

PODSTAWY ARYTMETYKI INTERWAŁOWEJ

Maria Lupa

Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Częstochowska

Streszczenie. Przedstawiono podstawy klasycznej arytmetyki interwałowej - omówiono działania na interwałach oraz własności tych działań, funkcje i macierze na interwałach oraz interwałowe układy równań.

Wstęp

Każda operacja arytmetyczna na wynikach pomiaru powoduje wykonanie określonego działania na błędach obciążających ten wynik, a zatem wprowadza własne błędy. Efekty te kumulują się, co powoduje, że przy dużej liczbie operacji wynik może istotnie różnić się od wartości, która może być uznana za poprawną. W tej sytuacji należy żądać nie tylko określenia niedokładności wyniku, ale również wymagać sformalizowania tego procesu w takim stopniu, aby uproszczenia w jego realizacji dały się kontrolować.

Obserwuje się, że realizując wielokrotnie pomiar tej samej wielkości w tych samych warunkach uzyskuje się różne liczby. Jest to wynik występowania czynników losowych w procesie pomiaru. Czynniki te powodują, że wynik pomiaru musi być traktowany jako reprezentant pewnej grupy liczb, które mogą stać się wynikami pomiaru. Miarę rozrzutu liczb w rozważanym zbiorze pomiarów określa się jako niepewność. Rozrzut charakteryzowany jest przez przedział, w którym mieszczą się „prawie wszystkie” wyniki pomiaru, możliwe do uzyskania w danych warunkach (tzn. z odpowiednio dużym prawdopodobieństwem). Jest to sposób standardowy wyznaczania niepewności w oparciu o zasady rachunku prawdopodobieństwa. Jednakże sposób ten zawodzi w przypadku, gdy zachodzi potrzeba wyznaczenia niepewności wyniku uzyskiwanego na wyjściu algorytmu w efekcie przetwarzania ciągu danych pomiarowych wielkości zmieniającej się w czasie.

Innym sposobem podejścia do powyższego problemu jest wykorzystanie tzw. klasycznej arytmetyki interwałowej, w której wynik pomiaru jest reprezentowany przez ograniczony zbiór liczb rzeczywistych, czyli interwał (por. [1]).

1. Interwały

Niech R oznacza zbiór liczb rzeczywistych. Interwałem nazywany jest zbiór

$$x \equiv [\underline{x}, \bar{x}] := \{\tilde{x} \in R; \underline{x} \leq \tilde{x} \leq \bar{x}\}$$

gdzie $\underline{x}$ i $\bar{x}$ są odpowiednio dolną oraz górną granicę interwału i należą do zbioru R . Symbol $\tilde{x}$ oznacza każdy element należący do interwału x .

Granice interwału stanowią jego wielkości charakterystyczne, czyli mogą być traktowane jako parametry interwału. Zgodnie z definicją, granice są parametrami pierwotnymi interwału. Przy użyciu parametrów pierwotnych definiuje się parametry wtórne interwału. Parametry wtórne to średnia granic interwału

$$\tilde{x} \equiv \text{mid}(x) := \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}$$

zwana środkiem interwału, oraz promień interwału

$$\text{rad}(x) := \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2}$$

Wartość „największą” lub wartość bezwzględną interwału x określamy następująco:

$$|x| = \text{mag}(x) := \max\{|\tilde{x}| : \tilde{x} \in x\}$$

Analogicznie określamy wartość „najmniejszą” interwału

$$\langle x \rangle = \text{mig}(x) := \min\{|\tilde{x}| : \tilde{x} \in x\}$$

Oba pojęcia $\text{mag}(x)$ i $\text{mig}(x)$ można wyrazić za pomocą punktów krańcowych:

$$|x| = \max\{|\underline{x}|, |\bar{x}|\}$$

$$\langle x \rangle = \min\{|\underline{x}|, |\bar{x}|\}, \text{ jeśli } 0 \notin x$$

$$\langle x \rangle = 0, \text{ jeśli } 0 \in x$$

Szczególnym przypadkiem interwału jest liczba rzeczywista. Jest to interwał o zerowym promieniu, nazywamy go interwałem smukłym. Dla smukłego interwału zachodzi warunek $\text{rad}(x) = 0$ (lub $\underline{x} = \bar{x}$).

