Uniwersytet
Ekonomiczny
w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 331 · 2017

Joanna Utkin

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie
Kolegium Analiz Ekonomicznych
Katedra Matematyki i Ekonomii Matematycznej
jutkin@sgh.waw.pl

O ŁĄCZENIU TRZECH RYNKÓW

Streszczenie: Celem pracy jest rozszerzenie łączenia rynków o 2-punktowym rozkładzie prawdopodobieństwa na 3 modele. W każdym modelu składowym jest 1 rodzaj instrumentu ryzykownego (łącznie: 2 rodzaje akcji i 1 rodzaj obligacji wielookresowej) i 1 instrument bezpieczny o danej wspólnej stopie procentowej. Pierwsza część pracy dotyczy rozkładu prawdopodobieństwa rzeczywistego trójki cen instrumentów ryzykownych. Zakładając niezależność stochastyczną par cen: akcji każdego rodzaju i obligacji, otrzymuje się rozkład o dwóch parametrach. Dołączając później założenie o korelacji, a następnie o niezależności cen akcji, eliminuje się 1 parametr. Jednoznaczne określenie rozkładu jest konsekwencją założenia niezależności zmiennych losowych w rozkładzie 3-wymiarowym. Druga część pracy dotyczy badania rozkładu prawdopodobieństwa martyngałowego 3-wymiarowej zmiennej cen przy założeniu zupełności i braku możliwości arbitrażu w 3 modelach składowych. Rozważany model łączony jest niezupełny. Udowodniono, że domknięcie zbioru rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego jest niepuste. Podano przykład zbioru rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego.

Słowa kluczowe: rynek niezupełny, rynek łączony, dwupunktowy rozkład prawdopodobieństwa.

JEL Classification: C39.

Wprowadzenie

Praca jest poświęcona rozszerzeniu koncepcji łączenia dwóch rynków o dwupunktowym rozkładzie prawdopodobieństwa [Utkin, 2016] na trzy modele.

Istotą modelu rynku łączonego jest wykorzystanie rozkładów prawdopodobieństwa rzeczywistego cen instrumentów ryzykownych danych na rynkach składowych jako odpowiednich rozkładów brzegowych wielowymiarowych zmiennych losowych na rynku łączonym. Łącząc trzy rynki składowe, dane rozkłady prawdopodobieństwa cen potraktujemy jako 1- wymiarowe rozkłady brzegowe zmiennej 3- wymiarowej. W celu zbadania konsekwencji stochastycznej niezależności lub korelacji par [Utkin, 2016] należy ich rozkłady powiązać z danymi rozkładami z trzech rynków składowych.

W probabilistycznym modelu rynku kapitałowego do wyceny lub oszacowania wartości wypłat końcowych stosuje się prawdopodobieństwo martyngałowe. Zbiór rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego dla rynku łączonego rozpatruje się przy założeniu zupełności i braku możliwości arbitrażu na rynkach składowych. W przypadku dwóch modeli składowych zbiór rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego został wyznaczony explicite [Utkin, 2016]. W przypadku trzech modeli składowych zbadamy za pomocą twierdzeń programowania liniowego domknięcie zbiorów rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego, tj. jego istnienie i postać. W przykładzie przedstawimy zastosowanie domknięcia do wyznaczenia zbioru rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego.

1. Rozkłady prawdopodobieństwa

W chwilach $t = 0$ i $t = 1$ rozważamy trzy modele rynków kapitałowych o dwupunktowych rozkładach prawdopodobieństwa [Hoek i Elliott, 2006]. W każdym modelu występuje bezpieczne konto bankowe o wspólnej stopie procentowej r. Oprócz tego w każdym modelu występuje jeden rodzaj ryzykownego instrumentu finansowego. Będziemy mówić o akcjach dwóch rodzajów, których ceny oznaczamy przez S_t i Z_t oraz o wielookresowej obligacji zerokuponowej o cenie oznaczonej B_t. W każdym z modeli w chwili $t = 1$ walor ryzykowny przyjmuje jedną z dwóch cen. Ceny w stanie hossy oznaczamy S_1^1, Z_1^1 i B_1^1, a w stanie bessy S_1^0, Z_1^0 i B_1^0.

