoras. Präparation. 2. Sem. Stilistische Uebungen wie im 1. Sem. — Lectüre: Sophokles Oedipos Koloneus. Zuletzt einiges aus früher gelesenen Schriftstellern. *Dr. K. Burkhard.*

Deutsch: 3 Stunden. 1. Sem. Analytische Aesthetik. Auf Grund der mittel hoch- und neuhochdeutschen Lectüre des ganzen Gymnasiums wurden von den besten Gedichten jeder Periode die Gattungen der Poesie, die Gesetze ihrer Formen und die Eigenheit der Dichtung abgesehen, und dargestellt in wö-

chentlich 2 Stunden. Mozart's Lesebuch für das Oberg. III. Band. Besprechung von Aufsätzen und Redeübungen. Alle 3 Wochen 1 Aufsatz. 2. Sem. Literaturgeschichte von Opitz an; sonst wie im 1. Semester.
Im. Raschke.

Geschichte und Geographie: 3 Stunden. 1. Sem. Vom westfälischen bis zum 2. Pariser Frieden nach Ramshorn's Lehrbuch. — 2. Sem. Statistik des österr. Kaiserstaates von Schmidt. *G. Biermann.*

Mathematik: 1 Stunde. Algebra: Wiederholung der Haupttheile des gesammten Lehrstoffes und Lösung dahin gehöriger Aufgaben; Geometrie: Zunächst Aufarbeitung des in der 7. Klasse noch übrig gebliebenen Lehrstoffs, dann Wiederholung wie bei Algebra. *J. Odstrčil.*

Physik: 3 Stunden. 1. Sem. Magnetismus, Elektricität. 2. Sem. Optik, Wärme, Astronomie, Meteorologie nach Kunzek. *J. Odstrčil.*

Philosophische Propädeutik: 2 Stunden. Empirische Psychologie nach Dr. R. Zimmermann.
J. Kalinčák.

Israelitischer Religionsunterricht

wurde israelitischen Schülern dieses und des katholischen Gymnasiums gemeinschaftlich von dem hiesigen Kreisrabbiner Samuel Friedmann ertheilt. Schülerzahl: 23.

Bedingt obligate Lehrgegenstände.

1. Polnisch.

1. Abtheilung: 2 Stunden. Nach Pohl's Grammatik: Lesen, die Regeln der Orthographie, die Declinationen, das Adjectivum, das Zahlwort, Pronomen, Hilfsverbum und die Präsensformen der 4 Conjugationen. Alle Monate 1 Pensum und alle 14 Tage eine Schularbeit. Die Lectüre wird benützt wie in den grammatikalischen Lesestunden. Schülerzahl: 55. *K. Gazda.*

2. Abtheilung: 2 Stunden. Nach Pohl's Grammatik die 4 Conjugationen, Verba reciproca, impersonalia, frequentativa u. composita. Adverbia, Praepositionen und Conjunctionen. Lectüre: Aus Wypisy polskie 1. Thl. Alle Monate ein Pensum und alle 14 Tage ein Dictat. Schülerzahl: 45. *J. Kukutsch.*

3. Abtheilung: 2 Stunden. Nach Pohl's Grammatik: die Syntax. Lectüre: Wypisy polskie 2. Thl. Monatlich 1 Aufsatz. Schülerzahl: 18. *P. Kaisar.*

4. Abtheilung: 2 Stunden. Grammatisch-syntaktische Uebungen. Lectüre: Wypisy polskie fürs Obergymnasium 2. Thl. mit Auswahl. Monatlich ein Aufsatz. Schülerzahl: 16.
P. Kaisar.

Böhmisch.

1. **Abtheilung**: 2 Stunden. Lesen, Hauptregeln der Orthographie. Bildung des Satzes schriftlich und mündlich bis zum 1. Decemb. Dann Grammatik nach Tomek. Lectüre aus Jireček's Čítanka pro 1. třídu nižšího gymnasia. Bei jedem Abschnitte der Grammatik wurden besonders diejenigen Formen in den gelesenen Stücken hervorgehoben und eingeübt, die sich darauf beziehen. Im 1. Sem. 3, im 2. Sem. 5 Aufsätze. Schülerzahl: 17. J. Kalinčák.
2. **Abtheilung**: 2 Stunden. Lectüre: Jireček's Čítanka pro třetí třídu gymnasialní. Syntax nach Kunz mit der Anwendung auf die bei der Lectüre vorkommenden Sätze und Bildung von Sätzen überhaupt. Monatlich 1 Hausarbeit. Schülerzahl: 15. *J. Kalinčák.*
3. **Abtheilung**: 2 Stunden. Lectüre: Jireček's Anthologie literatury české doby staré, střední i doby nové abwechselnd mit Auswahl, mit Benützung der Grammatik nach Hattala. Monatlich 1 Aufsatz. Schülerzahl: 19. *J. Kalinčák.*

Freie Lehrgegenstände.

