BIBLJOTECZKA KÓŁKA MAT.-FIZ. U. U. J. Nr. 7
POD REDAKCJĄ
PROF. DRA WITOLDA WILKOSZA

DR WITOLD WILKOSZ
PROFESOR UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

PODSTAWY TEORETYCZNE ARYTMETYK KLASYCZNYCH

KRAKÓW 1936

BIBLJOTECZKA KÓŁKA MAT.-FIZ. U. U. J. Nr. 7
POD REDAKCJĄ
PROF. DRA WITOLDA WILKOSZA

DR WITOLD WILKOSZ
PROFESOR UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

PODSTAWY TEORETYCZNE ARYTMETYK KLASYCZNYCH

KRAKÓW 1936
NAKŁADEM KÓŁKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNEGO U.U.J.
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNIACH GEBETHNERA i WOLFFA
Warszawa — Kraków — Lublin — Łódź — Poznań — Wilno — Zakopane

DRUKARNIA NARODOWA W KRAKOWIE

Książka niniejsza powstała z wykładów, jakie o tym temacie miałem w roku 1934/35. Przy jej układzie korzystałem wiele z pomocy mej Żony. Pannie Lidji Stankiewiczównie zawdzięczam przeprowadzenie sumiennej korekty oraz uwagi dotyczące pewnych miejsc tekstu. Obu Paniom składam na tem miejscu serdeczne podziękowanie.

Kraków 1935.

Rozdział I.

Przegląd pojęć zasadniczych.

Zastanawiając się nad podstawami teoretycznemi arytmetyki, musimy sobie uświadomić fakt, że czyniąc to, wkraczamy na teren niezmiernie bliski podstaw matematyki wogóle. Tu już grać poczynają znaczącą rolę pojęcia i rozróżnienia, które znajdują się na pograniczu matematyki i logiki formalnej. My atoli nie możemy wkraczać w pełni na tereny pozamatematyczne. Jest to dziedzina badań podziśdzień dość płynna i niezupełnie też opanowana. Musimy obrać pozycję skromniejszą, położoną nieco powyżej samych podstaw. Wystarczy nam tu, jeśli dokonamy tylko pewnego przeglądu pojęć zasadniczych, któremi posługiwać się będziemy w dalszym ciągu. Ale i tak nie możemy stanąć na gruncie uznawanym bezspornie przez wszystkich. I tu musimy obrać jedno ze stanowisk szczególnych. Pozycja, którą zamierzam zająć będzie stanowiskiem, do jakiego doprowadziły mnie rozważania własne, którym w całej pełni nie mogę dać tu wyrazu, odsyłając czytelnika do prac mych, poświęconych specjalnie tym zagadnieniom. Nie zamierzam tu zajmować się jednak logiką matematyczną, lecz matematyką, posługującą się właściwym jej, od wieków wyrobionym językiem. To też po zwięzłym przeglądzie pojęć podstawowych, znajdziemy się zaraz na terenie klasycznym matematyki. Nie sądzę jednak, aby zapoznanie się z pewnemi pojęciami z pogranicza tej nauki mogło przynieść szkodę czytelnikowi, zwłaszcza, gdy ma się to przyczynić do usystematyzowania wykładu zagadnień, któremi mamy się tu zajmować.

§ 1. Orzeczenia i kwantyfikatory.

1. **Typ zdań matematycznych.** Tak jak *każda* nauka teoretyczna, również i matematyka wypowiada o pewnych *przedmiotach* pewne *orzeczenia. Orzeczenia* A, B, φ, ψ mogą być wypowiedziane o *jednym przedmiocie* a, x, y w postaci:

$$A(a) \text{ czy } B(x),\ \varphi(y) \text{ i t. p.}$$

[czyt.: A zachodzi dla a, B zachodzi dla x i t. d.] lub o *więcej* przedmiotach jednocześnie, w postaci:

$$A(a, b),\ \varphi(x, y),\ \psi(x, y, z)$$

[czyt.: A zachodzi dla a i b, φ zachodzi dla x i y, ψ zachodzi dla x, y i z].

Orzeczenia same nazywa Frege i Russell *funkcjami zdaniowemi* (propozycjonalnemi), Hilbert zaś i jego szkoła [Ackermann, Bernays] *predykatami.*

Orzeczenia mogą być *jedno, dwu* i *więcej-podmiotowe,* to znaczy odnosić się do jednego, dwu lub więcej przedmiotów.

Przykłady: x jest liczbą całkowitą, $x < y$, $z = x + y$. [Russell mówi o funkcjach zdaniowych jednej, dwu czy więcej *zmiennych* (logicznych)].

Orzeczenia odnosić się mogą (w danem zdaniu matematycznej treści) do przedmiotów *szczególnych*

jak naprz.: $2 < 5$, 6 jest podzielne przez 2, lub *ogólnych* (nieoznaczonych) jak w zdaniach:
$x > y + z$, $x = x$, $a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$ i t. p.

Jeżeli orzeczenia odnoszą się do przedmiotów *ogólnych*, mogą być opatrzone *kwantyfikatorami*. Przez *kwantyfikator*, odnoszący się do *podmiotu* (zmiennej) x w *orzeczeniu* A rozumiemy jeden z dwu zwrotów: „dla każdego x" oraz „istnieje x". Przy pomocy kwantyfikatorów tworzymy:

(1) dla orzeczeń kształtu $A(x)$
zdania typu:

„dla każdego x zachodzi $A(x)$"
ew. „istnieje x takie, że zachodzi $A(x)$".

Wprowadzając oznaczenia Russella dla tych zwrotów:

$(x) A(x)$ i $(\exists x) A(x)$ lub
Hilberta $(x) A(x)$ i $(Ex) A(x)$

uzyskalibyśmy możność krótszego sposobu pisania tych zdań. Przyjąwszy je na chwilę, mamy dalej:

(2) dla orzeczeń typu $A(x, y)$ zdania:

$$(x)(y) A(x, y),\quad (Ex)(y) A(x, y),$$
$$(x)(Ey) A(x, y),\quad (Ex)(Ey) A(x, y),$$

które czytelnik sam z łatwością przeczyta i zinterpretuje.

Podobnie tworzylibyśmy zdania z kwantyfikatorami dla orzeczeń o więcej niż dwu podmiotach.

Przykłady:

„dla każdego x, jeżeli x jest całkowitą, $2x$ jest również całkowitą",

„istnieje x takie, że x jest całkowite i $x^2 = 16$",

„dla każdego x istnieje y takie, że

$x = y$ i t. d.

Kwantyfikator typu (x) {„dla każdego x"} nazywa się *uogólnieniem* (generalizacją), kwantyfikator zaś (Ex) czy $(\exists x)$ {„istnieje x"} *uszczególnieniem* (partykularyzacją) swej zmiennej x.

Uszczególnienie wyraża też *„istnienie"* (kwantyfikator egzystencjonalny).

W dalszym ciągu chcemy się posługiwać tradycyjnym językiem matematycznym. Ten atoli posiada swe odrębne właściwości w używaniu kwantyfikatorów, przyczem czyni to w sposób nie zawsze tak precyzyjny, do jakiego zdolnym jest język logiki formalnej. Zwrócimy więc uwagę na kilka sposobów zaznaczania kwantyfikatorów w języku normalnym.

(1) Uogólnienie wyraża język polski słowami „każdy", „jakikolwiek", „dowolny" ew. „żaden" (przy przeczeniu).

(2) Zgodnie z tradycją matematyczną będziemy uważali, że w zdaniu matematycznem *każda* zmienna *nieopatrzona* (w wypowiedzi zwyczajnej) *kwantyfikatorem* posiada w rzeczywistości *kwantyfikator*, który ją *uogólnia*.

Naprz.: $x = x$ ma oznaczać $(x)\{x = x\}$.

„Jeżeli a i b są całkowite, to $a + b = b + a$" ma oznaczać: „dla każdego a i każdego b, jeżeli a i b są całkowite, to $a + b = b + a$".

(3) Kwantyfikator uszczególniający („istnienie") jest zazwyczaj *ukryty* w języku codziennym pod słówkami: *pewien, jakiś, niektóry* i t. p.

Naprz. $x^2 = 4$ dla *jakiegoś* x
oznacza: „istnieje x takie, że $x^2 = 4$".

„Niektóre liczby całkowite są pierwsze" oznacza: „istnieją x takie, że x są całkowite i pierwsze".

Występuje tu na jaw okoliczność, że słówko „niektóry“ (a podobnie i inne jak „jakiś“, „któryś“) wyrażają kwantyfikator istnienia i jednocześnie zmienną, do której on się odnosi.

(4) Wygodnym i zgodnym ze zwyczajami matematyki jest też sposób wysławiania się, polegający na tem, że:

$(x)\, A(x)$ wypowiadamy w postaci:

$A(x)$ (zachodzi) *dla każdego* x,

$(Ex)\, A(x)$ natomiast jako:

$A(x)$ (zachodzi) *dla pewnych* x.

W tej postaci kwantyfikator jest zaznaczony *po wypowiedzeniu* odnośnego orzeczenia.

§ 2. Zbiory i klasy.

2. **Zbiory.** W praktyce matematycznej *orzeczenia o jednym podmiocie* (jednej zmiennej) prowadzą do utworzenia pojęcia *zbioru*. Jeżeli naprz. A jest tego typu orzeczeniem i chcemy zaznaczyć, że zachodzi ono dla przedmiotu a, to prócz zapisania tego w postaci $A(a)$ praktyka matematyczna pozwala postąpić w sposób następujący:

Tworzymy, na razie czysto nominalnie, zwrot: „ogół x takich, że zachodzi $A(x)$“
— symbolicznie: $(\hat{x})\, A(x)$.

Zaznaczamy fakt zachodzenia $A(a)$ mówiąc, że: „*a należy do* ogółu x, takich, że zachodzi $A(x)$“,
— symbolicznie:

„$a \varepsilon (\hat{x})\, A(x)$“.

„Ogół x takich, że zachodzi $A(x)$“ nazywamy też „*zbiorem x-ów* takich, że zachodzi $A(x)$“.

Wprowadzamy dla poszczególnych zbiorów, drogą każdorazowej umowy, krótkie oznaczenia naprz. α, β, A, (A) i t. p., o ile tego wymaga praktyka. Technika posługiwania się *zbiorami* wytworzyła obszerny zapas pojęć i terminów, którego niezbędne elementy poznamy obecnie.

3. Najważniejsze pojęcia i terminy teorji zbiorów.

α. *Przynależność.* Jak już wiemy, zwrot:

$$a \text{ należy do } \alpha \quad \text{czy} \quad a \,\varepsilon\, \alpha$$

oznacza, że dla a zachodzi orzeczenie A, o ile α oznaczało $(\hat{x})\,A(x)$.

Zaprzeczenie zdania typu $a \,\varepsilon\, \alpha$ zapiszemy symbolicznie w postaci:

$$a \sim \varepsilon\, \alpha$$

[a *nie* należy do α].

β. *Zawieranie się.* Powiemy, że zbiór α zawiera się w zbiorze β, chcąc zaznaczyć, iż:

„dla każdego x, jeżeli x należy do α, to x należy do β".

Posługując się znakiem *wynikania* $\supset$ dla skrócenia: „jeżeli .... to", zapisalibyśmy w symbolach:

$$\alpha \subset \beta \,.\!\overset{\mathrm{df}}{=}\!.\, \alpha \text{ zawiera się w } \beta \,.\!\overset{\mathrm{df}}{=}\!.\, (x)\,\{x \,\varepsilon\, \alpha \supset x \,\varepsilon\, \beta\}$$

[$\overset{\mathrm{df}}{=}$ czyt. „oznacza" lub „równa się z definicji"].

Dzięki umowie poprzedniej możemy zapisać to jeszcze krócej:

$$\alpha \subset \beta \,.\!\overset{\mathrm{df}}{=}\!.\, x \,\varepsilon\, \alpha \supset x \,\varepsilon\, \beta,$$

gdyż opuszczenie kwantyfikatora (x) nie doprowadzi tu do nieporozumień.

γ. *Identyczność.* Powiemy, że zbiór α jest *identyczny* ze zbiorem β, jeżeli:

$$\alpha \subset \beta \text{ i } \beta \subset \alpha.$$

Symbolicznie:

$$\alpha = \beta \,.\overset{\mathrm{df}}{=}.\, \alpha \subset \beta \,.\, \beta \subset \alpha$$

[„." czyt. „*i*" — tak samo „:", „:." i t. d. *między* poszczególnemi zdaniami].

δ. *Suma, iloczyn i różnica zbiorów.*

Jeżeli α i β są zbiorami, to określamy *sumę* $\alpha +_m \beta$, *iloczyn* $\alpha \times_m \beta$, *różnicę* $\alpha -_m \beta$ zbiorów α i β odpowiednio przez:

„ogół x takich, że x należy do α **lub** x należy do β";
„ogół x takich, że x należy do α **i** x należy do β;
„ogół x takich, że x należy do α **i** x **nie** należy do β".

Uwagi. 1. Suma, iloczyn i różnica zbiorów są dalej zbiorami. Dla oznaczenia użyto znaków $+_m$, $\times_m$, $-_m$, gdzie ($_m$) ma przypominać, że mowa tu o zbiorach czyli *mnogościach*. W praktyce ów znaczek ($_m$) opuszczamy, o ile to nie stwarza nieporozumień.

2. Wprowadzając dla „*lub*" symbol $\vee$ — przyczem przez zachodzenie $p \vee q$ rozumiemy zachodzenie *choć jednego ze zdań p czy q*, napiszemy nasze umowy symbolicznie:

$$\alpha +_m \beta \,.\overset{\mathrm{df}}{=}.\, (\hat{x})\{x \,\varepsilon\, \alpha \vee x \,\varepsilon\, \beta\}$$
$$\alpha \times_m \beta \,.\overset{\mathrm{df}}{=}.\, (\hat{x})\{x \,\varepsilon\, \alpha \,.\, x \,\varepsilon\, \beta\}$$
$$\alpha -_m \beta \,.\overset{\mathrm{df}}{=}.\, (\hat{x})\{x \,\varepsilon\, \alpha \,.\, x \sim\varepsilon\, \beta\}$$

Przykład. Nb.:

$\alpha \,.\overset{\mathrm{df}}{=}.\, (\hat{x})\{x$ jest całkowite, podzielne przez 2$\}$,
$\beta \,.\overset{\mathrm{df}}{=}.\, (\hat{x})\{x$ jest całkowite, podzielne przez 3$\}$.

Wtedy:

$\alpha +_m \beta =$ ogół całkowitych podzielnych przez 2 lub 3,
$\alpha \times_m \beta =$ ogół całkowitych podzielnych przez 6,
$\alpha -_m \beta =$ ogół całkowitych parzystych niepodziel-
[nych przez 3.

ε. *Zbiór jednostkowy.* Zbiór, do którego ma należeć dany element a i tylko ten oznaczymy przez

$$\{a\}$$

[czyt.: (za Peano: Formulario di Matematica) „*izos a*" — Peano pisze ιa, Russell $\iota' a$].

Zbiór $\{a\}$ można utworzyć z predykatu: $x = a$, gdzie $=$ oznacza *identyczność*, w ten sposób:

$$\{a\} \overset{\mathrm{df}}{=} (\hat{x})\,(x = a).$$

3. *Zbiór pusty.* Zbiór α nazwalibyśmy *pustym*, gdyby zachodziło ogólnie:

$$(x)\,\{x \sim \varepsilon\, \alpha\},$$

a więc:

„dla każdego x, x nie należy do α",
lub „dla *żadnego* x, x nie należy do α",
czy też: „żadne x nie należy do α".

Uw. Wbrew zwyczajowi logistyków nie wprowadzam *tu* żadnego ogólnego znaku na zbiór pusty, jakoteż nie wypowiadam żadnego twierdzenia na temat identyczności zbiorów pustych między sobą.

4. **Klasy.** Dotychczas mówiliśmy o zbiorach tylko w znaczeniu nominalnem. Zbiór $(\hat{x})\,A(x)$ miał nam zastąpić w pewien sposób posługiwanie się orzeczeniem $A(x)$. Zamiast $A(a)$ mogliśmy napisać $a\,\varepsilon\,(\hat{x})\,A(x)$, zamiast $A(a) \vee B(a)$ zaznaczyć, że $a\,\varepsilon\,(\hat{x})\,A(x) +_m (\hat{x})\,B(x)$ i t. d. Byłaby to tylko zmiana sposobu wysławiania się, podyktowana

względami na tradycję czy korzystność. Czy można jednak *zbiory* pojmować jako przedmioty autonomiczne w tym sensie naprz., aby z nich tworzyć nowe zbiory, wypowiadać o nich orzeczenia, tworzyć teorję działań $+_m$, $\times_m$, $-_m$ czy jeszcze innych? Tak sądził początkowo twórca Teorji Mnogości (czyli Zbiorów) Jerzy Cantor, tak sądzili Peano i Frege. Atoli pojawienie się paradoksów [Burali-Fortiego, Russella, Richarda, Berry'ego], nawiązujących zresztą do prastarych aporyj z epoki sofistów greckich, przekonało matematyków o konieczności przeprowadzenia rewizji tego stanu rzeczy. Powstają wtedy różne teorje „typów logicznych" jak, *uproszczona*[1] (nazwa późniejsza) Russella z *The Principles of Mathematics* (1903), *normalna* Whiteheada i Russella z *Principia Mathematica* (1910, a właściwie już z 1907), *czystych typów* Chwistka (1925), ew. ich odmianki. Wszystkie te teorje wprowadzają duże komplikacje techniczne i przez swe ograniczenia, zabezpieczające teorję przed paradoksami, krępują w dużej mierze swobodę matematyka, odchylając się przytem znacznie od tradycji wiekowej tej nauki. Proponuję już od niejakiego czasu pewien sposób usunięcia tych trudności, którego zasady postaram się, w głównych jedynie linjach, przedstawić obecnie. Teorja, którą proponuję zastąpić różne teorje typów logicznych oparta jest o zasady *względ-*

---

[1] Wykład teorji mnogości oparty o rozbudowaną przezemnie uproszczoną teorję typów znajdzie czytelnik w mych Podstawach Ogólnej Teorji Mnogości (1925) [wyd. właściwie w 1924]. Russell podał szkic teorji w Appendix B. dzieła The Principles of Mathematics, str. 526 i nast.

ności i jednorodności logicznej. Śledząc uważnie strukturę paradoksów teorji mnogości (zbiorów) niemożemy się oprzeć poczuciu, że teorja zbiorów, niczem nie krępowana, pozwala tworzyć zbiory zbudowane z elementów bardzo niejednokrotnie różnorodnych i że należy od przedmiotów wymagać pewnej jednorodności, aby zrzeszać się one mogły w zbiory, które poddawać mamy później operacjom i konstrukcjom teorji. Atoli pojęcie *jednorodności* jest bardzo względne i bardzo nieostre. Aby ująć rzecz całą ze stanowiska formalnego, proponuję następujący tok postępowania i zasady wytyczne:

(1) Spośród wszystkich zbiorów wydzielimy pewne, które w odróżnieniu od zbiorów wogóle nazywać będziemy **klasami**.

(2) W pierwszym rzędzie, każda nauka dedukcyjna, zbudowana aksjomatycznie przy pomocy układu pojęć pierwotnych i postulatów, winna zadecydować w obrębie tychże postulatów, które ze zbiorów figurujących wśród jej pojęć pierwotnych (lub wtórnych) zechce uważać za *klasy*.

Tak naprz. w aksjomatycznym systemie arytmetyki liczb całkowitych układu Peany[1], gdzie pojęciami pierwotnemi są O, N_0, *seq*, mógłby figurować postulat dodatkowy: N_0 *jest klasą*. [Nie jest to oczywiście konieczne, być może, że nie zechcemy uważać całego N_0 za klasę].

Pierwsza decyzja zatem co do charakteru klasowego pewnych zbiorów nie pochodzi od logiki, lecz od poszczególnych teoryj dedukcyjnych, które

[1] p. moja Arytmetyka Liczb Całkowitych, Kraków 1932 Bibl. Kółka Mat. Fiz. U. U. J. Nr. 1.

też za swą decyzję przyjmują pełną odpowiedzialność. Jest to wyraz zasady *względności* pojęcia klasy.

Przyjmując pewien *zbiór* za *klasę*, stwierdza dana teorja, że uważa elementy tego zbioru za dostatecznie jednorodne, by zrzeszyć się mogły one w klasę.

(3) Teorja klas przyjmie pod nazwą *wtórnych zasad jednorodności* pewne reguły konstrukcyjne, które wychodząc z *klas* (ew. z *relacyj*, o których będzie mowa niżej) pozwolą nam otrzymywać nowe *klasy* i w ten sposób pierwotny zapas tychże, w danej teorji rozszerzać.

Reguły te będą wyrazem dążenia do zachowania dostatecznej jednorodności wśród elementów nowo utworzonych klas w stosunku do jednorodności elementów klas pierwotnie nam danych.

Poznamy za chwilę pewną ilość tych reguł, wystarczającą w praktyce. Zaznaczam jednak, że nie zamierzam tu budować teorji klas wedle nowych zasad, lecz jedynie zorjentować czytelnika w tem, o czem tu mowa.

(4) Teorja dedukcyjna, rozstrzygając w swych postulatach o charakterze klasowym pewnych zbiorów i dołączając reguły dozwolonych konstrukcyj klas dalszych, bierze na siebie obowiązek wykazania, iż czyniąc to, nie popadnie w sprzeczność i paradoks.

(5) Logika formalna niedopuszcza do rozważania orzeczeń o *zbiorach*, chyba, że zbiory te są *klasami* [i analogicznie w stosunku do *relacyj*, o czem później]. Zwroty takie, jak naprz.:

$$a \text{ należy do } (\hat{x})\, A(x)$$

nie są orzeczeniem o zbiorze $(\hat{x})A(x)$ {i przedmiocie a} kształtu:

$$B(u, v),$$

gdzie za u wstawiono a i za v wstawiono $(\hat{x})A(x)$, *chyba, że* $(\hat{x})A(x)$ jest *klasą*. Podobnie zwrot:

$$A \subset B,$$

gdzie $A \overset{\mathrm{df}}{=} (\hat{x})M(x)$, $B \overset{\mathrm{df}}{=} (\hat{x})N(x)$ nie jest orzeczeniem o A i B, jakiemś

$$\Phi(A, B),$$

lecz tylko skrótem orzeczenia:

$$(x)\{M(x) \supset N(x)\}$$

typu $(x)\varphi(x)$ — chyba, że A i B są klasami.

5. Najważniejsze wtórne zasady jednorodności.

Podamy kilka zaledwie zasad tego rodzaju, potrzebnych nam w dalszym ciągu. Nie wystarczą one, aby zbudować pełną teorję klas, to jednak nie leży w naszych zamiarach.

Def. *Klasy* A i B nazwiemy *jednorodnemi*, gdy *istnieje klasa* C, taka, że:

$$A \subset C \text{ i } B \subset C.$$

Uw. A i B mają być *klasami*, C również!

Reguła. Jeżeli A i B są *klasami jednorodnemi*, to $A +_{m} B$, $A \times_{m} B$, $A -_{m} B$ są też *klasami i to jednorodnemi* z A i B.

Reguła. Jeżeli a jest dowolnym elementem, to $\{a\}$ jest *klasą*.

Zasady. Jeżeli A jest *klasą*, to istnieje *klasa pusta* M zawarta w A.

Jeżeli M jest klasą pustą zawartą w A i B jest klasą zawartą w A, to $M \subset B$.

Tw. Jeżeli M i N są klasami pustemi, zawartemi w klasie A, to $M = N$.

Dem. Wtedy: $M \subset A$, $N \subset A$, więc $M \subset N$, $N \subset M$, stąd $M = N$.

Tw. A więc, gdy A jest klasą, to istnieje *jedyna* klasa pusta, zawarta w A.

Oznaczymy ją przez $O_m^{(A)}$.

Uw. Znaczek $^{(A)}$, względnie nawet $_{(m)}$, będziemy opuszczali w praktyce.

Tw. Gdy A i B są klasami i $A \subset B$, to $O_m^{(A)} = O_m^{(B)}$.

Dem.

$O_m^{(A)} \subset A \subset B$, więc $O_m^{(A)} \subset B$, zatem $O_m^{(B)} \subset O_m^{(A)}$.

$A \subset B$, więc $O_m^{(B)} \subset A$, zatem też $O_m^{(A)} \subset O_m^{(B)}$.

Ostatecznie $O_m^{(A)} = O_m^{(B)}$.

Uw. Dzięki założeniom A i B są jednorodne.

Tw. Gdy A i B są klasami *jednorodnemi*, to

$$O_m^{(A)} = O_m^{(B)}.$$

Dem.

Wtedy istnieje klasa C taka, że $A \subset C$ i $B \subset C$. Stąd: $O_m^{(A)} = O_m^{(C)}$ i $O_m^{(B)} = O_m^{(C)}$, więc $O_m^{(A)} = O_m^{(B)}$.

Reguła. Jeżeli A i B są *klasami* i istnieje taki element a, że $a \varepsilon A$ i $a \varepsilon B$, to $A +_m B$ jest *klasą* i temsamem A i B jednorodne, gdyż $A \subset A +_m B$ i $B \subset A +_m B$.

Def. *Rodziną klas* nazwiemy *klasę*, której *elementami* są *klasy*. Rodzina klas jest *jednorodna*, gdy istnieje *klasa*, w której *zawarte* są *wszystkie* elementy (klasy) tej rodziny.

Def. *Sumą* $\Sigma_m \mathfrak{A}$ rodziny klas $\mathfrak{A}$ nazwiemy: „ogół x takich, że x należy do jednej z klas A rodziny $\mathfrak{A}$“.

Iloczynem $\Pi_m \mathfrak{A}$ nazwiemy:

„ogół x takich, że x należy do każdej klasy A rodziny $\mathfrak{A}$".

Reguła. *Suma* rodziny *jednorodnej klas* jest *klasą*, jednorodną z klasami tej rodziny.

Iloczyn niepustej rodziny klas jednorodnych jest *klasą*, jednorodną z klasami tej rodziny[1].

Uw. Należy zwrócić uwagę, że mowa tu o *niepustej* rodzinie klas.

Rachunek klas stanowić będzie teorja działań $+_m$, $\times_m$, $-_m$, Σ_m, Π_m, w odniesieniu do *klas*. Zasady tego rachunku, zgodne z naszemi ideami nie będą tu rozważane w szczegółach. Historyczne przedstawienie dawniejszych faz tego rachunku znajdzie czytelnik w książce *J. Śleszyńskiego:* „Teorja Dowodu" (1926—29) Kraków. Nakładem Kółka Mat. Fiz. U. U. J.

§ 3. Stosunki i relacje.

6. **Stosunki.** Teorja orzeczeń o *jednym* podmiocie prowadzi do tworzenia *zbiorów* i *klas*; analogicznie teorja orzeczeń o *dwóch* podmiotach pozwoli nam tworzyć i rozważać *stosunki* i *relacje.*

Niechaj $A(x, y)$ będzie orzeczeniem o dwu podmiotach (zmiennych) x i y. Tworzymy zwrot, narazie nominalny jedynie:

„stosunek między x a y taki, że zachodzi $A(x, y)$".

---

[1] Czytelnik zechce porównać mój fascykuł XLV z Mémorial des Sciences Mathém. Paris 1931 oraz mą T e o r j ę M n o g o ś c i P u n k t o w y c h I., Kraków 1933.

Oznaczmy ten zwrot naprz. przez R. Otóż umówimy się, że ilekroć zechcemy zaznaczyć, iż zachodzi $A(a, b)$, będziemy to mogli napisać w postaci:

$$a R b$$

i czytać: „a znajduje się w stosunku R do b“.

Zwrot „stosunek między x a y taki (lub: mówiący), że zachodzi $A(x, y)$“ oznacza Russell symbolem:

$$(\widehat{xy})\, A(x, y),$$

przeważnie jednak wprowadzamy odrazu oznaczenia szczególne, jak naprz. R, S, T lub znak odrębny nieliterowy, jak naprz. $\perp$, $\|$, $=$, $<$ i t. p. *Stosunki* stanowią część składową większości zdań matematycznych, atoli spotykamy je również i na każdym kroku w języku życia codziennego: [naprz.: x zna y, x jest ojcem y i t. p.].

Teorja stosunków stanowi najmłodszą gałąź logiki formalnej. Zapoczątkowana przez E. Schrödera [Algebra der Logik, t. III] została rozwinięta przez Russella i Whiteheada w *Principia Mathematica.*

7. Z teorji stosunków.

Podamy kilka najważniejszych dla nas pojęć i określeń.

1. *Zawieranie się.* Stosunek R *zawiera* się w stosunku S, gdy:

$$x R y \text{ pociąga } x S y \text{ dla każdego } x \text{ i } y.$$

Przykład: $<$ i $\leq$ wśród liczb.

2. *Identyczność.* R jest *identyczne* z S, gdy R *zawiera się* w S i *odwrotnie.*

3. *Odwrotność. Odwrotnym* do stosunku R {piszemy $\breve{R}$ lub R^{-1}} jest:

„stosunek między x a y taki, że zachodzi $y R x$".

Przykład: $<$ i $>$ wśród liczb.

Uw. $a R b$ i $b R^{-1} a$ są równoważne, o ile są zdaniami.

4. *Dziedzina stosunku.* Dziedziną $D'R$ stosunku R jest zbiór:

„ogół x takich, że zachodzi $x R y$ dla jakiegoś y".

Przykład: dla stosunku R, zrodzonego z orzeczenia $x = E(y)$ (entier), dziedziną jest ogół liczb całkowitych.

5. *Przeciwdziedzina stosunku.* Przeciwdziedziną stosunku R jest *dziedzina* R^{-1}. Russell oznacza ją przez $\mathit{Cl}'R$.

6. *Obraz zbioru* α *poprzez stosunek* R. Jest to zbiór określony w sposób następujący:

„ogół z takich, że zachodzi $u R z$ dla *jakiegoś* u należącego do α".

Oznaczamy ów zbiór przez $R''\alpha$.

Przeciwobrazem zbioru α *poprzez* R będzie:

$$R^{-1}{}''\alpha.$$

7. *Suma, iloczyn, różnica, kompozycja stosunków.*

Sumą, iloczynem, różnicą, kompozycją stosunków R i S nazwiemy kolejno:

$$R +_s S \overset{\mathrm{df}}{=} (\hat{x}\hat{y}) \{x R y \ \textbf{lub} \ x S y\}$$
$$R \times_s S \overset{\mathrm{df}}{=} (\hat{x}\hat{y}) \{x R y \ \textbf{i} \ x S y\}$$
$$R \dot{-}_s S \overset{\mathrm{df}}{=} (\hat{x}\hat{y}) \{x R y \ \textbf{i nie} \ x S y\}$$
$$R | S \overset{\mathrm{df}}{=} (\hat{x}\hat{y}) \{\textbf{Istnieje } z \textbf{ takie, że } x R z \ \textbf{i} \ z S y\}.$$

Suma, iloczyn, różnica, kompozycja (złożenie) stosunków są dalej stosunkami. Spotykamy się z niemi bardzo często w matematyce, a także i w języku faktów konkretnych.

8. **Kilka ważnych typów stosunków.**

1. Stosunek R jest *samozwrotny* (refleksyjny), jeżeli:

zachodzi xRx dla każdego x należącego do dziedziny lub przeciwdziedziny R.

Przykład: przystawanie czy podobieństwo w geometrji, równość, podzielność i t. p.

2. Stosunek R jest *odwracalny* (symetryczny), jeżeli:

$$xRy \text{ pociąga stale } yRx.$$

Przykład: $=$, $\|$, $\perp$, „jest pierwsze względem“, „przystaje“ i t. p.

3. Stosunek R jest *przechodni* (tranzytywny), jeżeli:

$$xRy \text{ i } yRz \text{ pociągają stale } xRz.$$

Przykład: $<$, „przystaje do“, $=$, „dzieli“, — „równoległość“ tylko w sensie uogólnionym przez geometrję analityczną.

Def. Stosunki będące jednocześnie (1) *samozwrotnemi,* (2) *odwracalnemi* i (3) *przechodniemi* zwiemy *równoważnościami.*

Zobaczymy, jak wielką rolę grają równoważności w budowie matematyki.

4. Stosunek R jest *asymetryczny,* gdy xRy *wyklucza* zawsze yRx.

Przykład: $<$, $>$, stosunek dany przez $x=y+2$ i t. p.

9. **Relacje.** Podobnie jak w wypadku zbiorów, wydzielamy z ogółu stosunków pewne, które

dla odróżnienia nazywać będziemy *relacjami*. Czynimy to w myśl tych samych intencyj i najzupełniej analogicznemi sposobami. A więc:

(1) Dana teorja dedukcyjna postuluje, że pewne *stosunki* są *relacjami*. Przyjmuje tem samem odpowiedzialność za niepopadnięcie w sprzeczność i paradoks, gdy zechce owe relacje rozbudowywać i przekształcać wedle ogólnych, dozwolonych zasad wtórnych.

(2) Ogólna teorja stosunków podaje *wtórne zasady jednorodności*.

10. **Wtórne zasady jednorodności.** Cytuję pewną ich ilość, nie siląc się na zredukowanie ich do niezbędnego minimum, ani też nie przesądzając, czy one w pełnej teorji wystarczą.

Def. *Relacje* R i S nazwiemy *jednorodnemi*, gdy istnieje *relacja* T taka, że R i S są *zawarte* w T.

Reguła. Stosunki *identyczne* są jednocześnie *relacjami* lub nie.

Reguła. Stosunki R i R^{-1} są jednocześnie *relacjami* lub *nie*.

Reguła. Jeżeli R jest *relacją* to $D'R$ (dziedzina R) i $Ɑ'R$ (przeciwdziedzina R) są *klasami*.

Reguła. Jeżeli R i S są *relacjami jednorodnemi*, to suma $R +_s S$, iloczyn $R \times_s S$ i różnica $R -_s S$ są *relacjami* jednorodnemi z R i S.

Reguła. Jeżeli R i S są *relacjami*, $Ɑ'R$ i $D'S$ są *klasami jednorodnemi*, to kompozycja $R|S$ jest *relacją*.

Reguła. Gdy α i β są *klasami*, to stosunek określony przez:

$$(\hat{x}\hat{y})\,(x \,\varepsilon\, \alpha \,.\, y \,\varepsilon\, \beta)$$

jest *relacją*.

Reguła. Gdy α jest *klasą*, to stosunek dany przez:

$$(\hat{x}\hat{y})\,(x\,\varepsilon\,\alpha\,.\,x = y)$$

jest *relacją*.

Tw. Gdy R jest *relacją*, α *klasą jednorodną* z $D'R$, to obraz $R''\alpha$ *klasy* α poprzez *relację* R jest *klasą*.

Dem. Stosunek: $S \overset{\mathrm{df}}{=} (\hat{x}\hat{y})\,(x\,\varepsilon\,\alpha\,.\,y\,\varepsilon\,G'R)$ jest *relacją*, gdyż α i $G'R$ są *klasami*. Relacje R i S są jednorodne, gdyż obie zawierają się w relacji danej przez:

$$T = (\hat{x}\hat{y})\,\{x\,\varepsilon\,\alpha +_m D'R\,.\,y\,\varepsilon\,G'R\},$$

gdzie $\alpha + D'R$ jest klasą, bo α i $D'R$ były jednorodne.

Łatwo teraz stwierdzić, że

$$R''\alpha = G'(R \times_s S),$$

a więc $R''\alpha$ jest klasą, gdyż $R \times_s S$ jako iloczyn relacyj jednorodnych jest relacją.

Istnieje, rozwinięty przez Whiteheada i Russella w *Principia Mathematica* [I tom, 1 wyd. 1910, 2 wyd. 1925], *rachunek relacyj*, analogiczny do rachunku klas.

§ 4. Opis jednostkowy.

11. Pojęcie opisu jednostkowego.

Bardzo często podajemy określenie jakiegoś elementu, mówiąc, że jest to:

„jedyny przedmiot spełniający pewien warunek“ czy też:

„ów jedyny przedmiot x, który spełnia dany warunek $A(x)$“.

Na niezmierną ważność tego zwrotu, rozważanego już przez P e a n ę i F r e g e g o, zwrócił uwagę dopiero R u s s e l l. Nazywa on zwrot powyższy *opisem jednostkowym* lub *deskryptem* (jednostkowym) i oznacza symbolem:

$$(\iota x)\, A(x)$$

czytając, krótko:

„jedyne x takie, że $A(x)$".

Znaczenie filozoficzne opisu jednostkowego jest bardzo doniosłe. Warto przeczytać, co pisze o tem Russell w rozdz. V. swej znakomitej książeczki „The Problems of Philosophy" (1911, Londyn)[1].

Ostatnio H i l b e r t i B e r n a y s w swej książce: *Grundlagen der Mathematik* I. (Berlin 1934) poświęcają obszerny rozdział badaniu tego ważnego pojęcia, przyczem posługują się symbolami:

$$\iota_x A(x)\,,\ \iota_y B(y) \quad \text{i t. d.}$$

i zwroty takie nazywają „ι—Terme" („ι—człony"). Podajemy tu najważniejsze fakty z odnośnej teorji, zwłaszcza, że dawna matematyka grzeszyła brakiem subtelności w odniesieniu do tej sprawy.

12. **Z teorji opisu jednostkowego.**

Określenie typu „jedyne x takie, że zachodzi $A(x)$" będzie nam tylko wtedy przydatne, gdy:

(1) *Istnieją* wogóle jakieś przedmioty, czyniące zadość warunkowi A; [„przesłanka istnienia"].

(2) „*Różne* między sobą przedmioty nie mogą spełniać warunku A" [„przesłanka jednotliwości"].

---

[1] Istnieje (niestety skrócone) tłumaczenie polskie p. t. „Zagadnienia filozofji" — Bibl. Wendego.

Dopiero, gdy obie powyższe przesłanki są spełnione, mówimy, że „opis dany ma sens" lub, że „opisany przedmiot jest *istotnie wyznaczony* przez warunek A".

Czy można o opisie wypowiadać jakieś orzeczenia? Russell stworzył taką teorję, w której, bez względu na *sens* opisu, orzeczenie o nim stwierdza okolnie pewien stan rzeczy. My przyjmiemy atoli zasadę [1], którą odnalazłem też w powyżej cytowanem dziele Hilberta i Bernaysa mówiącą, że:

Jeżeli opis $\iota_x A(x)$ *niema sensu,* czyto z powodu *„nieistnienia"*, czyteż *„braku jednotliwości"*, to żadne orzeczenie o tym opisie nie ma mieć dla nas znaczenia (nie jest poprostu zdaniem). Przeciwnie, gdy opis *ma sens,* posługujemy się nim tak, jak każdym innym, danym nam wprost elementem.

Przykłady opisów:

1. Jeżeli a i b są liczbami, to:
$a - b$ jest to „jedyne takie x, że $b + x = a$".

2. analogicznie: a/b jest to „jedyne takie x, że $b \, . \, x = a$".

Gdy $a \neq 0$ i $b = 0$, to opis a/b *niema sensu* z powodu *„nieistnienia"*, gdy $a = 0$ i $b = 0$, to brak sensu powoduje *niejednotliwość.*

3. Środek odcinka $\overline{AB} \overset{\mathrm{df}}{=}$ „jedyny taki punkt M, że M leży na prostej przechodzącej przez A i B i $\overline{AM} = \overline{MB}$".

Zauważmy teraz rzecz bardzo istotną:

Dla danego orzeczenia $A(x)$ utwórzmy pojęcia:

---

[1] Zasadą powyższą posługuję się w wykładach już od szeregu lat.

(1) „ogół x takich, że $A(x)$", czyli $(\hat{x})A(x)$
(2) „jedyne x takie, że $A(x)$", czyli $\iota_x A(x)$.

Załóżmy, że *opis ma sens* i że przedmiotem czyniącym zadość orzeczeniu $A(x)$ jest element a. Wtedy:

$$(\hat{x})A(x) = \{a\}$$
$$\iota_x A(x) = a.$$

Otóż, od czasów Peany i Fregego uważamy przynajmniej za bardzo niewygodne, jeśli nie niemożliwe *identyfikowanie* terminów $\{a\}$ i a. Burzyłoby to prostotę praw formalnych logiki i matematyki w bardzo znacznym stopniu.

Zanotujmy jeszcze bardzo ważne prawidła formalne teorji opisu jednostkowego. Są to *trzy* następujące:

I. Jeżeli opis $\iota_x A(x)$ *ma sens* [spełnione są obie przesłanki: „istnienia" i „jednotliwości"], to mamy prawo stwierdzić, że:

$$A\{\iota_x A(x)\}$$

czyli, że wtedy: *opis* $\iota_x A(x)$ *spełnia warunek* $A(x)$, *który go zrodził.*

II. Orzeczenie:

$$\iota_x A(x) = a$$

ma oznaczać, że:

(1) *opis* $\iota_x A(x)$ *ma sens*,
(2) $A(a)$ *zachodzi.*

Uw. Russell pisze $E!\,(\iota x)(A(x))$ dla zaznaczenia, że opis $(\iota x)A(x)$ *ma sens.*

III. *Jeżeli twierdzimy czy zakładamy, że opis* $\iota_x A(x)$ *spełnia jakiś warunek* B, *a więc, że zachodzi*

$$B\{\iota_x A(x)\},$$

to mamy prawo twierdzić, że opis $\iota_x A(x)$ *ma sens.*

Różnica między *opisem jednostkowym* elementu, a *zbiorem* odpowiada mniejwięcej różnicy między „imieniem własnem“ (nomen proprium), a „imieniem zbiorowem“ (nomen collectivum). Tak zwane „imiona pospolite“ (nomina appellativa czy generalia) stanowią jeszcze inną kategorję, której tu nie rozważamy.

Język potoczny wprowadza, tak jak i matematyka, skróty imienne dla rozważanych przez się opisów, daje im poprostu „imiona własne“. Zaciera się tu często różnica między tworami, na któreśmy już uprzednio zwrócili uwagę, a mianowicie:

$$(\hat{x})\, A(x) \text{ i } \iota_x\, A(x).$$

Języki posiadające rodzajnik oznaczony radzą sobie tu najlepiej, stawiając poprostu tenże przed opisem lub jego imieniem własnem. W określeniach matematycznych należy też zwracać baczną uwagę na to, czy chcemy określić *zbiór, choćby jednostkowy*, czy dać *opis jednostkowy*, którym posługiwanie się wymaga stwierdzenia (uprzedniego) sensu. Taka wątpliwość mogłaby naprz. zachodzić przy określeniu środka krzywej 2go rzędu. Podobnie spotykamy w języku potocznym, a tak samo w języku tradycyjnym matematyki, różne sposoby zaznaczania, że opis jednostkowy *ma sens.* Rozpoznanie takiego stwierdzenia może czasem sprawiać pewne trudności.

13. **Uwagi o typach definicyj matematycznych.**

Spotkaliśmy się zasadniczo z czterema typami definicyj nominalnych (t. zn. definicyj typu: $M \overset{\mathrm{df}}{=} \ldots$].

(1) Określenia znaczenia *zdań:*
naprz. $A \subset B \overset{\mathrm{df}}{=}$ „każde x należące do A, należy też do B“.

(2) Określenia *zbiorów:*
naprz. $A +_{m} B \overset{\mathrm{df}}{=}$ „ogół x takich, że zachodzi: $x \varepsilon A$ lub $x \varepsilon B$“.

(3) Określenia *stosunków:*
naprz. $R^{-1} \overset{\mathrm{df}}{=}$ „stosunek między x a y taki, że zachodzi $y R x$“.

(4) *Opisy jednostkowe:*
naprz. $\sqrt{a} \overset{\mathrm{df}}{=}$ „jedyne x nieujemne takie, że $x^2 = a$“.

§ 5. Funkcje.

14. **Pojęcie funkcji.** Niechaj R będzie stosunkiem, a danym elementem.

Przy pomocy opisu jednostkowego określimy:

Def.[1] *R-obrazem elementu a* nazwiemy:

„jedyne z takie, że zachodzi $a R z$“.

Oznaczymy R-obraz elementu a przez:

$R'a$, $R(a)$ lub Ra,

zależnie od wypadku.

Tw. Aby $R(a)$ miało sens, potrzeba (lecz *nie* wystarcza), by a należało do dziedziny $D'R$ stosunku R.

Dem. Jeżeli ma sens $R(a)$, to przedewszystkiem: *istnieje takie z, że $a R z$*, temsamem jednak a należy do $D'R$.

---

[1] Nieco odmiennie niż w mej Arytm. L. Całk.

Uw. Zamiast „ma sens $R(a)$“ powiemy: „element a *posiada* swój R-obraz“.

Def. Stosunek R jest *funkcją* lub *operatorem,* gdy:

(1) R jest relacją;

(2) każdy element a jego *dziedziny* $D'R$ *posiada* swój R-obraz.

Uw. W matematyce klasycznej „literami funkcyjnemi“ są tradycyjnie f, g, h, φ, ψ ... ew. posługujemy się szczególnemi nazwami, jak sin, E, *sh*, tang. W nowoczesnej teorji operatorów używa się często małych liter greckiego alfabetu.

Def. Gdy tak R jak i R^{-1} są *funkcjami* (operatorami), relacja R zwie się *odpowiedniością doskonałą* („jedno-jednoznaczną“) między elementami *(klas!)* $D'R$ i $G'R$.

Umowa. W teorji funkcyj nazywamy zwykle *dziedzinę* funkcji R *polem,* przeciwdziedzinę *zapasem.*

Uw. W Arytm. L. Całk. posługuję się znakami $P(R)$ i $Z(R)$ dla oznaczenia pola i zapasu funkcji R. Nie należy mieszać pola funkcji $R\ (= D'R)$ z polem relacji jednorodnej $C'R\ (= D'R + G'R)$.

Tw. Warunkiem koniecznym i dostatecznym *identyczności* funkcyj R i S jest:

(1) $D'R = D'S\ [P(R) = P(S)]$

[identyczność pól]

i (2) $R(x) = S(x)$ dla każdego x należącego do $P(R)$

[zgodność obrazów].

Dem. Dostateczność widoczna; dowodzimy tylko konieczności:

$x R y$ pociąga $x S y$ i odwrotnie, więc:
$x \varepsilon D'R$ pociąga $x \varepsilon D'S$ i odwrotnie,
stąd: $D'R \subset D'S$ i $D'S \subset D'R$, czyli $D'R = D'S$.

Gdy $a \varepsilon D'R$, to $R(a)$ ma sens, zatem spełnia swój warunek rodzący (reguła I opisu), stąd:

$a . R . R(a)$, zatem: $a . S . R(a)$;
lecz $S(a)$ ma sens, więc $S(a) = R(a)$,

gdyż $R(a)$ spełnia warunek rodzący $S(a)$ [reguła II opisu].

15. **Ciągi.**

Def. Nazwiemy *ciągiem* (nieskończonym) *funkcję*, której polem jest ogół liczb całkowitych bezwzględnych N_0.

Uw. Ciąg jest funkcją, więc relacją, zatem pole i zapas jego są *klasami*. Definicja nasza posiada jedynie wtedy wartość, gdy uznamy N_0 za klasę. Ważną jest uwaga, że *zapas* (wartości) ciągu jest *klasą*.

Def. *Ciągiem skończonym* jest *funkcja*, której *polem* jest ogół liczb całkowitych k, spełniających warunek:

$$n \leqq k \leqq m,$$

gdzie n i m są danemi całkowitemi i gdzie $n \leqq m$.

Uw. Tradycja każe nam używać pewnego szczególnego sposobu notowania ciągów. Polega on na tem, że:

(1) literami funkcyjnemi ciągów są zwykle

$$a, b, u, v, w, \ldots .;$$

(2) zmienny element pola (l. całk.) oznaczamy przez n, m, k, p . . . ;

(3) zamiast np. $a(n)$ piszemy a_n (znakowanie indeksowe);

(4) Ciąg nieskończony symbolizuje nam często (niedokładne) znakowanie typu:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots\ldots;$$

skończony zaś, typu:

$$a_n,\ a_{n+1},\ \ldots\ldots\ a_m.$$

§ 6. Pary, układy i systemy elementów.

16. **Pary elementów.**

Def. Elementy a i b nazwiemy jednorodnemi, jeżeli znajdzie się (w danej teorji) *klasa* α taka, że

$$a \varepsilon \alpha \text{ i } b \varepsilon \alpha.$$

Def. *Parą* elementów *jednorodnych* a i b, oznaczaną przez (a, b), nazwiemy *ciąg* o *dwóch* członach, którego pole stanowią liczby 1 i 2, *pierwszym* elementem jest a, *drugim* zaś b.

Okazuje się wygodnem w praktyce wprowadzić pewne znakowania:

Umowa: *Pierwszy* człon pary α [a więc α_1] czyli *początek* pary oznaczymy przez $p'\alpha$ lub $p(\alpha)$ czy $p\alpha$;

drugi człon pary α lub *koniec* pary α [a więc α_2] oznaczymy przez $k'\alpha$, $k(\alpha)$ czy $k\alpha$.

Tw. Gdy α jest parą, to $p'\alpha$ i $k'\alpha$ mają sens oraz:

$$\alpha = (p'\alpha, k'\alpha).$$

Gdy a i b *jednorodne*, to

$$p(a, b) = a,\ k(a, b) = b.$$

Dem. Z definicji pary jako ciągu.

Tw. Pary α i β są wtedy i tylko wtedy identyczne, gdy:

$$p'\alpha = p'\beta \text{ i } k'\alpha = k'\beta.$$

Dem. Dostateczność widoczna. Celem dowodu konieczności zauważmy, że:

$$P(\alpha) = \{1\} + \{2\} = P(\beta) \quad \text{[identyczność pól]}$$

zatem jeszcze musi być:

$$\alpha_1 = p'\alpha = \beta_1 = p'\beta \text{ i } \alpha_2 = k'\alpha = \beta_2 = k'\beta.$$

[zgodność obrazów].

Uw. Stąd widać, że gdy a i b są jednorodne, lecz *różne,* to $(a, b) \neq (b, a)$.

17. **Układy elementów jednorodnych.**

Bezpośredniem uogólnieniem pojęcia pary elementów jednorodnych są *układy* n-członowe [n liczba naturalna $\geqq 2$]. Oto ich definicja:

Def. *Układem* n-członowym [n naturalne $\geqq 2$] nazwiemy *ciąg* skończony, którego polem jest klasa liczb naturalnych k spełniających warunek:

$$1 \leqq k \leqq n.$$

Układ: $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ jest więc poprostu ciągiem skończonym:

$$a_1, a_2, \ldots a_n.$$

Uw. Definicja powyższa tworzy nam jedynie układy elementów *jednorodnych*, gdyż układ jest *ciągiem*, a więc *relacją*, zapas jego jest *klasą*, a do zapasu należą jego człony.

Poszczególne człony układu nazywamy 1-szym, 2-gim . . . n-tym *członem* lub *składową* układu.

Czytelnik udowodni z łatwością, przy pomocy zasady indukcji matematycznej, twierdzenie:

Tw. Warunkiem *koniecznym* i *dostatecznym*, by układy: $(a_1, \ldots a_n)$ i $(b_1, \ldots b_m)$ były *identyczne* jest:

$$(1) \quad n = m, \quad (2) \quad a_s = b_s \text{ dla } s = 1, 2 \ldots n.$$

18. **Systemy elementów dowolnych.**

Obecnie mamy zamiar utworzyć pojęcie analogiczne do pojęcia pary, względnie układu elementów jednorodnych, atoli obejmujące i ten wypadek, gdy o jednorodności elementów nic nam nie wiadomo, lub gdy nawet dana teorja wprost tej jednorodności przeczy.

