



Dominik Krężolek

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Informatyki i Komunikacji
Katedra Demografii i Statystyki Ekonomicznej
dominik.krezolek@ue.katowice.pl

WPŁYW ASYMETRII ROZKŁADU NA ESTYMACJĘ KWANTYLOWYCH MIAR RYZYKA

Streszczenie: Anomalie obserwowane w finansowych szeregach czasowych stóp zwrotu wymagają zastosowania odpowiednich mierników ryzyka. Większość klasycznych rozkładów prawdopodobieństwa wykorzystywanych w modelowaniu podstawowych charakterystyk inwestycji to rozkłady symetryczne, które nie uwzględniają realizacji stóp zwrotu na poziomie istotnie odległym od poziomu przeciętnego. Obserwacje takie nie rozkładają się symetrycznie w stosunku do średniej, stąd konieczność dogłębnego spojrzenia na ten problem. Jego istotność związana jest z pomiarem ryzyka ekstremalnego dla zjawisk nieprzewidywalnych. W referacie podjęto próbę oceny wpływu stopnia asymetrii rozkładu prawdopodobieństwa na ocenę poziomu ryzyka inwestycji realizowanych na rynku metali szlachetnych. Przedstawiono wybrane kwantylowe miary ryzyka, w tym Expected Shortfall i Median Shortfall. Analizę przeprowadzono przy wykorzystaniu wybranych symetrycznych rozkładów prawdopodobieństwa, dla których wprowadzono dodatkowy parametr skośności.

Słowa kluczowe: ryzyko ekstremalne, metale szlachetne, Expected Shortfall, Median Shortfall, rozkłady skośne.

JEL Classification: G15, G17, G31.

Wprowadzenie

Analizowanie rzeczywistych procesów gospodarczych wymaga jednoznacznej identyfikacji struktury badanych zjawisk. Podstawowe mierniki w zakresie analizy struktury umożliwiają opis takich procesów, a tym samym istotnie wpływają na interpretację wyników oraz podejmowanie decyzji. Jednym z częstych problemów, z jakimi spotyka się analityk, to brak symetrii w rozkładach

analizowanych zbiorów danych. Asymetria rozkładu może być zdefiniowana jako różnica pomiędzy głównymi miernikami położenia: średnią, medianą i dominantą. Graficzna prezentacja zjawiska skośności rozumiana jest w kontekście asymetrii zwierciadlanej, gdy kształt histogramu po lewej stronie osi symetrii jest różny od jego kształtu po prawej stronie tej osi. Oczywistym jest, że w przypadku rozważania rzeczywistych procesów rynkowych symetria jest terminem czysto teoretycznym, natomiast jej brak wpływa na wyniki innych analiz, jak np. analizy czynnikowej czy też analizy dyskryminacyjnej [Kosiorowski, 2007].

Głównym problemem diskutowanym w artykule jest próba wykrycia wpływu skośności rozkładu prawdopodobieństwa na estymację miar ryzyka zaliczanych do grupy miar kwantylowych. Miary takie mają istotne znaczenie dla oceny ryzyka ekstremalnego, będącego skutkiem wysokiej zmienności i nieprzewidywalności poziomów cen oraz stóp zwrotu aktywów rynkowych. Jako obszar badawczy zaproponowano rynek metali szlachetnych, reprezentowanych poprzez notowania cen złota, srebra, platyny oraz palladu. Rynek metali (zarówno szlachetnych, jak i nieżelaznych) nie jest popularnym obszarem analitycznym. Większość prac naukowych koncentruje się na analizach fundamentalnych, gdzie kluczową rolę odgrywają takie wskaźniki ekonomiczne, jak wielkość produkcji czy popyt/podaż inwestycyjna. Warto wspomnieć, iż metale notowane są na rynkach regulowanych, a co za tym idzie, rządzą się podobnymi prawami jak klasycznie analizowane akcje czy obligacje (z tą różnicą, że reprezentują rynek towarowy jako segment rynku finansowego).

1. Metale szlachetne

Rozważając aktywność inwestycyjną uczestnika rynku finansowego, można dostrzec, że interesującą alternatywą dla inwestycji kapitałowych jest rynek towarowy, a w jego obszarze rynek metali. W prezentowanej pracy skoncentrowano się na rynku metali szlachetnych, które z psychologicznego punktu widzenia bez wątpienia kojarzą się z bogactwem. Najpopularniejszym z nich jest złoto, które w głównej mierze wykorzystywane jest w jubilerstwie. Dodatkowo, ze względu na fakt, że jest metalem o wyjątkowej odporności na korozję, ma swoje zastosowanie także w elektronice, stomatologii oraz w innych dziedzinach medycyny [Jagielnicki, 2011]. Biorąc pod uwagę światową podaż złota, wskazuje się, że w 2016 roku na świecie wyprodukowano blisko 100 mln uncji tego kruszcu, z czego około 30% dostarczyło 10 największych producentów, zlokalizowanych głównie w Kanadzie, RPA oraz Australii [www 1].

Srebro, podobnie jak złoto, wykorzystywane jest popularnie w jubilerstwie oraz produkcji monet. Porównując jego właściwości chemiczne ze złotem, można zauważyć, że srebro podlega znacznie szybszemu utlenianiu. Z drugiej jednak strony srebro cechuje bardzo dobra przewodność elektryczna (najlepsza wśród wszystkich metali), stąd jest z powodzeniem wykorzystywane w elektronice. Inne obszary zastosowań to fotografia, produkcja lusterek, produkcja paneli słonecznych czy też medycyna. Z inwestycyjnego punktu widzenia srebro jest mniej atrakcyjnym metalem niż złoto, przede wszystkim ze względu na jego relatywnie niską cenę. W 2016 roku przeciętna cena złota na świecie kształtowała się na poziomie około 1250 USD/ozt, podczas gdy przeciętna cena srebra wynosiła około 17 USD/ozt. Wśród największych producentów srebra wymienić należy Meksyk, Peru, Chiny, ale także Polskę, która w 2016 roku uplasowała się na 8. miejscu. Głównym producentem na rynku krajowym jest KGHM z produkcją w 2016 roku na poziomie około 38,5 mln uncji [www 2].