Jeśli $S \subset R$ jest niepustym podzbiorem zbioru R , to powłokę zbioru S określamy jako

$$S := [\inf(S), \sup(S)]$$

Np. $\{(a, b) = [a, b], \text{ jeśli } a < b; \{(a, b)\} = [b, a], b < a.$

Relację porządkującą w odniesieniu do interwałów określamy następująco:

Niech $\rho \in \{<, \leq, >, \geq\}$

$$x \rho y \Leftrightarrow \tilde{x} \rho \tilde{y} \text{ dla wszystkich } \tilde{x} \in x, \tilde{y} \in y$$

Oczywiście zachodzą następujące własności:

1. $x < y \Leftrightarrow \bar{x} < \underline{y}$
2. $x > y \Leftrightarrow \underline{x} > \bar{y}$
3. $x \leq y \Leftrightarrow \bar{x} \leq \underline{y}$
4. $x \geq y \Leftrightarrow \underline{x} \geq \bar{y}$

Relacja porządkująca jest antysymetryczna i przechodnia. Dodatkowo relacje $\geq, \leq$ są zwrotne. Dwa dowolne interwały nie muszą być jednak porównywalne, np. $[1,3]$ i $[2,4]$ nie są.

2. Działania na interwałach

Podstawowe działania dla interwałów (o - dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i potęgowanie interwałów) określamy następująco:

$$x o y = \{\tilde{x} o \tilde{y} : \tilde{x} \in x, \tilde{y} \in y\}$$

dla dowolnych interwałów $x, y \in \mathfrak{R}$, dla których jest określone działanie o (oczywiście niektóre z działań wymagają dodatkowych założeń):

a) dodawanie

$$x + y = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$$

np. $[1,3] + [4,5] = [5,8]$, $1 + [-3,2] = [-2,3]$

b) odejmowanie

$$x - y = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$$

np. $[2,5] - [0,2] = [0,5]$, $[-2,-1] - [3,4] = [-6,-4]$

c) mnożenie $x \cdot y$

	$y \geq 0$	$0 \in y$	$y \leq 0$
$x \geq 0$	$[\underline{x} \underline{y}, \bar{x} \bar{y}]$	$[\bar{x} \underline{y}, \bar{x} \bar{y}]$	$[\bar{x} \underline{y}, \underline{x} \bar{y}]$
$0 \in x$	$[\underline{x}, \bar{x} \bar{y}]$	$[\min(\underline{x} \bar{y}, \bar{x} \underline{y}), \max(\underline{x} \underline{y}, \bar{x} \bar{y})]$	$[\bar{x} \underline{y}, \underline{x} \underline{y}]$
$x \leq 0$	$[\underline{x} \bar{y}, \bar{x} \underline{y}]$	$[\underline{x} \bar{y}, \underline{x} \underline{y}]$	$[\bar{x} \bar{y}, \underline{x} \bar{y}]$

np. $[1,2] \cdot [3,4] = [3,8]$, $[-2,-1] \cdot [0,2] = [-4,0]$, $[-1,2] \cdot [-1,2] = [-2,4]$

$$\text{Jeśli } \text{rad}(x) = 0 \Rightarrow x \cdot y = \begin{cases} [x\underline{y}, x\overline{y}], & \text{jeśli } x \geq 0 \\ [x\overline{y}, x\underline{y}], & \text{jeśli } x \leq 0 \end{cases}$$

