Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 331 · 2017

Stanisław Heilpern

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów
Katedra Statystyki
stanislaw.heilpern@ue.wroc.pl

UBEZPIECZENIA MAŁŻEŃSKIE UWZGLĘDNIAJĄCE ZALEŻNOŚCI[1]

Streszczenie: Praca poświęcona jest rentom małżeńskim. W odróżnieniu od podejścia klasycznego, zakładającego niezależność długości życia małżonków, w artykule uwzględnia się ich zależność. Struktura zależności opisana jest funkcją łączącą, głównie archimedesową. Wartości aktuarialne rent małżeńskich wyznacza się na podstawie znajomości funkcji łączącej dotyczącej bazowego wieku małżonków. Analizowana jest zmiana struktury zależności zachodząca podczas zmiany wieku małżonków. Wartość renty dziedzicznej została wyznaczona w pracy na podstawie danych GUS-u z województwa dolnośląskiego.

Słowa kluczowe: renta małżeńska, funkcja łącząca, struktura zależności, długość życia.

JEL Classification: G22.

Wprowadzenie

Dla wyznaczenia wartości aktuarialnych rent małżeńskich potrzebna jest znajomość łącznego rozkładu długości życia obydwu małżonków. W klasycznym podejściu do tego zagadnienia zakłada się niezależność tych zmiennych losowych [Bowers i in., 1986]. Założenie to jest wygodne z teoretycznego, matematycznego punktu widzenia, nie jest jednak realistyczne. W praktyce małżonkowie mogą być narażeni na wspólne ryzyko, na czynniki zewnętrzne powodujące zależność długości ich przyszłego życia. Można też między innymi

[1] Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2013-2016 jako projekt badawczy nr DEC-2013/09/B/HS4/0049

zaobserwować wpływ śmierci jednego z małżonków na długość życia drugiego. Jest to tzw. syndrom złamanego serca.

W pracy strukturę zależności długości życia małżonków opisuje się za pomocą funkcji łączących, głównie archimedesowych. Przyjmuje się znajomość tej funkcji dla bazowego wieku małżonków (x_0, y_0) i wyznacza się funkcję łączącą dotyczącą późniejszego wieku męża i żony: (x, y), gdzie $x > x_0$, $y > y_0$.

W rozdziale pierwszym pracy przedstawione zostały podstawowe wiadomości dotyczące funkcji łączących. Omówione zostały główne rodziny archimedesowych funkcji łączących i ich związek z zewnętrznymi czynnikami oddziałującymi na długości życia małżonków. Drugi rozdział dotyczy rent małżeńskich. Przedstawiono w nim renty oparte na statucie wspólnego życia i ostatniego dożycia, rentę wdowią i dziedziczną. Wyznaczono wartości aktuarialne tych rent w oparciu o znajomość funkcji łączącej dotyczącej bazowego wieku małżonków. W ostatnim rozdziale wyznaczono wartość aktuarialną renty dziedzicznej o oparciu o dane GUS-u dotyczące województwa dolnośląskiego. Przeprowadzono analizę zmian tej wartości w zależności od wyboru funkcji łączącej i wartości parametru R.

1. Modelowanie struktury zależności

Funkcja łącząca (ang. *copula*) jest podstawowym narzędziem służącym do modelowania struktury zależności. Jest to łącznik między rozkładem łącznym a rozkładami brzegowymi. W przypadku dwuwymiarowym, a takie struktury zależności będziemy rozpatrywać w naszej pracy, funkcja łącząca C spełnia następującą zależność, że jest [Nelsen, 1999; Heilpern, 2007]

$$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y) = C(F_X(x), F_Y(y)),$$

gdzie F jest dystrybuantą rozkładu łącznego, a F_X, F_Y dystrybuantami rozkładów brzegowych. Można pokazać [Nelsen, 1999], że jest to dwuwymiarowa dystrybuanta o jednostajnych, skupionych na [0, 1], rozkładach brzegowych.

W rozważaniach dotyczących ubezpieczeń życiowych zamiast dystrybuant częściej wykorzystuje się funkcje przetrwania: łączne $S(x, y) = P(X > x, Y > y)$ oraz brzegowe $S_X(x) = P(X > x)$, $S_Y(y)$. Dlatego też do opisu rozkładu łącznego lepiej stosować funkcje łączące przetrwania C^*:

$$S(x, y) = C^*(S_X(x), S_Y(y)).$$

Spełniają one wtedy zależność:

$$C^*(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v).$$

Często w zastosowaniach stosuje się archimedesową funkcję łączącą. Jest to prosta, quasi-addytywna funkcja:

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)),$$

gdzie φ jest ściśle malejącą, wypukłą funkcją, spełniającą warunki φ: $[0, 1] \to [0, \infty]$, $\varphi(1) = 0$, nazywaną generatorem. Funkcja $a\varphi(u)$, gdzie $a > 0$, również jest generatorem tej samej funkcji łączącej.