Oprócz złota i srebra zainteresowaniem inwestorów cieszą się także inne metale szlachetne, takie jak platyna oraz pallad. Oba zaliczane są do grupy platynowców, natomiast ich głównym zastosowaniem są przemysł, jubilerstwo oraz medycyna. Platyna jest jednym z najrzadszych surowców na ziemi. W 2016 roku całkowita podaż wynosiła około 8 mln uncji, z czego produkcja skoncentrowana była przede wszystkim w RPA [www 3]. Biorąc pod uwagę przeciętną cenę platyny na świecie, można stwierdzić, że w 2016 roku kształtowała się ona na poziomie około 990 USD/ozt, czyli o ponad 250 USD/ozt niższym niż złoto. Z kolei głównymi producentami palladu są RPA, Rosja oraz Zimbabwe, przy łącznej światowej produkcji w 2016 roku na poziomie ponad 7 mln uncji [www 4]. Przeciętna cena tego kruszcu w tym okresie kształtowała się na poziomie ponad 600 USD/ozt.

Powyższe dane potwierdzają zainteresowanie rynkiem metali szlachetnych na świecie. Biorąc pod uwagę możliwe scenariusze kierunków zmian koniunktury gospodarczej na świecie, zauważa się, że metale szlachetne traktowane są jako aktywa stabilne, stanowiące nierzadko alternatywę inwestycyjną w przypadku kryzysów ekonomiczno-finansowych dla klasycznych inwestycji kapitałowych. Ze względu na fakt, iż są one przedmiotem obrotu na największych giełdach metali na świecie (m.in. amerykańskie CME oraz CONEX, europejska LBMA czy też azjatyckie MCX oraz TOCOM), należy wyraźnie podkreślić, iż w ocenie ryzyka inwestycyjnego konieczne jest gruntowne analizowanie i monitorowanie zmienności cen i stóp zwrotu tych aktywów towarowych.

2. Metodologia badawcza

W tej części pracy omówiono wybrane mierniki asymetrii rozkładu oraz przedstawiono zarys metodologiczny przekształcania rozkładów symetrycznych w rozkłady skośne. Jak wspomniano we wprowadzeniu, zakłada się, że poziom skośności rozkładu prawdopodobieństwa istotnie wpływa na pomiar ryzyka ekstremalnego dla zdarzeń rzadkich. Istnieje wiele miar, za pomocą których można szacować poziom takiego ryzyka. Są to m.in. miary bazujące na wartości zagrożonej.

2.1. Wybrane miary asymetrii

Analiza skośności rozkładu polega na graficznej ocenie jego kształtu, jak również na pomiarze stopnia asymetrii za pomocą właściwej miary. Można wskazać wiele miar asymetrii, jednakże obecny charakter danych wymaga ich modyfikacji celem wydobycia ukrytej informacji na temat źródła, kierunku czy siły asymetrii [Aczel, 2000].

Zakładając zmienną losową X , asymetria rozkładu prawdopodobieństwa może być wyznaczona za pomocą trzeciego momentu centralnego $M_3(X) = E([x - E(X)]^3)$. Miara ta wskazuje kierunek asymetrii, natomiast aby dodatkowo ocenić jej siłę, wprowadza się trzeci moment centralny standaryzowany:

$$M_3(X)_{\text{std}} = \frac{M_3(X)}{\sqrt{M_2^3(X)}}, \quad (1)$$

gdzie $M_2(X)$ wyznacza drugi moment centralny (wariancję) zmiennej losowej X . Wprowadza się także inne popularne miary skośności, uwzględniające dodatkowo wybrane statystyki pozycyjne. Są to pierwszy i drugi współczynnik skośności Pearsona, dane odpowiednio wzorami:

$$AP_1(X) = \frac{m_1(X) - \text{Moda}(X)}{\sqrt{M_2(X)}}, \quad (2)$$

$$AP_2(X) = \frac{3(m_1(X) - F^{-1}(0,5))}{\sqrt{M_2(X)}}, \quad (3)$$

gdzie $m_1(X)$ oraz $\text{Moda}(X)$ oznaczają odpowiednio moment zwykły rzędu pierwszego oraz dominantę (modę) zmiennej losowej X , natomiast $F^{-1}(0,5)$ oznacza medianę zmiennej losowej X . Powyższe miary określają kierunek i siłę asymetrii.

Oprócz miar klasycznych, uwzględniających wszelkie realizacje zmiennej losowej, ważną informację o charakterze skośności rozkładu dają miary kwanty-

lowe. W publikacji Hinkleya z 1975 roku [Hinkley, 1975] wprowadzono uogólnioną miarę asymetrii, która bazuje na wybranym kwantylu zmiennej losowej. Zakładając p -ty kwantyl zmiennej losowej X oraz definiując medianę tej zmiennej dla $p = 0,5$, wprowadza się uogólnioną kwantylową miarę asymetrii, która wyrażona jest formułą:

$$AS_{Q(p)}(X) = \frac{F^{-1}(1-p) - 2F^{-1}(0,5) + F^{-1}(p)}{F^{-1}(1-p) - F^{-1}(p)}, \quad (4)$$

gdzie $F^{-1}(p)$ oznacza funkcję kwantylową dla zmiennej losowej X .

Uogólniona kwantylowa miara asymetrii określona wzorem (4) jest uogólnieniem zaproponowanego przez Bowleya [1920] kwartylowego wskaźnika skośności wyrażonego formułą:

$$AS_B(X) = \frac{F^{-1}(0,75) - 2F^{-1}(0,5) + F^{-1}(0,25)}{F^{-1}(0,75) - F^{-1}(0,25)}. \quad (5)$$

Jak wspomniano, zjawisko skośności powiązane jest z kształtem rozkładu i ma swoje odzwierciedlenie w grubości jego ogonów. Dla asymetrii prawostronnej istnieje większe prawdopodobieństwo realizacji obserwacji o wartościach wyższych od poziomu przeciętnego (określonego jako średnia arytmetyczna lub mediana), natomiast w przypadku asymetrii lewostronnej – o wartościach niższych. Zjawisko grubych ogonów powiązane jest z występowaniem w zbiorze danych obserwacji nietypowych, odstających. Obserwacje te mogą wprowadzić pewne zaburzenia w estymacji różnych charakterystyk rozkładu. Rozwiązanie kwestii oceny skośności w przypadku zbiorów danych posiadających outliery uzyskuje się za pomocą miary MedCouple, którą wprowadzili Brys, Hubert i Struyf [2004].

