Uniwersytet
Ekonomiczny
w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 340 · 2017

Informatyka i Ekonometria 10

Agata Gluzicka

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Informatyki i Komunikacji
Katedra Badań Operacyjnych
agata.gluzicka@ue.katowice.pl

WYBRANE MIARY OCENY STOPNIA DYWERSYFIKACJI PORTFELI INWESTYCYJNYCH

Streszczenie: Jedno z najważniejszych założeń w teorii zarządzania portfelem to dywersyfikacja. Jest to zarazem jeden z podstawowych sposobów obniżania poziomu ryzyka związanego z daną inwestycją. Problem dywersyfikacji jest od wielu lat analizowany zarówno przez praktyków, jak i teoretyków. Wciąż poszukuje się uniwersalnego sposobu wyznaczania portfela dobrze zdywersyfikowanego. W metodach związanych z dywersyfikacją wykorzystuje się m.in. miary związane z korelacją, spektralne miary ryzyka, elementy teorii informacji czy rozkład ryzyka. Głównym celem artykułu była prezentacja wybranych metod, pozwalających określić stopień zdywersyfikowania portfela.

Słowa kluczowe: dywersyfikacja portfela inwestycyjnego, portfel zdywersyfikowany, entropia, współczynnik ryzyka, analiza składowych głównych.

JEL Classification: G11, C61.

Wprowadzenie

Zjawisko dywersyfikacji leży u podstaw nowoczesnej teorii portfelowej. Mimo wielu lat badań nie udało się do tej pory ustalić jednej definicji pojęcia dywersyfikacja, a co za tym idzie, nie istnieje jedna, uniwersalna metoda, za pomocą której możliwe byłoby ilościowe określanie stopnia zdywersyfikowania portfela. Poszukiwania takiej „idealnej" miary dywersyfikacji to wciąż aktualny obszar badawczy w dziedzinie zarządzania inwestycjami.

Miary stopnia zdywersyfikowania konstruowane są za pomocą różnych wskaźników czy różnych metod, co wynika z faktu, że poszczególne jednostki w różny sposób postrzegają problem dywersyfikacji. Najprostsze miary zaprezentowane w artykule to zarazem jedne z pierwszych wprowadzonych wskaźników dywersyfikacji, do konstrukcji których stosowane były tylko liczba spółek portfela lub też wielkości udziałów poszczególnych spółek występujących w portfelu. Kolejna grupa indeksów dywersyfikacji to miary konstruowane w oparciu o entropię. W tym celu najczęściej stosowana jest entropia Shannona lub jej postać wykładnicza. W ostatnich latach temat zastosowania miar entropii w problemie dywersyfikacji był poruszany wielokrotnie, czego efektem są takie miary, jak np. kwadratowa entropia Rao czy delta dywersyfikacja. Innym przykładem są miary konstruowane za pomocą analizy składowych głównych. Procedura ta jest stosowana w celu przekształcenia danych skorelowanych w odpowiadający im zbiór danych nieskorelowanych, a jak wiadomo, korelacja jest jednym z głównych źródeł występowania zjawiska dywersyfikacji.

Głównym celem artykułu było omówienie wybranych miar dywersyfikacji. Szczególną uwagę zwrócono na te miary, które zostały wprowadzone do badań w ostatnich latach, ale nie były dotychczas powszechnie stosowane w analizach polskiego rynku inwestycyjnego. Artykuł składa się z dwóch części. Część pierwsza – teoretyczna – to zestawienie definicji i podstawowych własności wybranych miar pozwalających ocenić stopnień dywersyfikacji portfela. Prezentowane miary zostały podzielone na pięć grup, w zależności od sposobu ich definiowania. W części drugiej przedstawiony został przykład empiryczny, który jest ilustracją stosowania zaprezentowanych indeksów dywersyfikacji. Celem badań empirycznych była analiza zgodności rankingów otrzymanych dla poszczególnych mierników stopnia dywersyfikacji portfeli inwestycyjnych. Badania te zostały poprzedzone krótkim przykładem empirycznym, ilustrującym zmiany poszczególnych mierników dywersyfikacji w zależności od liczby spółek w portfelu oraz od sposobu konstrukcji portfela. Do konstrukcji portfeli zastosowane zostały dane wybranych spółek z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie.

1. Wybrane metody pomiaru stopnia dywersyfikacji

1.1. Określanie stopnia zdywersyfikowania portfeli na podstawie liczby spółek

Najprostszym sposobem określania stopnia dywersyfikacji portfela jest podanie liczby składników tego portfela. Badania empiryczne związane z analizą wpływu liczby składników na ryzyko portfela pokazały, że ryzyko portfela zmniejsza się podczas zwiększania liczby instrumentów finansowych w tym portfelu [Evans, Archer, 1968; Fisher, Lorie, 1970]. Zwiększanie liczby spółek w portfelu przyczynia się do stopniowego obniżania ryzyka całkowitego, do momentu osiągnięcia takiego poziomu ryzyka, który nie może już być dalej redukowany, bez względu na dodatkowe akcje dodawane do portfela [Frahm, Wiechers, 2011].