Tabela 1. Podstawowe rodziny archimedesowych funkcji łączących

Rodzina	$C(u, v)$	$\varphi(t)$	a
Clayton	$\max((u^{-a} + v^{-a} - 1)^{-1/a}, 0)$	$t^a - 1$	$(0, \infty)$
Gumbel	$\exp(-((-\ln(u)^a + (-\ln(v)^a)^{1/a})$	$(-\ln t)^a$	$[1, \infty)$
Frank	$-\frac{1}{a}\ln\left(1 + \frac{(e^{-au} - 1)(e^{-av} - 1)}{e^{-a} - 1}\right)$	$-\ln\frac{e^{-at} - 1}{e^{-a} - 1}$	$(-\infty, \infty)\setminus\{0\}$
AMH	$\frac{uv}{1 - a(1 - u)(1 - v)}$	$\ln\frac{1 - a(1 - t)}{t}$	$[-1, 1)$
Nelsen 4.2.20	$\left(\ln(\exp(u^{-a}) + \exp(v^{-a}) - e)\right)^{-1/a}$	$\exp(t^{-a}) - e$	$(0, \infty)$

Źródło: Nelsen [1999].

Funkcje łączące przetrwania spełniają wszystkie własności funkcji łączących. Można je wtedy traktować jako funkcje łączące, np. rozpatrywać archimedesowe funkcje łączące przetrwania.

W zagadnieniach praktycznych wykorzystuje się rodziny funkcji łączących indeksowanych parametrem oddającym stopień zależności. Zwykle większa wartość tego współczynnika wskazuje na większy stopień zależności. W tabeli 1 zawarte są najczęściej wykorzystywane rodziny archimedesowych funkcji łączących. Podane są wzory tych funkcji, ich generatory oraz zbiory wartości ich parametrów.

Ponadto w dalszej części pracy wykorzystana zostanie rodzina funkcji łączących FMG opisana wzorem

$$C(u, v) = uv + auv(1 - u)(1 - v),$$

gdzie $-1 \leq a \leq 1$, niebędąca archimedesową funkcją łączącą.

Dla archimedesowych funkcji łączących zachodzi dość wygodna w rozważaniach teoretycznych własność. Istnieje bowiem ukryta zmienna losowa Θ (ang. *fraitly*), taka, że jej funkcja tworząca momenty $M_\Theta(s)$ jest indukowana przez funkcję odwrotną do generatora [Wang, 1999], tzn.

$$M_\Theta(s) = \varphi^{-1}(-s).$$

Zmienne losowe X, Y są wtedy warunkowo niezależne dla ustalonej realizacji θ ukrytej zmiennej losowej Θ oraz zachodzą zależności:

$$P(X > x, Y > y \mid \Theta = \theta) = S_{X|\theta}(x)S_{Y|\theta}(y),$$

gdzie $S_{X|\theta}(x) = P(X > x \mid \Theta = \theta) = exp\left(\theta M_{\Theta}^{-1}(S_X(x))\right)$. W podobny sposób określamy $S_{Y|\theta}(y)$. Gdy struktura zależności opisana jest funkcją łączącą Claytona to ukryta zmienna losowa Θ ma rozkład gamma, dla funkcji Franka otrzymujemy rozkład logarytmiczny, a dla funkcji Gumbela rozkład α-stabilny. Z kolei funkcji łączącej AMH odpowiada rozkład geometryczny. Niestety w przypadku funkcji łączącej Nelsena można jedynie podać postać funkcji tworzącej momenty ukrytej zmiennej losowej: $M_{\Theta}(s) = -\ln(s + e)/a$.

Od strony praktycznej, zastosowań, ukrytą zmienną losową możemy traktować jako wpływ zewnętrznego czynnika na dalszą długość życia małżonków. Do czynników zewnętrznych możemy zaliczyć wszelkiego rodzaju wypadki, czy katastrofy, w których małżonkowie wzięli udział. Oddziaływanie bliskiego otoczenia, warunki mieszkaniowe, wspólny tryb życia, czy też czynniki społeczne oraz ekonomiczne, jak różne kryzysy, również mieszczą się w tej kategorii. Mają one między innymi wpływ na długości życia zarówno męża, jak i żony, powodując ich zależność.

Jest również ścisły związek między współczynnikami korelacji Kendalla τ i Spearmana ρ a funkcjami łączącymi. Zachodzą bowiem następujące zależności [Nelsen, 1999]:

$$\tau = 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dC(u,v) - 1 = 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}dt,$$

$$\rho = 12\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dudv - 3.$$

Niestety w przypadku współczynnika Spearmana nie ma dla archimedesowych funkcji łączących takiego prostego wzoru. Z kolei klasyczny współczynnik Pearsona nie jest jednoznacznie wyznaczony przez funkcję łączącą. Zależy on nie tylko od funkcji łączącej, ale również od rozkładów brzegowych [Pfeifer, Neslehova, 2004].

W zagadnieniach praktycznych ważną kwestią jest wybór funkcji łączącej najlepiej „dopasowanej” do danych empirycznych. Genest i Rivest [1993] w swojej pracy zaproponowali następującą procedurę.

i) Ustalamy rodziny funkcji łączących.
ii) Na podstawie danych empirycznych wyznaczamy współczynnik korelacji Kendalla τ.
iii) Z każdej rodziny wybieramy funkcję łączącą odpowiadającą współczynnikowi τ.
iv) Stosując odpowiednie kryterium, wybieramy spośród tych funkcji łączących najlepiej „dopasowaną”.

Takim kryterium może być odległość rozkładu empirycznego od teoretycznego dana wzorem:

$$d = \left(\iint_{-\infty}^{\infty} \left(S_e(x,y) - C^*(S_X(x), S_Y(y))\right)^2 dxdy \right)^{1/2},$$

gdzie S_e jest empiryczną funkcją przetrwania. Brzegowe funkcje przetrwania S_X, S_Y mogą być znane, bądź również być empirycznymi funkcjami przetrwania. Powyższą odległość minimalizujemy.