Mając uporządkowany zbiór realizacji zmiennej losowej X określony, przyjmuje się, że dany będzie szereg $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $x_i \neq x_j$, $x_i < x_j$ oraz niech zdefiniowana będzie pewna funkcja h jako:

$$h(x_i, x_j) = \frac{x_j - F^{-1}(0,5) + x_i}{x_j - x_i}. \quad (6)$$

W przypadku, gdy $x_i = x_j = F^{-1}(0,5)$, funkcja h , określona będzie jako:

$$h(x_i, x_j) = \begin{cases} -1, & i < j \\ 0, & i = j \\ 1, & i > j \end{cases}. \quad (7)$$

Miarę MedCouple wyraża następująca formuła:

$$MC(X) = \text{med}_{x_i \leq F^{-1}(0,5) \leq x_j} h(x_i, x_j), \quad (8)$$

gdzie przez $\text{med}(h)$ oznaczono medianę zbioru wartości dla funkcji h .

2.2. Wprowadzanie parametru skośności w rozkładach symetrycznych

Analizując modele opisujące rynki finansowe, zauważa się, że większość z nich opiera się na symetrycznych rozkładach prawdopodobieństwa (m.in. na rozkładzie normalnym czy też t-Studenta). Jednakże możliwe jest przekształcenie dowolnego rozkładu symetrycznego w rozkład asymetryczny celem uzyskania odpowiedniego dopasowania do danych empirycznych [Piontek, 2007].

Niech zatem $g(x)$ oznacza gęstość zmiennej losowej X opisaną pewnym ciągłym i symetrycznym rozkładem prawdopodobieństwa. Niech ponadto określone zostaną funkcje normujące $u_1(\xi)$ oraz $u_2(\xi)$. Asymetryczny rozkład prawdopodobieństwa opisany funkcją $f_\xi(x)$ definiuje wzór:

$$f_\xi(x) = \frac{2[g(\frac{x}{u_1(\xi)})I_{x \geq 0} + g(\frac{x}{u_2(\xi)})I_{x < 0}]}{u_1(\xi) + u_2(\xi)}, \quad (9)$$

gdzie I_x oznacza funkcję wskaźnikową. Jeśli funkcja $f_\xi(x)$ definiuje rozkład skośny, wtedy jako zmienne normujące u przyjmuje się najczęściej następujące pary:

$$u_I = \begin{cases} u_1(\xi) = \xi \\ u_2(\xi) = \frac{1}{\xi} \end{cases} \quad (10)$$

lub:

$$u_{II} = \begin{cases} u_1(\xi) = 1 - \xi \\ u_2(\xi) = 1 + \xi \end{cases}. \quad (11)$$

Dla funkcji normującej u_I parametr skośności ξ przyjmuje wartości z przedziału $(0, +\infty)$. Gdy $\xi \in (0, 1)$, rozkład jest lewostronnie asymetryczny, natomiast dla przypadku, gdy $\xi \in (1, +\infty)$, rozkład jest prawostronnie asymetryczny. Natomiast druga funkcja normująca u_{II} posiada parametr skośności ξ określony na przedziale $(-1, 1)$. Jeżeli $\xi \in (-1, 0)$, to otrzymany rozkład jest lewostronnie skośny, natomiast gdy $\xi \in (0, 1)$, rozkład jest prawostronnie asymetryczny. Rozkłady symetryczne uzyskuje się dla $\xi = 1$ (funkcja normująca u_I) oraz dla $\xi = 0$ (funkcja normująca u_{II}). Wśród bardziej popularnych rozkładów symetrycznych, które przekształcane są na rozkłady skośne, wymienia się: skośny rozkład normalny oraz skośny rozkład t-Studenta, dane następującymi formułami [Piontek, 2005]:

a) skośny rozkład normalny:

$$f_{s-norm}(x) = \frac{2}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad (12)$$

gdzie X jest zmienną losową o asymetrycznym rozkładzie normalnym opisanym parametrami położenia μ oraz skali σ , ξ jest parametrem skośności,

a dodatkowo φ oraz Φ oznaczają odpowiednio funkcję gęstości oraz funkcję dystrybucyjną rozkładu normalnego standardowego;

b) skośny rozkład t-Studenta:

$$f_{s-t}(x; v) = \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \{g(\xi(ax + b); v)I_{x < -\frac{b}{a}} + g\left(\frac{ax+b}{\xi}; v\right)I_{x \geq -\frac{b}{a}}\}, \quad (13)$$

gdzie X jest zmienną losową ciągłą o skośnym rozkładzie t-Studenta, ξ jest parametrem skośności, g jest funkcją gęstości standardowego rozkładu t-Studenta o v stopniach swobody, parametry a oraz b definiują wzory:

$$a = \frac{\Gamma(\frac{v-1}{2})\sqrt{v-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{v}{2})}(\xi - \frac{1}{\xi}) \quad (14)$$

oraz:

$$b^2 = \left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1\right) - a^2, \quad (15)$$

natomiast Γ jest funkcją gamma.

2.3. Kwantylowe miary ryzyka

Liczbowy pomiar ryzyka inwestycyjnego jest zagadnieniem skomplikowanym i zależy w dużym stopniu od obszaru zainteresowań inwestora. W pracy rozważano miary ryzyka inwestycji, dla których pomiar dokonywany jest w oparciu o stopy zwrotu. Uogólniając sposób definiowania ryzyka, nie należy skupiać się tylko na potencjalnych stratach w stosunku do oczekiwań, ale także powinno się brać pod uwagę potencjalne zyski. Podejście to wynika z faktu, iż zazwyczaj rozkład zmiennej dla której szacowane jest ryzyko jest rozkładem asymetrycznym. Tym samym relacja prawdopodobieństwa zysków do prawdopodobieństwa strat nie jest jednakowa.