Informacje dotyczące liczby spółek na danym rynku oraz liczby spółek znajdujących się w portfelu można wykorzystać do określenia maksymalnej części potencjalnie dywersyfikowalnego ryzyka. Indeks dywersyfikacji stosowany w tym celu został zaproponowany przez Tanga [2004] w następującej postaci:

$$DI_1 = \frac{(n-1)N}{n(N-1)}, \tag{1}$$

gdzie:
DI_1 – wskaźnik dywersyfikacji oznaczający część ryzyka dywersyfikowalnego portfela;
n – liczba spółek w portfelu;
N – całkowita liczba spółek na rynku.

1.2. Miary dywersyfikacji portfela oparte o udziały spółek

Szeroką gamę wskaźników stosowanych do określania stopnia dywersyfikacji portfela stanowią indeksy definiowane za pomocą udziałów poszczególnych spółek portfela. Przykładem jest indeks dywersyfikacji definiowany jako dopełnienie indeksu Herfindahla. Indeks Herfindahla to często stosowana miara ekonomicznej koncentracji. Indeks dywersyfikacji określany jest wzorem:

$$DI_2 = 1 - HI = 1 - \sum_{i=1}^{n} w_i^2, \tag{2}$$

gdzie:
HI – Indeks Herfindahla;
w_i – udział i-tej spółki w portfelu (i = 1, 2, …, n).

Indeks dywersyfikacji DI_2 przyjmuje wartości z przedziału [0, 1]. Wartość 0 odpowiada portfelowi o całkowitym braku dywersyfikacji, czyli mamy wówczas do czynienia z portfelem jednoskładnikowym. Z kolei portfel, dla którego indeks DI_2 przyjmuje wartość równą 1, uznawany jest za portfel o najwyższym stopniu zdywersyfikowania.

Inny indeks dywersyfikacji, definiowany za pomocą udziałów spółek występujących w portfelu, analizowany był w pracy Marfelsa [1971]. W indeksie tym zastosowano rangowanie spółek według malejącego udziału w portfelu (*i*-ta spółka pod względem wielkości udziału otrzymuje rangę *i*). Indeks ten jest określany wzorem:

$$DI_3 = 1 - \frac{1}{2\sum_{i=1}^{n} i w_i - 1}. \tag{3}$$

Interpretacja wartości tego indeksu jest podobna jak dla indeksu DI_2.

1.3. Zastosowanie miar entropii do określania stopnia zdywersyfikowania

Kolejne miary służące do określania stopnia zdywersyfikowania zostały określone przy użyciu pojęcia entropii. Entropia uznawana jest za istotne narzędzie w procesie wyboru portfela oraz w arbitrażu cenowym. Najczęściej stosowana jest entropia Shannona, która w oryginale definiowana jest dla rozkładu prawdopodobieństwa. Przyjmując jednak w miejsce prawdopodobieństw udziały poszczególnych spółek portfela, otrzymujemy miarę dywersyfikacji następującej postaci [Hart, 1971]:

$$DI_4 = -\sum_{i=1}^{n} w_i \, ln(w_i), \tag{4}$$

gdzie *ln* oznacza logarytm naturalny.

Wartości tak zdefiniowanego indeksu nie zawierają się w przedziale [0, 1]. Jednak powszechnie wiadomo, że im wyższy poziom entropii, tym wyższy stopień dywersyfikacji portfela.

Natomiast Marfels [1971] zaproponował indeks dywersyfikacji, w którym zastosował „wykładniczą miarę entropii”:

$$DI_5 = 1 - \prod_{i=1}^{n} w_i^{w_i}. \tag{5}$$

Słabą stroną przytoczonych indeksów dywersyfikacji jest fakt, że żaden z nich nie uwzględnia zależności między korelacją a ryzykiem portfela, czyli zasadniczego związku, który decyduje o stopniu zdywersyfikowania portfela, na co zwracał uwagę już sam Markowitz. Kolejna miara dywersyfikacji to przykład miary entropii, w której możliwe jest również uwzględnienie zależności korelacyjnej zachodzącej między stopami zwrotu poszczególnych składników portfela inwestycyjnego.

Kwadratowa entropia Rao, oznaczana symbolem *RQE* od angielskiej nazwy *Rao's Quadratic Entopy* [Rao, 1982a; 1982b], została zaproponowana jako miara różnorodności (rozmaitości). Przykłady zastosowań tej miary można odnaleźć m.in. w statystyce (np. do uogólnionej analizy wariancji) czy w ekologii (np. do określania stopnia bioróżnorodności) [Rao, 1982a; 1982b]. Przegląd możliwości zastosowania tej miary w kontekście dywersyfikacji portfela inwestycyjnego przedstawiono w pracy Carmicheala, Boevi Koumona i Morana [2015]. Miara ta może być również stosowana jako jedna z funkcji celu (obok wariancji, skośności i stopy zwrotu) w wielokryterialnym modelu wyboru portfela inwestycyjnego.

Dla portfela złożonego z n składników o udziałach w_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$ stopień zdywersyfikowania można określić jako:

$$RQE = \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} w_i w_j \,, \tag{6}$$

gdzie $D = \left[d_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ nazywana jest funkcją różnorodności mierzącą różnicę między dwoma dowolnymi składnikami portfela. O funkcji D zakładamy, że spełnia następujące warunki:

– $d_{ij} \geq 0$ dla $i, j = 1, 2, \ldots, n$,
– $d_{ij} = d_{ji}$ dla $i, j = 1, 2, \ldots, n$,
– $d_{ii} = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Funkcję różnorodności D można zdefiniować m.in. za pomocą delty Kroneckera czy macierzy kowariancji stóp zwrotu [Carmicheal, Boevi Koumon, Moran, 2015]. Równie dobrze funkcja różnorodności może być określona za pomocą macierzy korelacji stóp zwrotu w następujący sposób:

$$RQE = \sum_{i,j=1}^{n} \left(1 - \rho_{ij}\right) w_i w_j \,, \tag{7}$$

gdzie:

$\rho = \left[\rho_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ – macierz korelacji stóp zwrotu składników portfela.