Rozpoczynamy od definicji pojęcia, które w teorji stosunków gra analogiczną rolę do pojęcia zbioru jednostkowego typu $\{a\}$.

Def. *Systemem* (dwuczłonowym) $(a;b)$ elementów *dowolnych* a i b nazwiemy:

„stosunek między x a y, taki że $x=a$ i $y=b$"

symbolicznie: $(a;b) \overset{\text{df}}{=} (\widehat{xy})(x=a\,.\,y=b)$.

Tw. *Dziedziną* stosunku $(a;b)$ jest *klasa* $\{a\}$, *przeciwdziedziną* zaś $\{b\}$.

Dem. Z definicji: $x(a;b)\,y$ pociąga $x=a\,,y=b$, więc $x \varepsilon \{a\}$, $y \varepsilon \{b\}$ i również $a(a;b)\,b$.

Tw. Dla dowolnych elementów a i b system $(a;b)$ jest relacją.

Dem. Gdyż $(a;b)$ można też określić jako:

$$(\widehat{xy})\,(x \varepsilon \{a\}\,.\,y \varepsilon \{b\}),\ \text{gdzie}\ \{a\}\ \text{i}\ \{b\}$$

są klasami.

Przyjmiemy dla dalszych celów regułę:

Reguła. Gdy R jest *relacją*, to „ogół systemów $(a;b)$ takich, że zachodzi $a\,R\,b$" jest *klasą*.

Def. *Pierwszym* lub *początkowym* elementem systemu $(a;b)$ czyli $p(a;b)$ nazwiemy element a, a więc:

$$p(a;b) \overset{\text{df}}{=} \iota_x\,\{x \varepsilon D'(a;b)\}.$$

Analogicznie: *drugi* lub końcowy określimy przez związek:

$$k(a\,;b) \overset{\text{df}}{=} \iota\,\{x \,\varepsilon\, C\!\!\!\!\!\;\;I'(a\,;b)\}.$$

Będzie to element b.

Z definicyj powyższych wynika:

Tw. Każdy system (dwuczłonowy) α posiada określony element początkowy $p'\alpha$ i końcowy $k'\alpha$, przyczem

$$\alpha = (p'\alpha\,;k'\alpha).$$

Mamy dalej twierdzenie:

Tw. Systemy dwuczłonowe α i β są wtedy i tylko wtedy identyczne, gdy:

$$p'\alpha = p'\beta,\ k'\alpha = k'\beta.$$

Dem. Systemy α i β są relacjami; identyczność ich pociąga, że $D'\alpha = D'\beta$, $C\!\!\!\!\!\;\;I'\alpha = C\!\!\!\!\!\;\;I'\beta$, stąd:

$$\{p'\alpha\} = \{p'\beta\} \text{ i } \{k'\alpha\} = \{k'\beta\}, \text{ zatem:}$$
$$p'\alpha = p'\beta \text{ i } k'\alpha = k'\beta.$$

Stąd konieczność warunków. Dostateczność jest widoczna.

Określimy teraz systemy 3-członowe, 4-członowe i t. d.

Def. $(a\,;b\,;c) \overset{\text{df}}{=} ((a\,;b)\,;c)$,

$(a\,;b\,;c\,;d) \overset{\text{df}}{=} ((a\,;b\,;c)\,;d)$.

Ogólnie określimy kolejno coraz-to-więcej-członowe systemy przy pomocy definicji *zwrotnej* (rekurencyjnej).

I. $(a_1\,;a_2) \overset{\text{df}}{=} (\widehat{xy})\,(x = a_1\,.\,y = a_2)$,

II. $(a_1\,;a_2;\ldots;\,a_{n+1}) \overset{\text{df}}{=} ((a_1;\ldots a_n);\,a_{n+1})$.

Uwaga. Nowsi badacze podstaw matematyki przyszli do przekonania, że definicja *zwrotna* posiada dla nas jedynie wtedy pełne znaczenie, gdy potrafimy ją zamienić na *nominalną* typu:

$$M \overset{\mathrm{df}}{=} \ldots\ldots$$

Otóż w wypadku naszym zamiana taka napotka na trudności, nad któremi tu nie mogę się dłużej zastanawiać. Definicję naszą przyjmiemy za wskazówkę jedynie, która poucza, jak tworzyć kolejno „krok za krokiem"[1] układy 3, 4,... członowe, aż do tej liczby członów, która nam będzie w praktyce potrzebna. W naszem ujęciu istotną trudność będzie stanowiła okoliczność, że nawet założywszy, iż elementy $a_1, a_2, \ldots a_n$ są *jednorodne*, otrzymamy wedle naszych definicyj systemy:

$$(a_1\,;a_2),\ (a_1\,;a_2\,;a_3), \ldots\ (a_1\,;a_2;\ldots a_n),$$

jako twory, które trudno bardzo będzie uważać, kierując się choćby intuicją, za jednorodne; i tak naprz. $(a_1\,;a_2)$ jest relacją między *elementami* a elementami, $(a_1;a_2;a_3)$ jest już relacją między *systemami* elementów a elementami i t. d.

Z rozważań, w które tu zapuszczać się nie mogę, wynika też, że nie będziemy tu upoważnieni do stosowania zasady indukcji matematycznej. Idąc jednak „krok za krokiem", udowodnimy dla systemów kolejno 3-członowych, 4-członowych, aż do liczby członów potrzebnej nam w praktyce, że:

Tw. Systemy: $(a_1\,;\ldots;a_n)$ i $(b_1\,;\ldots;b_m)$ są wtedy i tylko wtedy identyczne, gdy:

$$n = m \text{ i } a_s = b_s \text{ dla } s = 1, 2 \ldots n.$$

Podaję dla przykładu *pierwszy krok* tej kaskady dowodów:

[1] „steep by steep" — termin Russella.

Jeżeli $(a; b; c) = (l; m; n)$, to ponieważ z *def.*

$$(a; b; c) = ((a; b); c),$$
$$(l; m; n) = ((l; m); n),$$

a dla systemów 2-członowych twierdzenie już udowodniono, więc:

$$(a; b) = (l; m) \text{ i } c = n.$$

Stąd: $a = l, b = m$ i $c = n$.

19. **Funkcje wielu zmiennych.**

Stawiając definicję funkcji czy operatora, nie wyróżniliśmy wypadków funkcyj *jednej, dwu* czy *więcej* zmiennych. Nie jest to, w istocie, żadne odróżnienie zasadnicze, przyjmujemy jednak praktycznie umowę następującą:

Umowa: Funkcję nazywamy funkcją n-zmiennych ($n \geqq 2$), jeżeli wszystkie elementy jej pola są *układami* (ew. *systemami*) n-członowemi.

Układy czy systemy możemy jednak uważać za elementy pojedyńcze, o ile nie zachodzi potrzeba rozważania ich struktury. Temsamem funkcja 2, 3 czy więcej zmiennych może być zawsze uważana za funkcję jednej zmiennej.

Rozdział II.

Elementy teorji działań.

§ 1. Działania.

1. **Działania**[1] (dwójkowe).

Działaniem (dwójkowem) w klasie A nazywamy każdy *operator*, czyli *funkcję*, która *parom*

---

[1] Ustępy 1 i 2 znajdzie czytelnik w mym Zarysie Algebry Klasycznej I. — Kraków 1934 — Bibl. Kółka Mat.-Fiz. U. U. J. Nr. 5.

elementów klasy A {wszystkim lub tylko pewnym} i *tylko takim* przypisuje określone wartości.

Przykład: Suma, iloczyn, różnica, iloraz w klasie N_0 (liczb całkowitych), tak jak je wprowadzono naprz. w mej Arytm. L. Całk.

Umowa. Działanie jest *funkcją par* zmiennych elementów pewnej klasy, a więc funkcją dwóch zmiennych elementów tej klasy, lecz tradycyjnie nie piszemy *wyniku działania* [obrazu funkcyjnego pary] w postaci takiej, jak $f(x, y)$, lecz tworzymy dla działania specjalny znak [$+$, $-$, $\times$ i t. p.] i zapisujemy wynik działania na parze (x, y), umieszczając ów znak *między* x a y. Będziemy w ogólnej teorji zapisywali wyniki działań w postaci $x \bigcirc y$, $x \square y$ i t. p., a więc używali znaków $\bigcirc$, $\square$ i t. p. jako ogólnych symboli działania.

U niektórych autorów wynik działania zapisuje się, zamykając odnośną parę w nawias szczególnego kształtu. Tej metody naśladować nie będziemy. O innej jeszcze metodzie pomówimy później.

Def. Działanie $\bigcirc$ w klasie A jest w tej klasie *wewnętrznem*, gdy wynik $x \bigcirc y$, *o ile ma sens*, należy do klasy A.

Uw. Wynik działania jest *obrazem* funkcyjnym pary elementów, a więc *opisem*, dlatego mówimy o jego *sensie!*

Przykład: $+$, $\times$, $-$, $/$ w Arytm. L. Całk. są wewnętrzne w klasie N_0.

Def. Działanie $\bigcirc$ jest w klasie A *nieograniczenie wykonalne*, gdy $x \bigcirc y$ ma sens, ilekroć tylko (x, y) jest parą elementów klasy A.

Przykład: Dodawanie i mnożenie w klasie N_0, lecz nie odejmowanie ani dzielenie.

2. Działania odwrotne.

W związku z działaniem $\circ$ wprowadzimy dwa nowe pojęcia:

Def. *Prawą odwrotną* $x \cup' y$ działania $\circ$ określimy jako:

„jedyne z takie, że $y \circ z = x$".

Aby więc $x \cup' y$ *miało sens* potrzeba i wystarcza, by:

(1) istniało takie z, że $y \circ z = x$;

(2) nie mogły istnieć różne z takie, by:

$$y \circ z = x.$$

Def. *Lewą odwrotną* $x \cup'' y$ określimy jako:

„jedyne takie z, że $z \circ y = x$".

Umowa. Gdyby $x \cup' y = x \cup'' y$, to oznaczymy którekolwiek z nich przez $x \cup y$.

Zauważmy, że $\cup'$ i $\cup''$ są to znaki *nowych działań* [pochodnych w stosunku do działania $\circ$]. Nazwiemy je *prawem* względnie *lewem* działaniem *odwrotnem* do działania $\circ$.

Mamy tu kilka prostych, a ważnych twierdzeń:

Tw. 1. Jeżeli $x \cup' y$ ma sens, to

$$y \circ (x \cup' y) = x;$$

jeżeli ma sens $x \cup'' y$, to

$$(x \cup'' y) \circ y = x.$$

Dem. Opis, o ile ma sens, spełnia warunek, który go zrodził [str. 22, reguła I].

Tw. 2. Jeżeli $x \cup' y$ ma sens i $y \circ z = x$, to

$$z = x \cup' y;$$

jeżeli $x \cup'' y$ ma sens i $z \circ y = x$, to

$$z = x \cup'' y.$$

Dem. Wedle reguły II dla opisów jednostkowych [str. 22].

Uw. Żądanie uprzednie sensu dla $x \cup' y$ czy $x \cup'' y$ jest tu istotne! Z faktu, że $5 \times 0 = 0$ nie wynika, że $5 = 0/0$!

Tw. 3. Jeżeli $x \cup' y = z$, to $y \circ z = x$;
jeżeli $x \cup'' y = z$, to $z \circ y = x$.

Dem. Z reguły II dla opisów [str. 22].

Tw. 4. Jeżeli $\circ$ jest działaniem *wewnętrznem* w klasie A, to $\cup'$ i $\cup''$ są również działaniami w klasie A i do tego *wewnętrznemi.*

Dem. Gdy $x \cup' y$ ma sens, dla danych x i y z klasy A, to $y \circ (x \cup' y) = x$, zatem ma sens $y \circ (x \cup' y)$, a więc $x \cup' y$ musiało należeć do klasy A. Analogicznie dla $\cup''$.

Def. Jeżeli $x \cup' y$ [ew. $x \cup'' y$] ma *zawsze* sens, o ile x i y należą do klasy A, to działanie $\circ$ nazwiemy *prawostronnie* [lewostronnie] nieograniczenie *odwracalnem.*

Przykład: Dodawanie w zakresie liczb rzeczywistych, natomiast mnożenie już nie.

3. Działania przemienne, łączne i jednotliwe.

Def. Działanie $\circ$ jest *przemienne,* gdy:
ilekroć ma sens $x \circ y$, to

$$x \circ y = y \circ x$$

[a więc $y \circ x$ ma też sens wedle III reguły dla opisów!]

Def. Działanie $\circ$ jest *łączne,* gdy:
ilekroć ma sens $(x \circ y) \circ z$, to

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

[a więc, gdy ma sens $x \circ y$ i $(x \circ y) \circ z$, to ma sens $y \circ z$, $x \circ (y \circ z)$ i zachodzi powyższa równość].

Def. Działanie $\circ$ jest *prawostronnie jednotliwe,* gdy $x \circ u = x \circ v$ pociąga stale, że $u = v$. Analogicznie: działanie $\circ$ jest *lewostronnie* jednotliwe, gdy $u \circ x = v \circ x$ pociąga zawsze, że $u = v$.

Tw. 1. Gdy działanie $\circ$ jest *przemienne,* to działania odwrotne $\cup'$ i $\cup''$ są *identyczne.*

Dem. 1. Załóżmy, że $x \cup' y$ ma sens, wtedy $y \circ (x \cup' y) = x$, zatem $(x \cup' y) \circ y = x$. Gdyby $z \circ y = x$, to $y \circ z = x$, więc $z = x \cup' y$, gdyż $x \cup' y$ ma sens.

A więc istnieje jedyne z takie, że $z \circ y = x$ i tem jest $x \cup' y$. Stąd: ma sens $x \cup'' y$ i

$$x \cup'' y = x \cup' y.$$

2. Analogicznie, gdy $x \cup'' y$ ma sens.

Tw. 2. Jeżeli działanie $\circ$ jest *prawostronnie jednotliwe* i $u \circ v = w$, to $v = w \cup' u$ [więc $w \cup' u$ ma sens!]

Dem. 1. Istnieje widocznie element (i jest nim naprz. v) taki, że $u \circ v = w$. Lecz gdyby jeszcze $u \circ z = w$, to dzięki jednotliwości $v = z$. Zatem $w \cup' u$ ma sens i $w \cup' u = v$.

Corr. Analogiczne twierdzenie dla działania lewostronnie jednotliwego.

Tw. 3. Działanie $\circ$ *przemienne* i *prawostronnie jednotliwe* jest też i *lewostronnie jednotliwe.*

Dem. $u \circ x = v \circ x$ pociąga, że

$$x \circ u = x \circ v \text{ i stąd } u = v.$$

Corr. Analogiczne twierdzenie dla lewostronnej jednotliwości.

Tw. 4. Jeżeli działanie $\bigcirc$ jest *prawostronnie jednotliwe* i $x \bigcirc y$ ma sens to

$$(x \bigcirc y) \cup' x = y.$$

Dem. Wtedy $x \bigcirc y = x \bigcirc y$, więc *istnieje* takie z, że $x \bigcirc z = x \bigcirc y$ i takiem jest naprz. y. Lecz dzięki jednotliwości $x \bigcirc z = x \bigcirc y$ pociąga $z = y$. Zatem ma sens $(x \bigcirc y) \cup' x$ i równa się y.

Corr. Analogicznie, gdy $\bigcirc$ lewostronnie jednotliwe i $x \bigcirc y$ ma sens, to $(x \bigcirc y) \cup'' y = x$.

4. Rozdzielność jednego działania wobec drugiego.

Def. Działanie $\square$ nazwiemy prawostronnie *rozdzielnem wobec* działania $\bigcirc$, gdy założenie, że $(x \bigcirc y) \square z$ *ma sens* pociąga, iż

$$(x \bigcirc y) \square z = (x \square z) \bigcirc (y \square z),$$

o ile $x \square z$ *i* $y \square z$ *mają sens.*

Analogiczna definicja dla *lewostronnej* rozdzielności $\square$ wobec $\bigcirc$.

Tw. 1. Jeżeli działanie $\square$ jest *przemienne* i *prawostronnie rozdzielne* wobec $\bigcirc$, to jest też *lewostronnie rozdzielne* wobec $\bigcirc$.

Dem. Załóżmy, że $z \square (x \bigcirc y)$, $z \square x$, $z \square y$ mają sens. Wtedy, dzięki przemienności:

$$(x \bigcirc y) \square z, \; x \square z, \; y \square z$$

mają sens, a dzięki jeszcze prawostronnej rozdzielności:

$$z \square (x \bigcirc y) = (x \bigcirc y) \square z = (x \square z) \bigcirc (y \square z)$$
$$= (z \square x) \bigcirc (z \square y).$$

Corr. Analogicznie przy założeniu lewostronnej rozdzielności.

5. **Moduły działania.**

Def. Jeżeli $\bigcirc$ jest działaniem w klasie A, to element z z klasy A nazwiemy jego *modułem*, gdy: dla każdego elementu x klasy A mamy:

$$x \bigcirc z = z \bigcirc x = x.$$

Przykład: Takiem jest naprz. 0 dla dodawania czy 1 dla mnożenia wśród liczb całkowitych lub rzeczywistych.

Def. Jeżeli działanie $\bigcirc$ posiada w klasie A *jedyny* moduł, to nazwiemy go *Modułem* działania $(\bigcirc)$ lub $Mod(\bigcirc)$.

Przykład: $0 = Mod(+)$, $1 = Mod(\times)$ w zakresie liczb całkowitych czy rzeczywistych czy też i zespolonych.

Rozdział III.

Grupy i pola.

Celem ujęcia jednolitego pewnych zjawisk, występujących w różnych arytmetykach klasycznych wprowadzam tutaj elementy teorji *grup* i *pól*. Idee te odgrywają niezmiernie ważną rolę w matematyce od czasów Nielsa Abela i Évariste'a Galois, my jednakże nie będziemy się zajmowali temi pojęciami dla nich samych, lecz jedynie w związku z arytmetykami klasycznemi. Poprzestaniemy dlatego na wysłowieniu odnośnych definicyj i prześledzeniu elementarnych konsekwencyj, do których prowadzą założenia stanowiące określenie grupy czy pola. Wprowadzimy też, z konieczności nieomal, pojęcia semi-grupy i semi-pola, bardzo zbliżone do klasycznych pojęć grupy czy pola. Czytelnik sam już oceni, czy i jakie korzyści płynąć stąd będą dla naszego wykładu.

§ 1. Grupy i Semi-grupy.

1. Określenie grupy i semi-grupy.

Rozważmy *system* $(A; \bigcirc)$ złożony z *klasy* A i *działania* $\bigcirc$ oraz wypiszmy sobie pewną ilość zdań o tych tworach:

I. Działanie $(\bigcirc)$ jest *nieograniczenie wykonalne* w *klasie* A i *wewnętrzne* w A.
II. Działanie $\bigcirc$ jest *łączne.*
III. Działanie $\bigcirc$ jest *obustronnie jednotliwe.*
IV. Działanie $\bigcirc$ jest *obustronnie odwracalne* (nieograniczenie).
V. Działanie $\bigcirc$ posiada *Moduł,* który oznaczymy przez $Mod(A; \bigcirc)$ lub krótko $Mod(\bigcirc)$.
VI. Działanie $\bigcirc$ jest *przemienne.*

Podajemy teraz określenia:

Def. System $\{A; \bigcirc\}$ nazwiemy *semi-grupą,* gdy spełnia założenia:

I, II, III, V.

Def. System $\{A; \bigcirc\}$ będzie *grupą,* gdy spełnia:

I, II, IV, V.

Def. System $\{A; \bigcirc\}$ będzie *semi-grupą Abelową,* gdy spełnia:

I, II, III, V, VI.

Def. System $\{A; \bigcirc\}$ będzie *grupą Abelową,* gdy spełnia:

I, II, IV, V, VI.

W sprawie założeń I—VI odsyłam do *Uwag* na końcu książki.

W dalszym ciągu zajmiemy się jedynie semigrupami i grupami Abelowemi.

Uw. Założenia, charakteryzujące grupę i semigrupę (Abelową lub nie) zawierają już rozstrzygnięcie, że w systemie $\{A; \bigcirc\}$ A jest *klasą*, $\bigcirc$ *działaniem*, a więc *relacją*.

2. Własności elementarne semi-grup Abelowych.

Założymy, że system $\{A; \bigcirc\}$ jest semi-grupą Abelową i będziemy śledzili elementarne konsekwencje tego założenia. *Dla wygody pisać będziemy zamiast:* $\bigcirc$ *znak* $+$, *zamiast* $\smile$ *znak* $-$, a *Mod*$(\bigcirc)$ *oznaczymy przez* O.

Trzymając się ściśle reguł I, II, III dla opisów jednostkowych [p. str. 22] moglibyśmy twierdzenia, które teraz wysławiać i udowadniać zaczniemy ująć w postaci bardzo krótkiej, zwłaszcza co do ich założeń. Tak więc założenie czegoś o $x + y$ pociąga już, że $x + y$ ma sens, a tem samem x i y należą do A. [Zał. I dla semi-grup]. Wolimy jednak przynależność elementów do klasy A wyraźnie zaznaczać.

Ze względu jedynie na oszczędność miejsca pozwolimy sobie posługiwać się symboliką w wysławianiu twierdzeń:

(1) $E!$ oznacza: „*ma sens*“.
(2) $x, y \varepsilon A$ oznacza: $x \varepsilon A$ i $y \varepsilon A$.
(3) Poprzednik od następnika oddziela w twierdzeniu znak $:\supset:$.

Tw. 1. $E!\ x + y :\supset: x, y \varepsilon A$.

Dem. Dzięki założeniu I mówiącemu, że $+$ jest działaniem w klasie A [p. też str. 33].

Tw. 2. $x, y \varepsilon A : \supset : x + y \varepsilon A$.

Dem. Dzięki zał. I, mówiącemu, że $+$ jest nieograniczenie wykonalne i wewnętrzne w klasie A.

Tw. 3. $x, y \varepsilon A : \supset : x + y = y + x$.

Dem. Jest to łącznie z tw. 2 założenie VI.

Tw. 4. $x, y, z \varepsilon A : \supset : (x + y) + z = x + (y + z)$.

Dem. Jest to założenie II.

Tw. 5. $0 \varepsilon A$.

Dem. $0 = Mod(+)$, działanie $+$ posiada *Moduł* [zał. V], a ten z definicji należy do A.

Tw. 6. $x \varepsilon A : \supset : x + 0 = 0 + x = x$.

Dem. Z definicji *Modulu* i zał. V.

Tw. 7. $x, y, z \varepsilon A . x + y = x + z : \supset : y = z$.

Dem. Z założenia III.

Corr. $x, y, z \varepsilon A . y + x = z + x : \supset : y = z$
[z zał. III.

Tw. 8. $x, y \varepsilon A . x + y = x : \supset : y = 0$.

Dem. Wtedy: $x + y = x + 0$, a stąd $y = 0$
[dzięki tw. 7.

Tw. 9. Działania odwrotne do $+$, lewe i prawe, są *identyczne*. Oznaczymy którekolwiek z nich przez $-$.

Dem. Wynika z zał. VI i R. II § 1, nr. 3, tw. 1.

Tw. 10. $x, y \varepsilon A . E!(x - y) : \supset : y + (x - y) =$
$= (x - y) + y = x$.

Dem. Dzięki R. II, § 1, nr. 2, tw. 1 i tw. 9 niniejszego ustępu.

Tw. 11. $x, y \varepsilon A . x + y = z : \supset : y = z - x$
$x = z - y$.

Dem. Wtedy $z \varepsilon A$ i reszta z R. II, § 1, nr. 2, tw. 2, tw. 9 obecnego ustępu, oraz zał. III.

Tw. 12. $x \varepsilon A : \supset : x - 0 = x$.

Dem. Wtedy $x, 0 \varepsilon A . 0 + x = x$, a stąd $x = x - 0$ wedle tw. 11.

Tw. 13. $x \varepsilon A : \supset : x - x = 0$.

Dem. Wtedy: $x + 0 = x$, więc $0 = x - x$ [tw. 11].

Corr. $x, y \varepsilon A . x = y : \supset : x - y = 0$.

Tw. 14. $x, y \varepsilon A . x - y = 0 : \supset : x = y$.

Tem. Wtedy $x = 0 + y = y$.

Tw. 15. $x, y \varepsilon A : \supset : (x + y) - x = y$.

Dem. Wtedy $x + y = x + y$, a stąd $y = (x + y) - x$ [tw. 11].

Tw. 16. $x, y, z \varepsilon A . E! (y - z) : \supset : (x + y) - - (x + z) = y - z$.

Dem.

Wtedy $(x + z) + (y - z) = x + [z + (y - z)]$ z tw. 4, stąd: $(x + z) + (y - z) = x + y$ [tw. 10],

a więc: $y - z = (x + y) - (x + z)$ [tw. 11].

Tw. 17. $x, y, z \varepsilon A . E! \{(x + y) - (x + z)\} : \supset : (x + y) - (x + z) = y - z$.

Dem.

Wtedy: $(x + z) + [(x + y) - (x + z)] = x + y$ [tw. 10].

$x + \{z + [(x + y) - (x + z)]\} = x + y$ [tw. 4].

$z + [(x + y) - (x + z)] = y$ [tw. 7].

$(x + y) - (x + z) = y - z$ [tw. 11].

Tw. 18. $x, y, z \varepsilon A . x - z = y - z : \supset : x = y$ [lewostronna jednotliwość dla „—“].

Dem. Wtedy: $x = (x - z) + z = (y - z) + z = y$ [tw. 10].

Tw. 19. $x, y, z \varepsilon A . x - y = x - z : \supset : y = z$
[prawostronna jednotliwość dla „—"].

Dem. Wtedy: $x = y + (x - z)$

$x + z = [y + (x - z)] + z = y + [(x - z) + z]$ [tw. 4]

$x + z = y + x = x + y$, [tw. 10 i tw. 3],

stąd $y = z$ [tw. 7].

Umowa. Uprościmy sobie pisanie, kładąc:

$$x + y + z \overset{\text{df}}{=} (x + y) + z$$
$$x + y - z \overset{\text{df}}{=} (x + y) - z$$
$$x - y + z \overset{\text{df}}{=} (x - y) + z.$$
$$x - y - z \overset{\text{df}}{=} (x - y) - z.$$

Tw. 20.

$x, y, z \varepsilon A . E! (x - z) : \supset : x + y - z = x - z + y.$

Dem. Wtedy ma sens $x - z + y$ i stąd:

$(x - z + y) + z = (x - z) + (y + z)$ [tw. 4]

$= (x - z) + (z + y)$ [tw. 3]

$= [(x - z) + z] + y$ [tw. 4]

$= x + y$ [tw. 10]

Zatem: $x - z + y = x + y - z$ [tw. 11].

Tw. 21.

$x, y, z \varepsilon A . E! \{x - (y + z)\} : \supset : x - (y + z) =$
$= x - y - z.$

Dem. $(y + z) + [x - (y + z)] = x$ [tw. 10]

$y + \{z + [x - (y + z)]\} = x$ [tw. 4]

$z + [x - (y + z)] = x - y$ [tw. 11]

$x - (y + z) = x - y - z$ [tw. 11].

Tw. 22.

$x, y, z \varepsilon A . E! (x - y - z) : \supset : x - y - z = x - (y + z).$

Dem. $(x - y - z) + (y + z) =$

$= (x - y - z) + (z + y)$ [tw. 3]

$$= [(x - y - z) + z] + y \qquad [\text{tw. } 4]$$
$$= \{z + [(x - y) - z]\} + y \qquad [\text{tw. } 3]$$
$$= x - y + y \qquad [\text{tw. } 10]$$
$$= x \qquad [\text{tw. } 10]$$

stąd: $$x - y - z = x - (y + z) \qquad [\text{tw. } 11].$$

Tw. 23.

$$x, y, z \,\varepsilon\, A \,.\, E!\,(x - y) \,.\, E!\,(y - z) : \supset :$$
$$x - (y - z) = x - y + z = x + z - y.$$

Dem. Wtedy: $x - y + z$ i $x - y$ mają sens, więc dzięki tw. 20:

$$x + z - y = x - y + z.$$

Następnie:

$$x + z = (x + z - y) + y = (x + z - y) + (y - z + z)$$
$$[\text{tw. } 10]$$
$$x + z = [(x + z - y) + (y - z)] + z \qquad [\text{tw. } 4]$$
$$x = (x + z - y) + (y - z) \qquad [\text{tw. 7 Corr.}]$$
$$x - (y - z) = x + z - y \qquad [\text{tw. } 11].$$

Zespół twierdzeń 1—23 nazwiemy *zespołem* ($\mathscr{A}$) dla semi-grup Abelowych (i działania $+$).

3. Elementarne własności grup Abelowych.

W *grupie* $(A; +)$ działanie $+$ jest nieograniczenie odwracalne, zatem „—" nieograniczenie wykonalne w klasie A. Pociąga to, że założenie $x, y \,\varepsilon\, A$ pozwala stwierdzić *sens* dla $x - y$.

Twierdzenia ($\mathscr{A}$) poprzedniego ustępu, odnoszące się tam do semi-grup ulegną pewnej modyfikacji. I tak:

(1) twierdzenia 1—9, 11—15, 18, 19 nie ulegną zmianie, lecz:

(2) twierdzenie 10, 16, 17, 20—23 utracą założenia o *sensie*, przytem tw. 16 i 17, jakoteż 21 i 22 zidentyfikują się między sobą.

Otrzymamy w ten sposób zespół $(\mathcal{A})$ dla grup Abelowych.

Nieograniczona odwracalność „+" pozwoli nam na pewne, bardzo istotne uproszczenie.

Oto na czem ono polega:

Def. Nazwiemy $0-x$ elementem *odwrotnym* lub *symetrycznym* do x i oznaczymy przez $\bar{x}$.

Tw. 24. $x \varepsilon A : \supset : E! \, \bar{x}$.

Dem. Z definicji i nieograniczonej wykonalności działania $(-)$ w klasie A.

Tw. 25. $x, y \varepsilon A : \supset : x - y = x + \bar{y}$.

Dem. Wtedy: $x + \bar{y} + y = x + (\bar{y} + y) = x + 0 = x$.

Reszta z tw. 11.

Widzimy zatem, że *wykonanie działania* $(-)$ *odwrotnego* do $(+)$ *sprowadza* się do *wykonania* $(+)$ i *tworzenia* elementów *odwrotnych* do danych.

Mamy tu jeszcze:

Tw. 26. $x, y \varepsilon A : \supset : \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$.

Dem.

$$\overline{x+y} = 0 - (x + y) = 0 - x - y = \bar{x} - y = \bar{x} + \bar{y}$$

[tw. 21 $(\mathcal{A})$, tw. 25].

Tw. 27. $x, y \varepsilon A : \supset : \overline{x-y} = \bar{x} + y = \bar{x} - \bar{y}$.

Dem. $\overline{x-y} = 0 - (x - y) = 0 - x + y = \bar{x} + y$;

$\bar{x} - \bar{y} = \bar{x} - (0 - y) = \bar{x} - 0 + y = \bar{x} + y$.

Tw. 28. $x \varepsilon A : \supset \bar{\bar{x}} = x$.

Dem.

$$\bar{\bar{x}} = 0 - \bar{x} = 0 - (0 - x) = 0 - 0 + x = 0 + x = x.$$

Dołączymy jeszcze dla zupełności:

Tw. 29. $x, y \varepsilon A : \supset : x - y \varepsilon A$.

Dem. Zał. IV.

Twierdzenia 1—29 w odniesieniu do grup Abelowych nazwiemy zespołem $\mathcal{B}$.

4. Izomorfja grup i semi-grup.

Zauważmy najpierw, że każda grupa jest też semi-grupą [lecz nie odwrotnie: $(N_0; +_c)$ jest semi-grupą; $(q, +)$, gdzie q oznacza ogół liczb rzeczywistych, jest uważane za grupę]. Następnie zauważymy, że grupa czy semi-grupa Abelowa jest też grupą czy semi-grupą. W definicji izomorfizmu wystarczy nam ograniczyć się tylko do semi-grup ogólnych.

Def.

Semi-grupy $\mathfrak{A} \overset{\text{df}}{=} \{A; +\}$ i $\mathfrak{A}' \overset{\text{df}}{=} \{A'; +'\}$ nazwiemy *izomorfijnemi* (holoedrycznie), jeżeli:

Istnieje *odpowiedniość doskonała* R [p. str. 25] między elementami klas A i A', t. zn. taka, że $D'R = A$, $\text{ⴷ}'R = A'$, która *zachowuje działanie semi-grupowe* t. zn., że gdy x i y należą do A, wówczas:

$$R(x) +' R(y) = R(x + y).$$

Będziemy zaznaczali izomorfję, pisząc:

$$(\mathfrak{A}) \text{ iz } (\mathfrak{A}').$$

Uw. Przypominamy, że $R(x)$ oznacza R-obraz elementu x.

Tw. 1. Każda semi-grupa $\mathfrak{A} \overset{\text{df}}{=} (A; +)$ jest izomorfijna ze sobą: $\mathfrak{A}$ iz $\mathfrak{A}$.

Dem. Łatwo stwierdzić, że „izomorfję wykazuje“ relacja:

$$R \overset{\text{df}}{=} (\widehat{xy})\{x \,\varepsilon\, A \,.\, x = y\}$$

[p. str. 19].

Tw. 2. Gdy $\mathfrak{A}$ iz $\mathfrak{A}'$, przyczem $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ są semi-grupami, to również $\mathfrak{A}'$ iz $\mathfrak{A}$.

Dem. Jeżeli R wykazywało izomorfję $\mathfrak{A}$ iz $\mathfrak{A}'$, to R^{-1} wykaże, że $\mathfrak{A}'$ iz $\mathfrak{A}$.

Tw. 3. Gdy $\mathfrak{A}$ iz $\mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{A}'$ iz $\mathfrak{A}''$, gdzie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ są semi-grupami, to $\mathfrak{A}$ iz $\mathfrak{A}''$.

Dem. Gdy R wykazuje, że $\mathfrak{A}$ iz $\mathfrak{A}'$, S że $\mathfrak{A}'$ iz $\mathfrak{A}''$, to kompozycja $R|S$ wykaże, że $\mathfrak{A}$ iz $\mathfrak{A}''$.

Widać stąd, że *izomorfja* jest *stosunkiem równoważności*. *Teorja Grup*, tak jak ją mamy wyłożoną naprz. w znanych dziełach Burnside'a czy Speisera[1] jest nauką o własnościach *niezmienniczych* grupy wobec izomorfji.

Tw. 4. Gdy R wykazuje izomorfję semi-grup $(A;+)$ i $(A';+')$, u i w należą do A', to:

$$R^{-1}(u)+R^{-1}(v)=R^{-1}(u+'v).$$

Dem. Gdyż wtedy R^{-1} wykazuje izomorfję $(A';+')$ i $(A;+)$.

Tw. 5. Gdy R wykazuje izomorfję semi-grup $(A,+)$ i $(A';+')$; 0 i $0'$ są odpowiedniemi Modułami, to $R(0)=0'$ {i odwrotnie $R^{-1}(0')=0$}.

Dem. Oznaczmy $R(0)$ przez s; wtedy:

$$R(0)=s,\ 0=R^{-1}(s).$$

Niechaj dowolne u należy do A', $v=R^{-1}(u)$; wtedy:

$$u+'s=R(v)+'R(0)=R(v+0)=R(v)=u,$$

---

[1] W. Burnside: Theory of Groups II wyd., A. Speiser: Gruppentheorie II wyd. Berlin Springer.

zatem s jest modułem semi-grupy $(A'; +')$, ta atoli posiada jedyny *Moduł* $(= 0')$, więc $s = 0'$.

Tw. 6. Gdy semi-grupa *Abelowa* $(A; +)$ jest izomorfijna z semi-grupą $(A'; +')$, to $(A'; +')$ jest również *Abelową*.

Dem. Niechaj R wykazuje izomorfję odnośną i niechaj: $x', y' \varepsilon A'$; $R^{-1}(x') = x$, $R^{-1}(y') = y$.

Wtedy: $x' +' y' = R(x) +' R(y) = R(x + y)$

$= R(y + x) = R(y) +' R(x) = y' + x'$.

Tw. 7. Gdy *grupa* (Abelowa) $(A; +)$ jest izomorfijna z semi-grupą (Abelową) $(A'; +')$, to $(A'; +')$ jest *grupą* (Abelową).

Dem. Niechaj R wykazuje izomorfję odnośną, x' i y' należą do A', $x = R^{-1}(x')$, $y = R^{-1}(y')$. Wtedy: $x, y \varepsilon A$, ma sens $x - y$ i zachodzi: $(x - y) + y = x$, więc $R(x - y) +' R(y) = R(x)$ czyli $R(x - y) +' y' = x'$, stąd: istnieje takie u, że $y' +' u = x'$. Gdyby: $y' +' v = x'$, gdzie $v \varepsilon A'$, to:

$$R^{-1}(y') + R^{-1}(v) = R^{-1}(x'),$$

$$y + R^{-1}(v) = x,$$

a zatem: $R^{-1}(v) = x - y$ i $v = R(x - y)$.

A więc ma sens $x' -' y'$ i jeszcze:

$$x' -' y' = R(x - y).$$

Uw. Tw. powyższe jest słuszne i dla grup nie-Abelowych.

Corr. Gdy semi-grupa Abelowa $(A; +)$ jest izomorfijna z semi-grupą (a więc Abelową) $(A'; +')$, $x, y \varepsilon A$ i ma sens $x - y$, to ma sens $x' -' y'$, gdzie $x' = R(x)$, $y' = R(y)$ i jeszcze $R(x - y) = x' -' y'$.

Dem. Wynika z dowodu tw. 6.

Uw. $-'$ oznacza tu działanie odwrotne do $+'$.

W skład określenia izomorfji semi-grup czy grup wchodzi pewne niezmiernie doniosłe pojęcie, które postaramy się wydobyć na jaw.

Def. *Klasy* A i B nazwiemy *równolicznemi* i zaznaczymy to przez $A\,rl\,B$, gdy istnieje *odpowiedniość doskonała* R, taka że:

$$D'R = A,\ G'R = B$$

[a więc „między elementami klas A i B"].

Dowody zupełnie analogiczne do dowodów tw. 1, 2 i 3 obecnego ustępu przekonają nas, że:

Tw. *Równoliczność* jest *równoważnością.*

Własnościami *niezmienniczemi* wobec *równoliczności* zajmuje się *Teorja Kardynalna Mnogości.*

Jeżeli uznajemy N_0 (ogół liczb całkowitych arytmetycznych) za *klasę,* to możemy korzystać z następującej definicji:

Def. *Klasa* A zwie się *przeliczalną,* gdy jest *równoliczna* z N_0.

Uw. Istnieje inna definicja *przeliczalności,* która nie posługuje się zbiorem N_0, atoli tej tu wprowadzać i rozważać nie mamy jeszcze możności. Uczynimy to w późniejszym rozdziale.

Zauważmy, że *przeliczalność* jest własnością klasy *niezmienniczą* wobec *równoliczności,* t. zn., że gdy A jest *przeliczalne,* $B\,rl\,A$, to również B jest *przeliczalne,* co wynika z tego, iż $A\,rl\,N_0$ i $B\,rl\,A$ pociągają, że $B\,rl\,N_0$. *Przeliczalność* jest temsamem pojęciem należącem do *Teorji Kardynalnej Mnogości.*

Widzimy z poprzedniego, że, aby semi-grupy $(A; +)$ i $(A'; +')$ były izomorfijne, potrzeba (lecz nie wystarcza), by klasy A i A' były *równoliczne* i że ta sama relacja R, która wykazuje *izomorfję*, wykaże też, że $A\, rl\, A'$.

Niechaj teraz: $(A\,;+)$ będzie *semi-grupą* (grupą, semi-grupą Abelową, grupą Abelową) i niechaj klasa A' będzie *równoliczna* z A. Określmy działanie $+'$ w klasie A' jak następuje:

Niechaj R wykazuje równoliczność $A\, rl\, A'$ i niechaj u i v będą dowolnemi elementami klasy A'. Określmy:

$$u +' v \overset{\mathrm{df}}{=} R(x+y), \text{ gdzie}$$
$$x = R^{-1}(u),\ y = R^{-1}(v).$$

Z łatwością udowodnimy, że system $(A'\,;+')$ będzie *semi-grupą* [grupą, semi-grupą Abelową, grupą Abelową].

Czynność powyższa nosi nazwę *„przerzucania własności grupowych z semi-grupy* [grupy, semi-grupy Ab., grupy Ab.] $(A\,;+)$ *na klasę* A' *równoliczną z klasą* A".

§ 2. Pola i Semi-Pola.

5. **Określenie pól i semi-pól.**

Rozważmy system 3-członowy:

$$(A\,;\bigcirc\,;\square)$$

i warunki:

(α) $(A\,;\bigcirc)$ jest semi-grupą Abelową.

(β) $(A\,;\bigcirc)$ jest grupą Abelową.

(γ) $(A\,;\square)$ jest semi-grupą Abelową *z zastrzeżeniem co do* $Mod(A\,;\bigcirc)$.

(δ) $(A\,;\square)$ jest grupą Abelową *z zastrzeżeniem, co do* $Mod(A\,;\bigcirc)$.

(ε) Działanie $\square$ jest *rozdzielne* wobec działania $\bigcirc$ w klasie A.

(ζ) $Mod(A;\bigcirc) \neq Mod(A;\square)$.

Objaśnienie. Powiedzenie, że „$(A;\square)$ *jest semi-grupą ew. grupą z zastrzeżeniem co do* $Mod(A;\bigcirc)$" oznacza, iż: warunek III ew. IV definicji z § 1, nr. 1 zastąpiono przez:

III′ $x, y, z \varepsilon A$ i $x \square y = x \square z$ pociągają $y = z$, o ile $x \neq Mod(A;\bigcirc)$ ew.:

IV′ działanie odwrotne prawe do $\square$, które oznaczymy przez $\sqcup'$ jest *wykonalne,* między x a y, t. zn. $x \sqcup' y$ *ma sens,* gdy $x, y \varepsilon A$ i $y \neq Mod(A;\bigcirc)$.

Def. System $(A;\bigcirc;\square)$ jest *semi-polem,* gdy są spełnione warunki: α, δ, ε, ζ.

Def. System $(A;\bigcirc;\square)$ jest *polem,* gdy spełnione są: β, δ, ε, ζ.

Uw. Innym terminem dla „pola" jest „ciało algebraiczne" (tak piszą przeważnie autorzy niemieccy, włoscy i francuscy; Anglicy i Amerykanie wolą termin: „pole"). Pojęcie *pola* wprowadził do matematyki É. Galois.

W sprawie założeń α, β, γ, δ, ε, ζ p. uwagi na końcu książki.

Zauważmy, że w semi-polu $(A;\bigcirc;\square)$ system $(A;\bigcirc)$ jest semi-grupą Abelową w odniesieniu do działania $\bigcirc$, system zaś $(A;\square)$ jest *grupą* z zastrzeżeniem co do $M(\bigcirc)$, w odniesieniu do działania $\square$. Nie będzie nam potrzebne rozważanie systemów $(A;\bigcirc;\square)$, któreby spełniały warunki: α, γ, ε, ζ. Takim byłby naprz. system $(N_0; +_c; \times_c)$, gdzie $+_c$ i $\times_c$ są dodawaniem i mnożeniem wśród liczb całkowitych [p. Arytm. L. Całk.].

6. **Elementarne własności semi-pól.**

Rozważając w dalszym toku pola i semi-pola, będziemy oznaczali dla wygody działanie $\bigcirc$ przez $+$, a działanie $\square$ przez $\times$. Odwrotne działania oznaczymy przez „—“ i „/“ [1]; *Moduły*: $Mod(+)$ i $Mod(\times)$ przez 0 i 1.

Niechaj tedy system $(A;+;\times)$ *będzie semi-polem.*

Przedewszystkiem zauważymy, że skoro $(A;+)$ jest semi-grupą, to:

Tw. Zachodzi zespół $(\mathscr{A})$ dla klasy A i działania $+$.

Ponieważ system $(A;\times)$ jest grupą, ale z *zastrzeżeniem* co do 0, więc przejdziemy jeszcze raz twierdzenia zespołu $(\mathscr{B})$, aby dokonać odpowiednich modyfikacyj.

Tw. 1. $E!\, x\times y :\supset: x, y\, \varepsilon\, A$.

Tw. 2. $x, y\, \varepsilon\, A :\supset: x\times y\, \varepsilon\, A$.

Tw. 3. $x, y\, \varepsilon\, A :\supset: x\times y = y\times x$.

Tw. 4. $x, y, z\, \varepsilon\, A :\supset: (x\times y)\times z = x\times(y\times z)$.

Tw. 5. $1\, \varepsilon\, A$.

Tw. 6. $x\, \varepsilon\, A :\supset: 1\times x = x\times 1 = x$.

Tw. 7. $x, y, z\, \varepsilon\, A\,.\, x \neq 0\,.\, x\times y = x\times z :\supset: y = z$.

Dem. Z założenia IV′ (str. 51) żądającego jednotliwości z zastrzeżeniem co do 0 [2].

---

[1] Znak dzielenia, t. zw. „solidus“ dawnych matematyków.

[2] Zauważmy, że IV′ pociąga III′.

Corr. $x, y, z \varepsilon A . x \neq 0 . y \times x = z \times x : \supset : y = z.$

Tw. 8. $x, y \varepsilon A . x \neq 0 . x \times y = x : \supset : y = 1.$

Dem. Wtedy: $x \times y = x \times 1$ i $x \neq 0$, więc (IV') $\quad y = 1.$

Tw. 9. $x, y \varepsilon A . y \neq 0 : \supset : E! x /' y . x /' y \varepsilon A.$

Dem. Z założenia IV' i zastosowania reguły I dla opisów. Oznaczyliśmy tu przez „$/'$" *prawe* działanie odwrotne do „$\times$".

Tw. 9^bis $x, y \varepsilon A . y \neq 0 : \supset : E! x /'' y . x /'' y =$
$= x /' y$

$\{/''$ jest lewem odwrotnem$\}$.

Dem.

Wtedy $E! x /' y$ i wobec tego: $y \times (x /' y) = x$, zatem $(x /' y) \times y = x$ dzięki tw. 3, a więc istnieje takie z, że $z \varepsilon A$ i $z \times y = x$. Gdyby $u \varepsilon A$ i $u \times y = x$, toby $y \times u = x$ i $y \times (x /' y) = x$, więc $y \times u = y \times (x /' y)$, lecz $y \neq 0$, więc $u = x /' y$. A więc:

$E! x /'' y$ i jeszcze $x /'' y = x /' y$.

Tw. 10. $x, y \varepsilon A . y \neq 0 : \supset : y \times (x / y) =$
$= (x / y) \times y = x.$

Dem. Wynika z 9 i 9^bis, gdy oznaczymy wspólną wartość $x /' y$ i $x /'' y$ przez x / y.

Tw. 11. $x, y \varepsilon A . y \neq 0 . x \times y = z : \supset : x =$
$= z / y.$

Dem. Gdyż wtedy $z \varepsilon A$ i z / y ma sens, przyczem $\quad (z / y) \times y = z.$

Tw. 12. $x \varepsilon A : \supset : x / 1 = x.$

Dem. Z zał. (ζ) mamy $1 \neq 0$, więc $E! x / 1$, a przytem $x \times 1 = x$, zatem $x = x / 1$ z tw. 11.

Tw. 13. $x \varepsilon A . x \neq 0 : \supset : x / x = 1.$

Dem. Wtedy x / x ma sens i $x \times 1 = x.$

Tw. 14. $x, y \varepsilon A . x/y = 1 : \supset : x = y$.

Dem. Widocznie x/y ma sens, a zatem:

$$(x/y) \times y = x, \text{ stąd } 1 \times y = x \text{ i } y = x.$$

Tw. 15. $x, y \varepsilon A . x \neq 0 : \supset : (x \times y)/x = y$.

Dem. Wtedy: $y \times x = x \times y$ i $x \neq 0$, więc

$$y = (x \times y)/x. \qquad \text{(tw. 11)}$$

Tw. 16. $x \varepsilon A : \supset : x \times 0 = 0 \times x = 0$.

Dem. Wtedy:

$$x \times 1 = x, \quad x \times 1 + x \times 0 = x \times (1 + 0) = x \times 1$$

z założenia (ε), zatem: $x + x \times 0 = x$, a stąd

$$x \times 0 = 0.$$

Tw. 17. Gdy $x, y \varepsilon A$, *lecz* $y = 0$, to x/y *nie posiada sensu.*

Dem. Rozważymy dwa wypadki: (1) $x \neq 0$, (2) $x = 0$. Gdy $x \neq 0$, to dla każdego z należącego do A mamy: $z \times 0 = 0 \times z = 0 \neq x$, zatem *niema* takiego z w klasie A, by $z \times 0 = x$ czy $0 \times z = x$. Stąd: x/y, czyli $x/0$ *niema sensu* z powodu niespełnienia *przesłanki istnienia.*

(2) Gdy $x = 0$, to zauważymy, że:

$$1 \times 0 = 0 \times 0 = 0 \text{ i } 1 \neq 0.$$

zatem $0/0$ nie może mieć sensu z powodu niezachodzenia *przesłanki jednotliwości.*

Mamy zatem, łącznie z tw. 9 i 9^{bis}:

Tw. 18. Gdy $x, y \varepsilon A$, to x/y ma wtedy i tylko wtedy sens, jeżeli $y \neq 0$.

Tw. 19. $x, y, z \varepsilon A . x/z = y/z : \supset : x = y$.

Dem. Widocznie x/z i y/z miały sens (III reguła dla opisów), stąd $z \neq 0$. Stąd też:

$$x = (x/z) \times z = (y/z) \times z = y.$$

Tw. 20. $x, y, z \varepsilon A . x \neq 0 . x/y = x/z : \supset : y = z$.

Dem. Widocznie x/y i x/z miały sens i $z \neq 0$.

Stąd: $$x = y \times (x/y) = y \times (x/z)$$

$$x \times z = [y \times (x/z)] \times z = y \times [(x/z) \times z],$$
$$= y \times x = x \times y.$$

Lecz $x \neq 0$, więc $y = z$.

Umowy. Będziemy pisali krócej:

$$x \times y \times z \overset{\mathrm{df}}{=} (x \times y) \times z$$
$$x \times y/z \overset{\mathrm{df}}{=} (x \times y)/z$$
$$x/y \times z \overset{\mathrm{df}}{=} (x/y) \times z$$
$$x/y/z \overset{\mathrm{df}}{=} (x/y)/z.$$

Tw. 21. $x, y \varepsilon A . x \neq 0 . y \neq 0 : \supset : x \times y \neq 0$.

Dem. Gdyby $x \times y = 0$, to mielibyśmy:

$x \times 0 = 0$, $x \times y = x \times 0$ i $x \neq 0$, więc $y = 0$.

Łącznie z tw. 16 otrzymujemy niezmiernie ważne *„prawo zerowego iloczynu"*, jak je będziemy nazywali w arytmetykach:

Tw. 22. Gdy $x, y \varepsilon A$, to $x \times y$ jest wtedy i tylko wtedy równe 0, o ile $x = 0$ lub $y = 0$.

