Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 353 · 2018

Krzysztof Piasecki

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Wydział Zarządzania
Katedra Inwestycji i Nieruchomości
krzysztof.piasecki@ue.poznan.pl

Anna Łyczkowska-Hanćkowiak

Wyższa Szkoła Bankowa w Poznaniu
Instytut Finansów
anna.lyczkowska-hanckowiak@wsb.poznan.pl

ZORIENTOWANA BEHAWIORALNA WARTOŚĆ BIEŻĄCA PORTFELA DWUSKŁADNIKOWEGO – STUDIUM PRZYPADKU

Streszczenie: Przedmiotem rozważań jest wprowadzona przez Piaseckiego behawioralna wartość bieżąca (BPV) odzwierciedlająca wpływ wybranych czynników behawioralnych na nieprecyzyjną ocenę wartości bieżącej. Pierwotnym modelem formalnym BPV była liczba rozmyta. Łyczkowska-Hanćkowiak zaproponowała i uzasadniła nadanie BPV orientacji. W ten sposób BPV została reprezentowana za pomocą skierowanych liczb rozmytych. Głównym celem tej pracy jest wyznaczenie zorientowanej BPV dwuskładnikowego portfela. Uzyskany wynik został uogólniony do przypadku portfela wieloskładnikowego.

Słowa kluczowe: behawioralne finanse, wartość bieżąca, skierowana liczba rozmyta.

JEL Classification: C44, C02, G10.

Wprowadzenie

Wartość bieżącą (PV) rozumie się jako wartość teraźniejszego ekwiwalentu płatności dostępnej w ustalonym momencie. Powszechnie jest już akceptowany pogląd, że PV przyszłych przepływów finansowych może być wartością nieprecyzyjną. Dogodnym modelem nieprecyzyjnie oszacowanej PV jest liczba rozmyta nazywana rozmytą PV. Szczegółowy opis ewolucji tego modelu można znaleźć na przykład w [Piasecki, Siwek, 2017].

W [Piasecki, 2011a] zdefiniowano behawioralną PV (BPV) jako rozmytą PV ocenioną z uwzględnieniem wpływu czynników behawioralnych na podstawie ceny rynkowej instrumentu finansowego. Tak określona BPV była następnie dyskutowana i modyfikowana w [Piasecki, 2011b, 2016; Piasecki, Siwek, 2015]. W [Łyczkowska-Hanćkowiak, 2017] informacje opisane przez funkcję przynależności BPV uzupełniono o subiektywne przekonanie o spodziewanym zwrocie trendu ceny rynkowej. Do zapisu tej subiektywnej prognozy wykorzystano zwrot osi liczb rzeczywistych. W ten sposób BPV zapisano jako skierowaną liczbę rozmytą [Kosiński, Prokopowicz, Ślęzak, 2003]. Taki model nieprecyzyjnie oszacowanej PV nazywamy zorientowaną BPV.

Celem prezentowanej pracy jest studium przypadku portfela dwuskładnikowego, którego składniki opisane są za pomocą zorientowanej BPV. Uzyskany wynik zostanie uogólniony do przypadku portfela wieloskładnikowego.

1. Istota pojęcia „skierowanej liczby rozmytej"

W tej pracy przedmiotem naszego zainteresowania są wartości przybliżone. Stąd obszar naszych rozważań ograniczmy do rodziny $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ wszystkich podzbiorów rozmytych w przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Przybliżeniem dowolnej wartości może być rozmyta liczba rzeczywista (FN) $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ zdefiniowana w najbardziej ogólny sposób w [Dubois, Prade, 1979]. Spośród ogółu FN wyróżniamy ich następujący rodzaj.

Definicja 1: [Dubois, Prade, 1980]: Dla dowolnej czwórki $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ spełniającej warunek $a \leq b \leq c \leq d$ FN $S(a, b, c, d)$ typu LR (LR-FN) jest opisana przez swą funkcję przynależności $\mu_S \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ zdefiniowaną następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ L_S(x), & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ R_S(x), & c \leq x \leq d \\ 0, & d < x \end{cases} \tag{1}$$

gdzie lewa funkcja odniesienia $L_S \in [0,1]^{[a,b]}$ jest prawostronnie ciągłą funkcją niemalejącą i prawa funkcja odniesienia $R_S \in [0,1]^{[c,d]}$ jest lewostronnie ciągłą funkcją nierosnącą.

Pojęcie „skierowanych liczb rozmytych" (OFN) zostało wprowadzone przez Kosińskiego, Prokopowicza, Ślęzaka [2003] jako rozszerzenie pojęcia „FN". Z drugiej strony, Kosiński zdefiniował OFN jako uporządkowaną parę funkcji przekształcających przedział jednostkowy $[0,1]$ w $\mathbb{R}$. Żadna taka para nie jest liczbą rozmytą. Oznacza to, że nie możemy zaakceptować oryginalnej terminologii Kosińskiego. Niemniej, intuicyjne podejście Kosińskiego do pojęcia „OFN" jest bardzo użyteczne. Poniżej zaprezentowano zmodyfikowaną definicję OFN. Pojęcie „OFN" jest ściśle powiązane z następującą parą uporządkowaną.

Definicja 2: Para Kosińskiego jest to uporządkowana para (f_S, g_S) słabo monotonicznych ciągłych suriekcji $f_S: [0,1] \to UP_S$ i $g_S: [0,1] \to DOWN_S$ spełniających warunki:

$$\left(f_s(1) - f_s(0)\right) \cdot \left(g_s(1) - g_s(0)\right) \leq 0 \tag{2}$$

$$|f_s(1) - g_s(1)| \leq |f_s(0) - g_s(0)| \tag{3}$$

$$UP_S \cap DOWN_S = \{f_s(1)\} \cap \{g_s(1)\} \tag{4}$$

Dla dowolnej pary Kosińskiego (f_S, g_S) funkcja $f_S: [0,1] \to UP_S$ jest nazywana funkcją wznoszącą. Wtedy funkcja $g_S: [0,1] \to DOWN_S$ jest nazywana funkcją opadającą. Obie te funkcje mają swoją wspólną nazwę – funkcje Kosińskiego.