Podobnie jak w przypadku entropii Shannona, im wyższa wartość współczynnika *RQE*, tym wyższy stopień zdywersyfikowania portfela.

Miarę *RQE* przyjmuje się również jako kryterium wyboru portfela inwestycyjnego. Maksymalizując miarę *RQE*, przy standardowych założeniach o udziałach portfela, otrzymujemy portfel o minimalnej koncentracji informacji, nazywany również portfelem maksymalizującym efektywną liczbę niezależnych czynników ryzyka.

W przedstawionej powyżej postaci miara *RQE* jest malejącą funkcją zmiennych ρ_{ij}. Dywersyfikacja portfela *RQE* znika w przypadku, gdy stopy zwrotu składników portfela są doskonale skorelowane. Stąd też intuicyjne stwierdzenie, że niska korelacja stóp zwrotu implikuje wyższy stopień zdywersyfikowania portfela. Należy również zauważyć, że jeśli zmienności wszystkich składników portfela są takie same, to portfel *RQE* staje się ekwiwalentem portfela minimalnej wariancji.

Samuelson [1967], jako jeden z pierwszych badaczy, zwrócił uwagę, że pomiar dywersyfikacji za pomocą tylko dwóch pierwszych momentów rozkładu stóp zwrotu nie jest właściwy. Niestety większość miar stosowanych do określenia stopnia zdywersyfikowania jest w taki sposób definiowana. Przykładem miary uwzględniającej wyższe momenty rozkładu stóp zwrotu jest wprowadzona przez Vermorkena, Meddę i Schrodera [2012] dywersyfikacja delta (*delta diversification*). Jest to miara definiowana jako współczynnik średniej ważonej entropii poszczególnych składników portfela i entropii całego portfela. Innym przykładem miary uwzględniającej wyższe momenty rozkładu jest entropia negatywna [Kirchner, Zunckel, 2011].

1.4. Współczynnik dywersyfikacji

Przedstawiony w dalszej części indeks dywersyfikacji został skonstruowany przy założeniu, że efekt dywersyfikacji związany jest z różnicą między średnią ważoną odchyleń standardowych stóp zwrotu spółek, w które inwestujemy (spółki o niezerowych udziałach), a średnią ważoną odchyleń standardowych i korelacji wszystkich potencjalnych składników portfela (ryzyko portfela) [Cheng, Roulac, 2007; Choueifaty, Coignard 2008].

Współczynnik dywersyfikacji *DE* określany jest jako współczynnik średniej ważonej zmienności spółek dzielonej przez zmienność portfela. Cheng i Roulac [2007] zdefiniowali miarę dywersyfikacji jako iloraz średniej ważonej odchyleń standardowych spółek o niezerowych udziałach i odchylenia standardowego portfela:

$$DE = \frac{\sigma_a}{\sigma_p}, \tag{8}$$

gdzie:
σ_p – odchylenie standardowe portfela;
σ_a – średnia ważona odchyleń standardowych spółek o niezerowych udziałach.

Postać średniej ważonej odchyleń standardowych aktywów o niezerowych udziałach jest identyczna z formą odchylenia standardowego portfela, z wyjątkiem tego, że przyjmujemy współczynnik korelacji równy 1, czyli:

$$\sigma_a = \sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i , \tag{9}$$

gdzie:
w_i – udział i-tej spółki w portfelu;
σ_i – odchylenie standardowe i-tej spółki, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Współczynnik dywersyfikacji *DE* w pierwszej kolejności był stosowany w analizie efektu dywersyfikacji na rynku nieruchomości, w badaniach dotyczących dywersyfikacji geograficznej [Cheng, Roulac, 2007]. Następnie współczynnik *DE* zastosowano do pomiaru efektu dywersyfikacji dla portfeli, w skład których wchodziły różne instrumenty finansowe [Choueifaty, Coignard 2008]. Przeprowadzone zostały również badania związane z zastosowaniem tego współczynnika dla portfeli na polskim rynku inwestycyjnym [Gluzicka, 2016].

Wskaźnik *DE* przyjmuje wartości większe od 1, a zatem nie można za jego pomocą określić wielkości ryzyka redukowanego przy konstrukcji portfela. Przyjmujemy jedynie założenie, że wyższa wartość współczynnika wskazuje na wyższy stopień dywersyfikacji.

Za pomocą przedstawionego wskaźnika poziomu dywersyfikacji możliwa jest konstrukcja tzw. portfeli najbardziej zdywersyfikowanych (*MDP – the Most Diversified Portfolio*). Portfele o optymalnym stopniu dywersyfikacji konstruowane są poprzez rozwiązanie zadania optymalizacyjnego, w którym maksymalizujemy wartość współczynnika dywersyfikacji *DE*, jedynie przy założeniach o sumie nieujemnych udziałów wszystkich składników portfela równej 1 [Choueifaty, Coignard, 2008; Choueifaty, Froidure, Reynier, 2013]. W tym podejściu portfel najbardziej zdywersyfikowany maksymalizuje odległość między dwoma definicjami zmienności portfela, tzn. odległość między średnią ważoną zmienności aktywów portfela a zmiennością całego portfela.

