



Michał Milek

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Zarządzania
Katedra Statystyki, Ekonometrii i Matematyki
michal.milek@edu.uekat.pl

WYKRYWANIE PIERWIASTKÓW JEDNOSTKOWYCH Z WYKORZYSTANIEM TESTÓW PERMUTACYJNYCH

Streszczenie: W artykule przedstawiono propozycję testu pozwalającego wykryć pierwiastki jednostkowe w szeregach czasowych z autoregresją. Proponowane rozwiązanie odwołuje się do testu pierwiastków jednostkowych Akdi-Dickeya, który opiera się na analizie spektralnej szeregu czasowego. W tym celu wykorzystywany jest periodogram szeregu czasowego, tworzony poprzez transformację zmiennej y_t w dziedzinę czasu. Proponowane rozwiązanie zostało porównane symulacyjnie z innymi testami pierwiastków jednostkowych znanymi z literatury.

Słowa kluczowe: stacjonarność, test permutacyjny, test Akdi-Dickeya, test Dickeya-Fullera.

JEL Classification: C120, C140, C150.

Wprowadzenie

W analizie szeregów czasowych opisujących różne zjawiska zarówno ekonomiczne, jak i fizyczne bardzo często pojawia się pojęcie „stacjonarności”. Można powiedzieć, że procesy stacjonarne to grupa procesów stochastycznych, mająca pewne specyficzne własności [Box, Jenkins, 1983]. Wiele wykorzystywanych modeli ekonometrycznych wymaga zweryfikowania występowania tej własności, ponieważ służą do opisywania zjawisk będących realizacją stacjonarnych procesów stochastycznych. Niespełnienie tego założenia może prowadzić do złych wyników oraz błędnego wnioskowania i prognozowania na podstawie tych modeli. Występowanie stacjonarności jest weryfikowane za pomocą testów

statystycznych przeprowadzanych na podstawie realizacji procesów stochastycznych, czyli szeregów czasowych. Jeżeli w wyniku testowania okaże się, że rozważany szereg czasowy jest realizacją niestacjonarnego procesu stochastycznego, należy zbadać, czy da się go do stacjonarności sprowadzić, np. poprzez różnicowanie. W literaturze znaleźć można wiele testów stacjonarności, część z nich została opisana w rozdziale 1. W rozdziale 2 opisano propozycję modyfikacji jednego z testów pierwiastka jednostkowego, natomiast w rozdziale 3 – wyniki symulacji. Ostatnia część to empiryczny przykład, pokazujący zastosowanie testu.

1. Testy pierwiastków jednostkowych

Testy stacjonarności można podzielić na dwie grupy [Koško, Osińska, Stempińska, 2007]. Pierwszą grupę stanowią testy pierwiastków jednostkowych, np. test DF [Dickey, Fuller 1979], test ADF [Said, Dickey, 1984], test AD [Akdi-Dickey, 1998]. Drugą grupę stanowią testy stacjonarności, np. test KPSS [Kwiatkowski i in., 1992], test CH [Canova, Hansen, 1995] lub test HEGY [Hylleberg i in., 1990]. W opracowaniu skupiono się na pierwszej grupie testów, w szczególności na teście Akdi-Dickeya, który poddano modyfikacji oraz na teście Dickeya-Fullera, który został wykorzystany w symulacji do porównań zarówno w wersji podstawowej, jak i permutacyjnej, zaproponowanej przez J. Li, L. Trana i S.A. Niwitponga [2013]. W tych testach hipoteza zerowa wskazuje na stacjonarność szeregu czasowego [Domański i in., 2014].