Interesuje nas rozkład prawdopodobieństwa, rzeczywistego lub martyngałowego, trójwymiarowej zmiennej losowej (S_1 , Z_1 , B_1). Osiem wartości prawdopodobieństwa rzeczywistego $x_i, i = 1,...,8$, (lub martyngałowego $q_i, i = 1,...,8$) przyporządkujemy trójkom cen losowych (S_1 , Z_1 , B_1) według pary tabel: tabela 1 przedstawia rozkład dla $S_1 = S_1^1$, a tabela 2 – rozkład dla $S_1 = S_1^0$.

Tabela 1. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej 3-wymiarowej dla $S_1 = S_1^1$

B_1 Z_1	B_1^1	B_1^0
Z_1^1	x_1 (q_1)	x_2 (q_2)
Z_1^0	x_3 (q_3)	x_4 (q_4)

Tabela 2. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej 3-wymiarowej dla $S_1 = S_1^0$

B_1 Z_1	B_1^1	B_1^0
Z_1^1	x_5 (q_5)	x_6 (q_6)
Z_1^0	x_7 (q_7)	x_8 (q_8)

2. Rozkłady brzegowe prawdopodobieństwa rzeczywistego

Rozkłady prawdopodobieństwa rzeczywistego cen trzech instrumentów ryzykownych w modelach składowych są dane za pomocą następujących liczb z przedziału (0,1):

p_S – prawdopodobieństwo przyjęcia ceny $S_1 = S_1^1$

p_Z – prawdopodobieństwo przyjęcia ceny $Z_1 = Z_1^1$

p_B – prawdopodobieństwo przyjęcia ceny $B_1 = B_1^1$

Zmienna losowa (S_1 , Z_1 , B_1) ma trzy 1-wymiarowe rozkłady brzegowe. Są one określone za pomocą trzech układów równań dla kolejnych zmiennych losowych S_1 , Z_1 , B_1 , w których prawdopodobieństwa p_S, p_Z, p_B pochodzą z modeli rynków składowych. Mianowicie:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = p_S \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1 - p_S, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 + x_6 = p_Z \\ x_3 + x_4 + x_7 + x_8 = 1 - p_Z, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = p_B \\ x_2 + x_4 + x_6 + x_8 = 1 - p_B. \end{cases} \qquad (3)$$

Zmienna losowa (S_1 , Z_1 , B_1) ma również trzy 2-wymiarowe rozkłady brzegowe. Przedstawimy je za pomocą tabel rozkładów zmiennych 2-wymiarowych w rozkładzie zmiennej 3-wymiarowej (tabele 3, 4, 5). Wykorzystamy przy tym układy (1), (2), (3). Otrzymujemy następujące 2-wymiarowe rozkłady brzegowe:

Tabela 3. Rozkład prawdopodobieństwa rzeczywistego zmiennej (Z_1, S_1)

S_1 Z_1	S_1^1	S_1^0	Z_1
Z_1^1	$x_1 + x_2$	$x_5 + x_6$	p_Z
Z_1^0	$x_3 + x_4$	$x_7 + x_8$	$1 - p_Z$
S_1	p_S	$1 - p_S$	1

Tabela 4. Rozkład prawdopodobieństwa rzeczywistego zmiennej (S_1, B_1)

B_1 S_1	B_1^1	B_1^0	S_1
S_1^1	$x_1 + x_3$	$x_2 + x_4$	p_S
S_1^0	$x_5 + x_7$	$x_6 + x_8$	$1 - p_S$
B_1	p_B	$1 - p_B$	1

Tabela 5. Rozkład prawdopodobieństwa rzeczywistego zmiennej (Z_1, B_1)

