



Nazwa instytucji

Książnica Cieszyńska

Tytuł jednostki/Tytuł publikacji

Geometria dla polskich szkół wydziałowych. Cz. 2, (Dla klasy II) / opracował Budnik Rudolf.

Liczba stron oryginału

120

Liczba plików skanów

120

Liczba plików publikacji

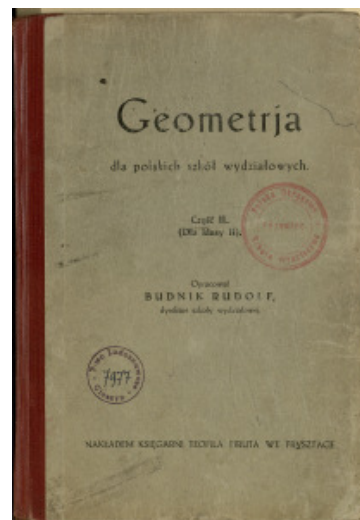
121

Sygnatura/numer zespołu **C II 004978**

Data wydania oryginału **[1930]**

Zdigitalizowano w ramach projektu pt.

**Udostępnienie cieszyńskiego dziedzictwa
piśmienniczego on-line**



Fundusze Europejskie
Program Regionalny



Śląskie.

Unia Europejska
Europejski Fundusz
Rozwoju Regionalnego



Geometria

dla polskich szkół wydziałowych.

Część II.
(Dla klasy II).



Opracował
BUDNIK RUDOLF,
dyrektor szkoły wydziałowej.



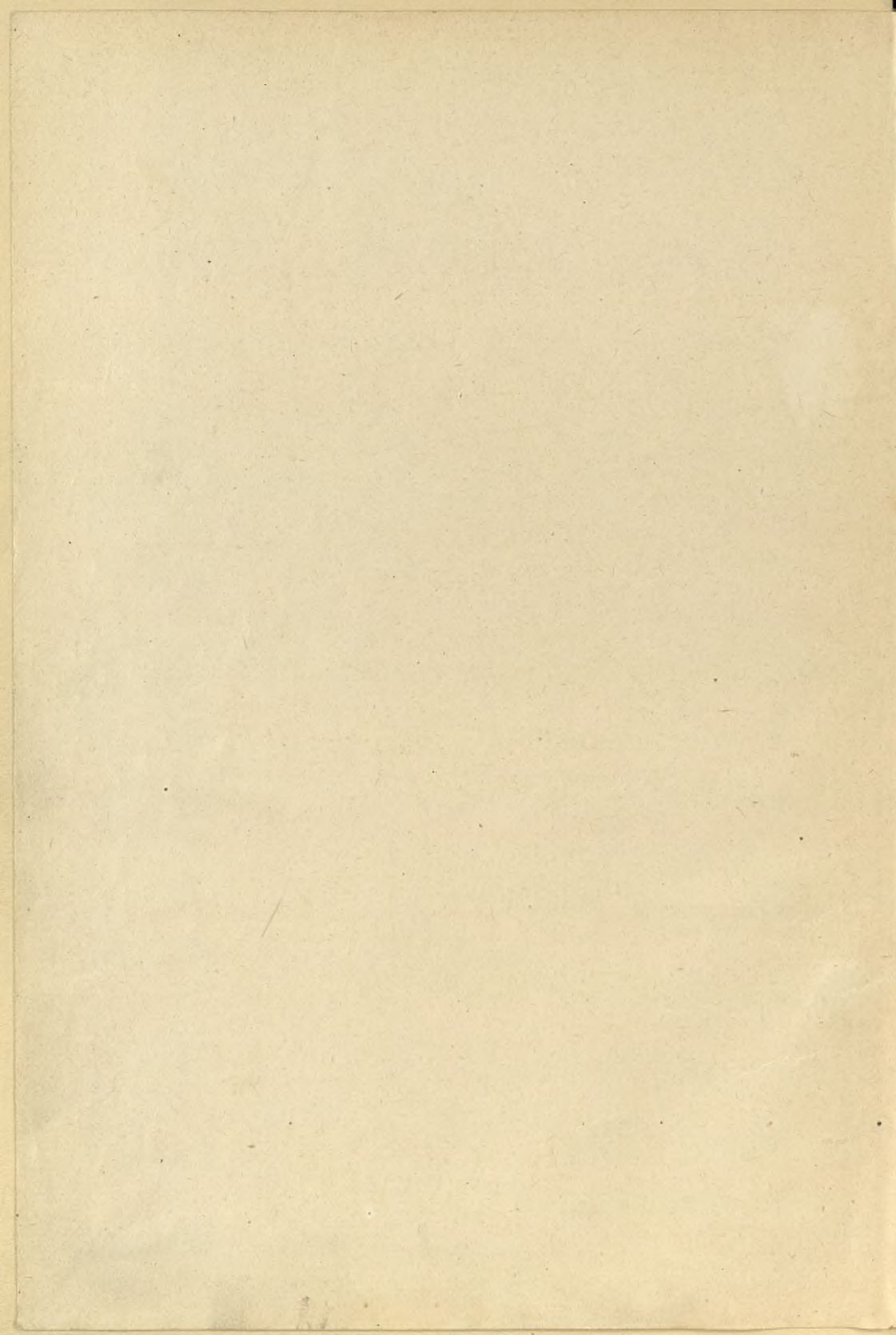
NAKŁADEM KSIĘGARNI TEOFIŁA FIRUTA WE FRYSZTACIE.



Ma. W



$$100.00 : 100 = 100 \frac{8}{63}$$



Geometria

dla polskich szkół wydziałowych.

Część II.
(Dla klasy II).

Opracował
BUDNIK RUDOLF,
dyrektor szkoły wydziałowej.

Rozporządzeniem Ministerstwa Szkoln. i Oświaty Narod. w Pradze z dnia 9 lipca 1930,
Liczba 96207/30-I dopuszczona do użytku w polskich szkołach wydziałowych.

Cena: 16 Kč.

NAKŁADEM KSIĘGARNI TEOFIŁA FIRUTA WE FRYSZTACIE.

514 (075.3)5L

C 004978 II

C.034978 II



Część II.
(Dla klasy II).

Opisowni
BUDNIK RUDOLF
dyktor szkoły wydziałowej

Wydawnictwo Literackie, Kraków, ul. Św. Anny 1, tel. 1000.
Książki wysyłane pocztą w oplocie ochronnym.

Cena 10 Ks.

WYDAWNICTWO KSIĘGARNI TEORII BRUTA W PRZYSTACI

I.

Obwody figur płaskich.

§ 1.

Obwód trójkąta, czworoboku i wieloboku.

Powtórzcie, coście się uczyli w kl. I. o płaszczyznach! Jaką płaszczyznę zowiemy trójkątem? Wyliczcie rodzaje trójkątów i narysujcie je! Co wiecie o bokach poszczególnych trójkątów? Wymieńcie czworoboki i narysujcie je! Wykreście umiarowy 6bok, umiarowy 5bok, umiarowy 7bok, umiarowy 8bok: (Zobacz Geom. cz. I. str. 84 i 85). Narysujcie nieumiarowy 5bok!

Zadanie: Boisko prostokątne 70 m długie, 39 m szerokie, ma być ogrodzone drutem kolczastym; ile m drutu trzeba zamówić?

Jaki kształt ma boisko? Ile m wynosi 1-szy bok? 2-gi bok? 3-ci? 4-ty? Ile m drutu trzeba na 2 dłuższe boki? na 2 krótsze boki? ile na wszystkie boki razem?

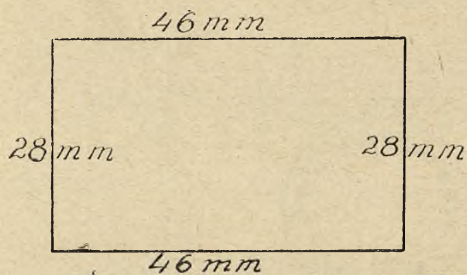
Jak obliczymy, ile m drutu trzeba zamówić?

Jeżeli zmierzmy długość wszystkich boków razem, natenczas mówimy, że obliczamy obwód.

Suma boków zowie się obwodem.

Zadanie: Wykreście dowolny prostokąt, zmierzcie wszystkie boki w mm i obliczcie obwód!

Np.:

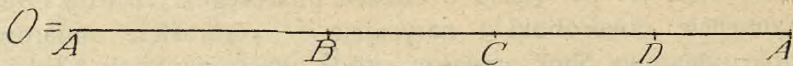
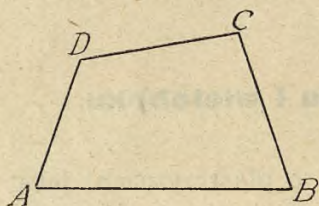


Ryc. 1.

$$\begin{aligned} O &= 46\text{ mm} + 28\text{ mm} \\ &+ 46\text{ mm} + 28\text{ mm} \\ &= 148\text{ mm}. \end{aligned}$$

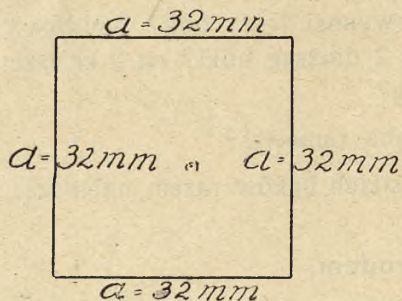
Obwód możemy wyznaczyć rysunkiem albo liczbą:

a) rysunkiem:



Ryc. 2.

b) liczbą:

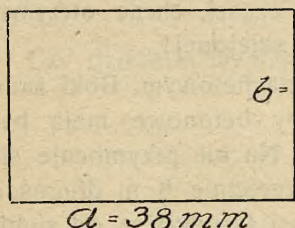


Ryc. 3.

$$O = a + a + a + a = 4 \cdot a.$$

$$\begin{aligned} O &= 32\text{ mm} + 32\text{ mm} + \\ &32\text{ mm} + 32\text{ mm} = 4 \cdot 32\text{ mm}. \end{aligned}$$

Zadanie: Obliczyć obwód prostokąta, 38 mm długiego, 25 mm szerokiego!



$$\begin{aligned} O &= (a + b) + (a + b) \\ O &= (a + b) \cdot 2 \\ O &= (38 \text{ mm} + 25 \text{ mm}) \cdot 2 \end{aligned}$$

Ryc. 4.

Ponieważ po 2 boki prostokąta są równe, obliczymy najpierw pół obwodu ($38 \text{ mm} + 25 \text{ mm}$), a następnie cały obwód ($38 \text{ mm} + 25 \text{ mm}$) : 2.

Jak obliczymy obwód trójkąta równobocznego? równoramiennego? prostokątnego równoramiennego? obwód kwadratu? prostokąta? rombu? romboidu? deltoidu?

Zadania:

1. Wykreślić dowolny prostokąt i wyznaczyć jego obwód:
a) rysunkiem; b) liczbą!

2. Ogród prostokątny 27·6 m długi, 22·4 m szeroki, ma być ogrodzony płotem; jak długi jest cały płot?

3. Obliczyć obwód trójkąta, którego boki wynoszą: 48, 75, 99 m!

4. Przeciwpromokątnia trójkąta prostokątnego równoramiennego wynosi 5·65 cm, przyprostokątnia 4 cm; obliczyć obwód!

5. Bok kwadratu wynosi $38\frac{1}{2}$ dm; obliczyć O !

6. Bok rombu ma $\frac{3}{5}$ dm; oblicz obwód!

7. Równoległe boki trapezu równoramiennego wynoszą 16 cm i 8 cm, ramię 7 cm; obliczyć O !

8. Boki romboidu wynoszą 3·75 m, 4·25 m; obliczyć O !

9. Boki deltoidu wynoszą 5·1 m, 3 m; obliczyć O !

10. Boki trapezoidu wynoszą: $1\frac{1}{2}$ dm, $2\frac{2}{3}$ dm, $3\frac{3}{4}$ dm, $4\frac{3}{4}$ dm; ile wynosi O !

11. Obliczyć O 5boku umiarowego o boku 5 cm 3 mm!

12. Obliczyć O 6boku umiarowego, wpisanego w koło o promieniu $3\frac{1}{2}$ cm!

13. Stolarz przerznął deskę 3 m 2 dm długą, 25 cm szeroką, przez środek wzdłuż i skleił obydwie części, chcąc otrzymać deskę 2 razy dłuższą; obliczyć O deski skleionej!

14. Sad ma się ogrodzić płotem sztachetowym. Boki sadu wynoszą 65 m, 78 m, 40 m, 33 m. Słupy betonowe mają być postawione w odległości 6 m od siebie. Na nie przymocuje się u góry i u dołu łąty. Jedna łąta ma przeciętnie 8 m długości. Na łąty przybije się sztachety, których osi (środki) są od siebie oddalone na 18 cm. Ile słupów betonowych trzeba zamówić w fabryce? ile łąt, a ile sztachet musi się zakupić w Zarządzie lasów?

15. Ile kosztują ramki złożone do zwierciadła 43 cm długiego, 32 cm szerokiego, jeżeli 1 m liczy się po 85 Kč?

16. O prostokąta wynosi $O = 120$ mm, długość $a = 45$ mm; obliczyć jego szerokość (b)!

(Wnioskujemy tak:

$$a + b = \frac{O}{2} \quad \text{długość} + \text{szerokość jest pół obwodu;}$$

$$b = \frac{O}{2} - a \quad \text{szerokość} = \text{pół } O \text{ mniej długość.}$$

17. O kwadratu = 13 m 4 cm; ile wynosi bok?

18. O rombu = 17 m; ile wynosi bok?

19. O dejtoidu = 78 cm, jeden bok $17\frac{1}{3}$ cm; ile wynosi drugi bok?

20. O 6boku umiarowego = 7.74 m; ile wynosi bok?

§ 2.

Obwód koła.

Powtórzcie, co pamiętacie o kole z klasy I i o prostych w kole!

Narysujcie na tekturze koło o promieniu $r = 1$ dm. Wytnijcie je i zmierzcie zapomocą nitki obwód! Następnie zmierzcie

średnicę $2r$! Podzielcie obwód przez średnicę*), a przekonacie się, że otrzymacie liczbę $3\cdot14$.

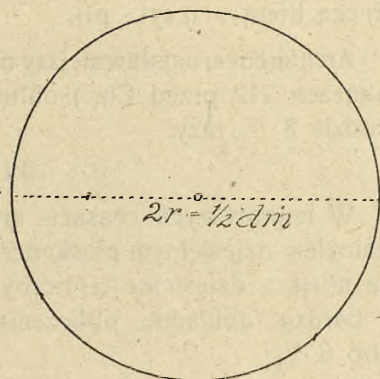
Zróbcie to samo z kołem o promieniu $r = \frac{1}{2}$ dm, $\frac{1}{4}$ dm!

Czy dzielenie wyjdzie bez reszty?

$$O = 1\cdot57 \text{ dm}$$

$$1\cdot57 \text{ dm} : 0\cdot5 \text{ dm} = 3\cdot14$$

$$O : 2r = 3\cdot14$$

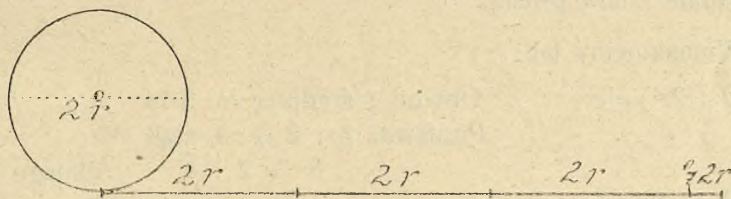


Ryc. 5.

Czem jest podstawa walca?

Postawcie walec na stole, owińcie dolną krawędź nicią a resztę nici odetnijcie! Tą samą nicią zmierzcie następnie średnicę podstawy! Przekonacie się, że średnica mieści się w obwodzie 3 razy, a zostanie wam jeszcze kawałek nici równy $\frac{1}{7}$ części średnicy.

$$O : 2r = 3 \frac{1}{7}.$$



Ryc. 6.

Gdy w jakimkolwiek kole podzielimy obwód przez średnicę, otrzymamy zawsze liczbę $3\cdot14$ czyli $3 \frac{1}{7}$. Widzimy zatem, że

*) Mówimy krótko: „podzielić obwód przez średnicę”; właściwie powinniśmy mówić: „podzielić liczbę wymiarową obwodu przez liczbę wymiarową średnicy”.

stosunek obwodu koła do jego średnicy jest liczbą stałą. Ta liczba nie jest jednak dokładną, ponieważ dzielenie jest nieskończone. Wyszukał ją uczony holenderski Ludolf van Ceulen (czyt.: wan Kejlen) († 1.600 po Chr.) i obliczył po długoletniej pracy na 35 miejsc dziesiętnych, lecz jeszcze nie doliczył się końca. Stąd liczbę tę zwiemy liczbą Ludolfa czyli Ludolfiną i oznaczamy grecką literą π (czyt.: pi).

Archimedes, najślawniejszy matematyk w starożytności, († w Syrakuzach 212 przed Chr.) obliczył, że średnica mieści się w obwodzie $3 \frac{1}{7}$ razy.

$$\pi = 3 \cdot 14 = 3 \frac{1}{7}.$$

W najnowszych czasach stwierdzono, że liczba Ludolfa jest ułamkiem dziesiętnym nieskończonym i niewymiernym. Początkowe miejsca dziesiętne tej liczby są $3 \cdot 14159$. Tam, gdzie nie chodzi o bardzo dokładne obliczenia, wystarczy przyjąć $\pi = 3 \cdot 14$ albo $3 \frac{1}{7}$.

W zadaniach zwykle podaje się, na ile miejsc dziesiętnych należy brać π , np. $\pi = 3 \cdot 14$, albo $\pi = 3 \cdot 14159$, albo $\pi = 3 \frac{1}{7}$.

Z powyższych doświadczeń widzimy, że długość obwodu koła, który jest linią zamkniętą krzywą, jest trudno zmierzyć. Nie da się tego pomiaru skutecznie zwykłą miarą prostą, lecz musimy mieć miarę taśmową, przyczem pomiar jest niedokładny i niewygodny. Dlatego wyszukamy formułkę, zapomocą której obwód obliczymy rachunkowo ze średnicy, którą łatwo zmierzyć dokładnie miarą prostą.

Wnioskujemy tak:

$$O : 2r = \pi$$

$$\text{Obwód} : \text{średnica} = 3 \cdot 14$$

$$\text{Ponieważ } 8 : 2 = 4, \text{ stąd}$$

$$8 = 2 \cdot 4 \quad \text{dlatego też}$$

$$O = 2r \cdot \pi.$$

Obwód koła obliczymy, mnożąc średnicę przez π .

Przykład: Obliczyć O koła o promieniu $r = 3 \cdot 5$ m ($\pi = 3 \cdot 14$)!

$$O = 2r\pi$$

$$O = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 14 = ?$$

Jak obliczymy obwód koła, mając dany promień?

Zadania:

1. Obliczyć obwód koła o średnicy 17.5 m ($\pi = 3.14$)!
2. Obliczyć obwód korony, 50halerzówki, 20halerzówki (średnice: 25, 22, 20 mm)! ($\pi = 3.14$).

3. Obliczyć O koła, o promieniu $r = \frac{1}{\pi}$! *2 mm*

4. Średnica koła u wozu = 1.15 m; ile m ujedzie wóz, jeżeli koło obróci się 320 razy? ($\pi = 3.14$). *6.68 m*

(Gdy koło obróci się 1 raz, zrobi drogę równą swemu obwodowi. Jak znajdziecie drogę, którą koło zrobi po 320 obrotach?).



1 obrót = $2\pi r$

2 obrót

itd.

5. Przednie koło u wozu ma średnicę $1\frac{2}{5}$ m, tylne $1\frac{3}{4}$ m; ile razy obróci się jedno i drugie na drodze 6.6 km? ($\pi = 3\frac{1}{7}$).

(Na całej drodze koło obróci się tyle razy, ile razy jego O mieści się w całej drodze).

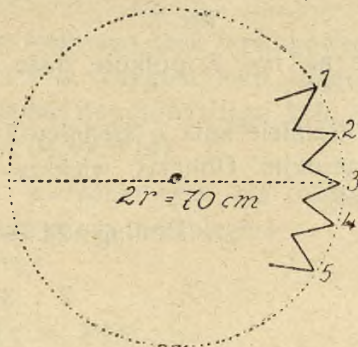
6. Średnica rozprawowego koła lokomot. pośpiesznej = 210 cm.

a) Ile m ujedzie lokomotywa, jeżeli koło obróci się 5 razy?

b) Ile razy obróci się na torze 1 km?

c) Ile razy obróci się na przestrzeni Bogumin — Jabłonków (52 km)?

d) Ile razy obróci się w sekundzie, jeżeli pociąg jedzie z szybkością 1 km za minutę? ($\pi = 3.14$).



7. Średnica piły (cyrkularki) = 70 cm; jak daleko są od siebie osi zębów, których piła ma na obwodzie 142? ($\pi = 3.14$).

(Odległość od 1 do 2, razy ilość zębów $= 2r\pi$. Naodwrot: odległość 1 do 2 $= 2r\pi$: ilość zębów).

8. Przednie koła powozu mają 84 cm średnicy, tylne 112 cm; ile razy obróci się tylne koło, gdy przednie wykona 1.000 obrotów? ($\pi = 3.14$).

(Obydwa koła zrobią tę samą drogę. Obliczymy ją z obwodu i ilości obrotów koła przedniego. Znając zaś drogę, wyszukamy ilość obrotów na niej koła tylnego).

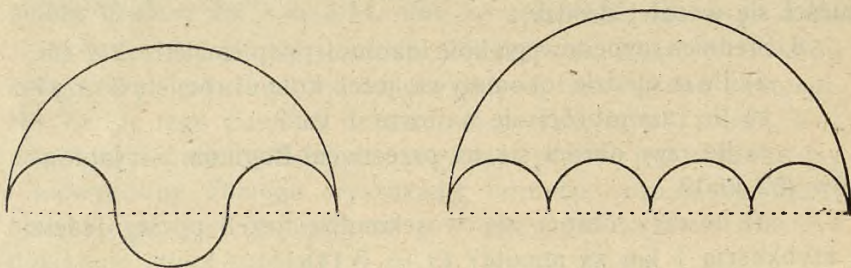
9. Chłopiec obliczył, że karuzel obróci się 7 razy na minutę. Ile wynosi szybkość w sekundzie punktu na obwodzie karuzeli, jeżeli jego promień wynosi 7.5 m? ($\pi = 3.14$).

10. Jak głęboka jest studnia, jeżeli sznur sięgający aż na dno, owinie się 11 razy na walcu o średnicy 25 cm? ($\pi = 3.14$).

11. W kwadrat o boku 49 mm jest wpisane koło. Obliczyć, o ile jest obwód kwadratu większy od obwodu koła? ($\pi = 3.14$).

12. Na umiarowym 6boku o boku 14 cm jest opisane koło. O ile jest obwód koła większy od obwodu 6boku? ($\pi = 3.14$).

13.



Ryc. 7.

Co jest dłuższe na ryc. 7, półkoło duże, czy suma małych półkoli wewnątrz?

14 Murawa w kształcie koła o średnicy 21 m jest otoczona chodnikiem, 2 m szerokim. Obliczyć większy i mniejszy obwód chodnika ($\pi = 3.14$).

Podług: $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$.

$$2 \cdot 3 = \frac{24}{4}$$

$$3 = \frac{24}{2 \cdot 4}$$

wyszukamy: $O = 2r\pi$

$$2r = \frac{O}{\pi}$$

$$r = \frac{O}{2\pi}$$

Średnicę koła wyszukamy, dzieląc O przez π .

Promień koła wyszukamy, dzieląc obwód przez 2π .

Przykład: Obliczyć $2r$, mając dany $O = 1\frac{1}{21}$ dm! ($\pi = 3\frac{1}{7}$).

$$2r = O : \pi.$$

$$2r = 1\frac{1}{21} \text{ dm} : 3\frac{1}{7} = \frac{22}{21} \text{ dm} : \frac{22}{7} = \frac{22}{21} \text{ dm} \cdot \frac{7}{22} = \frac{7}{21} \text{ dm} = \frac{1}{3} \text{ dm}.$$

15. O koła = 26·376 m; obliczyć $2r$! ($\pi = 3\cdot14$).

16. O koła = 10 dm 9 cm 9 mm; obliczyć r ! ($\pi = 3\cdot14$).

17. Obwód pieca okrągłego = 2·198 m; obliczyć odległość środka od obwodu! ($\pi = 3\cdot14$).

18. Jak szeroki musimy zrobić kwietnik kolisty, jeżeli na jego obwodzie chcemy zasadzić 40 kwiatów, oddalonych od siebie na 2 dm? ($\pi = 3\cdot14$).

19. Metr jest 10,000.000 częścią ćwierci południka ziemskiego; obliczyć oś ziemską (można obliczyć tylko w przybliżeniu, dlaczego?)! ($\pi = 3\cdot14$).

20. Na obwodzie kolistego toru wyścigowego są drzewa, oddalone od siebie na 6 m. Długość łuku między 2-ma drzewami odpowiada 1° (jednemu stopniowi) tego koła. Obliczyć średnicę placu wyścigowego! ($\pi = 3\cdot14$).

21. Na zegarku kieszonkowym ma wskazówka minutowa 19 mm długości. Jaką drogę przebiegnie:

a) za godzinę?

b) za dobę?

c) za rok? ($\pi = 3\cdot14$).

22. Jak długi musi być łańcuch, który ma być 20 razy owinięty na wałku o średnicy 32 cm? ($\pi = 3\cdot14$).

23. Równik ziemski ma 5.400 mil geograf. czyli 4.007 μ m.
Obliczyć jego średnicę:

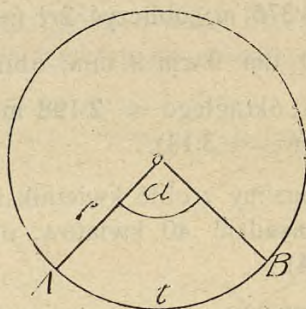
- a) w milach geograf.;
b) w myrjametrach. ($\pi = 3.14$).

24. Jak wielka musi być średnica okrągłego stołu na 8 osób,
jeżeli liczymy dla każdej osoby 9.42 dm obwodu? ($\pi = 3.14$).

§ 3.

Długość łuku kołowego.

Zadanie: Obliczyć długość łuku AB (ryc. 8), odpowiadającego
kątowni środkowemu a !



Ryc. 8.

Wnioskujemy tak:

Kątowni środkow. pełnemu 360° odpowiada cały obwód $2r\pi$

" " " 1° " 360-ta część obwodu, t.j.

$$\frac{2r\pi}{360} = \frac{r\pi}{180}$$

" " " a " łuk a razy większy niż 1° , t.j.

$$\frac{r\pi}{180} \cdot a = \frac{r\pi a}{180}$$

A zatem:

$$l = \frac{r\pi a}{180}$$

Długość łuku obliczymy, mnożąc promień przez π
i przez kąt środkowy, a dzieląc iloczyn przez 180.

Przykład: Obliczyć długość łuku koła o promieniu 36 cm i kącie środkowym 25° .

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180} = \frac{36 \cdot 3,14 \cdot 25}{180} = ?$$

Zadania:

1. Obliczyć długość łuku: a) 54° b) 90° c) 60° d) 44° na obwodzie koła, którego $2r = 154$ mm!

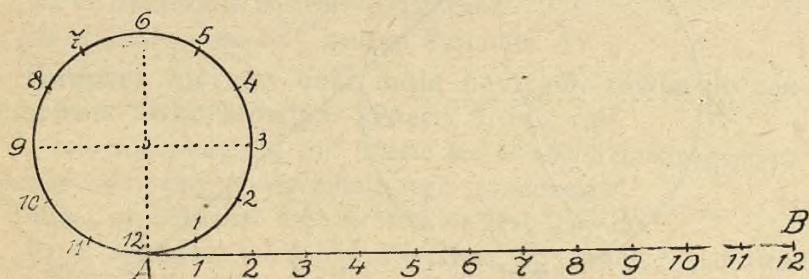
2. Promień koła $= 7$ cm; jak długi jest łuk, którego cięciwa wynosi też 7 cm? ($\pi = 3,14$).

§ 4.

Rektyfikacja (rozwiniecie) obwodu koła.

Rektyfikacja jest to wyznaczenie odcinka równego obwodowi koła.

1. Najprostszy sposób rektyfikacji przedstawia ryc. 9.



Ryc. 9.

Koło dzielimy na znaczną ilość równych części (np. 12, 24 itd.), które cyrklem przenosimy na prostą, np. AB . Sposób ten nie jest dokładny, gdyż łuki nie są równe cięciwom.

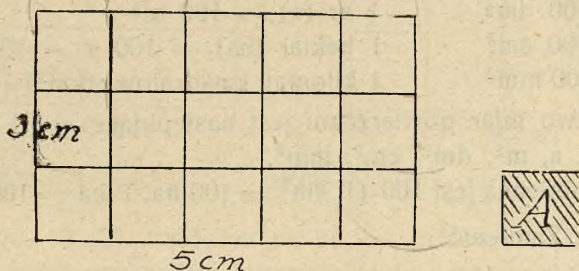
II.

Powierzchnie figur płaskich.

§ 5.

Miary powierzchni.