Dla dowolnej niemalejącej funkcji Kosińskiego $h_S: [0; 1] \to [h_S(0), h_S(1)]$ wyznacza się jej uogólnioną odwrotność $h_S^{\lhd}$ w następujący sposób:

$$\forall_{x \in [h_S(0), h_S(1)]}: \; h_S^{\lhd}(x) = \max\{\alpha \in [0; 1]: h_S(\alpha) = x\} \tag{5}$$

Dla dowolnej nierosnącej funkcji Kosińskiego $h_S: [0; 1] \to [h_S(1), h_S(0)]$ wyznacza się jej uogólnioną odwrotność $h_S^{\rhd}$ w następujący sposób:

$$\forall_{x \in [h_S(1), h_S(0)]}: \; h_S^{\rhd}(x) = \min\{\alpha \in [0; 1]: h_S(\alpha) = x\} \tag{6}$$

Z warunku (2) wynika, że różnowartościowe funkcje Kosińskiego nie mogą być równocześnie niemalejące lub równocześnie nierosnące. Korzystając z tego, OFN definiuje się w następujący sposób.

Definicja 3: Dla ustalonej pary Kosińskiego (f_S, g_S), OFN $\overleftrightarrow{S}$ jest to taka para złożona z LR-FN i z orientacji, która jest zdefiniowana w następujący sposób:

- lewa funkcja odniesienia jest równa uogólnionej odwrotności niemalejącej funkcji Kosińskiego,
- prawa funkcja odniesienia jest równa uogólnionej odwrotności nierosnącej funkcji Kosińskiego,
- orientacja jest określona jako wspólny zwrot wszystkich wektorów prowadzących z przeciwdziedziny UP_S funkcji wznoszącej do przeciwdziedziny $DOWN_S$ funkcji opadającej.

Powyższa definicja jest zgodna ze stosowanym przez Kosińskiego intuicyjnym podejściem do pojęcia „OFN". Przestrzeń wszystkich OFN oznacza się za pomocą symbolu $\mathfrak{K}$.

Liczby $f_S(0)$ i $f_S(1)$ są granicami przedziału UP_S. Liczby $g_S(0)$ i $g_S(1)$ są granicami przedziału $DOWN_S$. Z tego powodu dowolną OFN $\overleftrightarrow{S}$ z danymi UP_S i $DOWN_S$ oznacza się za pomocą symbolu $\overleftrightarrow{S}\left(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0)\right)$.

Warunki (2), (3) i (4) implikują, że OFN spełnia dokładnie jeden z poniższych warunków:

$$f_S(0) \le f_S(1) \le g_S(1) \le g_S(0) \tag{7}$$

$$f_S(0) \ge f_S(1) \ge g_S(1) \ge g_S(0) \tag{8}$$

Kiedy $f_S(0) < g_S(0)$, to warunek (7) opisuje dodatnią orientację OFN. W tym przypadku funkcja wznosząca f_S jest funkcją niemalejącą i funkcja opadająca g_S jest funkcją nierosnącą. Wartość $f_S(0)$ jest wtedy nazywana wartością początkową OFN $\overleftrightarrow{S}$, zaś wartość $g_S(0)$ jest nazywana wartością końcową OFN $\overleftrightarrow{S}$. Dodatnio zorientowana OFN $\overleftrightarrow{S}\left(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0)\right)$ jednoznacznie determinuje FN $S\left(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0)\right)$ opisaną przez swą funkcję przynależności $\mu_S \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ daną w następujący sposób:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0, & x < f_S(0) \\ f_S^{\triangleleft}(x), & f_S(0) \le x \le f_S(1) \\ 1, & f_S(1) \le x \le g_S(1) \\ g_S^{\triangleright}(x), & g_S(1) \le x \le g_S(0) \\ 0, & g_S(0) < x \end{cases} \tag{9}$$

Kiedy $f_S(0) > g_S(0)$, to warunek (8) opisuje ujemną orientację OFN. W tym przypadku funkcja wznosząca f_S jest funkcją nierosnącą i funkcja opadająca g_S jest funkcją niemalejącą. Wartość $f_S(0)$ jest wtedy nazywana wartością końcową OFN $\overleftrightarrow{S}$, zaś wartość $g_S(0)$ jest nazywana wartością początkową OFN $\overleftrightarrow{S}$. Ujemnie zorientowana OFN $\overleftrightarrow{S}\left(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0)\right)$ jednoznacznie determinuje FN $S\left(g_S(0), g_S(1), f_S(1), f_S(0)\right)$ opisaną przez swą funkcję przynależności $\mu_S \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ daną w następujący sposób:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0, & x < g_S(0) \\ g_S^{\triangleleft}(x), & g_S(0) \le x < g_S(1) \\ 1, & g_S(1) \le x \le f_S(1) \\ f_S^{\triangleright}(x), & f_S(1) < x \le f_S(0) \\ 0, & f_S(0) < x \end{cases} \tag{10}$$

W przypadku $f_S(0) = g_S(0)$, orientacja OFN jest niezdefiniowana. Wtedy jednak rozpatruje się liczbę $\overleftrightarrow{S}\left(f_S(0), f_S(0), f_S(0), f_S(0)\right)$ jako ze swej natury niezorientowaną liczbę rzeczywistą $f_S(0) \in \mathbb{R}$.