Test Akdi-Dickeya jest testem pierwiastka jednostkowego, opierającym się na analizie spektralnej szeregu, wykorzystującym periodogram szeregu czasowego [Grudkowska, Nehrebecka, 2009]. Periodogram szeregu czasowego można opisać w następujący sposób [Akdi, Dickey, 1998]:

$$I_T(\omega_k) = \frac{T}{2} (a_k^2 + b_k^2) \quad (1)$$

gdzie k przyjmuje wartości z przedziału: $k = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{T}{2} \right\rceil$, a $[\cdot]$ oznacza część

całkowitą. Symbol ω_k oznacza częstość kołową wyrażoną jako $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$, na-

tomiast a_k i b_k to współczynniki wyrażone za pomocą formuł:

$$a_k = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) \cos(\omega_k t) \quad (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) \sin(\omega_k t) \quad (3)$$

Warunkiem koniecznym do odrzucenia hipotezy zerowej, głoszącej, że analizowany szereg ma pierwiastek jednostkowy, jest obserwacja niewielkich wartości periodogramu. Test przeprowadza się, wykorzystując statystykę testową:

$$W(\omega_k) = \frac{2(1 - \cos(\omega_k))}{\hat{\sigma}^2} I_T(\omega_k) \quad (4)$$

gdzie $\hat{\sigma}^2$ to oszacowana wariancja składnika losowego. W przypadku wnioskowania na temat występowania niesezonowego pierwiastka jednostkowego przyjmuje się $k = 1$. Wartości krytyczne testu podano w pracy Y. Akdiego i D.A. Dickeya [1998].

Jednym z pierwszych, powszechnie stosowanych narzędzi umożliwiających wykrywanie w szeregu pierwiastka jednostkowego był test Dickeya-Fullera (1979). Idea testu opiera się na modelu autokorelacji pierwszego rzędu następującej postaci:

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5)$$

gdzie:

Y_t – wartość procesu stochastycznego w okresie t ,

φ – parametr modelu autoregresji,

ε_t – składnik losowy o własnościach białego szumu.

Hipoteza zerowa testu DF przyjmuje następującą postać: $H_0: \varphi = 1$. Oznacza to, że proces posiada pierwiastek jednostkowy. Hipoteza alternatywna jest definiowana następująco: $H_1: |\varphi| < 1$. Do sprawdzenia hipotezy zerowej należy posłużyć się statystyką testową, zdefiniowaną następująco:

$$DF = \frac{\hat{\varphi} - 1}{SE(\hat{\varphi})} \quad (6)$$

gdzie $\hat{\varphi}$ jest wartością estymatora parametru modelu (5), a $SE(\hat{\varphi})$ to średni błąd szacunku parametru φ . Stosowanie testu Dickeya-Fullera jest zasadne, jeżeli rozważany szereg czasowy daje się opisać za pomocą modelu AR(1) oraz gdy ε_t to składnik losowy o własnościach białego szumu. Kwantyle rozkładu statystyki testowej DF wyznacza się na podstawie symulacji, a ich wartości silnie zależą od wyjściowej postaci modelu (5). Ponieważ finansowe szeregi czasowe mają zazwyczaj bardziej skomplikowaną strukturę dynamiczną, której nie opisuje prawidłowo model AR(1), zaproponowano rozszerzony test Dickeya-Fullera, test ADF [Ganczarek-Gamrot, 2013].

Test DF został zmodyfikowany także w inny sposób – w 2013 r. zaproponowano jego wersję permutacyjną. Hipoteza zerowa tego testu głosi, że rozważany szereg pochodzi z procesu niestacjonarnego, wówczas $\varphi = 1$. Przy takiej wartości parametru proces Y_t jest procesem błędzenia losowego [Li, Tran,

Niwitpong, 2013]. Testowanie pierwiastka jednostkowego sprowadza się do badania przyrostów w szeregu: $x_t = y_{t+1} - y_t$. Definiowana jest następująca statystyka testowa:

$$U = \sum_{t=1}^{T-1} x_t x_{t+1} \quad (7)$$

która porównywana jest z odpowiednim kwantylem rozkładu empirycznego, wyznaczonego na podstawie permutacji. Kolejne permutacje oznacza się następująco:

$$U_n = \sum_{t=1}^{T-1} x_{t,n} x_{t+1,n} \quad (8)$$

gdzie: N to liczba permutacji, $n = 1, 2, \dots, N$.