Französisch: 2 Stunden. Grammatik nach Ahn, sammt den dazu gehörigen Uebungen. Mündlich: Erzählungen eingeübt. Schülerzahl: 18. *P. Kaisar.*

Hebräisch: 2 Stunden. 1. Sem. Formenlehre nach Gesenius Grammatik. Lectüre aus Gesenius Lesebuch mit Auswahl. 2. Sem. Syntax nach Gesenius. Lectüre wie im 1. Sem. Schülerzahl: 12. *Dr. K. Burkhard.*

Kalligraphie: 2 Stunden. 1. Abtheilung: 1 Stunde. Zugleich mit der Vorbereitungsklasse. 1. Sem. 4 Theken Current und 4 Theken Latein nach Pokorny. — 2. Sem. 5—9. Theke Current, 5—9. Theke Latein nach Pokorny. Schülerzahl: 40. *K. Gazda.*

2. Abtheilung: 1 Stunde. 1. Sem. Pokorny's Vorschriften für Haupt- und Realschulen. 2. Sem. Nach Nosek's Schulvorschriften. Schülerzahl: 40. *K. Gazda.*

Zeichnen: 2 Stunden gemeinschaftlich mit den Schülern des hiesigen k. k. kathol. Gymnasiums. Schülerzahl: 20. *J. Wanke und E. Swierkiewicz.*

Turnen: 2 Stunden. Schülerzahl: 48. *G. Feyerabendt.*

Deutsche Stilaufgaben.

5. Klasse.

1. *Schilderung einer Herbstlandschaft.*
2. *Schilderung der Leiden Abaddona's.*
2. *Die heilsamen Folgen der Arbeitsamkeit.*
4. *Entwicklung des Inhalts aus Lessing's: Zeus und das Pferd.*
5. *Schnee und Schneelandschaft.*
6. *Bedeutung der Weihnachts- und Neujahrsgebräuche.*
7. *Freuet euch mit den Fröhlichen und weinet mit den Weinenden.*
8. *Wie lässt sich der tragische Entschluss des Philotas beurtheilen?*
9. *Geographisches und landschaftliches Charakterbild Alt-Griechenlands.*
10. *Inhalt der Ode: das bedrängte Deutschland, zusammenhängend entwickelt.*
11. *Der Kampf in der Natur zur Zeit des Frühlings.*
12. *Freie Nachbildung von Gellert's Hans Nord.*
13. *Der Mensch ist seine Frucht aus seiner eigenen Saat. (Tiedge.)*
14. *Der Genügsame.*
15. *Der kecke Schwätzer nach Homer's Thersites.*
16. *Prosaische Uebersetzung aus Ovid's Metamorph.*
17. *Idealer Gehalt von Göthe's Allegorie: der Strom.*
18. *Die hiesige evangel. Kirche nach ihrer Bauart geschildert.*
19. *Kenntnisse befördern das Glück und Fortkommen des Menschen.*
20. *Vergleich zwischen Rose, Lilie und Nelke.*
21. *Die tragischen Schicksale der Staatsmänner Alt-Griechenlands.*

6. Klasse.

1. *Die Sprache des Gebildeten.*
2. *Jedes glückliche Geschöpf, die Pflanze selbst, kehrt freudig sich zum Lichte. (Schiller.)*
3. *Ist die endliche Abschaffung des Krieges möglich oder nicht?*
4. *Durch gesetzmässigen Streit gelangt man zur Wahrheit.*
5. *Wodurch wachsen die Kräfte des Leibes und des Geistes?*
6. *Was heisst Leib und was heisst Körper?*
7. *Mein Vaterhaus.*
8. *Die pyrenäische Halbinsel als geschichtlicher Schauplatz.*
9. *Umschreibungen: Bodenerhebung, Schwimmschule, Weltlage.*
10. *Die Weltlage meiner Heimat.*
11. *Die Kraniche des Ibikos nach Schiller.*
12. *Einfluss des Krieges auf die Dichtung.*
13. *Worin liegt das Vergnügen des Reisens?*