Tw. 23. $x, y, z \varepsilon A . x \neq 0 . z \neq 0 : \supset : (x \times y)/$
$/(x \times z) = y/z$

[„prawo upraszczania i rozszerzania"].

Dem. Wtedy $(x \times y)/(x \times z)$ ma sens, gdyż $x \times z \neq 0$ z tw. 22, również y/z ma sens. Dalej:

$$(x \times z) \times [(x \times y)/(x \times z)] = x \times y,$$
$$x \times \{z \times [(x \times y)/(x \times z)]\} = x \times y \text{ i } x \neq 0.$$

Stąd: $z \times [(x \times y)/(x \times z)] = y$ i $z \neq 0$,

więc: $(x \times y)/(x \times z) = y/z$.

Tw. 24. $x, y, \varepsilon A . \cdot \neq 0 : \supset : x \times y/z =$
$= x/z \times y$.

Dem. $x \times y / z$ i $x / z \times y$ mają wtedy sens, a stąd:

$$(x / z \times y) \times z = (x / z) \times (y \times z) = (x / z) \times (z \times y)$$
$$= [(x / z) \times z] \times y = x \times y.$$

Ponieważ $z \neq 0$, więc:

$$x / z \times y = x \times y / z.$$

Tw. 25. $x, y, z \varepsilon A . y \neq 0 . z \neq 0 : \supset : x / (y \times z) =$
$= x / y / z.$

Dem. Wtedy: x / y, $x / y / z$ i $x / (y \times z)$ mają sens, gdyż jeszcze $y \times z \neq 0$.

$$(y \times z) \times [x / (y \times z)] = x,$$
$$y \times \{z \times [x / (y \times z)]\} = x \quad \text{i} \quad y \neq 0,$$
$$z \times [x / (y \times z)] = x / y \quad \text{i} \quad z \neq 0,$$
$$x / (y \times z) = x / y / z.$$

Tw. 26. $x, y, z \varepsilon A . y \neq 0 . z \neq 0 : \supset : x / (y / z) =$
$= x / y \times z = x \times z / y.$

Dem. Wtedy, dzięki tw. 24, $x / y \times z = x \times z / y$.
Dalej: $x \times z = (x \times z / y) \times y = (x \times z / y) \times (y / z \times z)$,
$x \times z = [(x \times z / y) \times (y / z)] \times z$ i $z \neq 0$.
Stąd: $x = (x \times z / y) \times (y / z)$.
Otóż: $y / z \neq 0$, gdyż $y / z = 0$ dałoby:
$y = (y / z) \times z = 0 \times z = 0$,
zatem: $x / (y / z) = x \times z / y$.

Def.[1] Oznaczymy przez $/ x$ i nazwiemy „*odwrotnością*" x element $1 / x$.

Tw. 27. $x \varepsilon A . x \neq 0 : \supset : E ! / x . / x \varepsilon A.$

Dem. Z tw. 18.

Tw. 28. $x, y \varepsilon A . y \neq 0 : \supset : x / y = x \times (/ y).$

Dem. Spełnione są wtedy założenia tw. 26, więc: $x \times (/ y) = 1 / y \times x = 1 \times x / y = x / y$.

[1] Znakowanie Peany z „Formulario di Matematica".

Widać zatem, że wykonanie x/y sprowadza się do działania $\times$ i szukania odwrotności.

Tw. 29. $x, y \varepsilon A . x \neq 0 . y \neq 0 : \supset : /(x \times y) =$
$= /x \times /y.$

Dem. Spełnione są warunki dla tw. 25 i stąd: $/(x \times y) = 1/(x \times y) = 1/x/y = /x/y = /x \times / y$ (tw. 28).

Tw. 30. $x, y \varepsilon A . x \neq 0 . y \neq 0 : \supset : /(x/y) = (/x) \times y = y/x.$

Dem. Wedle tw. 26: $/(x/y) = 1/(x/y) =$
$= 1/x \times y = (/x) \times y = y \times (/x) =$
$= y/x.$

Tw. 31. $x \varepsilon A . x \neq 0 : \supset : //x = x.$

Dem. Wtedy $//x$ ma sens, gdyż $/x = 1/x \neq 0$, bo inaczej byłoby $1 = (1/x) \times x = 0 \times x = 0$,

$$//x = 1/(1/x) = 1/1 \times x = 1 \times x = x.$$

Zespół twierdzeń 1—31 oznaczymy przez (C').

Mamy teraz dla semi-pól szereg twierdzeń, pochodzący z uwzględnienia *rozdzielności* $\times$ wobec $+$.

Umowa. Wprowadzimy odrazu skrócenia:

$$x \times y \pm z \times u \overset{\mathrm{df}}{=} (x \times y) \pm (z \times u)$$
$$x/y \pm z/u \overset{\mathrm{df}}{=} (x/y) \pm (z/u)$$
$$x/y \pm z \times u \overset{\mathrm{df}}{=} (x/y) \pm (z \times u)$$
$$x \times y \pm z/u \overset{\mathrm{df}}{=} (x \times y) \pm (z/u).$$

Mamy teraz:

Tw. 32. $x, y, z \varepsilon A : \supset : (x+y) \times z = z \times (x+y) =$
$= x \times z + y \times z = z \times x + z \times y.$

Dem. Wynika z własności (ε) i przemienności działania $\times$.

Tw. 33. $x, y, z \varepsilon A . z \neq 0 : \supset : (x+y)/z =$
$= x/z + y/z.$

Dem. Wtedy: $(x+y)/z=(x+y)\times(/z)=$
$x\times(/z)+y\times(/z)=$
$=x/z+y/z.$

Tw. 34. $x, y, z \varepsilon A . E!(x-y) : \supset :$
$(x-y)\times z=z\times(x-y)=x\times z-y\times z$
$=z\times x - z\times y.$

Dem. Wtedy: $x-y+y=x$, więc:
$z\times(x-y)+z\times y=z\times x$, a stąd:
$z\times(x-y)=z\times x-z\times y$. Reszta widoczna.

Tw. 35. $x, y, z \varepsilon A . z \neq 0 . E!(x-y) : \supset :$
$(x-y)/z=x/z-y/z.$

Dem. Wtedy: $x-y+y=x$, stąd:
$(x-y)/z+y/z=x/z$, zatem:
$(x-y)/z=x/z-y/z.$

Zespół twierdzeń 32—35 oznaczymy przez $(\mathscr{D})$

7. Elementarne własności pól.

Jeżeli teraz $(A;+;\times)$ jest *polem*, to sytuacja zmienia się jedynie o tyle, iż $(A;+)$ jest obecnie *grupą Abelową*. Tem samem:

Tw. Dla pól zachodzą:

(1) zespół $(\mathscr{B})$ w odniesieniu do A i $+$;

(2) zespół $(\mathscr{C})$;

(3) zespół $(\mathscr{E})$, który powstanie z zespołu $(\mathscr{D})$, gdy w poprzednikach twierdzeń 34 i 35 skreślimy hipotezę: $E!(x-y)$.

Semi-pola spełniają więc: $(\mathscr{A})+(\mathscr{C})+(\mathscr{D})$,
pola: $(\mathscr{B})+(\mathscr{C})+(\mathscr{E})$.

Zespoły te oznaczymy przez $(\overline{\mathscr{D}})$ i $(\overline{\mathscr{E}})$.

8. **Izomorfja semi-pól i pól.**

Wprowadzimy znów dla semi-pól (i temsamem dla pól) następującą definicję:

Def. Semi-pola $(A; +; \times)$ i $(A'; +'; \times')$ będą *izomorfijne*, gdy *istnieje odpowiedniość doskonała* R taka, że:

(1) $D'R = A$, $Q'R = A'$.

(2) R „zachowuje" $(+)$, t. zn.:
$x, y \varepsilon A : \supset : R(x) +' R(y) = R(x + y)$.

(3) R „zachowuje" $(\times)$, t. zn.:
$x, y \varepsilon A : \supset : R(x) \times' R(y) = R(x \times y)$.

Każda taka relacja R „wykazuje" nam izomorfję.

Czytelnik, wzorując się na rozważaniach ust. 4, § 1 uzasadni sam i rozważy fakty:

(1) Jeżeli R wykazuje izomorfję semi-pól $(A; +; \times)$ i $(A'; +'; \times')$, to $R(0) = 0'$, $R(1) = 1'$.

(2) Jeżeli semi-pola $(A; +; \times)$ i $(A'; +'; \times')$ są izomorfijne, to: (α) oba są jednocześnie polami lub nie, (β) klasy A i A' są równoliczne, (γ) dla $x, y \varepsilon A$ wyniki: $x - y$ i $R(x) -' R(y)$ jednocześnie mają sens lub nie, (δ) x / y i $R(x) /' R(y)$ jednocześnie mają sens lub nie.

(3) Izomorfja semi-pól i pól jest *równoważnością*.

Rozdział IV.

Elementy Teorji Porządku.

§ 1. Teorja porządku Cantora i uogólniona.

1. Cantorowskie pojęcie porządku.

Rozważmy na początek stosunek *mniejszości* wśród liczb całkowitych $<_c$, tak jak się z nim czytelnik zapoznać może z mej Arytmetyki Liczb

Całkowitych. Ma on następujące, ważne dla nas w tej chwili własności:

(1) Jest to *relacja,* której dziedziną jest klasa N_0, przeciwdziedziną klasa liczb naturalnych N_1. Zatem jest to relacja *jednorodna,* gdyż N_0 i N_1 są jednorodne, przytem polem:

$$C(<_c) = D'(<_c) +_m G'(<_c) = N_0 + N_1 = N_0$$

jest klasa N_0[1].

(2) Relacja ta jest *spójna,* to znaczy, że, gdy $x, y \varepsilon C(<_c)$ i $x \neq y$, wówczas

$$x <_c y \text{ lub } y <_c x.$$

(3) Relacja $<_c$ jest *asymetryczna,* ponieważ $x <_c y$ wyklucza $y <_c x$.

(4) Relacja $<_c$ jest *przechodnia,* gdyż $x <_c y$ i $y <_c z$ pociągają $x <_c z$.

O relacji $<_c$ mówi się tradycyjnie, że *porządkuje ona swe pole* N_0 lub, że *wytwarza porządek w swem polu.*

J. Cantor, uogólniając fakt powyższy, stawia następującą definicję:

Def. Stosunek R nazwiemy *porządkiem* (w sensie Cantora), gdy:

(1) R jest *relacją jednorodną*[2].

(2) R jest *relacją spójną,* t. zn., że:
$x, y \varepsilon C'R \,.\, x \neq y : \supset : x R y \vee y R x.$

(3) R jest relacją *asymetryczną:*
$x R y : \supset : \sim y R x$ [„$\sim$" czyt. „*nie*"].

---

[1] Przyjmujemy tu, że N_0 jest *klasą* i że udowodniono w A. L. Całk., iż $<_c$ jest *relacją.*

[2] Warunek ten nie pochodzi od Cantora, lecz pozostaje w związku z ideami niniejszej książki.

(4) R jest relacją *przechodnią:*
$x R y . y R z : \supset : x R z.$

Tak wprowadzone pojęcie relacji porządkowej posiada swą niedogodność, na którą zwrócił uwagę dopiero Russell. Oto na czem ona polega:

O klasie A powiemy w tej teorji, że *da się ona uporządkować* (w sensie Cantora), gdy znajdzie się *porządek* R, którego polem $C'R$ będzie klasa A. Niedogodność Cantorowskiego pojęcia polega teraz na tem, że:

Tw. 1. *Żadna klasa jednostkowa nie da się uporządkować w sensie Cantora.*

Dem. Rzeczywiście: niechaj R będzie porządkiem Cantorowskim. Wtedy, albo pole $C'R$ jest klasą *pustą*, albo *nie*. Jeżeli $C'R$ nie jest klasą pustą, to relacja R choć raz zachodzi między jakiemiś elementami. Niechaj zachodzi naprz. $a R b$. Lecz wtedy $a, b \varepsilon C'R$, ale $a \neq b$, gdyż $a = b$ pociągnęłoby zachodzenie również $b R a$, co wykluczone ze względu na *asymetrję*. Temsamem pole $C'R$ posiada już conajmniej *dwa elementy* a i b *i nie jest klasą jednostkową.*

Fakt powyższy posiada też dalsze niewygodne konsekwencje. Niechaj naprz. R będzie porządkiem Cantorowskim, A klasą zawartą w polu $C'R$.

Utwórzmy relację R' powstającą przez „zwężenie R do klasy A“ t. zn. relację daną przez:

$$R' \overset{\text{df}}{=} (\hat{x}\hat{y}) \{x R y . x \varepsilon A . y \varepsilon A\}.$$

Łatwo wykazać, że:

Tw. 2. R' jest relacją *porządkową* i że *polem jej* $C'R'$ jest *klasa* A *chyba, że* A *jest klasą jednostkową,* gdyż wtedy $C'R'$ jest *klasą pustą* i R'

nie zachodzi nigdy. Podobnie wiele innych twierdzeń z teorji porządku posiada zastrzeżenia, żądające, by pewne klasy nie były jednostkowemi.

Można się uwolnić od tych niedogodności, wprowadzając, tak jak to uczyniłem w mej książce *Podstawy Ogólnej Teorji Mnogości* (1925), pojęcie „*uogólnionego porządku*".

2. **Porządek uogólniony.**

Def. Powiemy, że R jest *porządkiem w sensie uogólnionym,* gdy:

(1) R jest *relacją jednorodną.*

(2) R jest „*silnie*" *spójne*, t. zn., że gdy $x, y \varepsilon C'R$, wówczas zachodzi $x R y$ lub $y R x$.

(3) R jest „*względnie*" *asymetryczne,* t. zn., że $x R y$ i $x \neq y$ wykluczają $y R x$.

(4) R jest *przechodnie*, a więc: $x R y$ i $y R z$ pociągają $x R z$.

Def. Gdy R jest porządkiem uogólnionym, to określimy wypadek:

$$x R y \, . \, x \neq y$$

jako $x \prec_R y$, czytając „*x poprzedza y* wedle relacji R".

Tw. 1. Jeżeli R jest *porządkiem uogólnionym,* to $\prec_R$ jest *porządkiem w sensie Cantora,* przytem: $C(\prec_R) = C(R)$, o ile $C(R)$ *nie jest* klasą *jednostkową,* gdyż wtedy $C(\prec_R)$ jest *puste.*

Dem. (1) $\prec_R = R -_s (\hat{x}\hat{y})\{x \varepsilon C'R \, . \, x = y\}$, ponieważ zaś $C'R$ jest klasą, przeto $(\hat{x}\hat{y})(x, y \varepsilon C'R \, . \, . \, x = y)$ będzie *relacją* i to *jednorodną* z R, stąd też $\prec_R$ będzie również *relacją* [p. str. 18 i 19] zawartą w R.

(2) $D(\prec_R) \subset D(R)$, $Ɑ(\prec_R) \subset Ɑ(R)$, $D(R)$ i $Ɑ(R)$ są jednorodne, więc $D(\prec_R)$ i $Ɑ(\prec_R)$ również jednorodne, a zatem $\prec_R$ jest relacją jednorodną.

(3) Gdy $x, y \varepsilon C(\prec_R)$ i $x \neq y$, to $x, y \varepsilon C(R)$ i $x \neq y$, zatem zachodzi: $x R y$ i $x \neq y$ lub $y R x$ i $y \neq x$, czyli $x \prec_R y$ lub $y \prec_R x$. Relacja $\prec_R$ jest więc spójna.

(4) Gdy zachodzi $x \prec_R y$, to mamy $x R y$ i $x \neq y$, a wtedy nie zachodzi $y R x$, więc nie może też zachodzić $y \prec_R x$. Relacja $\prec_R$ jest temsamem *asymetryczna*.

(5) $x \prec_R y$ i $y \prec_R z$ dają nam: $x R y$, $y R z$, $x \neq y$ i $y \neq z$. Stąd $x R z$, $x \neq y$ i $y \neq z$; lecz gdyby $x = z$, to mielibyśmy

$$x \prec_R y \text{ i } y \prec_R x,$$

co wykluczone.

Relacja $\prec_R$ jest więc przechodnia.

(6) Jeżeli R jest relacją *pustą* t. zn., że $x R y$ *nigdy* nie zachodzi, to również $\prec_R$ nigdy nie zachodzi i temsamem $C(R) = C(\prec_R) = O_m^{(C'R)}$.

Jeżeli $C(R)$ jest klasą *jednostkową* $= \{a\}$, to zachodzi $a R a$, lecz *nie* zachodzi $a \prec_R a$ i tem samem $C(R) = \{a\}$, $C(\prec_R) = O_m$.

Jeżeli $C(R)$ nie jest, ani pustą, ani jednostkową i $x \varepsilon C(R)$, to znajdzie się y takie, że $y \varepsilon C(R)$ i $y \neq x$. Tem samem:

$$x R y \text{ lub } y R x \text{ i przytem } x \neq y,$$

a więc: $x \prec_R y$ lub $y \prec_R x$ i już stąd $x \varepsilon D(\prec_R)$ lub $x \varepsilon Ɑ(\prec_R)$, więc $x \varepsilon C(\prec_R)$. Stąd $C(R) \supset C(\prec_R)$. Z drugiej strony widocznie $C(\prec_R) \subset C(R)$, więc ostatecznie:

$$C(R) = C(\prec_R).$$

Tw. 2. Jeżeli R jest porządkiem Cantorowskim, to relacja R', dana przez:

$$x R' y \overset{\mathrm{df}}{=} x R y \vee \{x \varepsilon C(R) . x = y\}$$

jest porządkiem uogólnionym, przyczem $R = \prec_{R'}$, lecz gdy $C(R) = O_m$, to również $C(R') = O_m$.

Dowód łatwy, pozostawimy czytelnikowi.

Uw. Podobnie, jak pojęcie porządku Cantorowskiego powstaje przez uogólnienie relacji „*mniejszości*", porządek *uogólniony* naśladuje „*mniejszość lub równość*".

Tw. 3. Każda klasa *jednostkowa* da się uporządkować w sensie *uogólnionym*.

Dem. Niechaj tą klasą będzie $\{a\}$. Zauważymy, że *relacja*

$$R \overset{\mathrm{df}}{=} (\hat{x}\hat{y})(x = a . y = a)$$
$$[\text{lub } (\hat{x}\hat{y})(x \varepsilon \{a\} . y \varepsilon \{a\})].$$

jest relacją porządku uogólnionego i że $C(R) = \{a\}$. Rzeczywiście, R jest relacją jednorodną:

$$D'R = Cl'R = \{a\};$$

zachodzi ona tylko w wypadku $a R a$, więc „silna" spójność ma miejsce; warunki względnej asymetrji i przechodniości są pusto lub triwialnie spełnione; $C(R) = \{a\}$, gdyż

$$C(R) = D(R) + Cl(R) = \{a\} + \{a\} = \{a\}.$$

W teorji porządku uogólnionego nie mamy niewygodnych wyjątków w związku z klasami jednostkowemi, jak to sprawdzić może czytelnik w mej cytowanej książce.

Ponieważ w zastosowaniach teorji porządku do budowy arytmetyk klasycznych nie będziemy mieli do czynienia z porządkiem o polu jednostkowem, więc nie będziemy zastępowali pojęcia Cantorowskiego przez uogólnione i pozostaniemy tradycyjnie przy pierwszem. Wprowadzimy jeszcze dla wygody następującą umowę:

Def. System $(A; R)$ nazwiemy *systemem porządkowym* (w sensie Cantora), gdy

(1) R jest porządkiem Cantorowskim,

(2) $C(R) = A$.

Uw. Tem samem A jest *klasą!*

Umowa. Gdy R jest porządkiem (Cantorowskim), to zwrot $x R y$ zapisywać będziemy jako $x \prec_R y$ lub nawet $x \prec y$, o ile niema powodu do nieporozumień.

3. **Izomorfja porządkowa.**

Def. Porządki R i S nazwiemy *izomorfijnemi*, gdy istnieje *odpowiedniość doskonała* T między elementami $C(R)$ a elementami $C(S)$ — a więc taka, że $D(T) = C(R)$, $Q(T) = C(S)$ — która jednocześnie *„zachowuje porządek“*, t. zn., że:

$$x \prec_R y \text{ pociąga } T''x \prec_S T'y.$$

Analogicznie *systemy porządkowe* (A, R) i (B, S) nazwiemy *izomorfijnemi*, gdy R i S są *izomorfijne.*

Tw. Gdy R i S są porządkami i R iz S, to $C(R)$ i $C(S)$ są *równoliczne.*

Dem. Wykazuje to każda odpowiedniość T stwierdzająca izomorfję [p. str. 49].

Tw. *Izomorfja porządkowa* jest stosunkiem *równoważności.*

Dem. Zaznaczymy tylko krótko, że

$$T \overset{\text{df}}{=} (\hat{x}\hat{y}) \{x \varepsilon C(R) \,.\, x = y\}$$

wykazuje, iż *porządek* R jest izomorfijny ze sobą, następnie, gdy T wykazuje, że R iz S, to T^{-1} pokaże, iż S iz R, nakoniec, gdy T wykazuje, że R iz S, a zaś T', że S iz W, to $T|T'$ wykaże, iż R iz W.

Corr. Oczywiście, izomorfja między systemami porządkowemi jest też *równoważnością*.

Teorja mnogości porządkowa zajmuje się pojęciami i własnościami *porządków, niezmienniczemi* wobec *izomorfji porządkowej*. Wprowadzimy za chwilę pewną ich ilość.

4. Główne pojęcia teorji porządku.

(1) **Def.** *Najwyższym elementem klasy* A względem *porządku* R nazwiemy:

jedyny element z taki, że:

(α) $z \varepsilon A \times C(R)$,

(β) gdy $u \varepsilon A \times C(R)$ i $u \neq z$, to już $u \prec_R z$.

Oznaczymy ów element najwyższy, czyli „*maximum* klasy A względem R" przez:

$$\max_R A.$$

Formalnie:

$$\max_R A \overset{\mathrm{df}}{=} \iota_z \{z \varepsilon A \times C(R) . (u)(u \varepsilon A \times C(R) . . u \neq z : \supset : u \prec_R z)\}.$$

Analogicznie:

Def. *Najniższym elementem klasy* A *względem porządku* R nazwiemy:

jedyne z takie, że:

(α) $z \varepsilon A \times C(R)$;

(β) gdy $u \varepsilon A \times C(R)$ i $u \neq z$, to już $z \prec_R u$.

Oznaczymy go przez: $\min_R A$.

Def. $\max_R C(R)$ nazywamy krótko Max. R; $\min_R C(R)$ nazwiemy Min. R.

Uw. Tak $\max_R A$, jak i $\min_R A$ są określone przy pomocy *opisów jednostkowych.*

Tw. Gdy R jest porządkiem i $a \varepsilon C'(R)$, to klasa $\{a\}$, złożona z jedynego a posiada, tak max., jak i min. względem R i jest niem w obu wypadkach element a.

Dem. Wtedy, rzeczywiście, $a \varepsilon \{a\} \times C(R)$, a druga część definicji jest przytem „pusto spełniona".

(2) **Def.** *Następnikami elementu a w porządku R* nazwiemy zbiór:

„ogół x takich, że $a \prec_R x$".

Def. *Poprzednikami* elementu a *w porządku R* nazwiemy:

„ogół x takich, że $x \prec_R a$".

Oznaczymy te zbiory przez:

$$\text{nast}_R\text{''}\, a \text{ i } \text{poprz}_R\text{''}\, a.$$

Tw. Gdy R jest porządkiem i $a \varepsilon C'(R)$, to zbiory: $\text{nast}_R\text{''}\, a$ i $\text{poprz}_R\text{''}\, a$ są *klasami.*

Dem. Oznaczmy:

$$S \overset{\text{df}}{=} (\widehat{xy})\{y \varepsilon \{a\} . x \varepsilon C(R)\}$$
$$S' \overset{\text{df}}{=} (\widehat{xy})\{x \varepsilon \{a\} . y \varepsilon C(R)\}.$$

S i S' są *relacjami* [p. str. 18], gdyż $\{a\}$ i $C'(R)$ są klasami; przytem R, S i S' są jednorodne, gdyż wszystkie są zawarte w relacji [str. 18]:

$$(\widehat{xy})\{x \varepsilon C'(R) . y \varepsilon C'(R)\}.$$

Widać następnie, że:

$$\text{nast}_R\text{''}\, a = \text{Cl}'\{R \times_s S'\}$$
$$\text{poprz}_R\text{''}\, a = D'\{R \times_s S\}.$$

Atoli $R \times S$ i $R \times S'$ są *relacjami*, więc $\text{nast}_R\text{''}\, a$ i $\text{poprz}_R\text{''}\, a$ są *klasami.*

(3) **Def.** *Następnikiem* (bezpośrednim) *elementu* a *w porządku* R nazwiemy:

$$\mathrm{Nast}_R(a) \overset{\mathrm{df}}{=} \min_R \mathrm{nast}_R{}'' a.$$

Def. *Poprzednikiem* (bezpośrednim) *elementu* a w *porządku* R nazwiemy analogicznie:

$$\mathrm{Poprz}_R(a) \overset{\mathrm{df}}{=} \max_R \mathrm{poprz}_R{}'' a.$$

Uw. Zważywszy, że max., min., Nast. i Poprz. są określone przy pomocy definicji jednostkowej, dojdziemy do przekonania, że odnośnie do elementu a mogą one tylko wtedy mieć *sens,* gdy $a \varepsilon C(R)$, gdzie R jest danym porządkiem.

(4) **Def.** *Przekrojem porządku* R nazwiemy *parę klas* (A, B) w wypadku, gdy:

(α) $A +_m B = C(R)$,

(β) A i B są *klasami niepustemi,*

(γ) gdy $x \varepsilon A$ a $y \varepsilon B$, to stale $x \prec_R y$.

Gdy (A, B) jest przekrojem porządku R, to zachodzi jeden jedyny z czterech następujących wypadków:

(1) A *posiada* maximum względem R, lecz B *nie posiada* minimum względem R.

(2) A *nie posiada* maximum względem R, lecz B *posiada* minimum względem R.

(3) A *posiada* $\max_R A$ i B *posiada* $\min_R B$.

(4) A *nie posiada* $\max_R A$ i B *nie posiada* $\min_R B$.

Zależnie od przynależności (A, B) do jednego z tych wypadków nazwiemy nasz przekrój odpowiednio: (1) *regularnym na lewo,*

(2) *regularnym na prawo,*

(3) *skokiem,*

(4) *luką.*

(5) *Niezmienniczość* wobec izomorfji porządkowej pojęć wymienionych w (1)—(4) ma sens następujący. Niechaj R i S będą porządkami *izomorfijnemi* i niechaj T *wykazuje* ową izomorfję. Niech dalej A będzie klasą zawartą w polu $C(R)$, a elementem pola $C(R)$. Wtedy:

I. Jeżeli A posiada $\max_R A$, to T-obraz klasy A, czyli $T''A$ posiada $\max_S T''A$ i jeszcze

$$\max_S T'' A = T' \max_R A.$$

Analogicznie dla minimum, Max R i Min R.

Dem. Oznaczmy

$$B = T'' A,\ b = T' a,\ a = \max_R A.$$

Wtedy: (1) $b \varepsilon B$, gdyż $a \varepsilon A$;

(2) jeżeli $u \varepsilon B$ i $u \neq b$, to

$T^{-1}(u) \varepsilon A$, $T^{-1}(u) \neq T^{-1}(b) = a$, więc $T^{-1}(u) \prec_R a$, zatem $u \prec_S T(a) = b$;

(3) gdyby $v \varepsilon B$ i założenia: $u \varepsilon B$ i $u \neq v$ pociągały stale, że $u \prec_S v$, to przypuszczenie, iż $v \neq b$ pociągnęłoby, że $b \prec_S v$ i $v \prec_S b$. Zatem $v = b$. Stąd $b = \max_S B$.

II. Klasa $\mathrm{nast}_R'' a$ przechodzi w izomorfji w $\mathrm{nast}_S'' T(a)$. To znaczy, że:

$$\mathrm{nast}_S'' T(a) = T'' \mathrm{nast}_R'' a.$$

Dem. Wystarczy zauważyć, że $u \prec_R a$ pociąga $T(u) \prec_S T(a)$ i $v \prec_S T(a)$ pociąga, że $T^{-1}(v) \prec_R a$.

Analogicznie dla $\mathrm{poprz}_R'' A$.

III. Jeżeli a posiada $\mathrm{Nast}_R(a)$, to $b = T(a)$ posiada $\mathrm{Nast}_S(b)$ i jeszcze:

$$\mathrm{Nast}_S T(a) = T' \mathrm{Nast}_R a.$$

Dem. $\mathrm{Nast}_R\, a = \min_R \mathrm{nast}_R\, a$, lecz wtedy $\mathrm{nast}_S{}''T(a)$ posiada minimum i zachodzi:

$$\begin{aligned}\mathrm{Nast}_S{}'T(a) = \min_S \mathrm{nast}_S{}''T(a) = \min_S T'' \mathrm{nast}_R\, a = \\ = T' \min_R \mathrm{nast}_R{}''\, a = \\ = T' \mathrm{Nast}_R(a).\end{aligned}$$

Analogicznie dla $\mathrm{Poprz}_R{}'a$.

IV. Przekrój (A, B) porządku R przechodzi w *przekrój* $(T''A, T''B)$ porządku S i przekrój ten zachowuje swój charakter prawej czy lewej regularności, skoku czy luki.

Dem.

Wynika już prawie bezpośrednio z **I, II, III.**

5. **Dualizm.** Zjawisko dualizmu w teorji porządku polega na zespole faktów następujących:

Tw. 1. Jeżeli R jest *porządkiem,* to R^{-1} jest również *porządkiem.*

Dem. (1) R^{-1} jest wtedy *relacją* [str. 18] i to *jednorodną,* gdyż

$$D'R^{-1} = G'R \text{ i } G'R^{-1} = D'R, \; C(R^{-1}) = C(R).$$

(2) Gdy $x, y \,\varepsilon\, C(R^{-1})$ i $x \neq y$, to $x, y \,\varepsilon\, C(R)$ i $x \neq y$, więc zachodzi $x R y$ lub $y R x$, zatem zachodzi $y R^{-1} x$ lub $x R^{-1} y$.

(3) $x R^{-1} y$ pociąga $y R x$, co wyklucza $x R y$, a więc wyklucza też $y R^{-1} x$.

(4) $x R^{-1} y$ i $y R^{-1} z$ pociągają $z R y$ i $y R x$, więc i $z R x$ czyli $x R^{-1} z$.

Tw. 2. Jeżeli R i S są *porządkami* i $R \text{ iz } S$, to $R^{-1} \text{ iz } S^{-1}$.

Dem. Ta sama odpowiedniość T, która wykazuje, że $R \text{ iz } S$ wykaże, iż $R^{-1} \text{ iz } S^{-1}$.

Tw. 3. Jeżeli R jest porządkiem, A klasą, zawartą w $C(R)$, a elementem należącym do $C(R)$, to:

(α) $\max_{R^{-1}} A = \min_R A$, o ile $E! \min_R A$
$\min_{R^{-1}} A = \max_R A$, o ile $E! \max_R A$
$\text{Max. } R^{-1} = \text{Min. } R$, o ile $E! \text{ Min. } R$
$\text{Min. } R^{-1} = \text{Max. } R$, o ile $E! \text{ Max. } R$.

(β) $\text{nast}''_{R^{-1}} a = \text{poprz}''_R a$
$\text{poprz}''_{R^{-1}} a = \text{nast}''_R a$.

(γ) $\text{Nast}_{R^{-1}}(a) = \text{Poprz}_R(a)$, o ile $E! \text{ Poprz}_R(a)$
$\text{Poprz}_{R^{-1}}(a) = \text{Nast}_R(a)$, o ile $E! \text{ Nast}_R(a)$.

(δ) Jeżeli (A, B) jest przekrojem R, to (B, A) jest przekrojem dla R^{-1}, przyczem regularność *prawa* przechodzi w *lewą, lewa w prawą*, a *skok* i *luka* zachowują swój charakter.

Dem. Dla dowodu tych twierdzeń wystarczy uświadomić sobie tylko fakt, że $x R y \equiv y R^{-1} x$ i zapamiętać dobrze odnośne definicje.

Gdy $R \text{ iz } S$, to mówimy też, że R i S *są tego samego typu porządkowego*. Jeżeli więc R i S są tego samego typu, to R^{-1} i S^{-1} są również tego samego typu. Poznamy w dalszym ciągu wypadek, gdzie porządek R będzie tego samego typu co R^{-1}. Nie jest to jednak wypadek ogólny.

§ 2. Porządki typu ω.

6. **Określenie porządku typu** ω. Relację R nazwiemy *porządkiem typu* ω, gdy posiada ona następujące własności:

(α) R jest porządkiem.
(β) R posiada Min. R.
(γ) R nie posiada Max. R.

(δ) Gdy *klasa* A jest zawarta w $C(R)$ i *nie jest pusta,* to ma sens $\min_R A$.

(ε) Gdy $a \varepsilon C(R)$ i $a \neq \mathrm{Min.}(R)$, to a posiada $\mathrm{Poprz}_R(a)$.

Tw. Gdy R jest typu ω i $a \varepsilon C(R)$, to ma sens $\mathrm{Nast}_R(a)$.

Dem. Ponieważ R nie posiada Max. R więc $\mathrm{nast}_R{}^{\prime\prime}a$ nie tworzą klasy pustej. Atoli $\mathrm{nast}_R{}^{\prime\prime}a \subset C(R)$, więc dzięki (δ) klasa ta posiada minimum względem R. Tem samem ma sens $\min_R \mathrm{nast}_R{}^{\prime\prime}a$ czyli $\mathrm{Nast}_R(a)$.

Uw. Wszystkie *porządki* posiadające własności (δ) poprzedniej definicji zwiemy *porządkami dobremi.* Jeżeli zatem R jest porządkiem dobrym, nie posiadającym maximum, to każdy człon pola $C(R)$ posiada bezpośredni następnik.

7. **Indukcja zupełna.** Dla porządków ω[1] mamy niezmiernie ważne twierdzenie, będące uogólnieniem znanej zasady „indukcji matematycznej lub zupełnej". Brzmi ono tak:

Tw. Jeżeli R jest porządkiem typu ω i:
jakieś orzeczenie $A(x)$ *tworzące klasę*[2]:

(1) zachodzi dla $x = \mathrm{Min.}\, R$;

(2) gdyby $x \varepsilon C(R)$ i zachodziło $A(x)$, to zachodziłoby temsamem jeszcze $A(\mathrm{Nast}_R(x))$:

wtedy: $A(x)$ zachodzi dla *każdego* członu pola $C(R)$,

Dem. Rozważmy $M \overset{\mathrm{df}}{=} C(R) - (\hat{x})\, A(x)$. Klasy $C(R)$ i $(\hat{x})\, A(x)$ są jednorodne, gdyż posiadają wspólny element Min. R i temsamem M jest *klasą.*

---

[1] i tylko dla nich (p. moje „Podstawy Ogólnej Teorji Mnogości").

[2] t. zn. takie, że $(\hat{x})\, A(x)$ jest klasą.

Gdyby $A(x)$ nie zachodziło dla wszelkich x z pola $C(R)$, to M nie byłoby klasą pustą. Wtedy jednak $M \subset C(R)$, więc M posiadałoby $\min_R M$. Oznaczmy je przez s. Otóż $s \neq$ Min. R, gdyż dla Min. R własność $A(x)$ ma miejsce. Zatem s posiada $\mathrm{Poprz}_R\, s$. Ten już do M nie należy, więc mamy:

$$\mathrm{Poprz}_R\, s \in C(R) \text{ i } A\{\mathrm{Poprz}_R\, s\},$$

ale temsamem dzięki założeniu (2):

$$A\{\mathrm{Nast}_R\, \mathrm{Poprz}_R\, s\},$$

czyli $A(s)$, co nie zgadza się z przypuszczeniem. A więc M jest klasą *pustą* i temsamem $A(x)$ zachodzi dla każdego elementu z $C(R)$.

8. **Izomorfja.** Zachodzi tu twierdzenie:

Tw. Gdy R i S są porządkami typu ω, to

$$R \text{ iz } S.$$

Musimy tu pominąć dowód tego twierdzenia, gdyż przeprowadzenie go w zupełności byłoby bardzo uciążliwe. Zwykle określa się przy pomocy definicji zwrotnej odpowiedniość izomorfijną T między elementami $C(R)$ i $C(S)$ w sposób następujący: kładziemy:

(1) $T(\mathrm{Min}.\, R) = \mathrm{Min}.\, S$;

(2) gdy $x \in C(R)$, to kładziemy:

$$T\{\mathrm{Nast}_R\, x\} = \mathrm{Nast}_S\, (T(x)).$$

Zastąpienie definicji zwrotnej nominalną i przeprowadzenie dowodu, że T wykaże izomorfję jest jednak dość zawiłe.

Arytmetyka Liczb Całkowitych udowadnia, że $<$ wśród liczb całkowitych [$<_c$ mej Arytm. L. Całk.] jest właśnie porządkiem typu ω o polu $= N_0$.

Dzięki temu, podana przez nas definicja *przeliczalności* [p. str. 49] będzie równoważna z następującą:

Def. Klasa A zwie się *przeliczalną, gdy da się uporządkować* w typ ω, t. zn. gdy istnieje porządek R typu ω taki, że

$$C(R) = A.$$

Uw. Dzięki twierdzeniu o izomorfji porządki ω są rzeczywiście *jednego typu.*

§ 3. Porządki typu η.

9. Określenie.

Def. Relację R nazwiemy *porządkiem typu* η, gdy:

(α) R jest *porządkiem.*

(β) R jest *gęste,* t. zn. że, gdy tylko $x \prec_R y$, to istnieje takie z, iż

$$x \prec_R z \prec_R y\,[1].$$

(γ) R *nie posiada* minimum.

(δ) R *nie posiada* maximum.

(ε) Pole $C(R)$ jest *przeliczalne.*

Tw. 1. Gdy R jest porządkiem typu η, to żaden element jego pola *nie posiada*, ani *bezpośredniego poprzednika,* ani *bezpośredniego następnika.*

Dem. Niechaj $x \varepsilon C(R)$; gdyby naprz. miał sens $\mathrm{Nast}_R\, x$, to mielibyśmy:

$$x \prec_R \mathrm{Nast}_R(x),$$

lecz wtedy istniałoby w $C(R)$ takie z, że

$$x \prec_R z \prec_R \mathrm{Nast}_R(x),$$

co sprzeczne z ideą bezpośredniego następstwa. Analogicznie dla $\mathrm{Poprz}_R(x)$.

---

[1] gdy $a \prec b \prec c$, to mówimy, że b leży między a i c.

Tw. 2. Gdy R jest porządkiem typu η i $x \varepsilon C(R)$, to istnieją, i poprzedniki, i następniki R-owe elementu x [t. zn., że $\text{nast}_R{}''x$ i $\text{poprz}_R{}''x$ nie są klasami pustemi].

Dem. Inaczej byłoby $x = \text{Max.}\, R$ lub $\text{Min.}\, R$.

Corr. Łatwo wyniknie już z poprzedniego, że dla porządku R typu η mamy twierdzenia:

(1) gdy $x \prec_R y$, to istnieje nieskończenie wiele takich z, iż $x \prec_R z \prec_R y$;

(2) gdy $x \varepsilon C(R)$, to istnieje nieskończenie wiele takich u i nieskończenie wiele takich v, iż

$$u \prec_R x \text{ i } x \prec_R v.$$

10. **Izomorfja.** Mamy tu znowu twierdzenie:

Tw. Gdy R i S są porządkami typu η, to

$$R \,\text{iz}\, S.$$

Dem. Podaję jedynie szkic dowodu (podobnie zresztą, jak to czynią podręczniki teorji mnogości), gdyż dowód szczegółowy wymagałby wielu jeszcze dodatkowych rozważań.

Korzystając z faktu, że $C(R)$ i $C(S)$ są przeliczalne, ustawiamy je w porządki ω naprz. W i Z. Będzie wtedy: $C(R) = C(W)$, $C(S) = C(Z)$, przyczem W i Z są typu ω. Konstruujemy odpowiedniość doskonałą T, która będzie wykazywała izomorfję:

(1) Elementowi $\text{Min.}\, W$ przypisujemy jako T-obraz $\text{Min.}\, Z$.

(2) Elementowi $\text{Nast}_W \text{Min.}\, W$ przypisujemy, z pola $C(S)$ $\{= C(Z)\}$ najniższy, w sensie porządku Z element, który znajduje się w tym samym stosunku S-porządkowym do $\text{Min.}\, Z$ co $\text{Nast}_W \text{Min.}\, W$

do Min. W {to znaczy poprzedza go według S, o ile tamten poprzedza według R, względnie następuje po nim, o ile tamten leżał wyżej}.

(3) Jeżeli w ten sposób przypisano już wszystkim elementom pola $C(R)$ aż do jakiegoś elementu a odnośne T-obrazy z pola $C(S)$, to aby odszukać T' Nast$_W(a)$ postąpimy w następujący sposób: szukamy wszelkich elementów w $C(Z)$ ($= C(S)$), które znajdują się odnośnie do T-obrazów elementów poprzedzających w porządku W element a oraz do elementu $T(a)$ w takim samym S-porządkowym stosunku, w jakim to R-porządkowym stosunku znajduje się Nast$_W a$ do swych W-poprzedników. Kładziemy T' Nast$_W(a)$ = min$_Z$ tych elementów. Udowadniamy, że konstrukcja powyższa jest stale wykonalna i że w ten sposób każdy element pola $C(R)$ otrzyma swój T-obraz. Obrazy te utworzą zbiór M zawarty w $C(S)$. Udowadniamy, że T jest relacją i temsamem M jest klasą. Należy wykazać, że $M = C(S)$. Gdyby tak nie było, to niechaj b będzie Z-najniższym elementem pola $C(S)$, który nie jest T-obrazem żadnego elementu z $C(R)$. Poprzedniki jego są już T-obrazami. Bierzemy najniższy — w sensie porządku W — element m z pola $C(R)$, który jest wyższym w sensie W od wszystkich tych elementów, których T-obrazy tworzą klasę poprz$_Z$" b i który znajduje się do nich w takim R-porządkowym stosunku, w jakim S-porządkowym stosunku jest b do swych poprzedników. Wtedy, wedle zasad konstrukcji odpowiedniości T, winno być $T(m) = b$, co sprzeciwia się przypuszczeniu. Z metody konstruowania wyniknie już, że T „zachowuje porządek".

Uw. Nazwanie naszych porządków *porządkami typu* η jest uzasadnione, gdyż wszystkie one są rzeczywiście *jednego typu.*

11. **Porządki typu** $1+\eta$.

Def. Nazwiemy relację R porządkiem typu $1+\eta$, gdy:

(α) R jest *porządkiem;*
(β) R *posiada* Min. R;
(γ) R *zwężone* do klasy $C(R)$ — {Min. R}, czyli relacja:

$$(\widehat{xy})(x \prec_R y \,.\, x \neq \text{Min. } R),$$

jest *porządkiem typu* η.

Uw. Możnaby powiedzieć, że porządek typu $1+\eta$ powstaje przez postawienie *przed* wszystkiemi elementami jakiegoś porządku typu η jeszcze jednego dalszego elementu, jednorodnego z elementami pola $C(R)$. O ile przykładem typu η będzie naprz. $<$ wśród liczb wymiernych >0, to przykładem typu $1+\eta$ będzie $<$ wśród *wymiernych* $\geqq 0$.

Tw. Wszystkie porządki typu $1+\eta$ są izomorfijne między sobą.

Dem. Niechaj takiemi będą R i S. Oddzielmy od R element Min. R i od S element Min. S i utwórzmy w ten sposób porządki R' i S'. Będą one typu η, a więc izomorfijne. Niechaj T wykazuje izomorfję: R' iz S'. Utwórzmy relację:

$$\bar{T} = T +_s (\text{Min. } R\,;\, \text{Min. } S).$$

Łatwo już okażemy, że $\bar{T}$ wykazuje izomorfję między R a S.

§ 4. Porządki typu λ.

12. **Określenie.**

Def. 1. Relację R nazwiemy *porządkiem typu* λ, gdy:

(α) R jest *porządkiem.*
(β) R nie posiada Max. R.
(γ) R nie posiada Min. R.
(δ) Przekroje porządku R nie są nigdy *lukami.*
(ε) Istnieje *klasa* A, zawarta w $C(R)$ *przeliczalna* i *wszędzie gęsta* w $C(R)$, t. zn., że gdy $x \prec_R y$, to *jakieś* z należące do A leży „między“ x a y, czyli spełnia warunek: $x \prec_R z \prec_R y$.

Przykład. Okażemy później, że naprz. $<$ wśród liczb rzeczywistych względnych stanowi porządek typu λ.

Tw. 1. Gdy R jest typu λ, to R jest porządkiem *gęstym* i przekroje R nie posiadają temsamem nigdy charakteru *skoku.*

Dem. Gdy $x \prec_R y$, to dla jakiegoś z z klasy A [jak w (ε) def.] zachodzi $x \prec_R z \prec_R y$. Temsamem jednak $z \varepsilon C(R)$ i zachodzi $x \prec_R z \prec_R y$.

Gdyby przekrój (M, N) porządku R był *skokiem,* to niechaj $a = \max_R M$, $b = \min_R N$. Wtedy $a \prec_R b$, a zatem dla jakiegoś c z pola R mamy

$$a \prec_R c \prec_R b,$$

co niemożliwe, bo $M + N = C(R)$, więc

$$c \varepsilon M \text{ i } c \preceq a \text{ lub } c \varepsilon N \text{ i } b \preceq c.$$

Def. Porządek R, którego przekroje nie są, ani *skokami,* ani *lukami* zwiemy *porządkiem ciągłym.*

Uw. Wedle tej definicji porządki typu λ są porządkami ciągłemi. U niektórych autorów porządki typu λ nazywają się *„kontinuami linjowemi“*.

Tw. 2. Jeżeli R jest typu λ, A klasą jak w def. 1 (ε), R' relacją R *„zwężoną“* do A, to R' jest *porządkiem typu* η.

Dem. Z definicji mamy:

$$R' \overset{\mathrm{df}}{=} (\widehat{xy})\,\{x \prec_R y \,.\, x\,,\, y \,\varepsilon\, A\}.$$

R' jest porządkiem, lecz klasa A nie jest jednostkowa, więc $C(R) = A$ [p. str. 61]. Pole porządku R' jest więc *przeliczalne.* R' nie posiada Maximum, bo gdyby niem było naprz. s, to istniałyby w $C(R)$ takie x i y, że $s \prec_R x \prec_R y$, gdyż R nie posiada Maximum. Tem samem dla jakiegoś u z pola $C(R')$, czyli klasy A byłoby

$$s \prec_R x \prec_R u \prec_R y,$$

więc $s \prec_{R'} u$, co sprzeczne z przypuszczeniem, że $s = \mathrm{Max}.\, R'$.

Analogicznie R' nie posiada Minimum. R' jest porządkiem gęstym, gdyż skoro

$$x \prec_{R'} y,$$

to $x \prec_R y$, a zatem zachodzi

$$x \prec_R u \prec_R y$$

dla jakiegoś u z klasy A, tem samem

$$x \prec_{R'} u \prec_{R'} y:$$

Ostatecznie więc R' jest porządkiem typu η.

13. **Izomorfja.** Znowu mamy tu twierdzenie:

Tw. Gdy R i S są porządkami typu λ, to

$$R \text{ iz } S.$$

Dem. I w tym wypadku zmuszeni jesteśmy do poprzestania na szkicu dowodu.

Zaczynamy od ustalenia klasy A w polu $C(R)$ i klasy B w polu $C(S)$ o własnościach (ε) definicji porządku λ. R zwężone do A oznaczymy przez R' oraz S zwężone do B przez S'. Jak już wiemy, $R' \operatorname{iz} S'$. Ustalimy relację odpowiedniości doskonałej T' wykazującą, że $R' \operatorname{iz} S'$. Będzie tu:

$$C(R') = D(T'),\ C(S') = \mathit{Q}(T').$$

Postaramy się rozszerzyć T', w wypadku gdyby $C(R) - C(R')$ nie było puste[1], na resztę pola $C(R)$. Niechaj $a \varepsilon C(R) - C(R')$.

Tworzymy klasy M i N kładąc:

$$M \overset{\mathrm{df}}{=} (\hat{x})\{x \prec_R a\,.\,x \varepsilon A\}$$
$$N \overset{\mathrm{df}}{=} (\hat{x})\{a \prec_R x\,.\,x \varepsilon A\}.$$

Udowodnimy z łatwością, że (M, N) tworzy przekrój porządku R' o charakterze *luki*. W odpowiedniości T' przekrój ten przejdzie w przekrój *lukowy* porządku S' dany przez

$$(M', N'),$$

gdzie: $\quad M' = T''' M,\ N' = T''' N.$

Tworzymy obecnie klasy $\overline{M}$ i $\overline{N}$ w następujący sposób. Do $\overline{M}$ zaliczymy wszystkie takie x z pola $C(S)$, które poprzedzają w sensie S jakikolwiek element u z klasy M'.

Kładziemy dalej $\overline{N} = C(S) - \overline{M}$. Udowodnimy natychmiast, że $(\overline{M}, \overline{N})$ jest przekrojem dla S. Przekrój ten nie jest, ani skokiem, ani luką. Lecz $\overline{M}$ nie może posiadać $\max_S \overline{M}$, gdyż M' nie posiadało

---

[1] co rzeczywiście musi zachodzić.

$\max_{S'} \overline{M}'$ i temsamem powyżej każdego elementu z $\overline{M}$ leżą jeszcze inne, należące do $\overline{M}$. Zatem musi mieć sens $\min_S \overline{N}$.

Kładziemy teraz

$$T(a) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \min_S \overline{N}$$

o ile a należało do $C(R) - C(R')$, a nadto:

$$T(a) = T'(a),$$

gdy a należało do $C(R')$.

Dowód, że T wykazuje izomorfję żądaną nie przedstawia już trudności.

Uw. W trzech wypadkach, typów, ω, η i λ, daliśmy tylko szkicowe dowody twierdzeń o izomorfji. Dowody szczegółowe są dość żmudne, zwłaszcza, gdy uwzględnimy trudności związane z ideami logicznemi zaznaczonemi w tej książce. Dowodom tym (i pokrewnym) poświęcona będzie osobna praca.

Dzięki twierdzeniu o izomorfji nazwa „typu λ" jest usprawiedliwiona. Teorja Mnogości Kardynalna dowodzi, że pole typu λ nie może być przeliczalne. Pola tych porządków są *równoliczne* między sobą, czyli należą do tej samej „mocy", którą nazywamy *„mocą c"* lub *„mocą continuum"*.

14. **Porządki typu** $1 + \lambda$.

Def. Relacja R jest porządkiem typu $1 + \lambda$, gdy:

(α) R jest *porządkiem.*

(β) *R posiada Minimum.*

(γ) Po wydzieleniu z $C(R)$ elementu Min. R, porządek R *zwężony* do $C(R) - \{\text{Min. } R\}$ jest *typu* λ.

Tw. Gdy R i S są typu $1+\lambda$, to R iz S.