2. Proponowana modyfikacja testu Akdi-Dickeya

Podstawowa wersja testu Akdi-Dickeya pozwala testować występowanie także sezonowych pierwiastków jednostkowych [Akdi, Dickey, 2012]. W dalszych rozważaniach skupiono się jednak na wyznaczaniu pierwiastka niesezonowego, dlatego wykorzystano pierwszą wartość periodogramu wyrażonego za pomocą formuły (1). Jako statystyka testowa w permutacyjnej wersji testu Akdi-Dickeya została wykorzystana bezpośrednio wartość periodogramu.

Przeprowadzając wnioskowanie z wykorzystaniem testów permutacyjnych wprowadzonych przez Fishera i Pitmana, można stwierdzić, że obserwowana wartość statystyki testowej jest porównywana z jej empirycznym rozkładem, przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej. Procedura testowa sprowadza się do kilku kroków [Good, 2005], które w przypadku proponowanego testu pierwiastka jednostkowego wyglądają następująco. Należy zaznaczyć, że testowane jest występowanie niesezonowego pierwiastka jednostkowego, zatem $k = 1$:

- a) postawienie hipotezy zerowej głoszącej o występowaniu pierwiastka jednostkowego $H_0: \phi = 1$ i alternatywnej: $|\phi| < 1$,
- b) określenie postaci statystyki testowej:

$$S(\omega_1) = \frac{2}{T-1} I_T(\omega_1) = a_1^2 + b_1^2 \quad (9)$$

gdzie współczynniki a_1 i b_1 wyrażone są za pomocą formuł:

$$a_1 = \frac{2}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (x_t - \bar{x}) \cos(\omega_1 t) \text{ i } b_1 = \frac{2}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (x_t - \bar{x}) \sin(\omega_1 t), \text{ gdzie: } x_t \text{ to szereg pierwszych różnic szeregu } y_t.$$

Kolejne symbole oznaczają: ω_1 to częstość kołowa wyrażana jako $\omega_1 = \frac{2\pi}{T-1}$, natomiast $I_T(\omega_1)$ to periodogram szeregu czasowego,

- c) obliczenie wartości statystyki testowej (S_0) na podstawie danych empirycznych i formuły:

$$S_0(\omega_1) = \frac{2}{T-1} I_{T,0}(\omega_1) = a_{1,0}^2 + b_{1,0}^2 \quad (10)$$

- d) oszacowanie rozkładu statystyki testowej na podstawie permutacji przy założeniu prawdziwości H_0 ($S_1, S_2, \dots, S_N$, gdzie liczba permutacji $N > 1000$),
e) podjęcie decyzji w oparciu o otrzymany rozkład statystyki testowej.

Decyzja podejmowana jest na podstawie wartości ASL – *Achieved Significance Level*, będącej odpowiednikiem p -wartości w standardowych testach statystycznych. ASL wyraża się następująco [Kończak, 2016]:

$$ASL = P(S(\omega_1) \leq S_0(\omega_1)) \quad (11)$$

ASL szacowane jest na podstawie danych empirycznych z wykorzystaniem następującej formuły:

$$ASL \approx \frac{\text{card}\{n : S_n(\omega_1) \leq S_0(\omega_1)\}}{N} \quad (12)$$

3. Symulacja i wyniki

Aby zbadać skuteczność rozważanej metody, posłużono się symulacją komputerową. Badano, jak zmienia się prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej testu w zależności od wartości parametru φ w modelu autoregresji rzędu pierwszego (5) oraz długości szeregu czasowego. Porównywano trzy testy statystyczne pierwiastka jednostkowego:

- permutacyjny test Akdi-Dickeya,
- permutacyjny test Dickeya Fullera,
- test Dickeya Fullera.