W tym miejscu zastosowano kwantylowe miary ryzyka, które związane są bezpośrednio z realizacją stopy zwrotu na poziomie znacznie różniącym się od poziomu oczekiwanego. Wśród kwantylowych miar ryzyka szczególną rolę odgrywa Value-at-Risk (wartość zagrożona, VaR), określona jako α -kwantyl rozkładu stopy zwrotu. Miara ta określa liczbowo wartość potencjalnej straty, jaka może wynikać z podjętej inwestycji w ustalonym odgórnie horyzoncie czasowym i przy ustalonym poziomie tolerancji $1 - \alpha$. Wartość zagrożona nie jest dobrą miarą ryzyka, ponieważ nie jest koherentna. Wśród aksjomatów miary koherentnej zaproponowanych przez Artznera i in. [1999] miara ta nie spełnia zadość własności subaddytywności, która mówi, że ryzyko całkowite podjętej inwestycji jest nie większe niż suma ryzyk poszczególnych składników, które tą

inwestycję tworzą. Wady tej pozbawione są takie kwantylowe miary ryzyka, jak [Kou, Peng, 2014]:

a) warunkowa wartość zagrożona ponad poziom VaR (Expected Shortfall, ES):

$$ES_{\alpha} = CVaR_{\alpha} = E(r_t - VaR_{\alpha} | r_t > VaR_{\alpha}), \quad (16)$$

b) warunkowa mediana ponad poziom VaR (Median Shortfall, MS):

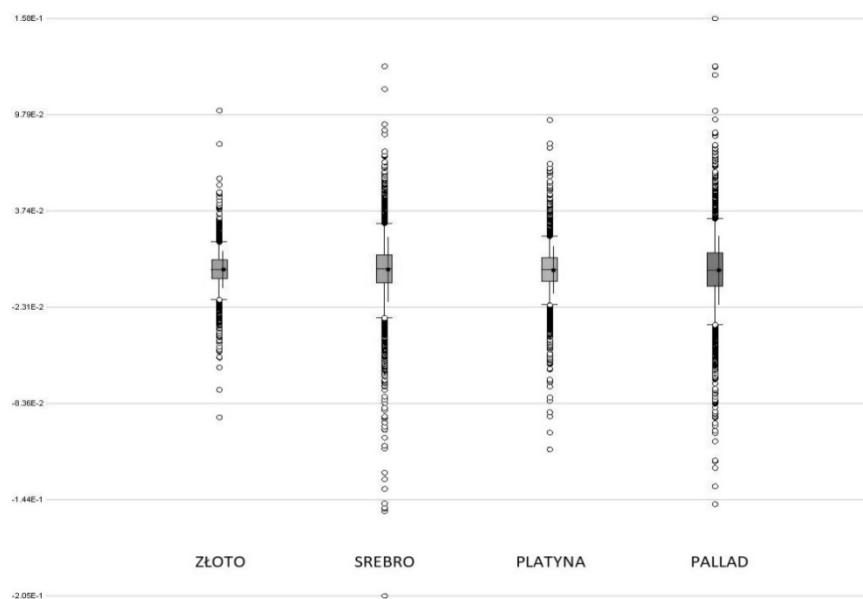
$$MS_{\alpha} = Median(r_t - VaR_{\alpha} | r_t > VaR_{\alpha}), \quad (17)$$

gdzie r_t oznacza stopę zwrotu w okresie t .

Obie przedstawione miary są koherentne, a dodatkowo miara MS jest odporną kwantylową miarą ryzyka. Ma zatem zastosowanie w jego ocenie w sytuacji, gdy w zbiorze realizacji zmiennej losowej pojawiają się obserwacje odstające.

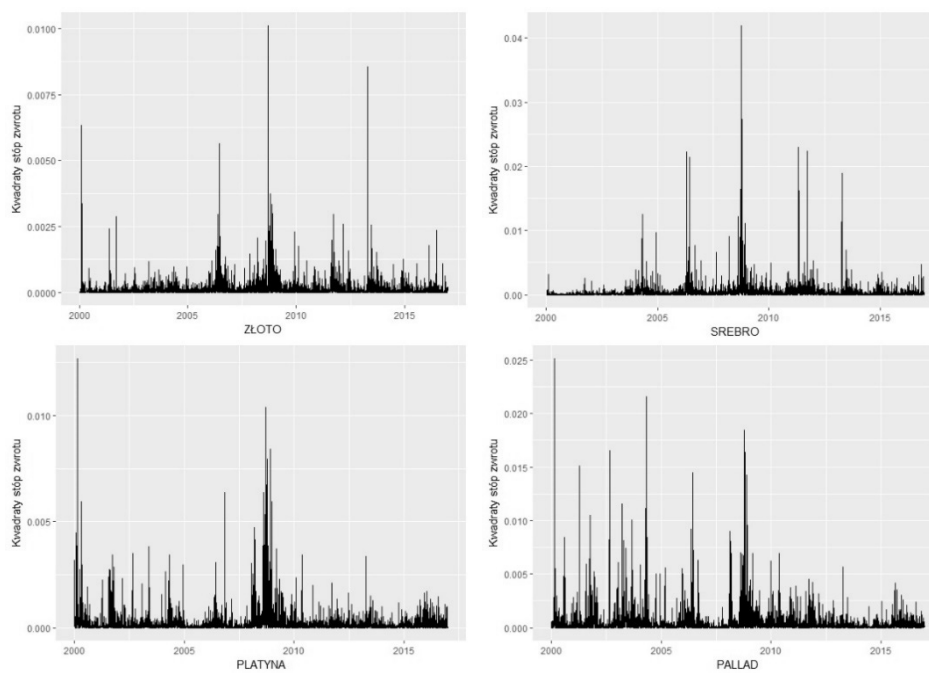
3. Analiza empiryczna na rynku metali szlachetnych

W tej części pracy zaprezentowano wyniki pomiaru skośności rozkładów dla danych pochodzących z rynku metali szlachetnych: złota, srebra, platyny oraz palladu. Wykorzystano dzienne kursy zamknięcia na rynku kasowym w okresie styczeń 2000 – grudzień 2016, na podstawie których obliczono logarytmiczne stopy zwrotu. Kwantylowe miary ryzyka oszacowano dla kwantyli rzędu 0,01, 0,05, 0,95 oraz 0,99. Jako rozkłady teoretyczne wykorzystano rozkład normalny, rozkład t-Studenta, skośny rozkład normalny oraz skośny rozkład t-Studenta. Na rys. 1 zaprezentowano graficznie podstawowe charakterystyki rozkładu stóp zwrotu badanych aktywów, natomiast na rys. 2 przedstawiono kwadraty stóp zwrotu analizowanych metali celem wskazania występowania obserwacji ekstremalnych.



Rys. 1. Wykres pudełkowy stóp zwrotu

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 2. Wykresy kwadratów stóp zwrotu

Źródło: Obliczenia własne.

Analizując powyższe wykresy, trudno jednoznacznie wskazać, które z empirycznych rozkładów są asymetryczne. Niemniej jednak wyraźnie widać, że zbiory danych cechują obserwacje odstające oraz wyraźny poziom zmienności w danych (przede wszystkim dla stopy zwrotu cen palladu).