2. Renty

Niech T_x^M będzie zmienną losową opisującą dalsze trwanie życia x-letniego mężczyzny, a T_y^K y-letniej kobiety. Przyjmijmy też, że obie zmienne losowe są ciągłe i ograniczone: $0 \le T_x^M \le w_x^M$, $0 \le T_y^K \le w_y^K$, np. $w_x^M = 100 - x$. Prawdopodobieństwo, że oboje małżonkowie przeżyją jeszcze t lat jest równe

$${}_tp_{xy} = P\left(T_x^M > t, T_y^K > t\right),$$

a że przynajmniej jedno z nich przeżyje t lat wynosi

$${}_tp_{\overline{xy}} = P\left(\max\{T_x^M, T_y^K\} > t\right).$$

Z kolei wzory

$${}_tp_{x|y}^M = P\left(T_x^M > t, T_y^K < t\right),$$

$${}_tp_{y|x}^K = P\left(T_x^M < t, T_y^K > t\right).$$

przedstawiają prawdopodobieństwa, że jedynie odpowiednio mąż oraz żona przeżyją jeszcze t lat. Aby wyznaczyć powyższe prawdopodobieństwa, należy znać łączny rozkład zmiennych losowych T_x^M oraz T_y^K. Należy też pamiętać, że zmienne te są warunkowe względem zmiennych T_0^M i T_0^K, czyli względem długości życia mierzonego od urodzin. Spełniają one zależności

$$P(T_x^M > t) = P(T_0^M > x + t |\, T_0^M > x),$$

$$P\left(T_y^K > t\right) = P\left(T_0^k > y + t |\, T_0^K > y\right).$$

W naszej pracy przyjmiemy założenie, że znamy jedynie funkcję łączącą przetrwania $C_{x_0y_0}^*$ dotyczącą rozkładu łącznego $(T_{x_0}^M, T_{y_0}^K)$, czyli dla x_0-letniego mężczyzny i y_0-letniej kobiety. Znając wtedy rozkłady brzegowe $T_{x_0}^M$ oraz $T_{y_0}^K$ możemy wyznaczyć łączną funkcję przetrwania $S_{x_0y_0}$.

Prawdopodobieństwo ${}_tp_{xy}$ można wyznaczyć dwoma sposobami. W pierwszym korzystając z funkcji łączącej przetrwania C^*_{xy} dotyczącej zmiennych T^M_x oraz T^K_y, czyli

$$ {}_tp_{xy} = P\left(T^M_x > t, T^K_y > t\right) = C^*_{xy}\left(S^M_x(t), S^K_y(t)\right), $$

gdzie $S^M_x(t)$ i $S^K_y(t)$ są brzegowymi funkcjami przetrwania łącznego rozkładu (T^M_x, T^K_y) o funkcji przetrwania S_{xy}. W drugim sposobie wykorzystujemy funkcję łączącą przetrwania $C^*_{x_0y_0}$ bazowego wieku małżonków x_0 oraz y_0. Stosując wtedy prawdopodobieństwa warunkowe, otrzymujemy [Spreeuw, 2006]

$$ {}_tp_{xy} = P\left(T^M_{x_0} > s+t,\ T^K_{y_0} > w+t \mid T^M_{x_0} > s,\ T^K_{y_0} > w\right) \tag{1} $$
$$ = \frac{S_{x_0y_0}(s+t, w+t)}{S_{x_0y_0}(s,w)} = \frac{C^*_{x_0y_0}(S^M_{x_0}(s+t), S^K_{y_0}(w+t))}{C^*_{x_0y_0}(S^M_{x_0}(s), S^K_{y_0}(w))}, $$

gdzie $x = x_0 + s$, $y = y_0 + w$ oraz $s > 0$, $w > 0$.

Poniższe twierdzenie pokazuje nam związek między funkcjami łączącymi przetrwania $C^*_{x_0y_0}$ i C^*_{xy}.

Twierdzenie. Jeśli funkcja łącząca przetrwania $C^*_{x_0y_0}$ jest archimedesowa z generatorem φ, to funkcja C^*_{xy} jest również archimedesowa, a jej generator jest równy

$$ \psi(u) = \varphi(cu) - \varphi(c), $$

gdzie $c = S_{x_0y_0}(s,w)$.

Dowód. Pokażemy, że $\psi(u)$ jest generatorem C^*_{xy}. Zachodzą następujące zależności $\psi^{-1}(t) = \varphi^{-1}(t + \varphi(c))/c$ oraz

$$ \psi^{-1}(\psi(u) + \psi(v)) = \varphi^{-1}(\psi(u) + \psi(v) + \varphi(c))/c \tag{2} $$
$$ = \varphi^{-1}(\varphi(cu) + \varphi(cv) - \varphi(c))/c. $$

Przyjmując $u = S^M_x(t)$ oraz $v = S^K_y(z)$ otrzymujemy

$$ u = P\left(T^M_{x_0} > s+t \mid T^M_{x_0} > s,\ T^K_{y_0} > w\right) = \frac{S_{x_0y_0}(s+t, w)}{S_{x_0y_0}(s,w)} $$
$$ = \frac{1}{c} C^*_{x_0y_0}\left(S^M_{x_0}(s+t), S^K_{y_0}(w)\right) = \frac{1}{c}\varphi^{-1}\left(\varphi\left(S^M_{x_0}(s+t)\right) + \varphi\left(S^K_{y_0}(w)\right)\right), $$
$$ v = \frac{1}{c}\varphi^{-1}\left(\varphi\left(S^M_{x_0}(s)\right) + \varphi\left(S^K_{y_0}(w+z)\right)\right). $$