B_1 Z_1	B_1^1	B_1^0	Z_1
Z_1^1	$x_1 + x_5$	$x_2 + x_6$	p_Z
Z_1^0	$x_3 + x_7$	$x_4 + x_8$	$1 - p_Z$
B_1	p_B	$1 - p_B$	1

3. Niezależność par cen

Łączeniu par rynków poświęcona jest praca Utkin [2016], w której zbadane są możliwości łączenia dwóch rynków przy założeniu znajomości dwupunktowych rozkładów prawdopodobieństwa na rynkach składowych oraz współczynnika korelacji cen instrumentów ryzykownych. Wyeksponowany jest tam ważny przypadek niezależności stochastycznej obu walorów ryzykownych. W niniejszym podrozdziale zbadamy konsekwencje założenia stochastycznej niezależności par cen akcji każdego rodzaju i obligacji wielookresowej. Na koniec uwzględnimy pozostałe założenia niezależności stochastycznej.

Zgodnie z rezultatami w pracy Utkin [2016] stochastyczna niezależność zmiennych S_1 i B_1 w rozkładzie przedstawionym w tabeli 4 prowadzi do układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = p_S p_B \\ x_2 + x_4 = p_S(1 - p_B) \\ x_5 + x_7 = (1 - p_S) p_B \\ x_6 + x_8 = (1 - p_S)(1 - p_B), \end{cases} \tag{4}$$

a stochastyczna niezależność zmiennych Z_1 i B_1 w rozkładzie z tabeli 5- do układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = p_Z p_B \\ x_2 + x_6 = p_Z(1 - p_B) \\ x_3 + x_7 = (1 - p_Z) p_B \\ x_4 + x_8 = (1 - p_Z)(1 - p_B). \end{cases} \tag{5}$$

Układ 8 równań (4), (5) z 8 niewiadomymi $x_i, i = 1,...8$ ma niepusty zbiór rozwiązań. Współrzędne rozwiązania można przedstawić w następującej postaci parametrycznej:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha - (1 - p_S - p_Z) p_B \\ x_2 = \beta - (1 - p_S - p_Z)(1 - p_B) \\ x_3 = (1 - p_Z) p_B - \alpha \\ x_4 = (1 - p_Z)(1 - p_B) - \beta \\ x_5 = (1 - p_S) p_B - \alpha \\ x_6 = (1 - p_S)(1 - p_B) - \beta \\ x_7 = \alpha \\ x_8 = \beta, \end{cases} \tag{6}$$

gdzie:

$$\max\{0, 1 - p_S - p_Z\} < \frac{\alpha}{p_B} < \min\{1 - p_S, 1 - p_Z\},$$

$$\max\{0, 1 - p_S - p_Z\} < \frac{\beta}{1 - p_B} < \min\{1 - p_S, 1 - p_Z\}.$$

Wniosek 1. Przy założeniu stochastycznej niezależności par cen akcji i obligacji zbiór rozkładów prawdopodobieństwa rzeczywistego jest niepusty. Rozkłady zależą od dwóch parametrów.

Ceny akcji obu rodzajów S_1 i Z_1 mogą być na ogół skorelowane, do czego nawiążemy w przypadku rozkładu prawdopodobieństwa (6). Wówczas prawdopodobieństwo jednoczesnej hossy obu akcji jest równe

$$x_1 + x_2 = \alpha + \beta - (1 - p_S - p_Z). \tag{7}$$

Dla danego współczynnika korelacji k cen akcji S_1 i Z_1 prawdopodobieństwo ich jednoczesnej hossy jest zgodne z wynikami w pracy Utkin [2016] i (7), równe:

$$\alpha + \beta - (1 - p_S - p_Z) = p_S p_Z + k\sqrt{p_S p_Z (1 - p_S)(1 - p_Z)}. \tag{8}$$