Tabela 1. Statystyki opisowe stóp zwrotu

STATYSTYKI OPISOWE / METAL	ZŁOTO	SREBRO	PLATYNA	PALLAD
ŚREDNIA	0,00033	0,00026	0,00017	0,00010
MEDIANA	0,00038	0,00081	0,00021	0,00000
MODA	0	0	0	0
MINIMUM	-0,09241	-0,20464	-0,11256	-0,14698
MAKSIMUM	0,10050	0,12832	0,09454	0,15841
KWARTYL PIERWSZY	-0,00520	-0,00806	-0,00713	-0,00988
KWARTYL TRZECI	0,00647	0,00981	0,00788	0,01117
ROZSTĘP	0,19291	0,33296	0,20710	0,30539
ODCHYLENIE STANDARDOWE	0,01143	0,02003	0,01453	0,02149
KURTOZA	5,47448	9,78081	5,54781	5,24677

Źródło: Obliczenia własne.

Wyniki przedstawione w tabeli 1 wskazują, że stopy zwrotu wykazują istotne zróżnicowanie oraz wysoki poziom kurtozy, co skłania ku przypuszczeniu, iż rozkłady odbiegają od rozkładu normalnego. W tabeli 2 przedstawiono natomiast wyniki oceny stopnia asymetrii za pomocą wybranych miar zaprezentowanych w części teoretycznej.

Tabela 2. Miary skośności dla rozkładów stóp zwrotu

MIARA	ZŁOTO	SREBRO	PLATYNA	PALLAD
$M_3(X)_{std}$	-0,17889	-1,11159	-0,41577	-0,29852
$AP_1(X)$	0,02922	0,01301	0,01201	0,00473
$AP_2(X)$	-0,01175	-0,08200	-0,00695	0,01419
$AS_{Q(0,01)}(X)$	-0,04930	-0,10588	-0,06367	-0,05179
$AS_{Q(0,05)}(X)$	-0,03553	-0,03510	-0,01634	-0,02612
$AS_B(X)$	0,04424	0,00739	0,02257	0,06063
$MC(X)$	0,01975	0,00176	0,03479	0,01853

Źródło: Obliczenia własne.

Biorąc pod uwagę uzyskane wyniki, zaobserwowano różnice w wartościach ze względu na przyjęty miernik. Pierwszy współczynnik skośności Pearsona, kwartyłowy współczynnik asymetrii oraz miara MedCouple różnią się w stosunku do pozostałych mierników co do znaku, wskazując na prawostronną asymetrię. Pozostałe mierniki oceniają skośność jako lewostronną. Warto podkreślić, że w przypadku zaobserwowanych różnic co do znaku dla wyznaczonych miar skośności wartości mierników kwantylowych (w tym także miara MedCouple) często przyjmują wartości w otoczeniu poziomu zero. Można zatem wnioskować

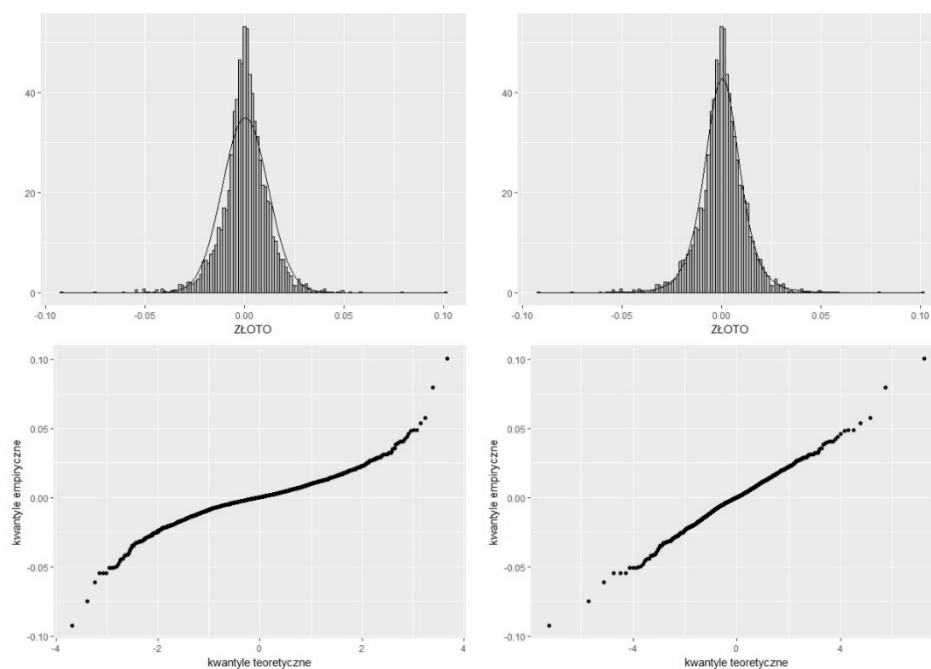
wać, że występowanie obserwacji odstających istotnie wpływa na wartości klasycznych miar skośności.

W kolejnym kroku, wykorzystując Metodę Największej Wiarygodności, oszacowano parametry skośnego rozkładu normalnego oraz skośnego rozkładu t-Studenta. Jako funkcję normującą przyjęto funkcję daną wzorem (10). Wyniki przedstawia tabela 3. Natomiast na rys. 3 zaprezentowano graficzne dopasowanie rozkładów skośnych do danych empirycznych dla stopy zwrotu cen złota.

Tabela 3. Parametry rozkładów skośnych

Skośny normalny	ZŁOTO	SREBRO	PLATYNA	PALLAD
$\hat{\mu}$	0,000334	-0,000358	0,000174	-0,000150
$\hat{\sigma}$	0,011424	0,019914	0,014497	0,021467
$\hat{\xi}$	0,999986	0,877285	0,999866	0,943312
Skośny t-Studenta	ZŁOTO	SREBRO	PLATYNA	PALLAD
$\hat{\mu}$	0,000409	0,000569	0,000230	0,000278
$\hat{\sigma}$	0,011791	0,022260	0,014790	0,022801
$\hat{\nu}$	3,726653	2,832772	3,740191	3,256973
$\hat{\xi}$	0,977999	0,963565	0,955593	0,970085

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 3. Dopasowanie teoretycznych rozkładów skośnych (skośny normalny – panel lewy, skośny t-Studenta – panel prawy)

Źródło: Obliczenia własne.