7. Klasse.

1. *Die Grösse des menschlichen Geistes nachgewiesen in seinen Werken.*
2. *In der Geschichte gibt es keine reinen Zustände.*
3. *Was weiss der Bauer mehr als ich?*
4. *Die Wichtigkeit meiner Liebhabereien.*
5. *Sommerliche Erscheinungen in unserem Winter.*
6. *Der Nibelungen letzte Not. Uibersetzung aus dem mittelhochdeutschen.*
7. *Umschreibungen von: unfleissig, träge, faul.*
8. *Reinhart und Schanteklär. Uibersetzung aus dem mittelhochdeutschen.*
9. *Eine Thiergeschichte eigener Erfindung.*
10. *Welche Mittel haben wir gegen die schädlichen Einflüsse der Witterung auf den Geist? (Schularbeit)*
11. *Dasselbe ausführlicher nach einer Besprechung.*
12. *Der Minnesänger Leben und Treiben.*
13. *Der tôt daz ist ein hôchgezît, die uns diu werlt zu jungest gît. Frîdanc.*

8. Klasse.

1. *Den schlechten Mann muss man verachten, der nie bedacht, was er vollbringt.*
2. *Welche Mittel hatten die Athener der perikléischen Zeit zur ästhetischen Bildung?*
3. *Welche Mittel haben wir heutigen zur ästhetischen Bildung?*
4. *Der wahre Wert des Geldes ist aus seinem wahren Zweck zu ersehen.*
5. *Ursachen des Despotismus.*
6. *Grabrede auf einen berühmten Mann.*
7. *Selbstgewählte Aufgabe.*
8. *Analogien zwischen menschlichem und thierischem Gesellschaftsleben.*
9. *Umschreibungen: Meinung, Ansicht, Ueberzeuguug.*
10. *Begriffsstellung von sehen und schauen, von Schein, Bild, Vorstellung.*
11. *Inwiefern ist die Natur Freundin, inwiefern Feindin des Menschen? (Zur Maturitätsprüfung.)*

III. Der Lehrkörper.

1. *Johann Kalinčák,* prov. Director.
2. *Gustav Klapsia,* | Pfarrer und Religionslehrer
3. *Andreas Źlik,* |
4. *Paul Kaisar,* wirklicher Lehrer.
5. *Heinrich Sittig,* „ „
6. *Karl Gazda,* „ „
7. *Johann Kukutsch,* „ „
8. *Dr. Karl Burkhard,* wirkl. Lehrer.
9. *Gottlieb Biermann,* „ „
10. *Gottlieb Friedrich,* „ „
11. *Imanuel Raschke,* „ „
12. *Johann Odstrčil,* „ „
13. *Oskar Źlik,* Supplent.

IV. Schüler und deren Prüfungen.

1. Statistischer Ausweis

über die Schüler des k. k. evangelischen Gymnasiums zu Teschen am Schlusse des Schuljahres 1863.

Klasse	In derselben waren am Ende des Schuljahres 1862	Im Schuljahre 1863 wurden in dieselbe aufgenommen	Die Klasse wiederholten	Aus der vorhergehenden Klasse traten ein	Von Aussen kamen hinzu	Während des Schuljahres giengen ab	Es verblieben am Schlusse des zweiten Semesters: Oeffentliche Schüler zusammen	Dem Religionsbekenntnisse nach: evangelischer Confession Augsb.	Helv.	Israeliten	Der Nationalität nach: Deutsche	Polen	Čecho-Mähren	Slovaken	Israeliten	Darunter: Stipendisten	Schulgeldbefreite	Schulgeldzahlende	Stipendienbetrag
Vorbereitungs-Klasse	9	12	—	—	12	—	12	12	—	—	—	10	1	1	—	—	—	—	
I	40	51	4	8	39	—	51	40	5	6	3	36	6	—	6	4	7	44	232 fl. 49 kr. öst. Währ.*)
II	34	37	3	32	2	1	36	29	5	2	4	22	8	—	2	3	6	30	
III	36	35	1	27	7	—	35	26	5	4	2	21	8	—	4	5	8	27	
IV	25	41	—	38	3	5	36	26	4	6	6	17	6	1	6	2	12	24	
V	18	19	—	15	4	—	19	16	2	1	10	6	2	—	1	2	8	11	
VI	19	17	1	15	1	2	15	11	3	1	3	5	6	—	1	—	2	13	
VII	8	14	—	14	—	—	14	8	5	1	4	3	6	—	1	—	6	8	
VIII	11	8	—	8	—	—	8	2	4	2	1	—	5	—	2	—	3	5	
Zusammen	200	234	9	157	68	8	226	170	33	23	33	120	48	2	23	16	52	162	