W literaturze przedmiotu współczynnik dywersyfikacji przedstawia się w kilku wersjach, w których odchylenie standardowe zastępowane jest innymi miarami. Nieco wcześniej niż zaprezentowany powyżej współczynnik *DE* wprowadzony został indeks dywersyfikacji, ale zdefiniowany za pomocą współczynników beta [Tasche, 2006]. W innym przypadku w miejsce odchylenia standardowego do określenia miary dywersyfikacji zastosowano miarę Value-at-Risk [Perignon, Smith, 2010].

1.5. Zastosowanie analizy składowych głównych do określania stopnia dywersyfikacji

W przypadku rynku nieskorelowanego wariancja portfela jest równa sumie ważonej wariancji poszczególnych składników tego portfela. Wówczas portfelem maksymalnie zdywersyfikowanym jest taki, dla którego udziały spółek są odwrotnie proporcjonalne do wariancji składników portfela. Jednak taka sytuacja nie ma miejsca w rzeczywistym świecie inwestycyjnym. Możemy jednak za pomocą odpowiednich metod statystycznych przekształcać zbiór skorelowanych danych w zbiór czynników niezależnych. Jedną z takich metod, z powodzeniem wykorzystywanych również w kontekście miar dywersyfikacji, jest analiza składowych głównych.

Miara dywersyfikacji, w której wykorzystano analizę składowych głównych, została zaproponowana przez Rudina i Morgana [2006], którzy prowadzili badania dotyczące portfeli o równych wagach oraz tzw. portfeli głównych (*principal portfolios*).

Rozważmy portfel składający się z n spółek. Jeśli przez $W=[w_1, w_2, ..., w_n]$ oznaczymy wektor udziałów poszczególnych spółek w portfelu, a przez Σ macierz kowariancji między stopami zwrotu spółek portfela, to wariancję takiego portfela obliczamy zgodnie ze wzorem:

$$\sigma_p^2 = W^T \Sigma W \,. \tag{10}$$

Macierz kowariancji Σ możemy przekształcić do następującej postaci:

$$\Sigma = E \Delta E^T \,, \tag{11}$$

gdzie E jest macierzą kwadratową stopnia n, złożoną z wektorów własnych (e_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$) macierzy kowariancji Σ, a Δ jest diagonalną macierzą kwadratową stopnia n, której elementami są wartości własne (λ_i) macierzy kowariancji Σ. Wektory własne definiują zbiór n nieskorelowanych portfeli, nazywanych portfelami głównymi, których stopy zwrotu są malejąco odpowiedzialne za losowość na rynku. Natomiast wartości własne λ_i odpowiadają wariancjom tych nieskorelowanych portfeli.

Wariancję portfela można zatem zapisać w równoważnej formie:

$$\sigma_p^2 = W^T E \Delta E^T W \,. \tag{12}$$

Wielkość udziałów portfeli głównych obliczamy jako $\widetilde{W} = E^{-1} W$. Natomiast stopy zwrotu portfeli głównych otrzymujmy z zależności $\widetilde{R} = E^{-1} R$, gdzie R oznacza wektor stóp zwrotu wyjściowego portfela. Wariancję portfela zatem można zapisać w ostatecznej formie:

$$\sigma_p^2 = \widetilde{W}^T \Delta \widetilde{W} . \tag{13}$$

Korzystając z powyższej procedury, Rudin i Morgan [2006] zaproponowali następujący indeks dywersyfikacji:

$$PDI = 2\sum_{k=1}^{n} k w_k - 1 , \tag{14}$$

gdzie $w_k = \dfrac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Indeks ten mierzy względną ważność składowych głównych w portfelu. Jeśli oryginalne składniki portfela są silnie ze sobą skorelowane, to pierwszych kilka głównych portfeli jest obliczane dla większości wariancji portfela, stąd powyższy indeks będzie miał niską wartość. Jeśli natomiast wszystkie składniki portfela są nieskorelowane, wówczas indeks jest równy liczbie składników n, o ile udział każdej spółki będzie taki sam równy $1/n$.

Indeks *PDI* może przyjmować wartości od 1 do n, przy czym:

– dla portfela całkowicie niezdywersyfikowanego, czyli zdominowanego przez pojedynczy składnik, wartość indeksu *PDI* jest równa 1 ($w_1 = 1$, $w_i = 0$ dla $i = 2, 3, \ldots, n$),
– jeśli wszystkie aktywa portfela są doskonale nieskorelowane, to mamy do czynienia z portfelem idealnie zdywersyfikowanym, dla którego wartość *PDI* jest równa n ($w_k = 1/n$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$),
– wartość $PDI < n$ bardziej odzwierciedla współdziałanie w różnych aktywach; więcej zmienności stóp zwrotu wyjaśniane jest przez kilka pierwszych składowych głównych.

W ogólności, indeks *PDI* nie mierzy dywersyfikacji danego portfela – jest to raczej miara dywersyfikacji potencjalnego zbioru składników, które mogą wchodzić w skład portfela naiwnego parytetu.