Niech C^* będzie funkcją łączącą przetrwania o generatorze $\psi(u)$. Podstawiając do (2) tak określone u oraz v mamy

$$C^*(S_x^M(t),S_y^K(z))=\frac{1}{c}\varphi^{-1}\left(\varphi\big(cS_x^M(t)\big)+\varphi\left(cS_y^K(z)\right)-\varphi(c)\right)$$
$$=\frac{1}{c}\varphi^{-1}\left(\varphi\left(S_{x_0}^M(s+t)\right)+\varphi\left(S_{y_0}^K(w+z)\right)\right),$$

ponieważ

$$\varphi\big(cS_x^M(t)\big)=\varphi\left(\varphi^{-1}\left(\varphi\left(S_{x_0}^M(s+t)\right)+\varphi\left(S_{y_0}^K(w)\right)\right)\right)$$
$$=\varphi\left(S_{x_0}^M(s+t)\right)+\varphi\left(S_{y_0}^K(w)\right),$$
$$\varphi\left(cS_y^K(z)\right)=\varphi\left(S_{x_0}^M(s)\right)+\varphi\left(S_{y_0}^K(w+z)\right),$$
$$\varphi(c)=\varphi\left(S_{x_0}^M(s)\right)+\varphi\left(S_{y_0}^K(w)\right).$$

W rezultacie otrzymujemy

$$C^*(S_x^M(t),S_y^K(z))=\frac{1}{c}\varphi^{-1}\left(\varphi\left(S_{x_0}^M(s+t)\right)+\varphi\left(S_{y_0}^K(w+z)\right)\right)$$
$$=\frac{S_{x_0y_0}(s+t,w+z)}{S_{x_0y_0}(s,w)}=S_{xy}(t,z).$$

Widzimy więc, że funkcje łączące przetrwania C^* i C_{xy}^* są równe, dotyczą tej samej łącznej funkcji przetrwania S_{xy}, tzn. funkcja ψ jest generatorem funkcji łączącej przetrwania C_{xy}^*.

Twierdzenie pokazuje, w jaki sposób znając funkcję łączącą przetrwania $C_{x_0y_0}^*$ dotyczącą wieku małżonków x_0 i y_0 oraz prawdopodobieństwo $S_{x_0y_0}(s,w)$ można wyznaczyć funkcję łączącą dla dowolnych lat $x > x_0$ oraz $y > y_0$. Dowód jest oparty na dowodzie podobnego twierdzenia podanego w pracy Spreeuwa [2006].

W przypadku gdy funkcja łącząca przetrwania $C_{x_0y_0}^*$ jest funkcją Claytona z parametrem α, to

$$\psi(u) = c^{-\alpha}(t^{-\alpha} - 1).$$

Jest to nadal generator funkcji łączącej Claytona z tym samym parametrem, ponieważ stała $c^{-\alpha}$ nie zmienia generatora. Można pokazać (patrz [Spreeuw, 2006]), że jedynie funkcja łącząca Claytona nie zmienia się w czasie, tzn. nie zależy od wartości x oraz y. Gdy łącząca funkcja przetrwania $C_{x_0y_0}^*$ jest funkcją Franka z parametrem a, to C_{xy}^* jest również funkcją Franka, ale z parametrem ca. Ponieważ

$$\psi(t)=-\ln\frac{e^{-act}-1}{e^{-a}-1}+\ln\frac{e^{-ac}-1}{e^{-a}-1}=-\ln\frac{e^{-act}-1}{e^{-ac}-1}.$$

Parametr $ca < a$, ponieważ $c = S_{x_0y_0}(s,w) < 1$, co pociąga za sobą zmniejszenie stopnia zależności wraz z upływem czasu. Wartość c maleje wraz ze wzrostem s i w. Z kolei pozostałe funkcje łączące ulegają całkowitej zmianie, ich postać podana jest w tabeli 2.

Tabela 2. Generatory różnych funkcji łączących przetrwania C^*_{xy}

Rodzina	Frank	Gumbel	AMH	Nelsen
$\psi(t)$	$-\ln\dfrac{e^{-act}-1}{e^{-ac}-1}$	$\left(-\ln\dfrac{c}{u}\right)^a - (-\ln c)^a$	$\ln\dfrac{1-a(1-ct)}{t(1-a(1-c))}$	$Exp((ct)^{-a}) - Exp(c^{-a})$

We wzorze (1) występują funkcje przetrwania $S^M_{x_0}$ oraz $S^K_{y_0}$. Są to brzegowe funkcje przetrwania warunkowego rozkładu o funkcji przetrwania

$$\begin{aligned} S_{x_0y_0}(s,w) &= P(T^M_{x_0} > s,\ T^K_{y_0} > w) \\ &= P(T^M_0 > x_0 + s,\ T^K_0 > y_0 + w |\ T^M_0 > x_0,\ T^K_0 > y_0). \end{aligned}$$

Są one odpowiednio równe

$$\begin{aligned} S^M_{x_0}(s) &= P(T^M_0 > x_0 + s |\ T^M_0 > x_0,\ T^K_0 > y_0), \\ S^K_{y_0}(w) &= P(T^K_0 > y + w |\ T^M_0 > x_0,\ T^K_0 > y_0). \end{aligned}$$