Niech $\overleftrightarrow{A}, \overleftrightarrow{B}, \overleftrightarrow{C} \in \mathfrak{K}$. W [Piasecki, 2017] dodawanie arytmetyczne $+$ liczb rzeczywistych rozszerzono do dodawania $\boxplus$ OFN za pomocą tożsamości:

$$\overleftrightarrow{C} = \overleftrightarrow{A} \boxplus \overleftrightarrow{B} \tag{11}$$

gdzie $\overleftrightarrow{C}$ jest reprezentowane za pomocą pary Kosińskiego (f_C, g_C) danej przez tożsamości:

$$f_C(y) = \\ = \begin{cases} \min\{f_A(y) + f_B(y), f_C(1)\} & (f_C(1) < g_C(1)) \vee (f_C(1) = g_C(1) \wedge \alpha \leq \gamma) \\ \max\{f_A(y) + f_B(y), f_C(1)\} & (f_C(1) > g_C(1)) \vee (f_C(1) = g_C(1) \wedge \alpha > \gamma) \end{cases}$$

$$g_C(y) = \\ = \begin{cases} \max\{g_A(y) + g_B(y), g_C(1)\} & (f_C(1) < g_C(1)) \vee (f_C(1) = g_C(1) \wedge \alpha \leq \gamma) \\ \min\{g_A(y) + g_B(y), g_C(1)\} & (f_C(1) > g_C(1)) \vee (f_C(1) = g_C(1) \wedge \alpha > \gamma) \end{cases}$$

gdzie:

$$\begin{cases} f_C(1) = f_A(1) + f_B(1) \\ g_C(1) = g_A(1) + g_B(1) \\ \alpha = f_A(0) + f_B(0) \\ \gamma = g_A(0) + g_B(0) \end{cases}$$

W przypadku zastosowania powyższej procedury do dodawania OFN o identycznej orientacji uzyskuje się wynik identyczny z wynikiem dodawania OFN w sposób wyznaczony przez zasadę rozszerzenia Zadeha.

W tej pracy ograniczono się do stwierdzenia orientacji sumy OFN postaci $\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(1), f_S(1), g_S(0))$. Wtedy z zależności (11):

$$\overleftrightarrow{C} = \overleftrightarrow{A}(f_A(0), f_A(1), f_A(1), g_A(0)) \boxplus \overleftrightarrow{B}(f_B(0), f_B(1), f_B(1), g_B(0)) \tag{12}$$

gdzie $\overleftrightarrow{C} = \overleftrightarrow{C}(f_C(0), f_C(1), f_C(1), g_C(0))$ jest reprezentowane za pomocą pary Kosińskiego (f_C, g_C) danej przez tożsamości:

$$f_C(y) = \begin{cases} \min\{f_A(y) + f_B(y), f_C(1)\} & f_A(0) + f_B(0) \leq g_A(0) + g_B(0) \\ \max\{f_A(y) + f_B(y), f_C(1)\} & f_A(0) + f_B(0) > g_A(0) + g_B(0) \end{cases}$$

$$g_C(y) = \begin{cases} \max\{g_A(y) + g_B(y), f_C(1)\} & f_A(0) + f_B(0) \leq g_A(0) + g_B(0) \\ \min\{g_A(y) + g_B(y), f_C(1)\} & f_A(0) + f_B(0) > g_A(0) + g_B(0) \end{cases}$$

$$f_C(1) = f_A(1) + f_B(1)$$

Porównanie liczb $f_C(0)$ i $g_C(0)$ pozwala na jednoznaczne ustalenie orientacji sumy (12).

2. Pomiar ryzyka nieprecyzyjności

W poprzednim rozdziale omówiono wybrane rodzaje liczb rozmytych stanowiących modele formalne przybliżonej wartości będącej przykładem informacji nieprecyzyjnej. Powszechnie jako nieprecyzyjność informacji rozumie się jej nieostrość oraz wieloznaczność [Klir, 1993]. Wieloznaczność interpretuje się jako brak jednoznacznego wyróżnienia spośród ogółu rozważanych wariantów zalecanych alternatyw. Nieostrość rozumie się natomiast jako brak jednoznacznego rozróżnienia pomiędzy daną informacją a jej zaprzeczeniem.

Modelem nieprecyzyjności wartości przybliżonej jest funkcja przynależności liczby rozmytej opisującej rozważaną wartość. Z tego powodu do pomiaru nieprecyzyjności dowolnego $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ o ograniczonym nośniku stosuje się zaproponowaną w [Khalili, 1979] miarę $m: \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, daną za pomocą zależności:

$$m(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_A(x)dx \tag{13}$$

Wzrost wieloznaczności oznacza, że zwiększać się będzie ilość alternatywnych wyborów. Powoduje to wzrost ryzyka wybrania spośród rekomendowanych opcji decyzyjnych takiej nietrafnej decyzji, która *ex post* zostanie obarczona stratą utraconych korzyści. Ryzyko to nazywamy ryzykiem wieloznaczności. Narzędziem pomiaru ryzyka wieloznaczności obarczającego OFN $\overleftrightarrow{S} \in \mathfrak{K}$ jest miara energii [de Luca, Termini, 1979] $d: \mathfrak{K} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ dana za pomocą zależności:

$$d(\overleftrightarrow{S}) = m(S) \tag{14}$$

Wzrost nieostrości oznacza zacieranie się granic rozdzielających alternatywy decyzyjne rekomendowane i alternatywy decyzyjne nierekomendowane. Powoduje to zwiększenie się ryzyka podjęcia decyzji nierekomendowanej. Takie ryzyko nazywamy ryzykiem nieostrości. Instrumentem pomiaru ryzyka nieostrości obciążającego OFN $\overleftrightarrow{S} \in \mathfrak{K}$ jest miara entropii [Kosko, 1986] $e: \mathfrak{K} \rightarrow [0; 1]$ dana za pomocą zależności:

$$e(\overleftrightarrow{S}) = \frac{m(S \cap S^C)}{m(S \cup S^C)} \tag{15}$$

Ryzyko nieprecyzyjności to kompozycja współoddziałujących ryzyka wieloznaczności i ryzyka nieostrości. Narzędziem opisu ryzyka nieprecyzyjności obarczającego OFN $\overleftrightarrow{S} \in \mathfrak{K}$ jest wektor $\left(d(\overleftrightarrow{S}), e(\overleftrightarrow{S})\right)$.