Wykreślcie prostokąt o podstawie 5 cm, wysokości 3 cm. Podzielcie wszystkie boki na cm i połączcie przeciwległe punkty podziału (ryc. 12)!



Ryc. 12.

Na co rozpadnie się cały prostokąt?

Ile wynosi każdy bok małego kwadratu A?

Kwadrat, którego boki mają po 1 cm, zowie się centymetrem kwadratowym. Piszemy to tak: cm^2 .

Jeżeli policzymy, ile cm^2 mieści się w całym prostokącie, natenczas obliczymy powierzchnię tego prostokąta?

Miarą powierzchni tego prostokąta jest tedy cm^2 .

Czem mierzymy wielkie powierzchnie np. grunta? państwa? kraje? Czemu małe?

Co to jest m^2 ? dm^2 ? cm^2 ? mm^2 ? km^2 ?

Widzimy zatem, iż powierzchnie mierzymy znowu powierzchniami.

Powierzchnią figury płaskiej zowiemy pole, zamknięte jej obwodem.

Co może być jednostką pomiaru powierzchni?

Jak linie mierzymy linjami, kąty kątami, naczynia mniejszym naczyniem itd., tak i powierzchnię mierzymy mniejszą powierzchnią.

Obliczyć powierzchnię płaszczyzny znaczy przekonać się, ile razy mniejsza powierzchnia jako jednostka mieści się w danej powierzchni.

Zadanie: Wykreślić dm^2 i podzielić go na cm^2 !

Ile cm^2 ma 1 dm^2 ?

Wnioskujemy tak:

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$$

$$1 \text{ dm}^2 = 10 \text{ cm}^2 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2.$$

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ cm}^2 \cdot 100 = 10.000 \text{ cm}^2.$$

i t. d.

Pamiętajcie:

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$$

$$1 \text{ ar (a)} = 100 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ hektar (ha)} = 100 \text{ a} = 10.000 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ kilometr kwadratowy (km}^2\text{)} = 100 \text{ ha.}$$

Następstwo miar powierzchni jest następujące:

km^2 , ha, a, m^2 , dm^2 , cm^2 , mm^2 .

Liczba zamienna jest 100 ($1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha}$, $1 \text{ ha} = 100 \text{ a}$ itd.).

Zadania: Zamienić:

1. 26 a na m^2 !

2. 8 km^2 26 ha 25 a na km^2 ; na a!

3. 28 m^2 25 dm^2 16 cm^2 na m^2 ; na cm^2 !

4. $28 \cdot 164502 \text{ m}^2 = \dots \text{ m}^2, \dots \text{ dm}^2 \dots \text{ cm}^2 \dots \text{ mm}^2.$

5. $5635 \cdot 832 \text{ km}^2 = ?$

6. Zamienić na wyższe miary: 1 cm^2 , 1 dm^2 , 1 m^2 , 1 a , 1 ha !

7. Zamienić na m^2 : 26 dm^2 , 328 dm^2 !

8. Zamienić na dm^2 : 5 cm^2 , 64 cm^2 , 6.810 cm^2 !

9. Zamienić na cm^2 : 6 mm^2 , 75 mm^2 , 901 mm^2 !

10. $5\frac{1}{2} \text{ m}^2 = ? \text{ dm}^2 ?$

11. $23\frac{3}{4} \text{ dm}^2 = ? \text{ cm}^2 ?$

Wielkość gruntów podaje się dziś często jeszcze w starych miarach.

$$1 \text{ morg} = 57 \cdot 55 \text{ a.}$$

$$1 \text{ korzec} = 19 \cdot 18 \text{ a.}$$

$$1 \text{ sążeń}^2 = 3.597 \text{ m}^2.$$

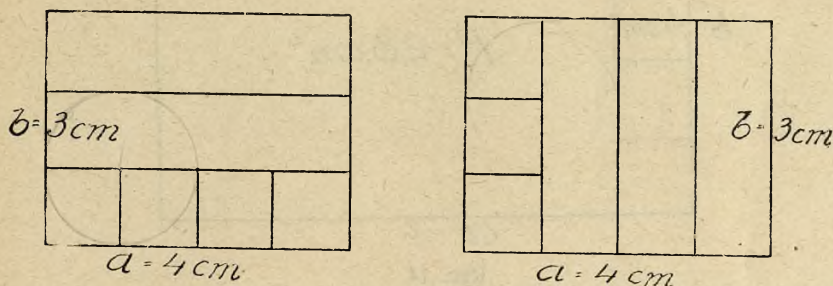
§ 6.

Prostokąt.

Powtórzcie, co pamiętacie z kl. I o bokach, kątach podstawie, wysokości i przekątniach prostokąta!

Zadanie: Obliczyć powierzchnię prostokąta o podstawie 4 cm. wysokości 3 cm!

Mamy wyszukać, ile cm^2 mieści się w tym prostokącie.



Ryc. 13.

Z ryc. 13 jest widocznym, że na podstawie zmieszczą się 4 cm^2 ; takich pasków po 4 cm^2 zmieści się w całym prostokącie 3; zatem wszystkich cm^2 zmieści się w prostokącie $4 \text{ cm}^2 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$.

To samo otrzymamy, gdy na wysokości wystawimy 3 cm^2 . Otrzymamy wtedy wzdłuż podstawy 4 paski po 3 cm^2 . W całym prostokącie zmieści się tedy $3 \text{ cm}^2 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2$.

Powierzchnię prostokąta obliczamy, mnożąc podstawę przez wysokość (albo wysokość przez podstawę). Przez słowo „podstawa” i „wysokość” rozumiemy liczby, wyrażające długość podstawy i wysokości).

$$P = a \cdot b$$

$$P = b \cdot a$$

Co oznacza a ? Co oznacza b ?

Należy pamiętać o tem, że podstawa i wysokość musi być podana w tej samej mierze. Dlaczego?

Przykład: Obliczyć powierzchnię prostokąta, którego podstawa wynosi 0.1 m, a wysokość 0.01 m!

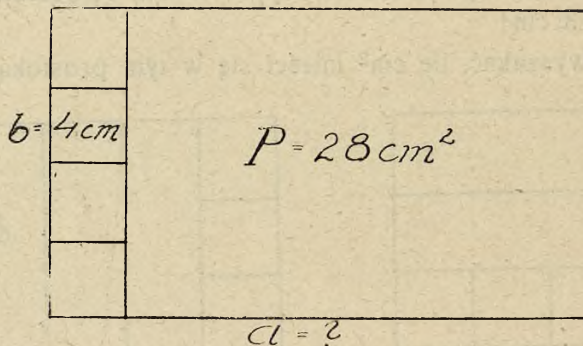
$$P = a \cdot b$$

$$P = 0.1 \text{ m}^2 \cdot 0.01 = 0.001 \text{ m}^2 = 10 \text{ cm}^2.$$

Zadanie: Obliczyć podstawę prostokąta, którego $P = 28 \text{ cm}^2$, wysokość 4 cm !

Wnioskujemy tak:

Cała powierzchnia $= 28 \text{ cm}^2$.



Ryc. 14.

Na wysokości możemy wystawić 1 pasek, mający 4 cm^2 . (Patrz ryc. 14). Musimy tedy obliczyć, ile pasków po 4 cm^2 mieści się w całej powierzchni, t. zn. 28 cm^2 , co wyszukamy w ten sposób, jeżeli 28 cm^2 podzielimy przez 4 cm^2 .

$$28 \text{ cm}^2 : 4 \text{ cm}^2 = 7.$$

Widzimy tedy, że w całym prostokącie zmieści się 7 pasków. Podstawa wynosi zatem 7 cm .

$$a = \frac{P}{b}$$

Podobnie znajdziemy:

$$b = \frac{P}{a}$$

Podstawę prostokąta znajdziemy, dzieląc powierzchnię przez wysokość.

Wysokość prostokąta znajdziemy, dzieląc powierzchnię przez podstawę.

Wymiary prostokąta (podstawę i wysokość) podaje się w przemśle krótko:

np.: drzwi 96/220 cm, znaczy; wysokość 220, szerokość 96 cm.

Zadania:

1. Najpierw odgadnijcie, następnie zmierzcie i obliczcie powierzchnię różnych prostokątów w izbie szkolnej (tablica, okno, drzwi, podłoga etc.)!

2. Obliczyć powierzchnię karty korespondencyjnej 90/140 mm!

3. Obliczyć P arkusza papieru 340/420 mm!

4. Rozmiary banknotów czechosłowackich są: 10 Kč = 85/140; 20 Kč = 75/150; 50 Kč = 90/180; 100 Kč = 85/170; 1000 Kč = 100/190. Obliczyć powierzchnie!

5. Park A. Sikory w Czes. Cieszylinie ma rozmiary 220/88 m; obliczyć jego P !

6. Rolnik zmierzył sobie sam pole. Krocząc po miedzach, naliczył 180* długości, a 112* szerokości. Każdych 10* jego miało $6\frac{1}{2}$ m. Ile a miało pole?

7. Gospodarz ma 42 a pola, oszacowanego na 50400.— Kč. Z tego musi odstąpić na nową drogę pas 110 m długi, $1\frac{1}{2}$ m szeroki. Ile Kč wynagrodzenia ma gospodarz żądać za drogę?

8. Dwa prostokąty mają równe obwody. Pierwszy ma rozmiary 14/56 m, drugi ma podstawę 48 m. Obliczcie P obu prostokątów i porównajcie je!

9. Sala ma rozmiary 11/16 m. Ile osób zmieści się w niej, jeżeli liczymy na osobę 0·8 m²?

10. Krużganek 35 m długi, $2\frac{1}{2}$ szeroki, ma być wyłożony płytami $\frac{1}{3}$ m długimi i $\frac{1}{4}$ m szerokimi; ile płyt potrzeba?

11. Rola ma 125 m długości, 48 m szerokości; ile hl pszenicy potrzeba na zasiew, jeżeli na 1 ha wyjdzie 2·5 hl?

12. Parcela pod budowę ma rozmiary 20·5/36 m. Ile kosztuje, jeżeli się liczy 1 m² po 13·5 Kč?

13. Sala szkolna ma mieć 70 m²; ile będzie wynosiła jej szerokość, jeżeli ma być długa 8 m?

14. Pole prostokątne, 19·5 m szerokie, mamy rozdzielić na 2 części prostopadłe do długości tak, aby 1 część wynosiła 462·15 m². Jak długa będzie ta część?

Powtórzcie, jak się oblicza obwód prostokąta? Jak wyszukamy podstawę, znając obwód? Jak wysokość, znając obwód?

15. Ile kosztuje betonowy parkan naokoło boiska o rozmiarach 142,165 m, jeżeli 1 m² betonu liczy się po 65,6 Kč, a 2 wejścia są po 6 m szerokie?

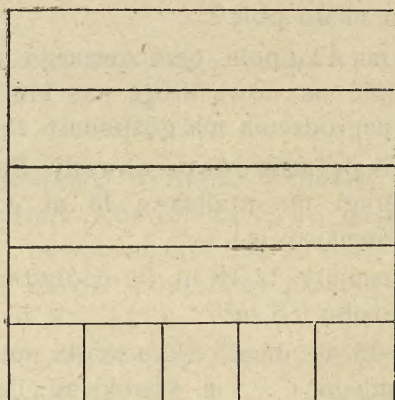
16. Płot naokoło ogrodu ma 1120 sztachet, oddalonych od siebie 22 cm. Obliczyć długość tego ogrodu, jeżeli szerokość wynosi 33 m!

§ 7.

Kwadrat.

Powtórzcie z klasy I o bokach, kątach i przekątniach kwadratu!

Zadanie: Obliczyć powierzchnię kwadratu, którego bok = 5 cm.



$$Cl = 5 cm$$

Ryc. 15.

Ile cm² zmieści się na podstawie? Ile pasków po 5 cm² zmieści się w całym kwadracie? Ile cm² zmieści się w całym kwadracie?

Zróbcie to samo w kwadracie o boku 6 cm!

Widzimy, że powierzchnię kwadratu obliczymy podobnie jak powierzchnię prostokąta, t. zn. mnożymy podstawę przez wysokość.

W kwadracie długość równa się szerokości, mnożymy przeto liczbę, wyrażającą długość jednego boku, przez siebie. Inaczej mówimy, że podnosimy jeden bok do kwadratu, czyli do drugiej potęgi.

$$P = a \cdot a = a^2.$$

Powierzchnię kwadratu oblicza się, podnosząc jeden bok do drugiej potęgi.

Przykład: Obliczyć powierzchnię (P) kwadratu o boku: $a = 7 \text{ cm}$!

$$P = a^2$$

$$P = 7^2 = 49 \text{ cm}^2.$$

Co znaczy podnieść liczbę do kwadratu, czyli do 2-giej potęgi?

Zadanie: Obliczyć bok kwadratu o $P = 64 \text{ cm}^2$!

Używamy tu działania odwrotnego do potęgowania. Mamy mianowicie wyszukać liczbę, któraby podniesiona do 2-giej potęgi dała na wynik 64 cm^2 , a tą liczbą jest 8 cm^2 , bo $8^2 = 64$.

Wyszukanie liczby, która podniesiona do 2-giej potęgi da na wynik daną liczbę, zowie się **pierwiastkowaniem**. Znak pierwiastkowania: $\sqrt{\quad}$

$$\text{Np. } \sqrt{64} = 8 \quad (\text{bo } 8^2 = 64)$$

$$a = \sqrt{P}$$

Bok kwadratu znajdziemy, wyciągając drugi pierwiastek z powierzchni.

Przykład: Obliczyć długość jednej miedzy przy polu, mającem kształt kwadratu, którego $P = 151 \cdot 29 \text{ a}$!

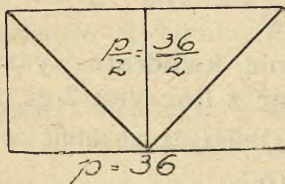
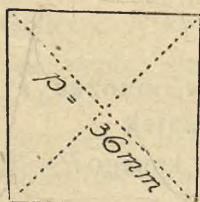
$$a = \sqrt{P}$$

$$a = \sqrt{151 \cdot 29} = 123 \text{ m}$$

$$= 51 : 22 \cdot 2$$

$$729 : 243 \cdot 3$$

$$===$$



Ryc. 16.

Powtórzcie, jak obliczamy obwód kwadratu! Jeden bok kwadratu, mając dany obwód!

Zadanie: Przekątnia kwadratu wynosi 36 mm; obliczyć P !

Wykreście na papierze rysunkowym kwadrat o przekątnej 36 cm, wytnijcie go, następnie rozetnijcie po przekątniach na 4 trójkąty i zamieńcie na prostokąt (ryc. 16)! Jakie są te 4 trójkąty? Udowodnić przystawanie!

Obliczcie teraz P prostokąta, która równa się P kwadratu!

$$P = 36 \cdot \frac{36}{2} = \frac{36 \cdot 36}{2} = \frac{36^2}{2} = ?$$

$$P = \frac{p^2}{2}$$

Mając daną przekątnię kwadratu, obliczymy jego powierzchnię, podnosząc przekątnię do 2-giej potęgi i dzieląc potęgę przez 2.

Przykład: Przekątnia kwadratu = 17 m; obliczyć P !

$$P = \frac{p^2}{2}$$

$$P = \frac{17^2}{2} =$$

$$\begin{array}{r} 1^2 \dots\dots\dots 1 \dots \\ 2 \cdot 1 \cdot 7 \dots\dots\dots 14 \dots \\ 7^2 \dots\dots\dots 49 \end{array}$$

$$289 : 2 = 144,5 \text{ m}^2.$$

Obliczyć przekątnię kwadratu z jego powierzchni!

Wnioskujemy tak:

$$\text{Skoro } P = \frac{p^2}{2}, \text{ stąd, ponieważ np.: } 10 = \frac{20}{2}, \quad 2 \cdot 10 = 20$$

$$2P = p^2, \text{ czyli}$$

$$p^2 = 2P$$

$$p = \sqrt{2P}$$

Przekątnię kwadratu wyszukamy, mnożąc P przez 2 i wyciągając z iloczynu 2-gi pierwiastek.

Przykład: Obliczyć przekątnię kwadratu, którego $P = 280,845 \text{ m}^2$!

$$p = \sqrt{2P}$$

$$p = \sqrt{280,845 \text{ m}^2 \cdot 2} = \sqrt{561,69 \text{ m}^2} = 23,7 \text{ m}$$

$$\begin{array}{r} 161 : 43,3 \\ 32,69 : 467,7 \\ \hline \end{array}$$

Zadania:

1. Bok kwadratu $= 56$ mm; obliczyć P !
2. O kwadratu $= \frac{4}{7}$ m; ile wynosi P ?
3. Obliczyć P kwadratu o boku:
 - a) 6.3 m, b) 30.9 cm, c) $3\frac{2}{5}$ mm!
4. Najwyższa piramida egipska ma podstawę kwadratową o boku 233 m; jaką powierzchnię zajmuje?
5. Obliczyć powierzchnię szachownicy, której każde pole ma obwód 16 cm!
6. Obliczyć bok kwadratu, który ma powierzchnię równą P prostokąta o rozmiarach $12/48$ m!
7. Prostokąt o rozmiarach $9/36$ m i kwadrat mają równe powierzchnie. Obliczyć ich obwody! Który obwód jest większy i o ile?
8. W koło o promieniu $r = 29$ mm jest wpisany kwadrat. Obliczyć P kwadratu, O kwadratu i O koła!
9. Ktoś zakupił ogród kwadratowy, którego wielkość była w księdze gruntowej podana na 3 a 49.69 m². Obliczyć bok i O tego ogrodu!
10. Obliczyć bok i obwód kwadratu, którego powierzchnia równa się powierzchniom 2 kwadratów o bokach 6.2 m i 7 m 5 dm!
11. Obliczyć bok i O kwadratu, którego $P = 152$ m² 27 dm² $56\frac{1}{2}$ cm²!
12. Ulica 95 m długa, a 8 m szeroka, ma być wyłożona kamiennymi sześcianami o krawędzi 25 cm; ile sześcianów wyjdzie na wybrukowanie tej ulicy?
13. Obliczyć P kwadratu, którego przekątnia wynosi 12 m!
14. Jak wielką jest przekątnia kwadratu, którego $P = 18.18045$ dm²?
15. Ile wynosi bok kwadratu, mającego 2 razy tak wielką powierzchnię, jak kwadrat o boku $a = 10$ cm?
16. Czy jeden kwadrat, mający 2 razy większy obwód od drugiego kwadratu, ma także 2 razy większą powierzchnię? (Tak twierdzili starożytni. Co wy na to powiecie?).

17. Wykreślić dowolny kwadrat i wystawić drugi kwadrat na przekątnej pierwszego! (Bok drugiego kwadratu = przekątnej pierwszego!). Jaki jest stosunek między powierzchniami obydwóch kwadratów?

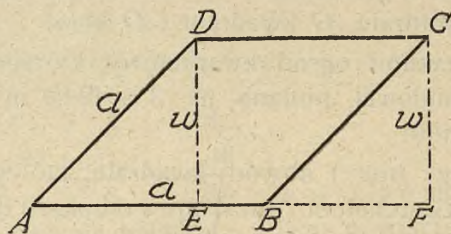
18. Zmierzyć otwór okna i szyb w nim i obliczyć, ile % światła pochłaniają ramy?

§ 8.

Romb i romboid.

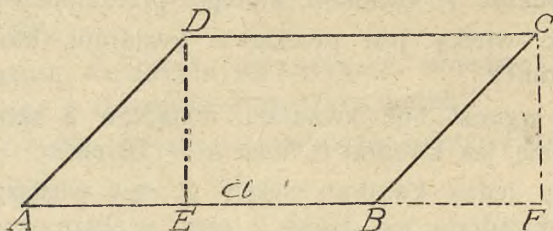
Powtórzcie z klasy I o bokach, kątach, przekątniach, podstawie i wysokości rombu i romboidu!

Powierzchni rombu i romboidu nie można zmierzyć wprost jednostką mierniczą (np. cm^2), jak to czyniliśmy w prostokącie i kwadracie, ponieważ centymetra kwadratowego nie można zmieścić w kątach ostrych.



Ryc. 17.

Narysujcie dowolny romb (jak na ryc. 17), poprowadźcie z wierzchołka prostopadłą do podstawy, następnie odetnijcie $\triangle AED$ i przyłóżcie go z drugiej strony rombu. Jaką figurę otrzymacie? Na co można zamienić romb?



Zróbcie to samo z romboidem!

Widzimy tedy, że romb i romboid można zamienić na prostokąt o tej samej powierzchni.

Jeżeli wykreślimy 2 wysokości DE i CF z obu wierzchołków D i C i przedłużymy podstawę AB do 2-giej wysokości, t. zn. do punktu F , natenczas otrzymamy 2 przystające trójkąty: $\triangle AED$ i $\triangle BFC$.

Udowodnić przystawanie.

$$\triangle AED \cong \triangle BFC.$$

$AD = BC$ Dlaczego?

$DE = CF$ (prostopadłe DE i CF między równoległymi CD i AF są równe, (zob. Geom. cz. I. § 22.4).

$\sphericalangle D = \sphericalangle C$ (ramiona odpowiednio równoległe, Geom. cz. I. § 25, II przyp. przystaw. trójkątów, Geom. cz. I. str. 50).

Z tego wynika, iż P rombu $ABCD$ równa się P prostokąta $EFCD$, ponieważ jeżeli z rombu $ABCD$ odejmiemy $\triangle AED$ i dodamy $\triangle BFC$ natenczas otrzymamy prostokąt $EDCF$.

Z przystawania trójkątów wynika, że $AE = BF$, stąd

$$AB = EF.$$

P prostokąta $= EF \cdot DE$.

Zatem także P rombu $= EF \cdot DE$. Zamiast EF możemy wstawić AB , czyli P rombu $= AB \cdot DE$, inaczej:

$$P = a \cdot w$$

Powierzchnię rombu znajdziemy, mnożąc podstawę przez wysokość.

W podobny sposób możemy powierzchnię romboidu zamienić na powierzchnię prostokąta.

Powierzchnię romboidu wyszukamy, mnożąc podstawę przez wysokość.

Przykłady:

1. Obliczyć P rombu o boku 15 cm, wysokości 8 cm!

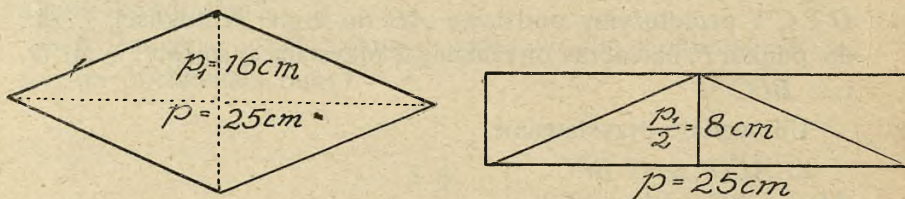
$$P = a \cdot w$$

$$P = 15 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} = 120 \text{ cm}^2.$$

2. Obliczyć P romboidu o podstawie 26 cm, a wysokości 18 cm!

$$P = 26 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm} = ?$$

Zadanie: Obliczyć P rombu, mając dane obydwie przekątne 25 cm i 16 cm!



Ryc. 18.

Przez podział rombu za pomocą przekątni na 4 przystające trójkąty (zob. o romboidzie w Geom. cz. I. § 43) możemy go zamienić na prostokąt o podstawie równej jednej przekątnej, a wysokości równej połowie drugiej przekątnej.

Stąd wynika:

$$P = p \cdot \frac{p_1}{2} = \frac{p \cdot p_1}{2}$$

$$P = \frac{25 \cdot 16}{2} = ?$$

Mając dane przekątne rombu, obliczymy jego powierzchnię, mnożąc przekątne przez siebie i dzieląc iloczyn przez 2.

Jak obliczymy obwód rombu? obwód romboidu?

Jak wyszukamy bok rombu, znając jego obwód?

drugi bok romboidu, znając obwód i jeden bok?

podstawę rombu, znając powierzchnię i wysokość? (zob. to samo o prostokącie)

wysokość rombu, znając podstawę i powierzchnię?

podstawę romboidu, znając P i wysokość?

wysokość romboidu, znając P i podstawę?

jedną przekątną rombu, znając P i drugą przekątną?

Zadania:

1. Obliczyć P rombu o podstawie $7\frac{3}{4}$ dm, wysokości $2\frac{3}{5}$ dm. Obliczyć O !

2. Obliczyć P romboïdu, którego podstawa jest $6\frac{1}{2}$ dm, a wysokość $4\frac{1}{3}$ dm!

3. Obliczyć P rombu, którego przekątnia $p = 2\frac{4}{7}$ m, $p_1 = 1\frac{2}{9}$ m!

4. Obliczyć O romboïdu, którego boki przyległe wynoszą $5\frac{1}{6}$ m, $4\frac{1}{5}$ m!

5. Obliczyć bok rombu, jeżeli $P = 9\frac{11}{12}$ m², wysokość $2\frac{1}{3}$ m!

6. Obliczyć wysokość romboïdu, jeżeli podstawa $= 5\frac{1}{5}$ dm, a $P = 7\frac{4}{5}$ dm²!

7. W prostokąt o rozmiarach $25/35$ cm jest wpisany romb tak, że wierzchołki jego leżą w środkach boków prostokąta. Obliczyć P prostokąta i rombu!

8. Z łąki w kształcie romboïdu o podstawie 89·3 m, a wysokości 50·4 m oddziela się równoległe do podstawy kawał szeroki na 21 m i przeznaczają się na orne pole; a) ile wynosiła pierwotnie powierzchnia łąki? b) ile wynosi pozostała jej część?

9. Płytę stołu prostokątnego 12 dm długiego, a 8 dm szerokiego ozdobił rombem włożonym z jaśniejszego drzewa o przekątniach 6 dm i 2 dm długich; ile wynosi część powierzchni płyty stołowej, znajdującą się poza rombem?

§ 9.

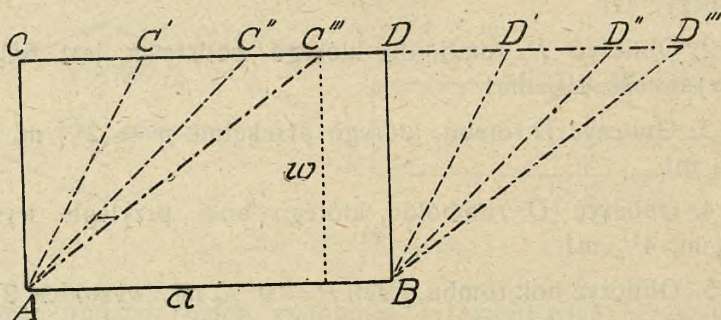
O przekształcaniu równoległoboków.

Powtórzenie: Co zwiemy równoległobokiem? Wylicz równoległoboki!

Jak znajdziemy P kwadratu? prostokąta? rombu? romboïdu?

Powierzchnię każdego równoległoboku znajdziemy, mnożąc podstawę przez wysokość. Z tego wynika:

Równoległoboki, mające równe podstawy i wysokości, mają też równe powierzchnie.



Ryc. 19.

$ABCD = ABC'D' = ABC''D'' = ABC'''D'''$. Udowodnić!

Przekształcić równoległobok znaczy zamienić równoległobok na inny o tej samej powierzchni.

Zadania:

1. Przekształcić prostokąt o rozmiarach $4/7$ cm na romboid o boku przyległym do podstawy 5 cm! Obliczyć powierzchnię tych 2 płaszczyzn i przekonać się, czy są równe!
2. Przekształcić powyższy prostokąt na romb!
3. Zamienić romboid o bokach 55 mm i 42 mm na prostokąt!
4. Zamienić kwadrat o boku 43 mm na romb! (Najpierw kwadrat zamienić na prostokąt (zob. ryc. 16), nast. na romb)!
5. Kwadrat o boku 37 mm przekształcić na romboid, którego jeden kąt wynosi 60° !

§ 10.

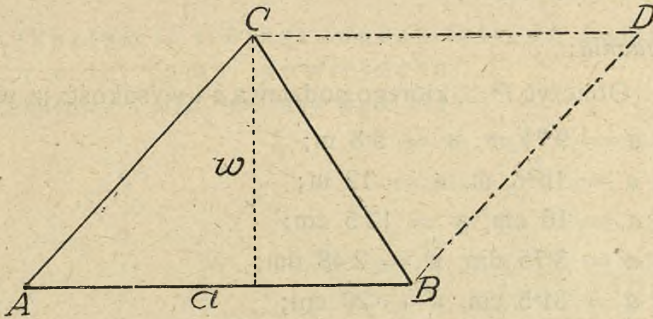
Trójkąt.

Powtórzcie z klasy I o trójkącie i jego rodzajach!

Wykreślić dowolny $\triangle$:

Z wierzchołka C poprowadzić $\parallel$ do podstawy AB , oraz z wierzchołka B $\parallel$ do AC !

Otrzymamy w ten sposób romboid $ABCD$.



Ryc. 20.

$$ABC \cong BCD.$$

Wystrzygnijcie z papieru i przekonajcie się!