Rozważano następujące wartości parametrów, odpowiednio parametr modelu autoregresji i długość szeregu czasowego:

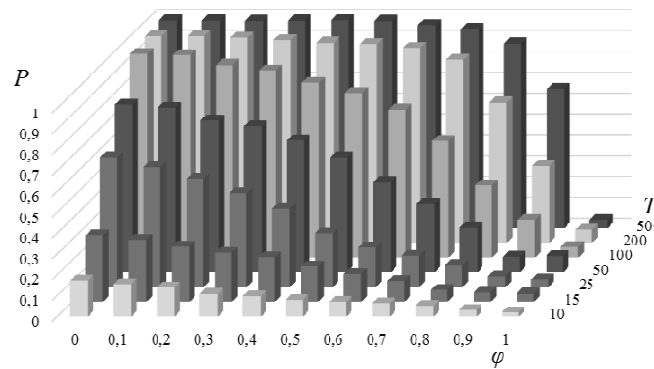
- $\varphi \in \{0,0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0\}$
- $T \in \{7, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 30, 50, 100, 200, 500\}$

Wyniki symulacji przedstawione zostały w tab. 1 oraz na rys. 1-3. Rysunek 1 przedstawia prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej w zależności od wartości rozważanych parametrów dla testu Akdi-Dickeya w wersji permutacyjnej (test proponowany w artykule), rys. 2 – dla permutacyjnego testu Dickeya-Fullera, natomiast rys. 3 – dla testu Dickeya-Fullera.

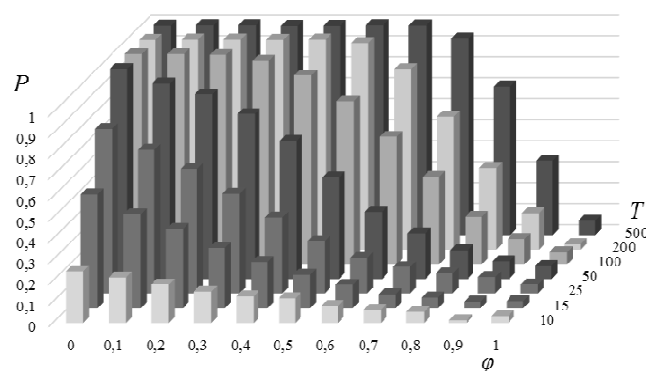
Analizując otrzymane wyniki, należy zauważyć, że w przypadku testów permutacyjnych użyteczne wyniki otrzymano już dla szeregów długości 50 obserwacji. Dla klasycznego testu Dickeya-Fullera wnioskowanie na podstawie szeregów o takiej długości byłoby niemożliwe.

Tabela 1. Prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej dla rozważanych testów

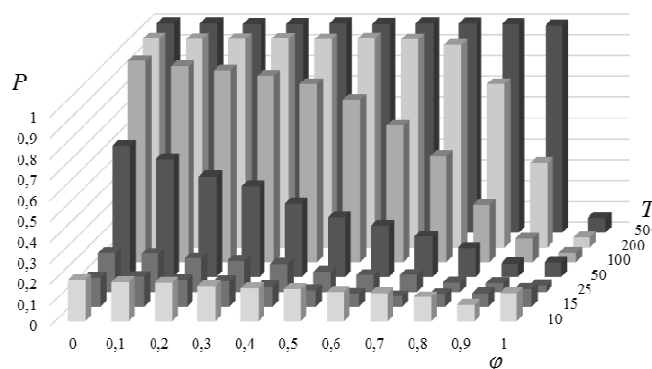
Test	T	ϕ					
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Akdi-Dickey permutacyjny	10	0,174	0,140	0,099	0,071	0,053	0,022
	15	0,319	0,266	0,214	0,134	0,058	0,040
	25	0,625	0,521	0,376	0,192	0,107	0,037
	50	0,806	0,730	0,634	0,433	0,216	0,080
	100	0,978	0,925	0,840	0,711	0,347	0,053
	200	0,992	0,985	0,961	0,937	0,675	0,064
	500	0,999	0,996	1,000	0,976	0,887	0,040
Dickey-Fuller permutacyjny	10	0,245	0,182	0,126	0,081	0,052	0,032
	15	0,542	0,376	0,221	0,112	0,051	0,035
	25	0,784	0,594	0,363	0,170	0,096	0,044
	50	1,000	0,879	0,656	0,319	0,136	0,063
	100	1,000	0,996	0,899	0,607	0,227	0,057
	200	0,999	1,000	1,000	0,860	0,389	0,028
	500	0,998	1,000	0,997	0,999	0,708	0,070
Dickey-Fuller	10	0,199	0,185	0,159	0,142	0,116	0,136
	15	0,137	0,128	0,097	0,061	0,060	0,085
	25	0,187	0,160	0,133	0,080	0,044	0,031
	50	0,630	0,481	0,353	0,246	0,139	0,070
	100	0,963	0,918	0,853	0,654	0,276	0,046
	200	1,000	0,997	0,997	0,996	0,782	0,048
	500	1,000	0,997	1,000	1,000	0,997	0,070