Dem. Oddzielmy Min. R od R, Min. S od S i zwężone odpowiednio porządki nazwijmy R' i S'. Wiemy już, że R' i S' są typu λ, a więc izomorfijne. Niechaj T' wykazuje izomorfję. Utwórzmy system

$$(\text{Min.}\, R;\ \text{Min.}\, S) \overset{\text{df}}{=} W$$

i relację
$$T \overset{\text{df}}{=} T' +_s W.$$

Bez trudności okażemy, że T ustala izomorfję między R i S.

Uw. Jeżeli R jest typu η lub λ, to jak łatwo widzieć, R^{-1} jest również typu η czy λ. Własność ta nie zachodzi już dla typu ω.

Rozdział V.

Systemy Liczbowe.

§ 1. Systemy liczbowe bezwzględne.

1. Określenie.

Def. *Systemem liczbowym bezwzględnym* nazwiemy system 4-członowy:

$$(A; \bigcirc; \square, \prec),$$

spełniający następujące warunki:

I. System $(A; \bigcirc; \square)$ jest *semi-polem*.

II. $(A; \prec)$ tworzy system *porządkowy*.

III. $Mod(\bigcirc) = \text{Min.}\,(\prec)$.

IV. Gdy $x, y, z \varepsilon A$ i $x \prec y$, to

$$x \bigcirc z \prec y \bigcirc z.$$

V. Działanie „$\smile$“, odwrotne do „$\bigcirc$“, jest wtedy i tylko wtedy *wykonalne* między x i y [1], gdy $y \prec x$ lub $y = x$.

Uw. W układzie liczbowym bezwzględnym A jest *klasą,* $\bigcirc$ i $\square$ są *działaniami,* $\prec$ jest *porządkiem.* W sprawie zależności wzajemnej założeń systemu liczbowego bezwzględnego odsyłam do uwag na końcu książki.

Poznamy w dalszym ciągu kilka bardzo ważnych przykładów systemów liczbowych bezwzględnych.

2. Własności systemu liczbowego bezwzględnego.

Dzięki założeniu I, system $(A; \bigcirc; \square)$ jest semipolem i tem samem mamy prawo cały zespół twierdzeń, oznaczony przez $(\mathcal{D})$ [str. 58] przyjąć tu jako ważny i uzasadniony. Założenie V pozwala nam jednak zmodyfikować hipotezy, odnoszące się do wykonalności działania „$\smile$“ {odwrotnego do „$\bigcirc$“} w ten sposób, że ilekroć żądano sensu dla wyrażenia kształtu $x \smile y$, zastąpimy to żądanie warunkiem: „$y \prec x$ lub $y = x$“, co zapiszemy krótko: $y \preceq x$ W ten sposób zmodyfikowany zespół $(\mathcal{D})$ nazwiemy $(\mathcal{D}')$.

Niezależnie od twierdzeń tego zespołu mamy tu jeszcze inne, właściwe dopiero systemom liczbowym bezwzględnym fakty. Uzasadnimy szczególnie ważną grupę takich twierdzeń, przyczem pisać będziemy dla prostoty:

$$+, -, \times, /, <, 0, 1$$

[1] t. zn. $x \smile y$ ma sens.

zamiast:

$$\bigcirc,\ \cup,\ \square,\ \sqcup,\ \prec,\ Mod(\bigcirc),\ Mod(\square).$$

Wprowadzimy również umowy:

Def. $x \succ y \overset{\text{df}}{=} y \prec x$

$x > y \overset{\text{df}}{=} y < x.$

Tw. 1. $x \varepsilon A . x \neq 0 : \supset : 0 < x.$

Dem. Musi być:

$$0 < x \text{ lub } x < 0, \text{ lecz } 0 = \text{Min.}(<).$$

Tw. 2. Gdy $x, y, z \varepsilon A$, to *jedna* i *tylko jedna* z możliwości:

$$x = y,\ x < y,\ x > y$$

zachodzi. [Zasada Trichotomji].

Dem. Wynika stąd, że $<$ jest *porządkiem*.

Tw. 3. $x < y . y < z : \supset : x < z$

$x < y . y = z : \supset : x < z$

$x = y . y < z : \supset : x < z$

$x > y . y > z : \supset : x > z$

$x > y . y = z : \supset : x > z$

$x = y . y > z : \supset : x > z.$

Dem. Z własności II i definicji „$>$".

Uw. Gdy $x < y$, to temsamem $x, y \varepsilon A$, więc tej ostatniej hipotezy już nie wymieniamy.

Tw. 4. $z \varepsilon A . x < y : \supset : x + z < y + z$

$z \varepsilon A . x > y : \supset : x + z > y + z.$

Dem. Jest to założenie IV łącznie z definicją „$>$".

Tw. 5. $x + z < y + z : \supset : x < y$

$x + z > y + z : \supset : x > y.$

Dem. Przez odwrócenie twierdzeń 4 łącznie z tem, że $x, y, z \varepsilon A . x = y : \supset : x + z = y + z.$

Tw. 6. $x, y \varepsilon A . y \neq 0 : \supset : x + y > x.$

Dem. Wynika z tw. 4, gdyż wtedy $y > 0.$

Tw. 7. $x < y \,.\, z < u : \supset : x + z < y + u.$

Dem. Wtedy

$$x + z < y + z = z + y < u + y = y + u,$$

więc: $x + z < y + u.$

Corr. $x < y \,.\, z = u : \supset : x + z < y + u$

$$x \leqq y \,.\, z \leqq y : \supset : x + z \leqq y + u$$

i analogiczne.

Tw. 8. $x \leqq y \quad : \supset : E!\,(y - x)$

$$E!\,(y - x) : \supset : x \leqq y.$$

Dem. Jest to założenie V.

Tw. 9. $x < y \,.\, x \geqq z : \supset : x - z < y - z.$

Dem. Wtedy $y > z$ i mają sens $x - z$ oraz $y - z$. Gdyby: $x - z = y - z$, to mielibyśmy $x = y$; $x - z > y - z$ dałoby: $z + (x - z) > z + (y - z)$, czyli $x > y$.

Tw. 10. $x < y \,.\, y \leqq z : \supset : z - x > z - y.$

Dem. Wtedy $x < z$, $y \leqq z$, więc mają sens $z - x$ i $z - y$. Gdyby $z - x = z - y$, to mielibyśmy $x = y$. Przypuszczenie, że $z - x < z - y$ dałoby:

$$z = x + (z - x) < x + (z - y),$$

$$z + y < x + (z - y) + y = x + [(z - y) + y] =$$
$$= x + z,$$

skąd: $y < x$, wbrew założeniu.

Tw. 11. $x < y \,.\, z > 0 : \supset : z \times x < z \times y.$

Dem. Wtedy $y - x$ ma sens, więc [str. 58, tw. 34].

$$z \times (y - x) = z \times y - z \times x,$$

$$z \neq 0, \quad y - x \neq 0, \quad \text{więc:} \quad z \times y - z \times x \neq 0,$$

skąd: $z \times y \geqq z \times x$,

atoli: $z \times y = z \times x$ i $z \neq 0$ dałoby $x = y$.

Tw. 12. $z \times x < z \times y : \supset : x < y \,.\, z \neq 0.$

Dem. Gdyż $z = 0$ dałoby $z \times x = z \times y$, stąd też $1/z$ ma sens i jest $\neq 0$ (str. 57, Dem. tw. 31), więc: $1/z > 0$, a zatem:

$$(1/z)\times(z\times x) < (1/z)\times(z\times y),$$

czyli: $$x < y.$$

Corr. Analogicznie:

$$x > y \,.\, z > 0 : \supset : z\times x > z\times y$$
$$z\times x > z\times y : \supset : x > y \,.\, z \neq 0.$$

Tw. 13. $0 < x < y : \supset : 1/x > 1/y.$

Dem. Wtedy $1/x$ i $1/y$ mają sens [str. 56, tw. 27] i mamy $1/x > 0$, $1/y > 0$, skąd:

$$1 = (1/x)\times x < (1/x)\times y$$
$$1/y < (1/x)\times y\times(1/y) = 1/x.$$

Tw. 14. $x < y \,.\, z > 0 : \supset : x/z < y/z.$

Dem. x/z, y/z, $1/z$ mają sens i $1/z > 0$, stąd $$x\times(1/z) < y\times(1/z)$$ czyli $$x/z < y/z.$$

Tw. 15. $x > 0 \,.\, 0 < y < z : \supset : x/z < x/y.$

Dem. Wtedy: $1/z < 1/y$, skąd:

$$x\times(1/z) < x\times(1/y),$$

czyli: $$x/z < x/y.$$

Tw. 16. $x/y < u/v : \supset : x\times v < y\times u.$

Dem. Wtedy $y > 0$, $v > 0$, więc:

$$x = (x/y)\times y < (u/v)\times y$$
$$x\times v < (u/v)\times y\times v = y\times(u/v)\times v$$
$$= y\times u,$$

a zatem: $$x\times v < y\times u.$$

Tw. 17. $x\times v < y\times u \,.\, y \neq 0,\ v \neq 0 : \supset :$
$$x/y < u/v.$$

Dem. Wtedy: $y>0$, $u>0$, $1/y>0$, $1/v>0$ i stąd: $x=(x\times v)\times(1/v)<(y\times u)\times(1/v)$, a zatem:

$$\begin{aligned} x/y = x\times(1/y) &< (y\times u)\times(1/v)\times(1/y) \\ &= (1/v)\times(y\times u)\times(1/y) = \\ &= (1/v)\times u = u/v. \end{aligned}$$

Corr. Analogicznie:

$$x/y>u/v:\supset:x\times v>y\times u$$
$$x\times v>y\times u\,.\,y\neq 0\,.\,v\neq 0:\supset:x/y>u/v$$
$$x/y=u/v:\supset:x\times v=y\times u$$
$$x\times v=y\times u\,.\,y\neq 0\,.\,v\neq 0:\supset x/y=u/v.$$

Tw. 18. Oznaczywszy przez 2 element $1+1$, mamy:

$$x<y:\supset:x<(x+y)/2<y$$

[Twierdzenie o średniej arytmetycznej].

Dem.

$1>0$ więc $2=1+1>0$ i $(x+y)/2$ ma sens.
$2\times x=(1+1)\times x=x+x<x+y<y+y=2\times y$,
skąd: $x<(x+y)/2<y$.

Zespół twierdzeń $(\overline{\mathcal{D}}')$ łącznie z twierdzeniami 1—18 oznaczymy przez $\mathcal{F}$.

3. **Izomorfja.**

Def. Powiemy, że systemy liczbowe bezwzględne: $(A;+;\times;<)$ i $(B;+';\times';<')$ są *izomorfijne,* gdy istnieje odpowiedniość doskonała T między elementami A i B, która „zachowuje“ działania $+$, $\times$ i porządek $<$, to znaczy taka, że:

(1) $D(T)=A$, $C\!I(T)=B$;

(2) gdy $x,y\,\varepsilon\,A$, to:

$$T(x) +' T(y) = T(x+y)$$
$$T(x) \times' T(y) = T(x \times y);$$

(3) $\quad x < y : \supset : T(x) <' T(y).$

Czytelnik uzasadni z łatwością, że izomorfja „zachowuje" moduły 0 i 1, „różnicę" $(x - y)$ i „iloraz" (x / y) oraz, że jest *równoważnością*.

Nie wszystkie systemy liczbowe bezwzględne są izomorfijne między sobą, jak się o tem później przekonamy.

§ 2. Systemy liczbowe względne.

4. **Określenie.**

Def. *Systemem liczbowym względnym* nazwiemy system cztero-członowy:

$$(A ; \bigcirc ; \square ; \prec),$$

o ile:

I. $(A ; \bigcirc ; \square)$ jest *polem*,

II. $(A ; \prec)$ jest *porządkiem*.

III. Gdy $x, y, z \varepsilon A$ i $x \prec y$, to

$$x \bigcirc z \prec y \bigcirc z.$$

IV. Gdy $Mod(\bigcirc) \prec x$ i $Mod(\bigcirc) \prec y$, to

$$Mod(\bigcirc) \prec x \square b.$$

Przykłady systemów liczbowych względnych poznamy w dalszym ciągu.

5. **Własności systemu liczbowego względnego.**

Przedewszystkiem, dzięki założeniu I, które powiada, że w systemie takim $(A ; \bigcirc ; \square ; \prec)$ system częściowy $(A ; \bigcirc ; \square)$ jest *polem*, mamy prawo przejąć z teorji pól cały zespół twierdzeń, który oznaczyliśmy przez $(\overline{\mathcal{E}})$[1]. Zespół ten przejmujemy tu bez modyfikacji. Zestawimy obecnie dalszą grupę faktów właściwych systemom liczbowym względnym. Rozważając taki system pisać będziemy znów dla ułatwienia:

$$+,\ -,\ \times,\ /,\ 0,\ 1$$

zamiast: $\bigcirc$, $\cup$, $\square$, $\sqcup$, $Mod(\bigcirc)$, $Mod(\square)$, jakoteż korzystamy z umów:

$$x \succ y \overset{\mathrm{df}}{=} y \prec x;\quad x > y \overset{\mathrm{df}}{=} y < x.$$

Prócz tego piszemy:

$$x \leq y \text{ zamiast „} x < y \text{ lub } x = y\text{“}$$
$$x \geq y \text{ zamiast „} x > y \text{ lub } x = y\text{“}$$

i oznaczymy przez $\bar{x}$ element $0 - x$ czyli „symetryczny do x“, a przez $/x$ element $1/x$ „odwrotny“ do x. Pamiętamy też (str. 45), że dla $x, y \varepsilon A$ mamy $x - y = x + \bar{y}$ oraz, o ile $y \neq 0$, $x/y = x \times (/y)$, (str. 56).

Tw. 1. Gdy $x, y \varepsilon A$, to jedna i tylko jedna z następujących okoliczności zachodzi:

$$x = y,\ x < y,\ x > y$$

[Zasada Trichotomji].

Dem. Wynika stąd, że $<$ jest *porządkiem*.

Tw. 2.
$$\begin{aligned}
&x < y \,.\, y < z : \supset : x < z\\
&x < y \,.\, y = z : \supset : x < z\\
&x = y \,.\, y < z : \supset : x < z\\
&x > y \,.\, y > z : \supset : x > z\\
&x > y \,.\, y = z : \supset : x > z\\
&x = y \,.\, y > z : \supset : x > z.
\end{aligned}$$

Dem. Ponieważ $<$ jest *porządkiem*.

Tw. 3. $x < y \,.\, z \varepsilon A : \supset x + z < y + z.$

---

[1] p. str. 58.

Dem. Jest to założenie III.

Corr. $x + z < y + z :\supset: x < y$

$x > y \,.\, z \varepsilon A :\supset: x + z > y + z$

$x + z > y + z :\supset: x > y.$

Tw. 4. $x < y \,.\, z \varepsilon A :\supset: x - z < y - z.$

Dem. Gdyż $x - z = x + \bar{z} < y + \bar{z} = y - z.$

Corr. $x > y \,.\, z \varepsilon A :\supset: x - z > y - z.$

Tw. 5. $x < y :\supset \bar{x} > \bar{y}.$

Dem. Wtedy:

$0 = x + \bar{x} < y + \bar{x},\ \bar{y} = 0 + \bar{y} < y + \bar{x} + \bar{y}$
$= \bar{x} + (y + \bar{y}) = \bar{x} + 0 = \bar{x}$, więc $\bar{y} < \bar{x}$,
czyli $\bar{x} > \bar{y}.$

Corr. $x < y \,.\, z \varepsilon A :\supset: z - x > z - y.$

Tw. 6. $x < y \,.\, u < v :\supset: x + u < y + v.$

Dem. $x + u < y + u = u + y < v + y =$
$= y + v,$
więc $x + u < y + v.$

Tw. 7. $x > 0 \,.\, y > 0 :\supset: x \times y > 0.$

Dem. Jest to założenie IV.

Tw. 8. $x > 0 \,.\, y < 0 :\supset: x \times y < 0.$

Dem. Wtedy:

$x > 0 \,.\, \bar{y} > \bar{0} = 0 - 0 = 0$, więc $x \times \bar{y} > 0.$

Lecz $x \times \bar{y} = x \times (0 - y) = x \times 0 - x \times y = 0 - x \times y$
$= \overline{x \times y}$, więc $\overline{x \times y} > 0$, skąd $x \times y < \bar{0} = 0.$

Tw. 9. $x < 0 \,.\, y > 0 :\supset: x \times y < 0.$

Dem. Wtedy $x \times y = y \times x < 0$ dzięki tw. 8.

Tw. 10. $x < 0 \,.\, y < 0 :\supset: x \times y > 0.$

Dem. Wtedy $\bar{x} > 0,\ \bar{y} > 0,\ \bar{x} \times \bar{y} > 0$, więc $(0 - x) \times \bar{y} = 0 \times \bar{y} - x \times \bar{y} = \overline{x \times \bar{y}}$, lecz $x < 0,\ \bar{y} > 0$, więc $x \times \bar{y} < 0$, skąd $x \times y > 0.$

Uw. Twierdzenia 7—10 odpowiadają t. zw.

„regule znaków dla mnożenia" w arytmetyce liczb względnych.

Tw. 11. $x < y \,.\, z > 0 : \supset : x \times z < y \times z$.

Dem. Wtedy: $0 = x + \bar{x} < y + \bar{x}$ i $z > 0$, więc:

$$0 < (y + \bar{x}) \times z = y \times z + \bar{x} \times z = y \times z + \overline{x \times z},$$

zatem

$$x \times z = 0 + (x \times z) < y \times z + [\overline{x \times z} + x \times z]$$
$$= y \times z + 0 = y \times z.$$

Corr. $x > y \,.\, z > 0 : \supset : x \times z > y \times z$.

Tw. 12. $x < y \,.\, z < 0 : \supset : x \times z > y \times z$.

Dem. Wtedy $\bar{z} > 0$, więc: $x \times \bar{z} < y \times \bar{z}$, skąd

$$x \times z = \overline{x \times \bar{z}} > \overline{y \times \bar{z}} = y \times z.$$

Tw. 13. $0 < 1$.

Dem. Już z teorji pól wiemy, że $0 \neq 1$, więc $0 < 1$ lub $1 < 0$. Atoli $1 < 0$, pociągnęłoby, że $1 < 0$ i $1 < 0$, więc $1 = 1 \times 1 > 0$ wedle tw. 10, co prowadziłoby do sprzeczności.

Tw. 14. Porządek „$<$" nie posiada Maximum.

Dem. Gdyby niem było naprz. a, to skoro $1 > 0$, mamy: $1 + a > 0 + a = a$, co stanowi sprzeczność.

Tw. 15. Porządek „$<$" nie posiada Minimum.

Dem. Gdyby niem było b, to $1 > 0$, więc $\bar{1} < 0$, skąd: $b - 1 = b + \bar{1} < b$, co stanowi sprzeczność.

Tw. 16. Oznaczmy przez 2 element $1 + 1$. Wtedy: $x < y : \supset : x < (x + y) / 2 < y$.

Dem. $1 > 0$, więc $2 = 1 + 1 > 0$, zatem $2 \neq 0$ i $(x + y) / 2$ ma sens.

$$2 \times x = 1 \times x + 1 \times x = x + x < x + y < y + y$$
$$= 1 \times y + 1 \times y = 2 \times y \text{ i } 2 > 0, \text{ stąd:}$$

$(/2) > 0$, gdyż $2 \times (/2) = 1 > 0$; ostatecznie:
$x = (/2) \times 2 \times x < (x+y)/2 < (/2) \times (2 \times y) = y$.

Tw. 17. Porządek „$<$" jest porządkiem *gęstym* i temsamem jego przekroje nie mają nigdy charakteru *skoków*.

Dem. Gdy $x < y$, to $(x+y)/2 \,\varepsilon\, A$ i mamy:

$$x < (x+y)/2 < y.$$

Tw. 18. $x > 0 : \supset : /x > 0$.

Dem. Gdyż wtedy $x \neq 0$, więc $x \times (/x) = 1 > 0$, co jedynie możliwe, gdy $/x > 0$.

Corr. $x < 0 : \supset : /x < 0$.

Tw. 19. $x < y \,.\, z > 0 : \supset : x/z < y/z$,

Dem. Wtedy:

$$z \neq 0,\quad /z > 0,\quad x/z = x \times (/z) < y \times (/z) = \\ = y/z.$$

Tw. 20. $0 < x < y : \supset : (/x) > (/y)$.

Dem. Wtedy $/x > 0$, $/y > 0$, więc:

$$0 < 1 = x \times (/x) < y \times (/x),$$
$$/y = 1 \times (/y) < y \times (/x) \times (/y) = \\ = (/x) \times y \times (/y) = /x, \text{ skąd } (/x) > (/y).$$

Tw. 21. $0 < x < y \,.\, z > 0 : \supset : z/x > z/y$.

Dem. Wtedy:

$$z/x = z \times (/x) > z \times (/y) = z/y.$$

Tw. 22.
$$x > 0 \,.\, y > 0 : \supset : x/y > 0$$
$$x > 0 \,.\, y < 0 : \supset : x/y < 0$$
$$x < 0 \,.\, y > 0 : \supset : x/y < 0$$
$$x < 0 \,.\, y < 0 : \supset : x/y > 0$$

Dem. Wystarczy zauważyć, że

$$y > 0 : \supset : /y > 0,\quad y < 0 : \supset : /y < 0$$

i że wtedy $x/y = x \times (/y)$, oraz zastosować tw. 7—10.

Uw. Tw. 22 stanowi t. zw. „regułę znaków“ dla „dzielenia“ {„odwrotności działania $\times$“ (drugiego) systemu liczbowego względnego}.

Def. *Bezwzględną wartością* $|x|$ elementu x nazwiemy: (1) x, gdy $x \geq 0$.
(2) $\bar{x}$, gdy $x < 0$.

Dokładniej:

$$|x| \overset{\mathrm{df}}{=} (\iota z)\{(x \geq 0 \,.\, z = x) \vee (x < 0 \,.\, z = \bar{x})\}.$$

Tw. 23. $x \,\varepsilon\, A : \supset : E!\,|x| \,.\, |x| \,\varepsilon\, A$.

Dem. Natychmiastowa z definicji.

Tw. 24. $|0| = 0$.

Dem. Gdyż $0 \geq 0$.

Corr. $x \leq 0 : \supset : |x| = \bar{x}$.

Tw. 25. $x \,\varepsilon\, A : \supset : |x| \geq 0$.

Dem. Gdyż, albo $x \geq 0$, to $|x| = x \geq 0$, lub $x < 0$, więc $|x| = \bar{x} > 0$.

Tw. 26. $x \,\varepsilon\, A : \supset : ||x|| = |x|$.

Dem. Gdyż wtedy $|x| \,\varepsilon\, A$ i $|x| \geq 0$.

Tw. 27. $x, y \,\varepsilon\, A : \supset : |x \times y| = |x| \times |y|$.

Dem. Wystarczy rozważyć wszelkie kombinacje wypadków $x \gtreqless 0$, $y \gtreqless 0$, zastosować twierdzenia 7—10 oraz twierdzenie o „mnożeniu“ przez „*zero*“.

Tw. 28. $x \,.\, y \,\varepsilon\, A \,.\, y \neq 0 : \supset : |x / y| = |x| / |y|$.

Dem. Wystarczy zauważyć, że dzięki tw. 18 i Corr. $|/ y| = / |y|$ dla $y \neq 0$ oraz, że $x / y = x \times (/ y)$, o ile $y \neq 0$. Wniosek otrzymamy wtedy z tw. 27.

Tw. 29. $x - y \geq 0 : \supset : x \geq y$

$x \geq y : \supset x - y \geq 0$.

Dem.

1. $x - y \geqq 0 : \supset : x = (x - y) + y \geqq 0 + y = y.$
2. $x \geqq y : \supset : x - y = x + \bar{y} \geqq y + \bar{y} = 0.$

Corr. $x - y \leqq 0 : \supset : x \leqq y$
$x \leqq y : \supset : x - y \leqq 0.$

Tw. 30. $y < |y| : \supset : y < 0$
$y < 0 \ : \supset : y < |y|.$

Dem. 1. Gdyż $y \geqq 0$ dałoby $y = |y|$.
2. Wtedy $|y| = \bar{y} > 0$, więc $y < 0 < \bar{y}$.

Tw. 31. $x \geqq 0 \,.\, y \geqq 0 : \supset : |x + y| = x + y =$
$= |x| + |y|.$

Dem. Wtedy $|x| = x$, $|y| = y$, $x + y \geqq 0$, więc:
$|x + y| = x + y = |x| + |y|.$

Tw. 32. $x \leqq 0 \,.\, y \leqq 0 : \supset : x + y = \overline{|\overline{x + y}|} =$
$= \overline{|\bar{x}| + |\bar{y}|} = \overline{\bar{x} + \bar{y}}.$
$|x + y| = |x| + |y|.$

Dem. Wtedy:
1. $\bar{x} = |x|$, $\bar{y} = |y|$, $x + y \leqq 0$, $|x + y| = \overline{x + y} =$
$= 0 - (x + y) = 0 - x - y = \bar{x} - y = \bar{x} + \bar{y}.$
2. $x + y = \overline{|\overline{x + y}|} = \overline{\bar{x} + \bar{y}} = \bar{\bar{x}} + \bar{\bar{y}} = \overline{|x|} + \overline{|y|}.$

Tw. 33. $x \geqq 0 \,.\, y < 0 \,.\, |x| \geqq |y| : \supset : x + y =$
$= |x| - |y| \geqq 0 \,.\, |x + y| = |x| - |y|.$

Dem.
Wtedy: $x + y = x + \bar{\bar{y}} = x - \bar{y} = x - |y|$;
$x = |x| \geqq |y|$, więc $x - |y| \geqq 0$, stąd:
$x + y \geqq 0$, więc $|x + y| = x + y = x - |y| =$
$= |x| - |y|.$

Tw. 34. $x \geqq 0 \,.\, y < 0 \,.\, |x| < |y| : \supset : x + y =$
$= \overline{|y| - |x|} < 0,$
$|x + y| = |y| - |x|.$

Dem. Wtedy:

$$x = |x|,\ \overline{y} = |y|,\ x + y = |x| + \overline{\overline{y}} =$$
$$= |x| - \overline{y} = |x| - |y| < 0, \text{ więc:}$$

$x + y = \overline{|y| - |x|}$, skoro ogólnie $\overline{a-b} = b - a$ jak łatwo zauważyć.

Ponieważ $x + y < 0$, więc $|x + y| = \overline{x + y} =$
$$= \overline{\overline{|y| - |x|}} = |y| - |x|.$$

Tw. 35. $x < 0 \,.\, y \geqq 0 \,.\, |x| \geqq |y| : \supset : x + y =$
$$= \overline{|x| - |y|} \leqq 0 \,.\, |x + y| = |x| - |y|.$$

Tw. 36. $x < 0 \,.\, y \geqq 0 \,.\, |x| < |y| : \supset : x + y =$
$$= |y| - |x| \geqq 0 \,.\, |x + y| = |y| - |x|.$$

Dem. 35 i 36: Wystarczy w tw. 33 i 34 zamienić role elementów x i y między sobą.

Uw. Twierdzenia 31—36 stanowią prawidła „dodawania" w systemie liczbowym względnym.

Tw. 37. $x, y \varepsilon A : \supset : |x + y| \leqq |x| + |y|$.

Dem. Wystarczy prześledzić uważnie tw. 31—36 i zauważyć, że $|x| + |y| \leqq |x| + |y|$ oraz
$$|x| - |y| \leqq |x| + |y|.$$

Tw. 38. $x, y \varepsilon A : \supset : |x - y| \geqq |x| - |y|$,

a nawet: $\quad |x - y| \geqq \big| |x| - |y| \big|$.

Dem. Wtedy:
$$|x| = |(x - y) + y| \leqq |x - y| + |y|,$$
skąd: $\quad |x| - |y| \leqq |x - y| + |y| - |y| = |x - y|$.

Jeżeli nawet $|x| - |y| < 0$, to $|x| < |y|$, lecz wtedy
$$|x - y| = |\overline{x - y}| = |y - x| \geqq |y| - |x| =$$
$$= \overline{|x| - |y|} = \big| |x| - |y| \big|.$$

Zespół twierdzeń 1—38 łącznie z twierdzeniami zespołu $(\mathcal{C}')$ oznaczymy przez $(\mathcal{G}')$.

6. **Izomorfja.** Izomorfję systemów liczbowych względnych określimy tak samo jak to uczyniliśmy w § 1, ust. 3. Dowiemy się w dalszym ciągu tej książki, że nie wszystkie systemy liczbowe względne są izomorfijne między sobą.

§ 3. Elementy całkowite systemu liczbowego.

7. **Określenie.** Zadajmy sobie dowolnie system liczbowy $(A; +; \times; <)$ *bezwzględny* lub *względny*. Starajmy się z klasy A wyłączyć elementy: $0, 1$ oraz wszystkie te, które otrzymalibyśmy z elementu 0 przez kolejne „dodawanie" elementu 1, a więc takie jak:

$$1 = 0 + 1,\ 1 + 1,\ 1 + 1 + 1,\quad \text{i t. d.}$$

Aby to uczynić, postąpimy w następujący sposób:

Def. 1. Nazwiemy *klasę* B klasą „gatunku $(\mathfrak{M})$"

gdy: (1) $B \subset A$,
(2) $0 \varepsilon B$,
(3) $x \varepsilon B : \supset : x + 1 \varepsilon B$.

Przyjmiemy bez dowodu, że „gatunek klas $(\mathfrak{M})$" jest *rodziną klas.* Rodzina ta jest *jednorodna*, gdyż klasy należące do niej są wszystkie zawarte w klasie A. Rodzina ta *nie jest pusta,* gdyż choćby A jest klasą gatunku $\mathfrak{M}$. Mamy zatem prawo twierdzić [str. 14], że *wspólna część* czyli *iloczyn* klas rodziny $(\mathfrak{M})$ jest *klasą, zawartą* w A. Oznaczymy tę klasę przez $A N_0$.

Def. 2. Powyżej określoną klasę $A N_0$ nazwiemy klasą *elementów całkowitych* (bezwzględnych) naszego *systemu liczbowego.*

Uzasadnimy teraz pięć charakterystycznych twierdzeń:

Tw. 1. $0 \varepsilon AN_0$.

Dem. Gdyż 0 należało do każdej klasy rodziny (**M**), więc weszło i do iloczynu AN_0.

Tw. 2. Gdy x należy do AN_0, to $x+1$ również należy do AN_0:

$$x \varepsilon AN_0 : \supset : x+1 \varepsilon AN_0.$$

Dem. Jeżeli $x \varepsilon AN_0$, to widocznie x należało do *każdej* klasy rodziny **M**, temsamem $x+1$ należało (z definicji) do *każdej* klasy tej rodziny, a więc znalazło się w ich iloczynie AN_0.

Tw. 3. Gdy $x, y \varepsilon AN_0$ i $x+1=y+1$, to $x=y$.

Dem. Gdyż wtedy $x, y \varepsilon A$, więc wniosek wypływa z własności systemu liczbowego.

Tw. 4. Gdy $x \varepsilon AN_0$, to $x+1 \neq 0$.

Dem. Gdyż wtedy $x \varepsilon A$, $1>0$; więc $x+1>0$ i temsamem $x+1 \neq 0$.

Tw. 5. [Zasada Indukcji matematycznej].

Gdy $W(x)$ jest warunkiem *tworzącym klasę*, którą oznaczymy naprz. przez K

$$K \overset{\mathrm{df}}{=} (\hat{x})\, W(x),$$

i spełnione są *dwie* przesłanki:

(1) $O \varepsilon K$, czyli że $W(0)$ zachodzi.

(2) Ilekroć $x \varepsilon AN_0$ i $x \varepsilon K$, to $x+1 \varepsilon K$,

a więc inaczej: $x \varepsilon AN_0 . W(x) : \supset : W(x+1)$:
wtedy: (3) $AN_0 \subset K$, a więc *każdy element całkowity* spełnia warunek W.

Dem. Oznaczmy przez B iloczyn $AN_0 \times K$. Będzie, to *klasa*, gdyż klasy AN_0 i K posiadając wspólny element 0 są *jednorodne* [str. 13].

Otóż: (1) $O \varepsilon B$, (2) $x \varepsilon B : \supset : x + 1 \varepsilon B$, zatem B jest klasą z rodziny $\mathbf{M}$ i temsamem:

$$AN_0 \subset B \subset AN_0.$$

Stąd: $AN_0 = B$, a więc $AN_0 \subset K$.

Jeżeli teraz w systemie aksjomatycznym Peany dla *Arytmetyki Liczb Całkowitych*[1] *podstawimy za*

O, N_0, seq x *odpowiednio:*

$O, AN_0, x+1,$

to twierdzenia 1—5 *stwierdzą zachodzenie postulatów tego systemu.* Temsamem:

Tw. 6. *Do elementów całkowitych systemu liczbowego stosują się wszystkie twierdzenia Arytmetyki Liczb Całkowitych.*

Należy tu zwrócić uwagę na kwestję następującą: W Arytm. Liczb. Całk. wprowadzono działania $+_c$ i $\times_c$ drogą definicyj zwrotnych. Definicje te brzmiałyby w naszym wypadku tak[2]:

(1) $a \varepsilon AN_0 : \supset : a +_c 0 \overset{\mathrm{df}}{=} a,$

(2) $a, b \varepsilon AN_0 : \supset : a +_c (b+1) \overset{\mathrm{df}}{=} (a +_c b) + 1$

dla „dodawania całkowitego $(+_c)$" oraz:

(1) $a \varepsilon AN_0 : \supset : a \times_c 0 \overset{\mathrm{df}}{=} 0,$

(2) $a, b \varepsilon AN_0 : \supset : a \times_c \{b+1\} = \{a \times_c b\} +_c a$

dla „mnożenia całkowitego $(\times_c)$".

Rozważmy najpierw pierwszą z tych definicyj. Otóż, będziemy mieli:

(1') $a \varepsilon AN_0 : \supset : a +_c 0 = a + 0$

(2') $a, b \varepsilon AN_0 : \supset : a +_c (b+1) = (a +_c b) + 1.$

---

[1] p. moja Arytmetyka Liczb Całkowitych. Kraków 1932.

[2] p. moja Arytm. L. Całk. str. 15 i 53.

Dzięki twierdzeniu 5 (zasadzie indukcji) będziemy mogli zawnioskować, że dla $a, b \varepsilon AN_0$ będzie: $a +_c b = a + b$, gdyż

(1) dla $b = 0$ twierdzenie wedle (1′) słuszne;
(2) jeżeli $a, b \varepsilon AN_0$ i $a +_c b = a + b$, to jeszcze wedle (2′):

$$a +_c (b+1) = (a+b) + 1 = a + (b+1).$$

Zatem, gdy tylko a i b należą do AN_0, to twierdzenie słuszne.

Przechodząc teraz do drugiej definicji widzimy, że: (1″): $a \varepsilon AN_0 : \supset : a \times_c 0 = a \times 0$
(2″): $a, b \varepsilon AN_0 : \supset : a \times_c (b+1) = a \times_c b + a.$

Zatem, gdy $a, b \varepsilon AN_0$, to:
dla $b = 0$ mamy $a \times_c 0 = a \times 0$;
gdyby $a, b \varepsilon AN_0$ i było $a \times_c b = a \times b$, to jeszcze:

$$a \times_c (b+1) = a \times b + a = a \times b + a \times 1 = \\ = a \times (b+1).$$

Stąd, gdy tylko $a, b \varepsilon AN_0$, mieć będziemy:

$$a \times_c b = a \times b.$$

Widzimy więc, że w obrębie elementów całkowitych, czyli klasy AN_0 działania $+$ i $+_c$ oraz $\times$ i $\times_c$ dają te same wyniki.

Działania odwrotne $-_c$ i $/_c$ określono w Ar. L. C.[1] jako odwrotne do $+_c$ i $\times_c$, więc w obrębie AN_0 dadzą one te same wyniki, co „—" i „/".

Zauważymy jeszcze, że „$<_c$" określono tak[2], iż $a <_c b$ oznacza wprost *wykonalność* odejmowania $b - a$. Temsamem, jeżeli przez „$<'$" oznaczymy relację „$<$" *zwężoną* do klasy AN_0, to $a <_c b$

[1] str. 43 i 70.
[2] Ar. L. Całk. str. 26.

w naszej interpretacji i $a <' b$ oznaczać będą jedno i to samo. Stąd jednak wynika niezmiernie ważne twierdzenie:

Tw. 7. System: $(A N_0 ; <')$ jest *systemem porządkowym typu* ω [p. str. 71].

Dem. Odnajdziemy rzeczywiście w Ar. L. Całk. możliwość dowodu wszystkich przesłanek, których zespół stanowi, podaną przez nas definicję porządków typu ω. W szczególności należy porównać:

Ar. L. Całk. str. 42, 30 (tw. 3 a), 37 (tw. 7 ε), 81 (zasada minimum), oraz udowodnić jeszcze, że poprz $(x) = x - 1$, o ile $x \varepsilon A N_0$ i $x \neq 0$, do czego służyć mogą twierdzenia § 6, str. 43 i nast.

Stąd jeszcze wniosek:

Tw. 8. Elementy całkowite systemu liczbowego tworzą klasę *przeliczalną* [p. str. 74].

8. Elementy całkowite względne.

Założymy teraz, że rozważany przez nas system $(A ; + ; \times ; <)$ jest systemem liczbowym *względnym*. Wydzielimy najpierw z niego klasę $A N_0$. Następnie stworzymy sobie klasę $A \overline{N_0}$ w ten sposób, że każdy element x należący do $A N_0$ zastąpimy przez symetryczny $\overline{x}$ $(= 0 - x)$.

Def. Klasę $A n \overset{\mathrm{df}}{=} A N_0 +_m A \overline{N_0}$ nazwiemy klasą *elementów całkowitych względnych* systemu liczbowego *względnego* $(A ; + ; \times <)$.

Uwaga. Nie chcąc przeciążać naszej książki rozumowaniami o charakterze raczej logicznym niż matematycznym, będziemy w dalszym ciągu przeważnie pomijali rozważania na temat czy dany zbiór jest klasą względnie czy dany stosunek jest relacją, o ile tylko odnośny dowód byłby bardziej skomplikowany. Sprawą tą zajmiemy się na innem już miejscu.

Tw. Ponieważ $x < y$ pociąga, że $\overline{x} > \overline{y}$ i odwrotnie, więc stąd: „$>$" zwężona do klasy $A\overline{N_0}$ jest izomorfijna z „$<$" zwężoną do AN_0, co wykaże nam odpowiedniość T żądająca, by dla

$$x \varepsilon AN_0 \text{ było } T(x) \overset{\text{df}}{=} \overline{x}.$$

Uw. Ponieważ porządki R^{-1} i S^{-1} *odwrotne* do porządków izomorfijnych R i S są również izomorfijne między sobą, a wszystkie porządki typu ω są izomorfijne, więc również wszystkie *odwrotne* do porządków typu ω są izomorfijne między sobą i należą do *tego samego* typu porządkowego, który nazwiemy *typem* ω^*. Porządek „$<$" zwężony do $A\overline{N_0}$ jest więc typu ω^*. Porządek „$<$" *zwężony* do An jest jeszcze innego typu, który nazywamy typem $\omega^* + \omega$.

Def. W klasie An elementów całkowitych względnych należących do systemu liczbowego względnego $(A; +; \times; <)$ nazwiemy elementy, które są > 0, a więc elementy klasy $AN_1 \overset{\text{df}}{=} AN_0 - \{0\}$ *dodatniemi*, elementy klasy $A\overline{N_1} \overset{\text{df}}{=} A\overline{N_0} - \{0\}$ *ujemnemi całkowitemi* elementami tego *systemu.*

Ponieważ klasy AN_0 i $A\overline{N_0}$ są *równoliczne* [wystarczy tu odpowiedniość: $T(x) = \overline{x}$ dla $x \varepsilon AN_0$], więc, jak wynika z zasad teorji mnogości[1], klasa An, jako suma *przeliczalnych* jest również *przeliczalna.*

---

[1] P. naprz. moja Teorja Mnogości Punktowych I., str. 109 i nast.

§. 4 Elementy wymierne systemu liczbowego.

9. Elementy wymierne bezwzględne.

Niechaj $(A; +; \times; <)$ przedstawia system liczbowy *bezwzględny* lub *względny*. Oddzielmy od niego klasę elementów *całkowitych bezwzględnych*, czyli AN_0 i utwórzmy klasę AR_0 w następujący sposób: zaliczymy do AR_0 element x wtedy i tylko wtedy, gdy *znajdą* się elementy y i z *należące* do AN_0 i *takie, że:*

$$x = y / z$$

[oczywiście $z \neq 0$].

Def. Klasę AR_0 nazwiemy klasą *elementów wymiernych bezwzględnych* systemu liczbowego $(A; +; \times; <)$.

Tw. 1. *„Suma", „różnica", „iloczyn" i „iloraz"* elementów *wymiernych* systemu liczbowego są dalej elementami *wymiernemi* tego systemu.

Dem. 1. Niechaj $x, y \in AR_0$, wtedy $x = u / v$, $y = s / t$ dla pewnych u, v, s, t należących do AN_0, przyczem $v \neq 0$, $t \neq 0$.

Wtedy też:

1. $x + y = u / v + s / t = (u \times t) / (v \times t) + (s \times v) / / (v \times t)$
$= [u \times t + s \times v] / (v \times t)$, atoli $u \times t + s \times v$ i $v \times t$ należy do AN_0 i $v \times t \neq 0$ [dzięki tw. Arytm. L. C., ważnym dla AN_0].
2. Niechaj teraz $x \geqq y$, [aby $x - y$ miało sens]. Będziemy mieli $u / v \geqq s / t$ więc $u \times t \geqq s \times v$ [str. 86], stąd $u \times t - s \times v \geqq 0$ i należy do AN_0, a zatem:

$$x - y = (u \times t - s \times v) / (v \times t) \in AR_0.$$

3. $x \times y = (u/v) \times (s/t) = [(u/v) \times s]/t =$
$= [(u \times s)/v]/t = (u \times s)/(v \times t)$,
gdzie $u \times s$, $v \times t \varepsilon AN_0$. Stąd: $x \times y \varepsilon AR_0$.

4. Załóżmy teraz znów, że $y \neq 0$. Wtedy $s/t \neq 0$, stąd $s \neq 0$ i mieć będziemy:
$x/y = (u/v)/(s/t) = [(u/v)/s] \times t =$
$= [u/(v \times s)] \times t = (u \times t)/(v \times s)$,
gdzie $u \times t$ i $v \times s$ należą AN_0, skąd: $x/y \varepsilon AR_0$.

Tw. 2. Elementy *całkowite* (bezwzględne) systemu liczbowego są też elementami *wymiernemi bezwzględnemi* tego systemu.

Dem. Gdy $x \varepsilon AN_0$, to $x = x/1$, więc $x \varepsilon AR_0$, gdyż $1 \varepsilon AN_0$.

10. „Mniejszość" wśród elementów wymiernych systemu liczbowego.

Oznaczymy przez $<'$ relację $<$ *zwężoną* do klasy AR_0. A zatem:

Def. $x <' y \overset{\mathrm{df}}{=} x, y \varepsilon AR_0 . x < y$.

Tw. 1. Relacja $<'$ jest *porządkiem* o polu $C(<') = AR_0$.

Dem. Ponieważ AR_0 jest klasą *niejednostkową*, gdyż naprz. należą tu 0 i 1; gdzie $0 \neq 1$ [p. str. 51].

Tw. 2. $0 = \mathrm{Min.}(<')$.

Dem.

(1) $0 \varepsilon AR_0$ wedle tw. 2 poprzedniego ustępu;
(2) gdy $x \varepsilon AR_0$ i $x \neq 0$, to $x > 0$, więc $0 <' x$.

Tw. 3. Element 0 nie posiada w porządku $<'$ bezpośredniego następnika.

Dem. Gdyby nim było naprz. z, to mielibyśmy $0 <' z$, $z \varepsilon AR_0$, zatem $(0+z)/2 \varepsilon AR_0$, gdzie $2 \overset{\text{df}}{=} 1+1$. Atoli:

$$0 < (0+z)/2 < z,$$

więc: $\quad 0 <' (0+z)/2 <' z$, co niemożliwe,

jeżeli $\quad z = \mathrm{Nast}_{<'}(0)$.

Tw. 4. Porządek $<'$ nie posiada Maximum.

Dem. Jeżeli $x \varepsilon AR_0$, to $x+1 \varepsilon AR_0$, lecz $x < x+1$, więc $x <' x+1$, zatem żadne x nie może być Max($<$), skoro tylko należy do AR_0.

Tw. 5. Porządek $<'$ jest *gęsty*.

Dem. Niechaj: $x <' y$, wtedy $x < y$ i dalej;

$$x < (x+y)/2 < y, \quad (x+y)/2 \varepsilon AR_0,$$

więc: $\quad x <' (x+y)/2 <' y$,

co już dowodzi twierdzenia.

Tw. 6. Zbiór AR_0, a więc $C(<')$, jest *przeliczalny*.

Dem. Gdy $k \varepsilon AN_1$ $\quad [AN_1 = AN_0 - \{0\}]$, to oznaczymy ogół elementów wymiernych bezwzględnych x takich, że $x = l/k$ dla pewnego l z AN_0 przez A_k. Klasa A_k będzie *przeliczalna*, gdyż wystarczy położyć:

$$T(x) = x \times k,$$

aby otrzymać odpowiedniość doskonałą T między elementami klas AN_0 i A_k, przyczem klasa AN_0 jest przeliczalna.

Klasy A_k utworzą, dla wszelkich k z klasy AN_1, rodzinę klas $\mathscr{A}$ i będziemy mieli:

$$AR_0 = \Sigma_m \mathscr{A}.$$

Otóż mamy tu *przeliczalną* rodzinę klas *przeliczalnych* jednorodnych [każde A_k jest zawarte w $A R_0$], więc wedle zasad Teorji Mnogości suma $\Sigma_m \mathscr{A}$ jest *przeliczalna*[1].

Tw. 7. Porządek $<'$ jest typu $1 + \eta$.

Dem. Wystarczy porównać definicję na str. 77 z tezami twierdzeń 1—6.

11. Elementy wymierne względne systemu liczbowego względnego.

Niechaj teraz $(A; +; \times; <)$ będzie systemem liczbowym *względnym*. Mamy tu do dyspozycji klasy An, AN_0 i AR_0. Utworzymy klasę Ar zupełnie analogicznie jak AR_0, lecz biorąc za punkt wyjścia An.

Def. Klasą elementów *wymiernych względnych* systemu liczbowego względnego $(A; +; \times; <)$ nazwiemy klasę Ar obejmującą wszystkie elementy x takie, że:

$$x = y / z$$

dla pewnych y i z *należących* do An.

Tw. 1. Gdy $x \varepsilon Ar$, to $x = y / z$ dla pewnego $y \varepsilon An$ i $z \varepsilon AN_1$.

Dem. Jeżeli $x \varepsilon Ar$, to $x = y / z$, gdzie $y, z \varepsilon An$ i gdzie $z \neq 0$. Jeżeli $z > 0$, to twierdzenie słuszne, gdyż wtedy $z \varepsilon AN_1$. Jeżeli $z < 0$, to

$$|z| = \overline{z} = \overline{1} \times z \qquad \text{[str. 93]}$$

i wtedy: $x = (\overline{1} \times y) / (\overline{1} \times z) = \overline{y} / \overline{z}$, gdzie już $\overline{z} \varepsilon AN_1$, a $\overline{y} \varepsilon An$.

Tw. 2. „*Suma*", „*różnica*", „*iloczyn*", „*iloraz*" elementów Ar należą znowu do Ar.

---

[1] P. moja Teorja Mnogości Punktowych I., str. 109 i nast.

Dem. Dowody zupełnie analogiczne, jak w wypadku twierdzenia 1, ust. 9.

Tw. 3. $A N_0 \subset A n, A R_0 \subset A r$ i $A n \subset A r$.

Dem. Analogicznie jak w tw. 2, ust. 9.

Tw. 4. Gdy $x \varepsilon A R_0$, to $\overline{x} \varepsilon A r$ $\{\overline{x} = 0 - x\}$.

Dem. Gdyż wtedy $x \varepsilon A r$, $\overline{x} = 0 - x \varepsilon A r$.

Tw. 5. Gdy $x \varepsilon A r$, to $|x| \varepsilon A R_0$.

Dem. Gdyż wtedy $|x| \geqq 0$ i $|x| \varepsilon A r$, stąd: $|x| = y / z$, gdzie $y \varepsilon A n$, $z \varepsilon A N_0$, ale że musi być $y \geqq 0$, więc $y \varepsilon A N_0$.

Uw. Z twierdzeń 4 i 5 widać, że $A r$ można utworzyć, biorąc wszystkie elementy klasy $A R_0$ oraz ich elementy *symetryczne*.

Wprowadzimy jeszcze oznaczenia, analogiczne do oznaczeń *Formulario Peany:*

Def. $A R \overset{\text{df}}{=} A R_0 - \{0\}$ — „elementy dodatnie"

$A \overline{R} \overset{\text{df}}{=} A r - A R_0$ — „elementy ujemne"

$A \overline{R}_0 \overset{\text{df}}{=} A r - A R$ — „elementy niedodatnie"

[$A R_0$ będą to „elementy nieujemne" wymierne].

12. „Mniejszość" wśród elementów wymiernych względnych.

Oznaczmy przez $<''$ relację $<$ systemu *względnego* $(A; +; \times; <)$ *zwężoną* do $A r$.

Def. $x <'' y \overset{\text{df}}{=} x, y \varepsilon A r \,.\, x < y$.

Tw. Relacja $<''$ jest *porządkiem typu* η.

Dem. 1. $<''$ jest porządkiem o polu $C(<'') = A r$, gdyż $A r$ jest klasą niejednostkową.

2. $<''$ jest porządkiem *gęstym*, gdyż $x <'' y$ pociąga, że $x <'' (x + y) / 2 <'' y$.

3. $<''$ nie posiada Maximum ani Minimum, gdyż skoro $x \varepsilon Ar$, to
$$x - 1 <'' x <'' x + 1.$$
4. Pole $C(<'')$, czyli Ar jest klasą przeliczalną, gdyż:
$$AR = AR_0 +_m A\overline{R}_0,$$
atoli $A\overline{R}_0\, rl\, AR_0$ [wystarczy tu odpowiedniość $T(x) = \overline{x}$ dla $x \varepsilon AR_0$], przyczem AR_0 jest *przeliczalne,* więc Ar jest sumą dwu klas przeliczalnych.

Cor. Udowodnilibyśmy równie prosto, że „mniejszość" wśród AR czy $A\overline{R}$ jest również porządkiem typu η. Natomiast „$<$" zwężone do $A\overline{R}_0$ jest porządkiem innego typu, który oznaczamy przez $\eta + 1$. {Porządek ten posiada Maximum!}.

Rozdział VI.

Abstrakty i Niezmienniki Równoważności.

§ 1. Teorja Abstrakcji.

1. Równoważność a Identyczność.

Wprowadziliśmy już w R. I. pojęcie stosunków zwanych *równoważnościami,* żądając od nich [str. 17], aby posiadały trzy cechy charakterystyczne: (α) *samozwrotność,* (β) *odwracalność,* (γ) *przechodniość,* Stosunek *identyczności* ($=$) cechy te *posiada* — jak to zawsze uznawała logika i matematyka — i temsamem jest pewną szczególną *równoważnością.*

Jeżeli określimy wraz z logikami szkoły włoskiej Peany czy szkoły Russella *identyczność* tak, iż
$$a = b$$

ma oznaczać, że ilekroć jakieś orzeczenie $A(x)$ zachodzi dla elementu a, to również zachodzi dla b, wtedy rzeczą logiki będzie wykazać, że *identyczność* rzeczywiście posiada cechy charakterystyczne równoważności.