Dowód:

$$CB = CB \text{ (bok wspólny)}$$

$$CD = AB \text{ (równoległe } AB, CD \text{ między równoległymi } AC, BD)$$

$$AC = BD \text{ (I przyp. przyst. } \triangle)$$

$$ABC = \frac{ABCD}{2}$$

$$\text{Powierzchnia romboidu } ABCD = a \cdot w$$

$$\text{Powierzchnia trójkąta } ABC = \frac{a \cdot w}{2}$$

Powierzchnię trójkąta wyszukamy, mnożąc podstawę przez wysokość, a dzieląc iloczyn przez 2.

Jak wyszukamy podstawę ∇ , znając jego P i wysokość?

Wnioskujemy tak:

$$P \text{ 2 trójkątów (zob. ryc. 20!) } 2P = a \cdot w, \text{ stąd:}$$

$$a = \frac{2P}{w} \text{ podobnie:}$$

$$w = \frac{2P}{a}$$

Podstawę trójkąta znajdziemy, dzieląc 2 powierzchnie przez wysokość.

Wysokość trójkąta znajdziemy, dzieląc 2 powierzchnie przez podstawę.

Zadania:

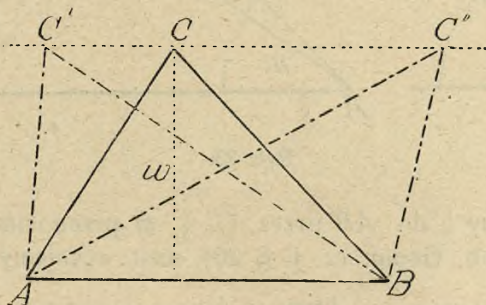
1. Obliczyć $P \triangle$, którego podstawa a i wysokość w wynoszą:
 - a) $a = 9.75$ m, $w = 5.3$ m;
 - b) $a = 16\frac{2}{3}$ m, $w = 12$ m;
 - c) $a = 16$ cm, $w = 12.5$ cm;
 - d) $a = 3.75$ dm, $w = 2.48$ dm;
 - e) $a = 31.5$ cm, $w = 20$ cm;
 - f) $a = 40$ cm, $w = 12.5$ cm.
2. Obliczyć P trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne wynoszą 4.5 m, 2.8 m!
3. Obliczyć $P \triangle$ prostokątnego równoramiennego, którego przyprostokątnia wynosi 1.24 m!
4. Jak oblicza się obwód trójkąta równobocznego? równoramiennego? prostokątnego równoramiennego?
5. Obliczyć $O \triangle$ równobocznego o boku 3.5 m!
6. Obliczyć $O \triangle$ prostokątnego równoramiennego, którego przyprostokątnia $= 2.27$ dm, przeciwprostokątnia 3.21 dm!
7. Trójkątny szczyt domu jest $8\frac{2}{3}$ m szeroki i $4\frac{1}{2}$ m wysoki; obliczyć jego P !
8. Dach wieży składa się z 8 przystających $\triangle$ równoramiennych o podstawie 2.5 m, wysokości 6 m. Ile otrzymał blacharz od zafarbowania dachu, jeżeli liczył za 1 m² 15 Kč?
9. Schody mają z boku obicie w kształcie trójkąta o długości 3.05 m, wysokości 2.4 m. Ile kosztuje obicie, jeżeli za 1 m² liczy się 12.5 Kč?
10. Rolnik chce zamienić swe pole trójkątne o podstawie 400 m, wysokości 118 m na pole kwadratowe. Ile będzie wynosił jeden bok tego kwadratu?

§ 11.

Przekształcanie trójkątów.

Przekształcić trójkąt znaczy tyle, co zamienić na inny o tej samej powierzchni.

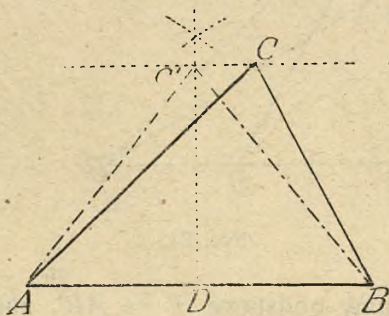
1. Zamienić $\triangle ABC$ na inny (ryc. 21)!



Ryc. 21.

Kreślimy z wierzchołka $C \parallel$ do AB . Z dowolnego punktu np. C' kreślimy $\triangle ABC'$. Trójkąt ten jest równy co do powierzchni trójkątowi ABC , ponieważ ma tę samą podstawę AB i wysokość w .

2. Zamienić $\triangle$ różnoboczny na równoramienny! (ryc. 22).

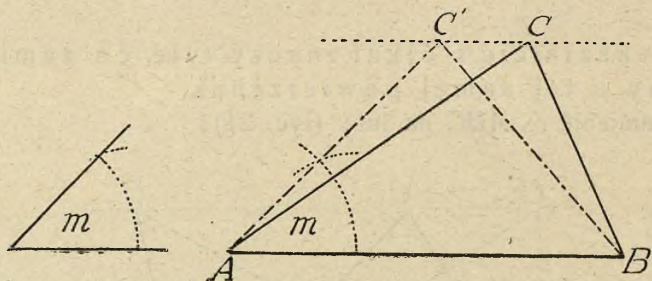


Ryc. 22.

Podstawę AB się przepołowi i wystawi z punktu środkowego D prostą $DC' \perp AB$. $ABC = ABC'$. Dlaczego?

3. Trójkąt różnoboczny zamienić na prostokątny!

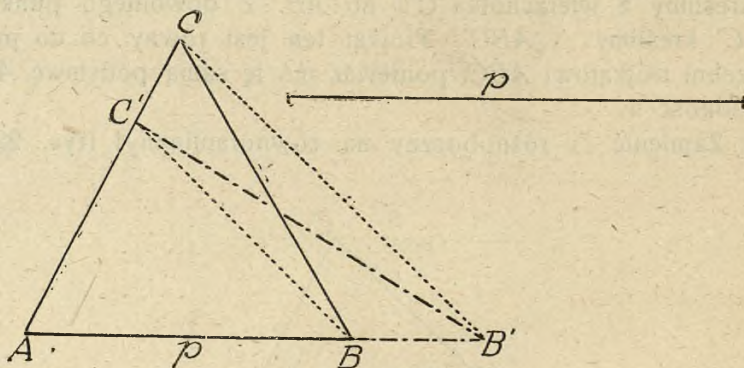
4. Trójkąt zamienić na inny o danym kącie przypośtawnym m ! (rzc. 23).



Rzc. 23.

Prowadzimy $\parallel$ do AB przez C . $\sphericalangle m$ przenosimy do wierzchołka A (zob. Geom. cz. I, § 20), nast. rysujemy ramię AC' .

5. Zamienić dany $\triangle ABC$ na inny o podstawie p ! (rzc. 24).



Rzc. 24.

Na AB odcinamy podstawę $p = AB'$, następnie łączymy B' z C i prowadzimy z $B \parallel BC'$ do $B'C$. Punkt B' łączymy z C' . Trójkąt $AB'C'$ ma żadaną podstawę p i jest równy ABC . Dlaczego? ($\triangle BCC' = \triangle BB'C'$, bo mają wspólną podstawę BC' i równe wysokości. Gdy zatem od ABC odejmiemy $\triangle BCC'$, a dodamy $\triangle BB'C'$, otrzymamy $\triangle AB'C'$, $= \triangle ABC$).

Dowód:

$$\triangle DCE = \triangle EBF$$

$$DC = BF \text{ (Dlaczego?)}$$

$$\sphericalangle D = \sphericalangle F \text{ (kąty naprzemianległe, zob. Geom. cz. I. § 27).}$$

$$\sphericalangle C = \sphericalangle B \text{ (kąty naprzemianległe, zob. Geom. cz. I. § 27).}$$

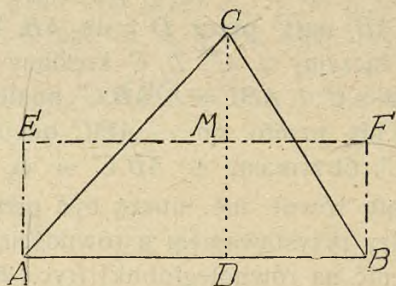
Jeżeli tedy od $\triangle ABC$ odejmiemy $\triangle CDE$, a dodamy $\triangle BEF$, otrzymamy $ABFD = \triangle ABC$.

Wystrzydz z papieru całą konstrukcję i przekonać się!

8. Trójkąt przekształcić na prostokąt!

a) Zamienimy trójkąt najpierw na równoległobok, jak poprzednio, następnie równoległobok na prostokąt!

b)



Ryc. 27.

Kreślimy wysokość CD i przepoławiamy ją. Przez punkt M kreślimy $EF \parallel AB$, następnie $AE \parallel CD$ i $BF \parallel CD$.

$$P \text{ trójkąta} = \frac{AB \cdot CD}{2}$$

$$P \text{ prostokąta} = AB \cdot \frac{CD}{2}$$

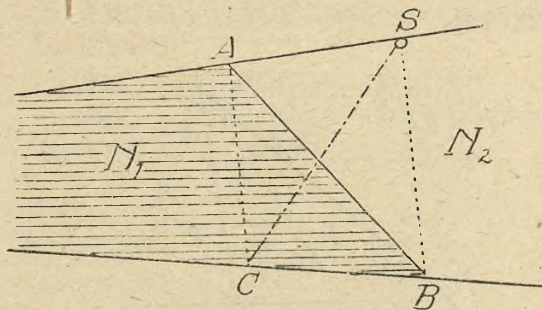
Powierzchnie trójkąta i prostokąta są tedy równe.

9. Grunta dwóch właścicieli (N_1 i N_2) graniczą z sobą w linii AB (ryc. 28).

Właściciel N_1 ma na swoim gruncie studnię S i zgadza się na to, by granicę zmienić tak, żeby jej linja przechodziła przez

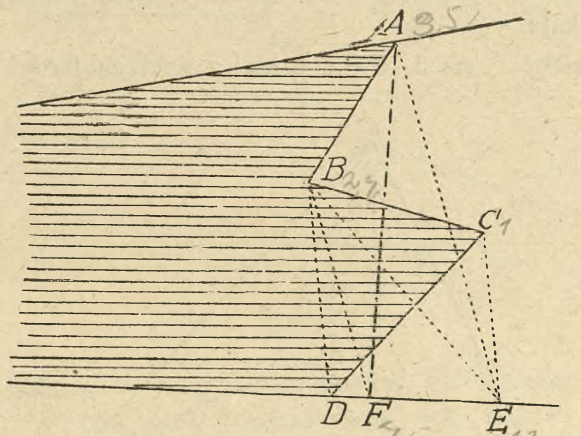
studnię, aby i sąsiad N_1 miał do studni dostęp. Jak należy nową linię poprowadzić, aby żaden nie poniósł straty?

Łączy się S i B , przez A zaś prowadzi się $AC \parallel BS$. Prosta CS będzie żadaną granicą.



Ryc. 28.

10. Zamienić łamaną linię graniczną ($ABCD$, ryc. 29) 2 pól na granicę prostą!



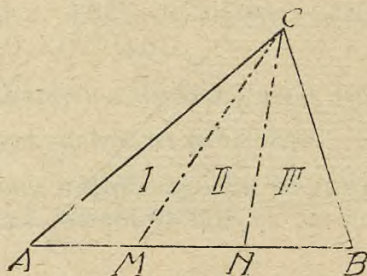
Ryc. 29.

Prowadzimy $CE \parallel BD$ i łączymy B z E , wskutek czego zamiast granicy $ABCD$ mamy granicę ABE ; następnie prowadzimy $BF \parallel AE$, a połączymy punkty A i F , otrzymamy żadaną granicę. (Wyjaśnić postępowanie)!

§ 12.

Dzielenie trójkątów.

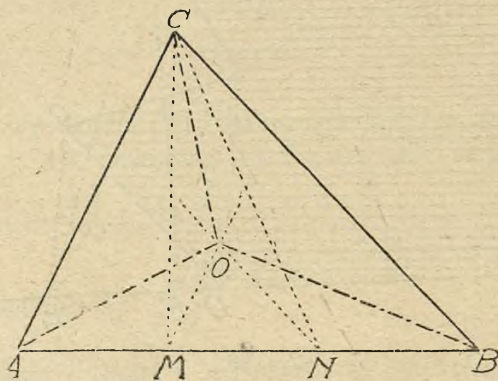
a) Trójkąt ABC podzielić z wierzchołka C zapomocą prostych na 3 równe części!



Ryc. 30.

Dzielimy podstawę AB (ryc. 30) na 3 równe części i łączymy punkty podziału z wierzchołkiem C . Trójkąty I, II, III są równe, gdyż mają równe podstawy i wysokości, a każdy jest $\frac{1}{3}$ częścią całego trójkąta.

b) Podzielić $\triangle$ na 3 równe części z wierzchołków!



Ryc. 31.

Dzielimy podstawę AB na 3 równe części (ryc. 31). Z M kreślimy równoległą do AC , z N $\parallel$ do BC . Punkt przecięcia się

tych 2 równoległych O jest wspólnym wierzchołkiem równych trójkątów:

$$\triangle AOC = \triangle AOB = \triangle BOC.$$

Dowód: $\triangle AMC = \triangle MCN = \triangle NCB$

$$\triangle AMC = \triangle AOC \text{ (wspólna podstawa i równe wysokości)}$$

$$\triangle BNC = \triangle BOC \quad \text{stąd:}$$

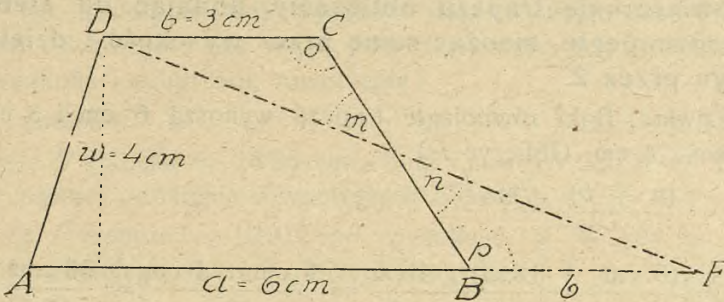
$$\triangle AOC = \triangle BOC \quad \text{więc także musi być:}$$

$$\triangle MNC = \triangle AOB.$$

§ 13.

Trapez.

Powtórzcie z klasy I o trapezie i jego rodzajach!



Ryc. 32.

Aby obliczyć P trapezu, zamienimy go wpierw na trójkąt (ryc. 32). W tym celu przepołowimy bok BC w punkcie E i z wierzchołka D poprowadzimy prostą przez E , aż przetnie przedłużenie podstawy AB w punkcie F .

Wykreście tę konstrukcję na kartce rysunkowej, odetnijcie $\triangle CDE$ i połóżcie na $\triangle BEF$. Co zauważycie?

$$\triangle CDE \cong \triangle BEF.$$

Dowód: $CE = BE$

$\sphericalangle m = \sphericalangle n$ ($\sphericalangle$ wierzchołkowe, zob. Geom. cz. I. § 24)

$\sphericalangle o = \sphericalangle p$ ($\sphericalangle$ naprzemianległe).

Z przystawania trójkątów wynika, iż $CD = BF$, zatem $AF = AB + CD$, oraz, że P trapezu $ABCD$ równa się P trójkąta ADF . Jeżeli bowiem od trapezu $ABCD$ odejmiemy $\triangle CDE$, a dodamy do czworoboku $ABED$ tak, aby bok CD trójkąta CDE stanowił przedłużenie podstawy AB , natenczas otrzymamy z trapezu trójkąt, mający tę samą powierzchnię.

$$P \text{ trójkąta } ADF = \frac{AF \cdot w}{2} \quad \text{tedy i}$$

$$P \text{ trapezu } ABCD = \frac{AF \cdot w}{2} \quad \text{Zamiast } AF \text{ możemy wsta-}$$

wić $AB + BF$, zatem:

$$P \text{ trapezu} = \frac{(a + b) \cdot w}{2}$$

Jakie są boki trapezu a i b ?

Powierzchnię trapezu obliczamy, dodając do siebie boki równoległe, mnożąc sumę przez wysokość i dzieląc iloczyn przez 2.

Przykład: Boki równoległe trapezu wynoszą 6 cm i 3 cm, wysokość 4 cm. Obliczyć P !

$$P = \frac{(a + b) \cdot w}{2}$$

$$P = \frac{(6 \text{ cm} + 3 \text{ cm}) \cdot 4 \text{ cm}}{2} = \frac{9 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}}{2} = \frac{36 \text{ cm}^2}{2} = 18 \text{ cm}^2.$$

Nawiasy () dajemy dlatego, aby wiedzieć, że najpierw mamy dodać boki równoległe, a potem dopiero mnożyć sumę przez wysokość, a wreszcie podzielić iloczyn przez 2.

Powtórzcie, jak obliczamy O trapezu!

Zadania:

Obliczyć P trapezu, jeżeli:

a) boki równoległe wynoszą: $a = 4 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, wysok. $w = 5 \text{ m}$;

b) " " " $a = 5.5 \text{ m}$, $b = 3.2 \text{ m}$, $w = 1.8 \text{ m}$;

c) boki równoległe wynoszą: $a = 7 \text{ cm } 5 \text{ mm}$, $b = 4 \text{ cm } 4 \text{ mm}$
 $w = 3 \text{ cm}$;

d) „ „ „ $a = 6\frac{1}{2} \text{ dm}$, $b = 3\frac{1}{4} \text{ dm}$, $w = 4\frac{3}{4} \text{ dm}$.

Aby obliczyć wysokość, mając dane boki równoległe i P , wnioskujemy tak:

$$P = \frac{(a + b) \cdot w}{2}$$

$$2P = (a + b) \cdot w$$

$$w = \frac{2P}{a + b}$$

$$a + b = \frac{2P}{w}$$

$$a = \frac{2P}{w} - b$$

$$b = \frac{2P}{w} - a$$

Jak obliczymy tedy wysokość trapezu, mając daną P i oba boki równoległe? Jak jeden bok równoległy, gdy jest znana P , wysokość i drugi bok równoległy?

Zadania:

1. P trapezu $= 18.06 \text{ cm}^2$, boki $\parallel$ $a = 5.4 \text{ cm}$, $b = 3.2 \text{ cm}$; ile wynosi oddalenie równoległych boków?

2. P trapezu $= 10.812 \text{ m}^2$, wysokość $w = 2.04 \text{ m}$, jeden bok równoległy 3.4 m ; obliczyć drugi bok $\parallel$!

3. Dach domu składa się z 2 przystających trapezów i 2 trójkątów. Długość każdego trapezu wynosi dołem $26 \text{ m } 6 \text{ dm}$, górą $19\frac{1}{2} \text{ m}$, szerokość zaś $16 \text{ m } 4 \text{ dm}$; podstawa każdego trójkąta wynosi 21 m , a jego wysokość równa się szerokości trapezu. Ile blach 1.2 m długich, a 70 cm szerokich, potrzeba na pokrycie tego dachu, jeżeli na zagięcia i odpadki liczy się 5% całej powierzchni dachu? Ile kosztuje pokrycie, jeżeli za 1 m^2 wraz z materiałem płaci się $20 \text{ Kč } 20 \text{ h}$?

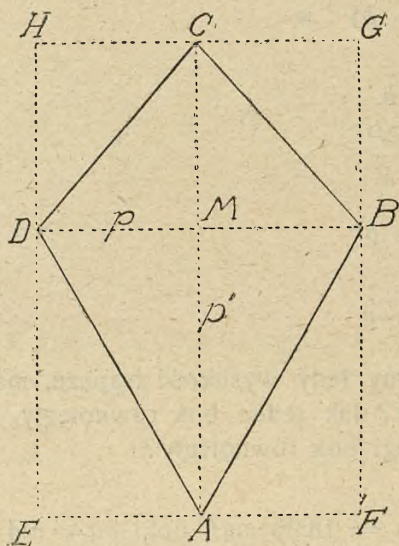
4. Deska $4 \text{ m } 80 \text{ cm}$ długa ma na jednym końcu 42 cm na drugim zaś 31 cm szerokości. Ile za nią trzeba zapłacić, licząc 1 m^2 à $10 \text{ Kč } 80 \text{ h}$?

§ 14.

Deltoid.

Powtórzcie z klasy I o deltoidzie i jego przekątniach!

Aby obliczyć P deltoidu, wykreślmy jego przekątne i do nich równoległe przez wszystkie wierzchołki (ryc. 33).



Ryc. 33.

Otrzymamy prostokąt $EFGH$, który jest 2 razy większy od deltoidu.

Narysujcie na kartce deltoid, na nim opisany prostokąt, wycinajcie prostokąt, nast. deltoid, a zbywającymi trójkątami nakryjcie deltoid.

Można to także udowodnić na podstawie przystawania trójkątów:

$$\triangle DHC \cong \triangle CMB \cong \triangle BFA \cong \triangle AED, \text{ oraz } \triangle DHC \cong \triangle CMB, \text{ oraz } \triangle DHC \cong \triangle BFA, \text{ oraz } \triangle DHC \cong \triangle AED.$$

Udowodnijcie przystawanie: $\triangle DMC \cong \triangle CMB$,
 $\triangle DEA \cong \triangle DMA$ i t. d.

$$P \text{ prostokąta} = p \cdot p'$$

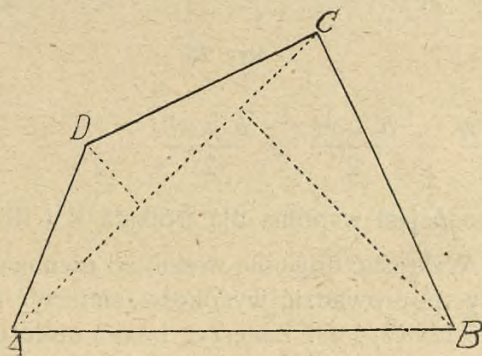
$$P \text{ deltoidu} = \frac{p \cdot p'}{2}$$

Powierzchnię deltoidu obliczymy, mnożąc obie przekątne przez siebie i dzieląc iloczyn przez 2.

Zadanie: Wykreślić dowolne deltoidy, zmierzyć ich boki i przekątne, oraz obliczyć O i P !

§ 15.

Trapezoid.



Ryc. 34.

Aby obliczyć P trapezoidu $ABCD$ (ryc. 34), rozkładamy go za pomocą przekątnej AC na 2 trójkąty, których wspólną podstawą będzie właśnie ta przekątna. Obliczamy więc powierzchnie obu trójkątów i dodajemy je.

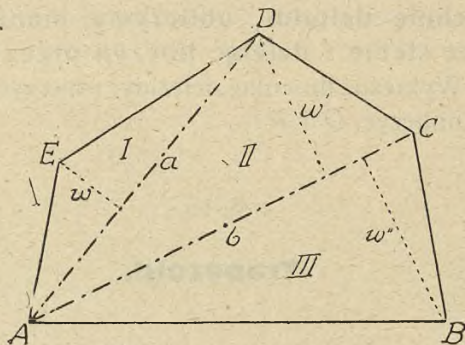
Zadania: Wykreślić dowolne trapezoidy, a w nich przekątne i wysokości trójkątów, zmierzyć je i obliczyć P !

§ 16.

Wielobok nieumiarowy.

Chcąc obliczyć P wieloboku nieumiarowego, dzielimy go za pomocą przekątnej (ryc. 35), wykreślonych z jednego wierzchołka

np. A , na trójkąty, obliczamy powierzchnie poszczególnych trójkątów, a wreszcie dodajemy je do siebie.



Ryc. 35.

$$P = \frac{a \cdot w}{2} + \frac{b \cdot w'}{2} + \frac{b \cdot w''}{2}$$

(Podstawa b jest wspólna dla trójkąta II i III).

Zadanie: Wykreślić dowolne wieloboki nieumiarowe, podzielić je na trójkąty, poprowadzić wysokości, zmierzyć podstawy i wysokości, oraz obliczyć P ! Zmierzyc boki i obliczyć P ! Zmierzyc boki i obliczyć O !

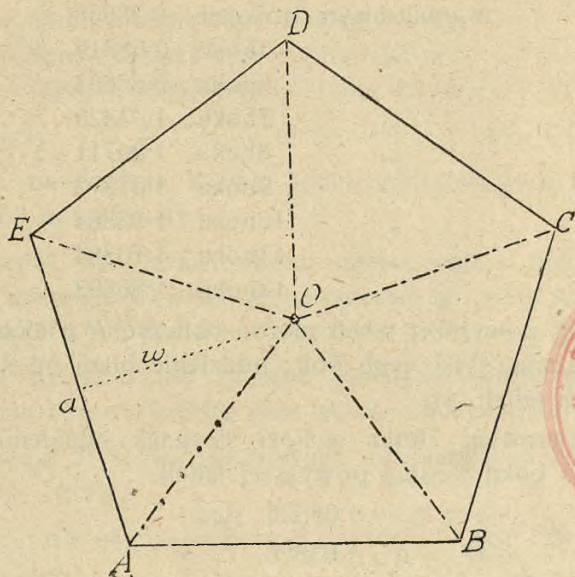
§ 17.

Wieloboki umiarowe.

Powtórzcie z klasy I o konstrukcjach wieloboków umiarych. (Zob. Geom. cz. I. § 58 — 62). Co to jest oddalenie boku od środka?

Aby obliczyć P wieloboku umiarywego, dzielimy go na tyle trójkątów, ile ma wielobok boków, następnie obliczamy P jednego trójkąta i mnożymy ją przez ilość trójkątów czyli ilość boków.

Chcąc obliczyć np. P pięcioboku umiarowego (ryc. 36), dzielimy go na 5 trójkątów przystających.



Ryc. 36.

$$P \text{ jednego trójkąta} = \frac{a \cdot w}{2}$$

$$P \text{ pięcioboku umiarowego} = 5 \cdot \frac{a \cdot w}{2} =$$

$$= 5 \cdot a \cdot \frac{w}{2}, \text{ a ponieważ}$$

$$5a = \text{Obwód, zatem:}$$

$$P \text{ 5boku} = O \cdot \frac{w}{2}$$

Powierzchnię wieloboku umiarowego obliczymy, mnożąc obwód przez połowę oddalenia boku od środka.

Wykreście 2 różne 6boki umiarowe, podzielcie w obu oddalenie boku od środka przez bok ($w : a = ?$). Jeżeli wykonaliście bardzo dokładne pomiary, natenczas w obu wypadkach musicie otrzymać liczbę 0'86603. Gdybyście to samo zrobili w 2 5bokach umiarowych, otrzymalibyście zawsze liczbę 0'68819.



Widzimy tedy, że stosunek oddalenia boku od środka do boku ($w : a$) w wieloboku umiarowym jest liczbą stałą i wynosi:

w umiarowym trójkącie	0.28868
„ 5boku	0.68819
„ 6boku	0.86603
„ 7boku	1.03826
„ 8boku	1.20711
„ 9boku	1.37372
„ 10boku	1.53884
„ 11boku	1.70384
„ 12boku	1.86603

Według powyższej tabeli można obliczyć P wieloboku umiarowego, znając tylko jego bok; oddalenie boku od środka wyszukamy z tabeli, np.:

W umiarowym 7boku wynosi stosunek oddalenia boku od środka do boku według powyższej tabeli:

$$w : a = 1.03826, \text{ stąd:}$$

$$w = a \cdot 1.03826.$$

Oddalenie boku od środka wyszukamy więc, mnożąc bok przez odnośną liczbę, którą odczytamy z tabeli przy danym wieloboku.

P wieloboku obliczymy wtedy według wzoru:

$$P = \text{ilość boków} \cdot a \cdot \frac{w}{2}, \text{ lub:}$$

$$P = O \cdot \frac{w}{2}$$

Przykład:

Obliczyć P 8boku umiarowego o boku 5 dm!

$$P = \text{ilość boków} \cdot a \cdot \frac{w}{2} \quad w = a \cdot 1.20711$$

$$\begin{aligned} P &= 8 \cdot 5 \cdot \frac{5 \cdot 1.20711}{2} = \frac{40 \cdot 5 \cdot 1.20711}{2} = \\ &= 20 \cdot 5 \cdot 1.20711 = 100 \cdot 1.20711 = 120.711 \text{ dm}^2. \end{aligned}$$

Oddalenie boku od środka = promieniowi koła wpisanego w wielobok (zob. ryc. 36!).

Zadania:

1. Obliczyć odległość boku od środka (w):
 - a) w 6boku umiarowym o boku 4·3 dm;
 - b) w 8boku umiarowym o boku 12 m;
 - c) w 10boku umiarowym o boku 1·1 m.
2. Obliczyć O i P 12boku umiarowego o boku 0·2 m!
3. Dno basenu ma kształt 8boku umiarowego o boku 1 m 75 cm; obliczyć P dna!
4. Kwietnik ma kształt 6boku umiarowego o boku $2\frac{3}{4}$ m; ile trzeba zamówić kwiatów na obsadzenie go, jeżeli każdy kwiat ma zajmować 1 dm²?
5. Jaką powierzchnię zajmuje podstawa wieży w kształcie 8boku umiarowego, w którym koło wpisane ma promień $r = 10$ m?
6. Obliczyć P 5boku umiarowego, opisanego na kole o promieniu $r = 10$ cm!
7. Jakie pole zajmuje altana 8 boczna o boku 1·2 m?
8. Podłoga pawilonu w kształcie umiarowego 6boku, którego każdy bok wynosi 4 m, ma być wyłożona trójkątnymi płytami betonowymi równobocznymi. Ile takich płyt potrzeba, jeżeli O każdej płyty = 1·5 m²? Ile kosztuje to wyłożenie, jeżeli każda płyta kosztuje 8 Kč, a od roboty płaci się 5 Kč za 1 m²?
(Sporządzić rysunek według skali 1 : 100!).