Założenie stochastycznej niezależności cen akcji S_1 i Z_1, wzorowane na założeniu standardowego modelu Blacka-Scholesa [Jakubowski i in., 2003, s. 185], prowadzi w przypadku (8) do następującego równania wiążącego α i β, mianowicie:

$$\alpha + \beta = (1 - p_S)(1 - p_Z). \tag{9}$$

Stąd, po eliminacji β parzyste współrzędne z układu (6) przyjmą postać:

$$\begin{cases} x_2 = p_S p_Z + (1 - p_S - p_Z) p_B - \alpha \\ x_4 = \alpha + (1 - p_Z)(p_S - p_B) \\ x_6 = \alpha + (1 - p_S)(p_Z - p_B) \\ x_8 = (1 - p_S)(1 - p_Z) - \alpha, \end{cases} \tag{10}$$

a nieparzyste współrzędne w (6) pozostają bez zmiany.

Wniosek 2. Przy założeniu stochastycznej niezależności wszystkich par cen instrumentów ryzykownych rozkłady prawdopodobieństwa rzeczywistego zależą od jednego parametru.

Niezależność par cen pozwala określić rozkład prawdopodobieństwa rzeczywistego zależnego od jednego parametru. Dopiero założenie niezależności trójki (S_1, Z_1, B_1), wyrażające się poprzez rozkład każdego prawdopodobieństwa $x_i, i = 1,...8$ na odpowiedni iloczyn trzech czynników pozwoli jednoznacznie przedstawić $x_1,...,x_8$. Jednak przy wcześniej przyjętych założeniach do niezależności par cen wystarczy dołączyć jedno równanie rozkładu na czynniki, np. równanie prawdopodobieństwa potrójnej hossy

$$x_1 = p_S p_Z p_B. \tag{11}$$

Z przyrównania pierwszego równania (6) i (11) otrzymujemy

$$\alpha = (1 - p_S)(1 - p_Z)p_B \tag{12}$$

spełniające wymagane ograniczenie. W konsekwencji w dalszym ciągu otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_2 = p_S p_Z (1 - p_B) \\ x_3 = p_S (1 - p_Z) p_B \\ x_4 = p_S (1 - p_Z)(1 - p_B) \\ x_5 = (1 - p_S) p_Z p_B \\ x_6 = (1 - p_S) p_Z (1 - p_B) \\ x_7 = (1 - p_S)(1 - p_Z) p_B \\ x_8 = (1 - p_S)(1 - p_Z)(1 - p_B). \end{cases} \tag{13}$$

Znajomość rozkładu prawdopodobieństwa rzeczywistego w danym modelu rynku jest potrzebna do rozwiązywania problemów optymalizacyjnych, na przykład maksymalizacji oczekiwanej użyteczności majątku końcowego inwestora.

4. Rozkład prawdopodobieństwa martyngałowego

Zakładamy, że istnieje rozkład prawdopodobieństwa rzeczywistego zmiennej (S_1, Z_1, B_1). Zakładamy również, że ceny walorów występujących na rynkach składowych są dodatnie i spełniają nierówności

$$\begin{cases} S_1^0 < (1 + r)S_0 < S_1^1 \\ Z_1^0 < (1 + r)Z_0 < Z_1^1 \\ B_1^0 < (1 + r)B_0 < B_1^1. \end{cases} \tag{14}$$

Wtedy każde z równań o niewiadomej odpowiednio q_S, q_Z, q_B

$$\begin{cases} S_1^1 q_S + S_1^0 (1 - q_S) = (1 + r)S_0 \\ Z_1^1 q_Z + Z_1^0 (1 - q_Z) = (1 + r)Z_0 \\ B_1^1 q_B + B_1^0 (1 - q_B) = (1 + r)B_0 \end{cases} \tag{15}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie należące do $(0,1)$, które interpretujemy jako prawdopodobieństwo martyngałowe hossy w danym modelu składowym. Każdy z rynków składowych jest zatem zupełny i pozbawiony możliwości arbitrażu.