Niestety, aby je wyznaczyć, należy znać rozkład łączny zmiennych T^M_0 i T^K_0 opisujący długości życia małżonków od urodzenia. Ponadto w naszych rozważaniach interesują nas bardziej zależności długości życia małżonków rozpatrywane od zawarcia związku małżeńskiego niż od ich urodzenia [Spreeuw, 2006]. Dlatego też przy wyznaczaniu wartości aktuarialnych poszczególnych rent do ich obliczeń weźmiemy przybliżenia

$$\begin{aligned} S^M_{x_0}(s) &\approx {}_sp^M_{x_0} = P\left(T^M_{x_0} > s\right), \\ S^K_{y_0}(w) &\approx {}_wp^K_{y_0} = P\left(T^K_{y_0} > w\right), \end{aligned}$$

gdzie prawdopodobieństwa ${}_sp^M_{x_0}$ oraz ${}_wp^K_{y_0}$ można wyznaczyć z tablic trwania życia. Wtedy otrzymujemy

$$\begin{aligned} S^M_x(t) &= P(T^M_x > t) = P\left(T^M_{x_0} > s + t | T^M_{x_0} > s, T^K_{y_0} > w\right) \\ &= \frac{S_{x_0y_0}(s+t,w)}{S_{x_0y_0}(s,w)} = \frac{C^*_{x_0y_0}\left(S^M_{x_0}(s+t), S^K_{y_0}(w)\right)}{C^*_{x_0y_0}\left(S^M_{x_0}(s), S^K_{y_0}(w)\right)} \\ S^K_y(t) &= \frac{S_{x_0y_0}(s,w+t)}{S_{x_0y_0}(s,w)} = \frac{C^*_{x_0y_0}\left(S^M_{x_0}(s), S^K_{y_0}(w+t)\right)}{C^*_{x_0y_0}\left(S^M_{x_0}(s), S^K_{y_0}(w)\right)}. \end{aligned}$$

W podobny sposób wyznaczamy prawdopodobieństwa

$$ {}_tp^K_{x|y} = P(T^M_x < t, T^K_y > t) = \frac{S_{x_0y_0}(s, w+t) - S_{x_0y_0}(s+t, w+t)}{S_{x_0y_0}(s, w)} $$

$$ = \frac{C^*_{x_0y_0}(S^M_{x_0}(s), S^K_{y_0}(w+t)) - C^*_{x_0y_0}(S^M_{x_0}(s+t), S^K_{y_0}(w+t))}{C^*_{x_0y_0}(S^M_{x_0}(s), S^K_{y_0}(w))}, $$

$$ {}_tp^M_{y|x} = \frac{C^*_{x_0y_0}(S^M_{x_0}(s+t), S^K_{y_0}(w)) - C^*_{x_0y_0}(S^M_{x_0}(s+t), S^K_{y_0}(w+t))}{C^*_{x_0y_0}(S^M_{x_0}(s), S^K_{y_0}(w))}, $$

$$ {}_tp_{\overline{xy}} = P\left(\max\{T^M_x, T^K_y\} > t\right) $$

$$ = \frac{S_{x_0y_0}(s+t, w) + S_{x_0y_0}(s, w+t) - S_{x_0y_0}(s+t, w+t)}{S_{x_0y_0}(s, w)}. $$

Powyższe prawdopodobieństwa umożliwią nam wyznaczanie wartości aktuarialnych rent. Zaczniemy od renty wypłacanej małżeństwu, gdy oboje żyją przez n lat. Jej wartość aktuarialna, gdy świadczenie to wynosić będzie jedną jednostkę pieniężną, wynosi [Denuit i in., 2001; Heilpern, 2011]

$$ a_{xy;\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t \; {}_tp_{xy}, $$

gdzie $v = (1 + \xi)^{-1}$, a ξ jest techniczną stopą zwrotu. Wartość aktuarialna renty płaconej przez n lat, gdy przynajmniej jeden współmałżonek żyje, jest równa:

$$ a_{\overline{xy};\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t \; {}_tp_{\overline{xy}}. $$

Renta wdowia natomiast gwarantuje y-letniej wdowie po śmierci x-letniego męża wypłatę stałej renty aż do jej śmierci. Jej wartość aktuarialna wynosi

$$ a_{x|y} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \; {}_tp^K_{x|y}. $$

Nas będzie szczególnie interesować renta dziedziczna (ang. *reversionary annuity*) [Luciano, Spreeuw i Vigna, 2016]. Zakłada ona, że gdy oboje małżonkowie żyją, to dostają 1 jednostkę, a gdy jedno z małżonków umrze, to drugie otrzymuje R jednostek, gdzie $0 \le R \le 1$. Wartość aktuarialna tej renty jest równa

$$a_{xy}^{R} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t (R_t p_{x|y}^{M} + R_t p_{y|x}^{K} + {}_t p_{xy}).$$

W przypadku gdy $R = 0$, otrzymujemy rentę $a_{xy;\overline{\infty}|}$, a gdy $R = 1$, to rentę $a_{\overline{xy};\overline{\infty}|}$. Zwykle przyjmuje się $R = 0{,}5$ lub $R = 2/3$.