Rys. 1. Prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej dla permutacyjnego testu Akdi-Dickeya



Rys. 2. Prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej dla permutacyjnego testu Dickeya-Fullera

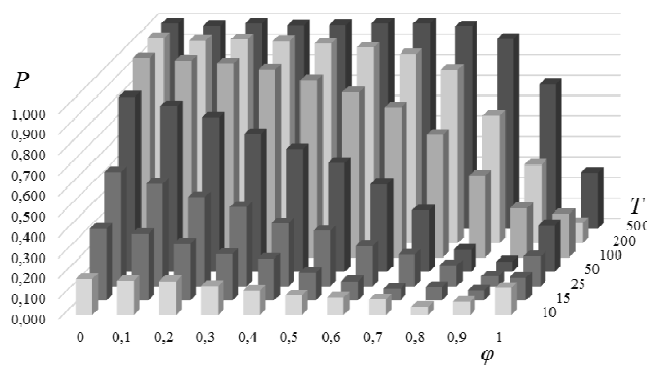


Rys. 3. Prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej dla klasycznego testu Dickeya-Fullera

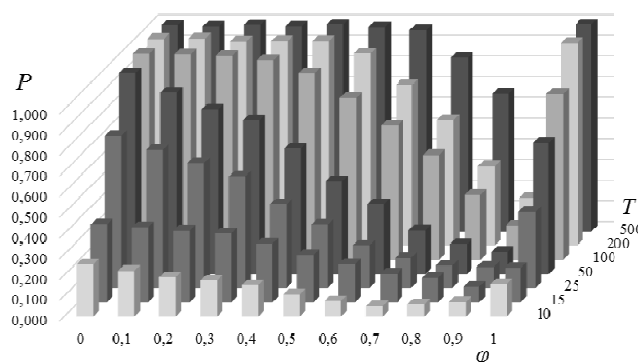
Aby zbadać, jak będą zachowywać się testy w przypadku pojawienia się niejednorodnej wariancji składnika resztowego, wprowadzono zaburzenie generowane zgodnie z modelem GARCH(1,1). Wyniki symulacji dla szeregów z zaburzeniem przedstawiono w tab. 2 oraz na rys. 4-6. Zgodnie z założeniami klasycznego testu Dickeya-Fullera, wnioskowanie za pomocą tego testu w sytuacji, gdy występuje niejednorodność wariancji składnika losowego, jest niemożliwe.

Tabela 2. Prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej dla rozważanych testów przeprowadzonych na szeregach z zaburzeniem