3. Zorientowana behawioralna wartość bieżąca

Instrument finansowy $\mathcal{A}$ jest reprezentowany przez czwórkę $\left(\check{C}_{min}, \check{C}, \check{C}_{max}, \Delta C\right)$, gdzie:

- $\check{C} \in \mathbb{R}^{+}$ jest obserwowaną ceną rynkową instrumentu finansowego $\mathcal{A}$,
- $C_0 \in \mathbb{R}^{+}$ jest merytorycznie uzasadnioną ceną równowagi finansowej,
- $\Delta C = \check{C} - C_0$ jest odchyleniem ceny rynkowej od ceny równowagi,
- $\check{C}_{min} \in \left]0; \check{C}\right]$ jest maksymalnym dolnym oszacowaniem możliwej ceny rynkowej,
- $\check{C}_{max} \in \left[\check{C}; +\infty\right[$ jest minimalnym górnym oszacowaniem możliwej ceny rynkowej.

Wartość ceny rynkowej $\check{C}$ jest ustalana drogą bezpośredniej obserwacji rynku finansowego. Cena równowagi finansowej C_0 jest ustalana za pomocą powszechnie akceptowanych metod analizy technicznej lub analizy fundamentalnej. Oba te parametry mają charakter obiektywny. Odmiennie ma się rzecz z oszacowaniami $\check{C}_{min}$ i $\check{C}_{max}$ możliwej ceny rynkowej. Oba te parametry są ustalane na podstawie przesłanek behawioralnych i mogą mieć charakter subiektywny. Jedna z metod wyznaczania tych wartości została przedstawiona w [Piasecki, 2011a].

Po przeprowadzonej dyskusji definicji pojęcia w [Piasecki, 2016] instrumentowi finansowemu $\mathcal{A}$ przypisano BPV przedstawioną jako LR-FN $\beta\left(\check{C}_{min}, \check{C}, \check{C}, \check{C}_{max} \middle| \Delta C\right)$. Funkcja przynależności $\mu_{BPV}\left(\cdot \middle| \check{C}_{min}, \check{C}, \check{C}_{max}, \Delta C\right) \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ BPV jest określona za pomocą tożsamości:

- dla $\Delta C > 0$:

$$\mu_{BPV}\left(\cdot \middle| \check{C}_{min}, \check{C}, \check{C}_{max}, \Delta C\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{(x-\check{C}_{min})(1+\delta C)}{\check{C}-\check{C}_{min}+(x-\check{C}_{min})\delta C} & \text{dla } x \in \left[\check{C}_{min}, \check{C}\right] \neq \left\{\check{C}\right\} \\ \frac{\check{C}_{max}-x}{\check{C}_{max}-\check{C}+(\check{C}_{max}-x)\delta C} & \text{dla } x \in \left]\check{C}, \check{C}_{max}\right] \\ 0 & \text{dla } x \notin \left[\check{C}_{min}, \check{C}_{max}\right] \end{cases} \tag{16}$$

- dla $\Delta C \leq 0$

$$\mu_{BPV}\left(\cdot \middle| \check{C}_{min}, \check{C}, \check{C}_{max}, \Delta C\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{x-\check{C}_{min}}{\check{C}-\check{C}_{min}+(x-\check{C}_{min})\delta C} & \text{dla } x \in \left[\check{C}_{min}, \check{C}\right[\\ \frac{(\check{C}_{max}-x)(1+\delta C)}{\check{C}_{max}-\check{C}+(\check{C}_{max}-x)\delta C} & \text{dla } x \in \left[\check{C}, \check{C}_{max}\right] \neq \left\{\check{C}\right\} \\ 0 & \text{dla } x \notin \left[\check{C}_{min}, \check{C}_{max}\right] \end{cases} \tag{17}$$

gdzie:

$$\delta C = \frac{|\Delta C|}{\check{C}} = \frac{|\check{C} - C_0|}{\check{C}} \tag{18}$$

W [Łyczkowska-Hanćkowiak, 2017] informacje opisane za pomocą BPV zostały uzupełnione o subiektywną prognozę zwrotu trendu ceny rynkowej. Prognoza ta została zaimplementowana w modelu BPV jako zwrot liczby rozmytej. Posłużono się tutaj następującymi zasadami zapisu domniemanego zwrotu trendu:

– domniemanie wzrostu wartości ceny zapisujemy za pomocą dodatniej orientacji liczby rozmytej,
– domniemanie spadku wartości ceny zapisujemy za pomocą ujemnej orientacji liczby rozmytej.

W ten sposób BPV została przedstawiona jako OFN $\overleftrightarrow{\beta}\left({}_{*}\check{C}, \check{C}, \check{C}, \check{C}_{*} \middle| \Delta C\right)$, gdzie:

– ${}_{*}\check{C} \in \{\check{C}_{min}, \check{C}_{max}\}$ jest wartością początkową BPV,
– $\check{C}_{*} \in \{\check{C}_{min}, \check{C}_{max}\} \setminus \{ {}_{*}\check{C}\}$ jest wartością końcową BPV.

Wyznaczoną w ten sposób BPV nazywa się zorientowaną BPV. Dodatnio zorientowana BPV jest przedstawiona jako OFN $\overleftrightarrow{\beta}\left(\check{C}_{min}, \check{C}, \check{C}, \check{C}_{max} \middle| \Delta C\right)$. Ujemnie zorientowaną BPV przedstawia się jako OFN $\overleftrightarrow{\beta}\left(\check{C}_{max}, \check{C}, \check{C}, \check{C}_{min} \middle| \Delta C\right)$. Funkcja przynależności zorientowanej BPV jest niezależna od orientacji i dana za pomocą zależności (16) i (17).