W swojej pracy Luciano, Spreeuw i Vigna [2008] rozpatrywali miary wpływu długości życia jednego współmałżonka na długość życia drugiego. Miary te określone zostały następującymi wzorami:

$$\psi_{xy}^{M}(t) = \frac{E(T_x^M | T_y^K > t)}{E(T_x^M)}, \qquad \psi_{xy}^{K}(t) = \frac{E(T_y^K | T_x^M > t)}{E(T_y^K)}.$$

3. Przykład

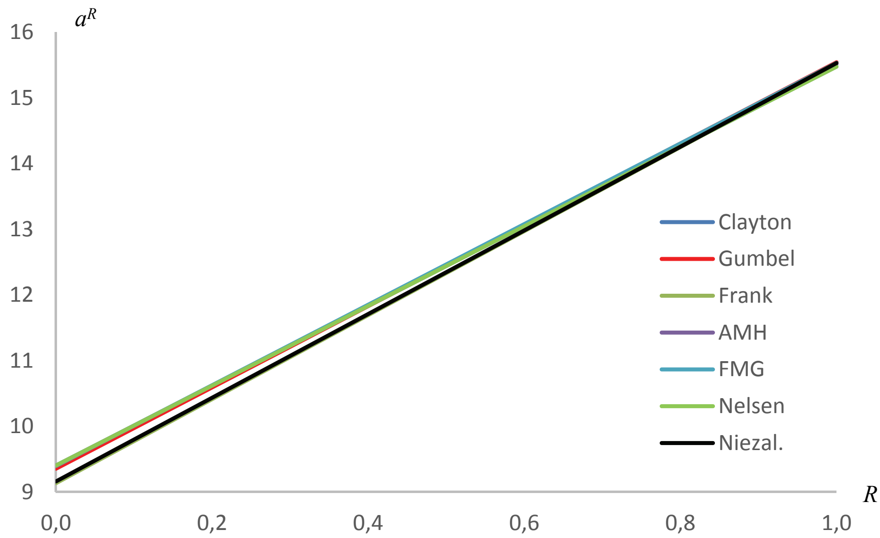
Przyjmijmy, że znana jest łącząca funkcja przetrwania $C_{x_0 y_0}^{*}$ dotycząca struktury zależności długości życia małżonków, gdy $x_0 = y_0 = 50$. Jest to funkcja łącząca Claytona z parametrem $a = 0{,}1508$. Jest ona najlepiej „dopasowana", względem kryterium d, do empirycznej funkcji przetrwania otrzymanej na podstawie danych GUS-u z województwa dolnośląskiego ze Spisu Powszechnego z 2011 r. Metoda określania łącznego rozkładu długości życia małżonków na podstawie GUS-owskich danych została opisana w pracy Heilperna [2015]. Tak określonej funkcji łączącej Claytona odpowiada współczynnik korelacji Kendalla $\tau = 0{,}0701$. W tabeli 3 podane są wartości parametru wybranych rodzin funkcji łączących: Claytona, Gumbela, Franka, AMH, FGM i Nelsena oraz wartości kryterium dopasowania do danych empirycznych d. Widzimy, że najmniejszą wartość kryterium d zapewnia funkcja łącząca Claytona, ale trzy inne funkcje: Nelsena, AMH oraz FGM dają niewiele większe wartości tego kryterium. Na dobrą sprawę można je również wziąć pod rozwagę. Z kolei dla dwóch pozostałych, zwłaszcza dla funkcji łączącej Franka, otrzymujemy już istotnie większe wartości kryterium. Funkcja łącząca Franka jest nawet gorzej dopasowana niż funkcja odpowiadająca niezależności.

Rozpatrzmy wartości aktuarialne renty dziedzicznej dla małżonków w wieku $x = y = 65$ wyznaczone na podstawie wzorów z rozdziału 2 oraz znajomość funkcji łączącej $C_{x_0 y_0}^{*}$. W tabeli 3 podane są te wartości dla różnych funkcji łączących i różnych wartości parametru R. Różne funkcje łączące rozpatrywane są w celu zbadania odporności wartości tej renty, zwłaszcza gdy z badań wynika, że są niewielkie różnice między wartościami kryterium dopasowania d dla czterech najlepiej dopasowanych funkcji łączących.

Tabela 3. Wartości aktuarialne renty dziedzicznej dla różnych funkcji łączących i wartości *R*