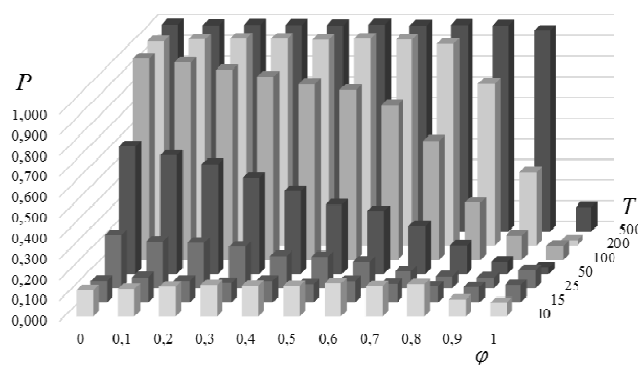
Test	T	φ					
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Akdi-Dickey permutacyjny	10	0,175	0,164	0,120	0,084	0,039	0,133
	15	0,350	0,276	0,204	0,094	0,067	0,110
	25	0,556	0,434	0,306	0,197	0,101	0,144
	50	0,853	0,751	0,598	0,426	0,109	0,226
	100	0,973	0,944	0,864	0,730	0,397	0,211
	200	0,999	0,994	0,973	0,921	0,620	0,098
	500	1,000	1,000	0,992	1,000	0,925	0,272
Dickey-Fuller permutacyjny	10	0,252	0,191	0,151	0,075	0,059	0,156
	15	0,377	0,347	0,283	0,184	0,118	0,165
	25	0,737	0,604	0,406	0,206	0,108	0,369
	50	0,970	0,795	0,605	0,337	0,144	0,633
	100	0,995	0,986	0,901	0,648	0,313	0,801
	200	0,998	0,986	0,988	0,777	0,383	0,979
	500	0,997	0,998	1,000	0,972	0,665	1,000
Dickey-Fuller	10	0,127	0,145	0,149	0,161	0,157	0,067
	15	0,105	0,105	0,105	0,104	0,077	0,085
	25	0,257	0,219	0,155	0,129	0,057	0,086
	50	0,617	0,530	0,402	0,304	0,137	0,031
	100	0,973	0,918	0,848	0,747	0,276	0,067
	200	0,988	1,000	0,995	0,996	0,782	0,025
	500	1,000	0,999	0,996	0,995	0,995	0,117



Rys. 4. Prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej dla permutacyjnego testu Akdi-Dickeya dla szeregów z zaburzeniem



Rys. 5. Prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej dla permutacyjnego testu Dickeya-Fullera dla szeregów z zaburzeniem



Rys. 6. Prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej dla klasycznego testu Dickeya-Fullera dla szeregów z zaburzeniem

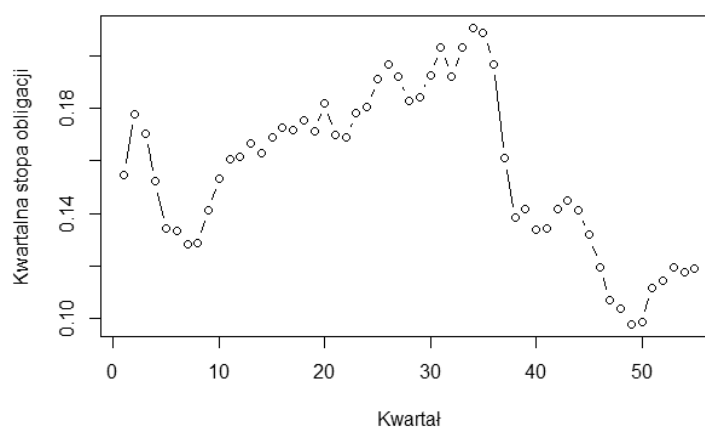
4. Przykład empiryczny

Proponowany test został wykorzystany do wykrycia występowania pierwiastka jednostkowego w szeregu czasowym Urealnionego Produktu Narodowego Brutto w USA w latach 1909-1988 (R, pakiet: Npext). Na rysunku 7 przedstawiono rozważany szereg czasowy. Na podstawie otrzymanej wartości $ASL = 1$ należy stwierdzić brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej głoszącej, że w szeregu czasowym występuje pierwiastek jednostkowy.



Rys. 7. Urealniony PKB w Stanach Zjednoczonych w latach 1909-1988

Podobną analizę przeprowadzono także dla szeregu czasowego kwartalnych stóp zwrotu z obligacji w Danii (R, pakiet: urca). Szereg czasowy przedstawiono na rys. 8.



Rys. 8. Kwartalna stopa obligacji w Danii w latach 1974-1987

W wyniku przeprowadzenia testu otrzymano wartość $ASL = 0,67$, która także wskazuje na brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, głoszącej o występowaniu pierwiastka jednostkowego.