4. Zorientowana BPV portfela dwuskładnikowego

Rozważmy przypadek portfela dwuskładnikowego π złożonego z instrumentów finansowych $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$, co zapisujemy $\pi = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$. Zorientowana BPV instrumentu $\mathcal{A}_i$ jest wyznaczona jako OFN $\overleftrightarrow{\beta}\left({}_{*}\check{C}^i, \check{C}^i, \check{C}^i, \check{C}^i_{*} \middle| \Delta C^i\right)$, gdzie:

– $\check{C}^i \in \mathbb{R}^+$ jest obserwowaną ceną rynkową instrumentu finansowego $\mathcal{A}^i$,
– $C^i_0 \in \mathbb{R}^+$ jest ceną równowagi finansowej merytorycznie uzasadnioną dla instrumentu finansowego $\mathcal{A}^i$,
– $\Delta C^i = \check{C}^i - C^i_0$ jest odchyleniem ceny rynkowej od ceny równowagi,
– ${}_{*}\check{C}^i \in \mathbb{R}^+$ jest wartością początkową BPV instrumentu finansowego $\mathcal{A}^i$,
– $\check{C}^i_{*} \in \mathbb{R}^+$ jest wartością końcową BPV instrumentu finansowego $\mathcal{A}^i$.

Każdy portfel jest instrumentem finansowym. Stąd wnioskujemy, że także portfelowi π można przypisać BPV. Dowolna PV portfela π jest sumą PV instrumentów finansowych $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$. Oznacza to, że PV portfela π jest równa OFN $\overleftrightarrow{S}\left({}_{*}\check{C}^\pi, \check{C}^\pi, \check{C}^\pi, \check{C}^\pi_{*} \middle| \Delta C^\pi\right)$, gdzie:

$$\check{C}^\pi = \check{C}^1 + \check{C}^2 \tag{19}$$

$$\Delta C^{\pi} = \Delta C^{1} + \Delta C^{2} \tag{20}$$

Ponadto z (12):

$$ {}_{*}\check{C}^{\pi} = \begin{cases} \min\{ {}_{*}\check{C}^{1} + {}_{*}\check{C}^{2}, \check{C}^{\pi} \} & {}_{*}\check{C}^{1} + {}_{*}\check{C}^{2} \leq \check{C}^{1}_{*} + \check{C}^{2}_{*} \\ \max\{ {}_{*}\check{C}^{1} + {}_{*}\check{C}^{2}, \check{C}^{\pi} \} & {}_{*}\check{C}^{1} + {}_{*}\check{C}^{2} > \check{C}^{1}_{*} + \check{C}^{2}_{*} \end{cases} \tag{21}$$

$$ \check{C}^{\pi}_{*} = \begin{cases} \max\{ \check{C}^{1}_{*} + \check{C}^{2}_{*}, \check{C}^{\pi} \} & {}_{*}\check{C}^{1} + {}_{*}\check{C}^{2} \leq \check{C}^{1}_{*} + \check{C}^{2}_{*} \\ \min\{ \check{C}^{1}_{*} + \check{C}^{2}_{*}, \check{C}^{\pi} \} & {}_{*}\check{C}^{1} + {}_{*}\check{C}^{2} > \check{C}^{1}_{*} + \check{C}^{2}_{*} \end{cases} \tag{22}$$

Dzięki temu zgromadzono wszystkie dane potrzebne do wyznaczenia zorientowanej BPV portfela π, gdyż:

$$\check{C}^{\pi}_{min} = \min\{ {}_{*}\check{C}^{\pi}, \check{C}^{\pi}_{*} \}, \tag{23}$$

$$\check{C}^{\pi}_{max} = \max\{ {}_{*}\check{C}^{\pi}, \check{C}^{\pi}_{*} \}, \tag{24}$$

gdzie:

- $\check{C}^{\pi}_{min} \in \left]0; \check{C}^{\pi}\right]$ jest maksymalnym dolnym oszacowaniem możliwej ceny rynkowej portfela π,
- $\check{C}^{\pi}_{max} \in \left[\check{C}^{\pi}; +\infty\right[$ jest minimalnym górnym oszacowaniem możliwej ceny rynkowej portfela π.

Dzięki temu portfelowi π możemy przypisać zorientowaną BPV przedstawioną jako OFN $\overleftrightarrow{\beta}\left({}_{*}\check{C}^{\pi}, \check{C}^{\pi}, \check{C}^{\pi}, \check{C}^{\pi}_{*} \middle| \Delta C^{\pi} \right)$.

Funkcję przynależności $\mu_{BPV}\left(\cdot \middle| \check{C}^{\pi}_{min}, \check{C}^{\pi}, \check{C}^{\pi}_{max}, \Delta C^{\pi} \right) \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ zorientowanej BPV portfela π wyznaczamy za pomocą zależności (16) i (17).

5. Portfele dwuskładnikowe – studium przypadków

W rozdziale tym przedstawiony zostanie wpływ uwzględnienia orientacji BPV składników portfela na BPV portfela. Ten wpływ zostanie przedstawiony w trakcie eksperymentu numerycznego polegającego na studium szeregu przypadków portfeli dwuskładnikowych. Składnikami tych portfeli będą instrumenty finansowe $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$. Podstawowe parametry tych instrumentów zostały przedstawione w tab. 1.

Tabela 1. Parametry składników rozważanych portfeli

Składnik portfela	$\check{C}_{min}$	$\check{C}$	$\check{C}_{max}$	ΔC
$\mathcal{A}$	**108**	**120**	**138**	**10**
$\mathcal{B}$	**14**	**40**	**54**	**–20**
$\mathcal{D}$	**104**	**150**	**224**	**30**

Chcąc prześledzić wpływ uwzględnienia orientacji BPV składników na BPV portfela, każdy z instrumentów finansowych $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ rozpatrujemy w dwóch wariantach:

– $\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{+}$ instrument finansowy $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$, wobec którego subiektywnie oczekujemy wzrostu ceny rynkowej,
– $\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{-}$ instrument finansowy $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$, wobec którego subiektywnie oczekujemy spadku ceny rynkowej.

Podstawowe parametry tych wariantów zostały przedstawiono w tab. 2. Z punktu widzenia teorii finansów warunek $\Delta C > 0$ jest przesłanką dla spadku ceny rynkowej. Podobnie warunek $\Delta C < 0$ pozwala oczekiwać wzrostu ceny rynkowej.