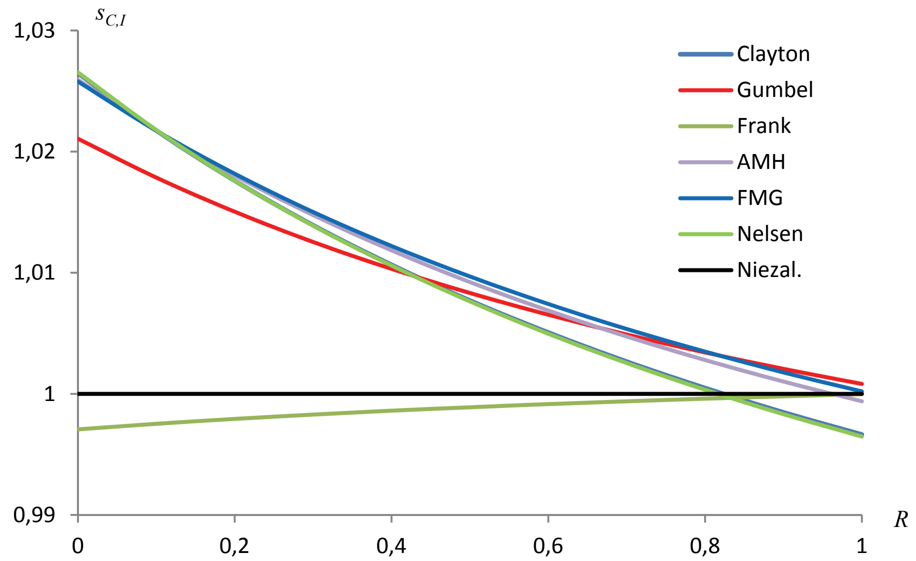
	Clayton	Gumbel	Frank	AMH	FMG	Nelsen	Niezależność
a	**0,1508**	1,0754	0,0714	0,2914	0,3156	0,0727	
R \ *d*	**0,0191**	0,0427	0,1655	**0,0202**	**0,0221**	**0,0197**	0,1366
0	**9,4024**	9,3527	9,1329	9,3974	9,3960	9,4030	9,1598
0,1	**10,0098**	9,9717	9,7725	10,0096	10,0096	10,0101	9,7968
0,2	**10,6173**	10,5906	10,4121	10,6218	10,6233	10,6173	10,4337
0,3	**11,2248**	11,2095	11,0517	11,2341	11,2369	11,2244	11,0707
0,4	**11,8323**	11,8284	11,6913	11,8463	11,8505	11,8316	11,7076
0,5	**12,4397**	12,4474	12,3309	12,4585	12,4642	12,4388	12,3446
0,6	**13,0472**	13,0663	12,9705	13,0708	13,0778	13,0459	12,9815
0,7	**13,6547**	13,6852	13,6101	13,6830	13,6914	13,6531	13,6185
0,8	**14,2622**	14,3041	14,2497	14,2952	14,3051	14,2602	14,2554
0,9	**14,8696**	14,9231	14,8893	14,9075	14,9187	14,8674	14,8924
1	**15,4771**	15,5420	15,5289	15,5197	15,5324	15,4745	15,5293

Wartości renty dziedzicznej zostały też przedstawione na rys. 1. Rysunek ten umożliwia sprawne przeprowadzenie analizy odporności wartości aktuarialnej renty dziedzicznej ze względu na wybór funkcji łączącej. Widzimy, że wraz ze wzrostem wartości tego parametru rosną liniowo wartości aktuarialne tej renty oraz maleją różnice między wartością rent odpowiadającym różnym funkcjom łączącym. Dla dużych wartości parametru *R* nie ma właściwie większej różnicy, którą funkcję łączącą wybierzemy. Dla małych wartości funkcje łączące można podzielić na dwie grupy. W pierwszej grupie mamy funkcję Franka i niezależność, a w drugiej pozostałe funkcje łączące.



Rys 1. Wartości aktuarialne renty dziedzicznej

Porównajmy teraz wartości aktuarialne renty dziedzicznej uzyskane dla różnych funkcji łączących z wartościami, gdy założymy niezależność długości życia małżonków. W praktyce zwykle stosuje się to klasyczne założenie. Na rys. 2 przedstawione zostały wartości ilorazu $s_{C,I} = \frac{a_{xy,C}^R}{a_{xy,I}^R}$, gdzie $a_{xy,C}^R$ jest wartością renty dziedzicznej, gdy wybierzemy funkcję łączącą C, a funkcja I odpowiada niezależności. W tym przypadku możemy już zaobserwować większe zróżnicowanie. Widzimy, że dla funkcji łączących Gumbela, FMG i AMH wartość tego współczynnika przekracza 1. Oznacza to, że zakładając niezależność długości życia małżonków, otrzymamy niedoszacowane wartości aktuarialnej renty dziedzicznej, gdy prawdziwa będzie jedna z tych funkcji łączących. Wraz ze wzrostem wartości parametru R wartość parametru $s_{C,I}$ spada. Dla wartości bliskich 1 wartości renty $a_{xy,C}^R$ prawie nie różnią się od $a_{xy,I}^R$, a dla funkcji AMH są nawet mniejsze. Wartości parametru $s_{C,I}$ są prawie identyczne dla funkcji łączących Claytona i Nelsena dla każdej wartości parametru R. Maleją wraz z jego wzrostem. Jedynie dla dużych wartości R są mniejsze od 1. Wtedy przyjęcie niezależności przeszacuje wartość aktuarialną renty dziedzicznej. Inną sytuację mamy w przypadku funkcji łączącej Franka. Wartości parametru $s_{C,I}$, w odróżnieniu od pozostałych funkcji łączących, rosną wraz ze wzrostem parametru R, są bliskie jak dla niezależności oraz mniejsze od 1. Ogólnie, wartości $s_{C,I}$ są niewielkie, nie przekraczają 3%. Spowodowane jest to niewielkim stopniem zależności długości życia małżonków.



Rys. 2. Wartości ilorazu $s_{C,I}$ dla różnych funkcji łączących i wartości parametru R

Tabela 4. Zmiany wartości współczynnika Kendalla

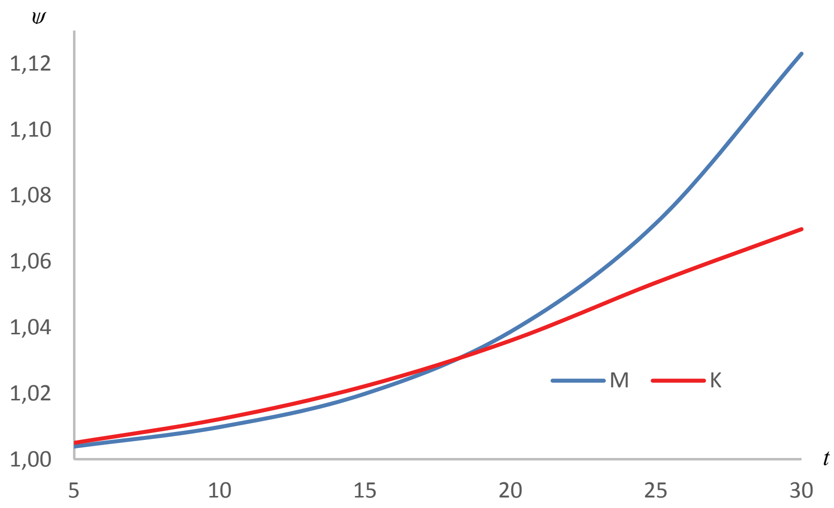
$x = y$	AMH	Nelsen
65	0,0455	0,0715
70	0,0349	0,0723
75	0,0227	0,0735
80	0,0110	0,0789
85	0,0032	0,0842
90	0,0000	0,0925