Wykorzystując to podejście konstrukcji portfeli głównych za pomocą analizy składowych głównych, Meucci [2009] zdefiniował kolejną miarę dywersyfikacji. W pierwszej kolejności wprowadził on definicję rozkładu dywersyfikacji (*diversification distribution*):

$$p_i = \frac{\widetilde{w}_i^2 \lambda_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{w}_i^2 \lambda_i^2}, \tag{15}$$

dla $i = 1, 2, .., n$. Następnie dla tak zdefiniowanego rozkładu dywersyfikacji zastosował wykładniczą postać entropii Shannona, dzięki czemu otrzymał miarę dywersyfikacji zwaną efektywną liczbą składników (*ENC – Effective Number of Constituents*) następującej postaci:

$$N_{Ent} = exp\left(-\sum_{i=1}^{n} p_i \, ln(p_i)\right). \tag{16}$$

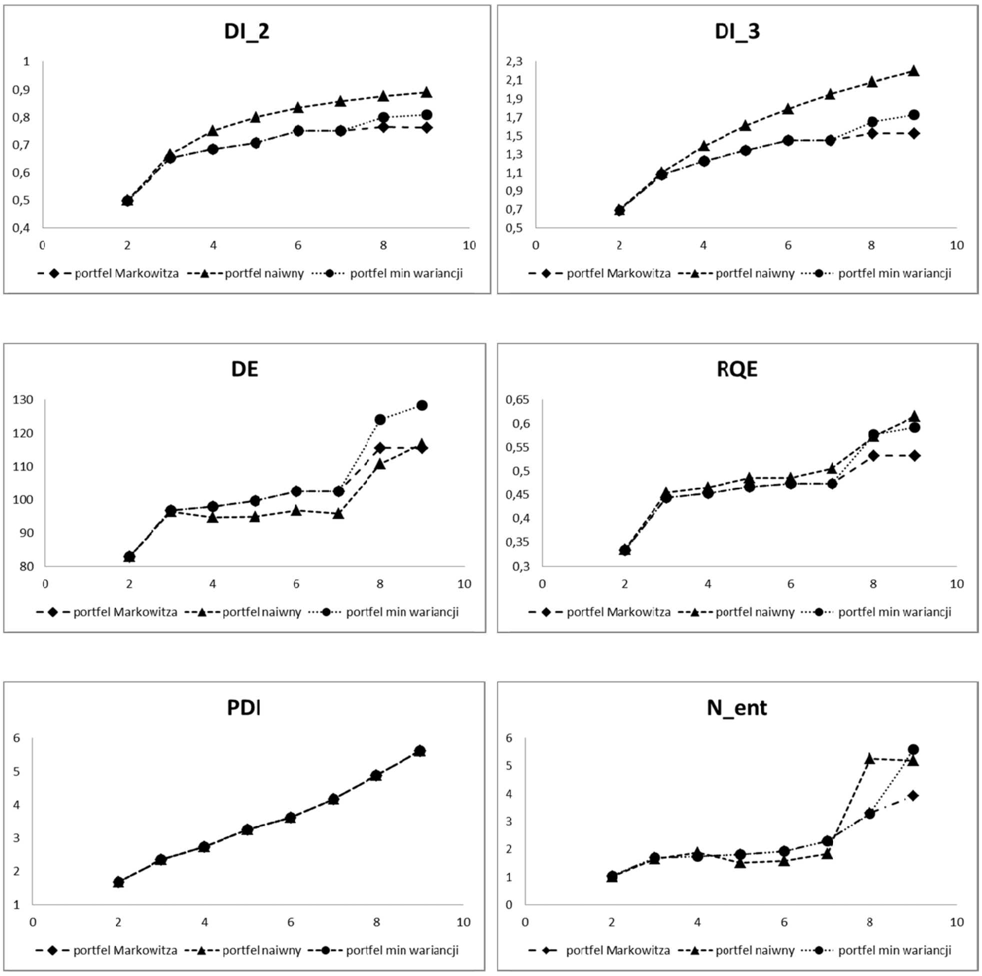
Również ta miara przyjmuje wartości większe od 1. Niska wartość miary N_{Ent} oznacza, że efektywna liczba nieskorelowanych czynników ryzyka jest niska, czyli portfel nie jest zdywersyfikowany. Zdefiniowanie entropii portfeli głównych może być osiągnięte jako jej maksymalna wartość równa ilości składników portfela. To oznacza, że portfel jest w pełni zdywersyfikowany. Takie portfele główne mogą być konstruowane na granicy średnia–dywersyfikacja.

Podejście, w którym do oceny dywersyfikacji portfela wykorzystuje się analizę składowych głównych i entropię Shannona, zostało w dalszej kolejności rozszerzone do miary nazywanej efektywną liczbą współczynników beta [Meucci, 2009; Meucci, Santangelo, Deguest, 2014].