Jednakże *nie każda równoważność* jest *identycznością.* Ta ostatnia ma własność „zachowywania“ *wszelkich* orzeczeń ważnych dla elementu a w ich ważności dla b, skoro tylko $a = b$[1], naogół zadana *równoważność* czyni to w stosunku do *pewnych* orzeczeń [które nas będą zajmowały w następnym §], lecz nie *wszystkich.* Jest ona, naogół, pewną tylko jak gdyby *„identycznością częściową“.* W ten sposób pojmują już identyczność scholastycy XIII w. [św. Tomasz z Akwinu] i tak wprowadza ją później do matematyki Leibniz [1648—1716].

Można się spierać, czy wprowadzenie takiej uniwersalnej równoważności, jaką jest identyczność, jest konieczna dla matematyki, atoli tą sprawą nie możemy się tu zajmować. Otóż Peano, zdaje się pierwszy, zauważył, że od każdej *równoważności* można w pewien sposób przejść do *identyczności* i uwolnić się w praktyce od posługiwania się tą pierwszą. Kwestję tę podjął później i pogłębił B. Russell w *The Principles of Mathematics* (1903). Zajmiemy się tą sprawą obecnie.

2. **Teorja abstrakcji Peany i Russella.**

Niechaj R będzie danym nam *stosunkiem.* Dla każdego elementu a, należącego do *pola* stosunku R utwórzmy zbiór:

„ogół takich x, że zachodzi aRx.

[1] Rezerwujemy znak „=“ jedynie dla identyczności.

Nazwijmy:

Def. Abstraktem (R)-owym elementu a (w sensie Russella) ów zbiór:

$$Abs_R(a) \overset{\mathrm{df}}{=} (\hat{x})(a R x).$$

Gdy teraz R jest *równoważnością*, otrzymamy niezmiernie ważne twierdzenie:

Tw. 1. Jeżeli R jest stosunkiem *równoważności* i a należy do $C(R)$, to związki:

$$a R b \text{ i } Abs_R(a) = Abs_R(b)$$

są *równoważne*.

Dem. 1. Niechaj zachodzi $a R b$, wtedy: $x \varepsilon Abs_R(a)$ pociąga, że $a R x$, atoli $a R b$ pociąga $b R a$ (*„odwracalność"*), $b R a$ i $a R x$ dadzą nam $b R x$ (*„przechodniość"*), skąd: $x \varepsilon Abs_R(b)$.

A więc: $$Abs_R(a) \subset Abs_R(b).$$

Gdy teraz: $y \varepsilon Abs_R(b)$, to zachodzi $b R y$, lecz $a R b$ i $b R y$ dadzą $a R y$, a więc $y \varepsilon Abs_R(a)$. Stąd: $Abs_R(b) \subset Abs_R(a)$. Ostatecznie więc:

$$Abs_R(a) = Abs_R(b).$$

2. Gdy $a \varepsilon C(R)$, to zachodzi $a R a$ (*„samozwrotność"*), stąd $a \varepsilon Abs_R(a)$, więc $a \varepsilon Abs_R(b)$, zatem mamy $b R a$, skąd znów wynika $a R b$ (*„odwracalność"*).

Zauważmy, że twierdzenie 1 rozwiązuje już problem postawiony przez Peanę i rozważany przez Russella. Posiada ono jeszcze ważną swą odwrotność:

Tw. 2. Jeżeli w stosunku R związki

$$a R b \text{ i } Abs_R a = Abs_R b$$

są równoważne, o ile tylko a należy do $C(R)$, to R jest stosunkiem *równoważności*.

Dem. 1. *Samozwrotność.* Niechaj $a \varepsilon C(R)$. $Abs_R(a) = Abs_R(a)$, więc temsamem zachodzi aRa.

2. *Odwracalność.* Niechaj zachodzi aRb, wtedy zachodzi aRa i $Abs_R(a) = Abs_R(b)$,
więc: $a \varepsilon Abs_R(a)$ i $a \varepsilon Abs_R(b)$.
skąd: bRa.

3. *Przechodniość.* Niechaj będzie: aRb i bRc. wtedy:

$$a \varepsilon Abs_R(a),\ Abs_R(a) = Abs_R(b) = Abs_R(c),$$

więc: $a \varepsilon Abs_R(c)$, czyli że zachodzi aRc.

Jeżeli tedy R jest *równozważnością,* a więc w pewnym sensie „częściową identycznością", to zastępując elementy pola $C(R)$ ich *abstraktami,* tak jak je określa Def. 1. możemy związek aRy, a więc stwierdzenie *„równoważności"* między x a y zastąpić przez związek: $Abs_R(x) = Abs_R(y)$ stwierdzający *identyczność,* wprawdzie nie x i y, lecz pewnych tworów pochodnych, a mianowicie ich abstraktów.

Przerwijmy teraz na chwilę nasze rozważania teoretyczne, aby rozważyć kilka przykładów z dziedziny matematyki.

1. Niechaj stosunkiem R będzie *równoległośc* między *prostemi* w przestrzeni, rozumiana w sensie uogólnionym o tyle, że każdą prostą będziemy uważali za równoległą do siebie. Stosunek ten będzie *równoważnością.* Otóż w geometrji mówimy często zamiast:

„prosta l jest *równoległa* do prostej m",

że:

„kierunek prostej l jest *identyczny z kierunkiem prostej m"*.

2. Niechaj rozważanym stosunkiem będzie teraz równoległość płaszczyzn w przestrzeni, rozumiana znowu w sensie uogólnionym jak poprzednio. Jest to równoważność. I znów zdanie:

„pł. α jest *równoległa* do pł. β"

zastępujemy *równoważnem* zdaniem:

„*położenie* pł. α jest *identyczne* z *położeniem* pł. β".

3. Niechaj stosunkiem równoważności będzie teraz stosunek *podobieństwa* figur geometrycznych. I tu zdanie:

„fig. A jest *podobna* do fig. B".

zastąpić moglibyśmy zdaniem równoważnem:

„*kształt* fig. A jest *identyczny* z *kształtem* fig. B".

4. Stosunek *prostopadłości* (ortogonalności) wśród prostych przestrzeni *nie jest równoważnością* i tu też nie staramy się (i nie umiemy) zastąpić zdania:

„pr. l jest prostopadła do pr. m"

przez zdanie wyrażające *identyczność* pewnych tworów pochodnych w stosunku do l i m.

5. Niechaj stosunkiem równoważności będzie *równoliczność* wśród klas. Tu znowu zdanie:

$$M \, rl \, N$$

uważamy za równoważne z:

moc (M) = moc (N)[1] [Cantor].

6. Jeżeli stosunkiem jest *izomorfja* wśród *porządków* (w sensie Cantora), to zdanie R iz S za-

[1] Zamiast „moc" mówi się też „liczba kardynalna".

stępujemy przez równoważne mu orzeczenie: „typ porządkowy R jest identyczny z typem porządkowym S“.

Widzimy z powyższych przykładów, że matematyka rozwiązała w pewnych przypadkach problem postawiony przez Peanę i rozważany dalej przez Russella. Czy: „kierunek l“, „położenia α“, „kształt A“, „moc (M)“, „typ R“ są to *Abstrakty* odnośnych stosunków równoważnościowych, tak jak je określa Russell? Byłoby tak napewne, gdyby rozwiązanie problemu Peany, podane przez Russella było *jedynem.*

Tak atoli nie jest. Prócz tego, rozwiązanie Russella stwarza pewne trudności natury logicznej, które tu pokrótce rozważymy. Udowodnimy przedewszystkiem:

Tw. 3. Jeżeli R jest *relacją* o charakterze równoważności, to dla każdego x należącego do pola $C(R)$ zbiór $Abs_R(x)$ jest *klasą.* Abstrakty różnych elementów pola $C(R)$ będą *klasami jednorodnemi.*

Dem. Rzeczywiście, jeżeli $a \varepsilon C(R)$, to $Abs_R(a)$ będzie tu poprostu *R-obrazem klasy* $\{a\}$:

$$Abs_R(a) = R\text{''}\{a\},$$

a ten, jak wiemy {str. 19} jest *klasą.*

Ponieważ, dla $a \varepsilon C(R)$, mamy:

$$Abs_R(a) \subset C(R)$$

i $C(R)$ jest klasą, więc abstrakty elementów pola $C(R)$ będą *jednorodne* między sobą.

Nie będzie też żadnej trudności w przyjęciu, że wtedy abstrakty wszelkich elementów pola $C(R)$ utworzą *rodzinę klas,* a więc *klasę* elementów *nowych,* któremi będą *abstrakty* elementów *dawnych.*

Wyniknie to zresztą w pełnej teorji relacyj z bardzo prostych zasad jednorodności. Przejmiemy zatem z teorji relacyj:

Tw. 4. Gdy R jest *relacją* równoważnościową, to ogół abstraktów (Russellowskich) elementów jej pola tworzy *klasę* (rodzinę klas).

Możemy zatem, gdy nasza równoważność jest relacją, podnieść się niejako o jedno piętro wyżej i zastępując elementy pola naszej równoważności przez ich abstrakty, operować teraz niemi z tym zyskiem, że *równoważność* dawnych elementów odpowiada teraz *identyczności* wśród nowych. Realizujemy zatem to, co nazywa się *Zasadą Abstrakcji.*

Wypadek ten mielibyśmy w przykładach 1, 2, 3, o ile uznamy odnośne równoważności za *relacje*, czego zapewne domagać się będzie geometrja elementarna.

Jeżeli jednak dana nam równoważność R nie będzie uważana za *relację*, to sytuacja staje się trudniejszą. Możemy oczywiście tworzyć dalej abstrakty w sensie Russella, atoli nie będziemy mieli prawa twierdzić, że są one klasami i że ich ogół tworzy klasę nowych przedmiotów. Znaczenie równoważności zwrotów $a R b$ i $Abs_R(a) = Abs_R(b)$, o ile $a \varepsilon C(R)$, będzie czysto nominalne.

Identyczność abstraktów będzie tu jedynie okolnem stwierdzeniem zachodzenia związku R. Przeniesienie się o piętro wyżej: od elementów pola R do ich abstraktów nie będzie mogło być dokonane bez nowych hipotez, przeważnie bardzo ryzykownych. Wypadek ten mielibyśmy w przykładach 5 i 6. Paradoksy teorji mnogości, takie jak paradoks „klasy wszystkich klas“ czy „Burali-Fortie'go“[1] zdają się przecież świadczyć o tem, że nie należy uważać ani *równoliczności*, ani *izomorfji* porządkowej za *relacje* i *„mocy“* czy *„typów porządkowych“* za przedmioty tworzące *klasy*.

Intuicyjnie czujemy, że abstrakty w sensie Russella łączą tu zbiory czy porządki bardzo *różnorodne*, zbyt zapewne różnorodne, by zbudować teorję nieparadoksalną.

Zastanowimy się teraz jeszcze nad innemi sposobami zrealizowania problemu Peany.

3. **Ogólna zasada abstrakcji.**

Zajmiemy się tu wypadkiem, gdy dana nam *równoważność* R jest *relacją*. Pożytecznie rozwiążemy problem Peany, gdy *zdołamy odszukać operator* φ *tego rodzaju, że:*

(1) *Polem* operatora φ będzie *pole relacji* R.
(2) Gdy zachodzi $a R b$, to $\varphi(a) = \varphi(b)$.
(3) Gdy a należy do $C(R)$ i zachodzi identyczność $\varphi(a) = \varphi(b)$, to wynika stąd związek $a R b$.

Def. Każdy taki operator φ nazwiemy *„abstrahującym“* dla relacji R.

Gdy R jest relacją równoważności, to $C(R)$ jest klasą, Russellowskie abstrakty można pojmować jako wartości *operatora* (funkcji) Abs_R dla elementów pola R. Z tw. 1, ust. 2 wyniknie wtedy, że abstrakty Russella rozwiązują w szczególności nasz problem.

---

[1] P. o tem w moich Podstawach Ogólnej Teorji Mnogości.

Oczywiście nie będzie to zapewne rozwiązanie jedyne. Rozważmy bowiem *klasę* wszystkich abstraktów R-owych i oznaczmy ją przez M. Zapewne znajdzie się klasa N *równoliczna* z M i *różna* od M. Niechaj odpowiedniość doskonała T wykazuje równoliczność: $M\,rl\,N$. Jeżeli operator φ określimy dla elementów pola $C(R)$ tak, że:

$$\varphi(x) = T\{Abs_R(x)\},$$

to z łatwością przekonamy się, że operator ten czyni również zadość wymaganiom ogólnej zasady abstrakcji.

Przekonamy się też w dalszym ciągu tej książki, że istotnie można się w praktyce posłużyć różnemi zasadami tworzenia operatora „abstrahującego" φ.

4. **Zasada reprezentacji.** Rozważymy pewien szczególny rodzaj operatorów „abstrahujących" dla danej relacji równoważności R.

Przypuśćmy, że operator φ posiada własności następujące:

I. jest operatorem abstrahującym dla R — spełnia zatem wymagania ogólnej zasady abstrakcji;

II. gdy $a \varepsilon C(R)$, to $\varphi(a) \varepsilon Abs_R(a)$ — a więc abstrakt $\varphi(a)$ elementu a jest jednym z elementów *równoważnych* R-owo elementowi a.

Def. Powiemy, że tego rodzaju operator *realizuje zasadę abstrakcji przez reprezentację*. Element $\varphi(a)$ jest *reprezentantem wszystkich elementów* zrzeszonych w klasę $Abs_R(a)$, a więc *wszystkich* równoważnych między sobą i równoważnych elementowi a.

Uw. Oczywiście, gdy $x, y, z \ldots \varepsilon Abs_R(a)$, to

$$\varphi(x) = \varphi(y) = \varphi(z) = \varphi(a),$$

gdyż mamy tu: aRx, aRy, aRz, ...

Poznamy w dalszym ciągu dwa ważne zastosowania zasady reprezentacji. Podaję jeszcze przykład z dziedziny geometrji.

Przykład. Budujemy teorję *wektorów* w przestrzeni zwykłej 3-wymiarowej w następujący sposób: Rozważamy *klasę* wszystkich par (A, B) *punktów* naszej przestrzeni. Wprowadzamy następującą *relację równoważności:*

Pary (A, B) i (C, D) nazwiemy *ekwipolentnemi* ($\stackrel{\frown}{=}$), gdy:

„środek pary (A, D) zlewa się z środkiem pary (B, C)"

$$(A, B) \stackrel{\frown}{=} (C, D) \,.\!\overset{\mathrm{df}}{=}\!.\, c(A, D) = c(B, C)$$ [1]

[„c" = „centrum"].

Udowodnimy oczywiście, że $\stackrel{\frown}{=}$ jest *równoważnością*. Daje nam to asumpt do tworzenia abstraktów. Jeżeli wybierzemy i ustalimy operator abstrahujący dla $\stackrel{\frown}{=}$, to odnośne abstrakty par (A, B) punktów przestrzeni nazwiemy *wektorami* tych par. Za przykładem Hamiltona oznaczymy wektor pary (A, B) przez $B - A$.

Otóż doboru operatora abstrahującego, a temsamem abstraktów par, dokonać możemy na wiele sposobów. Jeżeli otrzymamy od geometrji zapewnienie, że ogół punktów przestrzeni jest *klasą* (wtedy ogół par (A, B) będzie klasą) i że $\stackrel{\frown}{=}$ jest

[1] p. C. Burali-Forti i R. Marcolongo. Elementi di Calcolo Vettoriale, I wyd.

relacją, możemy za wektor $B - A$ przyjąć naprz. abstrakt w sensie Russella. Aby uzyskać abstrakty przez reprezentację postąpmy naprz. tak: Wybierzmy jakiś stały punkt O w przestrzeni. Udowodnimy, że dla każdej pary (A, B) znajdzie się jeden jedyny punkt M w przestrzeni, taki, że:

$$(A, B) \overset{\frown}{=} (O, M).$$

Możemy teraz położyć:

$$\varphi(A, B) = (O, M)$$

i udowodnić z łatwością, że operator φ spełnia nasze wymagania reprezentacji abstrakcyjnej. Moglibyśmy też położyć inaczej znów:

$$\overline{\varphi}(A, B) = M.$$

Wtedy znowu dałoby się wykazać, że jest to również realizacja problemu Peany, lecz już *nie przez reprezentację.*

Uw. Ekwipolencja $(A, B) \overset{\frown}{=} (C, D)$ precyzuje to, co się zwykle wyraża (nieściśle i nieogólnie) mówiąc, że pary („odcinki") (A, B) i (C, D) mają „tę samą długość, kierunek i zwrot".

W wypadku równoważności R nie będącej relacją realizacja ściśle analogicznego problemu do problemu abstrakcji ogólnej czy, w szczególności, przez reprezentację, jednak tak, by abstrakty stanowiły *klasę* autonomicznych elementów, wydaje mi się być rzeczą bardzo wątpliwą, nawet przy użyciu (z konieczności) dodatkowych hipotez.

Powróćmy jeszcze do pytania, jaki rodzaj operatora abstrahującego ma na myśli matematyka, posługując się zwrotami jak w przykładach 1, 2, 3, 5, 6 ustępu 2? Sądzę, że nie opłaca się toczyć w tej sprawie sporów. Każdy operator abstrahujący da nam formalnie to samo, czy zaś intuicyjnie mamy ten lub ów na myśli, to już rzecz dla matematyka obojętna. Spory tego rodzaju toczą się jednak niekiedy [p. naprz. Burali-Forti: Logica Matematica, II wyd. 1919]. Zdaniem mojem w tej sprawie decydować winny względy jedynie natury praktycznej.

§ 2. Niezmienniki równoważności.

5. **Określenie.** *Stosunek równoważności* jest, jak to już wyżej zaznaczono, pewnego rodzaju częściową identycznością, „zachowującą" pewne tylko (naogół) własności — orzeczenia, podczas gdy *identyczność* odznacza się zdolnością „zachowywania" każdej własności przysługującej elementom jej pola. Interesować nas będą obecnie te właśnie orzeczenia, które dana nam równoważność R „zachowuje". Określimy tedy na początek:

Def. 1. Orzeczenie $A(x)$ jest *niezmienniczem* (lub *niezmiennikiem*) danej *równoważności* R, gdy: ilekroć *zachodzą* związki:

$$(1)\quad A(a), \qquad (2)\quad a R b,$$

to *zachodzi* również:

$$A(b).$$

Przykład.

Najprostszym przykładem takiej niezmienniczej własności jest zachodzenie związku

$$m R x$$

dla jakiegoś stałego m z pola $C(R)$. Rzeczywiście:

$$(1)\quad m R a \quad \text{i} \quad (2)\quad a R b$$

pociągną za sobą związek: $m R b$, gdyż R jako równoważność jest stosunkiem przechodnim.

Uogólnimy teraz pojęcie orzeczenia niezmienniczego w następujący sposób:

Def. 2. Orzeczenie $A(x_1, \dots x_n; y_1, \dots y_p)$ nazwiemy *niezmienniczem* w stosunku do *równoważności* R w argumentach $x_1 \dots x_n$, gdy związki:

(1) $A(a_1, \dots a_n; c_1, \dots c_p)$,

(2) $a_1 R b_1, \dots, a_n R b_n$

pociągają związek:

$$A(b_1, \dots b_n; c_1, \dots c_p);$$

argumenty $x_1 \dots x_n$ zwać będziemy *niezmienniczemi*, $y_1 \dots y_p$ *parametrycznemi.*

W związku z orzeczeniami niezmienniczemi tworzymy sobie dalsze niezmiennicze twory, których wpełni rozważać tu i klasyfikować nie będziemy, poprzestając na wymienieniu najważniejszych:

Def. 3. *Funkcje niezmiennicze jednej zmiennej.* Będą to *funkcje* $f(x)$, których *pole* składa się z elementów pola równoważności danej R (wszystkich lub tylko pewnych), *wartości zapasu* $f(x)$ są również elementami pola $C(R)$ i takie, że:

$$(1)\ f(a), \qquad (2)\ a R b$$

pociągają, iż:

$$f(a) \,.\, R \,.\, f(b).$$

[Gdy więc w $f(a)$ zastąpimy a przez R-równoważne mu b, otrzymamy wartość $f(b)$ w każdym razie R-równoważną poprzedniej].

Analogicznie:

Def. 4. *Funkcje niezmiennicze wielu zmiennych.* Są to funkcje $f(x_1, \dots x_n)$ takie, że:

(1) *Pole* f składa się z układów $(x_1, \dots x_n)$ elementów pola $C(R)$;
(2) wartości funkcji f są elementami pola R;
(3) związki: (1) $f(a_1 \dots a_n)$ i (2) $a_1 R b_1, \dots, a_n R b_n$ pociągają:

$$f(a_1, \dots a_n) \,.\, R \,.\, f(b_1, \dots b_n).$$

Uw. Przykładów tego rodzaju funkcyj niezmienniczych jak w def. 3 i 4 dostarczą nam niedługo arytmetyki klasyczne. Jeszcze inne twory niezmiennicze, jakie moglibyśmy utworzyć w związku z pojęciem orzeczenia niezmienniczego nie będą nam w praktyce potrzebne.

6. Niezmienniki a zasada abstrakcji.

Niechaj $A(x_1, \dots x_n)$ będzie orzeczeniem *niezmienniczem* w stosunku do pewnej *relacji równoważności* R i niechaj $(\mathbf{M})$ oznacza pełną *klasę abstraktów* elementów pola $C(R)$ utworzonych wedle jakiejś zasady abstrahującej, obojętne zresztą jakiej.

Utworzymy *orzeczenie.:*

$$\varphi(\xi_1, \dots \xi_n)$$

w następujący sposób:

$\varphi(\alpha_1, \dots \alpha_n)$ niechaj oznacza, że:

(1) $\alpha_1, \dots \alpha_n$ są *elementami klasy* $\mathbf{M}$, *a więc abstraktami elementów pola* $C(R)$;
(2) *gdy tylko* $a_1, \dots a_n$ *mają za abstrakty odpowiednio* $\alpha_1, \dots \alpha_n$, *to zachodzi:*

$$A(a_1, \dots a_n).$$

Def. Przejście od orzeczenia $A(x_1, \dots x_n)$ do $\varphi(\xi_1, \dots \xi_n)$ nazwiemy *abstrahowaniem* orzeczenia $A(x_1, \dots x_n)$ w stosunku do relacji równoważności R.

Orzeczenie $\varphi(\xi_1, \ldots \xi_n)$ nazwiemy też *R-abstraktem orzeczenia* $A(x_1, \ldots x_n)$. [Przy danej zasadzie abstrakcji].

Tw. 1. Niechaj $A(x_1, \ldots x_n)$ będzie *niezmienniczem* wobec R jak wyżej i niechaj zachodzi $A(a_1, \ldots a_n)$ oraz niechaj $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ będą odpowiednio abstraktami elementów $a_1, \ldots a_n$. Gdy $\varphi(\xi_1, \ldots \xi_n)$ jest R-abstraktem $A(x_1, \ldots x_n)$, to już temsamem zachodzi $\varphi(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$.

Dem. Zachodzi zatem $A(a_1, \ldots a_n)$; gdy teraz $a_1 R m_1, \ldots a_n R m_n$, to *dzięki niezmienniczości* $A(x_1, \ldots x_n)$ zachodzi też $A(m_1, \ldots m_n)$. A więc: gdy tylko $z_1, \ldots z_n$ mają za abstrakty odpowiednio $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, to już zachodzi:

$$A(z_1, \ldots z_n),$$

stąd zachodzi wedle definicji $\varphi(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$.

Uw. Widzimy zatem, że gdy $A(x_1, \ldots x_n)$ jest *niezmiennicze* wobec relacji równoważności R, to każdy związek $A(a_1, \ldots a_n)$ mówiący o elementach „pierwotnych“ $a_1 \ldots a_n$, orzeka jednocześnie o ich *abstraktach*, a mianowicie stwierdza odrazu, że zachodzi

$$\varphi(\alpha_1, \ldots \alpha_n),$$

gdzie $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ są odnośnemi abstraktami dla $a_1, \ldots a_n$.

Rozważmy teraz funkcję $f(x_1 \ldots x_n)$ *niezmienniczą* w swych argumentach $x_1, \ldots x_n$ względem relacji równoważności R. [Def. 4, ust. 5].

Przyjmując jakąś oznaczoną zasadę tworzenia abstraktów, rozważmy funkcję $F(\xi_1, \ldots \xi_n)$ określoną w następujący sposób:

Gdy $\alpha_1, \dots \alpha_n$ *są abstraktami elementów pola* $C(R)$ wtedy niechaj $F(\alpha_1, \dots \alpha_n)$ *oznacza:*

jedyne takie β, *że gdy tylko* $a_1, \dots a_n$

mają za abstrakty odpowiednio $\alpha_1, \dots \alpha_n$, to β *jest abstraktem elementu* $f(a_1, \dots a_n)$.

Def. 2. Tak określoną funkcję $F(\xi_1, \dots \xi_n)$ nazwiemy R-*abstraktem* funkcji niezmienniczej $f(x_1, \dots x_n)$.

Mamy tu:

Tw. 2. Gdy tylko zachodzi $f(a_1, \dots a_n) = b$ i $\alpha_1, \dots \alpha_n$ są abstraktami $a_1, \dots a_n$, oraz β jest abstraktem elementu b, to zachodzi już związek:

$$F(\alpha_1, \dots \alpha_n) = \beta,$$

gdzie F jest R-abstraktem funkcji niezmienniczej f.

Dem. Zachodzi już $f(a_1, \dots a_n) = b$ i prócz tego β jest abstraktem elementu $f(a_1, \dots a_n)$.

Niechaj będzie:

$$a_1 \, R \, b_1, \dots a_n \, R \, b_n.$$

Wtedy ma sens $f(b_1, \dots b_n)$, gdyż $f(x_1, \dots x_n)$ jest funkcją niezmienniczą i jeszcze:

$$f(a_1, \dots a_n) \,.\, R \,.\, f(b_1, \dots b_n),$$

więc β jest abstraktem dla $f(b_1, \dots b_n)$.

A więc: $\beta = F(\alpha_1, \dots \alpha_n)$.

Zbadajmy jeszcze *pole* sensu dla $F(\xi_1, \dots \xi_n)$. W tym celu oznaczmy przez M klasę wszystkich układów $(a_1, \dots a_n)$ elementów $C(R)$ dla których $f(x_1, \dots x_n)$ ma sens, czyli poprostu *pole* funkcji f. Oznaczmy dalej przez $\mathbf{M}$ klasę układów $(\alpha_1, \dots \alpha_n)$ takich, że $\alpha_1, \dots \alpha_n$ są *abstraktami* składowych $a_1, \dots a_n$ jakiegoś układu $(a_1, \dots a_n)$ z pola f czyli klasy M. Twierdzimy, że:

Tw. 3. Polem funkcji $F(\xi_1, \ldots \xi_n)$ jest $\mathbf{M}$.

Dem. Gdy $(\alpha_1, \ldots \alpha_n) \varepsilon \mathbf{M}$, to jakieś $(a_1, \ldots a_n)$ takie, że $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ są abstraktami dla $a_1 \ldots a_n$, należy do M. Wtedy już:

$$F(\xi_1, \ldots \xi_n) = \text{abstrakt } f(a_1, \ldots a_n),$$

dzięki twierdzeniu poprzedniemu, a więc $(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ należy do pola funkcji F. Odwrotność widoczna z definicji.

Jeszcze w jeden sposób otrzymamy funkcje związane z orzeczeniami niezmienniczemi. Niechaj $A(x_1, \ldots x_n, y)$ będzie orzeczeniem *niezmienniczem* w argumentach $x_1, \ldots x_n, y$ w stosunku do relacji równoważności R. Niechaj prócz tego $A(x_1, \ldots x_n, y)$ posiada własność taką, że zachodzenie:

$$\left.\begin{array}{r} A(a_1, \ldots a_n, b) \\ \text{i } A(a_1, \ldots a_n, c) \end{array}\right\}$$

pociąga już $b\,R\,c$

[„R-jednotliwość argumentu y"].

Def. 3. Jeżeli $(a_1, \ldots a_n, b)$ spełnia warunek A, $\alpha_1, \ldots \alpha_n, \beta$ są odpowiedniemi abstraktami dla $a_1, \ldots a_n, b$, to połóżmy:

$$\varphi(\alpha_1, \ldots \alpha_n) \overset{\mathrm{df}}{=} \beta.$$

Tw. 4. Określono w ten sposób *funkcję* układów $(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$.

Dem. Rzeczywiście, gdyby układy

$$(a_1, \ldots a_n, b) \text{ i } (a_1, \ldots a_n, c)$$

spełniały warunek A, to mielibyśmy

$$b\,R\,c,$$

zatem abstrakt b identyczny z abstraktem c i równy β, a więc definicja $\varphi(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ jest *jednoznaczna*.

Tw. 5. Jeżeli M oznacza klasę układów $(a_1, \ldots a_n)$ takich, że dla każdego z nich zachodzi

$$A(a_1, \ldots a_n, y)$$

przy jakiemś, choć jednem y, oraz $\mathbf{M}$ klasę układów $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ złożonych z abstraktów elementów $a_1 \ldots a_n$ poprzednich układów, to $\mathbf{M}$ jest polem funkcji $\varphi(\xi_1, \ldots \xi_n)$.

Dem. Gdy zachodzi:

(1) $A(a_1, \ldots a_n, b)$,

(2) $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ są abstraktami $a_1, \ldots a_n$,

(3) β jest abstraktem dla b, to:

mamy: $\varphi(\alpha_1, \ldots \alpha_n) = \beta$ i temsamem $(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ należące do $\mathbf{M}$, należy też do pola funkcji φ.

Gdy teraz $(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ należy do $\mathbf{M}$, to z definicji musiały istnieć takie $(a_1, \ldots a_n, b)$, że zachodziło $A(a_1, \ldots a_n, b)$ i $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ przedstawiały odnośne abstrakty dla $a_1, \ldots a_n$. Powiemy, że:

Def. 4. $\varphi(\xi_1, \ldots \xi_n)$ jest *funkcją* otrzymaną przez *proces abstrakcji* z orzeczenia *niezmienniczego* $A(x_1, \ldots x_n, y)$ i *R-jednotliwego względem* y.

7. Struktura i treść poszczególnych gałęzi nauk matematycznych.

Wedle teorji, której uzasadnienie rzeczowe i historyczne znajdzie czytelnik w osobnej pracy, poszczególne gałęzie i dyscypliny matematyczne powstają w sposób następujący:

I etap. Za punkt wyjścia bierzemy pewną określoną *równoważność*, którą charakteryzujemy, wymieniając w podstawach teorji jej zasadnicze własności *i zajmujemy się badaniem niezmienników tej równoważności*. Do stworzonej w ten sposób teorji należą *jedynie te pojęcia* i *orzeczenia*, które są *niezmienniczemi* wobec danej równoważności.

II. Etap. Ewentualnie, przyjmujemy jakąś określoną zasadę *abstrahowania* [obojętne jaką] i przy pomocy metod, których część poznaliśmy w ust. 6 *zamieniamy* orzeczenia niezmiennicze, zbadane w I-szym etapie teorji na *orzeczenia dotyczące abstraktów elementów pola danej równoważności podstawowej.*

Przejście do *abstraktów*, czysto formalne i podyktowane względami raczej praktycznemi, nie jest *nieodzowne.* Niektóre z dyscyplin matematycznych tego tradycyjnie nie uczyniły.

Poznamy w dalszym ciągu szczegółowo trzy przypadki takich teoryj, których oba piętra czy etapy zbadamy bliżej. Prócz tego zacytujemy jeszcze przykłady:

(1) *Geometrja euklidesowska* jako teorja niezmienników *przystawania* — tu nie stosuje tradycja żadnej zasady abstrakcji;

(2) *Teorja wektorów* jako teorja niezmienników *ekwipolencji* par punktów — z przejściem do abstraktów — wektorów;

(3) Cytowaliśmy już *kardynalną teorję mnogości* jako teorję niezmienników *równoliczności* oraz *porządkową teorję mnogości* jako teorję niezmienników *izomorfji porządkowej,* tu atoli trudności wielkie powoduje fakt, że tak równoliczność jak i izomorfję porządkową trudno uważać za *relacje* o polach złożonych z dostatecznie *jednorodnych* elementów. W tych też teorjach pojawiły się znane paradoksy teorji mnogości.

(4) *Arytmetykę liczb całkowitych* należy też uważać — choćby już ze względów na genezę jej

powstania, za teorję niezmienników *równoliczności wśród zbiorów skończenie-licznych.* I tu ze względu na to, że równoliczność jest stosunkiem o polu bardzo niejednorodnem, szczególne ostrożności są potrzebne, aby zapewnić teorji niesprzeczność. Abstraktami tej równoliczności będą *liczby całkowite.*

Aksjomatycznie zbudowana Arytmetyka Liczb Całkowitych, jak naprz. w systemie Peany, rozpoczyna wprost od *drugiego, już abstrakcyjnego piętra.* Teorje Russella czy Fregego, zaczynające wprost od równoliczności napotykają po dziś dzień na znaczne trudności, które bynajmniej nie są jeszcze dostatecznie wyjaśnione.

Rozdział VII.

Teorja Wielkości.

§ 1. Wielkości w sensie szerszym.

1. **Wstęp.** Rozdział o wielkościach należy do tradycyjnych w dawniejszych, a także i wielu nowszych podręcznikach. Dawniejsze książki zadowalały się rzekomem określeniem: „wielkością zwiemy to, co ulec może powiększeniu lub pomniejszeniu“. Nowsze dzieła mówiły już o różnych „klasach wielkości“, jak naprz. odcinkach, polach, objętościach, ciężarach i t. p., przyczem zapominały zauważyć, że jedna i ta sama klasa czy zbiór może stanowić zapas przedmiotów rozważanych w *różnych* systemach wielkości, jak naprz. bryły materjalne rozważane i porównywane co do objętości lub ciężaru czy też temperatury. Badania szkoły włoskiej, po wstępnych, a sumiennych rozważaniach Bettazziego,

ujawniły różne systemy aksjomatyczne dla teorji wielkości (Burali-Forti, Padoa). Russell w *Principles of Mathematics* poddał pojęcie wielkości głębokiej analizie z punktu widzenia, tak filozoficznego, jak i logiczno-matematycznego. Ujawnił się przytem podział przynajmniej na dwie duże grupy odnośnych zespołów pojęciowych: wielkości w sensie *szerszym*[1] („intenzjonalnych") i wielkości *dodawalnych*. Trzeba zaznaczyć, że kwestje straciły dla matematyki wiele na żywotności, natomiast interesują dalej ze stanowiska zastosowań.

2. **Określenie.** *Systemem wielkości w sensie szerszym* nazwiemy system 3-członowy:

$$(A\,;\equiv\,;\prec).$$

gdzie:

(1) A jest klasą.

(2) $\equiv$ jest jakąś relacją *równoważności*, której *polem* jest A.

(3) $\prec$ jest pewnym *quasi-porządkiem, związanym z równoważnością* „$\equiv$", to znaczy, że:

(α) $\prec$ jest *relacją jednorodną*.

(β) *Polem* $\prec$ jest pole „$\equiv$", a więc *klasa* A.

(γ) Gdy x i y należą do $C(\prec)$, a więc do A, to *jedno* i *tylko jedno z trojga* zachodzi:

$$x \prec y,\ x \equiv y,\ y \prec x.$$

(δ) związek: $x \prec y$ jest *niezmienniczy* wobec równoważności „$\equiv$".

(ε) relacja $\prec$ jest *przechodnia*.

Uw. 1. Pisać będziemy $x \succ y$ dla zaznaczenia,

---

[1] p. St. Zaremba. Arytmetyka Teoretyczna, Kraków 1912.

że $y \prec x$, o ile tego zajdzie potrzeba; quasi-porządek „$\prec$“ związany z równoważnością „$\equiv$“ nazwiemy też „$\equiv$ — porządkiem“ lub krótko „porządkiem równoważnościowym“.

Uw. 2. Gdyby „$\equiv$“ było wprost *identycznością* wśród elementów klasy A, to „$\prec$“ byłoby prawdziwym *porządkiem* (w sensie Cantora).

Tw. 1. $x \varepsilon A : \supset : x \equiv x$

2. $x \equiv y : \supset : y \equiv x$
3. $x \equiv y \cdot y \equiv z : \supset : x \equiv z$
4. $x, y \varepsilon A : \supset : x \equiv y \vee x \prec y \vee x \succ y$
5. $x \equiv y : \supset : \sim (x \prec y) \cdot \sim (x \succ y)$

[$\sim$ czyt. „nie“, (przeczenie)]

6. $x \prec y : \supset : \sim (x \equiv y) \cdot \sim (x \succ y)$
7. $x \succ y : \supset : \sim (x \equiv y) \cdot \sim (x \prec y)$
8. $x \prec y \cdot y \prec z : \supset : x \prec z$
9. $x \succ y \cdot y \succ z : \supset : x \succ z$
10. $x \prec y \cdot y \equiv z : \supset : x \prec z$
11. $x \equiv y \cdot y \prec z : \supset : x \prec z$
12. $x \succ y \cdot y \equiv z : \supset : x \succ z$
13. $x \equiv y \cdot y \succ z : \supset : x \succ z$.

Dem.

1, 2, 3 mówią, że „$\equiv$“ jest *równoważnością* [str. 17].

4, 5, 6, 7 są innem wysłowieniem własności (3) (γ) definicji.

8, 9 wynikają z (3) (ε), ew. po zastosowaniu umowy co do znaku $\succ$.

10, 11, 12, 13 stwierdzają, że związek typu $a \prec b$ (a więc i typu $a \succ b$) jest *niezmienniczy* wobec „$\equiv$“.

Grupę twierdzeń 1—13 oznaczymy przez ($\mathcal{H}'$).

3. Zastosowanie zasady abstrakcji.

Ponieważ $\equiv$ jest *równoważnością*, więc narzuca nam się możność zastosowania tutaj i skorzystania z *zasady abstrakcji*. Obierzmy jakikolwiek *operator abstrahujący* równoważność $\equiv$ i oznaczmy:

(I) Klasę wszystkich *abstraktów elementów* klasy A przez B.

(II) Związek *niezmienniczy* $x \prec y$ zabstrahujmy, kładąc:

$$a < b \overset{\mathrm{df}}{=} \text{„}x \prec y\text{, gdy tylko } abs(x) = a \text{ i } abs(y) = b\text{“}.$$

Rozważmy teraz system:

$$(B; <).$$

Udowodnimy tu interesujące twierdzenie:

Tw. System $(B; <)$ jest *systemem porządkowym w sensie Cantora.*

Dem.

1. Ponieważ abstrakty elementów klasy A powstały przez zastosowanie do elementów klasy A pewnego *operatora*, a więc *relacji*, zatem B jako *zapas* (przeciwdziedzina) tego operatora jest ***klasą***.
2. Nieco dłuższy dowód, oparty o zasady ogólnej teorji relacyj, przekonałby nas, że $<$ jest relacją.
3. $a < b$ zachodzić może tylko wtedy, gdy $a, b \varepsilon B$, więc $C(<) \subset B$. Atoli, gdy odwrotnie $a, b \varepsilon B$ i $a \neq b$, to $a = abs(x)$ i $b = abs(y)$ dla pewnych x i y. Wtedy jednak:

$$x \equiv y \text{ lub } x \prec y \text{ lub } y \prec x.$$

Gdy $x \equiv y$, to $a = b$ (abstrakty!!), co odpada. Gdy $x \prec y$, to już $abs(x) < abs(y)$ czyli $a < b$

[p. str. 118], gdyż $x \prec y$ jest związkiem *niezmienniczym.*

Gdy $y \prec x$, to już $b < a$.

Stąd: (α) $a, b \in C(<)$, co dowodzi, że $B \subset C(<)$, a więc łącznie z poprzedniem, że

$$C(<) = B;$$

(β) gdy $a, b \in C(<)$ i $a \neq b$, to

$a < b$ lub $b < a$. [spójność].

4. Gdy $a < b$, to $a = abs(x)$, $b = abs(y)$ dla pewnych x i y z klasy A i jeszcze $x \prec y$, co wyklucza $y \prec x$, a więc temsamem wyklucza $abs(y) < abs(x)$, czyli $b < a$ [asymetrja].

5. Gdy $a < b$ i $b < c$, to:

$$a = abs(x),\ b = abs(y),\ c = abs(z)$$

dla pewnych x, y, z i przytem:

$$x \prec y \text{ i } y \prec z,$$

więc $x \prec z$, a zatem $abs(x) < abs(z)$,

czyli: $a < c$ [przechodniość].

Udowodnione własności stwierdzają nam właśnie, że $(B\,;\,<)$ jest *systemem porządkowym* [p. str. 60 i 65].

4. **Uwagi o teorji poprzedniej.**

Mamy tu dobry przykład budowy pewnej teorji matematycznej. Dano nam na początek pewną *relację równoważności* „$=$“. Klasę A można było nawet określić wprost jako *pole* tej równoważności. Nie uczyniliśmy tego, lecz załatwili tę sprawę drogą postulatu (1) i części postulatu (2) jedynie ze względów dydaktycznych. Założenia nasze (3) wprowadziły *aksjomatycznie* pewną *relację* $\prec$, o wymienionych tamże własnościach, *będącą niezmiennikiem równoważności* „$=$“. Przez chwilę budowaliśmy teorję tak wprowadzoną w jej *pierwszym etapie* [tw. 1—13]. Natychmiast jednak przenieśliśmy się wyżej o jedno piętro, korzystając z *teorji abstrakcji*. Pokazało się, że *drugie piętro* tej teorji pozwala nam wykorzystać twierdzenia teorji porządku. Zauważmy teraz, że jeśli dano nam system porządkowy $(B; <)$ i przez $=_B$ oznaczymy *identyczność* zwężoną do klasy B, to system:

$$(B; =; <)$$

będzie systemem wielkości w sensie szerszym i przez abstrakcję bardzo elementarną (zważywszy, że tu równoważnością jest $=_B$), a mianowicie przez położenie:

$$abs(x) \overset{\mathrm{df}}{=} x \quad \text{dla } x \varepsilon B,$$

otrzymamy właśnie system $(B; <)$. A więc: *Ogólna teorja porządku Cantorowskiego, to tylko drugie, abstrakcyjne piętro teorji wielkości w sensie szerszym.*

W rozdziale V budowaliśmy niejako odrazu drugie piętro naszej obecnej teorji. Atoli tam systemy porządkowe, dzięki wprowadzeniu *równoważności*, jaką jest *izomorfja porządkowa*, stały się elementami nowej *teorji matematycznej* niezmienników izomorfji (coprawda obarczonej różnemi utrudniającemi okolicznościami p. str. 113).

Dalszy rozwój teorji *danego systemu* wielkości (w sensie szerszym) zależeć będzie od szczególnych jego właściwości, które zadecydują też pośrednio o *typie porządkowym*, jaki posiadać będzie system porządkowy etapu abstrakcyjnego tegoż systemu wielkości. Zauważmy tu, że jak wyniknie z późniejszych rozważań arytmetycznych, relacja *mniejszości* posiada:

(1) wśród liczb *rzeczywistych względnych* typ λ
(2) „ „ „ *nieujemnych* „ $1+\lambda$
(3) „ „ *wymiernych względnych* „ η
(4) „ „ „ *nieujemnych* „ $1+\eta$
... i t. d.

Jeżeli teraz dany nam system wielkości $(A; \equiv; \prec)$ rodzi przez abstrakcję system porządkowy $(B; <)$ typu: λ, $1+\lambda$, czy $1+\eta$, to będziemy mogli, dzięki każdorazowej izomorfji, odwzorować elementy *klasy* B na ogół liczb *rzeczywistych względnych, rzeczywistych bezwzględnych, wymiernych względnych*, czy też *wymiernych bezwzględnych* (zależnie od wypadku) przy pomocy jakiejś relacji *doskonałej* T *„zachowującej“ porządek* $<$.

Liczby, pośrednio przypisane elementom klasy A w ten sposób, że najpierw przechodzimy od x należącego do A do jego abstraktów a, a następnie od a do liczby $T(a)$, będą *nowemi abstraktami* dla elementów klasy A. W ten sposób wprowadzimy w klasę A *skalę mierniczą (liczbową)*, podczas gdy system $(B; <)$ stanowił już pewną *skalę abstrakcyjną* dla systemu. W szczególności, gdy abstrakty uprzednie były uzyskane przez *reprezentację*, powiemy, że skala *abstrakcyjna* była *skalą wzorcową* naszego systemu.

W zastosowaniach *konkretnych*, jak naprz. w wypadku: (1) ciał fizycznych porównywanych co do temperatur, (2) ciał fizycznych co do ciężaru, (3) dźwięków co do ich wysokości, (4) minerałów co do ich twardości, (5) wrażeń co do ich natężenia, i t. p. mamy do czynienia z systemami *konkretnych* zespołów, *konkretnych* związków równoważnościowych czy quasi-porządkowych i dopiero idealizacja i schematyzacja naukowa przetwarza to wszystko hipotetycznie w idealny system wielkościowy.

W *konkrecie* własności rzeczywiste, którym później będą odpowiadały w schemacie naukowym własności teoretyczne systemu wielkościowego są spełnione tylko w sensie empirycznym. Wypadki takie jak (4) i (5), a właściwie i (3) prowadzą do skal $(B; <)$ typu ω i skale są tu izomorfijne z systemem $(N_0, <_r)$. Są to skale „dyskretnych" stopni „natężenia" danej wielkości.

Zauważmy, też, że w hipotezie atomowej struktury materji to samo można powiedzieć i o ciałach materjalnych, porównywanych co do ich ciężaru (przynajmniej w pewnych teorjach fizycznych).

Zależnie od tego, czy system porządkowy $(B; <)$ *posiada minimum* czy *nie*, moglibyśmy odróżniać dwa gatunki systemów wielkości: *bezwzględnych* i *względnych*.

§ 2. Wielkości dodawalne.

5. **Wstępne uwagi.** W teorji t. zw. *wielkości dodawalnych* (addytywnych) lub *„wielkości w sensie ściślejszym"* mamy do czynienia z *klasą elementów, równoważnością* i *quasi-porządkiem*, których polem jest dana nam klasa, oraz z pewną relacją, której ujęcie poprawne, a możliwie zgodne z tradycyjnem pojmowaniem tej sprawy stwarza pewne trudności. Idzie tu w istocie o wprowadzenie

pojęcia *sumy elementów* danej nam zasadniczej klasy. Trudność polega na tem, że tradycyjne ujęcie nie stwarza tu wcale *działania* dodawania, co byłoby najprostszem, lecz określa sumę elementów *niejednoznacznie*. Naprz. w teorji *odcinków porównywanych* co do *długości*, sumą odcinków danych nie jest bynajmniej jeden jedyny, w pewien sposób wyznaczalny odcinek, lecz nieskończenie wiele odcinków może być uważanych za sumę danych, przyczem są one równoważne w tej teorji między sobą. Byłoby nawet dość kłopotliwem próbować określić sumę odcinków w sposób jednoznaczny, zrywając z jednej strony z tradycją, lecz starając się od niej odchylić możliwie mało. Załatwimy się z tą kwestją w sposób, który zdaniem mojem jest jeszcze może najprostszy, atoli i tak wprowadza elementy (przynajmniej na początek), których nie spotyka się w klasycznem książkowem ujęciu.

Czytelnik zechce mieć przed oczyma jakiś szczególny przykład teorji, może najprościej teorję długości odcinków z jej odcinkami, przystawaniem, mniejszością i dodawaniem.

6. **Określenie.**

Def. *Systemem wielkości dodawalnych* nazwiemy system 4-członowy:

$$(A\,;\,\equiv\,;\,\prec\,;\,S),$$

gdzie:

I. System $(A\,;\,\equiv\,;\,\prec)$ jest *systemem wielkości w sensie szerszym* [p. § poprz.].

II. S jest relacją między *parami elementów*, a *elementami* — przyczem

$$(a, b)\, S c$$

czytać będziemy: „*c sumuje a i b*".

III. Zachodzą następujące związki:

(α) $(a, b)\, S c : \supset : a, b, c \,\varepsilon\, A$;

(β) gdy $a, b \,\varepsilon\, A$, to istnieje c takie, że

$$(a, b)\, S c;$$

(γ) $a \equiv a'$, $b \equiv b'$, $c \equiv c'$ i $(a, b)\, S c$ pociągają:

$$(a', b')\, S c'$$

[niezmienniczość];

(δ) $(a, b)\, S c \,.\, (a, b)\, S c' : \supset : c \equiv c'$;

(ε) $(a, b)\, S c : \supset : (b, a)\, S c$

[quasi-przemienność].

(ζ) $(a, b)\, S c \,.\, (c, d)\, S e \,.\, (b, d)\, S f : \supset : (a, f)\, S e$

[quasi-łączność].

IV. $(a, b)\, S c \,.\, (a', b)\, S c' \,.\, a \prec a' : \supset : c \prec c'$

[quasi-monotonja].

7. **Własności ogólne.** Uzasadnimy tu kilka twierdzeń ważnych dla wszelkich systemów spełniających I—IV.

Tw. 1. *Dziedziną* relacji S jest klasa wszelkich *par* (a, b) elementów klasy A.

Przeciwdziedzina S jest klasą zawartą w klasie A.

Dem. (1) Wynika z III α i III β, (2) wynika zaś z III α.

Tw. 2. $(a, b)\, S c$ i $(a, b)\, S c'$ zachodzą wtedy i tylko wtedy jednocześnie, gdy $c \equiv c'$.

Dem. Jest to szczególny wypadek III γ (dzięki I) oraz warunek III δ.

Tw. 3. $(a, b)\, S c \,.\, (a', b)\, S c : \supset : a \equiv a'$

[quasi-jednotliwość lewostronna].

Dem. Wiedy $a \varepsilon A$ i $a' \varepsilon A$, więc jedno z trojga:

$a \prec a'$ lub $a \equiv a'$ lub $a' \prec a$.

Atoli: $a \prec a'$, $(a, b) S c$ i $(a', b) S c$ dałyby (IV.) nam $c \prec c$ co wykluczone;
$a' \prec a$ analogicznie pociągnęłoby $c \prec c$.

Pozostaje: $a \equiv a'$.

Tw. 4. $(a, b) S c . (a, b') S c : \supset : b \equiv b'$.

Dem. Założenia pociągają, że

$(b, a) S c$ i $(b', a) S c$,

a stąd już: $b \equiv b'$.

Tw. 5.

(1) $(a, b) S c . (a', b') S c' . a \equiv a' . b \equiv b' : \supset : c \equiv c'$

(2) $(a, b) S c . (a', b') S c' . a \equiv a' . c \equiv c' : \supset : b \equiv b'$

(3) $(a, b) S c . (a', b') S c' . b \equiv b' . c \equiv c' : \supset : a \equiv a'$.

Dem.

(1) $(a, b) S c$. $a \equiv a' . b \equiv b'$ pociągają (III γ) $(a', b') S c$, a stąd łącznie z $(a', b') S c'$ i tw. 2, mamy $c \equiv c'$.

(2) i (3) analogicznie.