Zakładamy ponadto, że cztery instrumenty finansowe: bezpieczne konto bankowe, akcje dwóch rodzajów i obligacja wielookresowa są pierwotne, tj. żaden nie jest portfelem pozostałych.

Interesują nas rozkłady prawdopodobieństwa martyngałowego na rynku łączonym. Szukamy więc dodatnich liczb q_i, w tabelach 1 i 2, i=1, …, 8, spełniających układ równań

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{8} q_i = 1 \\ S_1^1(q_1+q_2+q_3+q_4)+S_1^0(q_5+q_6+q_7+q_8)=(1+r)S_0 \\ Z_1^1(q_1+q_2+q_5+q_6)+Z_1^0(q_3+q_4+q_7+q_8)=(1+r)Z_0 \\ B_1^1(q_1+q_3+q_5+q_7)+B_1^0(q_2+q_4+q_6+q_8)=(1+r)B_0. \end{cases} \tag{16}$$

Eliminując za pomocą (15) ceny początkowe walorów ryzykownych i korzystając z założeń o cenach, otrzymujemy z (16) układ równań:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{8} q_i = 1 \\ q_1+q_2+q_3+q_4=q_S \\ q_1+q_2+q_5+q_6=q_Z \\ q_1+q_3+q_5+q_7=q_B. \end{cases} \tag{17}$$

Szukamy zatem wektorów $\mathbf{q} \in R^8$ o dodatnich współrzędnych spełniających układ równań:

$$A\mathbf{q}=\mathbf{b} \tag{18}$$

gdzie:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ q_S \\ q_Z \\ q_B \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Wniosek 3. rz$A$=4. Zbiór rozwiązań układu równań (18) jest 4-wymiarową rozmaitością liniową w R^8. Rozważany model rynku łączonego jest niezupełny.

Macierz A może być sprowadzona do postaci bazowej względem kolumn 4, 6, 7 i 8. Zmienne bazowe układu (18): q_4, q_6, q_7, q_8 wyrażamy za pomocą parametrów q_1, q_2, q_3, q_5 w następujący sposób:

$$\begin{aligned} q_4 &= q_S - q_1 - q_2 - q_3 \\ q_6 &= q_Z - q_1 - q_2 - q_5 \\ q_7 &= q_B - q_1 - q_3 - q_5 \\ q_8 &= 1 - q_S - q_Z - q_B + 2q_1 + q_2 + q_3 + q_5. \end{aligned} \tag{20}$$

Nas interesuje zbiór rozwiązań układu (18) o dodatnich współrzędnych. Jest to zbiór M rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego w rozpatrywanym modelu łączonym o 8 stanach końcowych. Programowanie liniowe dostarcza twierdzeń o zbiorze rozwiązań nieujemnych, który jest domknięciem zbioru M, czyli

$$ClM = \{\mathbf{q} \in R^8 : A\mathbf{q} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{q} \geq \mathbf{0}\}. \tag{21}$$

Ogólnie, domknięcie zbioru rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego na rynku zupełnym i pozbawionym możliwości arbitrażu jest zbiorem jednoelementowym. Ponieważ model rynku łączonego jest niezupełny, będziemy szukać zbioru ClM o wielu elementach. Z (21) wynika, że ClM jest wielościennym zbiorem wypukłym. Własności zbioru są zebrane w poniższych wnioskach i twierdzeniu.

Domknięcie ClM jest podzbiorem jednostkowego sympleksu w R^8, a zatem jest to zbiór ograniczony.

Wniosek 4. ClM jest ograniczony.

Można byłoby otrzymać ClM jako powłokę wypukłą zbioru wierzchołków, gdyby (21) był zbiorem niepustym. Przyjmując w (20) parametry równe 0, otrzymujemy rozwiązanie bazowe. Jednak tylko w przypadku spełnienia nierówności $q_S + q_Z + q_B \leq 1$ mamy do czynienia z nieujemnym rozwiązaniem bazowym.