*) Das Kischai'sche Stipendium betrug in der zweiten Hälfte des 1. Schuljahres um 1 fl. mehr, weil von 1. Januar 1863 zum Stiftungskapitale 40 fl. zugeschlagen worden sind.

2. Am 3. August 1862 wurde die mündliche Maturitätsprüfung mit den Abiturienten des Schuljahres 1861/2 unter Vorsitz des k. k. Schulrathes und Gymnasialinspectors Herrn Andreas Wilhelm abgehalten, und es verliessen das Gymnasium:

a) Mit dem Zeugniss der Reife mit Auszeichnung:

1. Baron Josef aus Kamitz in k. k. Schlesien, geb. 1839.
2. Fritsche Richard aus Biala in Galizien, geb. 1842.
3. Grafl Emil aus Biala in Galizien, geb. 1843.
4. Königstein Josef aus Trzanowic in k. k. Schlesien, geb. 1841.
5. Plutzar Ernst aus Brünn in Mähren, geb. 1845.
6. Zipser Karl aus Bielitz in k. k. Schlesien, geb. 1843.

Mit dem Zeugniss der Reife:

1. Andrée Albert aus Wittkowitz in k. k. Schlesien, geb. 1844.
2. Andrée Emil aus Wittkowitz in k. k. Schlesien, geb. 1842.
3. Bendorff Eduard aus Dombrau in preuss. Schlesien, geb. 1844.
4. Brée Moritz, Privatist aus Prossnitz in Mähren, geb. 1842.
5. Jeleń Paul aus Liebitz in Böhmen, geb. 1840.
6. Lisztwan Adam aus Trzycież in k. k. Schlesien, geb. 1840.

3. Mit den diesjährigen Schülern wurden die Prüfungen in folgender Ordnung abgehalten:

a) die schriftlichen Versetzungsprüfungen den 6.—11. Juli in allen Klassen zugleich.
b) die mündlichen den 13.—20. Juli im Untergymnasium; den 23.—27. Juli im Obergymnasium.
c) die schriftliche Maturitätsprüfung fand statt:
den 22. Juni von 8—11 Uhr Uebersetzung aus dem Deutschen ins Latein.
den 23. Juni von 8—10 Uhr Uebersetzung aus dem Latein. ins Deutsche.
den 23. Juni von 3—5 Uhr böhmischer Aufsatz.
den 24. Juni von 7—12 Uhr deutscher Aufsatz.
den 26. Juni von 8—11 Uhr Uebersetz. aus dem Griech. ins Deutsche.
den 26. Juni von 8—12 Uhr mathematische Arbeit.

d) den 31. Juli Nachmittags um 2 Uhr versammelten sich die Gymnasiasten mit dem Lehrkörper in dem Prüfungssaale und wurden nach Vertheilung der Prämien und Zeugnisse mit Gesang, Gebet, einer Ansprache des Directors und zweier Schüler in die Heimath entlassen.

V. Lehrmittel.

1. Die Gymnasialbibliothek hat während dieses Schuljahres theils aus der jährlichen Dotation und den Aufnahmstaxen, welche 138 fl. 60 kr. ö. W. betragen haben, theils durch Geschenke folgenden Zuwachs erhalten:

a) Durch Ankauf: Döderlein Horaz Satiren; Ovidii libri tristium; Munk Römische Literatur 3 Bde.; Süpfle Anleitung zum Lateinschreiben; Reinhard Kriegsalterthümer; Nägelsbach Gymnasialpädagogik; Meyer F. Vergleichende Grammatik I.; Guhl Leben der Griechen und Römer; Lange Römische Alterthümer II; Rumpelt deutsche Grammatik I; Mannhard die Götterwelt der deutschen und nord. Völker I; Dittmar Geschichte der Welt; Deutsche Volksbibliothek Lief. 97—118; Grimm Wörterbuch III, 8; Schmidt Encyclop. des gesammten Erziehungswesens, Lief. 31—34; Pertz Monumenta XVI.; Wandatlas des Himmels und der Erde, Lief. 69, 70; Lenoir Catalog der phys. chem. Apparate; Poggendorf Annalen der Chemie und Physik Jahrgang 1862—1863; Rossmässler Der Wald; Siebel Geschichte des Revolutionszeitalters III, 2; Dudik Geschichte Mährens II; Zeitschrift für die k. k. österr. Gymnasien 1863; Zarnke Literarisches Centralblatt I Sem.; Linde Słownik języka polskiego 6 Bände; Šafařík spisy Heft 9—19; Kollár Výklad ku Slávy dceře; Časopis Musea českého 1861, 4tes Heft, 1862 ganz; 1863 1 Heft; Shakespeare Večer třikrálový; Persoon Synopsis 2 Bde.; Beneke Wörterbuch II. Bd. 2. Abth. 1. 4.; Giebel Naturgesch. IV.

Die Schüler böhmischer Zunge schafften für die böhmische Büchersammlung des Gymnasiums an; Spisy výtečných básníků: Klicpera díl IV, V, VI, VII 4 Hefte, VIII. 5 Hefte IX, I; Polák I, II. — H. Jireček Slovanské právo v Čechách a na Moravě. Hanuš: Výbor ze staročeské literatury; Herloš Waldstein III, 2, 3. — Krejčí Geologie Heft 4.

b) Geschenkt wurden, und zwar: Hohes k. k. Staatsministerium: International Exhibiton 1862 of the fine art departement, industrial depart.; Colonia Victoria in Austral. Melbourne 1861; Tafeln zur Statistik der österr. Monarchie von der Direction der administrativen Statistik im k. k. Ministerium des Handels in den Jahren 1841. 47, 48. 2850—54; Mittheilungen aus dem Gebiete der Statistik Wien 1854—1860; Titus Bostrenus und Hippolytus Romanus. — Hl. k. k. Landesregieruug: Hönel Festpredigten; Lieder bei der Einweihung der evangel. Friedhofskapelle in Mähr. Ostrau 1862; Koczy H. Kazanie na pamiątkę swego 25 rocznego urzędowania 1862; Śliwka J. Opis ziemi; Skoruł Przyklady do tłumaczenia z łacińskiego; Obrazki historyczne Krak. 1863. — K. k. mähr. schles. Gesellschaft für Ackerbau und Länderkunde in Brünn: deren Mittheilungen 1862; Schriften-Quellen zur Geschichte Mährens und Schlesiens. — Presbyterium der evangel. Gemeinde zu Laibach: Elze Th. Die Superintendenten der evang. Kirche in Krain. Wien 1863. — Verlagshandlung Ferd. Hirt in Breslau: Wimmer Pflanzenreich n. d. natürl. System; v. Seydlitz Schulgeographie,— Kleine Schulgeographie, — Kleine Schulnaturgeschichte. — Prof. Biermann: dessen Geschichte des Herzogthums Teschen.— Für die böhmische Abtheilung der Bibliothek Dr. Hurban Osvědčení evanjelíků; Director Kalinčák Sokol 1862. — Schüler Pelant: Nevěsta z Abydu; Griechisch-deutsch-böhmisches Wörterbuch für Gymnasien.

c) Für die Schülerbibliothek wurde angekauft: Schäfer Göthe's Gedichte und Prosa 3 Bde.; Wagner Rom. II.; Horn Erzählungen 48 Bdch.; Vogel Geschichtsbilder; Archenholz siebenjähriger Krieg; Zimmermann Eugen von Savoyen. Westermann Monatshefte. Jahrg. 1862/63.

2. Für das physikalische Cabinet wurde von der jährlichen Dotation per 63 fl. angeschafft: Rheostat nach Poggendorf; Stromwechsler. — Die von dem hohen schlesischen Landtage dem Gymnasium zur Anschaffung physikalischer Apparate hochherzig resolvierten 200 fl. ö. W. verwendete man theilweise und zwar 131 fl. 49 kr. ö. W. zur Einrichtung eines systematisch geordneten chemischen Laboratoriums.