Stąd mamy: $-3 \cdot [1, 2] = [-6, -3]$

d) dzielenie x/y jest możliwe w przypadkach, gdy $0 \notin y$

	$y > 0$	$y < 0$
$x \geq 0$	$[\underline{x}/\underline{y}, \overline{x}/\underline{y}]$	$[\overline{x}/\overline{y}, \underline{x}/\overline{y}]$
$0 \in x$	$[\underline{x}/\underline{y}, \overline{x}/\underline{y}]$	$[\overline{x}/\overline{y}, \underline{x}/\overline{y}]$
$x \leq 0$	$[\underline{x}/\underline{y}, \overline{x}/\underline{y}]$	$[\overline{x}/\overline{y}, \underline{x}/\overline{y}]$

Jeśli $0 \notin x \Rightarrow x^{-1} = [\overline{x}^{-1}, \underline{x}^{-1}]$

np. : $[1, 3]/[-1/1]$ nie jest zdefiniowane; $2/[1, 2] = [1, 2]$; $[-2, 4]/[1, 2] = [-2, 4]$;
 $[2, 4]/[-2, -1] = [-4, -1]$.

e) potęgowanie x^y jest możliwe w jednym z przypadków:

$$1^0 \underline{x} > 0$$

$$2^0 \underline{x} \geq 0 \wedge \underline{y} > 0$$

$$3^0 0 \notin x, y \leq 0 - \text{całkowite}$$

$$4^0 y > 0 - \text{całkowite}$$

$$\text{np. } [2, 3]^2 = [4, 9]; [-1, 2]^2 = [2, 4]$$

3. Własności działań na interwałach

Następujące własności działań na interwałach mają swoje odpowiedniki dla działań na liczbach rzeczywistych:

- $x + y = y + x$; $x \cdot y = y \cdot x$ (przemienność)
- $(x + y) + z = x + (y + z)$; $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (łączność)
- $x + 0 = 0 + x = x$; $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ (el. neutralny)
- $x - y = x + (-y) = -y + x$
- $x/y = x \cdot y^{-1} = y^{-1} \cdot x$
- $-(x - y) = y - x$
- $x(-y) = (-x) \cdot y = -x \cdot y$
- $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
- $x - (y \pm z) = (x - y) \mp z$

Warto zauważyć, że w arytmetyce interwałowej zachodzą następujące inkluzje:

$$10. x \cdot (y \pm z) \subseteq x \cdot y \pm x \cdot z$$

$$11. (x \pm y) \cdot z \subseteq x \cdot y \pm y \cdot z$$

$$12. x - y \subseteq (x + y) - (y + z)$$

$$13. x / y \subseteq (x \cdot z) / (y \cdot z)$$

$$14. 0 \in x - x$$

$$15. 1 \in x / x$$

Na przykład:

$$a) [-1,1] \cdot ([0,1] + [-1,0]) = [-1,1] \subseteq [-2,2] = [-1,1] \cdot [0,1] + [-1,1] \cdot [-1,1] \cdot [-1,0]$$

$$b) 1 \in [\frac{1}{2}, 2] = [1,2] / [1,2]$$

Własności 10-15 istotnie różnią się od analogicznych własności działań dla liczb rzeczywistych. Przy dodatkowych założeniach można, w niektórych z nich, uzyskać równość w arytmetyce interwałowej, np. jeśli x, y, z są interwałami, to zachodzi:

$$x(y \pm z) = x \cdot y \pm x \cdot z \text{ przy założeniu, że } x \text{ jest smukłym interwałem}$$

$$x \cdot (x + y) = x \cdot y + x \cdot x \text{ przy założeniu, że } y, z \geq 0 \text{ lub } y, z \leq 0$$

$$x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z \text{ jeśli } x \geq 0 \geq z \text{ lub } y \leq 0 \leq z$$

W przypadku 14 $x - x = 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy x - smukły. Jeśli np. $x = [1,2]$, to $[1,2] - [1,2] = [-1,1]$, mamy więc $0 \in x - x$.

4. Funkcje i macierze na interwałach, liniowe układy interwałowe

Niech Φ oznacza zbiór elementarnych funkcji rzeczywistych ciągłych na każdym domkniętym interwale, na których są określone. Jeśli x jest interwałem, $\varphi \in \Phi$, to funkcję na interwale określamy następująco:

$$\varphi(x) := \{\varphi(\tilde{x}); \tilde{x} \in x\}$$

dla wszystkich interwałów $x \in \mathfrak{R}$, dla których $\varphi(\tilde{x})$ jest określone, gdzie $\tilde{x} \in x$.