2. Zależność poziomu dywersyfikacji od liczby spółek na podstawie wybranych miar dywersyfikacji

Dla wybranych miar dywersyfikacji przeprowadzono analizę zmian tych wskaźników w zależności od sposobu konstrukcji portfela oraz od liczby spółek w portfelu. Na podstawie dziennych stóp zwrotu z okresu styczeń 2012 – grudzień 2016 dla indeksów giełdowych reprezentujących banki skonstruowano trzy różne portfele: portfel Markowitza, portfel naiwny, portfel minimalnej wariancji (minimalizacja ryzyka przy założeniach dotyczących udziałów). Portfele konstruowane były dla różnej liczby spółek od 2 do 9. Dla każdego portfela obliczony został poziom zdywersyfikowania według następujących wskaźników:
– indeks Herfindahla (DI_2),
– entropia Shannona (DI_3),
– kwadratowa entropia Rao (*RQE*),
– współczynnik dywersyfikacji (*DE*),

– indeks *PDI*,
– wykładnik entropii Shannona (N_{Ent}).



Rys. 1. Zależność poziomu dywersyfikacji od liczby spółek dla wybranych miar dywersyfikacji

Źródło: Opracowanie własne.

Na podstawie otrzymanych wyników (rys. 1) można wywnioskować, że wartość każdego z zastosowanych wskaźników wzrasta wraz ze wzrostem liczby spółek w portfelu. Wyraźnie widać również dla pewnych miar zgodność w ocenach poziomu dywersyfikacji. W przypadku indeksu Herfindahla, entropii oraz kwadratowej entropii Shannona dla danej liczby spółek portfel naiwny okazał się nieco bardziej zdywersyfikowany niż portfel Markowitza czy portfel o minimalnej wariancji.

Analizując tempo zmian poziomu zdywersyfikowania poszczególnych portfeli, można zaobserwować, że według indeksów *DE* i *RQE* największe różnice otrzymujemy dla portfeli składających się z 2 i 3 składników oraz dla portfeli powyżej 7 składników. W przypadku indeksów DI_2 i DI_3 zależność wartości poziomu dywersyfikacji od liczby spółek przypomina zależność wykładniczą, natomiast dla indeksu *PDI* wyraźnie widać liniową zależność między liczbą spółek a poziomem zdywersyfikowania. Dla mniejszej liczby składników portfel Markowitza i portfel minimalnej wariancji mają ten sam poziom zdywersyfikowania – różnice pojawiają się dopiero dla portfeli o 7-9 składnikach.

3. Zastosowanie wybranych miar do oceny stopnia dywersyfikacji portfeli na GPW w Warszawie

Wybrane miary, przedstawione w pierwszej części artykułu, zastosowane zostały w krótkich badaniach empirycznych, związanych z analizą dywersyfikacji portfeli na polskim rynku inwestycyjnym. Badania te miały na celu ustalenie zgodności ocen stopnia zdywersyfikowania według różnych kryteriów. Ponadto analizie poddano wpływ zależności między stopniem zdywersyfikowania a ryzykiem i innymi charakterystykami portfela.

Analiza przeprowadzona została dla portfeli wyznaczonych zgodnie z klasycznym modelem Markowitza (minimalizacja wariancji przy założeniach o stopie zwrotu portfela i udziałach). Do konstrukcji portfeli zastosowano dane w postaci dziennych stóp zwrotu z okresu pięcioletniego: styczeń 2012 – grudzień 2016. Analizie poddano 5 portfeli, które skonstruowano dla następujących grup danych:

- Portfel P1 – banki,
- Portfel P2 – spółki wchodzące w skład indeksu WIG20,
- Portfel P3 – spółki wchodzące w skład indeksu mWIG40,
- Portfel P4 – banki oraz spółki wchodzące w skład indeksu WIG20,
- Portfel P5 – spółki wchodzące w skład indeksu WIG20, obligacje oraz surowce.

Dla każdej grupy danych wyznaczono portfel Markowitza, dla którego następnie obliczony został stopień zdywersyfikowania według następujących miar:

- liczba spółek w portfelu,
- indeks Herfindahla (DI_2),
- entropia Shannona (DI_3),
- kwadratowa entropia Rao (*RQE*),

– współczynnik dywersyfikacji (*DE*),
– indeks *PDI*,
– wykładnik entropii Shannona (N_{Ent}).

Wartości poszczególnych wskaźników dywersyfikacji otrzymane dla wszystkich analizowanych portfeli przedstawiono w tabeli 1. Na podstawie wartości wskaźnika DI_2 możemy stwierdzić, że wszystkie portfele były portfelami wysoko zdywersyfikowanymi – wartości wskaźnika DI_2 dla większości portfeli są bliskie 0,9.

W tabeli 2 przedstawiono portfele uporządkowane według rosnącej wartości danego indeksu. Wszystkie miary, poza N_{Ent}, wskazały jako najmniej zdywersyfikowany portfel P1. Najbardziej zdywersyfikowanym portfelem okazał się natomiast portfel P3 lub w przypadku dwóch miar – *RQE* i N_{Ent} – portfel P5. Należy zwrócić uwagę, że takie mierniki, jak: liczba spółek, DI_2 i DI_3, w podobny sposób oceniają stopień zdywersyfikowania portfeli. Te trzy miary dokładnie w ten sam sposób uporządkowały wszystkie 5 portfeli.