Wyniki wskazują, że dopasowane teoretyczne rozkłady prawdopodobieństwa sugerują lewostronną asymetrię dla analizowanych stóp zwrotu metali. Wniosek ten jest zbieżny z wartościami oszacowanych wskaźników skośności dla miar klasycznych. Parametry te nie wykazują dużej rozbieżności z rozkładem symetrycznym, jednakże należy tę własność uwzględnić w dalszych analizach. Oceniając stopień dopasowania, zaobserwowano, że analizowane dane empiryczne lepiej opisuje skośny rozkład t-Studenta.

Na kolejnym etapie analizy oszacowano wartość zagrożoną VaR oraz kwantylowe miary ryzyka dane wzorami (16)-(17). Wykorzystano rozkład empiryczny, skośny rozkład normalny oraz skośny rozkład t-Studenta. Jako metodę estymacji miar ryzyka przyjęto metodę bazującą na kwantylu dowolnego rozkładu teoretycznego. Wyniki przedstawiono w tabelach 4-6.

Tabela 4. Oszacowania miary VaR

Miara ryzyka VaR	ZŁOTO	SREBRO	PLATYNA	PALLAD
$VaR_{0,01}[emp]$	-0,03146	-0,06038	-0,04136	-0,06204
$VaR_{0,01}[snorm]$	-0,02641	-0,04793	-0,03263	-0,05205
$VaR_{0,01}[sstud]$	-0,03026	-0,05514	-0,03908	-0,06749
$VaR_{0,05}[emp]$	-0,01833	-0,02990	-0,02176	-0,03412
$VaR_{0,05}[snorm]$	-0,01853	-0,03609	-0,02401	-0,03669
$VaR_{0,05}[sstud]$	-0,01741	-0,02963	-0,02253	-0,03297
$VaR_{0,95}[emp]$	0,01780	0,02943	0,02147	0,03238
$VaR_{0,95}[snorm]$	0,01943	0,03085	0,02277	0,03445
$VaR_{0,95}[sstud]$	0,01737	0,02927	0,02137	0,03130
$VaR_{0,99}[emp]$	0,02923	0,05028	0,03680	0,05593
$VaR_{0,99}[snorm]$	0,02607	0,04122	0,03495	0,04917
$VaR_{0,99}[sstud]$	0,03228	0,05291	0,03736	0,05932

Źródło: Obliczenia własne.

Tabela 5. Oszacowania miary ES

Miara ryzyka ES	ZŁOTO	SREBRO	PLATYNA	PALLAD
$ES_{0,01}[emp]$	-0,04227	-0,09170	-0,05897	-0,08632
$ES_{0,01}[snorm]$	-0,03149	-0,05659	-0,03869	-0,05796
$ES_{0,01}[sstud]$	-0,05092	-0,08443	-0,05501	-0,09052
$ES_{0,05}[emp]$	-0,02677	-0,05062	-0,03499	-0,05283
$ES_{0,05}[snorm]$	-0,02296	-0,04348	-0,03005	-0,04657
$ES_{0,05}[sstud]$	-0,02724	-0,04656	-0,03487	-0,05016
$ES_{0,95}[emp]$	0,02536	0,04242	0,03172	0,04733
$ES_{0,95}[snorm]$	0,02324	0,04316	0,02828	0,04546
$ES_{0,95}[sstud]$	0,02490	0,05032	0,03419	0,05313
$ES_{0,99}[emp]$	0,03878	0,06401	0,05098	0,07578
$ES_{0,99}[snorm]$	0,03076	0,05730	0,03809	0,05913
$ES_{0,99}[sstud]$	0,04337	0,08276	0,06117	0,08250

Źródło: Obliczenia własne.

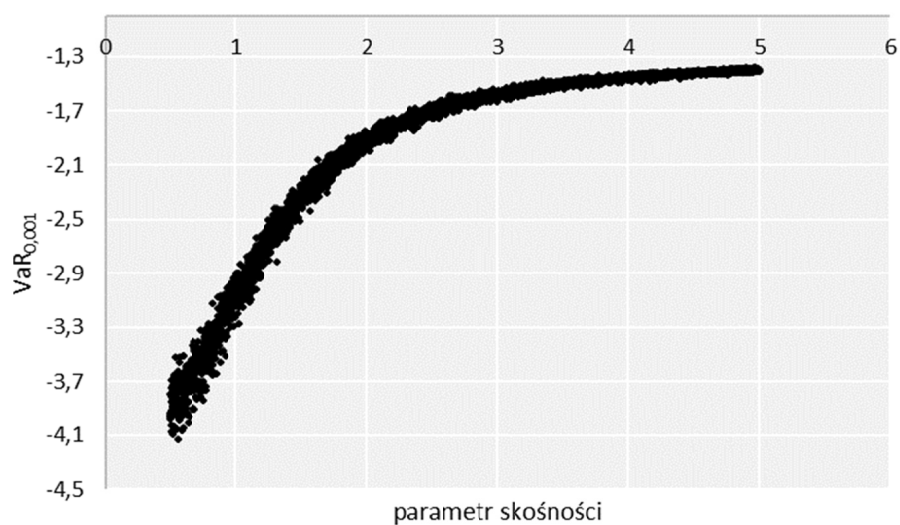
Tabela 6. Oszacowania miary MS

Miara ryzyka <i>MS</i>	ZŁOTO	SREBRO	PLATYNA	PALLAD
$MS_{0,01}[emp]$	-0,03958	-0,08132	-0,05630	-0,08278
$MS_{0,01}[snorm]$	-0,02843	-0,05535	-0,03875	-0,05761
$MS_{0,01}[sstud]$	-0,03435	-0,08577	-0,04759	-0,07215
$MS_{0,05}[emp]$	-0,02321	-0,04184	-0,03027	-0,04655
$MS_{0,05}[snorm]$	-0,02268	-0,04284	-0,02744	-0,04476
$MS_{0,05}[sstud]$	-0,02311	-0,03842	-0,03032	-0,04190
$MS_{0,95}[emp]$	0,02247	0,03802	0,02746	0,04122
$MS_{0,95}[snorm]$	0,02258	0,03587	0,02845	0,04090
$MS_{0,95}[sstud]$	0,02252	0,03702	0,02770	0,04436
$MS_{0,99}[emp]$	0,03263	0,05821	0,04703	0,06866
$MS_{0,99}[snorm]$	0,03003	0,04594	0,03799	0,05213
$MS_{0,99}[sstud]$	0,04216	0,08058	0,04625	0,06877

Źródło: Obliczenia własne.