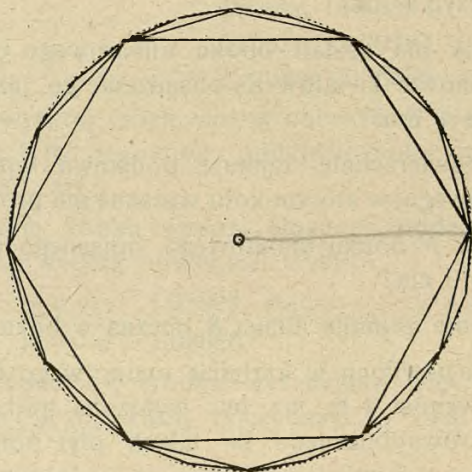
§ 18.

Koło.

Wpiszmy w koło 6bok, następnie 12bok, a wreszcie 24bok umiarowy! (ryc. 37).

Powierzchnia którego wieloboku różni się najmniej od P koła? Im więcej boków ma wielobok, tem bardziej zbliża się jego P do P koła. Pomyślmy wreszcie wielobok umiarowy o niezliczonej ilości boków, w którym każdy bok równa się punktowi, a otrzymamy koło.

Koło możemy zatem uważać za wielobok umiaryowy o nieskończonej ilości boków. Wychodząc z tego założenia, obliczymy P koła podobnie, jak P wieloboku umiaryowego. Powtórzcie, jak obliczymy P umiaryowego wieloboku! Podobnie obliczymy P koła, mnożąc obwód przez połowę odległości punktu na O od środka. Kto pamięta, jak wyszukujemy O koła? Co to jest oddalenie punktu na obwodzie od środka koła? Zatem:



Ryc. 37.

$$P \text{ koła} = O \cdot \frac{r}{2} = 2r\pi \cdot \frac{r}{2} = r\pi \cdot r = r \cdot r \cdot \pi = r^2\pi.$$

Powierzchnię koła wyszukamy, podnosząc promień do drugiej potęgi i mnożąc potęgę przez π .

Przykład: Obliczyć P koła o promieniu $r = 2$ dm!

$$P = r^2\pi = 2^2 \cdot 3{,}14 = 4 \cdot 3{,}14 = 12{,}56 \text{ dm}^2.$$

Jeżeli chcemy obliczyć promień koła r , znając jego P , natenczas wnioskujemy tak:

$$P = r^2\pi \quad \text{stąd:}$$

$$r^2 = \frac{P}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{P}{\pi}}$$

Chcąc obliczyć promień koła z jego powierzchni, dzielimy powierzchnię przez π , a z ilorazu wyciągamy 2-gi pierwiastek.

Przykład:

Obliczyć promień (r) koła, którego $P = 16 \cdot 6106 \text{ m}^2$

$$r = \sqrt{\frac{P}{\pi}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 6106}{3 \cdot 14}} = \sqrt{16 \cdot 6106 : 3 \cdot 14} = \sqrt{\frac{5 \cdot 29}{129 : 43.3}} = 2 \cdot 3 \text{ m}$$

$\frac{910}{2826}$

Jak obliczymy P koła, znając średnicę $2r$?

Jak wyszukamy średnicę $2r$ z P ?

Zadania:

1. Obliczyć P koła, którego promień $r =$ a) 2 m; b) 2·16 m; c) 3 m 4 dm; d) 6 m 8 dm 4 cm. ($\pi = 3 \cdot 1416$).

2. Obliczyć promień r koła, którego $P = 28 \cdot 2744 \text{ dm}^2$ ($\pi = 3 \cdot 1416$)!

3. Obliczyć średnicę ($2r$) koła, którego $P = 12 \cdot 8426 \text{ m}^2$ ($\pi = 3 \cdot 14$)!

4. Koło ma tę samą powierzchnię, co kwadrat o boku 3 m; obliczyć promień, średnicę i O koła!

5. O koła = O kwadratu = 11·932 dm; jaka jest różnica powierzchni obu płaszczyzn? ($\pi = 3 \cdot 14$).

6. W ogrodzie urządzono okrągłą sadzawkę o promieniu $r = 4\frac{1}{2} \text{ m}$; ile m^2 urodzajnej ziemi ubyło w ogrodzie? ($\pi = 3\frac{1}{7}$).

7. W okrągłej płycie stołu o średnicy $2r = 1 \text{ m } 60 \text{ cm}$ znajduje się ozdoba intarsyjna (robota wkładana) w kształcie kwadratu wpisanego. Ile P zajmują pozostałe 4 kawałki płyty (odcinki), nie objęte ozdobą? ($\pi = 3 \cdot 14$).

8. Ile kosztuje półokrągła szyba nad drzwiami, jeżeli promień (r) półkoła wynosi 60 cm, a 1 m^2 szyby liczy się po 34 Kč? ($\pi = 3 \cdot 14$).

9. W kwadrat o boku 84 mm jest wpisane koło. Obliczyć obwody i powierzchnie kwadratu i koła! Ile % kwadratu stanowi koło? ($\pi = 3 \cdot 14$).

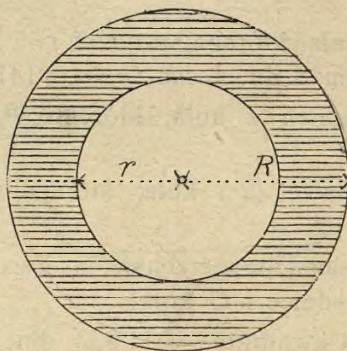
10. Na 6boku umiarowym o boku 10 cm jest opisane koło. Obliczyć P 6boku i koła! (P 6boku obliczyć na podstawie tabeli na str. 42) ($\pi = 3,14$).

11. Plac wyścigowy kolisty ma 2 ha 96 m² powierzchni. Jak długo jedzie po obwodzie cyklista, który robi km za 3 minuty? ($\pi = 3,14$).

§ 19.

Pierścień.

Powtórzcie z klasy I o kołach współśrodkowych i pierścieniu!



Ryc. 38.

Wystrzygnijcie z papieru koło, a z niego koło współśrodkowe! Co wam zostanie?

O jaką powierzchnię jest P pierścienia mniejszą od P koła większego?

Jak obliczymy tedy P pierścienia?

$$P = R^2\pi - r^2\pi \quad \text{krócej:}$$

$$P = (R^2 - r^2) \cdot \pi$$

Powierzchnię pierścienia obliczymy, odejmując powierzchnię koła mniejszego od powierzchni koła większego.

Inaczej: 2-gą potęgę promienia mniejszego odejmujemy od 2-giej potęgi promienia większego, a różnicę mnożymy przez π .

Przykład:

Obliczyć P pierścienia, jeżeli promień koła mniejszego $r = 3$ m, a koła większego $R = 4$ m!

$$P = R^2\pi - r^2\pi$$

$$P = 4^2 \cdot 3.14 - 3^2 \cdot 3.14 \quad \begin{array}{r} 3.14 \cdot 16 \\ 1884 \\ \hline 50.24 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3.14 \cdot 9 \\ 28.26 \\ \hline \end{array}$$

$$P = 50.24 \text{ m}^2 - 28.26 \text{ m}^2 = \underline{\underline{21.98 \text{ m}^2}}$$

Krócej:

$$P = (R^2 - r^2) \pi.$$

$$P = (4^2 - 3^2) \cdot 3.14 = (16 - 9) \cdot 3.14 = 7 \cdot 3.14 = \underline{\underline{21.98 \text{ m}^2}}.$$

Zadania:

1. Obliczyć P pierścienia, jeżeli większy promień $R = 4$ m, a mniejszy $r = 2.8$ m! ($\pi = 3.14$).

2. Obliczyć P pierścienia, którego obwody wynoszą 16.328 m i 10.048 m! ($\pi = 3.14$).

3. Sadzawka okrągła o obwodzie 50.24 m ma być opasana drogą 2 m szeroką. Jaką powierzchnię zajmuje ta droga? ($\pi = 3.14$).

4. Okrągła murawa o średnicy $2r = 16$ m jest otoczona drogą 1.8 m szeroką; jaką P zajmuje droga? ($\pi = 3.14$).

5. Obliczyć promień koła, którego $P = P$ pierścienia o średnicach 2.8 m i 2.2 m! ($\pi = 3.14$).

§ 20.

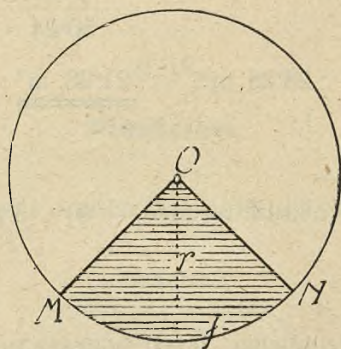
Wycinek koła.

Powtórzcie o obliczaniu łuku kołowego (zob. § 3)!

Wycinek koła *MONI* (ryc. 39) uważamy za trójkąt, którego podstawą jest łuk ℓ , a wysokością promień koła r .

$$P = \frac{l \cdot r}{2} \text{ a ponieważ } l = \frac{r\pi a}{180}, \text{ przeto:}$$

$$P = \frac{r\pi a}{180} \cdot \frac{r}{2} = \frac{r \cdot r \cdot \pi \cdot a}{180 \cdot 2} = \frac{r^2\pi a}{360}$$



Ryc. 39.

Powierzchnię wycinka koła wyszukamy, podnosząc promień do drugiej potęgi i mnożąc potęgę przez π , następnie przez kąt środkowy, a wreszcie dzieląc iloczyn przez 360.

Przykład:

Obliczyć P wycinka koła o promieniu $r = 2.5$ m i kącie środkowym $a = 70^\circ$!

$$\begin{aligned} P &= \frac{r^2\pi \cdot a}{360} = \frac{2.5^2 \cdot 3.14 \cdot 70}{360} = \\ &= \frac{6.25 \cdot 3.14 \cdot 7}{36} = \frac{137.375}{36} = \underline{\underline{3.8 \text{ m}^2}} \end{aligned}$$

Zadania:

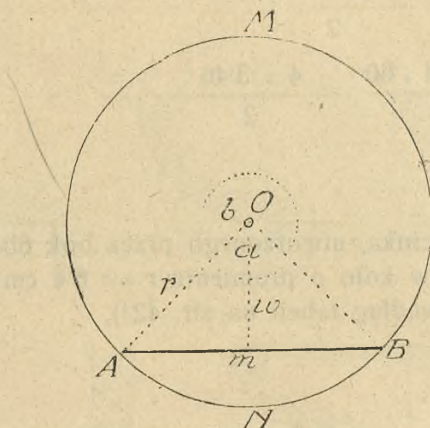
1. Obliczyć P wycinka koła o promieniu $r = 70$ mm, jeżeli kąt środkowy $a = 96^\circ$!

2. Wahadło 40 cm długie opisuje końcem łuk 45 cm. Obliczyć P , jaką ono zakreśla!

§ 21.

Odcinek kołowy.

Powtórzcie z klasy I o odcinku kołowym!



Ryc. 46.

Wycinek koła może być wklęsły, jeżeli odpowiedni kąt środkowy jest wklęsły ($AOBNA$, ryc. 40), albo wypukły, jeżeli kąt środkowy jest wypukły ($AOBMA$).

Jeżeli w wycinku końce łuku połączymy cięciwą AB , powstanie odcinek kołowy ABN i ABM .

P odcinka ANB jest różnicą P wycinka $AOBNA$ i $\triangle AOB$.

P odcinka AMB jest sumą P wycinka $AOBMA$ i $\triangle AOB$.

Powierzchnię odcinka kołowego, mniejszego od półkola, obliczymy, jeżeli od powierzchni wycinka odejmiemy powierzchnię trójkąta.

Powierzchnię odcinka, większego od półkola, obliczymy, dodając do wycinka powierzchnię trójkąta.

$$ANB = \frac{r^2 \pi a}{360} - \frac{m \cdot w}{2}$$

$$AMB = \frac{r^2 \pi b}{360} + \frac{m \cdot w}{2}$$

Przykład:

Obliczyć P odcinka, którego promień $r = 4$ m, kąt środkowy $\alpha = 60^\circ$, wysokość trójkąta $= 3.46$ m! (Jaki to jest trójkąt, skoro kąt środkowy $= 60^\circ$? Ile wynosi podstawa tego trójkąta?).

$$P = \frac{r^2 \pi \alpha}{360} - \frac{m \cdot w}{2}$$

$$P = \frac{4^2 \cdot 3.14 \cdot 60}{360} - \frac{4 \cdot 3.46}{2}$$

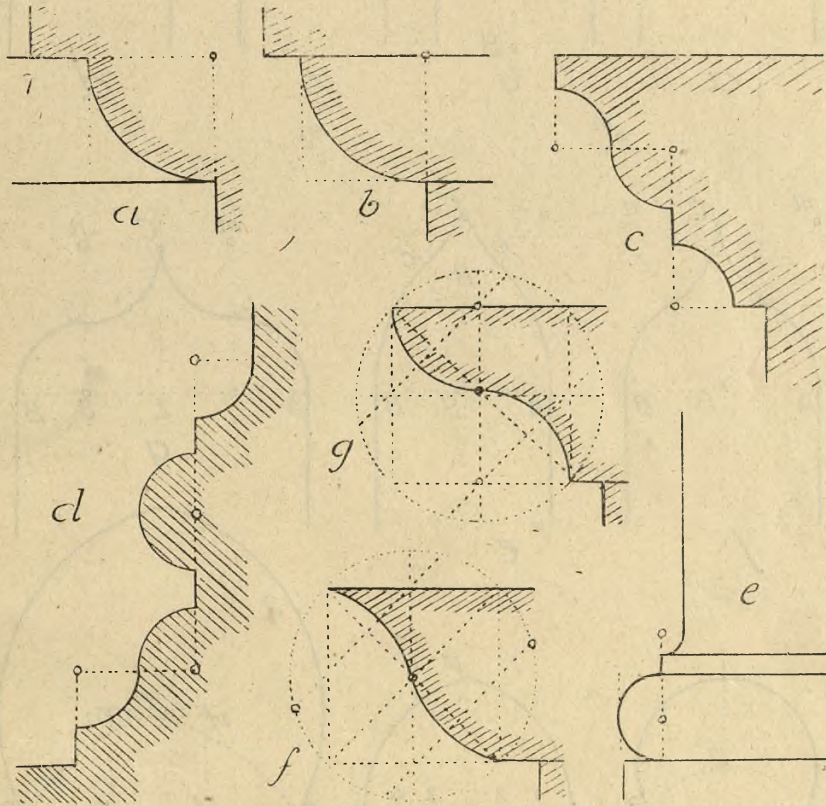
$$P = ?$$

Zadanie:

Obliczyć P odcinka, utworzonego przez bok 6boku umiarnego, wpisanego w koło o promieniu $r = 6.4$ cm! (Wysokość trójkąta obliczyć według tabeli na str. 42!).

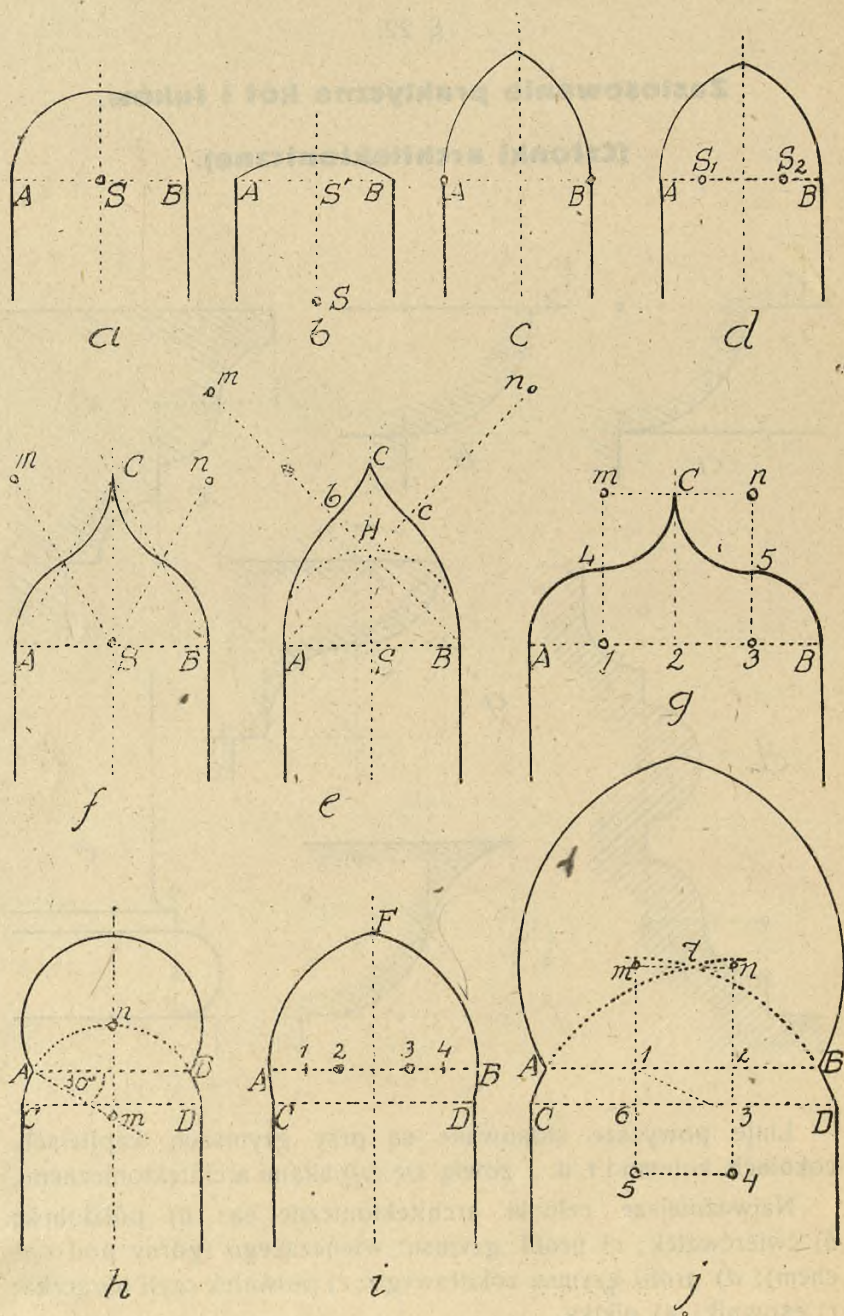
naob. 41, 58 naob. 42, 50

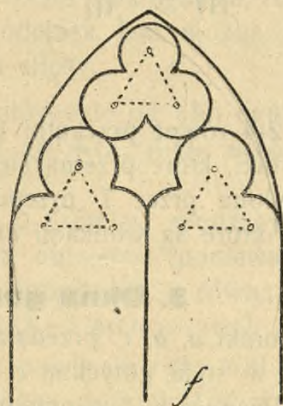
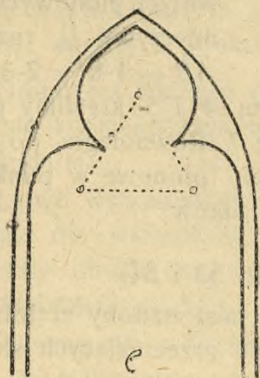
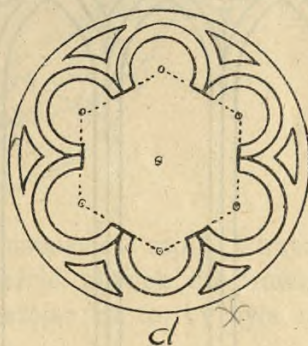
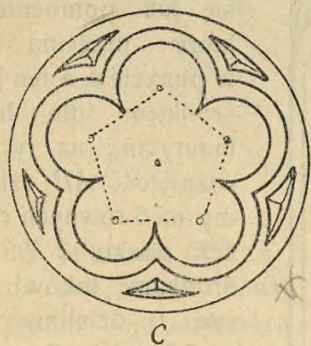
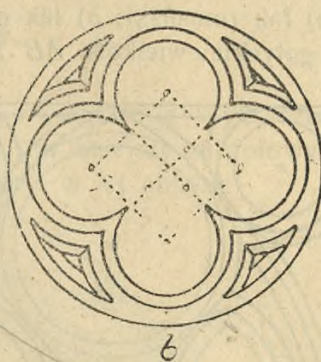
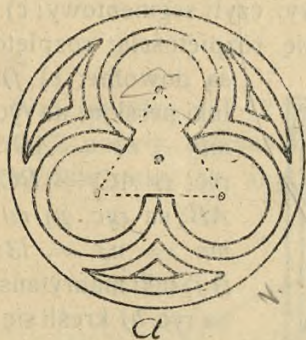
§ 22.

Zastosowanie praktyczne kół i łuków.**(Członki architektoniczne).**

Linje powyższe stosowane są przy gzymsach, kapitelach, cokołach kolumn i t. d. i zowią się członkami architektonicznymi.

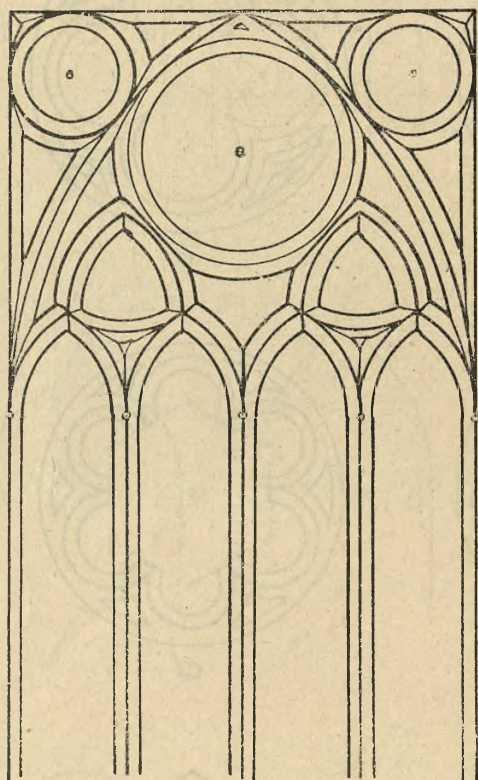
Najważniejsze członki architektoniczne są: a) półłódek; b) ćwierćwałek; c) profil gzymsu wieńczącego (górny pod dachem); d) profil gzymsu cokołowego; e) półwałek czyli obrączka; f) esownik; g) piętka.





2. Łuki stylowe do okien, drzwi i sklepień. (Str. 52).

a) łuk romański; b) łuk odcinkowy, czyli segmentowy; c) i d) łuki gotyckie; wielkość AB zowie się rozpiętością; rozpiętości



są dowolne; e) f) g) łuki perskie; na ryc. e) $mb = nc = AB$; na ryc. f) $AC = BC = AB$; na ryc. g) $ml = mn = n3 = l3$; h) i) j) łuki maurytańskie; na ryc. h) kreśli się Am pod kątem 30° do rozpiętości AB ; z m kreśli się łuk pomocniczy, który przecina oś w punkcie n , a ten jest środkiem dla łuku maurytań.; na ryc. i) rozpiętość AB dzielimy na 6 równych części; punkty 2 i 3 są środkami łuków; na ryc. j) dzielimy AB na 3 równe części i przez punkty 1, 2 prowadzimy pionowe. Natych pionowych odmierzymy $\frac{1}{6}$ rozpięt. $AB = 1-6 = 2-3$, zaś

1-5 i 2-4 równe przekątne 1-3. Z punktu 4 i 5 kreślimy przez A i B łuki, które przetną się w punkcie 7. Równoległa do AB , wykreślona przez 7 przetnie poprzednie pionowe w punktach m i n , które są środkami dla żądanych łuków.

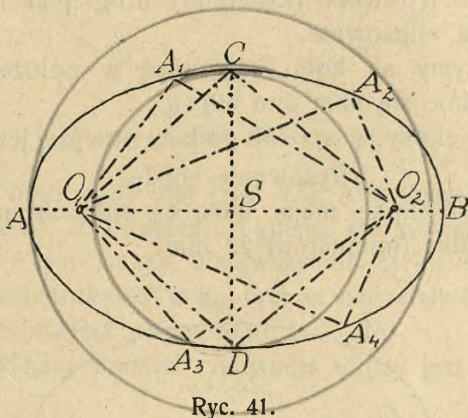
3. Okna gotyckie. (Str. 53 i 54).

Rysunki a , b , c przedstawiają koła jako ozdoby architektoniczne w stylu gotyckim o 3, 4, 5, 6-ciu przecinających się łukach. Rysunki e , f , g przedstawiają wzory okien gotyckich.

§ 23.

Elipsa.

Weźcie nitkę np. 12 cm długą i zwiążcie ją! Wyznaczcie na kartce 2 punkty, których oddalenie jest mniejsze od połowy nitki i rozłóżcie nitkę tak, aby punkty były w jej obrebie!



Ryc. 41.

W punktach O_1 i O_2 (ryc. 41) postawcie 2 szpilki i trzymajcie je dwoma palcami lewej ręki! Weźcie ołówek do prawej ręki i rysujcie linię zapomocą nitki zważając na to, by była zawsze wyprężona.

Linja ta zowie się elipsą. Punkty O_1 i O_2 zowią się ogniskami. Odcinek AB , przechodzący przez oba ogniska, zowie się osią wielką. Jest to największy odcinek, jaki można poprowadzić między 2 punktami obwodu elipsy.

Oddalenia jakiegos punktu na obwodzie od obu ognisk zowią się promieniami wodzącymi, np. A_1O_1 , A_1O_2 , A_2O_1 , A_2O_2 , i tak dalej.

Łatwo wywnioskować, że suma 2 promieni wodzących jest równa dla wszystkich punktów na obwodzie (ponieważ rysowaliśmy obwód nitką związaną i wyprężoną) i równa się osi wielkiej ($A_1O_1 + A_1O_2 = A_2O_1 + A_2O_2 = A_3O_1 + A_3O_2 = AB$).

Prostopadła w środku osi wielkiej zowie się osią małą (CD). Jest to najkrótszy odcinek, jaki można poprowadzić w elipsie.

Końce osi wielkiej zowią się wierzchołkami. (A i B). Punkt S jest środkiem elipsy.

Promienie wodzące końców osi małej są równe, a każdy z nich jest połową osi dużej ($C O_1 = C O_2 = D O_1 = D O_2 = AS$). Przekonajcie się o tem!

Osi dzielą elipsę w 2 kierunkach na utwory symetryczne.

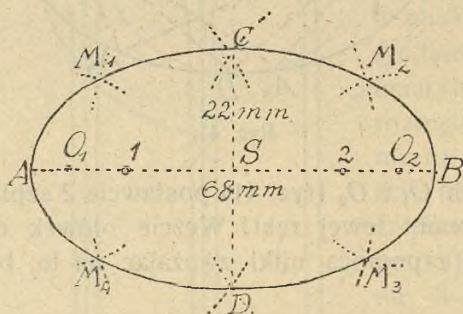
Z formą elipsy spotykamy się często w życiu. Lustra, ramy, sprzęty, grządki i trawniki (kwietniki), drogi planet i ziemi naokoło słońca są elipsowate.

Gdy patrzymy na koło, ustawione w położeniu ukośnem, natenczas wydaje się nam ono elipsą.

Rysowanie elipsy w sposób podany powyżej jest niewygodne.

Rysowanie elipsy.

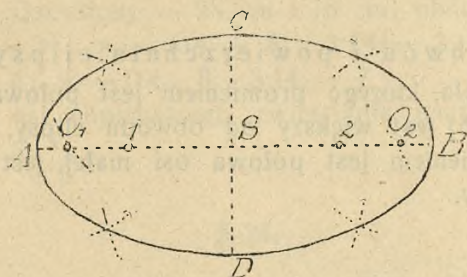
a) Wykreślić elipsę, mając daną oś dużą 68 mm i oddalenie ognisk od środka (mimośród) 22 mm!



Ryc. 42.

Rysujemy oś wielką $AB = 68$ mm (ryc. 42), przepoławiamy ją i odcinamy od środka po 22 mm, wyznaczając ogniska O_1 i O_2 . Aby wykreślić oś małą, bierzemy do cyrkla połowę osi dużej AS i kreślimy łuki z obu ognisk O_1 i O_2 na górze i na dole. Następnie wyznaczamy na osi dużej dowolny punkt np. 1, bierzemy do cyrkla odległość $B1$ i zakreślamy nią łuki z ogniska O_2 na górze i na dole, lecz po przeciwnej połowie elipsy. To samo czynimy z ogniska O_1 . Rozwartością $A1$ przetniemy następnie te łuki z obu ognisk. W ten sposób uzyskamy 4 punkty M_1 , M_2 , M_3 , M_4 na obwodzie elipsy. Podobnie możemy wyznaczyć większą ilość punktów na obwodzie elipsy, którą potem wykreślamy z wolnej ręki.

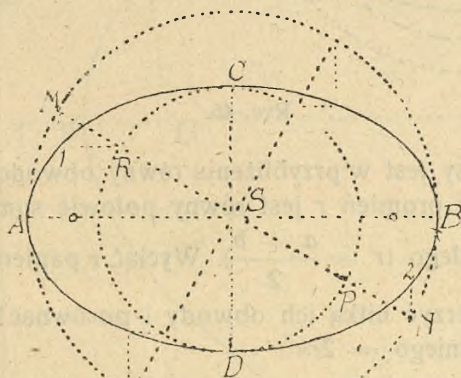
b) Wykreślić elipsę, której oś wielka = 52 mm, oś mała = 30 mm!