Tw. 6. [*Zasadnicze*]. Jeżeli dla systemu $(A; \equiv; \prec)$ spełniającego warunek I określimy działanie „$+$" i założymy, że działanie to jest:

(1) *nieograniczenie wykonalne* i *wewnętrzne* w klasie A;

(2) quasi-*przemienne* i quasi-*łączne* w A, to znaczy:

$a, b \varepsilon A : \supset : a + b \equiv b + a$

$a, b, c \varepsilon A : \supset : a + (b + c) \equiv (a + b) + c$.

(3) *niezmiennicze* wobec $\equiv$;

(4) posiada własność, że:

$a \prec a' . b \varepsilon A : \supset : a + b \prec a' + b$;

i jeżeli określimy relację S, kładąc:

$$(a, b) S c . \overset{\mathrm{df}}{=} . a + b = c,$$

to system: $(A; =; \prec; S)$ spełnia warunki I—IV.

Dem. (1) da nam natychmiast II, III α i III β;

(2) da nam najpierw, że $(a, b) S c$ pociąga $a + b = c$, więc $b + a = c$, czyli $(b, a) S c$ [III ε],

następnie: związki $(a, b) S c$, $(c, d) S e$ i $(b, d) S f$ dadzą: $a + b = c$, $c + d = e$, $b + d = f$, więc:

$$a + f = a + (b + d) = (a + b) + d = c + d = e,$$

czyli $(a, f) S e$. [III ζ].

(3) da nam z założeń:

$a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ i $(a, b) S c$, że $a + b = c$, $a' + b' = a + b$, $a' + b' = c$ i $a' + b' = c'$; [III γ];

definicja i I dadzą z założeń $(a, b) S c$ i $(a, b) S c'$, że $a + b = c$; $a + b = c'$, więc $c = c'$ [III δ].

(4) da nam z założeń:

$$(a, b) S c, (a', b) S c', a \prec a',$$

że: $a + b = c'$, $a' + b = c'$, $a + b \prec a' + b$, więc $c \prec c'$. [IV].

Uw. Należy zauważyć, że określenie *jednoznaczne* sumy, a nie tylko wprowadzanie relacji *sumującej* S, zdarza się wyjątkowo w ujęciu klasycznem różnych systemów wielkości. W wielu wypadkach określenie *jednoznaczne* sumy napotyka nawet na przeszkody praktyczne, które uświadomimy sobie łatwo, zastanawiając się naprz. nad teorją odcinków porównywanych co do długości lub wielokątów porównywanych, co do ich pól, gdzie naprz. relacją równoważności jest Hilbertowska „równość przez rozkład“ [Zerlegungs-gleichheit].

W teorji odcinków możnaby zawrzeć umowę, że sumy będziemy tworzyli na *stałej* prostej od *stałego* punktu tej prostej począwszy i po *stałej* stronie tego punktu. Uzyskalibyśmy tą sztuczną drogą jednoznaczność, atoli łatwo widzieć, bardzo niewygodną w praktyce.

8. **Suma symboliczna.** Wprowadzimy jednak symbol sumy $a+b$ w wypadku, gdy nawet relacja *sumująca* S nie jest *działaniem* (jednoznacznem) w następujący sposób:

Def. 1. *Nie określając* samego symbolu $a+b$, umówimy się, że *zwrot:* orzeczenie Φ zachodzi dla $a+b$, czyli $\Phi(a+b)$ rozumieć będziemy tak:

$\Phi(a+b) :\overset{\text{df}}{=}:$ (1) „istnieje takie c, że $(a, b)\, S c$ oraz
(2) *każde* c *takie, że* $(a, b)\, S c$ *spełnia warunek* Φ“.

Analogicznie:

Def. 2. Zwrot: $\Phi(a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n)$ rozumiemy tak:

(1) istnieją takie $c_1, \ldots, c_n$, że $(a_1, b_1)\, S c_1, \ldots$ $\ldots, (a_n, b_n)\, S c_n$ oraz

(2) zachodzi $\Phi(c_1, \ldots, c_n)$, gdy tylko
$$(a_1, b_1)\, S c_1, \ldots, (a_n, b_n)\, S c_n.$$

Uw. 1. Gdy tylko $a, b \varepsilon A$, to istnieje takie c, że $(a, b)\, S c$ [III β], warunek (1) def. 1 i def. 2 można zatem zastąpić przez orzeczenia:
$$a, b \varepsilon A \quad \text{względnie:} \quad a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \varepsilon A.$$

Uw. 2. Jeżeli zachodzi $\Phi(a+b)$, to wynika stąd iż: $a, b \varepsilon A$.

Przykłady:

I. $a+b=c$ oznacza:

$a, b \varepsilon A$ i gdy tylko $(a, b) Sz$, to $z = c$, {stąd też $c \varepsilon A$}.

II. $a+b \prec c$ oznacza:

$a, b \varepsilon A$ i $z \prec c$, gdy tylko $(a, b) Sz$.

III. $a+b=c+d$ oznacza:

$a, b, c, d \varepsilon A$ i $x = y$, gdy tylko $(a, b) Sx$ i $(c, d) Sy$.

Uw. Powyższy sposób określania orzeczeń o pewnym symbolu bez określania samego symbolu, jak to mamy w wypadku $a+b$, nazywa Russell „definition in use", czyli „definicją roboczą". Matematyka posługuje się dość często tym sposobem, określa naprz. „$\sqrt{a}$" *nie* określając samego „$\sqrt{\ }$" i t. p.

9. **Twierdzenia o symbolicznej sumie.**

Tw. 1. $a, b \varepsilon A : \supset : a+b \varepsilon A$.

Dem. Gdyż, skoro tylko $(a, b) Sz$, to $z \varepsilon A$ [III α].

Tw. 2. $a, b \varepsilon A . a = a' . b = b' : \supset : a+b = a'+b'$.

Dem. Istnieją i wybieram takie c i c', [IIIβ], że $c, c' \varepsilon A$ i $(a, b) Sc$ oraz $(a', b') Sc'$.

Wtedy (III δ) $c = c'$.

Gdy teraz $(a, b) Sx$ i $(a', b') Sy$, to

$x = c$, $y = c'$, więc $x = y$.

Stąd już: $a+b = a'+b'$.

Tw. 3. $a+b = c . a+b = c' : \supset : c = c'$.

Dem. Wtedy $(a, b) Sc$ i $(a, b) Sc'$, więc $c = c'$.

Cor. $a = a' . b = b' . c = c' . a+b = c : \supset : a'+b' = c'$.

Uw. Wyrażenie $a + b = c$ jest zatem *niezmiennicze* wobec $\equiv$.

Tw. 4. $a, b \varepsilon A : \supset : a + b \equiv b + a$.

Dem. Istnieje i obieram takie c, że $(a, b) S c$. Wtedy (III ε) zachodzi $(b, a) S c$. Jeżeli teraz: $(a, b) S x$, $(b, a) S y$, to

$$x \equiv c \text{ i } y \equiv c, \text{ więc } x \equiv y.$$

Tw. 5. $a, b, c \varepsilon A : \supset : (a + b) + c \equiv a + (b + c)$.

Dem. Zastanówmy się najpierw, co oznacza orzeczenie Φ o $(a + b) + c$, czyli $\Phi[(a + b) + c]$. Stosując poprzednią definicję zrozumiemy, że

$$\Phi[(a + b) + c] . \overset{\mathrm{df}}{=} . \Phi(z)$$

dla każdego z takiego, że $(a + b, c) S z$.

Atoli: $(a + b, c) S z$ oznacza dalej, że „$(w, c) S z$ dla każdego w takiego, że $(a, b) S w$". Ostatecznie:

$\Phi[(a + b) + c] . \overset{\mathrm{df}}{=} . \Phi(z)$, gdy tylko zachodzą:

$$(a, b) S w \text{ i } (w, c) S z.$$

Analogicznie zrozumiemy, co oznacza

$$\Phi\{(a + b) + c, a + (b + c)\}.$$

Niechaj teraz: $(a, b) S w$, $(w, c) S z$, $(b, c) S x$ i $(a, x) S y$ zachodzą.

Wtedy (III ζ) mają miejsce: $(a, x) S z$ i $(a, x) S y$. Stąd: $y \equiv z$, co dowodzi twierdzenia.

Tw. 6. $a \prec a' . b \varepsilon A : \supset : a + b \prec a' + b$.

Dem. Istnieją i obieram takie c i c', że $(a, b) S c$ i $(a', b) S c'$. Wtedy $c \prec c'$ [IV]. Jeżeli teraz $(a, b) S x$ i $(a', b) S y$, to $x \equiv c$, $y \equiv c'$, więc

$$x \prec y.$$

Analogicznie udowodnilibyśmy, że cała grupa twierdzeń, którą oznaczyliśmy przez ($\mathcal{K}$)(str. 128) zachodzi w wypadku, gdy którykolwiek ze składników orzeczeń tam przychodzących zastąpimy przez symboliczną sumę elementów klasy A. Dowody tych twierdzeń, jakoteż dalsze twierdzenia teorji tej postaci pozostawiamy już czytelnikowi.

10. **Dalsze symboliczne wyrażenia w teorji wielkości.**

Wprowadzimy jeszcze kilka symboli przy pomocy „definicji roboczej".

Różnica. Def. 1. Orzeczenie $\Phi(a-b)$ ma oznaczać, że:

(1) istnieje takie x, że $(b, x)\, S\, a$;
(2) dla każdego z takiego, że $(b, z)\, S\, a$ mamy $\Phi(z)$.

Uw. Z uwagi na to, że $(b, z)\, S a$ i $(z, b)\, S a$ są orzeczeniami równoważnemi, nie wprowadzamy odrębnych symboli „lewej" i „prawej" różnicy. Analogicznie określamy orzeczenie o kilku różnicach czy „różnicach" i „sumach" symbolicznych.

Tw. 1. $a+b\equiv c : \supset : c-a\equiv b$.

Dem. Założenia stwierdzają, że (1) istnieje takie x, że $(a, b)\, S x$ i $x\equiv c$, zatem (2) $(a, b)\, S c$, stąd (3) istnieje takie z, że $(a, z)\, S c$ i $z\equiv b$, więc też (4) każde y takie, że $(a, y)\, S c$ będzie spełniało: $y\equiv b$.

Tw. 2. $a-b\equiv c : \supset : b+c\equiv a$.

Dem. Założenie stwierdza, że: (1) istnieje z takie, że $(b, z)\, S a$, (2) każde takie z spełnia: $z\equiv c$,

(3) zatem $(b, c) S a$, a więc $b, c \varepsilon A$ i skoro $(b, c) S x$, to już $x = a$.

Wielokrotność.

Def. 2. Gdy $a \varepsilon A$ i n jest liczbą *naturalną* $[n \varepsilon N_1]$, to:

(α) $\Phi(1 \,.\, a) \,.\overset{\mathrm{df}}{=}.\, \Phi(a)$.

(β) $\Phi((n+1) \,.\, a) \,.\overset{\mathrm{df}}{=}.\, \Phi(n \,.\, a + a)$.

Moglibyśmy też powiedzieć, że:

$$\left.\begin{array}{lll} (\alpha') & 1 \,.\, a & \text{oznacza u nas } a \\ (\beta') & (n+1) \,.\, a & \text{oznacza zaś } n \,.\, a + a. \end{array}\right|$$

Tw. Gdy $a \varepsilon A$ i $n \varepsilon N_1$, to istnieje takie b, że $n \,.\, a = b$. i $b \varepsilon A$.

Dem. 1. Dla $n = 1$ mamy $a = a$, więc wedle umowy: $1 \,.\, a = a$;

2. gdyby twierdzenie było słuszne dla danego n, to obierzemy takie k, że $n \,.\, a = k$ i $k \varepsilon A$. Wtedy istnieje i obierzmy takie b, iż $(k, a) S b$. Otrzymamy:

$$k + a = b \text{ i } b \varepsilon A.$$

a stąd już $n \,.\, a + a = b$, więc z definicji:

$$(n+1) \,.\, a = b.$$

3. Indukcja matematyczna kończy dowód.

Podwielokrotność.

Def. 3. Dla $a \varepsilon A$ i n naturalnego rozumiemy zwrot $\Phi\left(\frac{a}{n}\right)$ jak następuje:

(1) istnieje takie b, że $n \,.\, b = a$,

(2) każde z takie, że $n \,.\, z = a$ spełnia Φ.

Def. 4. Jeżeli dla każdego a należącego do A i każdego n naturalnego *istnieje* b, należące do A i takie, że $n \, . \, b \equiv a$, to mówimy, iż system wielkości dodawalnych $(A \, ; \equiv ; \prec ; S)$ jest też systemem wielkości *podzielnych*.

Udowodnilibyśmy łatwo, że wyrażenia:

$$\left.\begin{array}{l} a - b \equiv c \\ n \, . \, a \equiv b \\ \dfrac{a}{n} \equiv b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{dla } n \text{ naturalnego} \\ a, b, c \, \varepsilon \, A \end{array}$$

są *niezmienniczemi* wobec $\equiv$. Dowody pozostawiamy czytelnikowi.

11. **Moduły.**

Def. Element a klasy A nazwiemy quasi-modułem relacji sumującej S, gdy dla każdego x należącego do A mamy:

$$(a, x) \, S x \, . \, [\text{a więc też } (x, a) \, S x].$$

Tw. 1. Gdy x i y są quasi-modułami dla S, to $x \equiv y$.

Dem. Wtedy: $(x, a) \, S x$ i $(x, y) \, S x$, zatem $x \equiv y$.

Uw. *Orzeczenie* „x jest quasi-modułem S“ ma charakter *niezmienniczy* wobec $\equiv$.

Czytelnik zauważy, że:

$$a \, \varepsilon \, A \text{ i } x \text{ jest quasi-modułem } S$$

pociągają:

$$a + x \equiv a \text{ i } x + x \equiv x.$$

Tw. 2. Gdy $(a, b) \, S a$, to b jest quasi-modułem S.

Dem. Niechaj $p \, \varepsilon \, A$, $(p, b) \, S m$, $(m, a) \, S n$, to, skoro $(a, b) \, S a$, więc też $(b, a) \, S a$ otrzymamy: [III ζ]: $(p, a) \, S n$. Stąd już [III δ]: $m \equiv p$ i $(p, b) \, S p$. Element p był jednak dowolnie obrany w klasie A.

Uw. 1. Analogicznie $a+x\equiv a$ czy $x+x\equiv x$ pociąga już, że x jest quasi-modułem S.

Uw. 2. Dla ogólności nie włączyliśmy w definicji systemu wielkości dodawalnych postulatu o istnieniu quasi-modułu dla S.

12. **Zastosowanie zasady abstrakcji.** Omówimy tu krótko tylko wynik zastosowania zasady abstrakcji w jakiejkolwiek jej postaci do systemu wielkości dodawalnych. Kwestja ta nie przedstawia dla nas większego interesu, dlatego pomijamy szczegółowe rozważania.

Obierzmy zatem dla systemu wielkości dodawalnych $(A; \equiv; \preccurlyeq; S)$ jakiś operator abstrahujący i wprowadźmy:

(1) Klasę M abstraktów elementów klasy A;

(2) związek $\alpha < \beta$ abstrahujący $a \preccurlyeq b$, gdy α jest abstraktem a i β jest abstraktem b;

(3) funkcję (działanie) $\alpha+\beta$ abstrahujące związek $(a, b)\,S\,c$, gdzie α i β i γ są abstraktami a, b i c w postaci: $\alpha+\beta=\gamma$. [p. str. 120].

Otrzymamy wtedy system:

$$(M; <; +),$$

gdzie:

(1) M jest klasą,

(2) $(M; <)$ jest porządkiem [str. 130],

(3) $+$ jest działaniem:

(α) w klasie A, nieograniczenie wykonalnem i wewnętrznem w tej klasie;

(β) przemiennem i łącznem;

(γ) jednotliwem.

Łatwe dowody poszczególnych punktów tego twierdzenia pozostawiamy czytelnikowi.

Rozdział VIII.

Wielkości i liczby wymierne.

§ 1. Wielkości wymierne.

1. **Wstęp geometryczny.** Geometrja wprowadziła pierwsze rozważania szeregu ważnych praktycznie systemów wielkości. Systemy te, jak naprz. system wielkości, jaki tworzą *odcinki* z ich *przystawaniem, mniejszością i sumowaniem*, lub *figury wieloboczne* z ich *równoważnością przez rozkład, mniejszością* i odpowiednią zasadą *sumacyjną*, czy też *bryły wielościenne* porównywane co do *objętości* i t. p. są to systemy wielkości *dodawalnych* i *podzielnych*, posiadające jeszcze inne cechy szczególne, które nie wchodzą w skład definicji ogólnej. Za geometrją poszła fizyka, wprowadzając również systemy wielkości o analogicznych własnościach w teorji *ciężarów, ilości ciepła, ładunków elektrycznych* czy *magnetycznych* i t. d. We wszystkich odnośnych tu teorjach powstaje od dawnych bardzo stadjów tych teoryj idea *mierzenia jednych* wielkości przy pomocy *innych* tego samego rodzaju. Idea ta pokrywa się z ideą tworzenia *stosunków* dwu wielkości danego systemu. Do rozważania tej ostatniej kwestji, a więc do zdania sobie sprawy, co zechcemy w teorji danego systemu wielkości dodawalnych i podzielnych uważać za *stosunek* dwu wielkości tego systemu przystąpimy obecnie. Zaprowadziło by nas zbyt daleko wdawanie się w kwestję filozoficznego znaczenia teorji mierzenia czy stosunków, jakoteż w rozważania na temat doniosłości praktyczno-życiowej tych zagadnień. Ujmiemy

rzecz całą ze stanowiska formalnego, którego utrwalenie się poprzedziła długa praca badawcza.

Zadamy sobie teraz jakiś *system wielkości bezwzględnych, dodawalnych* i *podzielnych*.

$$(A; \equiv; \prec; S)$$

i postaramy się o określenie pojęcia *stosunku* dwu wielkości a i b dowolnych tego *systemu*.

Idea stosunku rozwijała się atoli w *trzech* etapach, które dla ich kapitalnej ważności przejdziemy kolejno.

I Etap. Dano nam wielkości a i b naszego systemu. Przypuśćmy, że:

1° $a \equiv n . b$ [n całkowite, $\geqq 1$ p. str. 142].

2° liczba n jest jedyną.

Wtedy stosunkiem a/b nazwiemy ową liczbę n.

Dodatkowo:

gdy 1° a jest quasi-modułem sumowania,

2° *nieistnieje* liczba *naturalna* n taka, by $a \equiv n . b$,

3° b nie jest quasi-modułem,

to przez stosunek a/b rozumieć będziemy liczbę *zero*.

Zamiast wyrażenia: „stosunek wielkości a i b" możemy wedle tradycji mówić:

„miara wielkości a w jedynostce b".

W ten sposób ustalone pojęcie stosunku wystarcza w praktyce dość rzadko.

Albo, mianowicie, konkretnie rzecz biorąc, chcemy się zadowolić przybliżeniem, wtedy zbyt często dokładność tak osiągnięta nie wystarcza, lub też z teoretycznego punktu widzenia definicję naszą musimy uważać za taką, która obejmuje niewiele tylko wypadków par wielkości danego systemu. Poza nią pozostanie większość par, których stosunku definicja nasza nie pozwala oznaczyć.

Dodatniemi stronami tego ujęcia są jednak fakty, że 1° wystarczają tu liczby całkowite, 2° stosunek określony w ten sposób jest *niezmiennikiem równoważności,* a więc, gdy para (a, b) ma stosunek a/b i $a \equiv a'$, $b \equiv b'$, to para (a', b') posiadać będzie również stosunek a'/b' *równy* poprzedniemu:

$$a'/b' = a/b.$$

II Etap. Rozważamy w dalszym ciągu system wielkości $(A; \equiv; \prec; S)$ *bezwzględnych, dodawalnych* i *podzielnych.* Mamy tu najpierw definicję:

Def. Wielkości a i b naszego systemu nazwiemy *spółmiernemi,* jeżeli znajdą się:

(1) wielkość c; (2) liczby całkowite m i n takie, że:

$$a \equiv m \cdot c$$
$$\text{i} \quad b \equiv n \cdot c.$$

Pojęcie *spółmierności* jest, jak łatwo widzieć, pojęciem *niezmienniczem* wobec $\equiv$.

Co więcej, w klasycznych wypadkach systemów wielkości bezwzględnych, dodawalnych i podzielnych zachodzą następujące fakty:

1° jeżeli w parze (a, b), wielkości danych, b nie jest quasi-modułem sumacji i parę liczb (m, n) całkowitych jak wyżej nazwiemy *parą mierzącą* stosunek wielkości a i b, to $n \neq 0$.

2° jeżeli pary (m, n) i (m', n') są parami mierzącemi stosunek wielkości a i b, przyczem b nie jest quasi-modułem, to pary (m, n)

i (m', n') są *proporcjonalne*, to znaczy:

$$m \times n' = m' \times n.$$

3° Jeżeli (m, n) jest parą mierzącą dla stosunku wielkości a i b, gdzie b nie jest quasi-modułem i para (m', n') jest *proporcjonalna* do (m, n), to znaczy:

$$m \times n' = m' \times n,$$

przyczem $n' \neq 0$, wtedy (m', n') *jest również parą mierzącą* stosunek wielkości a i b.

Bliższe badanie okaże, że *proporcjonalnośc* wśród par (m, n) liczb *całkowitych*, gdzie jeszcze $n \neq 0$, jest *równoważnością*. Daje to asumpt do stosowania *zasady abstrakcji*. Jeśli to uczynimy, to *stosunkiem wielkości spółmiernych* a i b, gdzie b nie jest quasi-modułem sumacji, nazwiemy *wspólny* wszystkim parom (m, n) *mierzącym* stosunek a i b *abstrakt* (względem *proporcjonalności*) *tych par*.

W tradycyjnych teorjach wielkości istnieją zazwyczaj pary wielkości *niespółmiernych*. Klasycznym przykładem jest tu odkrycie przez Szkołę Pitagorejską niespółmierności boku kwadratu i jego przekątni w teorji odcinków. W tych wypadkach definicja nasza zawodzi.

Rozwinięcie teorji stosunków, obejmującej również i stosunki wielkości niespółmiernych stanowi przedmiot III$^{\text{go}}$ etapu rozwoju teorji stosunków, który na razie pozostawimy bez omówienia. Ze stanowiska konkretnych zastosowań moglibyśmy naogół pozostać przy II etapie teorji, gdyż w praktyce pary konkretnych wielkości dodawalnych i podzielnych zawsze możemy uważać za spółmierne, pozostając w ramach dowolnie wysokich wymagań co do dokładności pomiarów.

II etap teorji mierzenia i stosunków skłania nas do zajęcia się teorją *proporcjonalności* par liczbowych (m, n), gdzie m i n są całkowite i $n \neq 0$. Do tego teraz przystępujemy.

2. **Proporcjonalność par liczb całkowitych.**

Rozważymy najpierw *klasę* A wszystkich *par* (m, n), takich że m jest liczbą całkowitą i n liczbą *naturalną* [$m \varepsilon N_0$, $n \varepsilon N_1$]. Zatem:

Def. $\alpha \varepsilon A$

oznacza: 1° $\alpha = (p'\alpha, k'\alpha)$, [p. str. 27].

2° $p'\alpha \varepsilon N_0$, $k'\alpha \varepsilon N_1$.

Def. Pary α i β klasy A nazwiemy *proporcjonalnemi*, gdy:

$$p'\alpha \times k'\beta = p'\beta \times k'\alpha.$$

Uprzedzając fakty, oznaczymy na czas naszych rozważań proporcjonalność przez $\equiv$.

Powtarzamy definicję formalnie:

$$\alpha \equiv \beta \,.\overset{\mathrm{df}}{=}.\, \alpha, \beta \varepsilon A \,.\, p'\alpha \times k'\beta = p'\beta \times k'\alpha,$$

lub inaczej:

$(m, n) \equiv (m', n')$ oznacza:

1° $m, m' \varepsilon N_0$, $n, n' \varepsilon N_1$,

2° $m \times n' = m' \times n$.

Przykłady:

$$(2, 3) \equiv (4, 6) \equiv (6, 9)\,,\ (0, 2) \equiv (0, 1),$$
$$(1, 1) \equiv (2, 2) \equiv (3, 3) \text{ i t. d.}$$

Przyjmiemy tu, że *proporcjonalność* par klasy A jest *relacją.*

Tw. [*zasadnicze*]. Relacja *proporcjonalności* jest *równoważnością* w klasie A.

Dem. Stwierdzamy kolejno:

1° Niechaj $\alpha \varepsilon A$, wtedy $p'\alpha \varepsilon N_0$, $k'\alpha \varepsilon N_1$, więc $p'\alpha \times k'\alpha = p'\alpha \times k'\alpha$, gdyż mnożenie jest tu wykonalne, a stąd: $(p'\alpha, k'\alpha) \equiv (p'\alpha, k'\alpha)$ czyli $\alpha \equiv \alpha$ [*Samozwrotność*].

2° Niechaj: $\alpha \equiv \beta$. Wtedy:

$$p'\alpha, p'\beta \varepsilon N_0, k'\alpha, k'\beta \varepsilon N_1$$

i $p'\alpha \times k'\beta = p'\beta \times k'\alpha$. Stąd:

$$p'\beta \times k'\alpha = p'\alpha \times k'\beta,$$

czyli, że $\beta \equiv \alpha$ [*Odwracalność*].

3° Niechaj: $\alpha \equiv \beta$ i $\beta \equiv \gamma$. Wtedy:

$p'\alpha, p'\beta, p'\gamma \varepsilon N_0$; $k'\alpha, k'\beta, k'\gamma \varepsilon N_1$ i

$$p'\alpha \times k'\beta = p'\beta \times k'\alpha, \quad (1)$$

$$p'\beta \times k'\gamma = p'\gamma \times k'\beta. \quad (2)$$

Stąd, przez mnożenie równości (1) i (2) przez $k'\gamma$ i $k'\alpha$:

$$p'\alpha \times k'\beta \times k'\gamma = p'\beta \times k'\alpha \times k'\gamma$$

$$p'\beta \times k'\gamma \times k'\alpha = p'\gamma \times k'\beta \times k'\alpha.$$

Lecz skoro mamy do czynienia z liczbami całkowitemi, to stąd wynika, że:

$$p'\alpha \times k'\gamma \times k'\beta = p'\gamma \times k'\alpha \times k'\beta,$$

atoli $k'\beta \neq 0$, więc:

$$p'\alpha \times k'\gamma = p'\gamma \times k'\alpha,$$

czyli: $\alpha \equiv \gamma$ [*Przechodniość*].

Polem „$\equiv$" jest klasa A, jak to wprost już z definicji i samozwrotności wynika.

Przejdziemy zatem do poszukiwania głównych *niezmienników proporcjonalności.*

3. Mniejszość.

Def. Powiemy, że para α jest *mniejsza* (w sensie naszej teorji) od pary β dla zaznaczenia, iż:

(1) $\alpha, \beta \varepsilon A$ i (2) $p'\alpha \times k'\beta < p'\beta \times k'\alpha$.[1]

Oznaczymy ten fakt przez: $\alpha \prec \beta$.

Tw. 1. Relacja $\prec$ jest *quasi-porządkiem* [str. 127] związanym z równoważnością $\equiv$ o polu A.

Dem.

1° $\prec$ jest relacją jednorodną. Rzeczywiście: $\prec$ łączy elementy klasy A z elementami tejże klasy, a więc $D'\prec$ i $G'\prec$ są zawarte w A.

2° Polem $\prec$ jest A. Widoczne: gdy $\alpha \prec \beta$, to $\alpha, \beta \varepsilon A$; gdy znów $\alpha \varepsilon A$, to łatwo stwierdzić, iż $\alpha \prec (p'\alpha + 1, k'\alpha)$, a więc: $\alpha \varepsilon D'\prec$, zatem $\alpha \varepsilon C(\prec)$, Ostatecznie:

$$C(\prec) = A.$$

3° Załóżmy, że $\alpha, \beta \varepsilon A$. Wtedy: $p'\alpha \times k'\beta$ i $p'\beta \times k'\alpha$ są liczbami całkowitemi, więc jedno i tylko jedno z trojga zachodzi:

$$p'\alpha \times k'\beta < p'\beta \times k'\alpha,$$
$$p'\alpha \times k'\beta = p'\beta \times k'\alpha,$$
$$p'\beta \times k'\alpha < p'\alpha \times k'\beta,$$

a więc jedno jedyne z trojga:

$$\alpha \prec \beta,\ \alpha \equiv \beta,\ \beta \prec \alpha.$$

4° Niechaj: $\alpha \prec \beta$, $\alpha' \equiv \alpha$, $\beta' \equiv \beta$. Wtedy najpierw: $p'\alpha \times k'\beta < p'\beta \times k'\alpha$,

---

[1] Znaki: $<$, $\times$ i jak później będziemy mieli: $+$, $-$, $/$ i t. d. rozumiemy w sensie Arytmetyki Liczb Całkowitych.

$$p'\alpha' \times k'\alpha = p'\alpha \times k'\alpha'.$$
$$p'\beta \times k'\beta' = p'\beta' \times k'\beta.$$

Stąd: $p'\alpha \times k'\beta \times k'\alpha' < p'\beta \times k'\alpha \times k'\alpha'$,

gdyż $k'\alpha' > 0$, a więc

$$p'\alpha' \times k'\alpha \times k'\beta < p'\beta \times k'\alpha \times k'\alpha'.$$

Dalej:

$$p'\alpha' \times k'\beta < p'\beta \times k'\alpha',$$

gdyż $k'\alpha > 0$. A więc: $\alpha' \prec \beta$. Analogicznie już otrzymamy:

$$p'\alpha' \times k'\beta \times k'\beta' < p'\beta \times k'\alpha' \times k'\beta', \quad [k'\beta' > 0]$$
$$p'\alpha' \times k'\beta \times k'\beta' < p'\beta' \times k'\beta \times k'\alpha',$$

skąd: $p'\alpha' \times k'\beta' < p'\beta' \times k'\alpha'$, $[k'\beta > 0]$

a więc: $\alpha' \prec \beta'$.

5° Załóżmy, że $\alpha \prec \beta$ i $\beta \prec \gamma$. Wtedy:

$$p'\alpha \times k'\beta < p'\beta \times k'\alpha,$$
$$p'\beta \times k'\gamma < p'\gamma \times k'\beta,$$

stąd: $p'\alpha \times k'\beta \times k'\gamma < p'\gamma \times k'\beta \times k'\alpha$
$[k'\alpha > 0$ i $k'\gamma > 0]$.

Atoli: $k'\beta > 0$, więc:

$$p'\alpha \times k'\gamma < p'\gamma \times k'\alpha,$$

czyli: $\alpha \prec \gamma$.

Porównując 1°—5° z warunkami definicji na str. 127 otrzymujemy twierdzenie.

Tw. 2. Dla $\equiv$ i $\prec$ zachodzą wszystkie twierdzenia zespołu $(\mathscr{K}')$ na str. 128 i system:

$$(A; \equiv; \prec)$$

jest *systemem wielkości w sensie szerszym.*

Dem. Dowodzi nam tego tw. zasadnicze nr. 2 i tw. 1, nr. 3.

4. **Para zerowa.**

Def. Orzeczenie, że α jest *parą zerową* (w naszej teorji), oznacza, iż:

$$(1)\quad \alpha \varepsilon A \quad \text{i} \quad (2)\quad p'\alpha = 0.$$

Tw. 1. Orzeczenie: „α jest *parą zerową*“ jest *niezmiennicze* (wobec $\equiv$).

Dem. Gdy α jest parą zerową i $\alpha \equiv \beta$, to:

$$\alpha, \beta \varepsilon A, \ p'\alpha \times k'\beta = p'\beta \times k'\alpha, \ p'\alpha = 0,$$

więc: $\qquad p'\beta \times k'\alpha = 0,$

lecz $k'\alpha \neq 0$, zatem $p'\beta = 0$, a stąd:

β jest *parą zerową*.

Tw. 2. Gdy α i β są *parami zerowemi*, to $\alpha \equiv \beta$.

Dem. Wtedy: $p'\alpha = p'\beta = 0$, więc:

$$p'\alpha \times k'\beta = 0 = p'\beta \times k'\alpha,$$

skąd: $\qquad \alpha \equiv \beta.$

Tw. 3. Gdy α jest parą zerową, $\beta \varepsilon A$, lecz β *nie jest parą zerową*, to:

$$\alpha \prec \beta.$$

Dem. Wtedy $p'\alpha = 0$, $p'\alpha \times k'\beta = 0$,

$$p'\beta > 0, \ k'\alpha > 0,$$

więc: $0 = p'\alpha \times k'\beta < p'\beta \times k'\alpha$, skąd:

$$\alpha \prec \beta.$$

5. **Twierdzenia pomocnicze.**

Tw. 1. Gdy $\alpha \varepsilon A$, α nie jest parą zerową, i określimy:

$$\beta \overset{\mathrm{df}}{=} (p'\alpha, 2 \times k'\alpha),$$

to: (1) β *nie jest parą zerową*,
(2) $\beta \prec \alpha$.

Dem. Wtedy $p'\alpha \varepsilon N_0$, $2 \times k'\alpha \varepsilon N_1$,
gdyż $2 \neq 0$ i $k'\alpha \neq 0$,
więc $\beta \varepsilon A$.
Ponieważ $p'\alpha \neq 0$, więc $p'\beta = p'\alpha \neq 0$.
Mamy też:

$$p'\beta \times k'\alpha = p'\alpha \times k'\alpha < p'\alpha \times 2 \times k'\alpha$$
$$= p'\alpha \times k'\beta, \text{ gdyż } p'\alpha > 0 \text{ i } k'\alpha > 0.$$

Stąd: $\beta \prec \alpha$.

Tw. 2. Gdy $\alpha \varepsilon A$, to $\alpha \prec (p'\alpha + 1, k'\alpha)$.

Dem. Gdyż: $p'\alpha \times k'\alpha < p'\alpha \times k'\alpha + k'\alpha$,
skoro $k'\alpha > 0$. Stąd:

$$p'\alpha \times k'\alpha < (p'\alpha + 1) \times k'\alpha,$$

czyli: $\alpha \prec (p'\alpha + 1, k'\alpha)$.

Tw. 3.
Gdy $\alpha \prec \beta$ i $\gamma \overset{\text{df}}{=} (p'\alpha + p'\beta, k'\alpha + k'\beta)$, to

$$\gamma \varepsilon A \quad \text{i} \quad \alpha \prec \gamma \prec \beta.$$

Dem.
Wtedy: $p'\alpha, p'\beta \varepsilon N_0$, więc $p'\alpha + p'\beta \varepsilon N_0$;
$k'\alpha \varepsilon N_1$, $k'\beta \varepsilon N_1$, więc $k'\alpha + k'\beta \varepsilon N_1$.
Dalej: $p'\alpha \times [k'\alpha + k'\beta] = p'\alpha \times k'\alpha + p'\alpha \times k'\beta$
$< p'\alpha \times k'\alpha + p'\beta \times k'\alpha = (p'\alpha + p'\beta) \times k'\alpha$,
stąd: $p'\alpha \times k'\gamma < p'\gamma \times k'\alpha$, czyli:

$$\alpha \prec \gamma.$$

Analogicznie:

$$p'\beta \times k'\gamma = p'\beta \times [k'\alpha + k'\beta] = p'\beta \times k'\alpha +$$
$$+ p'\beta \times k'\beta > p'\alpha \times k'\beta + p'\beta \times k'\beta =$$
$$= (p'\alpha + p'\beta) \times k'\beta = p'\gamma \times k'\beta.$$

Stąd: $\gamma \prec \beta$.

Tw. 4. Klasa A jest przeliczalna.

Dem. Rozważmy klasy:

$A_n \overset{\text{df}}{=}$ ogół par (m, n), gdzie m jest liczbą całkowitą (N_0) i n jest liczbą naturalną (N_1).

Każda z klas A_n dla $n = 1, 2, 3 \ldots$ jest widocznie klasą *przeliczalną.*[1]

Widocznie też:

$$A = \sum_{n|1}^{\infty}{}_m A_n,$$

a więc A jako suma przeliczalnej ilości przeliczalnych klas A_n jednorodnych [wszystkie A_n są zawarte w klasie A!] jest *przeliczalną* [obacz Teorja Mnogości Punktowych I, § 16].

Def. Gdy (1) α jest parą należącą do A.
(2) $p'\alpha$ i $k'\alpha$ są liczbami *pierwszemi względem* siebie, to:

parę α nazwiemy *prymitywną.*

Przykład: $(2, 1), (3, 5), (0, 1)$ i t. d.

Tw. 5. Gdy (1) α i β są parami prymitywnemi
(2) $\alpha \equiv \beta$,

to: $\alpha = \beta$, czyli $p'\alpha = p'\beta$ i $k'\alpha = k'\beta$.

Dem. Z założenia:

$$p'\alpha \times k'\beta = p'\beta \times k'\alpha. \qquad (1)$$

Gdy $p'\alpha = 0$, to α jest parą *zerową*, $\alpha \equiv \beta$, więc β jest również zerową, czyli $p'\beta = 0$.

Lecz wtedy: $p'\alpha$ i $k'\alpha$ pierwsze względem siebie, $p'\alpha = 0$ i $k'\alpha \neq 0$, więc $k'\alpha = 1$. Analogicznie $k'\beta = 1$. Stąd już $\alpha = \beta$.

Gdy $p'\alpha \neq 0$, to $p'\beta \neq 0$ [str. 153]. Ze związku (1) widzimy, że $p'\alpha$ dzieli $p'\beta \times k'\alpha$, lecz $p'\alpha$

[1] patrz moja *Teorja Mnogości Punktowych* I, § 16.

pierwsze względem $k'\alpha$, $k'\alpha \neq 0$, zatem $p'\alpha$ dzieli $p'\beta$. Ten sam związek pokaże, że $p'\beta$ dzieli $p'\alpha$. A więc:

$$p'\alpha = p'\beta \neq 0.$$

Wtedy wedle (1): $k'\alpha = k'\beta$. Stąd już $\alpha = \beta$.

Tw. 6. Gdy α należy do A, (s) jest największym wspólnym podzielnikiem dla $p'\alpha$ i $k'\alpha$, to $(p'\alpha / s,\ k'\alpha / s)$ jest parą prymitywną i proporcjonalną do α.

Dem. $p'\alpha$ i $k'\alpha$ nie są jednocześnie zerem, więc największy wspólny podzielnik s posiadają. Jak wiadomo, s dzieli wtedy $p'\alpha$ i $k'\alpha$, więc $p'\alpha / s$ i $k'\alpha / s$ są liczbami całkowitemi. Atoli $k'\alpha \neq 0$, więc $k'\alpha / s \neq 0$. Stąd już:

$$(p'\alpha / s,\ k'\alpha / s)\, \varepsilon\, A.$$

Z arytmetyki wiadomo, że $p'\alpha / s$ i $k'\alpha / s$ będą pierwsze względem siebie, zatem para jest *prymitywna*,

$$p'\alpha \times (k'\alpha / s) = (p'\alpha / s) \times k'\alpha$$

wobec podzielności $p'\alpha$ i $k'\alpha$ przez s, a stąd już wynika *proporcjonalność.*

Cor. Z twierdzeń 5 i 6 wynika, że gdy $\alpha\, \varepsilon\, A$, to istnieje *jedyna* para w klasie A *proporcjonalna* do α i *prymitywna.*

Tw. 7. Ogół par *prymitywnych* klasy A tworzy zbiór *przeliczalny.*

Dem. Oznaczmy go przez M. Otóż $M \subset A$ i A jest zbiorem przeliczalnym [tw. 4], zatem M jest *przeliczalne* lub *skończone.*[1]

[1] p. Teorja Mnogości Punktowych I, § 16.

M zawiera jednak podzbiór złożony z elementów:

$$(0\,,1),\,(1\,,1),\,(2\,,1),\,(3\,,1)\ldots\ldots,$$

a ten jest *nieskończony*. Zatem *M* jest *przeliczalne*. Przyjmujemy tu bez dowodu, że *M* jest *klasą*.

§ 2. Liczby Wymierne.

6. **Określenie.** Rozważany przez nas system

$$(A\,;\equiv;\prec),$$

gdzie $\equiv$ jest proporcjonalnością par, $\prec$ relacją określoną wyżej, stanowi *system wielkości* w sensie szerszym. Skłania to do zastosowania teorji abstrakcji. Wyobrażamy sobie, że ustalono i wybrano pewien operator abstrahujący φ [str. 114] i w stosunku do *niego:*

Def. 1. *Liczbami wymiernemi* nazwiemy *abstrakty* [utworzone przy pomocy φ] *elementów klasy* A [par liczbowych].

Uw. Utworzyć możemy oczywiście tyle *klas liczb wymiernych*, ile *różnych operatorów abstrahujących* zechcemy rozważać. Zdecydujemy się na wybór jednego z nich, określonego szczegółowo, nieco później.

Wiemy już [str. 129], że oznaczając przez A_p ową klasę abstraktów i przez

$$x <_p y$$

związek mówiący, że:

„Dla wszelkich par α i β takich, że α i β należy do A i abstraktem α jest x, abstraktem zaś β jest y zachodzi:

$$\alpha \prec \beta\text{“}$$

otrzymamy *system porządkowy:*

$$(A_p; <_p) \qquad \text{[str. 130]}.$$

Relację $<_p$ nazwiemy *mniejszością wymierną.*

Uw. Tak A_p i jak i $<_p$ zależą od wyboru φ.

Mamy tu:

Tw. *Mniejszość wymierna* jest *porządkiem typu* $1 + \eta$ [str. 77], którego polem jest *klasa liczb wymiernych.*

Dem. 1° Z określenia pole $<_p$ składa się z liczb wymiernych. Gdy jednak $x \varepsilon A_p$, to obierzmy α tak, by abstraktem α było x i oznaczmy przez y abstrakt pary $(p'\alpha + 1, k'\alpha)$.

Wtedy: $\alpha \prec (p'\alpha + 1, k'\alpha)$, skąd $x <_p y$ [str. 157], więc x należy już do pola $<_p$. Stąd: $C(<_p) = A_p$. Widzimy też, że $<_p$ nie posiada Maximum.

2° Wedle tw. 1 i 2, ust. 4 *pary zerowe* klasy A dadzą jeden i ten sam abstrakt. Oznaczmy go przez 0_p. Okażemy, że:

$$0_p = \text{Min.}\,(<_p).$$

Rzeczywiście: niechaj $\alpha, \beta \varepsilon A$, abstrakt $\alpha = 0_p$, abstrakt $\beta = x$, $x \neq 0_p$. Wtedy [ust. 4]:

para α będzie *zerową,*

para β nie *będzie zerową,*

więc: $\alpha \prec \beta$ [tw. 3, ust. 4].

Stąd już [str. 157]: $0_p <_p x$ oraz $0_p \varepsilon A_p$.

3° Po odrzuceniu 0_p porządek nasz nie będzie posiadał Minimum. Rzeczywiście: niechaj $x \varepsilon A_p$ i $x \neq 0_p$ i niechaj abstraktem α, należącego do A, będzie x.

Wtedy α nie jest parą zerową, a więc [ust. 5, tw. 1] $\beta \prec \alpha$, gdy $\beta = (p'\alpha, 2\times k'\alpha)$, gdzie również β nie jest parą zerową. Oznaczając przez z abstrakt pary β otrzymamy:

$$z \varepsilon A_p,\ z \neq 0_p,\ z <_p x.$$

4° Porządek nasz jest *gęsty*. Rzeczywiście: niechaj: $x <_p y$, $\alpha, \beta \varepsilon A$, abstraktem α będzie x i abstraktem β będzie y. Wtedy:

$$\alpha \prec \beta,$$

a więc $\alpha \prec \gamma \prec \beta$, gdy przez γ oznaczymy:

$$(p'\alpha + p'\beta,\ k'\alpha + k'\beta) \quad \text{[ust. 5, tw. 3]}.$$

Gdy z jest abstraktem γ, to

$$x <_p z <_p y.$$

Gdy $x \neq 0_p$, to y i z również $\neq 0_p$.

5° Pole $<_p$ po odrzuceniu 0_p będzie *przeliczalne*. Rzeczywiście: przypiszmy każdemu elementowi x z klasy $A - \{0_p\}$ tę *jedyną parę* α *nie zerową*, która ma za abstrakt x i jest *prymitywna* [tw. 5, 6 i Corr. ust. 5]. Pary owe utworzą klasę *przeliczalną* [ust. 5, tw. 7 z drobną modyfikacją] i odpowiedniość ustalona będzie, jak łatwo widzieć, *doskonała*. Zatem $A - \{0_p\}$ jest klasą przeliczalną.

Łącząc 1°—5° razem otrzymamy żądane twierdzenie [p. str. 74].

Cor. Dodatkowo uzyskaliśmy jeszcze wiadomość, że Minimum porządku $<_p$ stanowi element 0_p.

Uw. W toku dowodu posługiwaliśmy się bezustannie twierdzeniem, że skoro tylko $\alpha \prec \beta$, to już abstrakt $\alpha <_p$ abstrakt β, do czego uprawnia nas tw. 1, str. 121, gdyż $\alpha \prec \beta$ jest związkiem *niezmienniczym*.

Z rozważań rozdziału IV, ust. 11 wiadomo nam, że wszelkie systemy porządkowe typu $1 + \eta$ są *izomorfijne* między sobą. Jeżeli obierzemy dwa operatory abstrahujące φ i ψ dla naszego systemu par proporcjonalnych, otrzymamy dwa systemy porządkowe tego typu; powiedzmy: $(A_p; <_p)$ i $(A_p'; <_p')$, *izomorfijne*.

Spośród różnych odpowiedniości T wykazujących ową izomorfję wyróżnijmy pewną szczególną T_n, którą nazwiemy *normalną*. Określimy ją w sposób następujący:

Def. 2. $x\,T_n\,x'$ niechaj oznacza, że:

gdy tylko: x jest φ-abstraktem pary α,
y „ ψ-abstraktem pary β,
to: $\alpha = \beta$.

Czytelnik zauważy łatwo, że orzeczenie naszej definicji można zastąpić następującem:

gdy: „x jest φ-abstraktem pary α, to
y jest ψ-abstraktem tej samej pary".

Nie sprawi tu już żadnej trudności dowód, że T_n jest odpowiedniością doskonałą, która wykaże *izomorfję* między $(A_p; <_p)$ i $(A_p'; <_p')$ i że przytem:

$$0_p'\,T_n\,0_p.$$

§ 3. Arytmetyka Liczb Wymiernych.

7. Ustalenie operatora abstrahującego.

Stwierdzenie faktu, że po przejściu do abstraktów w systemie par proporcjonalnych otrzymujemy pewien typ porządkowy, a mianowicie *mniejszość wymierną* wśród *liczb wymiernych*, nie stwarza nam jeszcze *arytmetyki liczb wymiernych*. System porządkowy $(A_p; <_p)$ rozszerzymy jeszcze tak, by uzyskać pewien *system liczbowy*. W tym celu trzeba jeszcze dołączyć dwa *działania* na liczbach wymiernych. Ze względów praktycznych postąpimy tu nieco sztucznie, wprowadzając te działania na drodze abstrakcyjnej. Przedewszystkiem jednak ustalimy dla wygody określony sposób tworzenia abstraktów dających nam liczby wymierne. Wybierzemy tu zasadę abstrahowania przez reprezentację.

Def. 1. Jeżeli (a, b) jest parą liczb klasy A, a więc, jeżeli a jest całkowitą, b naturalną, to: *ułamkiem* pary (a, b) — oznaczanym przez $\frac{a}{b}$ — nazwiemy: *jedyną parę prymitywną* klasy A, która jest proporcjonalna do (a, b).

Przykład:

$$\frac{4}{6} = (2, 3), \quad \left(\frac{2}{2}\right) = (1, 1), \quad \frac{2}{3} = (2, 3).$$

$$\frac{0}{5} = (0, 1) \text{ i t. d.} \ldots$$

Tw. 1. Gdy $\alpha \varepsilon A$ i s jest największym wspólnym podzielnikiem dla $p'\alpha$ i $k'\alpha$:

$$s = N.W.P(p'\alpha, k'\alpha),$$

to:
$$\frac{p'\alpha}{k'\alpha} = (p'\alpha/s, k'\alpha/s).$$

Dem.[1] $p'\alpha$ i $k'\alpha$ nie są jednocześnie zerem, więc posiadają $N.W.P.$ Jeżeli jest nim s, to wiadomo, że:

[1] Zakładamy u czytelnika znajomość elementów teorji podzielności. P. naprz. Ruziewicz-Żyliński. Wstęp do matematyki.

(1) $p'\alpha$ i $k'\alpha$ są podzielne przez s,
(2) $p'\alpha/s$ i $k'\alpha/s$ są względnie pierwsze,
(3) $\alpha \equiv (p'\alpha/s, k'\alpha/s)$ [str. 156],
(4) para prymitywna, proporcjonalna do α może istnieć tylko jedna [ust. 5].

Stąd już: $$\frac{p'\alpha}{k'\alpha} = (p'\alpha/s, k'\alpha/s).$$

Inaczej: gdy $(a, b) \varepsilon A$ i $s = N.W.P(a, b)$, to
$$\frac{a}{b} = (a/s, b/s).$$

Cor. 1. Gdy (a, b) jest parą *prymitywną*, to
$$\frac{a}{b} = (a, b).$$

Cor. 2. Ułamek pary (a, b) z klasy A, czyli $\frac{a}{b}$ jest parą klasy A i mamy:
$$p\left(\frac{a}{b}\right) = a/s, \; k\left(\frac{a}{b}\right) = b/s,$$
gdzie $s = N.W.P.(a, b)$.

Możemy nazwać (nieco inaczej niż w tradycyjnem ujęciu) *licznikiem ułamka* $\frac{a}{b}$ liczbę a/s, *mianownikiem* zaś liczbę b/s, gdy $s = N.W.P(a, b)$.

Określanie w ułamku $\frac{a}{b}$ liczby a jako licznik, b jako jego *mianownik* jest *niepoprawne z punktu widzenia logiki*, gdyż naprz. $\frac{2}{4}$ jest *identyczne* z $\frac{1}{2}$ więc powinnoby stąd wynikać, że:

(1) *licznik* ułamka $\frac{2}{4}$ jest *identyczny* z licznikiem $\frac{1}{2}$,

(2) *mianownik* $\frac{2}{4}$ jest *identyczny* z mianownikiem $\frac{1}{2}$, a tu mielibyśmy zatem:

$$2 = 1 \text{ i } 4 = 2!!$$

W naszej definicji licznik $\left(\frac{2}{4}\right) = 1$, mianownik $\left(\frac{2}{4}\right) = 2$.

Def. 2. Ogół *ułamków par klasy* A oznaczymy, za przykładem Peany, przez R_0.

Określenie *szczególnej* (wobec szczególnego ustalenia zasady abstrahowania) *mniejszości wymiernej* będzie tu brzmiało:

Def. 3. Orzeczenie:

$$x <_w y$$

ma oznaczać, że:

1° $x, y \varepsilon R_0$,

2° gdy tylko $\alpha, \beta \varepsilon A$ i

$$\frac{p'\alpha}{k'\alpha} = x, \frac{p'\beta}{k'\beta} = y,$$

to już $\alpha \prec \beta$.

Tw. 2. Zdanie $x <_w y$ jest równoważne zdaniu: $x \prec y$, czyli: $p'x \times k'y < p'y \times k'x$.