Tabela 1. Wartości współczynników dywersyfikacji dla skonstruowanych portfeli

Portfel	Liczba spółek	DI1	DI3	RQE	DR	PDI	N_{Ent}
P1	6	0,8945	1,6506	1,0657	135,76	5,9553	1,2127
P2	13	0,9078	2,4662	1,4714	193,39	9,7328	1,1947
P3	24	0,9408	2,9479	1,6498	287,49	21,609	1,2240
P4	16	0,9194	2,6164	1,5289	217,26	13,735	1,2166
P5	12	0,8229	2,0889	1,5885	376,90	11,912	3,3492

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 2. Uporządkowanie portfeli według rosnącego stopnia zdywersyfikowania

Miara	Portfele według stopnia zdywersyfikowania
Liczba spółek	P1 < P5 < P2 < P4 < P3
DI_1	P1 < P5 < P2 < P4 < P3
DI_3	P1 < P5 < P2 < P4 < P3
RQE	P1 < P2 < P4 < P3 < P5
DE	P1 < P2 < P4 < P5 < P3
PDI	P1 < P2 < P5 < P4 < P3
N_{Ent}	P2 < P1 < P4 < P3 < P5

Źródło: Opracowanie własne.

Porównując wyniki otrzymane dla miar należących do tej samej grupy – czyli miary zdefiniowane za pomocą entropii (DI_3 i *RQE*) – zaobserwowano, że miary takie nie muszą wcale być zgodne w ocenie dywersyfikacji. Zgodnie z miarą *RQE* portfel P5 okazał się portfelem najbardziej zdywersyfikowanym. Natomiast według wskaźnika DI_3 jest to portfel słabo zdywersyfikowany (4. miejsce w rankingu).

Ocenę zgodności analizowanych miar przeprowadzono na podstawie współczynnika korelacji (tabela 3). Dla wszystkich przypadków otrzymano dodatnie współczynniki korelacji, o wysokiej wartości. Pomijając rankingi identyczne, najlepsze dopasowanie otrzymano dla rankingów *PDI* z liczbą spółek oraz indeksami DI_2, DI_3 i *DE*. Równie wysokie współczynniki potwierdziły zgodność indeksu *RQE* z indeksami *DE* i N_{Ent}.

Tabela 3. Współczynniki korelacji dla rankingów ocen dywersyfikacji według różnych miar

	l. sp.	DI_2	DI_3	***RQE***	***DE***	***PDI***	N_{Ent}
l. sp.	1						
DI_2	1	1					
DI_3	1	1	1				
RQE	0,4	0,4	0,4	1			
DE	0,7	0,7	0,7	0,9	1		
PDI	0,9	0,9	0,9	0,7	0,9	1	
N_{ENT}	0,2	0,2	0,2	0,9	0,8	0,6	1

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 4. Podstawowe charakterystyki analizowanych portfeli

Portfel	**Ryzyko**	**Stopa zwrotu**
P1	0,000141	1
P2	0,000104	1,00001
P3	0,0000708	1,000538
P4	0,0000935	1
P5	0,0000458	1

Źródło: Opracowanie własne.

W tabeli 4 przedstawiono informacje o podstawowych charakterystykach wyznaczonych portfeli, tj. wartości ryzyka i stóp zwrotu. Porządkując portfele według malejącej wartości ryzyka, uzyskano następujący ranking portfeli: P1 < P2 < P4 < P3 < P5. W przypadku ryzyka otrzymuje się zatem dokładnie to samo uporządkowanie portfeli, co dla miary *RQE*. Dla pozostałych miar dywersyfikacji otrzymujemy rozbieżność w rankingach, głównie ze względu na portfel P5, który okazał się portfelem najmniej ryzykownym, a w rankingach według stopnia dywersyfikacji zajmuje 4. miejsce. Natomiast analizując kolejność portfeli według rosnącej wartości stóp zwrotu, otrzymano brak podobieństwa z którymkolwiek rankingiem dla indeksów dywersyfikacji. Zatem na tym etapie trudno znaleźć odpowiedź na pytanie nurtujące wielu inwestorów, czyli jak stopień dywersyfikacji przekłada się na zyskowność portfeli.

Zaprezentowane badania empiryczne zostały powtórzone dla danych pochodzących z okresów wydłużonych o 1 rok (2011-2016) oraz o dwa lata (2010-2016). Ponadto analizowano również dywersyfikację portfeli wyznaczanych dla danych rocznych. We wszystkich przypadkach otrzymano analogiczne wnioski.

Podsumowanie

Celem artykułu było omówienie wybranych miar poziomu dywersyfikacji portfeli inwestycyjnych, ze szczególnym uwzględnieniem miar prezentowanych w literaturze przedmiotu w ostatnich latach. Omówione zostały miary, które można zaliczyć do 5 grup, w zależności od zastosowanych charakterystyk czy metod konstrukcji. Były to miary uwzględniające liczbę spółek w portfelu oraz wielkość udziałów tych spółek, miary oparte na entropii, współczynnik ryzyka oraz miary konstruowane przy pomocy analizy składowych głównych. Prezentowane miary zastosowane zostały w krótkim przykładzie empirycznym, który można podsumować następującymi wnioskami:

– wszystkie miary, za wyjątkiem indeksu N_{Ent}, jednoznacznie wskazały portfel najmniej zdywersyfikowany;
– większość miar jest zgodnych odnośnie portfela najbardziej zdywersyfikowanego, którym okazał się portfel P3 – konstruowany dla składników indeksu mWIG40;
– dwie miary RQE i N_{Ent} jako portfel najbardziej zdywersyfikowany wskazały portfel P5, czyli portfel, którego potencjalnymi składnikami były spółki wchodzące w skład indeksu WIG20, obligacje oraz surowce;
– takie indeksy dywersyfikacji, jak liczba spółek, DI_1, DI_3, okazały się zgodne dla całego zbioru portfeli – dla tych trzech miar otrzymano dokładnie to samo uporządkowanie portfeli;
– w przypadku miar należących do tej samej grupy – mowa o miarach opartych o entropię (DI_3, RQE) – można otrzymać znaczną rozbieżność w ocenie stopnia zdywersyfikowania portfeli.