Tabela 2. Parametry wariantów instrumentów finansowych

Warianty instrumentów finansowych	$_*\check{C}$	$\check{C}$	$\check{C}_*$	ΔC
$\mathcal{A}^{+}$	108	120	138	10
$\mathcal{A}^{-}$	138	120	108	10
$\mathcal{B}^{+}$	14	40	54	–20
$\mathcal{B}^{-}$	54	40	14	–20
$\mathcal{D}^{+}$	104	150	224	30
$\mathcal{D}^{-}$	224	150	104	30

Analizując zebrane powyżej wyniki, stwierdzono, że w trakcie eksperymentu autorzy mieli do czynienia z następującymi wariantami przewidywań dalszego przebiegu trendu ceny rynkowej instrumentów finansowych:

– $\mathcal{A}^{+}, \mathcal{D}^{+}$ warianty z teoretycznym przewidywaniem spadku ceny i subiektywnym oczekiwaniem wzrostu ceny,
– $\mathcal{A}^{-}, \mathcal{D}^{-}$ warianty z teoretycznym przewidywaniem spadku ceny i subiektywnym oczekiwaniem spadku ceny,
– $\mathcal{B}^{+}$ wariant z teoretycznym przewidywaniem wzrostu ceny i subiektywnym oczekiwaniem wzrostu ceny,
– $\mathcal{B}^{-}$ wariant z teoretycznym przewidywaniem spadku ceny i subiektywnym oczekiwaniem spadku ceny.

Wyniki powyższego zestawienia sugerują, aby w trakcie naszego eksperymentu numerycznego rozważyć wszystkie warianty portfeli $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ i $\{\mathcal{A}, \mathcal{D}\}$. W kolejnym kroku, korzystając z zależności (19), (20), (21) i (22), wyznaczono wartości parametrów wszystkich wariantów wspomnianych powyżej portfeli. Wyniki tych obliczeń przedstawiono w tab. 3.

Tabela 3. Parametry wariantów portfeli

Warianty portfeli	$_*\breve{C}$	$\breve{C}$	$\breve{C}_*$	ΔC
$\{\mathcal{A}^+,\mathcal{B}^+\}$	122	160	246	–10
$\{\mathcal{A}^-,\mathcal{B}^-\}$	246	160	122	–10
$\{\mathcal{A}^+,\mathcal{B}^-\}$	162	160	242	–10
$\{\mathcal{A}^-,\mathcal{B}^+\}$	242	160	162	–10
$\{\mathcal{A}^+,\mathcal{D}^+\}$	212	270	362	40
$\{\mathcal{A}^-,\mathcal{D}^-\}$	362	270	212	40
$\{\mathcal{A}^+,\mathcal{D}^-\}$	332	270	242	40
$\{\mathcal{A}^-,\mathcal{D}^+\}$	242	270	332	40

Analizując zebrane w tej tabeli wyniki, stwierdzono, że w trakcie naszego eksperymentu mamy do czynienia z następującymi wariantami przewidywań dalszego przebiegu trendu ceny rynkowej portfela finansowego:

– $\{\mathcal{A}^+,\mathcal{B}^+\},\{\mathcal{A}^+,\mathcal{B}^-\}$ portfele z teoretycznym przewidywaniem spadku ceny i subiektywnym oczekiwaniem wzrostu ceny,
– $\{\mathcal{A}^-,\mathcal{B}^-\},\{\mathcal{A}^-,\mathcal{B}^+\}$ portfele z teoretycznym przewidywaniem spadku ceny i subiektywnym oczekiwaniem spadku ceny,
– $\{\mathcal{A}^+,\mathcal{D}^+\},\{\mathcal{A}^-,\mathcal{D}^+\}$ portfele z teoretycznym przewidywaniem wzrostu ceny i subiektywnym oczekiwaniem wzrostu ceny,
– $\{\mathcal{A}^+,\mathcal{D}^-\},\{\mathcal{A}^-,\mathcal{D}^-\}$ portfele z teoretycznym przewidywaniem wzrostu ceny subiektywnym oczekiwaniem spadku ceny.

W kolejnym kroku, korzystając z zależności (23), (24), (16) i (17), wyznaczono dla każdego wariantu instrumentu finansowego lub portfela zorientowane BPV i ich funkcje przynależności. Wyniki tych obliczeń zebrano w tab. 4.

Tabela 4. Zorientowane BPV i ich funkcje przynależności

Warianty instrumentów finansowych	Zorientowana BPV	Funkcja przynależności
$\mathcal{A}^+$	$\overleftrightarrow{\beta}(108;120;120;138\|10)$	$\mu_{BPV}(\cdot\ \|108;120;138;10)$
$\mathcal{A}^-$	$\overleftrightarrow{\beta}(138;120;120;108\|10)$	
$\mathcal{B}^+$	$\overleftrightarrow{\beta}(14;40;40;54\|-20)$	$\mu_{BPV}(\cdot\ \|14;40;54;-20)$
$\mathcal{B}^-$	$\overleftrightarrow{\beta}(54;40;40;14\|-20)$	
$\mathcal{D}^+$	$\overleftrightarrow{\beta}(104;150;150;224\|30)$	$\mu_{BPV}(\cdot\ \|104;150;224;30)$
$\mathcal{D}^-$	$\overleftrightarrow{\beta}(224;150;150;104\|30)$	
$\{\mathcal{A}^+,\mathcal{B}^+\}$	$\overleftrightarrow{\beta}(122;160;160;246\|-10)$	$\mu_{BPV}(\cdot\ \|122;160;246;-10)$
$\{\mathcal{A}^-,\mathcal{B}^-\}$	$\overleftrightarrow{\beta}(246;160;160;122\|-10)$	
$\{\mathcal{A}^+,\mathcal{B}^-\}$	$\overleftrightarrow{\beta}(162;160;160;242\|-10)$	$\mu_{BPV}(\cdot\ \|162;160;242;-10)$
$\{\mathcal{A}^-,\mathcal{B}^+\}$	$\overleftrightarrow{\beta}(242;160;160;162\|-10)$	
$\{\mathcal{A}^+,\mathcal{D}^+\}$	$\overleftrightarrow{\beta}(212;270;270;362\|40)$	$\mu_{BPV}(\cdot\ \|212;270;362;40)$
$\{\mathcal{A}^-,\mathcal{D}^-\}$	$\overleftrightarrow{\beta}(362;270;270;212\|40)$	
$\{\mathcal{A}^+,\mathcal{D}^-\}$	$\overleftrightarrow{\beta}(332;270;270;242\|40)$	$\mu_{BPV}(\cdot\ \|242;270;332;40)$
$\{\mathcal{A}^-,\mathcal{D}^+\}$	$\overleftrightarrow{\beta}(242;270;270;332\|40)$	