Podsumowanie

W opracowaniu przedstawiono propozycję testu pozwalającego wykryć pierwiastki jednostkowe w szeregach czasowych z autoregresją. Proponowane rozwiązanie opiera się o test permutacyjny, którego zastosowanie pozwoliło na pominięcie założenia o jednorodności wariancji składnika losowego, charakterystycznego dla klasycznych testów pierwiastków jednostkowych. Ponieważ testowanie oparto o analizę harmoniczną, w dalszych rozważaniach można rozwinąć test o wykrywanie sezonowych pierwiastków jednostkowych [por. Nehrebecka, Grudkowska, 2010]. Proponowane rozwiązanie zostało porównane z testami znanymi z literatury. Badania wykazały, że dla krótkich szeregów czasowych testy permutacyjne uzyskały większe prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, co pozwala wykorzystać test w szeregach czasowych o mniejszej długości niż w przypadku klasycznego testu Dickeya-Fullera. Dodatkowo przeprowadzono także symulację opartą na szeregach czasowych z nieheteroskedastycznym składnikiem losowym. Uwzględniając założenia klasycznych testów, najlepsze i użyteczne wyniki otrzymano dla proponowanego testu opartego o analizę harmoniczną.

Literatura

- Akdi Y., Dickey D.A. (1998), *Periodograms of Unit Root Time Series: Distributions and Tests*, "Communications in Statistics: Theory and Methods", No. 27(1), s. 69-87.
- Akdi Y., Dickey D.A. (2012), *Periodograms for Seasonal Time Series with a Unit Root*. "Istatistik, Journal of the Turkish Statistical Association", No. 3(2), s. 153-164.
- Box G., Jenkins G. (1983), *Analiza szeregów czasowych: prognozowanie i sterowanie*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Canova F., Hansen B.E. (1995), *Are Seasonal Patterns Constant Over Time? A Test for Seasonal Stability*, "Journal of Business & Economic Statistics", No. 13(3), s. 237-252.
- Dickey D.A., Fuller W.A. (1979), *Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root*, "Journal of the American Statistical Association", No. 74(366a), s. 427-431.
- Domański C., Pekasiewicz D., Baszczyńska A., Witaszczyk A. (2014), *Testy statystyczne w procesie podejmowania decyzji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Ganczarek-Gamrot A. (2013), *Metody stochastyczne w badaniach porównawczych wybranych rynków energii elektrycznej*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- Good P. (2005), *Permutation, Parametric and Bootstrap Tests of Hypotheses*, Springer-Verlag, New York.

- Grudkowska S., Nehrebecka N. (2009), *Identyfikacja i usuwanie sezonowości z polskich agregatów monetarnych*, „Materiały i Studia”, No. 237, Narodowy Bank Polski, Warszawa.
- Hylleberg S., Engle R.F., Granger C.W., Yoo B.S. (1990), *Seasonal Integration and Cointegration*, “Journal of Econometrics”, No. 44(1), s. 215-238.
- Kończak G. (2016), *Testy permutacyjne: teoria i zastosowania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- Koško M., Osińska M., Stempińska J. (2007), *Ekonometria współczesna*, Dom Organizatora, Toruń.
- Kwiatkowski D., Phillips P., Schmidt P., Shin Y. (1992), *Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root: How Sure Are We that Economic Time Series Have a Unit Root?* “Journal of Econometrics”, No. 54(1-3), s. 159-178.
- Li J., Tran L., Niwitpong S.A. (2013), *A Permutation Test for Unit Root in an Autoregressive Model*, “Applied Mathematics”, No. 4(12), s. 1629-1634.
- Nehrebecka N., Grudkowska S. (2010), *Metody analizy sezonowości stochastycznej w produkcji budowlano-montażowej*, „Wiadomości Statystyczne”, nr 55(1), s. 37-53.
- Said S., Dickey D. (1984), *Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order*, “Biometrika”, No. 71(3), s. 599-607.

DETECTING UNIT ROOTS USING PERMUTATION TESTS

Summary: In this paper, a proposal of test to detect unit root in the time series from the process with autoregression was presented. The proposed solution refers to the Akdi-Dickey unit root test which is based on the spectral time series analysis. The basis of the test is to analyze the periodogram of series obtained by the transformation of the y_t variable into the field of the frequency. The proposed modification uses a permutation test which specificity allows us to take general assumptions. The proposed solution was compared using a computer simulation with the solutions known from the literature.

Keywords: stationarity, permutation test, Akdi-Dickey test, Dickey-Fuller test.