Dem.

1. Gdy $x \prec y, \frac{p'\alpha}{k'\alpha} = x, \frac{p'\beta}{k'\beta} = y$, to $\alpha \equiv x, y \equiv \beta$, więc: $\alpha \prec \beta$. Stąd: $x <_w y$.

2. Gdy $x <_w y$, to $\frac{p'x}{k'x} = x$, $\frac{p'y}{k'y} = y$; $x, y \,\varepsilon\, A$

i musi być zatem: $x \prec y$.

Tw. 3. Zdanie $\frac{a}{b} <_w \frac{c}{d}$, gdzie $(a, b), (c, d) \,\varepsilon\, A$ jest równoważne zdaniu:

$$(a, b) \prec (c, d), \text{ czyli } a \times d < b \times c.$$

Dem. Wtedy bowiem $\frac{a}{b}$ jest ułamkiem pary (a, b), $\frac{c}{d}$ ułamkiem pary (c, d), więc $\frac{a}{b} <_w \frac{c}{d}$ pociąga, że $(a, b) \prec (c, d)$.

Odwrotnie: związek $(a, b) \prec (c, d)$ jest *niezmienniczy,* więc już pociąga, że w abstraktach:

$$\frac{a}{b} <_w \frac{c}{d}.$$

Uw. Dzięki rozważaniom R. VI, ust. 4 mogliśmy pominąć dowód, że *ułamki* par klasy A są rzeczywiście *abstraktami* pewnej, opisanej przez nas obecnie zasady abstrakcji.

Uzyskaliśmy zatem szczególny system porządkowy typu $1 + \eta$, a mianowicie:

$$(R_0; <_w).$$

Def. 4. Ułamek: $\frac{0}{1}$ nazwiemy *zerem ułamkowem:* 0_w.

8. **Suma.**

Def. 1. Przez sumę *ułamków* x i y rozumieć będziemy:

$$x +_w y \overset{\text{df}}{=\!=} \frac{p'x \times k'y + p'y \times k'x}{k'x \times k'y},$$

a więc *ułamek* pary

$$(p'x \times k'y + p'y \times k'x, k'x \times k'y).$$

Przykład:

(1) $$\frac{2}{3} +_w \frac{3}{7} = \frac{2 \times 7 + 3 \times 3}{3 \times 7} = \frac{23}{21}$$

$$\left[\text{tu: } \frac{2}{3} = (2, 3),\ \frac{3}{7} = (3, 7)\right].$$

(2) $$\frac{4}{8} + \frac{2}{5} = \frac{1 \times 5 + 2 \times 2}{2 \times 5} = \frac{9}{10}$$

$$\left[\text{tu: } \frac{4}{8} = (1, 2),\ \frac{2}{5} = (2, 5)\right].$$

(3) $$\frac{3}{6} + \frac{2}{4} = \frac{1 \times 2 + 1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = \frac{1}{1}$$

$$\left[\text{tu: } \frac{3}{6} = (1, 2),\ \frac{2}{4} = (1, 2)\right].$$

Tw. 1. Gdy (a, b) i (c, d) są parami z klasy A, to

$$\frac{a}{b} +_w \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}.$$

Dem. Niech będzie:

$$s = N.W.P.(a, b),\ t = N.W.P(c, d),$$
$$a' = a/s,\ b' = b/s,\ c' = c/t,\ d' = d/t.$$

Wtedy: $$\frac{a}{b} +_w \frac{c}{d} = \frac{a' \times d' + b' \times c'}{b' \times d'}.$$

Lecz: $$(a \times d + b \times c, b \times d) =$$
$$= (s \times t \times [a' \times d' + b' \times c'], s \times t \times [b' \times d'])$$
$$= (a' \times d' + b' \times c', b' \times d')$$

Stąd: $$\frac{a' \times d' + b' \times c'}{b' \times d'} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}.$$

Przykład:

$$\frac{4}{8} + \frac{2}{5} = \frac{4 \times 5 + 2 \times 8}{8 \times 5} = \frac{36}{40} = \frac{9}{10}.$$

Tw. 2. *Działanie $+_w$ jest nieograniczenie wykonalne i wewnętrzne w klasie R_0.*

Dem. Skoro x i y należą do R_0, to $p'x, p'y \varepsilon N_0$, $k'x, k'y \varepsilon N_1$, zatem $p'x \times k'y + p'y \times k'x \varepsilon N_0$, $k'x \times k'y \varepsilon N_1$, $(p'x \times k'y + p'y \times k'x, k'x \times k'y) \varepsilon A$,

$$\frac{p'x \times k'y + p'y \times k'x}{k'x \times k'y} \varepsilon R_0.$$

Tw. 3. *Działanie $+_w$ jest łączne.*

Dem. Niechaj: $x, y, z \varepsilon R_0$. Wtedy:

$$x +_w y = \frac{p'x \times k'y + p'y \times k'x}{k'x \times k'y},$$

$$(x +_w y) +_w z = \frac{(p'x \times k'y + p'y \times k'x) \times k'z + k'x \times k'y \times p'z}{k'x \times k'y \times k'z}$$

$$y +_w z = \frac{p'y \times k'z + p'z \times k'y}{k'y \times k'z},$$

$$x +_w (y +_w z) = \frac{p'x \times k'y \times k'z + [p'y \times k'z + p'z \times k'y] \times k'x}{k'x \times k'y \times k'z}.$$

Stąd: $$(x +_w y) +_w z = x +_w (y +_w z).$$

Tw. 4. *Działanie $+_w$ jest obustronnie jednotliwe.*

Dem. Gdy $x, y, z \varepsilon R_0$ i $x +_w z = y +_w z$, to

$$\frac{p'x \times k'z + p'z \times k'x}{k'x \times k'z} = \frac{p'y \times k'z + p'z \times k'y}{k'y \times k'z},$$

Stąd:

$$p'x \times k'z \times k'y \times k'z + p'z \times k'x \times k'y \times k'z =$$
$$= p'y \times k'z \times k'x \times k'z + p'z \times k'y \times k'x \times k'z,$$

a więc: $p'x \times k'y \times k'z + p'z \times k'x \times k'y =$
$$= p'y \times k'x \times k'z + p'z \times k'y \times k'x,$$

gdyż $k'z \neq 0$. Następnie:

$$p'x \times k'y \times k'z = p'y \times k'x \times k'z$$
$$p'x \times k'y = p'y \times k'x \qquad [k'z \neq 0],$$

a więc: $$x = y,$$

gdyż x i y są parami prymitywnemi.

Tw. 5. *Działanie* $+_w$ *posiada Moduł* $= 0_w$.

Dem. 1. Gdy $x \varepsilon R_0$, to $x +_w 0_w =$

$$x +_w \frac{0}{1} = \frac{p'x \times 1 + k'x \times 0}{k'x \times 1} = \frac{p'x}{k'x} = x.$$

2. Gdyby $x, y \varepsilon R_0$ i $x + y = x$, to

$$\frac{p'x \times k'y + p'y \times k'x}{k'x \times k'y} = \frac{p'x}{k'x},$$

stąd:

$$p'x \times k'y \times k'x + p'y \times k'x \times k'x = p'x \times k'x \times k'y$$
$$p'x \times k'y + p'y \times k'x = p'x \times k'y \qquad [k'x \neq 0]$$
$$p'y \times k'x = 0, \; k'x \neq 0,$$

a więc: $p'y = 0$ i $y = (0, 1) = 0_w$.

Tw. 6. *Działanie* $+_w$ *jest przemienne.*

Dem. Niechaj $x, y \varepsilon R_0$. Wtedy:

$$x +_w y = \frac{p'x \times k'y + p'y \times k'x}{k'x \times k'y},$$

$$y +_w x = \frac{p'y \times k'x + p'x \times k'y}{k'x \times k'y},$$

a więc: $$x +_w y = y +_w x.$$

Uw. Tw. 6. uwalnia nas od dowodzenia jednotliwości prawostronnej czy też „modularności" lewostronnej w tw. 4 i 5.

Twierdzenia 2—6 mówią, że $(R_0; +_w)$ jest *semigrupą Abelową* [str. 39].

9. **Iloczyn.** Wprowadzimy teraz mnożenie.

Def. 1. Jeżeli x i y są ułamkami, to *iloczyn wymierny* $x \times_w y$ określimy przez związek:

$$x \times_w y \overset{\text{df}}{=} \frac{p'x \times p'y}{k'x \times k'y}.$$

Przykład:

(1) $$\frac{3}{2} \times_w \frac{15}{7} = \frac{3 \times 15}{2 \times 7} = \frac{45}{14},$$

(2) $$\frac{2}{6} \times_w \frac{5}{9} = \frac{1 \times 5}{3 \times 9} = \frac{5}{27},$$

(3) $$\frac{2}{4} \times_w \frac{9}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 1} = \frac{3}{2}.$$

Uw. Podobnie jak w wypadku sumy należy najpierw „ułamki uprościć". Uwalnia nas od tego:

Tw. 1. Jeżeli (a, b) i (c, d) są parami klasy A, to

$$\frac{a}{b} \times_w \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Dem.

Niechaj: $s = N.W.P(a, b)$, $t = N.W.P(c, d)$:

$$a' = a/s,\ b' = b/s,\ c' = c/t,\ d' = d/t.$$

Wtedy: $$\frac{a}{b} \times_w \frac{c}{d} = \frac{a' \times c'}{b' \times d'} = \frac{s \times t \times a' \times c'}{s \times t \times b' \times d'} =$$

$$= \frac{s \times a' \times t \times c'}{s \times b' \times t \times d'} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Def. 2. Nazwiemy *ułamkową jedynką* ułamek

$$1_w \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{1}.$$

Tw. 2. Gdy $(a, b) \varepsilon A$, to $\frac{a}{b} = 1_w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

Dem. 1. Gdy $a = b$, $a \times 1 = 1 \times b$, więc $(a, b) \equiv (1, 1)$, stąd $\frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1_w$.

2. Gdy $\frac{a}{b} = 1_w$, to $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$, stąd $a \times 1 = b \times 1$, czyli $a = b$.

Tw. 3. *Działanie $\times_w$ jest nieograniczenie wykonalne i wewnętrzne w klasie R_0*

Dem.

Gdy $x, y \varepsilon R_0$, to $p'x, p'y \varepsilon N_0$, $k'x, k'y \varepsilon N_1$, $p'x \times p'y \varepsilon N_0$, $k'x \times k'y \varepsilon N_1$, $(p'x \times p'y, k'x \times k'y) \varepsilon A$,

$$\frac{p'x \times p'y}{k'x \times k'y} \varepsilon R_0, \text{ więc } x \times_w y \varepsilon R_0.$$

Tw. 4. *Działanie $\times_w$ jest łączne.*

Dem. Gdy $x, y, z \varepsilon R_0$, to:

$$(x \times_w y) \times_w z = \frac{p'x \times p'y}{k'x \times k'y} \times_w \frac{p'z}{k'z} = \frac{p'x \times p'y \times p'z}{k'x \times k'y \times k'z}$$

$$x \times_w (y \times_w z) = \frac{p'x}{k'x} \times_w \frac{p'y \times p'z}{k'y \times k'z} = \frac{p'x \times p'y \times p'z}{k'x \times k'y \times k'z}.$$

Stąd: $(x \times_w y) \times_w z = x \times_w (y \times_w z)$.

Tw. 5. *Działanie $\times_w$ jest obustronnie jednotliwe z zastrzeżeniem co do 0_w.* [Modułu $+_w$].

Dem. Niechaj: $x, y, z \varepsilon R_0$, $x \times_w z = y \times_w z$ i $z \neq 0_w$. Wtedy:

$$x \times_w z = \frac{p'x \times p'z}{k'x \times k'z} = \frac{p'y \times p'z}{k'y \times k'z} = y \times_w z.$$

Stąd: $p'x \times p'z \times k'y \times k'z = p'y \times p'z \times k'x \times k'z$,

a więc: $p'x \times k'y = p'y \times k'x$, gdyż

$k'z \neq 0$ i $p'z \neq 0$, skoro $z \neq 0_w$.

Ostatecznie: $x = y$.

Tw. 6. *Jedynka ułamkowa* 1_w *jest Modułem działania* $\times_w$.

Dem. 1. Gdy $x \varepsilon R_0$, to

$$x \times_w 1 = \frac{p'x \times 1}{k'x \times 1} = \frac{p'x}{k'x} = x.$$

2. Gdy $x \times z = x$ dla każdego x z klasy R_0 i przytem $z \varepsilon R_0$, to weźmy za x element 1_w. Wtedy:

$$1_w = 1_w \times_w z = \frac{1 \times p'z}{1 \times k'z} = \frac{p'z}{k'z} = z,$$

Tw. 7. *Działanie* $\times_w$ *jest przemienne.*

Dem. Niechaj $x, y \varepsilon R_0$. Wtedy:

$$x \times_w y = \frac{p'x \times p'y}{k'x \times k'y} = \frac{p'y \times p'x}{k'y \times k'x} = y \times_w x.$$

Uw. Twierdzenie 7 uwalnia nas od dowodzenia jednotliwości prawostronnej z zastrzeżeniem czy też modularności 1_w lewostronnej w tw. 5 i 6.

Tw. 8. *Działanie* $\times_w$ *jest odwracalne z zastrzeżeniem co do* 0_w.

Dem. Niechaj $x, y \varepsilon R_0$ i $y \neq 0_w$. Dzięki tw. 7

wystarczy nam udowodnić istnienie odwracalności naprz. tylko prawostronnej. Otóż: $p'y \neq 0$, więc $(k'y, p'y) \varepsilon A$:

$$x \times_w \frac{k'y}{p'y} = \frac{p'x \times k'y}{k'x \times p'y} \varepsilon R_0.$$

Stąd: $\left(x \times_w \frac{k'y}{p'y}\right) \times_w y = \frac{p'x \times k'y \times p'y}{k'x \times p'y \times k'x} = \frac{p'x}{k'x} = x.$

zatem: $$x \times_w \frac{k'y}{p'y}$$

spełnia związki: $x \times_w z = y$ i $z \varepsilon R_0$.

Dzięki tw. 5 jest to jedyny ułamek tego rodzaju. A więc *ma sens* $x /_w' y$, temsamem ma sens $x /_w y$ i jeszcze:

$$x /_w y = \frac{p'x \times k'y}{k'x \times p'y}.$$

Cor. Gdy (a, b) i (c, d) są parami z klasy A i $c \neq 0$, to:

$$\frac{a}{b} /_w \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a}{b} \times_w \frac{d}{c}.$$

Twierdzenia 3—8 mówią nam, że $(R_0; \times_w)$ jest *grupą Abelową* z zastrzeżeniem co do 0_w [p. str. 51].

Tw. 9. *Działanie* $\times_w$ *jest rozdzielne wobec działania* $+_w$.

Dem. Niechaj $x, y, z \varepsilon R_0$. Wtedy:

$$(x +_w y) \times_w z = \frac{p'x \times k'y + p'y \times k'x}{k'x \times k'y} \times_w \frac{p'z}{k'z} =$$

$$= \frac{p'x \times k'y \times p'z + p'y \times k'x \times p'z}{k'x \times k'y \times k'z}.$$

$$x \times_w z +_w y \times_w z = \frac{p'x \times p'z}{k'x \times k'z} +_w \frac{p'y \times p'z}{k'y \times k'z} =$$

$$= \frac{p'x \times p'z \times k'y \times k'z + p'y \times p'z \times k'x \times k'z}{k'x \times k'z \times k'y \times k'z} =$$

$$= \frac{p'x \times k'y \times p'z + p'y \times k'x \times p'z}{k'x \times k'y \times k'z},$$

gdyż $k'z \neq 0$.

Stąd: $(x +_w y) \times_w z = (x \times_w z) +_w (y \times_w z)$.

Tw. 10. $\mathrm{Mod}(+_w) \neq \mathrm{Mod}(\times_w)$, czyli $0_w \neq 1_w$.

Dem. Gdyż: $0_w = (0, 1)$, $1_w = (1, 1)$ i $(0, 1) \neq (1, 1)$.

Twierdzenia 3—10 łącznie z tw. 2—6, ust. 8 mówią nam, że system $(R_0; +_w; \times_w)$ jest *semi-polem* [str. 51].

10. System liczbowy arytmetyki ułamków.

Mamy tu odrazu bardzo doniosłe twierdzenie.

Tw. 1. System:

$$(R_0; +_w; \times_w; <_w)$$

jest *systemem liczbowym bezwzględnym* [str. 82].

Dem. Wiemy już, że:

I. $(R_0; +_w; \times_w)$ jest semi-polem,

II. $(R_0; <_w;)$ systemem porządkowym,

III. $\mathrm{Mod}(+_w) = 0_w = \mathrm{Min}(<_w)$.

Udowodnimy jeszcze, że:

IV. Gdy $x, y, z \varepsilon R_0$ i $x <_w y$, to

$$x +_w z <_w y +_w z.$$

Rzeczywiście, wtedy:

$$p'x \times k'y < p'y \times k'x$$

$$x +_w z = \frac{p'x \times k'z + p'z \times k'x}{k'x \times k'z}$$

$$y +_w z = \frac{p'y \times k'z + p'z \times k'y}{k'y \times k'z}$$

$$p'x \times k'z \times k'y \times k'z + p'z \times k'x \times k'y \times k'z$$
$$< p'y \times k'x \times k'z \times k'z + p'z \times k'x \times k'y \times k'z$$
$$= k'x \times k'z [p'y \times k'z + p'z \times k'y],$$

skąd: $$x +_w z <_w y +_w z.$$

Nakoniec dowiedziemy, że:

V. Działanie $-_w$ odwrotne do $+_w$ jest wtedy i tylko wtedy wykonalne między x i y, gdy $y \leqq_w x$.

Rzeczywiście:

1. Gdy $x, y, z \varepsilon R_0$ i $y +_w z = x$, to
$$\frac{p'y \times k'z + p'z \times k'y}{k'y \times k'z} = \frac{p'x}{k'x},$$

stąd: $$p'y \times k'z \times k'x + p'z \times k'y \times k'x =$$
$$= p'x \times k'y \times k'z,$$

a więc: $p'y \times k'x \times k'z \leqq p'x \times k'y \times k'z$,
$$p'y \times k'x \leqq p'x \times k'y \qquad [k'z > 0],$$

ostatecznie: $$y \leqq_w x.$$

2. Gdy $x, y \varepsilon R_0$ i $y \leqq_w x$, to
$p'y \times k'x \leqq p'x \times k'y$, więc
$p'x \times k'y - p'y \times k'x \,\varepsilon\, N_0$,
$(p'x \times k'y - p'y \times k'x,\ k'x \times k'y) \,\varepsilon\, A$,
$$\frac{p'x \times k'y - p'y \times k'x}{k'x \times k'y} \,\varepsilon\, R_0.$$

$$y +_w \frac{p'x \times k'y - p'y \times k'x}{k'x \times k'y} = x$$

(po krótkim rachunku). A więc istnieją takie z, że: $z \varepsilon R_0$ i $y +_w z = x$.

Działanie $+_w$ jest atoli jednotliwe, więc:

$$\frac{p'x \times k'y - p'y \times k'x}{k'x \times k'y}$$

jest jedynem takiem z, czyli $x -_w y$.

Cor. Gdy (a, b) i $(c, d) \varepsilon A$, $\frac{a}{b} \geqq_w \frac{c}{d}$, to:

$$\frac{a}{b} -_w \frac{c}{d} = \frac{a \times d - b \times c}{b \times d}.$$

Zachodzi zatem dla arytmetyki ułamków pełny zespół twierdzeń i umów, który oznaczyliśmy przez $(\mathscr{F})$ [str. 87].

Zespól ten daje nam już ogromnie duży materjał twierdzeń i faktów z arytmetyki liczb ułamkowych. System liczbowy bezwzględny, jakim jest $(R_0; +_w; \times_w; <_w)$ posiada jednak jeszcze szczególne, właściwe sobie cechy, które go zresztą charakteryzują w tym obrębie w zupełności. Postaramy się je teraz wydobyć na jaw. Mamy tu twierdzenie:

Tw. 2. Klasa R_0 jest *identyczna z klasą elementów wymiernych bezwzględnych* [str. 102] systemu $(R_0; +_w; \times_w; <_w)$.

Dem. Wydobędziemy najpierw z klasy R_0 elementy *całkowite bezwzględne* [p. str. 96]. Twierdzimy, że klasą $R_0 N_0$ tych elementów jest ogół ułamków typu:

$$\frac{n}{1} \quad \text{dla } n|0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots$$

Rzeczywiście: oznaczywszy tę klasę przez K,

otrzymamy: (1) 0_w, czyli $\frac{0}{1}$ należy do $R_0 N_0$,

(2) gdy $\frac{n}{1} \varepsilon R_0 N_0$, to $\frac{n+1}{1} \varepsilon R_0 N_0$,

zatem: K zawiera się w $R_0 N_0$.

Atoli K stanowi jedną z klas gatunku **(M)**, jak na str. 96, gdyż:

(1) $K \subset R_0$,
(2) $0_w \varepsilon K$,
(3) gdy $x \varepsilon K$, to $x +_w 1_w \varepsilon K$, jak łatwo stwierdzić.

Stąd: $R_0 N_0 \subset K$.
Ostatecznie więc: $K = R_0 N_0$.
Niechaj teraz: $x \varepsilon R_0$. Wtedy:

$$\frac{p'x}{1},\ \frac{k'x}{1} \varepsilon R_0 N_0,\ \frac{k'x}{1} \neq 0_w$$

i mamy:

$$\frac{p'x}{1} /_w \frac{k'x}{1} = \frac{p'x}{1} \times_w \frac{1}{k'x} = \frac{p'x}{k'x} = x,$$

a więc x jest ilorazem wymiernym dwu elementów z $R_0 N_0$. Ponieważ jednak elementy wymierne systemu, czyli elementy klasy $R_0 R_0$ są już zawarte w R_0, więc

$$R_0 = R_0 R_0,$$

co było do udowodnienia.

11. Elementy całkowite i wymierne wśród ułamków.

W rozdziale V, ust. 7 nauczyliśmy się tworzyć t. zw. *elementy całkowite bezwzględne* systemu liczbowego. W zastosowaniu do systemu:

$$(R_0; +_w; \times_w; <_w)$$

otrzymamy klasę $R_0 N_0$, którą będzie ogół ułamków typu $\frac{n}{1}$, gdzie n przebiega wartości całkowite $0, 1, 2, \ldots\ldots$ Elementy klasy $R_0 N_0$ otrzymamy, wyszedłszy z Modułu dodawania $(+_w)$, czyli $\frac{0}{1}$ przez kolejne dodawanie $(+_w)$ doń Modułu mnożenia $(\times_w)$ czyli $\frac{1}{1}$. W ten sposób otrzymamy kolejno: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots$ i jeżeli już otrzymaliśmy $\frac{n}{1}$, to dalej uzyskamy $\frac{n}{1} +_w \frac{1}{1}$, czyli $\frac{n+1}{1}$.

Dzięki rozważaniom R. V, ust. 7 możemy twierdzić, że *system:*

$$(R_0 N_0; +_w'; \times_w'; <_w') \tag{1}$$

gdzie $+_w'$, $\times_w'$, $<_w'$ oznaczają $+_w$, $\times_w$, $<_w$ zwężone do $R_0 N_0$, *pokrywa się formalnie* z Arytmetyką Liczb Całkowitych, którą można uważać za rozbudowę systemu:

$$(N_0; +_c; \times_c; <_c). \tag{2}$$

Między systemami (1) i (2) zachodzi *izomorfja,* którą uzyskamy kładąc naprz. *za odpowiednik ele-*

mentu n *z klasy* N_0, *ułamek* $\frac{n}{1}$ *z klasy* $R_0 N_0$.

Wykazanie izomorfji nie przedstawia żadnych trudności. Ale możemy powiedzieć więcej:

Odpowiedniość cotylko określona jest jedyną, wykazującą izomorfję między (1) a (2).

W każdej bowiem odpowiedniości tego rodzaju musi 0 (Moduł $+_c$) przejść w 0_w (Moduł $+_w$), czyli $\frac{0}{1}$, jakoteż 1 (Moduł $\times_c$) w 1_w (Moduł $\times_w$), czyli $\frac{1}{1}$. Ponieważ odpowiedniość taka „zachowuje dodawanie“, więc $2 = 1 +_c 1$ przejdzie w $\frac{1}{1} +_w \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$, $3 = 2 +_c 1$ przejdzie w $\frac{2}{1} +_w \frac{1}{1} = \frac{3}{1} \cdot \cdot \cdot$ ogólnie $n +_c 1$ w $\frac{n}{1} +_w \frac{1}{1}$, czyli $\frac{n +_c 1}{1}$, o ile n przeszło w $\frac{n}{1}$.

W ten sposób atoli otrzymujemy odpowiedniość poprzednio określoną.

Jeżeli system (2) przedstawia dla nas pewien określony i ustalony egzemplarz Arytmetyki Liczb Całkowitych i przy pomocy niego utworzymy sobie system:

$$(R_0; +_w; \times_w; <_w), \tag{3}$$

to *żaden element klasy* R_0 systemu (3) *nie będzie równy żadnemu elementowi klasy* N_0, czyli: *żadna liczba całkowita nie będzie równa żadnemu ułamkowi.*

Możemy jednak postąpić tak:

(1) System (2) wraz z jego rozbudową zastąpimy przez system (1), biorąc wszędzie zamiast

liczby całkowitej n ułamek $\frac{n}{1}$ i zastępując $+_c$, $\times_c$ i $<_c$ przez $+_w'$, $\times_w'$, $<_w'$.

(2) Każde twierdzenie Arytmetyki Liczb Całkowitych, odnoszące się do N_0, $+_c$, $\times_c$, $<_c$ i pojęć pochodnych, zastąpimy przez odnośne, formalnie mu równoważne twierdzenie systemu (1).

(3) Przestaniemy się w dalszym ciągu posługiwać liczbami całkowitemi i działaniami systemu (2) i pozwolimy sobie na „*symboliczną identyfikację*" pisząc w miejsce:

$$R_0 N_0, +_w, \times_w, -_w, /_w, <_w \text{ i t. d.}$$

odpowiednio:

$$N_0, +_c, \times_c, -_c, /_c, <_c \text{ i t. d.},$$

posługując się jednocześnie terminami systemu (2) dla ich odpowiedników w systemie (1). Nie będziemy się przytem obawiali dwuznaczności, gdyż postanowiliśmy już zarzucić *dawny* (2) egzemplarz Arytmetyki Liczb Całkowitych zastępując go *nowym* (1). Wedle tezy wysuniętej przezemnie [p. str. 125] stanowi przecież Ar. L. Całk. tylko 2gie piętro abstrakcyjne pewnej teorji niezmienników równoważności, jaką jest *równoliczność* wśród zbiorów skończenie-licznych. Zastąpienie (2) przez (1) będzie tedy tylko zmianą zasady abstrakcji [p. str. 117] i na istotną treść *pierwotną* zdań Arytm. L. Całk. wpływać nie może.

W sensie powyższych umów będziemy mogli teraz powiedzieć, że Arytmetyka Ułamków jest *rozszerzoną* Arytmetyką Liczb Całkowitych, gdyż:

1° Wśród *Ułamków* (klasy R_0) odnajdą się wszystkie *liczby całkowite* (klasy N_0).

2° Klasa R_0 będzie jednak obszerniejsza od klasy N_0.

3° Działanie *dzielenia*, tak rzadko wykonalne w arytmetyce liczb całkowitych, będzie tu, z wyjątkiem wypadku dzielnika zerowego, zawsze *wykonalne*.

4° Jeżeli a i b są *dawnemi* całkowitemi i $b \neq 0$, to $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} /_w \frac{b}{1}$, a więc możemy, dzięki *symbolicznej identyfikacji* położyć:

$$\frac{a}{b} = a /_w b$$

i uważać $\frac{a}{b}$ za *iloraz* a przez b.

W tej chwili jednak spostrzegamy, że:

Tw. 1. Klasa elementów *wymiernych* systemu

$$(R_0; +_w; \times_w; <_w)$$

[p. str. 102], czyli $R_0 R_0$ *zlewa się z klasą* R_0, gdyż każdy *ułamek* będzie *ilorazem* swego *licznika* przez swój *mianownik*.

Jeszcze jedną konsekwencję ważną zdołamy stąd wysnuć:

Tw. 2. *Systemy liczbowe bezwzględne* posiadające tę własność, że klasy ich elementów zlewają się z odpowiedniemi klasami ich *elementów wymiernych* są *izomorfijne* między sobą. Istnieje przytem jedyna tylko odpowiedniość doskonała, która ową izomorfję wykazuje.

Dem. Niechaj owemi systemami będą:

$$(A; + ; \times ; <) \text{ i } (A'; +'; \times'; <'),$$

gdzie jeszcze:

$$A R_0 = A, \quad A' R_0 = A'.$$

Rozważmy najpierw klasy $A N_0$ i $A' N_0$ i elementy $0, 0', 1, 1'$ (Moduły).

1° Elementowi 0 przypiszmy $0'$.

2° Jeżelibyśmy elementowi n z $A N_0$ przypisali n' z $A' N_0$, to elementowi $n + 1$ (również z $A N_0$) przypiszemy element $n' +' 1'$ (z klasy $A' N_0$).

W ten sposób uzyskamy już odpowiedniość doskonałą między elementami klas $A N_0$ i $A' N_0$. Udowodnimy łatwo, że zachowuje ona w *obrębie tych klas* działanie dodawania, mnożenia oraz mniejszość.

Odpowiedniość uzyskaną rozszerzymy teraz tak, że gdy $a, b \,\varepsilon\, A N_0$, $b \neq 0$, $a', b' \,\varepsilon\, A' N_0$, $b' \neq 0$ i a posiadało odpowiednik a', a zaś b odpowiednik b', to elementowi a / b przypiszemy element $a' /' b'$. Dowód, że tak rozszerzona odpowiedniość jest doskonałą między elementami klas $A R_0$ i $A' R_0$, *a więc* A i A' oraz, że wykazuje izomorfję systemów nie przedstawia żadnej już trudności.

Ogólną teorję *systemów liczbowych bezwzględnych* posiadających dodatkowo własność tę, że klasy ich elementów są identyczne klasom ich *elementów wymiernych,* będziemy uważali za *abstrakcyjną* i *aksjomatyczną teorję Arytmetyki Liczb Wymiernych.*

Możemy jej budowę rozpocząć od tego, że:

1° Wymieniamy elementy składowe systemu:
$A; +; \times; <$ [pojęcia pierwotne teorji].

2° Stawiamy warunki I—V ze str. 82—83 z dodatkiem:
VI: $A = A R_0$ [aksjomaty czy postulaty].

3° Prowadzimy dalszą rozbudowę przy pomocy zasad logiki.

Każdy egzemplarz Arytmetyki Liczb Wymiernych będzie mógł być uważany, dzięki swej (jedynej) izomorfji z arytmetyką *systemu ułamków* $(R_0; +_w; \times_w; <_w)$ za piętro abstrakcyjne teorji niezmienników *proporcjonalności* wśród par liczb (a, b), gdzie $b \neq 0$. My jednak o tem, budując teorję *aksjomatycznie,* t. j. tak jak przed chwilą opisano, wiedzieć nie musimy.

Nie będziemy się już zastanawiali nad celowością i pożytecznością rozbudowy teorji arytmetyki liczb wymiernych dla systemów wielkości konkretnych czy wyidealizowanych przez teorję. Są to rzeczy dostatecznie znane z praktyki i elementarnej matematyki.

Rozdział IX.

Arytmetyka Liczb Rzeczywistych Bezwzględnych.

§ 1. Pary Ciągów Mierniczych.

1. Trzeci etap teorji miary i stosunku.

Zadajemy sobie znów jakiś system *wielkości bezwzględnych dodawalnych* i *podzielnych.* Pragniemy teraz wprowadzić, o ile możności, taką definicję stosunku wielkości dowolnych a i b systemu, aby stosowała się ona, pominąwszy przypadek, gdy b jest quasi-modułem sumacji, tak w wypadku wielkości *spółmiernych* jak i *niespółmiernych*.

Systemy wielkości bezwzględnych, z jakiemi mamy przeważnie w praktyce do czynienia posiadają cenną tu dla nas własność następującą:

Gdy c *jest wielkością systemu* i *nie jest quasimodułem sumacji, to istnieje jedna jedyna liczba całkowita* n *taka, że:*

$$n \,.\, c \leqq a \prec (n+1) \,.\, c.$$

Powiemy, że system nasz spełnia wtedy *„postulat Archimedesa"*.

Załóżmy, że ma to miejsce w naszym wypadku.

Niechaj c oznacza jakąkolwiek *podwielokrotną wielkości* b [str. 142]. Ponieważ b nie jest quasimodułem, więc i c nim nie będzie i znajdzie się jedyna liczba n *naturalna* ($\neq 0$!) taka, że:

$$n \,.\, c = b.$$

Prócz tego znajdzie się *jedyna* liczba m taka, że:

$$m \,.\, c \leqq a \prec (m+1) \,.\, c.$$

Temsamem rozważanie dowolnej podwielokrotnej c wielkości b pozwoliło nam wyznaczyć *ułamek* $\frac{m}{n}$.

O każdym ułamku $\frac{k}{n}$, gdzie k jest całkowite i $k \leqq m$ powiemy, że *„mierzy on stosunek wielkości* a i b *przy pomocy podwielokrotnej* c z *ewentualnym niedomiarem"* [uważamy, że niema *niedomiaru*, gdy: $m \,.\, c = a$].

O ułamku $\frac{p}{n}$, gdzie p jest całkowite i $p \geqq m+1$ powiemy, że „*mierzy on stosunek wielkości* a i b *z nadmiarem* (przy pomocy c)".

Rozważmy teraz parę (α, β), gdzie:

1° α jest *ciągiem* ułamków [str. 26].

2° β jest *ciągiem* ułamków.

3° $\alpha_0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots\ldots$ [„α jest ciągiem *niemalejącym*"].

4° $\beta_0 \geqq \beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \ldots\ldots$ [β jest ciągiem *nierosnącym*].

5° $\alpha_n < \beta_m$ dla każdych m i n całkowitych [$m, n | 0, 1, 2 \ldots\ldots$].

6° Istnieje *najwyżej jeden* ułamek λ taki, że: $\alpha_n \leqq \lambda \leqq \beta_m$ dla $m, n | 0, 1, 2 \ldots\ldots$

7° Każdy ułamek α_n *mierzy* stosunek wielkości a i b z *ewentualnym niedomiarem*.

8° Każdy ułamek β_n mierzy stosunek wielkości a i b z *nadmiarem*.

O każdej takiej parze (α, β) powiemy, że „*jest ona parą ciągów mierniczą* dla *stosunku wielkości* a i b" i że „*mierzy ona dokładnie*" ów stosunek.

Łatwo teraz okazać, że dla danych a i b można utworzyć *wiele różnych* par mierniczych, takich jak powyższa. W wypadku naszych systemów wielkości moglibyśmy też okazać, że o ile *pary miernicze* (α, β) i (γ, δ) „*mierzą dokładnie*" stosunek wielkości a i b, to zachodzi między niemi następujący związek:

$$(*) \begin{cases} \alpha_n \leqq \delta_p & \text{dla } n, p | 0, 1, 2 \ldots\ldots \\ \gamma_q \leqq \beta_m & \text{dla } m, q | 0, 1, 2 \ldots\ldots \end{cases}$$

Opłaca nam się teraz zająć bliżej teorją par ciągów ułamków spełniających warunki 1°—6° oraz związkiem (*), który jak się okaże, jest pewną *równoważnością.*

2. **Pary miernicze ciągów.**

Stawiamy definicję:

Def. 1. *Parą mierniczą ciągów* nazwiemy parę

$$(\alpha, \beta),$$

gdzie:

1° α jest *ciągiem niemalejącym ułamków:*

$$\alpha_0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots\ldots$$

2° β jest ciągiem *nierosnącym ułamków:*

$$\beta_0 \geqq \beta_1 \geqq \ldots\ldots$$

3° $\alpha_n < \beta_m$ dla $n, m \mid 0, 1, 2 \ldots\ldots$

4° *Najwyżej jeden* ułamek λ spełnia związek:

$$\alpha_n \leqq \lambda \leqq \beta_m \quad \text{dla } n, m \mid 0, 1 \ldots\ldots$$

Przykłady:

1° α: $^1/_2$, $^3/_4$, $^4/_5$, $^5/_6$ ......
 β: 1·5, 1·05, 1·005, 1·0005 ......

2° α: $^1/_2$, $^3/_4$, $^4/_5$, $^5/_6$ ......
 β: 1, 1, 1, 1 ......

3° α: 0·9, 0·99, 0·999, ...
 β: 1·1, 1·01, 1·001, ...

4° α: 0·9, 0·9, 0·99, 0·99, 0·999, 0·999, ...
 β: 1, 1, 1, 1, ...

Def. 2. Ogół par ciągów mierniczych oznaczymy sobie przez A_m.

3. **Równoważność miernicza.**

Def. Powiemy, że pary (α, β) i (γ, δ) są *mierniczo równoważne,* gdy:

1° (α, β) jest parą mierniczą ciągów.
2° (γ, δ) jest parą mierniczą ciągów.
3° $\alpha_n \leqq \delta_p$ dla $n, p \mid 0, 1, 2 \ldots\ldots$
4° $\gamma_q \leqq \beta_m$ dla $m, q \mid 0, 1, 2 \ldots\ldots$

Oznaczymy to, pisząc:

$$(\alpha, \beta) \equiv_m (\gamma, \delta),$$

lub krótko: $(\alpha, \beta) \equiv (\gamma, \delta)$ (przynajmniej w toku obecnego rozdziału).

Przyjmiemy, że $\equiv_m$ jest *relacją*.

Tw. 1. Równoważność miernicza $(\equiv_m)$ jest *równoważnością* o polu A_m.

Dem. 1. Gdy (α, β) jest parą z A_m, to

$$(\alpha, \beta) \equiv_m (\alpha, \beta)$$

[samozwrotność].

Rzeczywiście, z definicji mamy wtedy:

$$\begin{cases} \alpha_n \leqq \beta_p & \text{dla } n, p \mid 0, 1, 2 \ldots \\ \alpha_q \leqq \beta_m & \text{dla } m, q \mid 0, 1, 2 \ldots \end{cases}$$

Temsamem jeszcze każde (α, β) z A_m należy do $C(\equiv_m)$.

2. Gdy $(\alpha, \beta) \equiv_m (\gamma, \delta)$, to

$$(\gamma, \delta) \equiv_m (\alpha, \beta)$$

[odwracalność].

Wtedy bowiem:

$$\begin{cases} \alpha_n \leqq \delta_p & \text{dla } n, p \mid 0, 1 \ldots \\ \gamma_q \leqq \beta_m & \text{dla } m, q \mid 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

a więc:

$$\begin{cases} \gamma_n \leqq \beta_p & \text{dla } n, p \mid 0, 1 \ldots \\ \alpha_q \leqq \delta_m & \text{dla } m, q \mid 0, 1 \ldots, \end{cases}$$

czyli: $(\gamma, \delta) \equiv_m (\alpha, \beta)$.

3. Gdy $(\alpha, \beta) \equiv (\gamma, \delta)$ i $(\gamma, \delta) \equiv (\varepsilon, \zeta)$, to

$$(\alpha, \beta) \equiv (\varepsilon, \zeta)$$

[przechodniość].

Rzeczywiście wtedy:

$$\begin{aligned} \alpha_n &\leqq \delta_m \\ \gamma_n &\leqq \beta_m \quad \text{dla } m, n | 0, 1, 2 \ldots \\ \gamma_n &\leqq \zeta_m \\ \varepsilon_n &\leqq \delta_m. \end{aligned}$$

Gdyby dla pewnych m_0, n_0 było:

$$\zeta_{m_0} < \alpha_{n_0},$$

toby:

(1) $\gamma_n \leqq \zeta_{m_0} < \alpha_{n_0} \leqq \delta_m$ dla $n, m | 0, 1, 2 \ldots$

(2) ułamki: $\lambda = \zeta_{m_0} + \dfrac{\alpha_{n_0} - \zeta_{m_0}}{3}$ i $\mu = \zeta_{m_0} + \dfrac{2(\alpha_{n_0} - \zeta_{m_0})}{3}$ spełniałyby związki:

$$\gamma_m \leqq \zeta_{n_0} < \lambda < \mu < \alpha_{m_0} \leqq \delta_n, \text{ dla } m, n | 0, 1, 2 \ldots$$

a więc:

$$\gamma_n < \lambda < \mu < \delta_m \quad \text{dla } n, m | 0, 1, 2 \ldots$$

wbrew temu, że (γ, δ) jest parą mierniczą. Zatem:

$$\alpha_n \leqq \zeta_m \quad \text{dla } n, m | 0, 1, 2 \ldots$$

Analogicznie:

$$\varepsilon_n \leqq \beta_m \quad \text{dla } n, m | 0, 1, 2 \ldots$$

i ostatecznie:

$$(\alpha, \beta) \equiv_m (\varepsilon, \zeta).$$

4. Gdy $(\alpha, \beta) \equiv_m (\gamma, \delta)$, to z definicji (α, β) i (γ, δ) należą do A_m, więc:

$$C(\equiv_m) \text{ zawarte w } A_m.$$

Uw. Ponieważ $C(\equiv_m) = A_m$ i $\equiv_m$ jest *relacją*, więc A_m jest *klasą*.

4. **Poprzedzanie miernicze.**

Def. Powiemy, że *para miernicza* (α,β) *poprzedza mierniczo* (jest mniejsza mierniczo) *parę mierniczą* (γ,δ), gdy:

Istnieją m_0 i n_0 całkowite takie, że:

$$\beta_{m_0} < \gamma_{n_0}.$$

Oznaczymy to przez:

$$(\alpha,\beta) \prec_m (\gamma,\delta).$$

Symbole $\succ_m$, $\preceq_m$ i $\succeq_m$ wprowadzimy w zwykły sposób.

Przyjmiemy, że stosunek $\prec_m$ jest *relacją*.

Tw. 1. Gdy $(\alpha,\beta) \prec_m (\gamma,\delta)$, to

$$\alpha_m < \delta_n \quad \text{dla } n, m | 0, 1 \ldots$$

Dem. Obierzmy takie m_0 i n_0, by

$$\beta_{m_0} < \gamma_{n_0}.$$

Wtedy:

$$\alpha_m < \beta_{m_0} < \gamma_{n_0} < \delta_n \quad \text{dla } m, n | 0, 1, 2 \ldots,$$

czyli:

$$\alpha_m < \delta_n \quad \text{dla } m, n | 0, 1, 2 \ldots$$

5. **System** $(A_m; \equiv_m; \prec_m)$. Udowodnimy przedewszystkiem:

Tw. 1. System $(A_m; \equiv_m; \prec_m)$ jest *systemem wielkości w sensie szerszym* [p. str. 127].

Dem.

1. A_m jest *klasą*, jak to już zauważyliśmy poprzednio.
2. $\equiv_m$ jest *relacją równoważności,* której polem jest A_m, co udowodniliśmy uprzednio.

3(α) $\prec_m$ jest relacją jednorodną, gdyż w każdym razie, wedle definicji, elementami jej pola są pary ciągów mierniczych klasy A_m.

(β) Gdy (α, β) jest parą mierniczą, to zauważmy, że kładąc:

$$\alpha': \quad \alpha_0 + 1, \alpha_1 + 1 \ldots\ldots$$
$$\beta': \quad \beta_0 + 1, \beta_1 + 1, \ldots\ldots,$$

otrzymujemy *parę mierniczą* (α', β'), dla której mamy:

$$(\alpha, \beta) \prec_m (\alpha', \beta'),$$

a więc (α, β) należy już do pola $C(\prec_m)$, Stąd: $A_m \subset C(\prec_m)$, a że przedtem już wykazano związek: $C(\prec_m) \subset A_m$, więc

$$A_m = C(\prec_m).$$

(γ) Gdy (α, β) i (γ, δ) należą do A_m, to

(1°) albo stale:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_n \leqq \delta_m \\ \text{i } \gamma_n \leqq \beta_m \end{array}\right\} \text{ dla } n, m | 0, 1, \ldots,$$

a wtedy $(\alpha, \beta) \equiv_m (\gamma, \delta)$

lub nie. Wtedy jednak:

(2°) albo

$$\beta_{m_0} < \gamma_{n_0} \text{ dla pewnych } m_0 \text{ i } n_0,$$

a zatem

$$(\alpha, \beta) \prec_m (\gamma, \delta)$$

lub nie, lecz wtedy:

(3°) $\delta_{m_0} < \alpha_{n_0}$ dla jakiegoś m_0 i jakiegoś n_0

i stąd: $(\gamma, \delta) \prec_m (\alpha, \beta)$.

Z przeprowadzonego rozumowania wynika, że wypadki (1°) (2°) (3°) wykluczają się wzajemnie [należy uwzględnić ust. 4, tw. 1].

(δ) Niechaj: $(\alpha, \beta) \prec_m (\gamma, \delta)$
$(\alpha', \beta') \equiv_m (\alpha, \beta)$
$(\gamma', \delta') \equiv_m (\gamma, \delta)$.

Okażemy, że

$$(\alpha', \beta') \prec_m (\gamma', \delta').$$

Rzeczywiście:

$$\begin{aligned} &\alpha_n \leqq \beta_m' \\ &\alpha_n' \leqq \beta_m \\ &\gamma_n \leqq \delta_m' \quad \text{dla } n, m|0, 1, 2 \ldots \\ &\gamma_n' \leqq \delta_m \\ &\alpha_m < \delta_m \end{aligned}$$

oraz: $\beta_{m_0} < \gamma_{n_0}$ dla pewnych m_0 i n_0.

Stąd: $\alpha_n' < \gamma_{n_0} \leqq \delta_m'$ dla $n, m|0, 1, \ldots,$

więc: $(\alpha', \beta') \equiv_m (\gamma', \delta')$ lub
$(\alpha', \beta') \prec_m (\gamma', \delta')$.

Atoli, gdyby pierwsza z tych okoliczności miała miejsce, byłoby:

$$(\alpha, \beta) \equiv (\alpha', \beta') \equiv (\gamma', \delta') \equiv (\gamma, \delta), \text{ więc:}$$
$$(\alpha, \beta) \equiv (\gamma, \delta),$$

co wyklucza założenie: $(\alpha, \beta) \prec_m (\gamma, \delta)$.

(ε) Niechaj: $(\alpha, \beta) \prec_m (\gamma, \delta) \prec_m (\varepsilon, \zeta)$.
Okażemy, że $(\alpha, \beta) \prec_m (\varepsilon, \zeta)$.
Rzeczywiście:

$\alpha_m \leqq \delta_m$ dla $m, n|0, 1, 2 \ldots$
oraz $\delta_{m_0} < \varepsilon_{n_0}$ dla pewnych m_0 i n_0.
Wtedy:

$$\alpha_m \leqq \delta_{m_0} < \varepsilon_{n_0} < \zeta_n \quad \text{dla } m, n|0, 1 \ldots$$

zatem już:

$(\alpha, \beta) \equiv_m (\varepsilon, \zeta)$
lub $(\alpha, \beta) \prec_m (\varepsilon, \zeta)$.

Lecz, gdyby $(\alpha, \beta) \equiv_m (\varepsilon, \zeta)$, byłoby:

$$(\gamma, \delta) \prec_m (\varepsilon, \zeta) \equiv_m (\alpha, \beta),$$

więc $(\gamma, \delta) \prec_m (\alpha, \beta)$ [dzięki (δ)],

co sprzeczne z założeniem, że $(\alpha, \beta) \prec_m (\gamma, \delta)$.

Częściowe wnioski 1, 2, 3 (α—ε) dowodzą twierdzenia.

Tw. 2. Dzięki rozważaniom R. VII, ust. 2, cała grupa twierdzeń, oznaczona na str. 128 przez $(\mathscr{H}')$ zachowuje swą ważność w wypadku naszego systemu.

6. Zastosowanie teorji abstrakcji.

Podobnie jak w § 2, R. VII wyobrażamy sobie, że ustalono i wybrano pewien operator abstrahujący φ [str. 114] dla naszej równoważności $\equiv_m$ i w stosunku do *niego:*

Def. 1. *Abstrakty* [utworzone przy pomocy φ] *elementów* klasy A_m, a więc *par ciągów mierniczych* nazwiemy *liczbami rzeczywistemi bezwzględnemi*. Ogół ich oznaczmy naprz. przez B_n.

Znów tu, jak w § 2, R. VII, możemy utworzyć *wiele różnych* klas liczb rzeczywistych bezwzględnych. W szczególności, gdy w dalszym ciągu zdecydujemy się na określony wybór zasady abstrahowania, nazywać będziemy liczbami rzeczywistemi bezwzględnemi tylko te, które przy jej pomocy zostały utworzone. Wiemy też, że relację $\prec_m$ możemy (w stosunku do φ) zabstrahować, kładąc:

Def. 2. (Mniejszość rzeczywista bezwzględna):

$$x <_m y$$

dla zaznaczenia, że:

„x i y należą do klasy abstraktów, czyli do B_m, oraz dla wszelkich par ciągów mierniczych (α, β) i (γ, δ) takich, że:

$$abstr(\alpha, \beta) = x, \quad abstr(\gamma, \delta) = y,$$

zachodzi:

$$(\alpha, \beta) \prec_m (\gamma, \delta).$$

Rozważania ust. 3, R. VII dowodzą, że:

Tw. 1. System $(B_m; <_m)$ jest systemem *porządkowym* w sensie Cantora.

Łatwo wykazać, że utworzywszy przy pomocy dwu różnych operatorów φ i φ' systemy $(B_m; <_m)$ i $(B_m'; <_m')$ i kładąc:

$$x\,T\,x',$$

gdy x jest φ-abstraktem tych samych par mierniczych, których φ'-abstraktem jest x', otrzymamy odpowiedniość *doskonałą* T, wykazującą *izomorfję* między $(B_m; <_m)$ a $(B_m'; <_m')$.

Po ustaleniu operatora abstrahującego wykażemy w szczególnym wypadku, że jeden ze systemów $(B_m; <)$ ma typ porządkowy $1+\lambda$ [p. str. 81]. Dzięki izomorfji będziemy mogli wtedy powiedzieć, że:

Tw. 2. Niezależnie od wyboru operatora abstrahującego, system $(B_m; <_m)$ jest systemem porządkowym typu $1+\lambda$.

7. Zastosowanie do teorji stosunków wielkości.

W tych systemach wielkości bezwzględnych, dodawalnych i podzielnych, które spełniają postulat Archimedesa i dla których określiliśmy znaczenie zwrotu:

„para miernicza ciągów (α, β)
mierzy stosunek wielkości a i b"

nazwiemy *miarą* stosunku a i b wspólny *abstrakt* wszystkich par ciągów mierzących ów stosunek, a więc pewną określoną *liczbę rzeczywistą bezwzględną*.

Nie zastanawiamy się nad wprowadzeniem pojęcia miary stosunku wielkości a i b systemu, który nie spełnia postulatu Archimedesa. Jest to sprawa o wiele bardziej skomplikowana.

§ 2. Liczby rzeczywiste bezwzględne.

8. **Odcinki i przekroje wyznaczone przez pary miernicze.**

Za podstawę rozważań przyjmujemy jak w § 1 Arytmetykę Ułamków $(R_0; +; \times; <)$, a właściwie $(R_0; +_w; \times_w; <_w)$ oraz pary ciągów mierniczych zbudowanych z ułamków.