3. Zur Vermehrung der naturhistorischen Sammlung wurden von dem Reste des Geschenkes des hohen schles. Landtages 25 Korallen und 100 Gebirgsarten angeschafft. — Ausserdem schenkte dieser Sammlung der ehemalige Schüler der Anstalt Herr Dr. Hertzka folgende Stücke: Versteinerte Echydnis; antikes Götterbild; Scarabeus; Modernes abyssinisehes Amulet; Egyptischer Alabaster; Vertrocknetes Chamäleon; Versteinerung aus den Pyramiden; Mumie von einem jungen Krokodilskopf; 11 Muscheln.

Dem hohen k. k. Staatsministerium, dem hohen schles. Landtage, der hochl. k. k. schles. Landesregierung, den wissenschaftlichen Corporationen und Vereinen sowohl, wie auch den Privaten wird hiemit für ihre Geschenke, welche die Erziehngssache in unserer Heimath überhaupt, und die der Evangelischen in Oesterreich insbesondere nur fördern müssen, der wärmste und achtungstvollste Dank abgestattet.

VI. Einige wichtigere Verordnungen und Erlässe der hohen k. k. Behörden und der hohen Vertretungs-Corporationen des k. k. Schlesiens.

1) Hl. schles. Landesausschuss schickt unter dem 12. September 1862. Z. 1397, 25 fl. ö. W. von den aus Veranlassung der Wiedergenesung und beglückenden Rückkehr Ihrer Majestät der Kaiserin unter die armen und bedrängten Schüler der drei Gymnasien Schlesiens und der Oberrealschule in Troppau zu vertheilenden 150 fl. ö. W.

2) Hl. k. k. schles. Landesregierung übersendet unter dem 6. Okt. 1862 Z. 10599 ein Exemplar der abgeänderten Instruction über die Einhebung, Abfuhr und Verrechnung des Unterrichtsgeldes.

3) Hl. k. k. schles. Landesregierung theilt unter dem 25. Dezbr. 1862 Z. 13385 den Erlass des hohen k. k. Staatsministeriums vom 10. Dezbr. 1862 Z. $\frac{12977}{942}$ C. U. über die Benützung öffentlicher Bibliotheken von Seiten der Lehrer mit.

4) Hl. k. k. schles. Landesausschuss gibt unter dem 31. Jänner 1863 Zahl 269 kund, dass der hohe schles. Landtag unserem Gymnasium zur Anschaffung physikalischer Apparate 200 fl. ö. W. resolviert habe.

5) Hl. k. k. schles. Landesregierung gibt unter dem 11. Mai 1863 Z. 5038 kund, dass 30 Programme jährlich mit den baierischen Gymnasien auszutauschen sind.

6) Hl. k. k. schles. Landesregierung bestimmt unter dem 22. Juni 1863 Z. 6614 die Normen über die Erhöhung des Schulgeldes, über die Vertheilung eines Drittels davon unter die Lehrer, und theilt die hierauf bezügliche hohe Ministerialverordnung vom 28. Mai l. J. sammt der dem Schulgeldkassier hierüber ertheilten Instruction mit.

VII. Alumneum und Stipendien.

Das Alumneum blieb in dem früheren Zustande; die Aufnahme in dasselbe, seine Verwaltung, Aufsicht, Erhaltungsquellen, Disciplin und ihre Handhabung war ebenfalls so beschaffen, wie im vorigen Schuljahre. — Das in dem vorigen Schuljahre erwähnte, von dem Presbyterium der Teschner evangelischen Pfarrgemeinde ernannte Alumneumsbaucomité trachtete überall, wo es nur möglich war, die Glaubensgenossen um Liebesgaben zum Neuaufbaue des baufälligen Gebäudes, in welchem diese für die gesammten Oesterreichischen Erblande so äusserst wichtige Anstalt untergebracht ist, anzusprechen. Wenn diese Bemühung des Comites bisher auch keine glänzenderen Resultate zur Folge hatte, so glaubt die Gymnasialdirection nur ihre Pflicht zu thun, wenn sie hier die seit einem Jahre zu diesem Zwecke eingelaufenen Liebesgaben anführt:

		fl.	kr.
1.	Aus Krakau durch Prof. Kukutsch	135	50
2.	Aus Teschen durch Prof. Kukutsch	108	—
3.	Aus Triest und Laibach durch Prof. Kukutsch	184	—
4.	Aus Mähren durch Prof. Odstrčil.	82	47 ½
5.	Aus Triest durch den evang. Pfarrer Herrn D. Buschbek . .	62	—
6.	Aus Laibach durch Presbyter Herrn Haimann	16	50
7.	Aus Graz durch Prof. Kukutsch	78	50
8.	Aus Wsetin durch Herrn Pfarrer Jurenka	6	—
9.	Aus Mährisch-Ostrau durch Presbyter Herrn Johann Gaschek .	26	—
10.	Hauptversammlung der Gustav-Adolf-Stiftung in Wien . .	150	—
	Fürtrag	848	97 ½

		fl.	kr.
	Uebertrag	848	97 ½
11.	Aus Friedland von Herrn Emailleur Leese	50	—
12.	Vom allgemeinen ungarischen Unterstützungsvereine . . .	25	83
13.	Vom Herrn Skala aus Temeswar	5	—
14.	Durch den Direktor Kalinčák	38	52
15.	Vom Troppauer Goldschmied Herrn Eduard Schmidt . . .	5	—
16.	Vom Herrn Grafen ~~Herrn~~ Kolowrat Krakowski in Troppau . . .	50	—
17.	Vom Herrn Le-Brand in Basel	200	*
	Summa der Collecten	1223	32 ½

Reisekosten zu diesem Zwecke betrugen 245 fl. 30 kr. österr. Währg. folglich bleiben zum Neuaufbaue des Alumneumsgebäudes 978 fl. 2 ½ kr. öst. W.

Der Subscriptionsbogen, welchen der Direktor Kalinčák dem Vorstande der Prager Gemeinde, Herrn Tempsky übergab, wird bisher wahrscheinlich noch nicht in dem Maasse ausgefüllt worden sein, wie es die genannte Gemeinde selbst wünschen würde. Lehrer Odstrčil hat seinen Subscriptionsbogen ebenfalls beim Herrn Pfarrer Trautenberger in Brünn zurückgelassen.

Das Alumneum gehört noch immer der Teschner evangel. Pfarrgemeinde an, es ist aber doch auch ein integrierender Theil des Gymnasiums zugleich, daher glaubt die Direction ihren Dank den edlen Gebern für ihre liebreich dargereichten Unterstützungen hiermit aussprechen zu müssen und die Glaubensgenossen im In- und Auslande zu bitten, die Teschner ev. Pfarrgemeinde bei einem Unternehmen auch fernerhin liebreich unterstützen zu wollen, dessen Zweck die Förderung des ev. Gymnasialunterrichtswesens ist. Das Teschner k. k. evang. Gymnasium ist ja die einzige Lehranstalt ihrer Art in den deutschslavischen Provinzen Oesterreichs; wenn daher die Teschner evang. Pfarrgemeinde die Glaubensgenossen anspricht, ihr bei dem Neuaufbaue des Alumneumsgebäudes behiflich sein zu wollen, so handelt sie hierbei zuerst nicht in ihrem, sondern im Interesse der evangel. Erziehhungssache in Oesterreich, und sie thut diess zweitens in dem Bewusstsein, dass die hohen k. k. Staatsbehörden ihre wahren Absichten nicht verkannt haben, da ihr das hohe k. k. Unterrichtsministerium unter dem 25. Sept. 1857. Zahl 15621 die Bewilligung zu ertheilen geruhte, Sammlungen freiwilliger Beiträge bei den Glaubensgenossen des In- und Auslandes einzuleiten.

Die Stipendien blieben dieselben, und wurden so wie im vorigen Schuljahre vertheilt; nur das Kischaische Stipendium, welches die Direktion, und nicht die evangelische Pfarrgemeinde verwaltet, vermehrte sich um 40 fl. ö. W. wie es die hier auf der Seite 37 abgedruckte Tabelle angibt.

*) Der schlesische Gustav-Adolfhauptverein resolvierte zu diesem Zwecke in seiner am 4. Juni l. J. abgehaltenen Versammlung zufolge der Empfehlung des Centralvorstandes in Leipzig 100 fl. ö. W. welche aber bisher das Gemeindepresbyterium nicht erhalten hat.