Ryc. 43.

Rysujemy obie dane osi (ryc. 43). Aby wyznaczyć ogniska, musimy pamiętać, że oddalenie ogniska od końca osi małej jest równe połowie osi dużej. Wziąwszy do cyrkla tę połowę, zakreślamy z wierzchołka osi małej łuki na osi wielkiej. Inne punkty elipsy wyznaczamy jak poprzednio.

c) Najzwyczajniejszy sposób rysowania elipsy jest nast.:



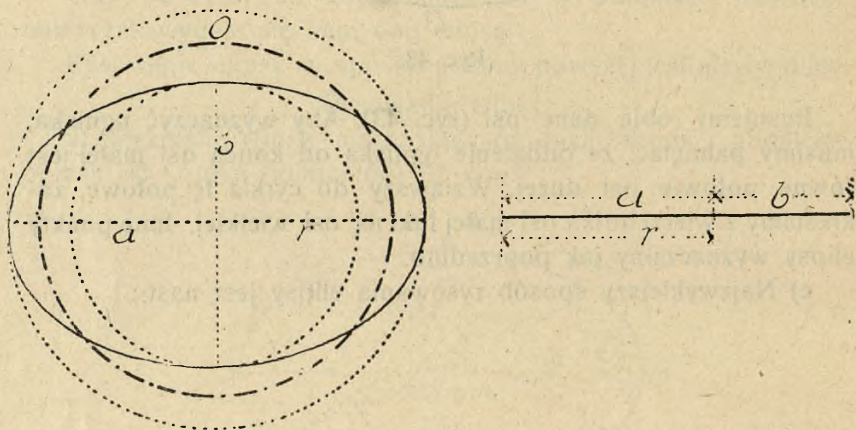
Ryc. 44.

Rysujemy ze środka S (ryc. 44) 2 koła współśrodkowe przez wierzchołki osi dużej i małej. Następnie wykreślamy dowolną prostą np. MN i prowadzimy z M i N prostopadłe do AB, a z P i R równoległe do AB. Punkty przecięcia się tychże są

sa punktami elipsy (1, 2). Takich prostych kreślimy więcej, otrzymując więcej punktów elipsy, którą wreszcie wykreślamy z wolnej ręki.

Obwód i powierzchnia elipsy.

Obwód koła, którego promieniem jest połowa osi wielkiej elipsy, (ryc. 45) jest większy od obwodu elipsy. Obwód koła, którego promieniem jest połowa osi małej, jest mniejszy od obwodu elipsy.



Ryc. 45.

Obwód elipsy jest w przybliżeniu równy obwodowi średniego koła O , którego promień r jest równy połowie sumy promienia większego i małego ($r = \frac{a+b}{2}$). Wyciąć z papieru elipsę i koło średnie, zmierzyć nitką ich obwody i porównać!

$$O \text{ koła średniego} = 2r\pi$$

$$O \text{ el.} = 2 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \pi \text{ (zamiast } r \text{ wstawiliśmy } \frac{a+b}{2}).$$

$$O = (a+b) \cdot \pi.$$

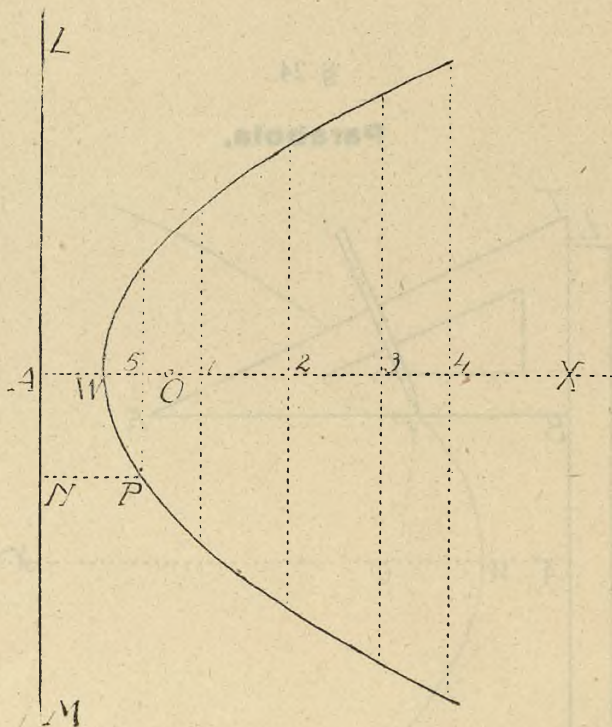
Obwód elipsy znajdziemy, jeżeli połowy osi dodamy i sumę pomnożymy przez π .

$$P \text{ koła środkowego} = r^2\pi = r \cdot r \cdot \pi$$

$$P \text{ el.} = a \cdot b \cdot \pi \text{ (zamiast } r \text{ wstawiliśmy } a \text{ i } b).$$

trójkąt RST do linijki LM , trzymajcie mocno szpilkę w punkcie O i posuwajcie trójkąt wzdłuż linijki, rysując równocześnie ołówkiem linję krzywą tak, aby koniec ołówka P przylegał zawsze do trójkąta, a nitka była wciąż wypreżona.

Krzywa, którą w ten sposób otrzymaliśmy, zowie się parabolą.



Ryc. 47.

Punkt stały O zowiemy ogniskiem, prostą AX (ryc. 47), przechodzącą przez ogniska osią, prostą LM , prostopadłą do osi kierownicą.

Punkt W na osi jednakowo oddalony od kierownicy LM i ogniska O jest wierzchołkiem paraboli, proste zaś $OP = SP$ są promieniami wodzącymi.

Wykreślić parabolę, mając daną odległość ogniska od kierownicy (czyli połowę t. zw. parametru) 16 mm!

20

Rysujemy $LM \perp AX$, następnie odcinamy $AO = 20 \text{ mm}$, dzielimy na połowę w W . Na prostej WX wyznaczamy dowolne punkty 1, 2, 3, ... i prowadzimy przez nie prostopadłe do osi AX . Następnie bierzemy do cyrkla np. odległość $A5$ i tą rozwartością z ogniska O przecinamy prostopadłą, przechodzącą przez 5, po obu stronach. Podobnie rozwartością $A1$ przecinamy z ogniska O prostopadłą, przechodzącą przez 1 i t. d. Uzyskawszy w ten sposób więcej punktów paraboli, wykreślamy ją wreszcie z wolnej ręki.

Zadania: Wykreślić parabolę, mając dane $2p$ (parametr = podwójna odległość z ogniska do kierownicy):

- a) 26 mm; b) 32 mm; c) 38 mm.

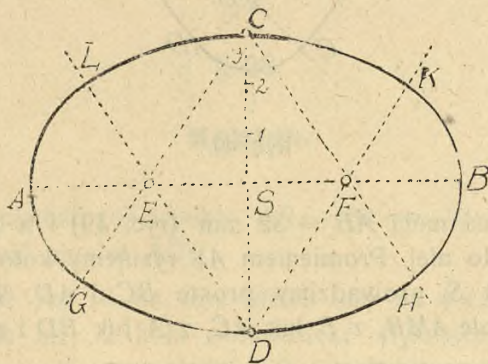
III.

Krzywe.

Przy rysowaniu krzywych unikamy, o ile możliwości, rysowania z wolnej ręki, lecz dzielimy je na części i poszczególne łuki wykonujemy cyrklem. Najważniejsze rodzaje krzywych są:

§ 25.

Owal.



Ryc. 48.

Wykreślić owal, mając daną oś małą = 4 cm! (Zob. ryc. 48).

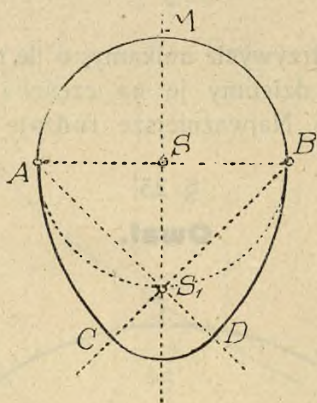
Wykreślamy oś małą $CD = 40$ mm, do niej w jej środku prostopadłą AB , na razie nieograniczoną, dzielimy CS na 3 równe części i odcinamy $SE = SF = 2/3CS$. Z C i D prowadzimy przez E i F proste, następnie kreślimy łuki: GH z C , KL z D , LG z E i HK z F .

Kształt owali nadaje się „włazom“ („manlochom“) do kotłów parowych, aparatów, ogniowom²łańcuchów, klombom ogrodn. itd.

§ 26.

Linja jajowa.

Dana oś mała $= 32$ mm. Wykreślić linję jajową!



Ryc. 49.

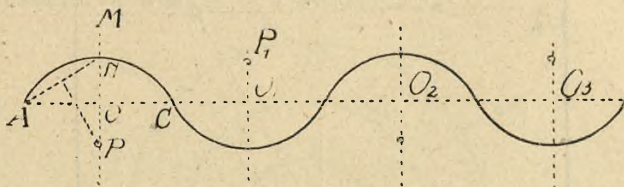
Rysujemy oś małą $AB = 32$ mm (ryc. 49) i w jej środku S prostopadłą do niej. Promieniem AS rysujemy koło pomocnicze i przez punkt S_1 prowadzimy proste BC i AD . Wreszcie z S kreślimy półkole AMB , z B łuk AC , z A łuk BD i z S_1 łuk CD .

(Uwaga. Przy kreśleniu tych linii trzeba zważać na to, aby linja miała ciągłość, t. zn. aby poszczególne łuki, z których się linja składa, dokładnie się z sobą stykały).

§ 27.

Linja falowa.

Wykreślić falową, mając daną długość fali $= 2$ cm; wysokość $= 6$ mm!



Ryc. 50.

Kreślimy prostą pomocniczą (ryc. 50) i odcinamy na niej długości fali po 2 cm i środki tychże. W środku każdej fali $O, O_1, O_2 \dots$ rysujemy prostopadłe. Na pierwszej prostopadłej OM odmierzymy wysokość fali $ON = 6$ mm, łączymy punkt N z A i wykreślamy w środku AN prostopadłą. Z punktu P , w którym ta prostopadła przecina pionową MP , rysujemy pierwszą falę: ANC . Odległość OP powtarzamy na wszystkich pionowych naprzemian w odwrotnym kierunku, wyznaczając punkty, z których następnie wykreślamy dalsze fale.

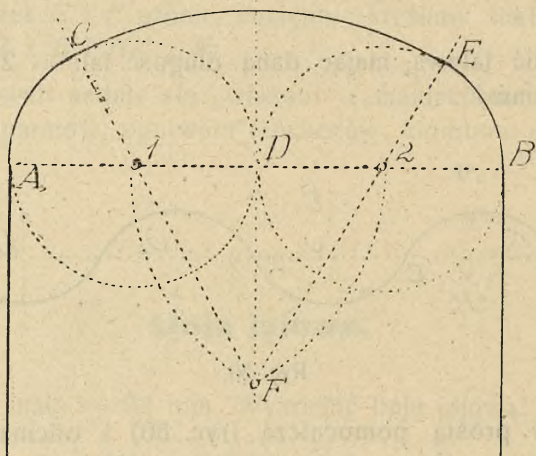
§ 28.

Kabłąk.

Dana rozpiętość (oś wielka) $AB = 64$ mm. Wykreślić kabłąk (= przesklepić przelot AB)!

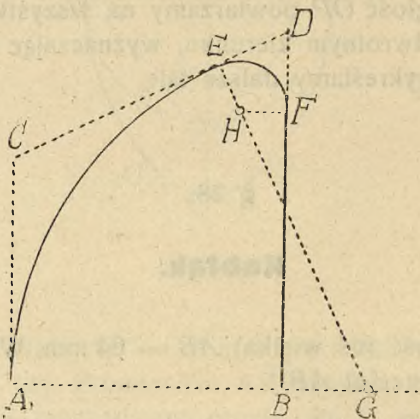
Rozpiętość $AB = 64$ mm dzieli się na 4 części (ryc. 51) i wykreśla na niej 2 koła pomocnicze stykające się. Przez D prowadzimy $\perp$ do rozpiętości AB i zakreślamy z 2 łuk $1F$, z 1 łuk $2F$. Wreszcie rysuje się kabłąk, złożony z 3 łuków, AC, CE, EB , z punktów $1, F, 2$.

Kabłąki stosowane są przy konstrukcjach sklepień łukowych (beczkowych), w piwnicach, w bramach, nitach i t. p.



Ryc. 51.

§ 29.

Łuk wspięty czyli pełzający.

Ryc. 52.

Dany czworobok $ABCD$. Wykreślić łuk wspięty!

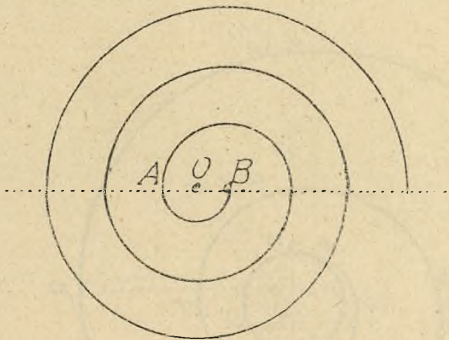
Odcinamy $CE = AC$ i $DF = ED$. (ryc. 52). Kreślimy $EG \perp CD$ i $HF \perp BD$. Z G rysujemy łuk AE , z H łuk EF .

Łuki wspięte stosowane są w klatkach schodowych, jako sklepienia do podpierania schodów i t. p.

§ 30.

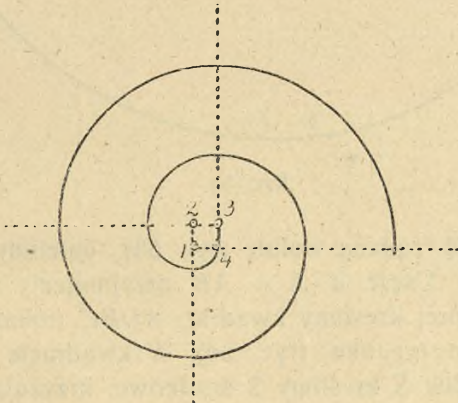
Linje ślimakowe czyli spiralne.

1. Ślimak Archimedeses o 2 środkach.



Ryc. 53.

Mając dane koło, t. zw. „oko ślimaka“ o średnicy AB , (ryc. 53), kreślimy pierwsze półkoło ze środka O promieniem AO , nast. z punktu B promieniem AB , nast. naprzemian z punktów O i B .

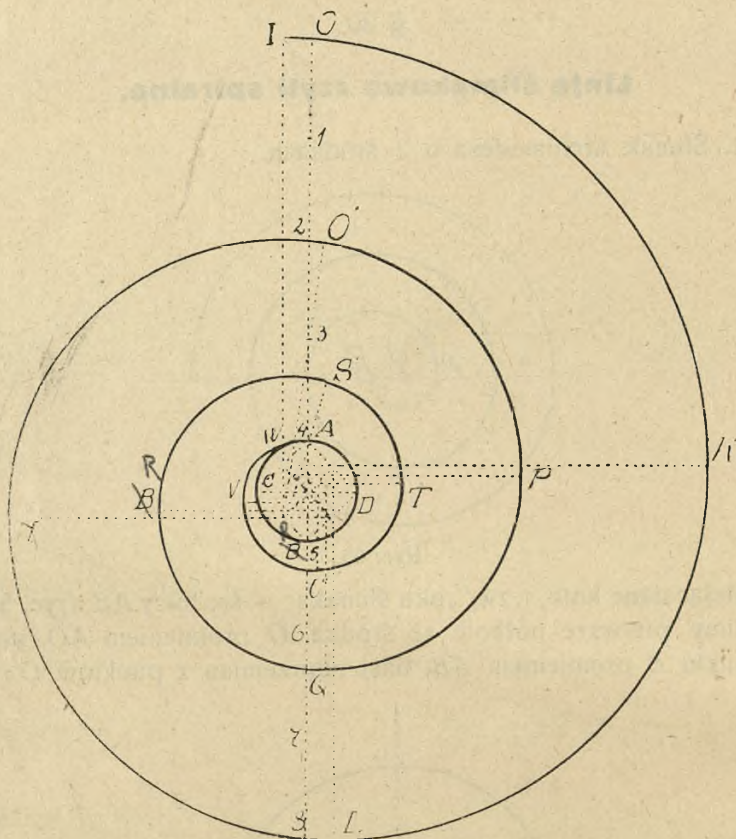


Ryc. 54.

2. Ślimak Archimedeses o 4 środkach. Sprężyny zegarowe, buforowe przy wagonach i t. p. mają kształt ślimaka Archimedeses.

3. Woluty jońskie.

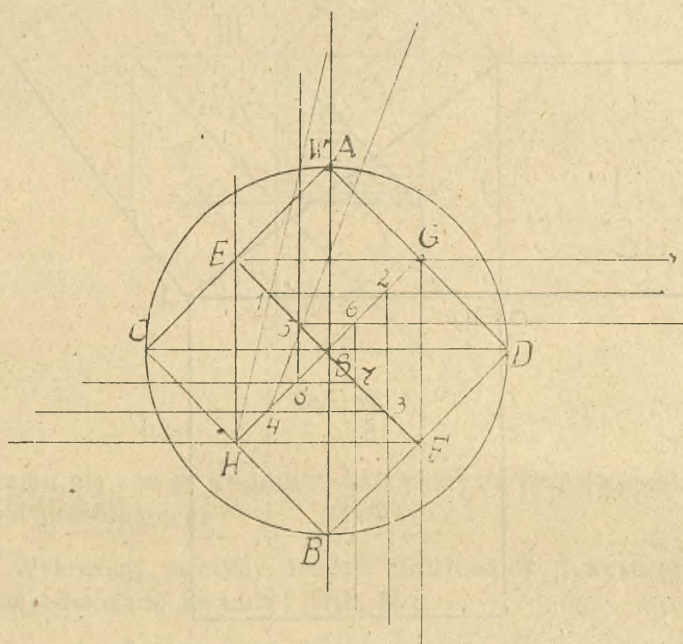
Dana wielkość woluty $O - 8$ (ryc. 55).



Ryc. 55.

Aby nakreślić żadaną wolutę (ryc. 55), dzielimy $O - 8$ na 8 równych części. Część $4 - 5 = AB$ przyjmujemy za przekątnię kwadratu, na której kreślimy kwadrat: $ADBC$, pokazany oddzielnie na większym rysunku (ryc. 56). W kwadracie tym (ryc. 55 i 56) przez środek S kreślimy 2 środkowe, krzyżujące się linie: EF i GH , z których każdą dzielimy na 6 równych części w punktach: 1, 2, 3, ... Przez punkty te prowadzimy linie i zakreślamy łuki z punktów następujących:

- a) z punktu E przez O od I do K (K jest na linii EG , a I na linii HE);
- b) z punktu G przez K do L (L jest na linii GF);
- c) z punktu F przez L do N (N jest na linii HF);
- d) z punktu H przez N do O' (O' jest na linii HI);
- e) z punktu 1 przez O' do P (P jest na linii $1-2$);
- f) z punktu 2 przez P do Q (Q jest na linii $2-3$);
- g) z punktu 3 przez Q do R (R jest na linii $3-4$);
- h) z punktu 4 przez R do S' (S' jest na linii $4-5$);
- k) z punktu 5 przez S' do T (T jest na linii $5-6$);
- m) z punktu 6 przez T do U (U jest na linii $6-7$);
- n) z punktu 7 przez U do V (V jest na linii $7-8$);
- o) z punktu 8 przez V do W (W znajduje się na obwodzie koła, opisanego o średnicy AB). Koło to zowie się okiem woluty.



Ryc. 56.

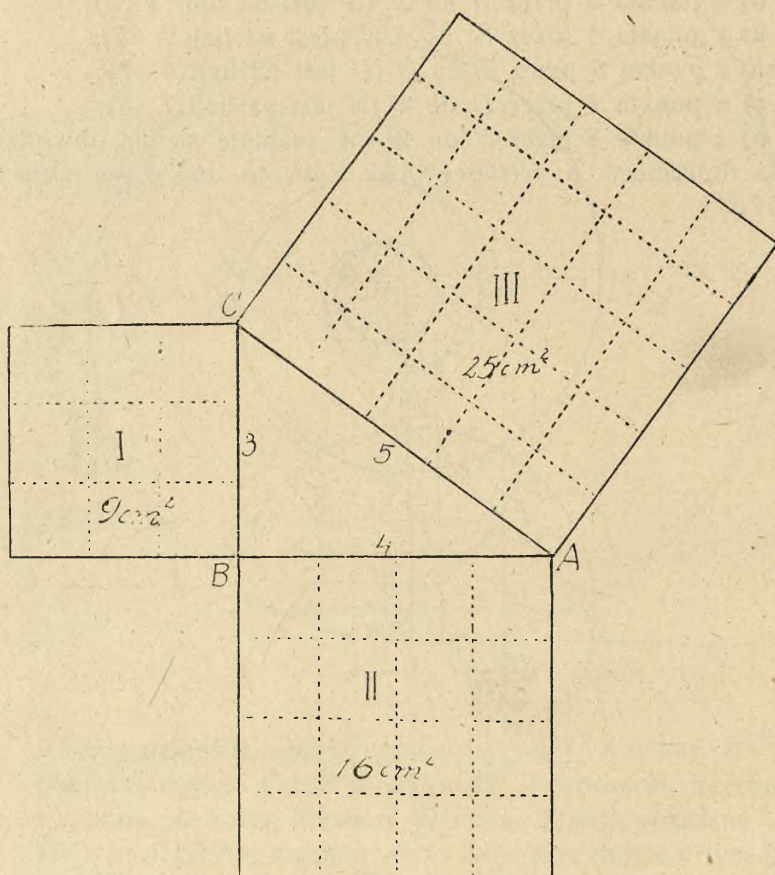
Linij powyższych używano do głów (kapiteli) przy kolumnach jońskich.

IV.

§ 31.

Twierdzenie Pitagorasa.

Powtórzcie o trójkącie prostokątnym!



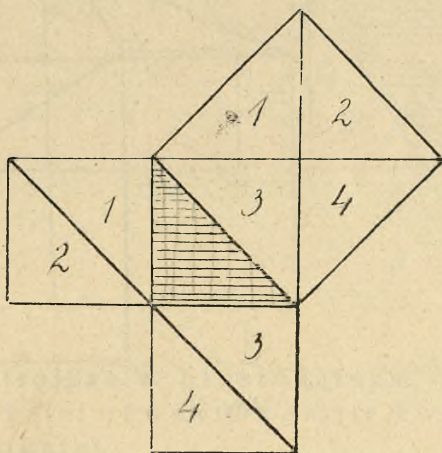
Ryc. 57.

1. Wykreślcie trójkąt prostokątny o przyprostokątniach 3 cm i 4 cm! Zmierzcie, ile wynosi przeciwprostokątnia! (Ryc. 57).

Wykreście na wszystkich 3 bokach kwadraty, a więc kwadrat I o boku 3 cm, kwadrat II o boku 4 cm, kwadrat III o boku 5 cm! Ile wynosi P I, ile P II, a ile P III-go kwadratu? Zliczcie powierzchnie $I + II$ kwadratu! Co zauważycie?

Kwadrat, wystawiony na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, jest równy sumie kwadratów, wystawionych na obu przyprostokątniach.

2. Wykreście trójkąt prostokątny równoramienny, następnie wystawcie kwadraty na jego przyprostokątniach, podzielcie te kwadraty wzdłuż przekątnej na połowy, wytnijcie wszystko i ułóżcie z tych 2 kwadratów kwadrat na przeciwprostokątnej (ryc. 58).



Ryc. 58.

Czemu się równa kwadrat, wystawiony na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego?

3. Wykreślmy dowolny trójkąt prostokątny i wystawmy na przeciwprostokątnej kwadrat! (Ryc. 59).

Następnie poprowadźmy z wierzchołka D prostopadłą do podstawy AB , z wierzchołka E prostopadłą GE do DF i z wierzchołka C prostopadłą CH do DF . Otrzymamy 4 trójkąty prostokątne przystające: $CHD \cong DGE \cong EKA \cong ABC$.

Udowodnić!

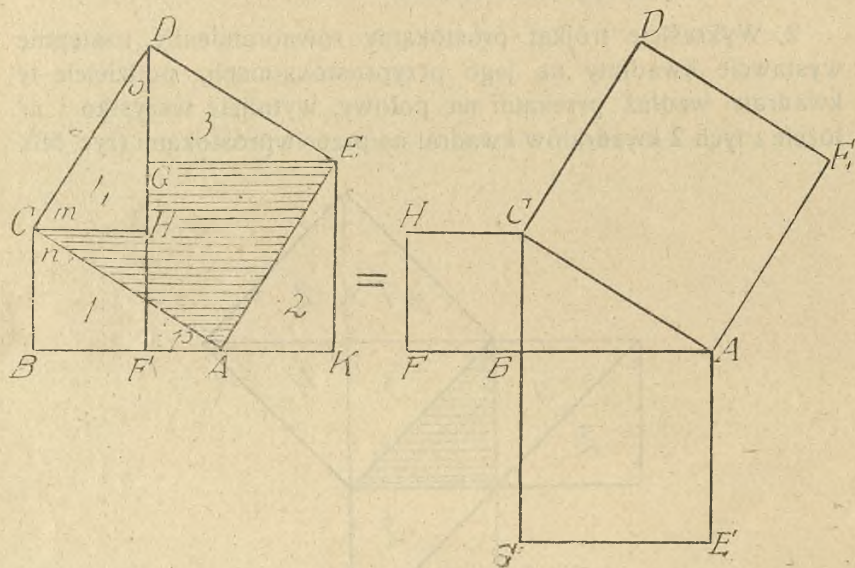
Przykład: $\triangle ABC \cong \triangle CHD$

$$CA = CD$$

$\sphericalangle m = \sphericalangle n$ (ramiona zgodnie prostopadłe, zob. Geom. I. § 28).

$\sphericalangle o = \sphericalangle p$ " " "

III przypadek przystawiania trójkątów (zob. Geom. cz. I. str. 51).



Ryc. 59.

Z przystawiania trójkątów wynika, że $AK = BC = BF = \dots$

Jeżeli od kwadratu $ACDE$ odejmiemy trójkąty 3 i 4, a wstawimy je do boków AE i AC , natenczas otrzymamy 2 kwadraty: $BCHF$ i $FKEG$.

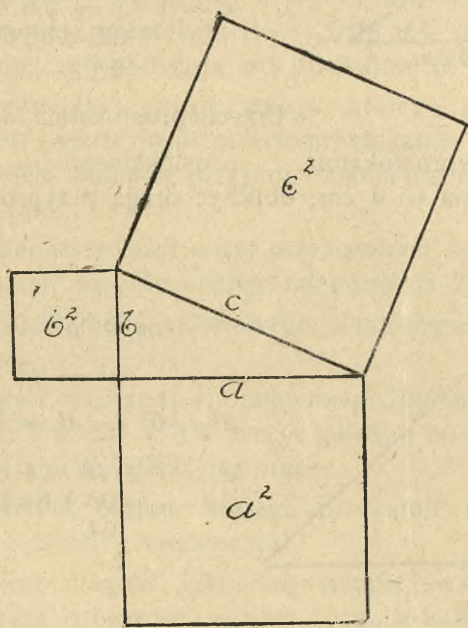
Kwadrat $BCHF$ jest wystawiony na przyprostokątnej BC , kwadrat $GEFK$ na przyprostokątnej BA (ponieważ $FK = BA$, dlaczego?).

Czemu się tedy równa kwadrat przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego?

4. Wykreślić dowolny $\triangle$ prostokątny, zmierzyć boki, podnieść wszystkie liczby do 2-giej potęgi, następnie dodać kwadraty obu przyprostokątnej! Co zauważycie?

Pamiętajcie:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



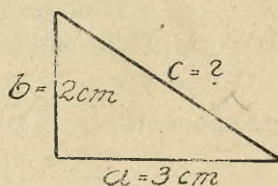
W każdym trójkącie prostokątnym kwadrat przeciwprostokątnej równa się sumie kwadratów obu przyprostokątnej.

Prawo to zowie się **twierdzeniem Pitagorasa** podług greckiego uczonego Pitagorasa, który je pierwszy wynalazł i udowodnił. Żył w VI wieku przed Chr.

Prawo to ma ogromne znaczenie w życiu praktycznym, gdyż podaje sposób wyszukania jednego boku trójkąta prostokątnego, gdy są dane 2 inne boki. Np.:

a) Obie przyprostokątne $\triangle$ prostokątnego, wynoszą $a = 3$ cm, $b = 2$ cm; obliczyć przeciwprostokątną:

Znając twierdzenie Pitagorasa, obliczymy to w następujący sposób:



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9$$

$$c^2 = 13$$

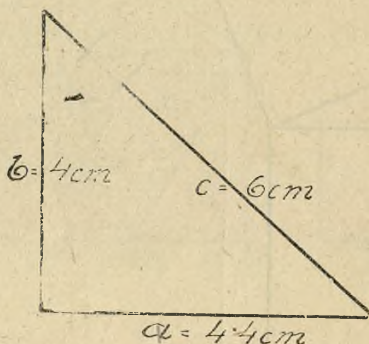
$$c = \sqrt{13} = 3.6 \text{ cm}$$

$$400 : 66.6$$

$$= 4$$

Przeciwprostokątna wynosi 3.6 cm.

b) Przeciwprostokątnia $\triangle$ prostokątnego = 6 cm, jedna przyprostokątnia = 4 cm; obliczyć drugą przyprostokątnię!