W przypadku gdy struktura zależności długości życia małżonków opisana jest funkcją łączącą Claytona, funkcja ta nie zmienia się z wiekiem małżonków (patrz rozdział 2). W tabeli 4 podane są zmiany wartości tego współczynnika dla dwóch innych funkcji łączących: AMH i Nelsena. Widzimy, że w przypadku funkcji AMH stopień zależności maleje, a dla funkcji Nelsena rośnie wraz z wiekiem małżonków.

W tabeli 5 oraz na rys. 3 przedstawione zostały zmiany wartości miar wzajemnej zależności ψ_{xy}^{M}, ψ_{xy}^{K} w czasie. Widzimy, że rosną one wraz z wiekiem małżonków. Dla starszych mężczyzn zależność długości dalszego życia od życia współmałżonka jest istotnie większa niż w przypadku tej zależności dla żony.

Tabela 5. Zmiany wartości miary wzajemnej zależności ψ

t	$\psi_{xy}^{M}(t)$	$\psi_{xy}^{K}(t)$
5	1,0039	1,0050
10	1,0098	1,0122
15	1,0199	1,0222
20	1,0387	1,0360
25	1,0716	1,0536
30	1,1230	1,0698



Rys. 3. Zmiana wartości miar wzajemnej zależności ψ_{xy}^{M}, ψ_{xy}^{K} w czasie.

Podsumowanie

Tematem pracy było wyznaczanie rent małżeńskich w sytuacji, gdy zachodzi zależność przyszłej długości życia małżonków. Struktura zależności była opisana funkcją łączącą. Renty małżeńskie wyznaczane były na podstawie znajomości funkcji łączącej dotyczącej bazowego wieku małżonków.

Szczegółowa analiza została przeprowadzona dla renty dziedzicznej na podstawie GUS-owskich danych z województwa dolnośląskiego z 2011 r. Zbadano wartości aktuarialne tej renty ze względu na wartość parametru R oraz dla małżonków w wieku $x = y = 65$ w oparciu o znajomość funkcji łączącej dla wieku bazowego $x_0 = y_0 = 50$. Pokazano, że w zasadzie wartości renty dziedzicznej są odporne na wybór funkcji łączącej. Jedynie dla funkcji łączącej Franka uzyskujemy trochę inne wartości, a w odróżnieniu od innych funkcji łączących, wartości renty rosną wraz ze wzrostem tego parametru.

Literatura

Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J., Jones D.A., Nesbitt C.J. (1986), *Actuarial mathematics*, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois.

Denuit M., Dhaene J., Le Bailly de Tilleghem C., Teghem S. (2001), *Measuring the impact of a dependence among insured lifelengths*, „Belgian Actuarial Bulletin", No. 1 (1).

Genest C., Rivest L-P. (1993), *Statistical interference procedures for bivariate Archimedean copulas*, „JASA”, No. 88.

Heilpern S. (2007), *Funkcje łączące*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.

Heilpern S. (2011), *Wyznaczanie wielkości renty w zależnych grupowych ubezpieczeniach na życie*, „Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu”, nr 230.

Heilpern S. (2015), *Dependent structure induced by Markov chain in the multiple life insurance*, AMSE 2015, Jindrichuv Hradec.

Luciano E., Spreeuw J., Vigna E. (2008), *Modelling stochastic mortality for dependent lives*, „Insurance: Math. Econ.”, No. 43.

Luciano E., Spreeuw J., Vigna E. (2016), *Spouses' dependence across generations and pricing impact on reversionary annuities*, „Risks”, No. 4.

Nelsen R.B. (1999), *An introduction to copulas*, Springer, New York.

Pfeifer D., Neslehova J. (2004), *Modeling and generating dependent risk processes for IRM and DFA*, „ASTIN Bulletin”, No. 34.

Spreeuw J. (2006), *Types of dependence and time-dependent association between two lifetimes in single parameter copula models*, „Scandinavian Actuarial Journal”, No. 5.

Wang S.S. (1999), *Aggregation of correlated risk portfolios: models & algorithms*, CAS Committee on Theory of Risk, Working Paper.

MARRIAGE INSURANCE CONTRACTS TAKING ACCOUNT DEPENDENCE

Summary: The paper is devoted to the marriage annuity. In contrast to the classical approach, assuming independence lifetime spouses, the dependence of it is taking account. The dependent structure is described by the copulas, mainly the Archimedean. The actuarial values of marriage annuities are determined based on knowledge of the copula concerning the base, preferential age of spouses. The change of the dependent structure according to the change in the age of the spouses is analyses. The actuarial value of reversionary annuities is determined on the basis of data from the Central Statistical Office of Lower Silesia.

Keywords: marriage annuity, copula, dependent structure, lifetimes.