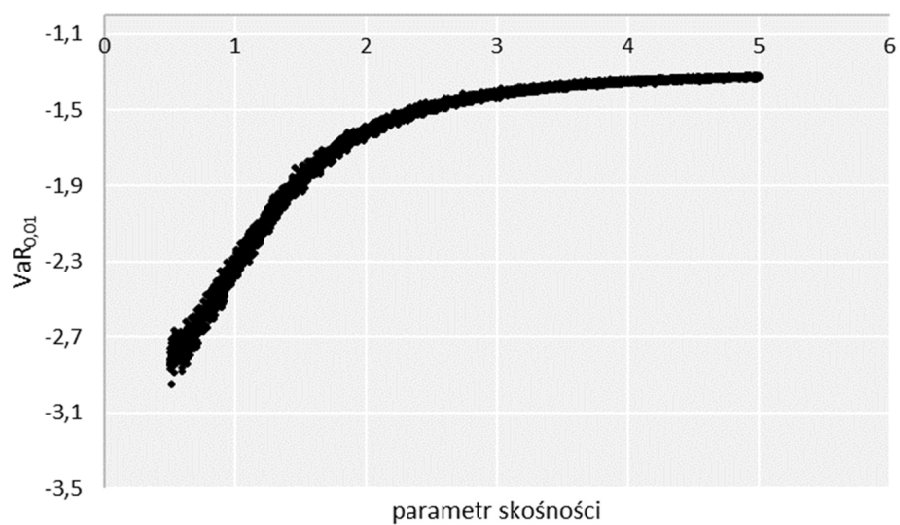
Wyniki zaprezentowane w tabelach 4-6 wskazują, że rozkład skośny t-Studenta daje oszacowania miar ryzyka bliższe rzeczywistym (pogrubiony tekst). Zaobserwowano ponadto, że skośny rozkład normalny częściej niedoszacowuje wartość miary ryzyka (bez względu na rząd kwantyla). Ponadto rozkład skośny t-Studenta częściej przeszacowuje miary ryzyka dla kwantyli ekstremalnych (odpowiednio bardzo niskiego lub bardzo wysokiego rzędu). Jest to podyktowane tym, że rozkład skośny t-Studenta jest rozkładem gruboogonowym, więc uwzględnia występowanie w zbiorze danych obserwacji ekstremalnych.

W ramach ostatniego etapu analizy podjęto próbę weryfikacji hipotezy, że parametr wprowadzający skośność do rozkładu symetrycznego wpływa na wartość miary ryzyka. W tym celu przeprowadzono symulację polegającą na oszacowaniu miary VaR dla skośnego standardowego rozkładu normalnego, szacując miary dla kwantyla rzędu 0,001, 0,01 oraz 0,05. Jako funkcję normującą przyjęto funkcję daną wzorem (10). Dodatkowo ograniczono zmienność parametru skośności do przedziału $[0,5, 5]$. Wyniki analizy przedstawiono graficznie na poniższych rysunkach.



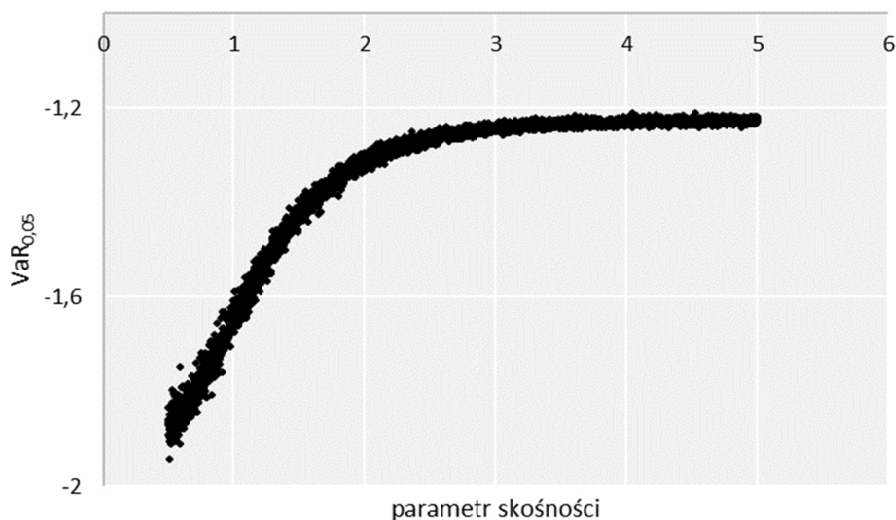
Rys. 4. Parametr skośności dla skośnego standardowego rozkładu normalnego a oszacowanie VaR dla kwantyla rzędu 0,001

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 5. Parametr skośności dla skośnego standardowego rozkładu normalnego a oszacowanie VaR dla kwantyla rzędu 0,01

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 6. Parametr skośności dla skośnego standardowego rozkładu normalnego a oszacowanie VaR dla kwantyla rzędu 0,05

Źródło: Obliczenia własne.

Analiza wyników zaprezentowanych na rys. 4-6 wskazuje, iż pomiędzy parametrem skośności dla skośnego standardowego rozkładu normalnego a oszacowaniem wartości miary ryzyka VaR występuje zależność funkcyjna. Wprowadzając odpowiednie transformacje zmiennych, można przypuszczać, iż dobre dopasowanie do prezentowanych danych może wykazywać funkcja wykładnicza, jednakże głębsze rozważania na ten temat będą przedmiotem dalszych badań autora. Konkludując, zauważono, że zmiana skośności rozkładu z lewostronnej na prawostronną istotnie wpływa na oszacowania wartości zagrożonej, a co za tym idzie, na oszacowania miar bazujących na VaR, tj. Expected Shortfall oraz Median Shortfall.

Podsumowanie

Analiza ryzyka inwestycyjnego jest zagadnieniem szeroko popularyzowanym zarówno w środowisku praktyków, jak i teoretyków. Budowanie modeli, które skutecznie i efektywnie pozwolą takie ryzyko zmierzyć, jest bez wątpienia zaawansowanym procesem, wymagającym nie tylko wiedzy statystyczno-ekonometrycznej, ale także praktycznej, eksperckiej. Rozważając rynki finansowe, przyjęło się zakładać, że szeregi czasowe (analizowane zarówno statycz-

nie, jak i dynamicznie) posiadają rozkład normalny oraz są niezależne. Są to oczywiście utopijne założenia, które w praktyce nigdy nie zostają spełnione. Nie istnieją dane generujące idealny rozkład normalny, jak również nie istnieją takie dwa szeregi danych rzeczywistych, dla których miara zależności będzie idealnie równa zero. Dlatego też należy rozważać i analizować odstępstwa od tych założeń.