$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ stąd:}$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$$

$$a = \sqrt{20} = 4.4 \text{ cm}$$

$$400 : 84.4$$

$$64$$

2-ga przyprostokątnia wynosi 4.4.

W każdym trójkącie prostokątnym kwadrat jednej przyprostokątnej równa się różnicy kwadratu przeciwprostokątnej i kwadratu drugiej przyprostokątnej.

Zadania:

1. Obliczyć przeciwprostokątną c $\triangle$ prostokątnego, jeżeli przyprostokątne wynoszą $a = 6 \text{ m}$, $b = 8 \text{ m}$!
2. Obliczyć, ile wynosi jedna przyprostokątna, jeżeli przeciwprostokątna $c = 15 \text{ dm}$, a druga przyprostokątna $a = 12 \text{ dm}$!
3. W $\triangle$ równoramiennym wynosi podstawa $a = 6 \text{ m}$, a ramię $b = 5 \text{ m}$; wyszukać wysokość!
4. Bok $\triangle$ równobocznego $a = 25 \text{ cm}$; obliczyć wysokość!
5. Bok 6boku umiarowego $a = 3.1 \text{ dm}$; obliczyć oddalenie boku od środka!

6. Bok 5boku umiarowego $a = 7.6$ dm, promień koła opisanego na nim $R = 5.3$ dm; obliczyć promień r koła wpisanego!

7. Obliczyć przekątnię kwadratu, którego bok $a = 8.4$ cm. (Przekonaj się rysunkiem o prawdziwości rachunku)!

8. Powierzchnia prostokąta $P = 20.28$ m², jego wysokość $b = 3.9$ m; obliczyć podstawę a i przekątnię p !

9. Ile wynosi $P \triangle$ prostokątnego, którego kąty ostre wynoszą 60° i 30° , jeżeli jego przeciwprostokątnia $c = 22$ cm? (W takim trójkącie mniejsza przyprostokątnia jest zawsze połową przeciwprostokątnej).

10. Do jakiej wysokości sięga przystawiona do muru drabina 12 m długa, jeżeli na dole odstaje od muru na $2\frac{1}{2}$ m?

11. Obliczyć P 6boku umiarowego, wpisanego w koło o promieniu 32 mm!

12. Obliczyć P trapezu równoramiennego, którego boki równoległe wynoszą: 5.2 cm i 1.4 cm, a jeden z boków nierównoległych $= 3$ cm! (Wykreślić ten trapez).

13. Obliczyć O rombu, którego przekątne wynoszą: $p = 6$ cm, $p' = 2$ cm! (Narysować)!

14. Jaka jest długość igły magnetycznej, w formie rombu, której największa szerokość wynosi 1 cm, a każdy z jej 4 boków $5\frac{1}{2}$ cm?

V.

Podobieństwo figur płaskich.

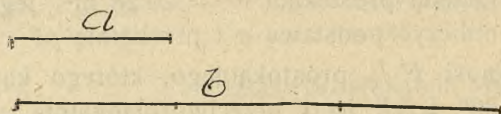
§ 32.

Stosunek odcinków.

Jeżeli dwa odcinki różne porównamy w tym celu, by się przekonać, ile razy jeden mieści się w drugim, natenczas nazywamy takie porównanie **stosunkiem odcinków** (ryc. 60).

Podobnie zestawiamy w stosunek liczby celem ich porównania, np. 1 : 3.

Aby stosunek odcinków był jaśniejszy, wyrażamy go w liczbach:



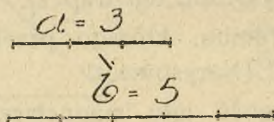
Ryc. 60.

$a : b = 1 : 3$ i mówimy: a do b ma się tak, jak 1 do 3.

Znaczy to, że sprawdziliśmy, iż odcinek a mieści się 3 razy w odcinku b , czyli odcinek b jest 3 razy większy od a .

Przykład: Grubość cegły ma się do szerokości, jak 1 : 2; szerokość do długości jak 1 : 2.

Wykreślić 2 odcinki w stosunku 3 : 5!



Ryc. 61.

$$a : b = 3 : 5$$

Rysujemy dowolny odcinek a (ryc. 61) i dzielimy go na 3 równe części, następnie odcinamy na odcinku b 5 takich samych części.

Powtórzcie z nauki rachunków o stosunku! Z czego się składa? Jak się nazywają poszczególne wyrazy? Co otrzymamy z podzielenia wyrazów? Co znaczy skrócić stosunek? rozszerzyć? Kiedy się stosunek nie zmienia? Jakie stosunki są równe?

Okna mają różny kształt: szerokość ma się do wysokości, jak 1 : 2 lub 3 : 5, 5 : 8 itp.

Zadania:

1. Wykreślić 2 odcinki w stosunku 1 : 4!
2. Wykreślić prostokąt, aby szerokość miała się do długości jak 1 : 3!

3. Wykreślić 2 odcinki w stosunku: a) 4 : 3, b) 2 : 5!

4. Wykreślić 2 odcinki w stosunku 2 : 3, jeżeli krótszy ma mieć 3 cm! Ile musi wynosić drugi?

(Ile części ma mieć krótszy odcinek? Ile cm wynosi każda część odcinka krótszego? Ile cm musi także wynosić każda część odcinka dłuższego? Ile części ma mieć odcinek dłuższy? Ile cm musi wynosić odcinek dłuższy?)

5. Wykreślić prostokąt o długości 42 mm, jeżeli stosunek rozmiarów ma być 6 : 5!

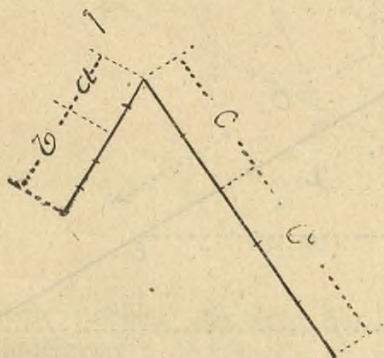
6. Wykreślić $\triangle$ prostokątny, którego przyprostokątne stoją w stosunku 4 : 5, jeżeli dłuższa = 55 mm!

7. W jakim stosunku jest szerokość tablicy do długości? długość klasy (podłogi) do szerokości?

§ 33.

Proporcje odcinków.

Narysujmy odcinki a i b w stosunku 2 : 3, a obok odcinki c i d w stosunku tym samym (ryc. 62).



$$a : b = 2 : 3$$

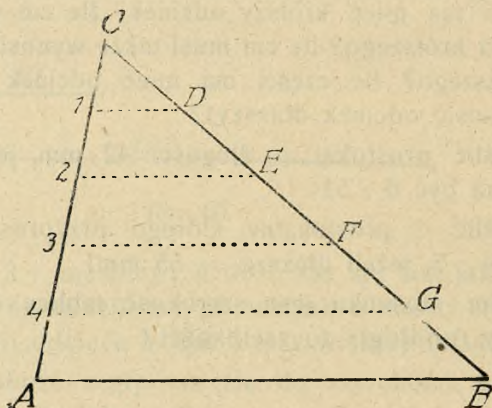
$$c : d = 2 : 3$$

Ryc. 62.

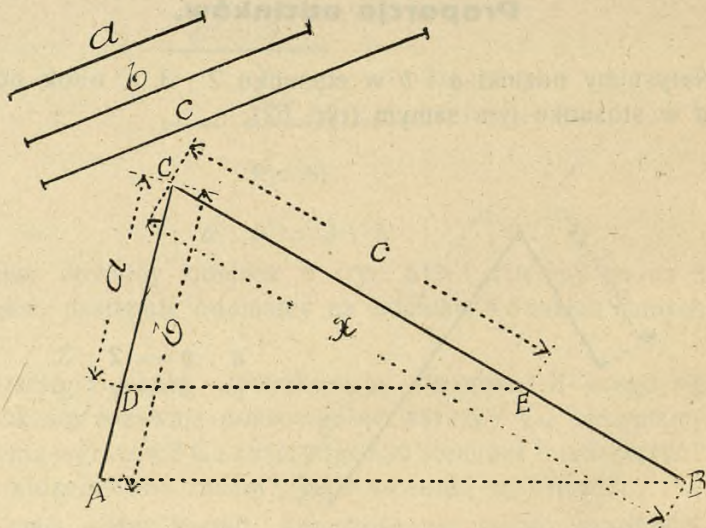
Z dwóch równych stosunków możemy utworzyć proporcję:

$$a : b = c : d.$$

Podzielmy bok AC $\triangle ABC$ (ryc. 63) na 5 równych części!
 Wykreślmy z punktów 1, 2, 3, 4 równoległe do podstawy AB .
 Na ile części został podzielony bok BC ? Jakie są te części?



Ryc. 63.



Ryc. 64.

Jeżeli w trójkącie jeden bok podzielimy na równe odcinki i z punktów podziału poprowadzimy równoległe do 2-go boku, to 3-ci bok zostanie podzielony na tę samą ilość równych odcinków.

Poszczególne odcinki tworzą proporcje, np.:

$$C2 : 2A = CE : EB$$

$$C2 : CA = CE : CB$$

$$C3 : 3A = CF : FB$$

$$C4 : CA = CG : CB$$

$$C1 : CA = CD : BC \text{ i t. d.}$$

Udowodnić prawdziwość tych proporcji!

Przykład :

Dane 3 odcinki a, b, c ; wykreślić 4-ty proporcjonalny! (Ryc. 64).

Na jednym boku trójkąta odcinamy odcinki a i b , na drugim odcinek c . Następnie łączymy D z E i prowadzimy z A równoległą do DE . $BC = x$ jest szukanim odcinkiem.

Zadania:

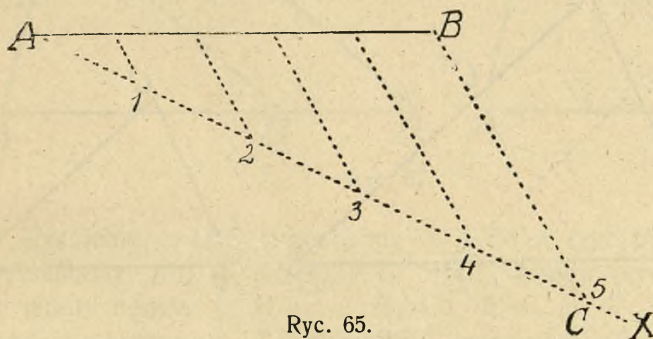
1. Dane odcinki: $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm; wykreślić 4-ty odcinek proporcjonalny! (Sprawdzić rachunkiem)!

2. Dane odcinki 23 mm, 35 mm i 27 mm. Wykreślić 4-ty proporcjonalny! (Sprawdzić rachunkiem)!

3. Dane odcinki: $a = 2.5$ cm, $b = 3.2$ cm, $c = 4.1$ cm; wykreślić 4-ty proporcjonalny! (Sprawdzić rachunkiem)!

Przykład:

Podzielić dany odcinek a na 5 równych części!



Ryc. 65.

Rysujemy odcinek AB (ryc. 65) i dowolną prostą AX , na której odmierzymy 5 dowolnych, ale równych części. C łączymy z B , a następnie prowadzimy równoległe do BC z punktów 4, 3, 2, 1.

Zadania:

1. Podzielić dowolny odcinek: a) na 7 części równych;

b) na 9 części równych.

2. Podzielić: a) 1 dm na cm!

b) 1 cm na mm!

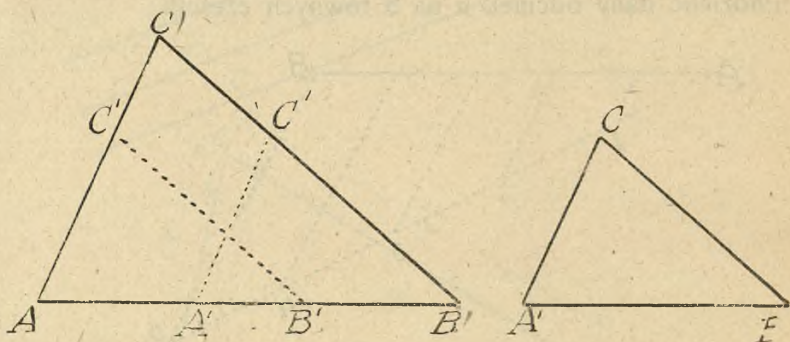
3. Wykreślić odcinek $2\frac{1}{3}$ cm!
(Ponieważ $2\frac{1}{3}$ cm $= \frac{7}{3}$ cm, dlatego rysujemy najpierw odcinek $= 7$ cm i dzielimy go na 3 części).
4. Wykreślić odcinek: a) $1\frac{3}{8}$; b) $1\frac{5}{7}$ cm.
5. Podzielić dany odcinek AB w stosunku 3 : 4.
(Rysujemy podobnie, jak na ryc. 65).
6. Podzielić dany odcinek w stosunku 6 : 9.

§ 34.

Trójkąty podobne.

Powtórzcie z klasy I o utworach podobnych! Jaki jest znak podobieństwa?

Wykreślić $\triangle ABC$, obok niego drugi $\triangle A'B'C'$, mający kąty odpowiednio równe pierwszemu, lecz boki odpowiednio nierówne (ryc. 66).



Ryc. 66.

$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$. Połóżmy $A'B'C'$ na ABC tak, aby wierzchołek A' padł na wierzchołek A , a ramię $A'C'$ na AC . Wtedy będzie $B'C' \parallel BC$, a boki obydwu trójkątów ABC i $A'B'C'$ odpowiednio proporcjonalne. (§ 32).

$A'B' : AB = A'C' : AC$. (Zmierzyć boki i sprawdzić)! Gdy $\triangle A'B'C'$ położymy na $\triangle ABC$ tak, aby wierzchołek $\sphericalangle B'$ trójkąta $A'B'C'$ padł na $\sphericalangle B$ trójkąta ABC , wtedy będzie:

$$B'C' : BC = A'B' : AB.$$

Trójkąty, mające kąty odpowiednio równe, a boki odpowiednio nierówne, zwiemy podobnemi.

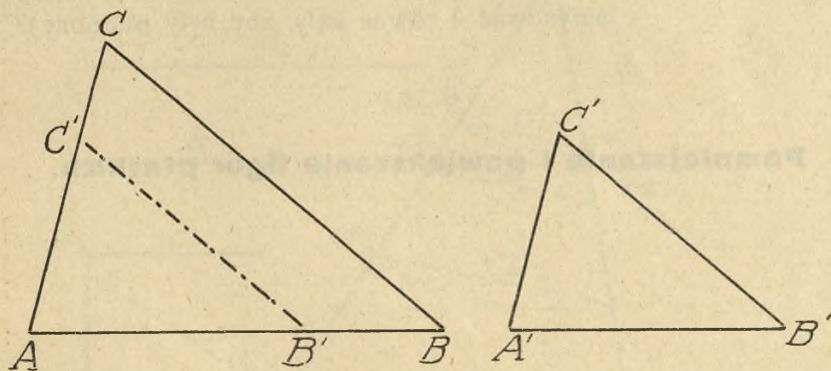
$$ABC \sim A'B'C'.$$

Trójkąty podobne mają boki odpowiednio proporcjonalne.

Suma wszystkich 3 kątów w trójkącie wynosi 180° . Z tego wynika, że 2 trójkąty, mające po 2 kąty odpowiednio równe, mają też 3-ci kąt równy.

Trójkąty, mające po 2 kąty odpowiednio równe, są podobne.

Wykreślić 2 trójkąty, mając dane po dwa boki odpowiednio proporcjonalne i kąt między temi bokami zawarty równy.



Ryc. 67.

Rysujemy $\triangle ABC$, przenosimy $\sphericalangle A$ do A' (ryc. 67), następnie wykreślamy: $A'B' : AB = A'C' : AC$. Łatwo wywnioskować, że wtedy będzie: $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, a $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$. Aby to udowodnić, położymy $\triangle A'B'C'$ na ABC , natenczas będzie $B'C' \parallel BC$. A z tego, cośmy się poprzednio uczyli, wynika, że te dwa trójkąty są podobne, $ABC \sim A'B'C'$.

Trójkąty są podobne, jeżeli mają po 2 boki proporcjonalne i kąt między temi bokami zawarty równy.

Wykreślić 2 trójkąty, mając dane wszystkie boki odpowiednio proporcjonalne. Jakie trójkąty otrzymamy?

Trójkąty, mające po 3 boki odpowiednio proporcjonalne, są podobne.

Powtórzcie, kiedy są trójkąty podobne?

Pamiętajcie więc: Trójkąty są wtenczas podobne, jeżeli mają:

- a) 2 kąty równe;
- b) 2 boki proporcjonalne i kąt między nimi równy;
- c) wszystkie boki proporcjonalne.

Zadania:

Wykreślić: a) 2 podobne kwadraty;

b) 2 podobne $\triangle$ równoboczne;

c) 2 podobne $\triangle$ prostokątne;

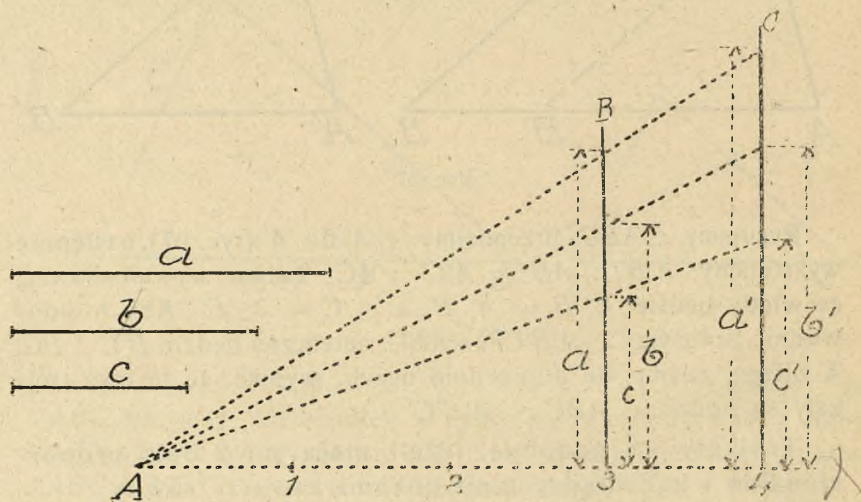
d) 2 podobne prostokąty;

e) 2 podobne 6boki;

f) 2 podobne prostokąty, aby wymiary były w stosunku 4 : 3. (Czy w prostokącie wystarczy narysować 4 równe kąty, aby były podobne)?

§ 35.

Pomniejszanie i powiększanie figur płaskich.



Ryc. 68.

1. Dane odcinki a , b , c powiększyć w stosunku 4 : 3!

Rysujemy prostą AX (ryc. 68) i odcinamy od punktu A 4 dowolne, lecz równe odcinki (4 dlatego, ponieważ powiększamy

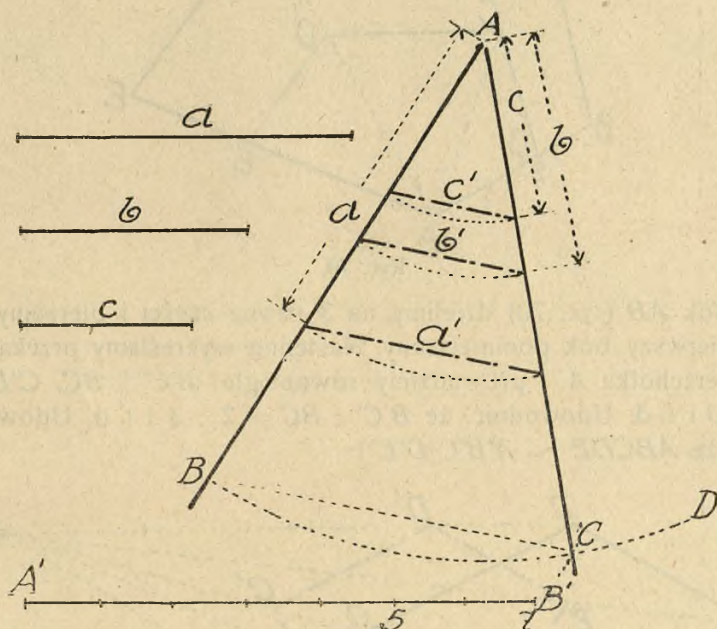
w stosunku 4 : 3). Przez punkty 3 i 4 wykreślamy prostopadłe, następnie odmierzymy na prostopadłej $3B$ z punktu 3 odcinek a , potem b , wreszcie c . Przez punkty końcowe tych odcinków prowadzimy promienie z punktu A . Odnośne odcinki na prostej $4C$ są powiększonymi odcinkami.

Udowodnić, że $c' : c = 4 : 3$!

Zadania: a) 3 dowolne odcinki powiększyć w stosunku 5 : 3!

b) 3 dowolne odcinki pomniejszyć w stos. 5 : 6!

2. Dane odcinki a, b, c pomniejszyć w stosunku 5 : 7!



Ryc. 69.

Na prostej $A'B'$ (ryc. 69) odcinamy 7 dowolnych części równych (7 dlatego, ponieważ pomniejszamy w stosunku 5 : 7). Rozwartością $A'B'$ kreślimy z A łuk BD . Następnie weźmiemy do cyrkla 5 części i przecinamy z punktu B łuk BD w punkcie C tak, iż $BC = A'5$. Wreszcie bierzemy do cyrkla poszczególne odcinki a, b, c i przecinamy nimi z punktu A oba ramiona AB i AC . $a' b' c'$ są szukanymi pomniejszonymi odcinkami.

Udowodnić, że $a' : a = 5 : 7$!

Zadania: Pomniejszyć 2 dowolne odcinki w stosunku:

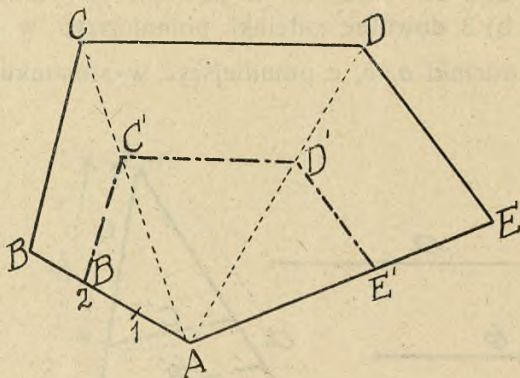
a) $9 : 11$

b) $6 : 7$

c) $4 : 9$.

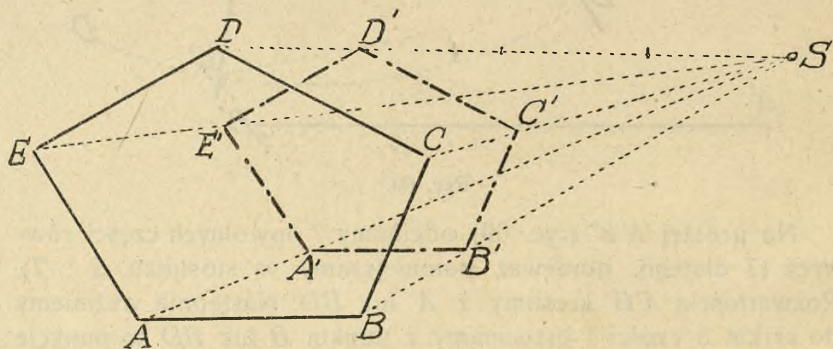
Powiększyć 4 dowolne odcinki w stosunku $12 : 5$!

3. Dany wielobok $ABCDE$ pomniejszyć w stosunku $2 : 3$!



Ryc. 70.

Bok AB (ryc. 70) dzielimy na 3 równe części i bierzemy A_2 za pierwszy bok pomniejszony. Następnie wykreślamy przekątnie z wierzchołka A i prowadzimy równoległe: $B'C' \parallel BC$, $C'D' \parallel CD$ i t. d. Udowodnić, że $B'C' : BC = 2 : 3$ i t. d. Udowodnić, że $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$!



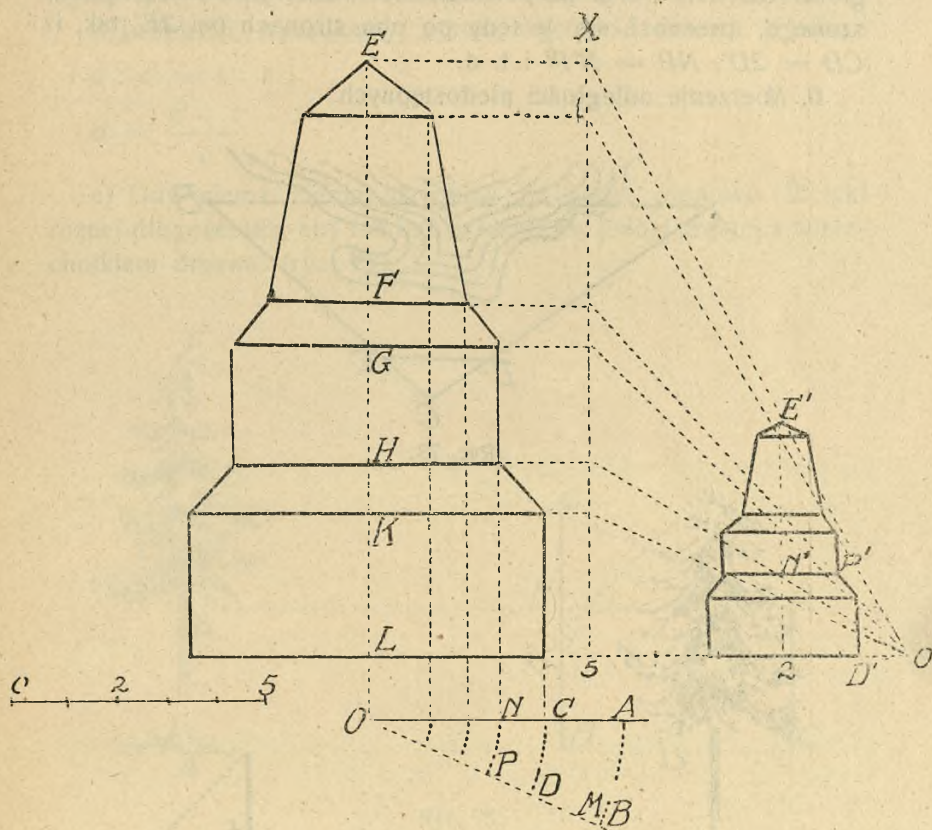
Ryc. 71.

4. Dany wielobok pomniejszyć w stosunku $3 : 4$!

Rysujemy dowolny promień DS (ryc. 71), na którym odcinamy 4 do-

wolne, równe części. (Dlaczego 4?). Następnie łączymy S z wszystkimi wierzchołkami wieloboku. Wreszcie prowadzimy $D'E' \parallel DE$, $E'A' \parallel EA$ i t. d. Udowodnić, że $C'D' : CD = 3 : 4$! Udowodnić, że $A'B'C'D'E' \sim ABCDE$!

5. Pomnik pomniejszyć w stosunku $2 : 5$!



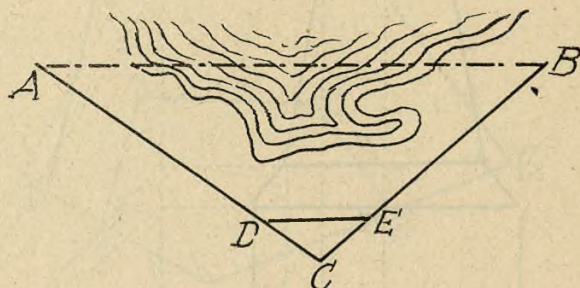
Ryc. 72.

Poszczególne wysokości pomnika (ryc. 72) LE , LF i t. d. przenosi się na oś $5X$ i pomniejsza się podobnie, jak na ryc. 68, a mianowicie uskutecznia się dowolną podziałkę $5-O$ od $5X$ i łączy się poszczególne punkty na osi $5X$ z O . W punkcie 2 tej podziałki kreśli się wysokość pomnika pomniejszonego.

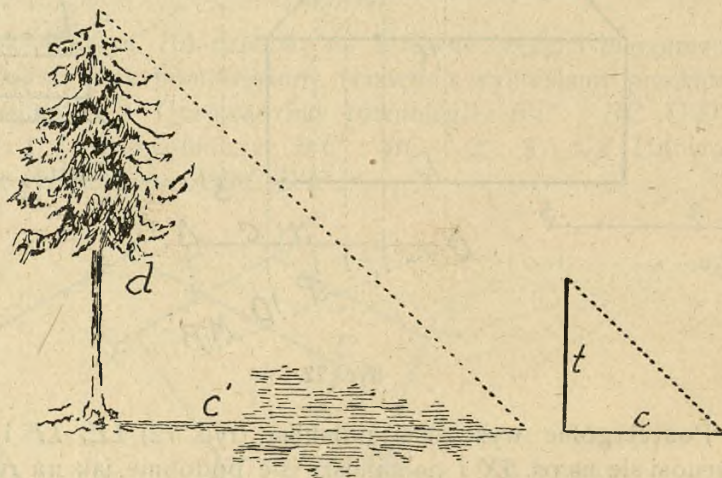
Aby uzyskać szerokości pomnika pomniejszonego, przenosi się wszystkie szerokości pomnika pierwotnego na prostą OA .