W tabeli 4 warto zwrócić uwagę na to, że wybranym parom portfeli, pomimo różnych zorientowanych BPV, przypisano identyczne funkcje przynależności. W przypadku portfeli złożonych z instrumentów finansowych o identycznej orientacji BPV efekt ten wynika z uniwersalnych właściwości operacji dodawania OFN. W przypadku portfeli złożonych ze składników o różnej orientacji BPV efekt ten jest uzyskiwany dla portfeli dwuskładnikowych.

Najistotniejszym wynikiem jest to, że dla czterech różnych wariantów portfela $\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}$ uzyskano dwie różne funkcje przynależności BPV. Identyczny wynik uzyskano dla czterech różnych wariantów portfela $\{\mathcal{A},\mathcal{D}\}$. Spostrzeżenie to dowodzi wpływu orientacji BPV składników portfela na BPV portfela.

W kolejnym kroku oceniać będziemy wpływ uwzględnienia orientacji BPV składników portfela na ryzyko nieprecyzyjności. W tym celu dla każdego składnika portfela i każdej grupy wariantów portfeli mających wspólną funkcję przynależności – korzystając z zależności (14) i (15) – wyznaczamy miary ich energii oraz entropii. Wyniki tych obliczeń zestawiono w tab. 5.

Tabela 5. Miary energii i entropii zorientowanej BPV

Warianty instrumentów finansowych	Miara energii BPV instrumentu finansowego	Miara entropii BPV instrumentu finansowego
$\mathcal{A}$	14,7	0,357
$\mathcal{B}$	17,8	0,416
$\mathcal{D}$	57,1	0,378
$\{\mathcal{A}^+,\mathcal{B}^+\},\{\mathcal{A}^-,\mathcal{B}^-\}$	34,7	0,348
$\{\mathcal{A}^+,\mathcal{B}^-\},\{\mathcal{A}^-,\mathcal{B}^+\}$	4,81	0,357
$\{\mathcal{A}^+,\mathcal{D}^+\},\{\mathcal{A}^-,\mathcal{D}^-\}$	78,1	0,373
$\{\mathcal{A}^+,\mathcal{D}^-\},\{\mathcal{A}^-,\mathcal{D}^+\}$	39,5	0,367

Narzędziem do ustalenia wpływu orientacji BPV na ryzyko nieprecyzyjności jest porównanie dla każdego z portfeli miar energii i entropii wszystkich jego wariantów. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń trudno dopatrzyć się wpływu uwzględnienia orientacji na ryzyko nieostrości, gdyż w naszym eksperymencie numerycznym miary entropii BPV poszczególnych wariantów tego samego portfela różnią się pomiędzy sobą o mniej niż 2,5%. Inaczej ma się rzecz z ryzykiem wieloznaczności. Miary energii BPV poszczególnych wariantów tego samego portfela różnią się pomiędzy sobą nawet o 50%. Wpływ uwzględnienia orientacji BPV na ryzyko wieloznaczności jest wyraźnie widoczny.

Ponadto warto zwrócić uwagę na to, że zestawienie w portfelu składników o przeciwnej orientacji BPV może w istotny sposób obniżyć ryzyko wieloznaczności. Nasuwa się skojarzenie dotyczace efektu ujemnej korelacji polegające na tym, że dodawanie ujemnie skorelowanych zmiennych losowych pozwala obniżyć ryzyko niepewności. W modelu przedstawionym w niniejszym artykule przeciwne orientacje BPV są wywołane przez „ujemnie skorelowane" subiektywne oczekiwania zmian ceny rynkowej.

6. Zorientowana BPV portfela wieloskładnikowego

Rozważmy przypadek portfela wieloskładnikowego π złożonego z instrumentów finansowych $\mathcal{A}_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Zorientowana BPV instrumentu $\mathcal{A}_i$ jest wyznaczona jako OFN $\overleftrightarrow{\beta}\left({}_*\check{C}^i, \check{C}^i, \check{C}^i, \check{C}_*^i \middle| \Delta C^i\right)$, gdzie:

- $\check{C}^i \in \mathbb{R}^+$ jest obserwowaną ceną rynkową instrumentu finansowego $\mathcal{A}^i$,
- $C_0^i \in \mathbb{R}^+$ jest ceną równowagi finansowej merytorycznie uzasadnioną dla instrumentu finansowego $\mathcal{A}^i$,
- $\Delta C^i = \check{C}^i - C_0^i$ jest odchyleniem ceny rynkowej od ceny równowagi,
- ${}_*\check{C}^i \in \mathbb{R}^+$ jest wartością początkową BPV instrumentu finansowego $\mathcal{A}^i$,
- $\check{C}_*^i \in \mathbb{R}^+$ jest wartością końcową BPV instrumentu finansowego $\mathcal{A}^i$.