Na przykład:

$$a) \text{ funkcja wartość bezwzględna na interwale } x: \text{abs}(x) = [\text{mig}(x), \text{mag}(x)]$$

$$b) \text{ funkcja wykładnicza na interwale } x: \exp(x) = [\exp \underline{x}, \exp \bar{x}]$$

$$c) \text{ funkcja pierwiastek kwadratowy na interwale } x: \text{sqrt}(x) = [0, x^2]$$

Macierzą interwałową o wymiarze $m \times n$ nazywamy tablicę

$$A = (A_{jk}) = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & \dots & A_{1n} \\ \dots & & & \dots \\ \dots & & & \dots \\ A_{m1} & \dots & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \text{ gdzie } A_{jk} \in \mathfrak{R} \text{ są interwałami}$$

Zbiór macierzy interwałowych o wymiarach $m \times n$ oznaczamy $\mathfrak{R}^{m \times n}$.

Macierz interwałowa $A = (A_{jk})$ jest interpretowana jako zbiór rzeczywistych $m \times n$ wymiarowych macierzy.

$$A = \{\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} : \tilde{A}_{ik} \in A_{ik}, i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n\}$$

Macierz interwałowa o wymiarze $n \times 1$ jest wektorem interwałowym, a macierz o wymiarze 1×1 jest interwałem.

Analogicznie jak dla interwału określamy:

$$\underline{A} = \inf(A) := (\underline{A}_{ik})$$

$$\overline{A} = \sup(A) := (\overline{A}_{ik})$$

$$\tilde{A} = \text{mid}(A) := (\tilde{A}_{ik})$$

$$\text{rad}(A) := (\text{rad}(A_{ik}))$$

$$|A| := (|A_{ik}|)$$

Podstawowe działania na macierzach $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definiujemy następująco:

a) dodawanie i odejmowanie

$$\begin{aligned} A + B &:= \{\tilde{A} + \tilde{B} : \tilde{A} \in A, \tilde{B} \in B\} \\ A - B &:= \{\tilde{A} - \tilde{B} : \tilde{A} \in A, \tilde{B} \in B\} \end{aligned}$$

b) mnożenie, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ to $A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times p}$

$$A \cdot B := \{\tilde{A} \in A, \tilde{B} \in B\}$$

c) mnożenie przez skalar - interwał $a \in \mathbb{R}$

$$a \cdot A := \{\tilde{a} \cdot \tilde{A} : \tilde{a} \in a, \tilde{A} \in A\}$$

Mając definicje działań na macierzach, można rozważać liniowe równanie interwałowe. Jeśli $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jest macierzą interwałową oraz $b \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem interwałowym, to liniowym układem równań interwałowych nazywany rodzinę równań liniowych

$$\tilde{A} \cdot \tilde{x} = \tilde{b}, \text{ gdzie } \tilde{A} \in A, \tilde{b} \in b$$

x jest wektorem interwałowym niewiadomym.

Prosty aparat matematyczny opisany powyżej wykazuje szczególne zalety w zastosowaniach technicznych - do zagadnień przetwarzania danych pomiarowych [2] oraz do rozwiązywania wielu problemów ekonomicznych, jak np. prognozowanie kosztów i wielkości produkcji w modelu wejścia-wyjścia (por. [3]).

Literatura

- [1] Neumaier A., Interval methods for system of equations, Cambridge University Press, 1990.
- [2] Jakubiec J., Redukcyjna arytmetyka interwałowa w zastosowaniach do wyznaczania niepewności algorytmów przetwarzania danych pomiarowych, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2002.
- [3] Gonera M., Jończyk M., Dolata M., Herka W., Zastosowania arytmetyki interwałowej i rozmytej w zagadnieniach gospodarczych, Informatyka Teoretyczna i Stosowania 2004, 6, 153-175.