W prezentowanej pracy skoncentrowano się na opisie kształtu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej za pomocą miar skośności. Asymetria jest zjawiskiem powszechnym, istotnie wpływającym na oszacowania i interpretację większości miar statystycznych, a także na wyniki innych analiz (m.in. analizy czynnikowej czy też modeli dyskryminacyjnych). Biorąc pod uwagę rozkład symetryczny, zakłada się, że realizacje stopy zwrotu na prawo od wartości średniej są zwierciadlanym odbiciem ich realizacji w kierunku ujemnej nieskończoności. Empiryczne szeregi czasowe obserwowane na rynku wykazują odstępstwa od tego założenia. Wynika to przede wszystkim z całego systemu otaczającego rynek, ale także z bezpośrednich (często subiektywnych) działań jego uczestników. Prowadzi to do utraty efektywności rynku, a co za tym idzie, do sytuacji, kiedy pojawiają się ponadprzeciętne zyski lub straty. Termin „ponadprzeciętny” należy tu rozumieć w kontekście wartości ekstremalnych, które tym samym generują ryzyko ekstremalne. W prezentowanej pracy ryzyko takie mierzone jest za pomocą trzech miar: wartości zagrożonej (Value-at-Risk), warunkowej wartości zagrożonej w sensie wartości oczekiwanej (Expected Shortfall) oraz warunkowej wartości zagrożonej w sensie mediany (Median Shortfall). Miary te zaliczane są do miar kwantylowych, natomiast dodatkowo ES oraz MS są miarami koherentnymi. W szacowaniu tych mierników wykorzystano popularne rozkłady prawdopodobieństwa (normalny i t-Studenta), dla których wprowadzono dodatkowy parametr skośności. Analizę empiryczną przeprowadzono dla aktywów pochodzących z rynku metali szlachetnych. Dla oszacowanych dziennych logarytmicznych stóp zwrotu w zadanym okresie dopasowano odpowiednie skośne rozkłady prawdopodobieństwa, a następnie oszacowano wskaźniki skośności oraz wartości miar ryzyka. Analiza wykazała, że empiryczne rozkłady cechuje nieznaczna lewostronna asymetria, co może mieć swoje konsekwencje w pomiarze ryzyka. Niektóre miary wskazują na różnokierunkową asymetrię, co tłumaczone jest występowaniem obserwacji klasy outliers.

Komentując wyniki pomiaru ryzyka za pomocą rozkładów skośnych, zaobserwowano, że lepsze dopasowanie do danych empirycznych wykazuje skośny rozkład t-Studenta. Rozkład skośny normalny częściej niedoszacowuje miarę ryzyka bez względu na kwantyl, natomiast dla rozkładu t-Studenta zaobserwowano przeszacowania rzeczywistych wartości miar przede wszystkim dla kwantyli ekstremalnych (rzędu odpowiednio 0,01 lub 0,99).

W ostatniej części analizy, będącej jednocześnie początkiem dalszych badań, wykazano, że występuje pewien związek pomiędzy parametrem wprowadzającym skośność do rozkładu symetrycznego a miarą ryzyka szacowaną w oparciu o ten rozkład. Jest to związek krzywoliniowy, który po odpowiednich przekształceniach można opisać za pomocą funkcji wykładniczej. Jednakże, jak wspomniano przy komentowaniu tych wyników, będzie to przedmiotem dalszych badań autora.

Literatura

- Aczel A.D. (2000), *Statystyka w zarządzaniu*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. (1999), *Coherent Measures of Risk*, "Mathematical Finance", No. 9(3), s. 203-228.
- Bowley A.L. (1920), *Elements of Statistics*, Charles Scribner's Sons, New York.
- Brys G., Hubert M., Struyf A. (2004), *A Robust Measure of Skewness*, "Journal of Computational and Graphical Statistics", No. 13(4), s. 996-1017.
- Hinkley D.V. (1975), *On Power Transformation to Symmetry*, "Biometrika", No. 62, s. 101-111.
- Jagielnicki A. (2011), *Inwestycje alternatywne. Pierwsze kroki na rynku pozagiełdowym*, Wydawnictwo Helion, Gliwice.
- Kosiorowski D. (2007), *O kwantylowym funkcjonalu asymetrii rozkładu wektora losowego w badaniu szeregów finansowych* [w:] Z. Zieliński (red.), *Dynamiczne modele ekonometryczne*, Wydawnictwo UMK w Toruniu, Toruń, s. 129-136.
- Kou S., Peng X. (2014), *Expected Shortfall or Median Shortfall*, "Journal of Financial Engineering", No. 1(1), s. 1-6.
- Piontek K. (2005), *Modelowanie własności szeregów stóp zwrotu – skośność rozkładów*, „Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu. Ekonometria”, nr 15(1096), s. 297-308.
- Piontek K. (2007), *Pomiar i testowanie skośności rozkładów stóp zwrotu instrumentów finansowych*, „Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu. Taksonomia”, nr 14(1096), s. 122-130.
- [www 1] <http://rynekalternatywny.pl/2016/10/zlota-czolowka-12-najwiekszych-producentow-zlota/> (dostęp: 05.06.2017).
- [www 2] <http://www.silverinstitute.org/site/supply-demand/silver-production/> (dostęp: 05.06.2017).
- [www 3] <https://www.platinuminvestment.com/supply-and-demand/platinum-quarterly> (dostęp: 05.06.2017).
- [www 4] <http://investingnews.com/daily/resource-investing/precious-metals-investing/palladium-investing/top-platinum-palladium-producing-countries/> (dostęp: 05.06.2017).

THE IMPACT OF ASYMMETRY OF DISTRIBUTION ON THE ESTIMATION OF QUANTILE RISK MEASURES

Summary: The anomalies observed in financial time series require the application of appropriate risk measures. Most of the theoretical distributions used for modelling that type of data is symmetric and do not cover the observations in analyzed dataset called outliers. Such observations may produce some disturbances in classical statistics. In this paper, we focus on the impact of asymmetry on the estimation of some selected quantile risk measures: VaR, Expected Shortfall and Median Shortfall. The analysis was performed using data from precious metals market and, theoretically, using normal and t-Student distribution with additional skewness parameter.

Keywords: extreme risk, precious metals, Expected Shortfall, Median Shortfall, skewed distributions.