Osobno uskuteczni się [dowolną] podziałkę 0 - 5 i wszystkimi 5-ciu częściami zakreśla się łuk AM z punktu O , następnie 2-ma częściami przecina się tenże łuk z A w punkcie B , i łączy się B z O . Wreszcie zakreśla się łuki CD , NP i t. d. z O , a odległości CD , NP i t. d. są połowami szerokości pomnika pomniejszonego, przenosi się je tedy po obu stronach osi $2E'$ tak, iż $CD = 2D'$, $NP = N'P'$ i t. d.

6. Mierzenie odległości niedostępnych.



Ryc. 73.



Ryc. 74.

a) Mamy zmierzyć odległość między punktami A i B (ryc. 73). Dlaczego nie możemy tej odległości zmierzyć wprost? Pomiar ten zrobimy w nast. sposób: zmierzmy odległości dostępne AC i BC (punkt C jest dowolny). AC i BC podzielimy na pewną

ilość równych części np. 5 i zmierzmy odległość między D i E .
 $DE \cdot 5 =$ szukanej odległości AB .

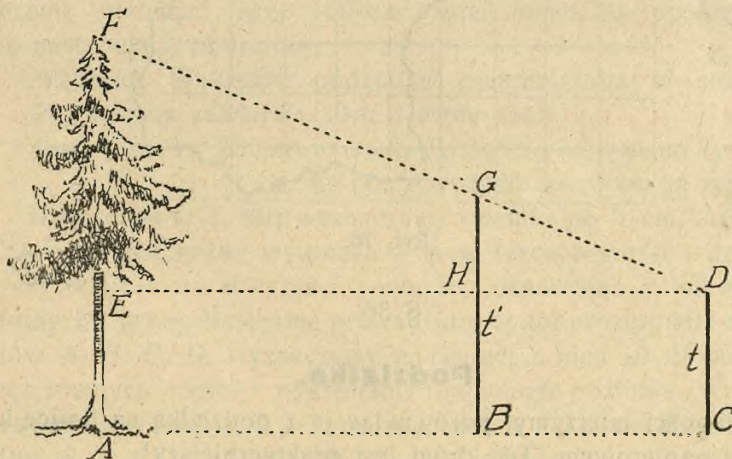
b) Oznaczyć wysokość drzewa!

1. Jeżeli jest cień, postawimy tykę na ziemi (ryc. 74), zmierzmy tykę t i jej cień c . Następnie zmierzmy cień drzewa c' .
 Z proporcji wyszukamy potem wysokość drzewa a mian.:

$$d : c' = t : c$$

$$d = \frac{c' \cdot t}{c}$$

c) Gdy niema cienia, stawiamy na ziemi pionowo 2 tyki różnej długości tak, aby ich końce leżały na jednej prostej z wierzchołkiem drzewa. (ryc. 75).



Ryc. 75.

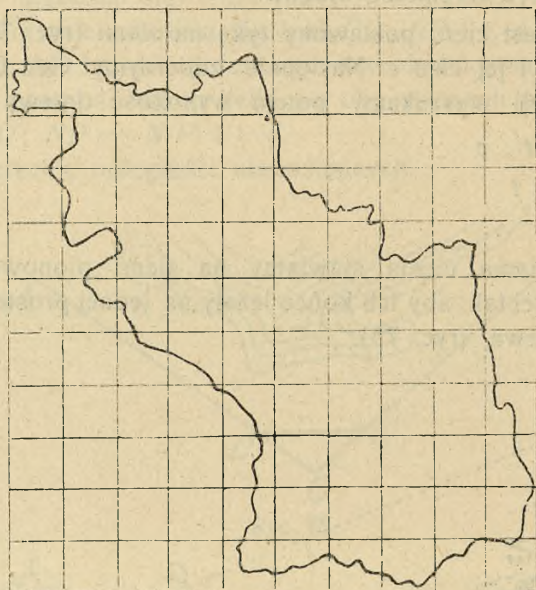
Następnie mierzymy odległości obu tyk od drzewa: AC i AB .
 Z proporcji: $FE : GH = ED : HD$, wyszukamy:

$$FE = \frac{GH \cdot ED}{HD} = \frac{(t' - t) \cdot AC}{BC} = \frac{(t' - t) \cdot AC}{AC - AB}$$

Wysokość drzewa $= EF + t$.

7. Utwory nieprawidłowe np. granice państw, krajów, powiatów, gmin i t. p. pomniejszamy zapomocą siatki. Na ryc. 76

jest pomniejszona granica powiatu Cieszyńskiego w stosunku:
1 : 400.000.

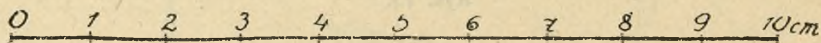


Ryc. 76.

§ 36.

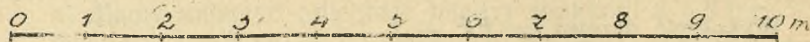
Podziałka.

Długości mierzymy, porównując je z podziałką na linijce lub pasku papierowym. Ten drugi jest praktyczniejszy!



Ryc. 77.

Podziałka na ryc. 77 oznacza rzeczywiste długości.



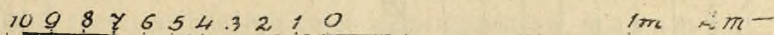
Ryc. 78.

Podziałka na ryc. 78 jest pomniejszona w stosunku 1 : 100; znaczy to, że 1 cm na rysunku oznacza 1 m w rzeczywistości.

Przykład: Wykreślić podziałkę pomniejszoną w stosunku 1 : 25.

Znaczy to, iż 25 m w rzeczywistości = 1 m na rysunku;

1 m w rzeczywistości = 4 cm na rysunku.



Ryc. 79.

Kreślimy odcinki po 4 cm, (ryc. 79) z których każdy przedstawia 1 m w rzeczywistości. 10-ta część każdego odcinka przedstawia 1 dm w rzeczywistości. Te 10-te części oznaczamy sobie od 0 w lewo.

Powyższa podziałka zawiera tylko 10-te części. Jeżeli zaś chcemy otrzymać także 100-tne części, natenczas posługujemy się następującą podziałką;

Przykład: Wykreślić podziałkę pomniejszoną w stosunku 1 : 20, któraby zawierała 10-te i setne części!

Znaczy to, iż 20 m w rzeczywistości = 1 m na rysunku,

1 m w rzeczywistości = 5 cm na rysunku.

Na prostej (ryc. 80) wyznaczamy odcinki po 5 cm, AB , BC , CD , z których każdy wyobraża 1 m w rzeczywistości i dzielimy 1-szy odcinek na 10 części równych, oznaczając je od prawej strony ku lewej. Następnie prowadzimy w dół prostopadłe z punktów A , B , C , D , wyznaczamy na jednej z nich 10 dowolnych, lecz równych części i wykreślamy równoległe poziome. Wreszcie prowadzimy skośną w 1-szym prostokącie od 9 do E , a z punktów 8, 7, 6 ... równoległe do tej skośnej.

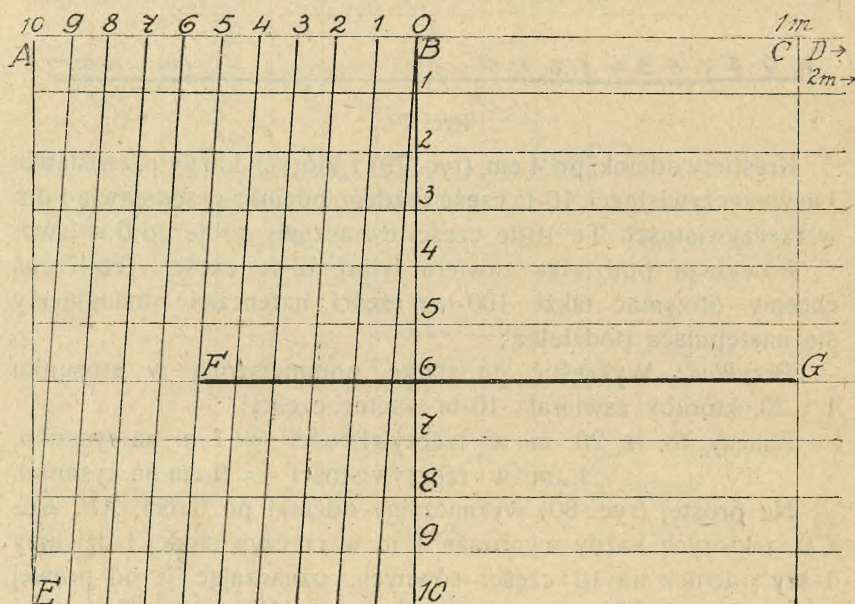
Jeżeli chcemy zmierzyć jakąś odległość np. rzeczywistą wysokość okna na rysunku o podziałce 1 : 20, natenczas bierzemy ją do cyrkla i próbujemy, gdzie się da dokładnie zmieścić na równoległych poziomych. Przypuśćmy, że ta odległość zmieści się na FG (ryc. 80), natenczas odczytujemy rzeczywistą odległość w następujący sposób:

Od G do 6 jest 1 m;

Następnie odczytujemy dziesiąte części metra na skośnych, setne na poziomych: od 6 do F jest 5 dm i 6 cm (5 dm odczytujemy po skośnej od F w górę, a 6 cm odczytujemy na poziomej oznaczonej 6).

Odległość wynosi zatem 1 m 5 dm 6 cm.

Na mapie jest umieszczona podziałka pomniejszona w tym stosunku, w jakim jest narysowana mapa. Zapomocą niej odcytujemy wprost rzeczywiste oddalenie np. między 2-ma miastami.



Ryc. 80.

Zadania:

1. Wykreślić podziałkę pomniejszoną w stosunku 1 : 40 (na 10-te i 100-tne części)!
2. Wykreślić podziałkę, powiększoną w stosunku 4 : 1 (na 10-te i 100-tne części)!

Geometrowie, którzy uskuteczniają pomiary gruntów, kartografowie, którzy wykonują plany domów, rzemieślnicy, którzy robią przekroje wyrobów, — używają podziałki pomniejszonej. Stolarz, gdy odbiera zamówienie, wykreśla w pomniejszeniu widoki i przekroje mebli, następnie sporządza dokładny rysunek i podług niego wykonuje zamówienie.

§ 37.

Plan sytuacyjny.

Powierzchnię ziemi, oraz jej części rysujemy tak, jakbyśmy się na nie patrzyli z góry. Rysunek taki jest naturalnie pomniejszony.

Obrazy części powierzchni ziemi, państw, krajów, powiatów, gmin, części świata lub całej ziemi zowią się *mapami*.

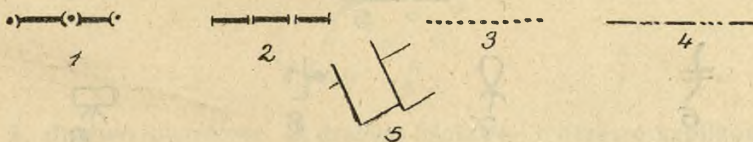
Obraz mniejszych powierzchni np. gminy, pewnej jej części lub pewnej posiadłości zowie się *planem sytuacyjnym*.

Jeżeli ktoś chce budować dom, musi wnieść podanie o pozwolenie, a do niego załączyć plan sytuacyjny miejsca pod budowę i najbliższej okolicy.

Gdy sprzedaje ktoś część swego gruntu, załącza plan sytuacyjny do kontraktu kupna. Gdy ktoś chce budować kanał celem osuszenia gruntu lub nawodnienia tegoż, musi postarać się o plan sytuacyjny gruntu, przez który ma kanał prowadzić.

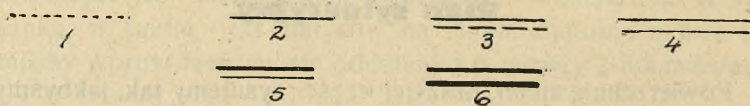
Budowy dróg, kolei, regulacje rzek, budowy sieci przewodów elektrycznych uskuteczniają się na podstawie planów sytuacyjnych, na których najpierw unaocznia się budowy na gruntach, na których mają stanąć.

Szczegółowe plany sytuacyjne i mapy zawierają oprócz gruntów, budowli, dróg, kolei i t. d. jeszcze znaki, powszechnie przyjęte, na podstawie których możemy odczytać, czy dany grunt jest uprawny, czy nie; mosty, bagniska, lasy, łąki, skały i t. p. są oznaczone pewnemi ogólnie przyjętymi znakami. Najważniejsze z tych znaków są:

I. Granice:

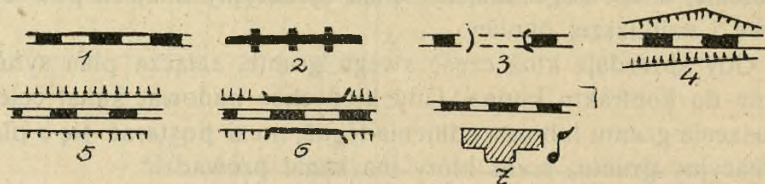
1. państwa, 2. kraju, 3. powiatu, 4. gminy, 5 poszczególnych gruntów (t. zw. parcele).

II. Drogi:



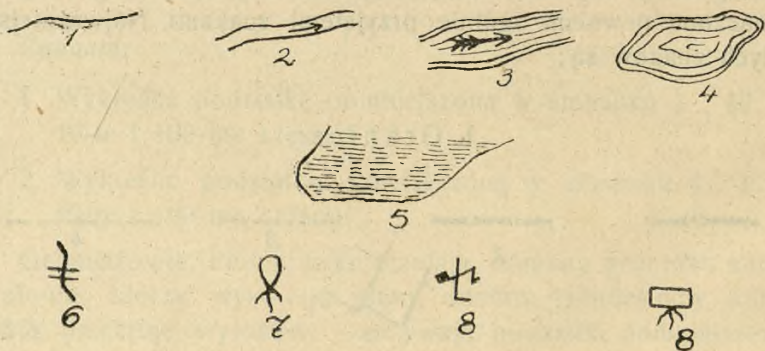
1. ścieżka, 2. droga polna. 3. droga lepiej utrzymana, 4. droga gminna, 5. droga krajowa, 6. droga państwowa.

III. Koleje żelazne:



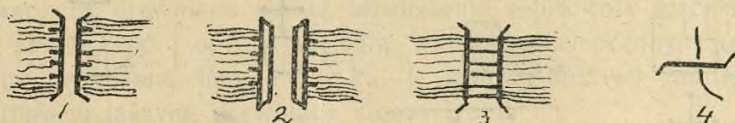
1. jednotorowa, 2. dwutorowa, 3. tunel, 4. kolej, przechodząca przez wykop, 5. kolej, przechodząca przez nasyp, 6. wiadukt (most, prowadzący ponad doliną), 7. dworzec kolejowy.

IV. Wody:



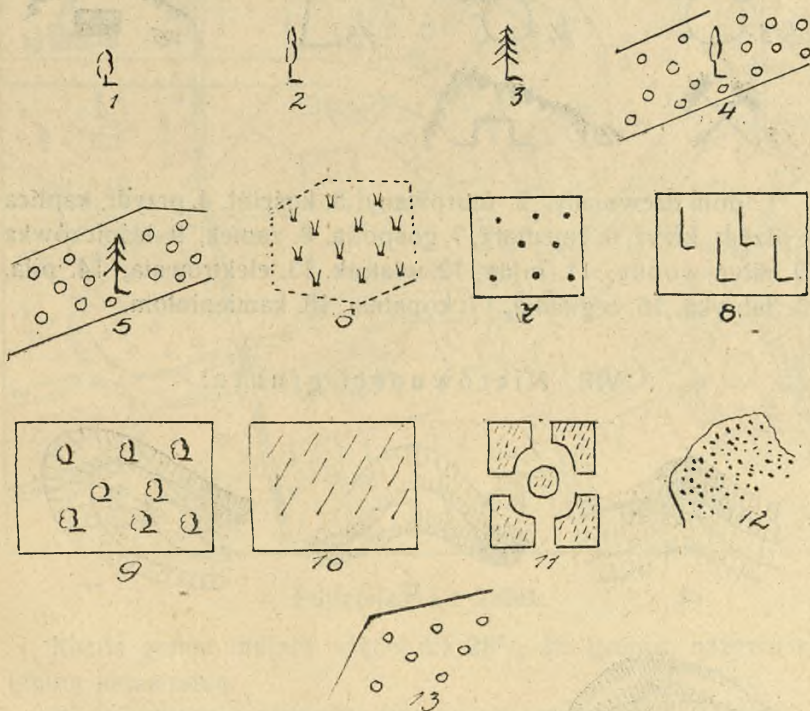
1. strumyk, 2. rzeczka, 3. większa rzeka, 4. staw lub jezioro, 5. bagna i moczary, 6. wodospad, 7. źródło, 8. studnia.

V. Mosty:



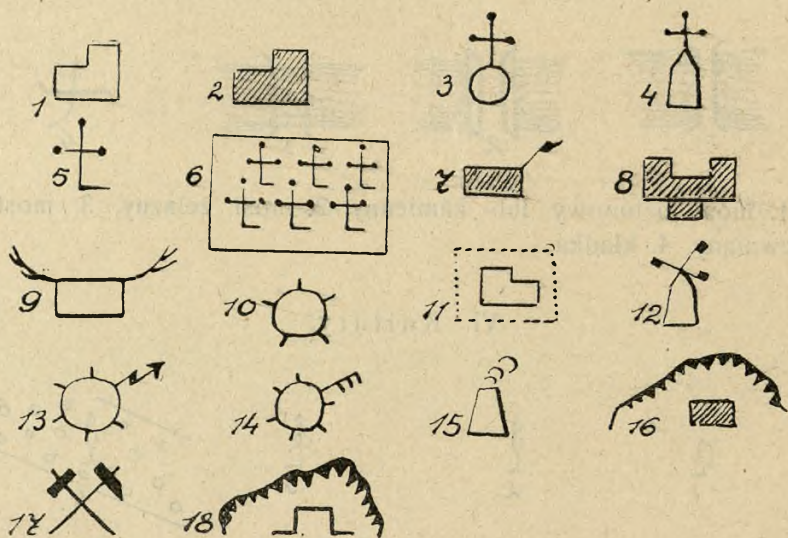
1. most betonowy lub kamienny, 2. most żelazny, 3. most drewniany, 4. kładka.

VI. Kultury:



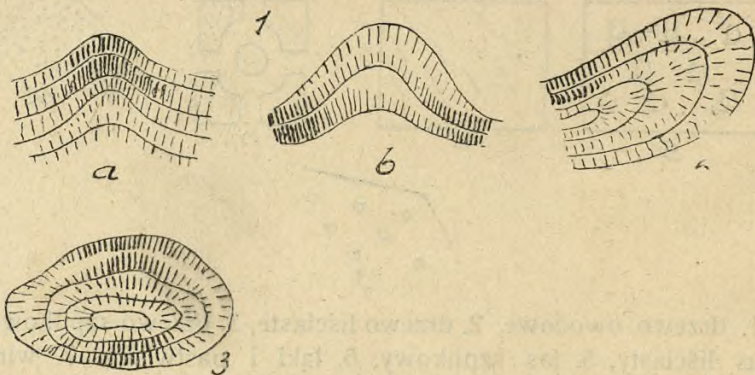
1. drzewo owocowe, 2. drzewo liściaste, 3. drzewo szpilkowe, 4. las liściasty, 5. las szpilkowy, 6. łąki i pastwiska, 7. winnice, 8. chmiel, 9. sad, 10. ogród warzywny, 11. park, 12. piasek, 13. krzewy.

VII. Budynki:



1. dom drewniany, 2. murowany, 3. kościół, 4. przydr. kaplica
 5. przydr. krzyż, 6. cmentarz, 7. gospoda, 8. zamek, 9. leśniczówka
 10. młyn wodny, 11. ruiny, 12. wiatrak, 13. elektrownia, 14. piła,
 15. fabryka, 16. cegielnia, 17. kopalnia, 18. kamieniołom.

VIII. Nierówności gruntu:

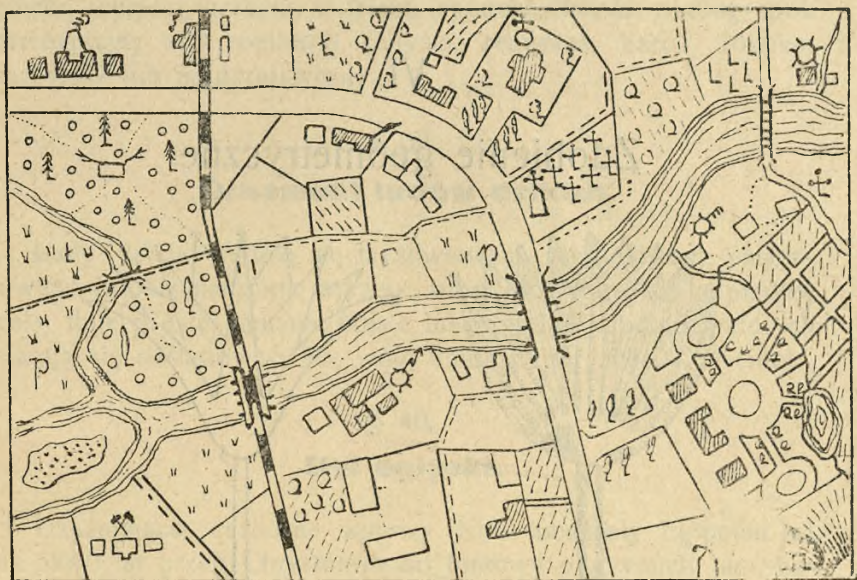


1. stok góry: a wypukły, b wklęsły, 2. grzbiet, 3. pagórek lub góra.

Mapy bywają także malowane. Drogi maluje się żółcią chromową, wody zielenią z niebieskimi kreskami, mosty żelazne karminem, drewniane sienną, wzniesienia sepją, rola rozcieńczoną sienną, łąki i ogrody zielenią, winnice rozcieńczonym karminem + sienną, lasy niebieską + czarną, budowy murowane karminem jasnym, drewniane sienną i t. d.

§ 38.

Mapy katastralne.



Podziałka 1 : 2880.

1 Każda gmina, mająca więcej niż $28\frac{3}{4}$ ha gruntu, nazywa się gminą katastralną.

W jej urzędzie gminnym jest przechowana:

1. Mapa katastralna, na której są oznaczone wszystkie parcele (części gruntów) w podziałce 1 : 2880.

2. Protokół gruntowy, w którym są podane wszystkie parcele budowlane i gruntowe, adres i zamieszkanie właściciela.

sposób użycia gruntu, klasa bonitowa (bonitas = jakość, wydajność roli) i wymiary parcel.

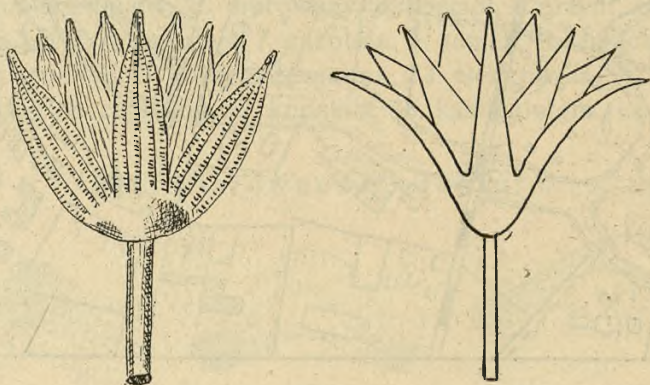
Urząd podatkowy ma mapy katastralne wszystkich gmin w powiecie i spis parcel celem wymiaru podatku. Aby podatek został wymierzony sprawiedliwie, muszą być sporządzone dokładne wymiary parcel przez urzędowych geometrów, a czysty zysk z tychże musi być podany przez specjalną komisję rzeczoznawców.

Geometrowie ewidencyjni mają co 3 lata zajechać do każdej gminy, aby skonstruować zmiany granic poszczególnych parcel i sposób ich użycia.

Orientować się na mapie katastralnej w książce! Pożyczyć od urzędu gminnego mapy gminnej i orientować się w niej!

VI.

Zdobienie geometryczne.



Ryc. 81.

Umiejętne upiększanie czyli ozdabianie przedmiotów, odpowiadające potrzebom i warunkom życia codziennego, zowie się ornamentem. Ślady zdobnictwa sięgają do najstarszych prae-wieków. Wykopaliska z owych najdawniejszych czasów, jako to zbroje, naczynia i t. p. mają ozdoby z punktów, linii, kółek itd. Jest tedy ornament geometryczny najstarszym. W dobach póź-

niejszych czerpano motywy czyli pierwiastki do ornamentu ze świata roślinnego lub zwierzęcego, wybierając z ich kształtów i kolorów cechy tylko charakterystyczne, nie dbając o ich dokładny wygląd. Egipcjanie z naturalnego kwiatu lotosu (ryc. 81) wytworzyli lotos stylizowany, t. zn. zatrzymali tylko ogólny kształt stożkowy i układ płatków, sam kwiat zaś zdobili oryginalnie.

Jeżeli badamy historję zdobienia w różnych epokach (okresach czasu) i u różnych narodów, zauważymy, że w danej epoce przeważał ornament specjalnego rodzaju czyli jak mówimy styl. Styl zależy od charakteru, obyczajów, religji, klimatu, dobrobytu danego narodu i t. p. warunków.

Podług narodów rozróżniamy styl egipski, asyryjski, perski, grecki, rzymski, arabski, indyjski, japoński, chiński; podług epok rozróżniamy styl romański, gotycki, renesans, barok, rokoko, secesyjny lub modernistyczny.

§ 39.

Ornament ludów dzikich.

Ludy dzikie trudnią się myśliwstwem, rybołostwem, pasterstwem. Zdobią naczynia, sprzęty, broń. Motywami ich są punkty, koła, linje proste, łamane, faliste lub spiralne, zapomocą których starają się naśladować fale wód, kontury gór, sieci i plecionki.

§ 40.

Styl egipski.

Użyźniające, coroczne wylewy Nilu zmuszały Egipcjan już na 5.000 lat przed Chrystusem do budowy olbrzymich tam, kanałów, jezior i t. p. Cześć dla bogów i umarłych, oraz wiara w życie pozagróbne skłaniały ich do budowy wspaniałych świątyń i grobowców. Olbrzymimi pomnikami tego rodzaju są istniejące do dziś faraonские piramidy, z pośród których piramida Faraona Cheopsa (137 m wysoka) istniała już przed 5.000 lat. Świątynie otaczali Egipcjanie sfinksami i obeliskami, wewnątrz zaś zdobili malowidłami i napisami zwanymi hieroglifami, sławiącymi czyny umarłych. Motywów szukali w świecie roślinnym, stylizowano więc kwiat lotosu, irys, papirus, gałązki palmowe i t. d.

§ 41.

Styl asyryjski i perski.

Kolebką sztuki ludów azjatyckich jest Mezopotamja. Ulubionymi motywami Asyryjczyków były koła, gwiazdy, plecionki, zyg-zaki w połączeniu ze zwierzętami skrzydlatymi i roślinami. Znana im już była budowa sklepień. Persowie stosowali w ornamencie kształty zwierząt, roślin wraz z napisami. Kolumny ich naśladują pęki dy-lów palmowych. Mury zdobili obrazami, które układali z cegieł malowanych i glazurowanych.

§ 42.

Sztuka indyjska i chińska.

Przejawia się w świątyniach Brahmy i Buddy, które już na 12 wieków przed Chrystusem wyrąbывano w skałach lub budowano pod nazwą „pagody“.

Indjanie (Hindusi) motywy do swych ozdób czerpali z roślin i zwierząt: palmy, drzewa mango, ptaków, świętej małpy, słonia itd.

W zdobnictwie chińskiem spotykamy niezwykłą dziwaczność i fantastyczność form. Za motywy służyły muszle, kwiaty, smoki, ryby, ptaki i t. p.

§ 43.

Styl grecki.

Piękny i ciepły kraj Hellenów (Greków) był bardzo podatnym do wytworzenia wysokiej kultury. W ornamencie greckim widzimy stylizowane rośliny i kwiaty: liście akantu, palmy wachlarzowe, osty, kwiat lotosu i t. d. Polichromiami (wielobarwne malowanie) zdobiono środki kasetonów (t. j. pól pomiędzy belkami na sufitach świątyń). Ulubionymi ozdobami Greków były meandry, są to stylizowane linje brętego koryta rzeki Meandros w Małej Azji, frety t. zn. taśmy faliste, oraz palmety (wachlarze).

§ 44.

Styl rzymski.

Rzymianie, jako zdobywcy świata, budują drogi, olbrzymie wodociągi, mosty, wiadukty, twierdze, łuki tryumfalne, z których niektóre przetrwały do dziś dnia. W ozdobach stosowali akanthus, woluty, rozety, latorośl winną, liście dębowe, palmy, meandry greckie, trofea wojenne i t. p. Oryginalność rzymskiego zdobnictwa przejawia się w groteskach. Nazwa ta pochodzi od „grota“; malowidła te zasypane wraz z miastami rzymskimi, musiano odkopywać na wzór grot. Groteski wyobrażają fantastyczne połączenia form ludzkich, zwierzęcych z formami liści, gałązek, waz, trofeów, kandelabrow i t. p.