Zaprezentowane w artykule miary to tylko wybrane przykłady przynależących do określonych grup mierników. Temat dywersyfikacji jest tematem wciąż aktualnym w badaniach naukowych, stąd też pojawiające się nowe propozycje miar, czy też kolejne modyfikacje miar już istniejących. Planowane jest przeprowadzenie rozszerzonych badań dotyczących dywersyfikacji portfeli, przy uwzględnieniu kolejnych metod pozwalających ocenić stopień zdywersyfikowania, jak również zastosowanie tych mierników do konstrukcji portfeli zdywersyfikowanych.

Literatura

Carmicheal B., Boevi Koumon G., Moran K. (2015), *Unifying Portfolio Diversification Measures Using Rao's Quadratic Entropy*, CIRPEE Working Paper.

Cheng P., Roulac S.E. (2007), *Measuring the Effectiveness of Geographical Diversification*, "Journal of Real Estate Management", Vol. 13, s. 29-44.

Choueifaty Y., Coignard Y. (2008), *Toward Maximum Diversification*, "Journal of Portfolio Management", Vol. 35, s. 40-51.

Choueifaty Y., Froidure T., Reynier J. (2013), *Properties of the Most Diversified Portfolio*, "Journal of Investment Strategy", Vol. 2, No. 2, s. 49-70.

Evans J., Archer S. (1968), *Diversification and the Reduction of Dispersion*, "Journal of Finance", Vol. 23, No. 5, s. 761-767.

Fisher L., Lorie J.H. (1970), *Some Studies of Variability of Returns on Investments in Common Stocks*, "The Journal of Business", Vol. 43, No. 2, s. 99-134.

Frahm G., Wiechers C. (2011), *On the Diversification of Portfolios of Risky Assets*, Discussion Papers in Econometrics and Statistics 2/11, University of Cologne Institutel of Econometrics and Statistics, Cologne.

Gluzicka A. (2016), *Optymalna dywersyfikacja na polskim rynku inwestycyjnym*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach", nr 297, s. 22-37.

Hart P.E. (1971), *Entropy and Other Measures of Concentration*, "Journal of the Royal Statistical Society", Vol. 134, s. 73-85.

Kirchner U., Zunckel C. (2011), *Measuring Portfolio Diversification*, http://arxiv.org/pdf/1102.4722.pdf.

Marfels Ch. (1971), *Absolute and Relative Measures of Concentration Reconsidered*, "Kyklos", Vol. 14, s. 753-766.

Meucci A. (2009), *Managing Diversification*, "Risk", Vol. 22, No. 5, s. 74-79.

Meucci A., Santangelo A., Deguest R. (2014), *Measuring Portfolio Diversification Based on Optimized Uncorrelated Factors*, EDHEC – Risk Institute Publication.

Perignon C., Smith D.R. (2010), *Diversification and Value-at-Risk*, "Journal of Banking & Finance", Vol. 34, No. 1, s. 55-60.

Rao R.C. (1982a), *Diversity: Its Measurement, Decomposition, Apportionment and Analysis*, "Indian Journal of Statistics", Vol. 44, s. 1-22.

Rao R.C. (1982b), *Diversity and Dissimilarity Coefficients: A Unified Approach*, "Theoretical Population Biology", Vol. 21, s. 24-43.

Rudin A.M., Morgan J.S. (2006), *A Portfolio Diversification Index*, "The Journal of Portfolio Management", Vol. 32, No. 2, s. 81-89.

Samuelson P.A. (1967), *General Proof that Diversification Pays*, "The Journal of Financial and Quantitative Analysis", Vol. 2, No. 1, s. 1-13.

Tang G.Y.N. (2004), *How Efficient is Naive Portfolio Diversification? An Educational Note*, "The International Journal of Management Science", Vol. 32, s. 155-160.

Tasche D. (2006), Measuring *Sectoral Diversification in an Assumptotic Multifactor Framework*, "Journal of Credit Risk", Vol. 2, No. 3, s. 33-55.

Vermorken M.A., Medda F.R., Schroder T. (2012), *The Diversification Delta: A Higher Moment Measure for Portfolio Diversification*, "Journal of Portfolio Management", Vol. 39, No. 1, s. 67-74.

SELECTED MEASURES TO ASSESS THE LEVEL OF DIVERSIFICATION OF INVESTMENT PORTFOLIOS

Summary: One of the most important assumptions in the portfolio theory is diversification. This is also one of the main methods of reducing the level of risk associated with an investment. For many years the problem of diversification has been analysed by both practitioners and theorists. The universal method of constructing the well diversified portfolio is still sought. The diversification methods are used among others: measures based on the correlation, spectral risk measures, elements of information theory or risk distribution. In the article, selected measures of diversification were analysed. Presented measures were applied in a short empirical example for the portfolios of the Warsaw Stock Exchange.

Keywords: diversification of investment portfolio, diversified portfolio, entropy, risk coefficient, principal component analysis.