VIII. Chronik.

1. Das Schuljahr wurde den 1. October 1862 mit dem Absingen eines Kirchenliedes, Gebet, einer Ansprache des Directors und der Bekanntmachung der Disciplinarvorschrift für die k. k. Gymnasien des Herzogthums Schlesien feierlich eröffnet.
2. Die schriftlichen Aufnahms- und Wiederholungsprüfungen wurden denselben Tag Nachmittags, die mündlichen den 2. Oktober in allen Klassen abgehalten.
3. Die evangelischen Schüler wurden zweimal zur Beichte und Communion geführt, jedesmal gieng eine solenne Deprecation voraus.
4. Am 4. Okt. feierte die Gymnasialjugend das Namensfest Sr. k. k. ap. Majestät.
5. Supplent Johann Odstrčil wurde von dem hohen k. k. Staatsministerium unter dem 18. October 1862 Zahl 11347 C. U. und mit dem Decrete der hochlöbl. k. k. schlesischen Landesregierung vom 26. Oktober 1862 Z. 11413 zum wirklichen k. k. Gymnasiallehrer ernannt.
6. Auch in diesem Schuljahre war die Vorbereitungsklasse wegen geringer Anzahl der Schüler mit der ersten Klasse verbunden.
7. Das zweite Semester begann den 20. Februar.
8. Am 26. Februar feierte das Gymnasium das Verfassungsfest.
9. Vom 3—7. März inspicierte der k. k. Schulrath und Gymnasialinspector Herr Andreas Wilhelm das Gymnasium.
10. Am 14. April wurde die Lehranstalt durch den Besuch Sr. Hochgeboren Herrn Grafen Belcredi, Landeschef von Schlesien, beglückt.
11. Das Schuljahr 1863/4 beginnt am 1. October 1863. Die Schüler haben sich am 28. 29. und 30. Sept. in der Directionskanzlei zu melden und die neu eintretenden sich am 1. October Nachmittags einer Aufnahmsprüfung zu unterziehen, in welcher Zeit zugleich die Nachprüfungen abgehalten werden.

Druck v. Karl Prochaska in Teschen.

Berichtigung.

S. 4. Z. 14 von unten statt $\cos\vartheta + i\sin\vartheta$ soll stehen $r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

„ 5. „ 1 „ unten „ mit Unbekannten soll stehen mit einer oder mehreren Unbekannten.

„ 10. „ 10 „ oben „ $\binom{3}{n}$ „ $\binom{n}{3}$

„ 14. „ 6 „ „ „ $r \sin n\vartheta$ „ $r^n \sin n\vartheta$.

„ „ „ 8 „ unten „ ${}^2m$ „ $2m$.

„ „ „ 7 „ unten soll lauten: Ist $\vartheta = 0$, ist $\cot g\, n\vartheta = \infty$, somit auch $z = \infty$, wenn aber ϑ wächst;

„ 15. „ 8 „ oben statt $\varrho^{\frac{1}{n}} \cos\frac{\pi}{n} + i \sin\frac{\tau}{n}$ soll stehen $\varrho^{\frac{1}{n}} \left[\cos\frac{\tau}{n} + i\sin\frac{\tau}{n}\right]$

„ „ „ 10 „ unten statt $q\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2n}$ hat, soll stehen $q^{\frac{1}{n}}, \frac{\pi}{2n}$ hat, wendet und

„ „ „ 1 „ unten „ u soll stehen u^n

„ 16. „ 10 „ oben „ $\frac{\pi}{n}$ soll stehen $\frac{\tau}{n}$

„ „ „ -1 „ unten „ p soll stehn π.

„ 17. „ 11 „ unten „ $\frac{n\pi + \overset{\frown}{2k+1}\pi}{n}\,\pi$ soll stehen $\frac{n\pi + \overset{\frown}{2k+1}\pi}{n}$

„ 19. „ 15 „ oben „ $\frac{(2m+1+2k+1)}{n}$ soll stehen $\frac{(2m+1+2k+1)\pi}{n}$

„ 22. „ 10 „ oben „ $\frac{2k}{n}$ soll stehen $\frac{2k\pi}{n}$

„ „ „ 5 „ unten „ $\frac{1}{xn-y}$ soll stehen $x^{n-1}y$

„ 23. „ 4 „ oben „ $\operatorname{tg}\frac{mu}{n}$ soll stehen $\operatorname{tg}\frac{m\pi}{n}$

„ „ „ 5 „ unten „ $[(-1)]$ soll stehen $[(-1)]^{\frac{1}{n}}$.

Książnica Cieszyńska
CZ III 93/1860-
1868