W celu wykazania, że ClM jest zbiorem niepustym, posłużymy się wnioskiem z lematu Farkasa. Zgodnie z nim dokładnie jeden z układów ma rozwiązanie:

$$\begin{cases} A\mathbf{q} = \mathbf{b} \\ \mathbf{q} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} A^T\mathbf{z} \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T\mathbf{z} > 0. \end{cases} \tag{22}$$

Jeżeli macierz A i wektor $\mathbf{b}$ są dane za pomocą (19), to $\mathbf{z} \in R^4$.

Układ 8 nierówności $A^T\mathbf{z} \le \mathbf{0}$ możemy zapisać w następujący sposób:

$$\begin{cases} z_1 \le 0 \\ z_2 \le -z_1 \\ z_3 \le -z_1 \\ z_4 \le -z_1 \\ z_2 + z_3 \le -z_1 \\ z_2 + z_4 \le -z_1 \\ z_3 + z_4 \le -z_1 \\ z_2 + z_3 + z_4 \le -z_1. \end{cases} \tag{23}$$

Ponieważ układ (23) jest spełniony w niedodatnim orthancie R^4, więc zbiór rozwiązań układu (23) jest niepusty. Na zbiorze rozwiązań (23) badamy wartość formy liniowej

$$\mathbf{b}^T\mathbf{z} = z_1 + q_S z_2 + q_Z z_3 + q_B z_4, \tag{24}$$

gdzie q_S, q_Z, q_B są danymi liczbami z (0,1).

Dla rozwiązań układu (23), w których $z_1 = 0$ otrzymujemy $z_i \le 0, i = 2,3,4,$ więc

$$\mathbf{b}^T\mathbf{z} \le 0. \tag{25}$$

Dla rozwiązań układu (23), w których $z_1 < 0$ współrzędne $z_i, i = 2,3,4,$ mogą mieć różne znaki. Wtedy wartości formy (24) można oszacować z góry, pomijając wyrazy zawierające te spośród $z_i, i = 2,3,4,$ które są niedodatnie, a sumę wyrazów zawierających pozostałe z_i dodatnie oszacować z góry przez $-z_1$, skąd

$$\mathbf{b}^T\mathbf{z} \le z_1 - z_1 = 0. \tag{26}$$

Zatem ClM jest niepusty.

Twierdzenie. $ClM \neq \varnothing$.

Niepusty ograniczony wielościenny zbiór wypukły ClM jest wielościanem wypukłym. Zbiór ten może być określony za pomocą swoich wierzchołków. Z wniosku 3 wynika, że są one pewnymi rozwiązaniami bazowymi układu (18).

Wniosek 5. $(ClM)_{ex}$ jest zbiorem nieujemnych rozwiązań bazowych układu (18).

Wniosek 6. $ClM = conv((ClM)_{ex})$.

Jeżeli zbiór $(ClM)_{ex}$ ma więcej niż jeden element, to rozkłady prawdopodobieństwa martyngałowego otrzymujemy jako dodatnie kombinacje wypukłe jego elementów.

Wniosek 7. W rozważanym modelu rynku łączonego zbiór rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego M jest zbiorem dodatnich wypukłych kombinacji wierzchołków jego domknięcia (21).

Przykład

Zakładamy, że $q_S = q_Z = q_B = 0{,}5$. Wówczas zbiór (21) ma tylko pięć wierzchołków, ponieważ cztery z nich są zdegenerowane. Są to nieujemne rozwiązania bazowe układu (18), które oznaczamy przez $\mathbf{q}^n, n = 1,2,3,4,5,$ a ich współrzędne zamieszczamy w kolumnach w tabeli 6.