Od Greków nauczyli się Rzymianie mozaiki, którą doprowadzili do niezrównanej doskonałości. Przez mozaikę rozumiemy wykładanie cementu, drzewa, metalu różnokolorowemi kamyczkami; zdobiono nią podłogi, ściany, naczynia, sklepienia i t. p.

§ 45.

Styl arabski.

Ulubioną i oryginalną ornamentacją Arabów były stjuki i arabeski. Stjuki są to ornamenty wytłaczane lub wyrzynane w gipsie, które robią wrażenie komórek plastra miodu. Arabeski są to fantazyjne ozdoby, naśladujące splot gałązek, liści, kwiatów, linii i napisów.

§ 46.

Styl romański.

Gdy minął oczekiwany rok 1.000 przepowiadanego przez współczesne duchowieństwo końca świata, wówczas rozradowani chrześcijanie zaczęli stawiać liczne kościoły i klasztory w stylu romańskim, którego cechą są półkoliste łuki przy drzwiach i oknach, oraz arkady, to jest szereg małych łuków, razem połączonych. Surowa religia i nieustraszone rycerstwo oddziaływały także na sztukę. W ornamencie stosowano greckie palmety, meandry, prócz tego figury geometryczne, które przeplatano fantastycznymi węzami, jaszczurami, djabłami i straszidłami, które zawzięcie karzą grzeszników. W stylu romańskim jest zbudowany tum pod Łęczycą, katedra w Płocku w Polsce.

§ 47.

Styl gotycki.

Znamienną cechą tego stylu są ostre łuki, krzyżujące się w sklepieniach, które wspierano na skarpach czyli podporach, wzmacniających mury. Kościoły i warowne zamki są najeżone ostremi wieżycami i pełne lochów, krętych schodów, podziemnych galerij. W ornamencie stylizowano winną latorośl, liść klonu, dębu, ostu, bluszczu, lilji wodnej i t. d. Te ostre wieżyce zowią się iglicami. W stylu gotyckim jest zbudowany kościół marjacki w Krakowie z rzezbami Wita Stwosza, katedra wawelska, rondel (barbakan) bramy Florjańskiej.

§ 48.

Renesans.

Jest odrodzeniem sztuki klasycznej, zwłaszcza rzymskiej. Ojczyzną renesansu są Włochy. Motywami były lwy, rozety, główki aniołów, muszle, trofea, liść akantu, owoce, arabeski.

§ 49.

Barocco (czyt. barokko).

Nazwa barocco pochodzi od portugalskiego słowa barocco, które oznacza perły o ukośnie okrągłych, nieforemnych kształtach. Powstał we Francji za Ludwika XIV w 17 wieku. Motywami są liście (akantu), muszle, kwiaty. Nadużywanie często powtarzającej się muszli, oraz naśladownictwo drobnej, chińskiej ornamentyki (kwiatów) są ujemną stroną tego stylu.

§ 50.

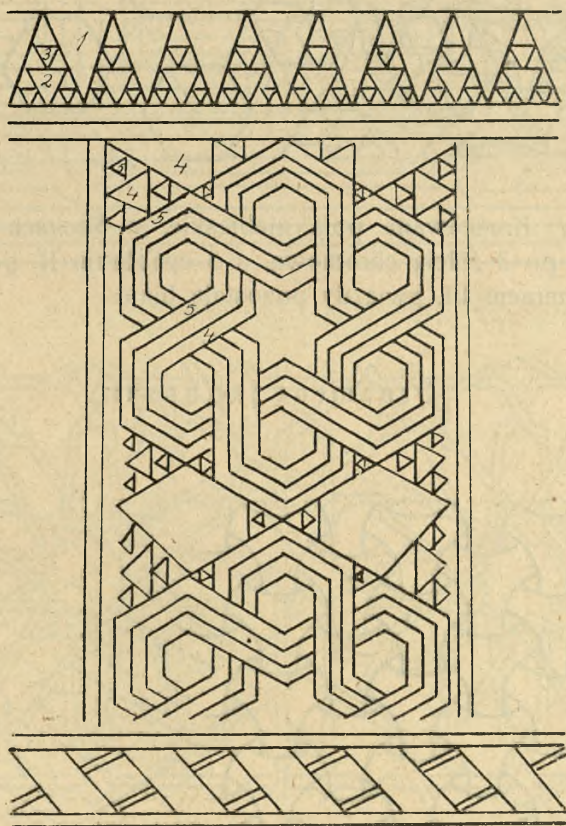
Roccoco (czyt. rokkoko).

Styl roccoko powstał w wieku XVIII za Ludwika XV we Francji. Zowie się też inaczej stylem muszlowym, gdyż zasadniczym jego motywem jest muszla. Ornament składa się z wydłużonych liści sitowia, zwieszających się girland kwiatów z bujającymi amorkami (małemi dziećmi), wstęg i sznurów pereł, które oplatają muszle.

§ 51.

Styl secesyjny.

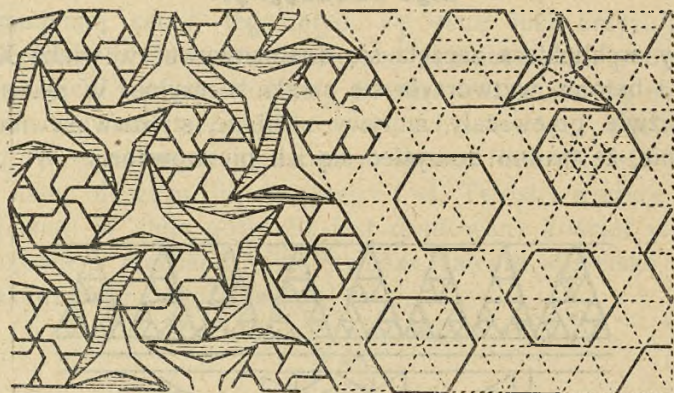
Gdy architektura zaczęła się dostosowywać w wieku XIX do żelaza i betonu, wytworzyła się sztuka secesyjna. W secesyjnym zdobnictwie przeważały motywy roślinne, stylizowane niekiedy tak silnie, że trudno domyśleć się ich pierwowzoru.



Mozaika w stylu bizantyjskim.

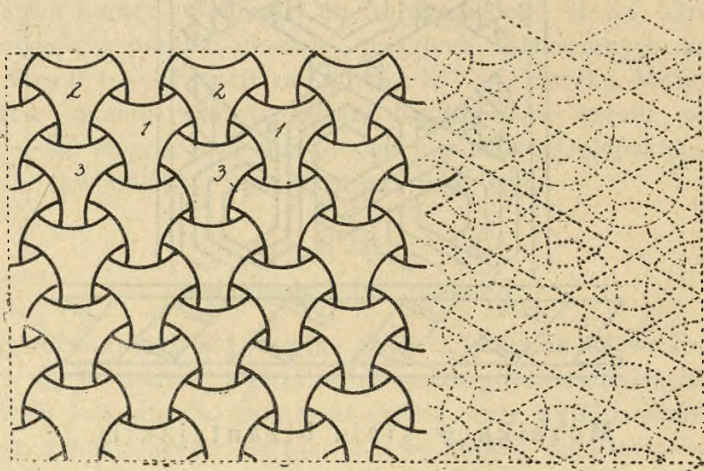
Kolory: 1 czerwień ind., 2 to samo, 3 zieleń, 4 tusz czarny, 5 cynober l, 6 zieleń + nieb.

Ornament perski.



Kolory: Kreskowane pola niebieskie, w 6bokach płatki naprzemian po 3 żółcią chromową, a 3 cynobrem II, pola między nimi karminem III, gwiazdy pozostają białe.

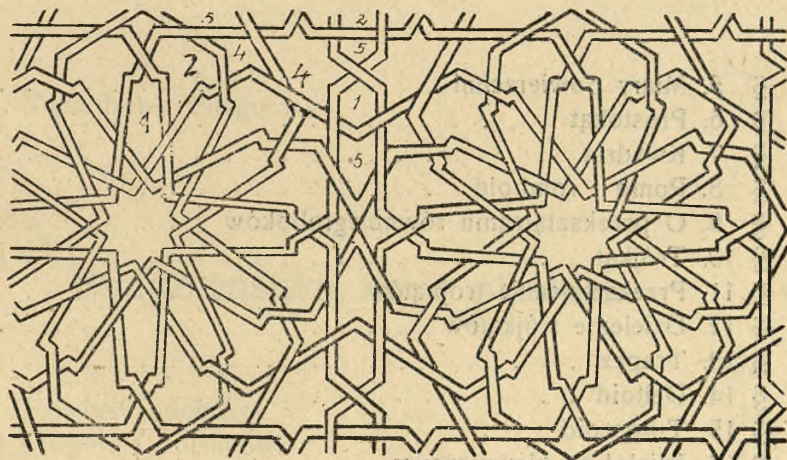
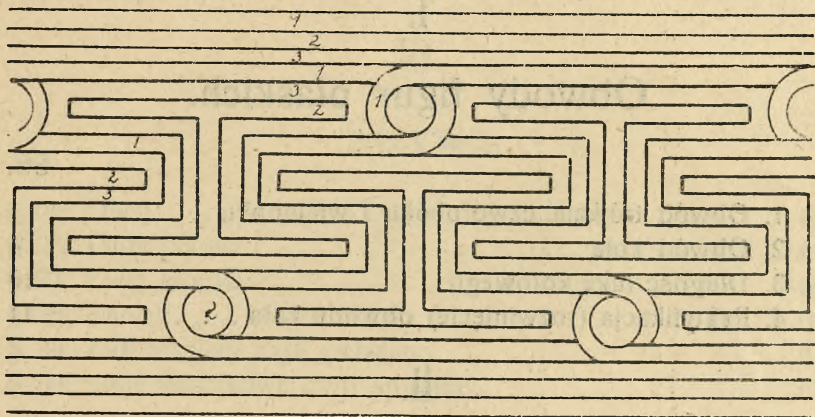
Ornament japoński.



Kolory: 1 żółć chrom., 2 zielony, 3 niebieski.

Ornament grecki.

Kolory: 1 karmin, 2 żółć chrom., 3 niebieski.



Ornament arabski.

Kolory: 1 żółć chrom. 2 niebieski, 3 cynamber, 4 zielony, 5 żółć chrom., troszkę zielonego.

SPIS RZECZY.

I.

Obwody figur płaskich.

	Str.
§ 1. Obwód trójkąta, czworoboku i wieloboku	1
§ 2. Obwód koła	4
§ 3. Długość łuku kołowego	10
§ 4. Rektyfikacja (rozwiniecie) obwodu koła	11

II.

Powierzchnie figur płaskich.

	Str.
§ 5. Miary powierzchni	13
§ 6. Prostokąt	15
§ 7. Kwadrat	18
§ 8. Romb i romboid	22
§ 9. O przekształcaniu równoległoboków	25
§ 10. Trójkąt	26
§ 11. Przekształcanie trójkątów	29
§ 12. Dzielenie trójkątów	34
§ 13. Trapez	35
§ 14. Deltoid	38
§ 15. Trapezoid	39
§ 16. Wielobok nieumiarowy	39
§ 17. Wieloboki umiarowe	40
§ 18. Koło	43
§ 19. Pierścień	46
§ 20. Wycinek koła	47
§ 21. Odcinek kołowy	49

	Str.
§ 22. Zastosowanie praktyczne kół i łuków	51
§ 23. Elipsa	55
§ 24. Parabola	59

III.

Krzywe.

§ 25. Oval	61
§ 26. Linja jajowa	62
§ 27. Linja falowa	63
§ 28. Kabłąk	63
§ 29. Łuk wspięty czyli pełzający	64
§ 30. Linje ślimakowe czyli spiralne	65

IV.

	Str.
§ 31. Twierdzenie Pitagorasa	68

V.

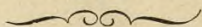
Podobieństwo figur płaskich.

	Str.
§ 32. Stosunek odcinków	73
§ 33. Proporcje odcinków	75
§ 34. Trójkąty podobne	78
§ 35. Pomniejszanie i powiększanie figur płaskich	80
§ 36. Podziałka	86
§ 37. Plan sytuacyjny	89
§ 38. Mapy katastralne	93

VI.

Zdobienie geometryczne.

	Str.
§ 39. Ornament ludów dzikich	95
§ 40. Styl egipski	95
§ 41. Styl asyryjski i perski	96
§ 42. Sztuka indyjska i chińska	96
§ 43. Styl grecki	96
§ 44. Styl rzymski	97
§ 45. Styl arabski	97
§ 46. Styl romański	97
§ 47. Styl gotycki	98
§ 48. Renesans	98
§ 49. Barocco	98
§ 50. Roccoco	98
§ 51. Styl secesyjny	99

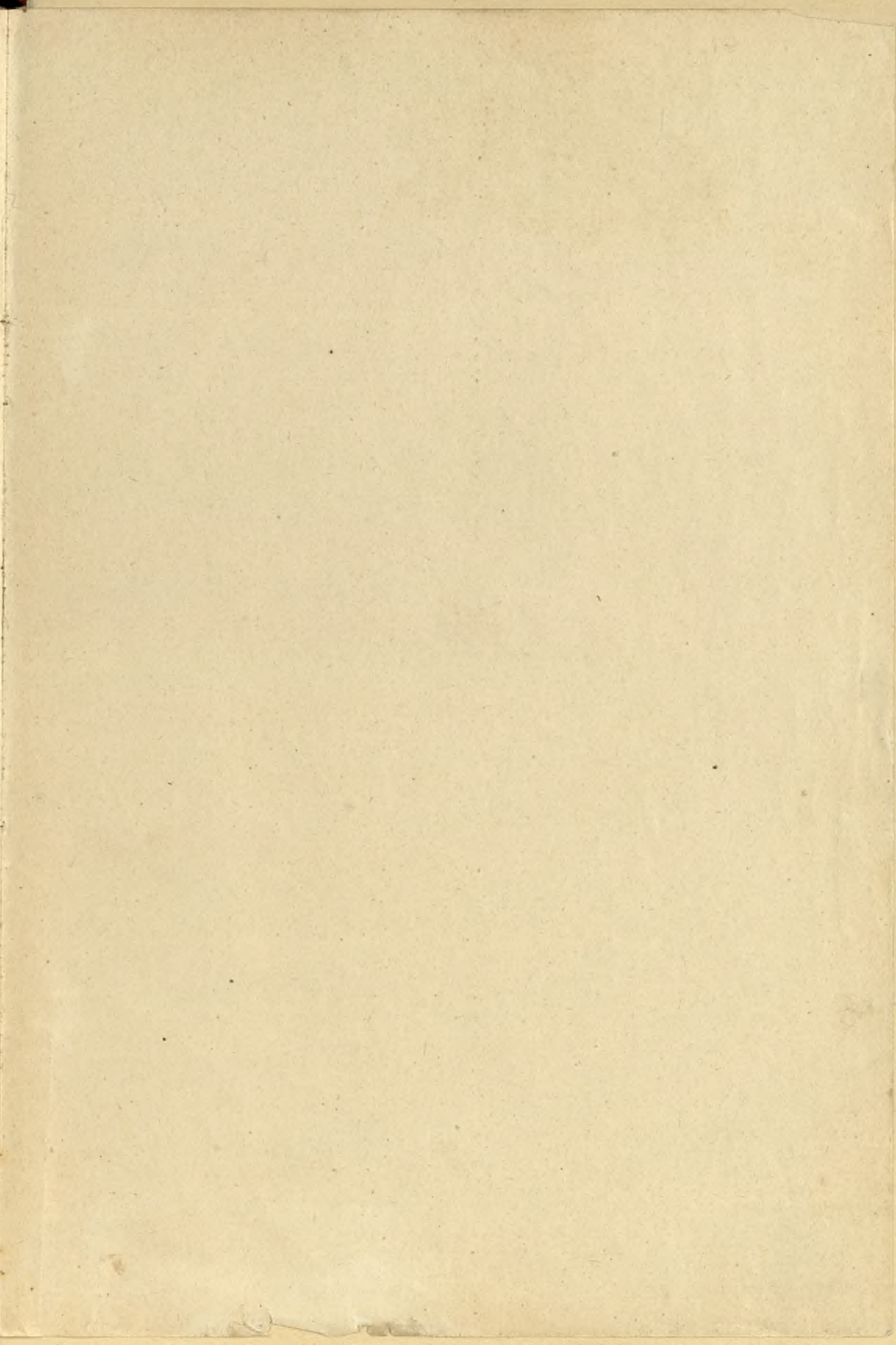


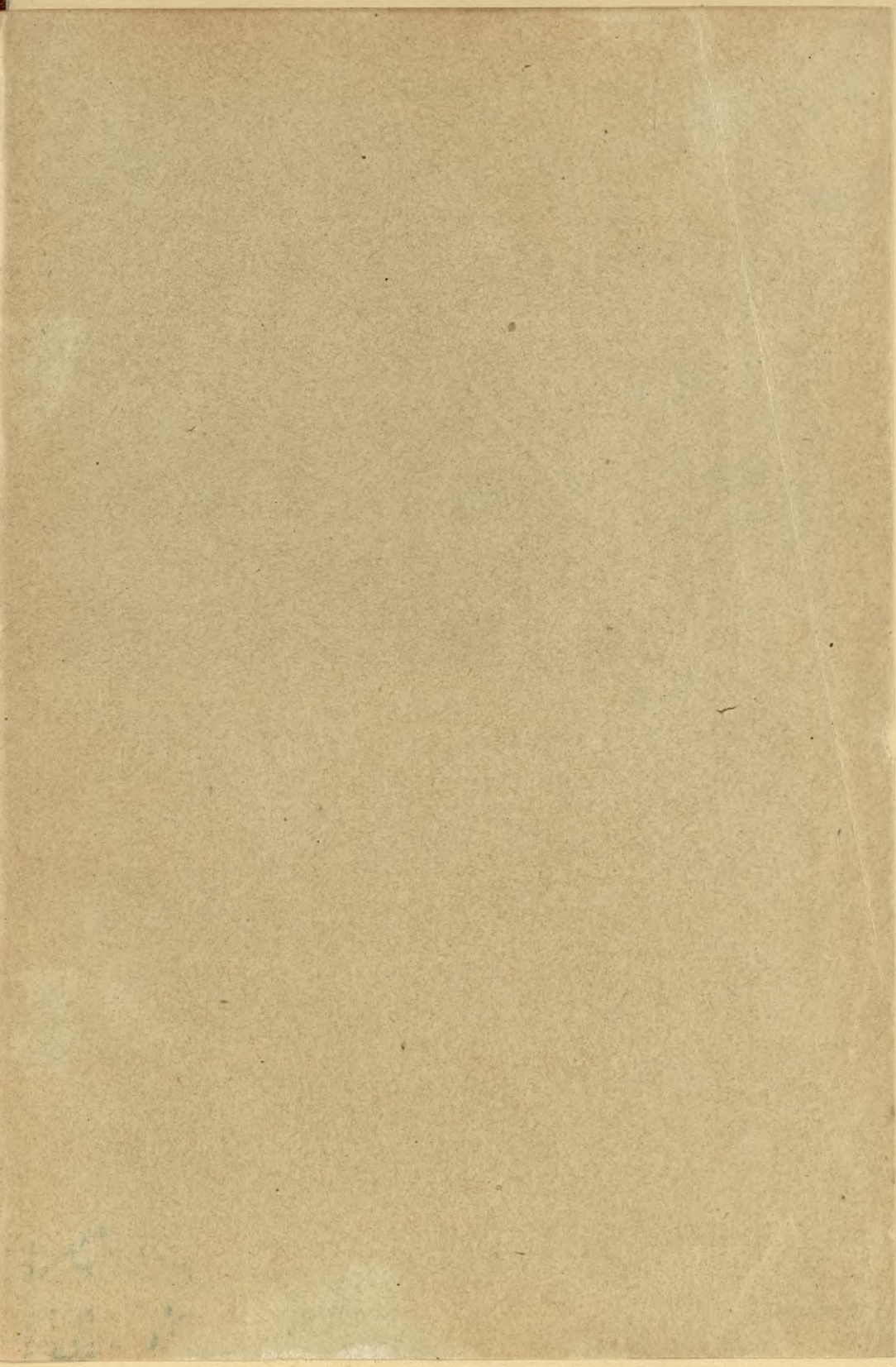
Uwaga:

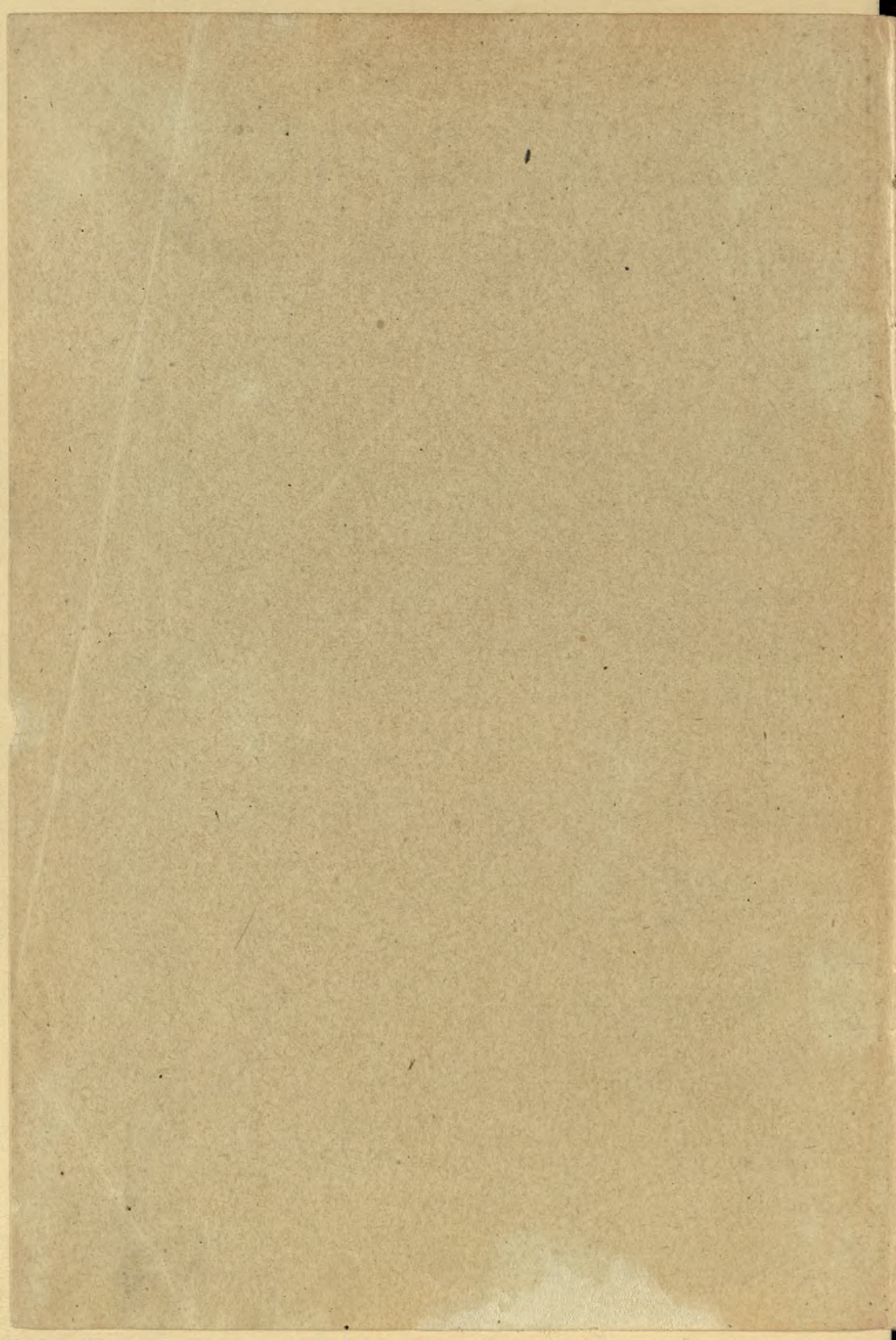
§§ 4, 9, 11, 12, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 37 i 38 przebiera się tylko z chłopcami.

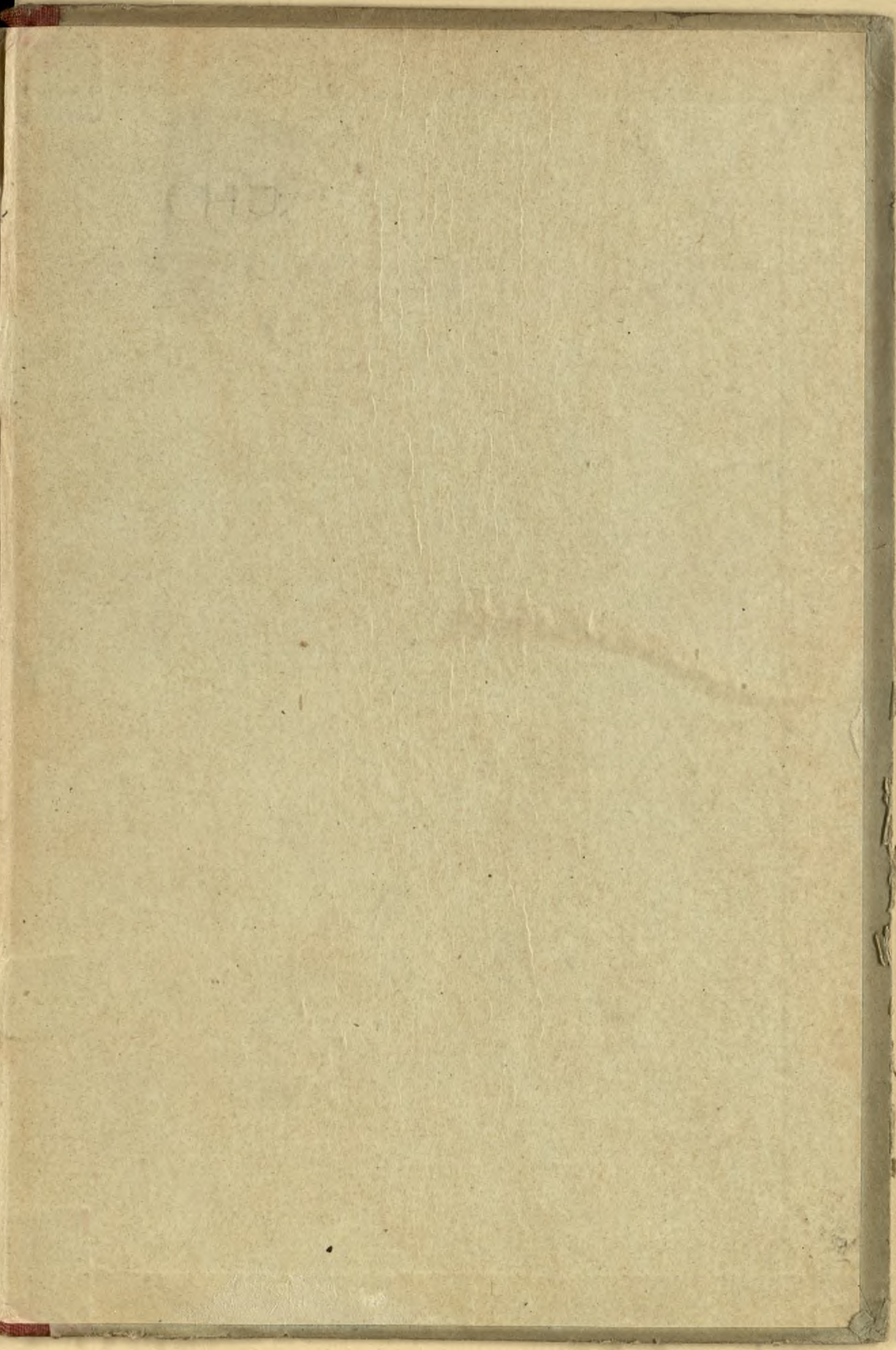
Omyłki, które należy poprawić przed użyciem książki:

- Na str. 17, wiersz 13 z dołu: zamiast „ $2\frac{1}{2}$ szeroki“ ma być:
„ $2\frac{1}{2}$ m szeroki“;
„ „ 24, „ 4 od góry: zamiast „o romboidzie“ ma być:
„o rombie“;
„ „ 31, „ 4 od dołu: zamiast „zmienić“ ma być:
„zamienić“;
„ „ 35, na ryc. 32 oznaczyć wierzchołek kątów m i n literą E ;
„ „ 42, wiersz 3 od dołu: zamiast „120711“, ma być:
„120·711“;
„ „ 45, „ 5 od dołu: zamiast „o“, ma być: „po“;
„ „ 47, „ 14 od dołu: zamiast „pierściena“, ma być:
„pierścienia“;
„ „ 54, „ 8 od góry: zamiast „ml“, ma być: „m1“;
„ „ 58, „ 1 od góry: opuścić „są“;
„ „ 60, „ ostatni na dole: zamiast „16“, ma być „20“;
„ „ 66, na ryc. 55, zamiast „B“, ma być: „R“;
„ „ 78, na ryc. 66, trójkąt mniejszy ma być oznaczony za-
miast $A'BC : A'B'C'$;
„ „ 80, na ryc. 68 oznaczyć prostą poziomą: „AX“.









Biblioteka Śląska

C004978

II

48

Warp.