Dowolna PV portfela π jest sumą PV instrumentów finansowych $\mathcal{A}_i$. Oznacza to, że PV portfela π jest równa OFN $\overleftrightarrow{S}\left({}_*\check{C}^\pi, \check{C}^\pi, \check{C}^\pi, \check{C}_*^\pi \middle| \Delta C^\pi\right)$, gdzie:

$$\check{C}^\pi = \sum_{i=1}^n \check{C}^i \tag{25}$$

$$\Delta C^\pi = \sum_{i=1}^n \Delta C^i \tag{26}$$

Ponadto z (12):

$${}_*\check{C}^\pi = \begin{cases} \min\left\{\sum_{i=1}^n {}_*\check{C}^i, \check{C}^\pi\right\} & \sum_{i=1}^n {}_*\check{C}^i \leq \sum_{i=1}^n \check{C}_*^i \\ \max\left\{\sum_{i=1}^n {}_*\check{C}^i, \check{C}^\pi\right\} & \sum_{i=1}^n {}_*\check{C}^i > \sum_{i=1}^n \check{C}_*^i \end{cases} \tag{27}$$

$$\check{C}_*^\pi = \begin{cases} \max\left\{\sum_{i=1}^n \check{C}_*^i, \check{C}^\pi\right\} & \sum_{i=1}^n {}_*\check{C}^i \leq \sum_{i=1}^n \check{C}_*^i \\ \min\left\{\sum_{i=1}^n \check{C}_*^i, \check{C}^\pi\right\} & \sum_{i=1}^n {}_*\check{C}^i > \sum_{i=1}^n \check{C}_*^i \end{cases} \tag{28}$$

Dzięki temu zgromadzono wszystkie dane potrzebne do wyznaczenia zorientowanej BPV portfela π, gdyż maksymalne dolne oszacowanie możliwej ceny rynkowej portfela $\check{C}_{min}^\pi$ i minimalne górne oszacowanie możliwej ceny rynkowej portfela $\check{C}_{max}^\pi$ wyznaczono odpowiednio z (23) i (24).

Dzięki temu portfelowi π możemy przypisać zorientowaną BPV przedstawioną jako OFN $\overleftrightarrow{\beta}\left({}_*\check{C}^\pi, \check{C}^\pi, \check{C}^\pi, \check{C}_*^\pi \middle| \Delta C^\pi\right)$. Funkcję przynależności $\mu_{BPV}\left(\cdot \middle| \check{C}_{min}^\pi, \check{C}^\pi, \check{C}_{max}^\pi, \Delta C^\pi\right) \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ zorientowanej BPV portfela π wyznaczono za pomocą zależności (16) i (17).

Podsumowanie

W pracy wykazano, że uwzględnienie orientacji BPV ma wpływ na ocenę ryzyka nieprecyzyjności obciążającego portfel instrumentów finansowych. Ponadto pokazano, że uwzględnienie orientacji BPV może obniżyć ryzyko wieloznaczności.

Oba te fakty wskazują na celowość podjęcia dalszych badań w zakresie zastosowania skierowanych liczb rozmytych do zarządzania ryzykiem obarczającym portfel finansowy. Uzyskane tutaj rezultaty są istotnym krokiem rozwoju teorii portfeli ocenianych za pomocą zorientowanej BPV. W kolejnych krokach tych badań należy przestawione tutaj wyniki uogólnić do przypadku dowolnej zorientowanej PV. Równolegle należy rozwinąć teorię stopy zwrotu z portfela o składnikach ocenionych za pomocą zorientowanej rozmytej PV.

Literatura

Dubois D., Prade H. (1979), *Fuzzy Real Algebra: Some Results*, "Fuzzy Sets and Systems", Vol. 2, No. 4, s. 327-348.

Dubois D., Prade H. (1980), *Fuzzy Set and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York.

Khalili S. (1979), *Fuzzy Measures and Mappings*, "Journal of Mathematical Analysis and Applications", Vol. 68, s. 92-99.

Klir G.J. (1993), *Developments in Uncertainty-Based Information*, "Advances in Computers", Vol. 36, Academic Press, San Diego, s. 255-332.

Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D. (2003), *Ordered Fuzzy Numbers*, "Bulletin of the Polish Academy of Sciences", Vol. 51, No. 3, s. 321-339.

Kosko B. (1986), *Fuzzy Entropy and Conditioning*, "Inform Sciences", No. 40, s. 165-174.

de Luca A., Termini S. (1979) *Entropy and Energy Measures of Fuzzy Sets* [w:] M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager (eds.), *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, s. 321-338.

Łyczkowska-Hanćkowiak A. (2017), *Behawioralna wartość bieżąca w ujęciu skierowanych liczb rozmytych*, „Optimum Studia Ekonomiczne", Vol. 87, No. 3, s. 122-137.

Piasecki K. (2011a), *Behavioural Present Value*, "SSRN Electronic Journal", Vol. 1, DOI:10.2139/ssrn.1729351.

Piasecki K. (2011b), *Rozmyte zbiory probabilistyczne, jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań, DOI 10.13140/2.1.2506.6567.

Piasecki K. (2016), *Intuicyjne zbiory rozmyte jako narzędzie finansów behawioralnych*, edu-Libri, Kraków–Legionowo.

Piasecki K. (2017), *O pewnych modyfikacjach teorii skierowanych liczb rozmytych*, „Optimum Studia Ekonomiczne", Vol. 87, No. 3 , s. 3-18.

Piasecki K., Siwek J. (2015), *Behavioural Present Value Defined as Fuzzy Number – A New Approach*, "Folia Oeconomica Stetinensia", Vol. 15, No. 2, s. 27-41.

Piasecki K., Siwek J. (2017), *Portfel dwuskładnikowy z trójkątnymi rozmytymi wartościami bieżącymi – podejście alternatywne*, „Przegląd Statystyczny", Vol. LXIV, No. 1, s. 59-77.

ORIENTED BEHAVIOURAL PRESENT VALUE OF TWO-ASSETS PORTFOLIO – A CASE STUDY

Summary: The subject of considerations is Piasecki's behavioural present value (BPV), which describes the influence of selected behavioural factors on the imprecise evaluation of present value. The original formal model of BPV was a fuzzy number. Łyczkowska-Hanćkowiak has proposed and justified the designation of BPV orientation. In this way BPV was represented by ordered fuzzy number. The main purpose of this work is to designate the oriented BPV of two-assets portfolio. Obtained results are generalized to the case of multi-assets portfolio.

Keywords: behavioural finance, present value, ordered fuzzy number.