Tabela 6. Wierzchołki zbioru ClM

$\mathbf{q}^n$	$\mathbf{q}^1$	$\mathbf{q}^2$	$\mathbf{q}^3$	$\mathbf{q}^4$	$\mathbf{q}^5$
q_1	0,25	0,5	0	0	0
q_2	0	0	0,5	0	0
q_3	0	0	0	0,5	0
q_4	0,25	0	0	0	0,5
q_5	0	0	0	0	0,5
q_6	0,25	0	0	0,5	0
q_7	0,25	0	0,5	0	0
q_8	0	0,5	0	0	0

Zauważmy, że zbiór M składa się z tych elementów ClM, które nie leżą na brzegu jednostkowego sympleksu w R^8:

$$M = \left\{ \sum_{n=1}^{5} a_n \mathbf{q}^n : \sum_{n=1}^{5} a_n = 1 \wedge a_1 > 0 \wedge a_2 > 0 \wedge a_3 > 0 \wedge a_4 > 0 \wedge a_5 > 0 \right\}.$$

Wybór przykładu został oparty na redukcji liczby wierzchołków zbioru ClM, będącej efektem wielokrotnych degeneracji. Znaczącą redukcję otrzymujemy też np. zakładając sumowanie się trzech stałych do jedności, jednak wtedy liczba wierzchołków nie będzie mniejsza niż sześć.

Znajomość zbioru $(ClM)_{ex}$ jest podstawą szacowania wartości danej wypłaty. Mianowicie, za ich pomocą wyznaczamy cenę kupna i cenę sprzedaży dla wypłaty nieosiągalnej lub cenę dla wypłaty osiągalnej.

Podsumowanie

Praca dotyczyła rozszerzenia metody łączenia dwóch rynków na trzy rynki składowe reprezentowane przez trzy rodzaje instrumentów ryzykownych. Instrument bezpieczny w modelu łączonym był wspólny. Przedstawiony model rynku łączonego miał osiem stanów końcowych. Zbadano rozkłady prawdopodobieństwa rzeczywistego w przypadkach niezależności stochastycznej par cen instrumentów ryzykownych, zaczerpniętych z teorii łączenia par rynków. Dopiero założenie niezależności stochastycznej trójki cen pozwoliło na jednoznaczne wyrażenie rozkładu prawdopodobieństwa rzeczywistego.

W modelu zbudowanym w wyniku połączenia trzech rynków przeprowadzono badanie zbioru rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego. Domknięcie tego zbioru przedstawiono jako zbiór nieujemnych rozwiązań pewnego układu równań liniowych o ośmiu niewiadomych. Po wyznaczeniu wierzchołków wymienionego domknięcia zbiór rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego otrzymano jako zbiór dodatnich wypukłych kombinacji tych wierzchołków. W pracy przedstawiono przykładową konstrukcję zbioru rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego.

Literatura

Hoek van der J., Elliott R.J. (2006), *Binomial models in finance*, Springer, New York.

Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł. (2003), *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, WNT, Warszawa.

Utkin J. (2016), *Łączenie modeli rynków o dwupunktowych rozkładach prawdopodobieństwa*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach" (przyjęty do publikacji).

ON JOINING OF THREE MARKET MODELS

Summary: The aim of the paper is to enlarge the joining idea of the market models with the 2-point probability distribution on 3 models. In each component model there is 1 kind of risky instrument (2 kinds of stocks and 1 kind of multiperiod bond) and 1 risk-free instrument with a given common rate. The first part of the paper deals with the real probability distribution of the prices of 3 risky instruments. Under the assumption of the stock and bond prices we obtain the distribution with 2 parameters. By adding the assumption on the correlation and next the independence of stock prices, we reduce 1 parameter. The unique distribution is the consequence of the independence of variables in the 3-dimensional distribution. The second part concerns the analysis of the martingale probability distribution of the 3-dimensional price variable while each component model is complete and arbitrage-free. The considered joined market is an incomplete model. We prove that the closure of the probability distributions set is non-empty. We give the example of a set of the martingale probability distributions.

Keywords: incomplete market, joined market, two-point probability distribution.