Niechaj zatem (α, β) będzie taką parą mierniczą. Oznaczmy sobie krótko przez $[0, \alpha_n]$ klasę wszystkich ułamków x (elementów R_0) spełniających warunek: $0 \leqq x \leqq \alpha_n$. Wszystkie $[0, \alpha_n]$ dla $n|0, 1, 2\ldots$ są klasami jednorodnemi i dlatego możemy utworzyć ich *sumę mnogościową* [str. 13]

$$A = \Sigma_m [0; \alpha_n].$$

Def. 1. Klasę A utworzoną w tej chwili nazwiemy *odcinkiem wyznaczonym przez parę* (α, β).

Przykład:

1\. N. b. α: 0·9, 0·99, 0·999, ...
β: 1,1, 1·01, 1·001, ...

Wtedy A składa się z ogółu liczb (ułamkowych) x takich, że:

$$0 \leqq x < 1,$$

co oznaczymy przez $[0, 1)$.

{Nawias) przy 1 zaznacza tu, że 1 *nie należy* do $[0, 1)$}.

2. N. b. α': 1, 1, 1, 1, ...

β': 1·1, 1·01, 1·001, ...

Tu: $A' = [0, 1] =$ „ogół liczb ułamkowych x spełniających warunek

$$0 \leqq x \leqq 1".$$

{Nawias] przy 1 oznacza tu, że 1 *należy* do $[0, 1]$}.

Uw. Przykłady powyższe pokazują, że pary mogą być *mierniczo równoważne* {tu naprz. $(\alpha, \beta) \equiv_m (\alpha', \beta')$}, a tymczasem ich odcinki A i A' *nie muszą być identyczne.*

Tw. 1. Odcinek A wyznaczony przez (α, β) jest klasą *niepustą.*

Dem. Należy doń choćby α_0, a nawet każde α_n.

Tw. 2. Odcinek A jest klasą *ograniczoną od góry*, t. zn., iż znajdzie się ułamek k, taki że:

$$x \leqq k, \text{ gdy tylko } x \varepsilon A.$$

Dem. Taką liczbą jest naprz. β_0, a nawet każde β_n dla $n|0, 1, 2$ ......

Tw. 3. Gdy (α, β) wyznacza A; z należy do A i $x < z$, to x należy również do A.

Dem. Gdyż wtedy:

$$0 \leqq x < z \leqq \alpha_n \text{ dla } \textit{pewnego } n \text{ całkowitego.}$$

Tw. 4. Gdy A jest odcinkiem wyznaczonym przez parę (α, β) i przez B oznaczymy różnicę

$R_0 - A$, to para (A, B) tworzy *przekrój* systemu porządkowego $(R_0; <_w)$ [str. 68] {mówimy krótko: „*przekrój* R_0"}.

Dem. Wtedy:

1° A jest klasą *niepustą*,

2° B jest klasą *niepustą*,
gdyż należy tam choćby $\beta_0 + 1$.

3° $A + B = R_0$.

4° Gdy $x \varepsilon A$ i $y \varepsilon B$, to musi być $x < y$, gdyż inaczej, wedle tw. 3, $y \leqq x$ pociągnęłoby, że y należy do A, a więc nie należałoby do B.

Def. 2. Przekrój powyższy (A, B) nazwiemy *przekrojem wyznaczonym przez parę mierniczą* (α, β).

Przykład. W przykładach poprzednio podanych mamy:

1. $A = [0, 1)$, $B = R_0 - [0, 1) =$ ogół x takich, że $1 \leqq_w x$.
2. $A = [0, 1]$, $B = R_0 - [0, 1] =$ ogół x takich, że $1 <_w x$.

W pierwszym wypadku przekrój był *regularny na prawo*, w drugim *regularny na lewo* [p. str. 68].

Ponieważ mamy tu do czynienia z przekrojami porządku $(R_0; <)$, a więc porządku typu $1 + \eta$ [str. 77 i 130], zatem nie możemy się spodziewać *skoku* [str. 68, 74, 77]. Pokażemy na przykładzie, że jednak może wystąpić czasem *luka* [str. 68].

Lemmat 1. Nie istnieje ułamek x taki, by

$$x^2 = 2.$$

Dem. Gdyby nim był ułamek $\frac{p}{q}$, gdzie jak możemy tu założyć, p i q całkowite są względem siebie *pierwsze*, to mielibyśmy

$$\frac{p^2}{q^2}=2,\ 2q^2=p^2,\ p\neq 0,$$

stąd p *parzyste* i kładąc $p=2s$, gdzie s *całkowite*, otrzymalibyśmy:

$$2q^2=4s^2,\ q^2=2s^2, \text{ więc } q \textit{ parzyste},$$

a zatem p i q *jednocześnie podzielne* przez 2, więc *niepierwsze względem siebie*.

Oznaczmy przez p_n dla $n|0, 1, 2\ldots$ *największą liczbę całkowitą* taką, by:

$$\left(\frac{p_n}{10^n}\right)^2<2.$$

Ponieważ $\left(\frac{10^{n+1}}{10^n}\right)^2=100>2$, więc gdy $\left(\frac{k}{10^n}\right)^2<2$, to $k<10^{n+1}$, a więc największa wśród takich k istnieje i tylko jedna.

Będziemy też mieli:

$$\left(\frac{p_n+1}{10^n}\right)^2>2 \quad \text{[równość wykluczona dzięki Lemmatowi 1].}$$

Obliczenie szczegółowe pokazuje naprz., że:

$p_0=1,\ p_1=14,\ p_2=141,\ p_3=1415,\ldots$

Lemmat 2. Gdy położymy:

$$\alpha_n=\frac{p_n}{10^n}\quad \beta_n=\frac{p_n+1}{10^n}\qquad \text{dla } n|0, 1, 2\ldots\ldots,$$

to para (α, β) jest *parą mierniczą ciągów*.

Dem. 1° Dla $n|0, 1\ldots\ldots$ mamy:

$$\frac{p_n}{10^n}=\frac{10p_n}{10^{n+1}}, \text{ stąd } \left(\frac{10p_n}{10^{n+1}}\right)^2<2,$$

$$\left(\frac{p_{n+1}}{10^{n+1}}\right)^2 < 2, \text{ więc } 10p_n \leq p_{n+1},$$

gdyż p_{n+1} miało być największe.

Stąd: $\dfrac{p_n}{10^n} \leq \dfrac{p_{n+1}}{10^{n+1}}$ dla $n|0, 1, 2 \ldots\ldots,$

więc ciąg α jest *niemalejący.*

2° Dla $n|0, 1, 2 \ldots\ldots$ mamy:

$$\frac{p_n + 1}{10^n} = \frac{10p_n + 10}{10^{n+1}}, \left(\frac{10p_n + 10}{10^{n+1}}\right)^2 > 2,$$

zatem $p_{n+1} < 10p_n + 10$, skąd

$$p_{n+1} + 1 \leq 10p_n + 10, \frac{p_{n+1} + 1}{10^{n+1}} \leq \frac{p_n + 1}{10^n},$$

więc ciąg β jest *nierosnący.*

3° Dla $m, n|0, 1, 2 \ldots\ldots$ mamy:

$$\left(\frac{p_m}{10^m}\right)^2 < 2 < \left(\frac{p_n + 1}{10^n}\right)^2,$$

więc: $\alpha_m = \dfrac{p_m}{10^m} < \dfrac{p_n + 1}{10^n} = \beta_n$ dla $m, n|0, 1 \ldots\ldots$

4° Gdyby stale $\dfrac{p_m}{10^m} \leq \lambda < \mu \leq \dfrac{p_n + 1}{10^n}$, to dla n_0 takiego, że $\mu - \lambda > \dfrac{1}{10^{n_0}}$ dostaniemy sprzeczność.

Oznaczmy teraz przez (A, B) przekrój wyznaczony przez powyższą parę mierniczą.

Lemmat 3. Przekrój (A, B) jest *luką.*

Dem. Jeśliby A posiadało maximum i było niem s, to:

$$s \varepsilon A, s^2 < 2 \text{ i } (s + \varepsilon)^2 > 2, \text{ gdy tylko } \varepsilon > 0.$$

Atoli wystarczy obrać

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{h}{2s+1},\ \tfrac{1}{2}\right\} > 0, \text{ gdzie } h = 2 - s^2,$$

aby łatwym rachunkiem przekonać się, że:

$$(s+\varepsilon)^2 < 2 \text{ i } \varepsilon > 0.$$

Rachunek ten ma postać:

$$0 < \varepsilon \leqq \frac{h}{2s+1},\ 2s\varepsilon + \varepsilon \leqq h = 2 - s^2,\ \varepsilon^2 < 1,$$

$$s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2 < s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon \leqq 2,\ (s+\varepsilon)^2 < 2.$$

Analogicznie B nie może posiadać minimum. Zatem (A, B) jest luką.

Def. 3. Jeżeli A jest odcinkiem wyznaczonym przez parę mierniczą (α, β), $B = R_0 - A$, a więc (A, B) przekrojem odnośnym, to oznaczmy przez $A(\alpha, \beta)$:

1° odcinek A, gdy B *nie posiada* minimum;
2° $A + \{\min B\}$, gdy B *posiada* minimum.

Przez $B(\alpha, \beta)$ oznaczmy jeszcze $R_0 - A(\alpha, \beta)$. Natychmiast widać, że gdy B posiada minimum k, to

$A(\alpha, \beta) = [0, k] =$ ogół x takich, że

$$0 \leqq x \leqq k$$

i wtedy $A(\alpha, \beta)$ posiada *maximum* $= k$.

Gdy B nie posiada minimum, to $A(\alpha, \beta)$ może posiadać maximum lub nie. Poprzednio podane przykłady realizują wszystkie możliwe tu przypadki.

Widać też, że $A(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$ jest *przekrojem* i że przekrój ten może być tylko *luką* lub *regularnym na lewo*.

Def. 4. Gdy (α, β) jest parą mierniczą, to $A(\alpha, \beta)$ nazwiemy odcinkiem *znormalizowanym*, wyznaczonym przez (α, β), przekrój zaś $(A(\alpha, \beta), B(\alpha, \beta))$ *przekrojem znormalizowanym*, również *wyznaczonym przez* (α, β).

9. **Odcinki i przekroje normalne.**

Wprowadzimy na początek definicję:

Def. 1. *Odcinkiem* zbioru R_0 lub porządku $(R_0; <_w)$ nazwiemy każdy zbiór ułamków M o własnościach:

(1) $M \subset R_0$,

(2) M niepuste,

(3) M ograniczone od góry, to znaczy, że istnieje taki ułamek z, iż każde x należące do M spełnia warunek $x \leqq z$,

(4) gdy $x < y$ i $y \in M$, to $x \in M$.

Tw. 1. Gdy M jest odcinkiem, to $(M, R_0 - M)$ jest *przekrojem* porządku $(R_0; <)$

— {krótko: „przekrojem R_0"}.

Dem. Natychmiast widoczne z definicji 1 i określenia przekroju.

Zachodzić teraz mogą trzy różne wypadki:

1° M posiada *maximum* naprz. s, wtedy:

$M = [0, s] =$ „ogół x takich, że $0 \leqq x \leqq s$"

i wtedy też przekrój $(M, R_0 - M)$ jest regularny *na lewo.*

2° M nie posiada *maximum,* lecz $R_0 - M$ posiada *minimum* t i wtedy:

$M = [0, t) =$ „ogół x takich, że $0 \leqq x < t$",

a przekrój $(M, R_0 - M)$ jest regularny *na prawo.*

3° M nie posiada *maximum*, ani $R_0 - M$ nie posiada *minimum*, a przekrój $(M, R_0 - M)$ jest *luką*.

Wypadki 1° i 3° nazwiemy *normalnemi*. Stąd:

Def. 2. Odcinek M jest *normalny*, gdy $R_0 - M$ nie posiada *minimum;* przekrój (M, N) jest *normalny*, gdy jest *luką* lub *regularny na lewo*.

Wtedy też, dzięki definicji z ust. 8:

Tw. 2. Gdy (α, β) jest *parą mierniczą ciągów*,
$A(\alpha, \beta)$ jest *odcinkiem normalnym*,
$(A(\alpha, \beta), B(\alpha, \beta))$ *przekrojem normalnym*.

Def. 3. Przez *domknięcie* $\overline{M}$ odcinka M rozumieć będziemy:
(1) odcinek M, gdy M jest normalne,
(2) $M + \{s\}$, $s = \min (R_0 - M)$ w wypadku pozostałym.

Stąd już:

Tw. 3. Domknięcie $\overline{M}$ odcinka M jest odcinkiem normalnym.

Cor. 1. Gdy (α, β) jest parą mierniczą, to

$$A(\alpha, \beta) = \overline{\sum_n [0, \alpha_n]}.$$

Cor. 2. Gdy $k \varepsilon R_0$, to $[0, k]$ jest odcinkiem normalnym i $\overline{[0, k)} = [0, k]$.

Tw. 4. Gdy M i N są odcinkami i $M \subset N$, to $\overline{M} \subset \overline{N}$.

Dem. 1° Gdy $M = \overline{M}$, to $\overline{M} = M \subset N \subset \overline{N}$.
2° Gdy $\overline{M} = M + \{s\}$, $s = \min (R_0 - M)$, to wobec tego, iż $(\overline{N}, R_0 - \overline{N})$ jest przekrojem normalnym $s \varepsilon \overline{N}$ i wtedy $\overline{M} \subset \overline{N}$ lub

$s \varepsilon R_0 - \overline{N}$. Atoli $R_0 - \overline{N}$ niema minimum, więc jakieś t jest $< s$ i należy jeszcze do $R_0 - \overline{N}$, a więc $t \sim \varepsilon \overline{N}$. Lecz $s = \min(R_0 - M)$, więc $t \varepsilon M$, co niemożliwe, bo $M \subset \overline{N}$.

Cor. 1. Gdy $M \subset N$ i N jest odcinkiem normalnym, to $\overline{M} \subset N$.

Tw. 5. Gdy (α, β) jest parą mierniczą, to

$$A(\alpha, \beta) = \Pi_{m\,(n)} [0, \beta_n]$$

{= „wspólna część zbiorów $[0, \beta_n]$ dla $n|0, 1\ldots$}.

Dem.

$[0, \alpha_n] \subset [0, \beta_m]$ dla $n, m|0, 1 \ldots$, więc
$\sum_n [0, \alpha_n] \subset [0, \beta_m]$ i $A(\alpha, \beta) = \sum_n [0, \alpha_n] \subset [0, \beta_m]$
dla $m|0, 1 \ldots\ldots$ Stąd:
$A(\alpha, \beta) \subset \Pi_{m\,p} [0, \beta_p]$.

Gdyby $z \varepsilon \Pi_p [0, \beta_p]$, $z \sim \varepsilon A(\alpha, \beta)$, to byłoby $z \leqq \beta_p$ dla $p|0, 1 \ldots$ i $z \varepsilon B(\alpha, \beta)$. Lecz $B(\alpha, \beta)$ nie posiada minimum, więc dla jakiegoś t mielibyśmy:

$t < z \leqq \beta_p$ dla $p|0, 1 \ldots$, $t \varepsilon B(\alpha, \beta)$,
$t \sim [0, \alpha_n]$ dla $n|0, 1 \ldots$ i ostatecznie

$$\alpha_n < t < z \leqq \beta_p \text{ dla } n, p|0, 1 \ldots,$$

co niemożliwe, gdyż (α, β) jest parą mierniczą.

Cor. Dla pary mierniczej (α, β) mamy:

(1) $\alpha_n \varepsilon A(\alpha, \beta)$ dla $n|0, 1 \ldots\ldots$;

(2) gdy $x \varepsilon A(\alpha, \beta)$, to $x \leqq \beta_n$ dla $n|0, 1 \ldots$ i odwrotnie;

(3) gdy $\alpha_n \leqq k$ dla $n|0, 1 \ldots$, to

$$A(\alpha, \beta) \subset [0, k].$$

Tw. 6. Gdy (α, β) i (γ, δ) są równoważne mierniczo, to

$$A(\alpha, \beta) = A(\gamma, \delta).$$

Dem. Wobec $\alpha_m \leqq \delta_n$ dla $m, n|0, 1 \ldots$ mamy $A(\alpha, \beta) \subset \prod_n [0, \delta_n] = A(\gamma, \delta)$. Wobec zaś:

$\gamma_n \leqq \beta_n$ dla $m, n|0, 1 \ldots$ mamy

$$A(\gamma, \delta) \subset A(\alpha, \beta).$$

Tw. 7. Gdy $A(\alpha, \beta) = A(\gamma, \delta)$, to

$$(\alpha, \beta) \equiv_m (\gamma, \delta).$$

Dem.

$\alpha_n \varepsilon A(\alpha, \beta) = A(\gamma, \delta)$ dla $n|0, 1 \ldots$, więc $\alpha_n \leqq \delta_m$ dla $n, m|0, 1 \ldots$ Analogicznie: $\gamma_n \leqq \beta_m$ dla $n, m|0, 1 \ldots \ldots$

Cor. Gdy $(\alpha, \beta) \equiv_m (\gamma, \delta)$, to przekroje

$$(A(\alpha, \beta), B(\alpha, \beta)) \text{ i } (A(\gamma, \delta), B(\gamma, \delta))$$

są identyczne i odwrotnie.

Tw. 8. Gdy M jest odcinkiem normalnym, to znajdzie się para miernicza taka, że $M = A(\alpha, \beta)$.

Dem. Połóżmy dla $n = 0, 1, 2 \ldots$

$$\alpha_n = \frac{p_n}{10^n}, \; \beta_n = \frac{p_n + 1}{10^n},$$

gdzie p_n jest największą całkowitą, taką że

$$\frac{p_n}{10^n} \varepsilon M, \text{ lecz } \frac{p_n + 1}{10^n} \sim \varepsilon M.$$

Analogicznie jak na str. 196 udowodnimy, że (α, β) jest parą mierniczą. Mamy tu

$$[0, \alpha_n] \subset M \subset [0, \beta_m] \text{ dla } n, m|0, 1 \ldots,$$

więc $\quad A(\alpha, \beta) \subset M \subset \prod_{n}[0, \beta_n) = A(\alpha, \beta)$,

gdyż M normalne.

Stąd: $\qquad M = A(\alpha, \beta)$.

10. Liczby rzeczywiste bezwzględne w szczególności.

Ze względu na twierdzenia 6, 7 i Cor. ust. 9 nasuwają nam się dwie możliwości:

1° albo abstraktem pary mierniczej (α, β) nazwiemy przekrój $(A(\alpha, \beta), B(\alpha, \beta))$, lub

2° abstraktem (α, β) nazwiemy odcinek $A(\alpha, \beta)$.

Obranie pierwszej drogi dałoby nam tak zwaną teorję *Dedekinda* [p. R. Dedekind. Stetigkeit und irrazionale Zahlen 1872].

Drugą drogę obrał *G. Peano* i my nią pójdziemy w dalszym ciągu.

Zauważmy, że możnaby też przyjąć za abstrakt pary (α, β) zbiór $B(\alpha, \beta)$ i miałoby to nawet pewne korzystne strony w praktyce.

Określimy zatem:

Def. 1. *Liczbami rzeczywistemi bezwzględnemi* nazwiemy [w szczególności] *odcinki normalne* klasy R_0 {porządku $(R_0; <_w)$}.

Pełną ich klasę oznaczymy przez Q_0.

Wprowadzimy jeszcze *mniejszość rzeczywistą bezwzględną* $-<_r-$.

Def. 2. Powiemy, że $M <_r N$, gdy:

1° M i N są odcinkami normalnemi.

2° Gdy tylko $M = A(\alpha, \beta)$ i $N = A(\gamma, \delta)$, to $(\alpha, \beta) \prec_m (\gamma, \delta)$.

Tw. 1. Gdy M i N należą do Q_0, to $M <_r N$, *wtedy* i *tylko wtedy*, gdy:

1° $M \subset N$, 2° $N - M$ niepuste.

Dem.

1. Niechaj $M = A(\alpha, \beta)$, $N = A(\gamma, \delta)$, $M <_r N$. Wtedy $\beta_{m_0} < \gamma_{n_0}$ dla pewnych m_0 i n_0, a stąd:

   $\alpha_n < \beta_{m_0} < \gamma_{n_0} < \delta_n$ dla $m, n | 0, 1 \ldots$,

   więc:

$$M = A(\alpha, \beta) \subset [0, \beta_{m_0}] \subset [0, \gamma_{n_0}] \subset A(\gamma, \delta) = N,$$

   przytem $\gamma_{n_0} \varepsilon A(\gamma, \delta)$ i $\gamma_{n_0} \sim \varepsilon A(\alpha, \beta)$, więc $N - M$ niepuste.

2. Niechaj $M = A(\alpha, \beta)$, $N = A(\gamma, \delta)$, $M \subset N$ i $N - M$ niepuste. Niechaj $z \varepsilon N$ i $z \sim \varepsilon M$. Wtedy $z \varepsilon R_0 - M$, $R_0 - M$ nie posiada minimum, więc jakieś t jest $< z$ i $t \varepsilon R_0 - M$, $t \sim \varepsilon M$.

Dla jakiegoś m_0 i jakiegoś n_0 będzie

$$\beta_{m_0} < \frac{t+z}{2} < \gamma_{n_0},$$

inaczej byłoby:

$$\alpha_n < t < \frac{z+t}{2} \leqq \beta_m$$

$$\text{i } \gamma_n \leqq \frac{z+t}{2} < z \leqq \delta_m \quad \text{dla } m, n | 0, 1 \ldots$$

Stąd: $\beta_{m_0} < \gamma_{n_0}$ i $(\alpha, \beta) \prec_m (\gamma, \delta)$.

Jak już wiemy [str. 130], system $(Q_0; <_r)$ będzie *systemem porządkowym* w sensie *Cantora*. Typ porządkowy dla $(Q_0; <_r)$ zbadamy nieco później.

§ 3. Działania na liczbach rzeczywistych bezwzględnych.

11. Dodawanie i Mnożenie.

Def. Gdy M i N są elementami Q_0 i oznaczymy:

$M \bigcirc N =$ ogół z takich, że $z = x + y$ dla jakiegoś x z klasy M i jakiegoś y z klasy N;

$M \square N =$ ogół z takich, że $z = x \times y$ dla jakiegoś $x \varepsilon M$ i jakiegoś $y \varepsilon N$,

to przez sumę $M +_r N$ rozumieć będziemy domknięcie $M \bigcirc N$, a przez *iloczyn* $M \times_r N$ domknięcie $M \square N$.

$$M +_r N \stackrel{\mathrm{df}}{=} \overline{M \bigcirc N}$$

$$M \times_r N \stackrel{\mathrm{df}}{=} \overline{M \square N}.$$

Niechaj M i N należą do Q_0, a więc będą odcinkami normalnemi klasy R_0. Udowodnimy, że $M \bigcirc N$ i $M \square N$ są odcinkami.

Rzeczywiście:

1° $0 = 0 + 0 = 0 \times 0$, $0 \varepsilon M$, $0 \varepsilon N$, więc $0 \varepsilon M \bigcirc N$ i $0 \varepsilon M \square N$, zatem M i N niepuste.

2° Gdy u ogranicza od góry M, a v ogranicza N, to $u + v$ i $u \times v$ ograniczają $M \bigcirc N$ względnie $M \square N$.

3° Gdy $x \varepsilon M$, $y \varepsilon N$, więc $x + y \varepsilon M \bigcirc N$ i $x \times y \varepsilon M \square N$, a $u < x + y$, $v < x \times y$, to

$$u = \frac{u \times x}{x + y} + \frac{u \times y}{x + y}, \quad v = \frac{x \times v}{x \times y} \times y.$$

przyczem:

$$\frac{u\times x}{x+y}\leqq x,\ \frac{u\times y}{x+y}\leqq y,\ \frac{x\times v}{x\times y}\leqq x,\ y\leqq y,$$

więc $$\frac{u\times x}{x+y},\ \frac{v\times x}{x\times y}\,\varepsilon\, M,\ \frac{u\times y}{x+y},\ y\,\varepsilon\, N,$$

a zatem $u\,\varepsilon\, M\bigcirc N,\ v\,\varepsilon\, M\,\Box\, N.$

Stąd:

Tw. 1. $M, N\,\varepsilon\, Q_0 : \supset : M +_r N,\ M \times_r N\,\varepsilon\, Q_0$

Dem. $M +_r N = \overline{M\,\Box\, N},\ M\times_r N = \overline{M\bigcirc N},$
zatem są to odcinki normalne.

Dodawanie $+_r$ i *mnożenie* $\times_r$ *są nieograniczenie wykonalne i wewnętrzne* w Q_0.

12. **Związek sumy i iloczynu z parami mierniczemi.**

Lemmat. Gdy

1° α jest ciągiem niemalejącym, β ciągiem nierosnącym ułamków.

2° $\alpha_n < \beta_m$ dla $n, m|0, 1\ldots\ldots$

3° Dla każdego ułamka $\varepsilon > 0$ można dobrać p całkowite tak, że

$$\beta_m - \alpha_n < \varepsilon \quad \text{dla} \quad m, n|p, p+1\ldots,$$

to (α, β) jest *parą mierniczą* i *odwrotnie.*

Dem.

1° Gdyby $\alpha_n \leqq \lambda < \mu \leqq \beta_m$ dla $n, m|0, 1\ldots,$ to biorąc $\varepsilon = \mu - \lambda > 0$ mielibyśmy

$$\beta_m - \alpha_n \geqq \varepsilon \quad \text{dla} \quad m, n|0, 1\ldots\ldots$$

sprzeczne z założeniem 3°.

2° *Odwrotnie:* gdy (α, β) jest parą mierniczą i $\varepsilon > 0$, to nie może być stale $\alpha_m + \varepsilon \leqq \beta_n$ czyli $\alpha_m \leqq \beta_n - \varepsilon$, gdyż wtedy

$$[0, \alpha_m] \subset [0, \alpha_m + \varepsilon] \subset [0, \beta_n] \quad \text{dla } m, n | 0, 1 \ldots$$

$$A(\alpha, \beta) \subset \overline{\sum_m (0, \alpha_m + \varepsilon)} \subset \prod_n [0, \beta_n] = A(\alpha, \beta),$$

$$\overline{\sum_m [0, \alpha_m + \varepsilon]} = A(\alpha, \beta),$$

$$[0, \alpha_m] \subset [0, \beta_n - \varepsilon] \subset [0, \beta_n] \quad \text{dla } m, n | 0, 1 \ldots$$

$$A(\alpha, \beta) \subset \overline{\prod_n [0, \beta_n - \varepsilon]} \subset \prod_n [0, \beta_n] = A(\alpha, \beta),$$

$$\overline{\sum_m [0, \alpha_m + \varepsilon]} = A(\alpha, \beta) = \overline{\prod_n [0, \beta_n - \varepsilon]}$$

i stąd: $\alpha_m + \varepsilon \leqq \beta_n - \varepsilon$ dla $m, n | 0, 1 \ldots$

czyli: $\alpha_m + 2\varepsilon \leqq \beta_n$ dla $m, n | 0, 1 \ldots$

Postępując dalej w ten sposób okażemy, że

$$\alpha_m + p\,\varepsilon \leqq \beta_n \quad \text{dla } m, n, p | 0, 1 \ldots;$$

w szczególności zaś:

$$\alpha_0 + p\,\varepsilon \leqq \beta_0 \quad \text{dla } p | 0, 1 \ldots$$

skąd $$p \leqq \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\varepsilon} \quad \text{dla } p | 0, 1 \ldots,$$

co niemożliwe.

Zatem kiedyś $\alpha_{m_0} + \varepsilon > \beta_{n_0}$, czyli $\beta_{n_0} - \alpha_{m_0} < \varepsilon$, a wtedy oznaczywszy $p = \max(m_0, n_0)$ otrzymamy:

$$\beta_n - \alpha_m < \varepsilon \quad \text{dla } n, m | p, p + 1, \ldots$$

Określmy:

Def 1. $(\alpha, \beta) +_m (\gamma, \delta) \overset{\text{df}}{=} (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$

$(\alpha, \beta) \times_m (\gamma, \delta) \overset{\text{df}}{=} (\alpha \times \gamma, \beta \times \delta)$,

gdzie (α, β) i (γ, δ) są parami mierniczemi,

$\alpha + \gamma$ oznacza ciąg: $\alpha_0 + \gamma_0, \alpha_1 + \gamma_1 \dots$
$\alpha \times \gamma$ „ „ : $\alpha_0 \times \gamma_0, \alpha_1 \times \gamma_1 \dots$
i t. d.

Tw. 1. Gdy (α, β) i (γ, δ) są parami mierniczemi, to $(\alpha, \beta) +_m (\gamma, \delta)$ i $(\alpha, \beta) \times_m (\gamma, \delta)$ są również takiemi.

Dem.

1. Ciągi $\alpha + \gamma$ i $\alpha \times \gamma$ są niemalejące, $\beta + \delta$ i $\beta \times \delta$ nierosnące oraz
$$\alpha_m + \gamma_m < \beta_n + \delta_n, \quad \alpha_m \times \gamma_m < \beta_n \times \delta_n$$
dla $m, n | 0, 1 \dots$

2. Niechaj będzie $\varepsilon > 0$ i p całkowite obrane tak, by
$$\beta_n - \alpha_m < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \delta_n - \gamma_m < \frac{\varepsilon}{2}$$
dla $n, m | p, p + 1 \dots$
Wtedy $(\beta_n + \delta_n) - (\alpha_m + \gamma_m) < \varepsilon$
dla $n, m | p, p + 1 \dots$

3. Niechaj będzie $\varepsilon > 0$ i q całkowite takie, że
$$\beta_n - \alpha_m < \frac{\varepsilon}{\beta_0 + \delta_0 + 1}, \quad \delta_n - \gamma_m < \frac{\varepsilon}{\beta_0 + \delta_0 + 1}$$
dla $m, n | q, q + 1 \dots$

Wtedy:
$$\beta_n \times \delta_n - \alpha_m \times \gamma_m = \beta_n \times \delta_n - \beta_n \times \gamma_m + \beta_n \times \gamma_m - \alpha_m \times \gamma_m$$
$$= \beta_n(\delta_n - \gamma_m) + \gamma_m(\beta_n - \alpha_m) \leq \beta_0(\delta_n - \gamma_m) + \delta_0(\beta_n - \alpha_m)$$
$$< \frac{\beta_0 \times \varepsilon}{\beta_0 + \delta_0 + 1} + \frac{\delta_0 \times \varepsilon}{\beta_0 + \delta_0 + 1} < \varepsilon$$
dla $m, n | q, q + 1 \dots$

Dzięki *Lemmatowi* twierdzenie zatem słuszne.

Tw. 2. Gdy (α, β) i (γ, δ) są parami mierniczemi, $M = A(\alpha, \beta)$, $N = A(\gamma, \delta)$, to

$$M +_r N = A[(\alpha, \beta) +_m (\gamma, \delta)],$$
$$M \times_r N = A[(\alpha, \beta) \times_m (\gamma, \delta)].$$

Dem.

1. Gdy $x \varepsilon M$ i $y \varepsilon N$, to $x \leqq \beta_n, y \leqq \delta_n$, $x + y \leqq \beta_n + \delta_n$, $x \times y \leqq \beta_n \times \delta_n$ dla $n|0, 1 \ldots$
Stąd: $$M \bigcirc N \subset \prod_n [0, \beta_n + \delta_n],$$
$$M \square N \subset \prod_n [0, \beta_n \times \delta_n]$$
i $M +_r N \subset A[(\alpha, \beta) +_m (\gamma, \delta)]$,
$M \times_r N \subset A[(\alpha, \beta) \times_m (\gamma, \delta)]$.

2. $\sum_m [0, \alpha_m + \gamma_m] \subset \sum_n [0, \alpha_n] \bigcirc \sum_p [0, \gamma_p]$
$A[(\alpha, \beta) +_m (\gamma, \delta)] \subset M \bigcirc N \subset M +_r N$.

3. $\sum_m [0, \alpha_m \times \gamma_m] \subset \sum_n [0, \alpha_n] \square \sum_p [0, \gamma_p]$
$\subset M \square N \subset M \times_r N$.

Obierając pary miernicze (α, β), (γ, δ), (ε, ζ) tak, by $M = A(\alpha, \beta)$, $N = A(\gamma, \delta)$, $P = A(\varepsilon, \zeta)$ udowodnimy z łatwością:

Tw. 3.

$$M, N \varepsilon Q_0 : \supset : M +_r N = N +_r M \,.\, M \times_r N = N \times_r M$$

[*przemienność* $+_r$ i $\times_r$].

Tw. 4.

$$M, N, P \varepsilon Q_0 : \supset : (M +_r N) +_r P = M +_r (N +_r P).$$
$$(M \times_r N) \times_r P = M \times_r (N \times_r P)$$

[*łączność* $+_r$ i $\times_r$].

Tw. 5.
$M, N, P \varepsilon Q_0 : \supset : M \times_r (N +_r P) = M \times_r N +_r M \times_r P$
[*rozdzielność* $+_r$ wobec $\times_r$].

13. Zero i Odejmowanie.

Def. 1. Zerem rzeczywistem bezwzględnem 0_r nazwiemy odcinek $[0, 0]$ czyli $\{0\}$, należący do Q_0.

Tw. 1. $M \varepsilon Q_0 : \supset : M +_r 0_r = M$.

Dem. Widoczne z definicji.

Tw. 2. $M \varepsilon Q_0 . N <_r P : \supset : M +_r N <_r M +_r P$.

Dem. 1. Ponieważ $N \subset P$ więc widocznie
$M +_r N \subset M +_r P$.

2. Obierzmy (α, β), (γ, δ), (ε, ζ) tak, by
$A(\alpha, \beta) = M$, $A(\gamma, \delta) = N$, $A(\varepsilon, \zeta) = P$.
Wtedy: $M +_r N = A(\alpha + \gamma, \beta + \delta)$,
$M +_r P = A(\alpha + \varepsilon, \beta + \zeta)$.
Gdyby $M +_r N = M +_r P$, to
$(\alpha + \gamma, \beta + \delta) \equiv_m (\alpha + \varepsilon, \beta + \zeta)$,
więc $\alpha_m + \varepsilon_m \leqq \beta_n + \delta_n$ i
$\varepsilon_m \leqq (\beta_n - \alpha_m) + \delta_n$ dla $m, n \mid 0, 1 \ldots\ldots$
Tymczasem dla pewnych m_0 i n_0 mamy:
$\delta_{n_0} < \varepsilon_{m_0}$, więc
$$0 < \varepsilon_{m_0} - \delta_{n_0} \leqq \varepsilon_p - \delta_p \leqq \beta_p - \alpha_p$$
dla $p \geqq m_0, n_0$, a ponieważ od pewnego miejsca będzie $\beta_p - \alpha_p < \varepsilon_{m_0} - \delta_{n_0}$, zatem byłoby $\varepsilon_{m_0} - \delta_{n_0} < \varepsilon_{m_0} - \delta_{n_0}$ co niemożliwe.

Cor. 1. $M \varepsilon Q_0 . N >_r P : \supset : M +_r N >_r M +_r P$.

Uw. $N >_r P$ oznacza: $P <_r N$.

Cor. 2. $M, N, P \varepsilon Q_0 . M +_r N =$
$= M +_r P : \supset : N = P$.

Dem. Gdyż $N <_r P$ lub $N >_r P$ lub $N = P$, atoli tw. 2 i Cor. 1 odrzucają dwie pierwsze ewentualności.

Działanie $+_r$ jest jednotliwe.

Cor. 3. $M, N \varepsilon Q_0 . M +_r N = M : \supset : N = 0_r$.

Dem. $M +_r N = M = M +_r 0_r$, więc $N = 0_r$.

Łącznie z tw. 1. mamy więc:

0_r *jest Modułem dla* $+_r$.

Tw. 3. $M \varepsilon Q_0 . M \neq 0_r : \supset : 0_r < M$.

Dem. $\{0\} \subset M$, $M \neq \{0\}$, więc $M -_m \{0\}$ niepuste.

Zero 0_r jest Minimum porządku $(Q_0 ; <_r)$.

Oznaczając *różnicę* (wynik *odejmowania* $-_r$, a więc działania odwrotnego do $+_r$) przez $M -_r N$ mamy:

Tw. 4. Gdy $M, N \varepsilon Q_0$ i $N -_r M$ *ma sens*, to $M \leqq N$.

Dem. Gdyż wtedy

$$N -_r M \varepsilon Q_0, \text{ więc } N -_r M \geqq_r 0_r$$

$$M = M +_r 0_r \leqq_r M +_r (N -_r M) = N.$$

Tw. 5. Gdy $M, N \varepsilon Q_0$ i $M \leqq_r N$, to $N -_r M$ *ma sens.*

Dem.

(1) Gdy $M = N$, to $M +_r 0_r = N$, działanie $+_r$ jest jednotliwe, więc $0_r = N -_r M$.

(2) Załóżmy więc $M <_r N$.

Oznaczmy przez K = ogól z takich, że $z = x - y$ dla pewnego x z klasy N i pewnego y z klasy M, a przez L domknięcie K. Udowodnimy z łatwością już, że K jest odcinkiem, L należy do Q_0 i jeszcze: $M +_r L = N$. Ponieważ $+_r$ jest jednotliwe, więc $L = N -_r M$.

14. **Jedynka i Dzielenie.**

Def. 1. *Jedynką rzeczywistą bezwzględną* 1_r nazwiemy odcinek $[0, 1]$, należący do Q_0.

Tw. 1. $M \varepsilon Q_0 : \supset : M \times_r 1_r = M$.

Dem. Niechaj $M = A(\alpha, \beta)$, $\gamma_n = 1$ dla $n \mid 0, 1 \ldots A(\gamma, \delta) = 1_r$.

wtedy:

$$M \times_r 1_r = \overline{\sum_m [0, \alpha_m \gamma_m]} = \overline{\sum_m [0, \alpha_m]} = M.$$

Tw. 2. $0_r \neq 1_r$.

Dem. Widoczne z definicji.

Tw. 3. Gdy $M \varepsilon Q_0$ i $M \neq 0_r$, $1 /_r M$, czyli $/_r M$ ma sens i należy do Q_0.

Dem.

1. Niechaj $M = A(\alpha, \beta)$; możemy założyć, że $\alpha_n > 0$ dla $n \mid 0, 1 \ldots$, gdyż inaczej byłoby $M = 0_r$.
2. Oznaczając przez $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ i $\frac{\beta}{\alpha}$ ciągi:
   $\left\{\frac{1}{\beta_n}\right\}_n$, $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}_n$, $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$ i $\left\{\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right\}$, otrzymamy, co łatwo stwierdzić *pary miernicze* $\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}\right)$ i $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}\right)$.
3. $M \times_r A\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}\right) = A\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}\right)$.
4. $\left[0, \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right] \subset [0, 1] \subset \left[0, \frac{\beta_n}{\alpha_n}\right]$, gdyż $0 < \alpha_n \leqq \beta_n$,
   więc $A\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}\right) \subset 1_r \subset A\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}\right)$.

Stąd: $A\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1_r$; $M \times_r A\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}\right) = 1_r$.

5. Gdyby $M \times_r N = 1_r$, to $A\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}\right) =$

$$= A\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}\right) \times_r (M \times_r N) =$$

$$= \left[A\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}\right) \times_r M\right] \times_r N = 1_r \times_r N = N.$$

Tw. 4. Gdy $M, N \varepsilon Q_0$ i $N \neq 0_r$, to *iloraz* $M /_r N$ ma sens.

[*Działanie* $\times_r$ jest *odwracalne z zastrzeżeniem co do* 0_r (Modułu $(+_r)$)].

Dem.

1. Wtedy ma sens $/_r N$ i $N \times_r \{M \times_r (/_r N)\} = M \times_r [N \times_r (/_r N)] = M \times_r 1_r = M$. zatem takie X, że $N \times_r X = M$ istnieje.
2. Gdyby $N \times_r P = M$, to $(N \times_r P) \times_r (/_r N) = M \times_r (/_r N)$, więc $P = P \times_r \{N \times_r (/_r N)\} = M \times_r (/_r N)$.
3. Ilorazem jest więc $M \times_r (/_r N)$ należące do Q_0.

Tw. 5. Gdy $M \times_r P = M$ dla każdego $M \varepsilon Q_0$, to $P = 1_r$.

Dem. Wtedy też: $1_r \times_r P = 1_r$, $P = 1_r$.

„1_r *jest Modułem* $\times_r$".

Twierdzenia ust. 11—14 dowodzą, że:

Tw. 6. System $(Q_0; +_r; \times_r; <_r)$ jest *systemem liczbowym bezwzględnym.*

Zachodzą tu zatem wszystkie twierdzenia grupy $(\mathscr{F})$ [str. 87].

15. **Elementy wymierne.**

Odcinki $[0, a]$, gdy $a \varepsilon R_0$, należą jako *normalne* do Q_0. Będziemy też mieli, jak to łatwo uzasadnić:

$$[0, a] +_r [0, b] = [0, a+b]$$
$$[0, a] \times_r [0, b] = [0, a \times b]$$
$$[0, a] -_r [0, b] = [0, a-b], \text{ o ile } a \geqq b.$$
$$[0, a] /_r [0, b] = [0, a / b], \text{ o ile } b \neq 0.$$

Oznaczajmy przez chwilę krótko:

$$[0, a] = a_r, \text{ gdy } a \varepsilon R_0.$$

Tw. 1. Elementy a_r, gdzie $a \varepsilon R_0$ stanowią klasę *elementów wymiernych bezwzględnych* systemu $(Q_0; +_r; \times_r; <_r)$.

Dem. Należą tu rzeczywiście 0_r i 1_r; przytem $a_r + 1_r = (a+1)_r$, więc *całkowitemi* elementami będą n_r, gdzie $n | 0, 1, 2 \ldots$

Gdy jednak $a \varepsilon R_0$, to $a = \frac{n}{p}$ przy n i p całkowitych i $p \neq 0$, więc $a_r = n_r /_r p_r$. Ogół a_r będzie to zatem klasa $Q_0 R_0$.

Tw. 2. System $(Q_0 R_0; +_r'; \times_r'; <_r')$, gdzie $+_r'$, $\times_r'$, $<_r'$ oznacza zwężenia $+_r$, $\times_r$, $<_r$ do klasy $Q_0 R_0$, jest *systemem liczb wymiernych* szczególnego rodzaju, izomorfijnym z

$$(R_0; +_w; \times_w; <_w).$$

Dem. Izomorfję wykaże natychmiast odpowiedniość T, gdzie

$$T'a = a_r \quad \text{dla} \quad a \varepsilon R_0.$$

Cor. Stąd też $(Q_0 R_0; <_r)$ jest systemem porządkowym typu $1 + \eta$.

16. **Typ porządkowy** $(Q_0; <_r)$.

Tw. 1. *System* $(Q_0; <_r)$ *jest typu* $1+\lambda$ [str. 81].

Dem. Wiemy już, że $(Q_0; <_r)$ jest systemem porządkowym i że jego Minimum jest 0_r. Wystarczy zatem udowodnić, że

1° $Q_0 - \{0_r\}$ nie posiada Minimum. Rzeczywiście, gdy $M \varepsilon Q_0$ i $M \neq 0$, to jakieś $a \neq 0$ należy do M, a wtedy: $\left(\frac{a}{2}\right)_r \varepsilon Q_0$

i $$0_r <_r \left(\frac{a}{2}\right)_r <_r M.$$

2° Klasa Q_0 [czy $Q_0 - \{0_r\}$] nie posiada *Maximum*. Rzeczywiście, gdy $M \varepsilon Q_0 - \{0_r\}$, to
$$M +_r 1_r >_r M.$$

3° *Przekroje* nie są nigdy *lukami*. Rzeczywiście: gdy $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ jest przekrojem to $k = \Sigma_m \mathbf{A} \varepsilon Q_0$ i musi należeć do $\mathbf{A}$ lub do $\mathbf{B}$, a wtedy $k = \max_{<_r} \mathbf{A}$ lub $k = \min_{<_r} \mathbf{B}$.

4° *Przeliczalna* klasa $Q_0 R_0$ jest wszędzie gęsta w Q_0.

Rzeczywiście: gdy $M <_r N$, to $N -_m M$ niepuste i jakieś $a \varepsilon N -_m M$, a wtedy:
$$M <_r a_r <_r N, \ a_r \varepsilon Q_0 R_0.$$

Cor. Temsamem też typ porządkowy wszelkich systemów liczb rzeczywistych, bezwzględnych, utworzonych przy pomocy innych zasad abstrahowania od $\equiv_m$ jest ten sam, a mianowicie $1 + \lambda$.

17. Izomorfja.

Tw. Każdy system $(A; +; \times; <)$ taki, że:

(1) $(A; +; \times; <)$ jest systemem liczbowym bezwzględnym;

(2) $(A; <)$ jest typu $1 + \lambda$;
(3) Klasa $A R_0$ jest wszędzie gęsta w A;
jest *izomorfijny* z $(Q_0; +_r; \times_r; <_r)$.

Dem. Szkicujemy jedynie dowód, pozostawiając czytelnikowi łatwe jego wykończenie:

1° Systemy $(A R_0; +'; \times'; <')$ i $(Q_0 R_0; +_r'; \times_r'; <_r')$, gdzie $+'; \times'; <'$ są zwężeniami do $A R_0$, a $+_r', \times_r'$ $<_r'$ do $Q_0 R_0$, są *izomorfijne* [str. 87] i tylko w jeden sposób. Niechaj izomorfję wykazuje (jedyna) relacja T.

2° Gdy $M \varepsilon Q_0$, to oznaczmy przez M_r klasę powstałą z M przez zastąpienie każdego a należącego do M elementem a_r. Niechaj $M' = T'' M_r$.

Udowodnimy, że $(M', A - M')$ jest przekrojem *regularnym na lewo.* Relacja S, która elementowi M przypisuje $\max_< M' = \max_{<_r} T'' M_r$ wykaże izomorfję i to w jedyny możliwy sposób.

Płyną stąd następujące konsekwencje:

1° Teorja systemów $(A; +; \times; <)$ o własnościach (1) (2) (3) jest *abstrakcyjną teorją liczb rzeczywistych bezwzględnych.*

2° Szczególny wybór $(Q_0; +_r; \times_r; <_r)$ nie ma w sobie nic koniecznego, ale też jest dla teorji formalnej zupełnie obojętny.

3° Możemy i postąpimy tak:

(α) przyjąwszy szczególny egzemplarz $(Q_0; +_r; \times_r; <_r)$ liczb rzeczywistych bezwzględnych, zastąpimy dawny egzemplarz *liczb wymiernych* $(R_0; +_w; \times_w; <_w)$ przez formalnie równoważny

$$(Q_0 R_0; +_r'; \times_r'; <_r');$$

(β) odrzucimy pisanie znaczka wyróżniającego ($_r$), teraz już niepotrzebnego. Temsamem też egzemplarzem arytmetyki liczb całkowitych będzie $(Q_0 N_0; +_r''; \times_r''; <_r'')$, gdzie $+_r''$, $\times_r''$, $<_r''$ oznaczają $+_r$, $\times_r$, $<_r$ zwężone do $Q_0 N_0$.

(γ) pisać będziemy R_0, N_0 i t. d., zamiast $Q_0 R_0$, $Q_0 N_0$, i t. d.

Rozdział X.

Liczby Rzeczywiste Względne.

§ 1. Pary liczb rzeczywistych bezwzględnych. Liczby rzeczywiste względne.

1. Pary arytmetyczne.

Def. Nazwiemy *parą arytmetyczną* każdą parę (A, B), gdzie A, B są liczbami rzeczywistemi bezwzględnemi. Ogół ich oznaczymy przez $\mathscr{A}$.

2. Proporcjonalność i poprzedzanie arytmetyczne.

Def. 1. *Pary arytmetyczne* (A, B) i (C, D) nazwiemy *arytmetycznie proporcjonalnemi:*

$$(A, B) \equiv_a (C, D), \text{ gdy } A + D = B + C.$$

Def. 2. Powiemy, że (A, B) *poprzedza arytmetycznie* (C, D), czyli $(A, B) \prec_a (C, D)$, gdy:

(A, B) i (C, D) są parami arytmetycznemi

i $$A + D < B + C.$$

Tw. 1. *Proporcjonalność arytmetyczna* $(\equiv_a)$ jest *równoważnością* o polu $\mathscr{A}$.

Dem.

1. $(A, B) \equiv_a (A, B)$, gdyż $A + B = B + A$.
2. Gdy $(A, B) \equiv_a (C, D)$, to $A + D = B + C$, więc $C + B = D + A$, stąd $(C, D) \equiv_a (A, B)$.
3. Gdy $(A, B) \equiv_a (C, D) \equiv_a (E, F)$, to $A + D = B + C$, $C + F = D + E$, więc $A + F + D = B + C + F = B + D + E$, stąd $A + F = B + E$ i $(A, B) \equiv_a (E, F)$.
4. $C(\equiv_a) = \mathscr{A}$ widoczne.

Tw. 2. *Poprzedzanie arytmetyczne* $(\prec_a)$ jest *quasi-porządkiem,* o polu $\mathscr{A}$, związanym z $\equiv_a$.

Dem.

1. $C(\prec_a) \subset \mathscr{A}$ z definicji, lecz gdy $(A, B) \varepsilon \mathscr{A}$, to $(A, B) \prec_a (A+1, B)$, więc $(A, B) \varepsilon C(\prec_a)$. Stąd: $C(\prec_a) = \mathscr{A}$.
2. Jednorodność $\prec_a$ jest z definicji widoczna.
3. Dla par arytmetycznych (A, B) i (C, D) mamy $A + D = B + C$ lub $A + D < B + C$
lub $A + D > B + C$
i tylko jedna z tych okoliczności zachodzi. Stąd: $(A, B) \equiv_a (C, D)$ lub $(A, B) \prec_a (C, D)$ lub $(C, D) \prec_a (A, B)$ i wypadki te są rozłączne.
4. Gdy $(A', B') \equiv_a (A, B) \prec_a (C, D) \equiv_a (C', D')$, to $A' + B = B' + A$, $A + D < B + C$,
$C + D' = D + C'$.
Stąd:
$A' + D + B = A + B' + D < B' + B + C$,
więc $A' + D < B' + C$. Dalej:
$A' + D' + D < B' + D' + C = B' + D + C'$,

skąd: $A' + D' < B' + C'$, więc:
$(A', B') \prec_a (C', D')$.

5. Gdy $(A, B) \prec_a (C, D) \prec_a (E, F)$, to
$A + D < B + C,\ C + F < D + E,$
$A + F + D < B + C + F < B + D + E,$
skąd $A + F < B + E$ i $(A, B) \prec_a (E, F)$.

A więc:

Tw. 3. System $(\mathscr{A}; \equiv_a; \prec_a)$ jest *systemem wielkości w sensie szerszym* i zachodzą tu twierdzenia grupy $(\mathscr{H}')$ (str. 127, 128).

3. Pary zredukowane.

Def. 1. *Reduktem pary arytmetycznej* (A, B) czyli $(A \mid B)$ nazwiemy:

1° parę $(A - B, 0)$, gdy $A \geqq B$,

2° parę $(0, B - A)$, gdy $A \leqq B$.

Uw. Gdy $A \geqq B$ i $A \leqq B$ czyli, gdy $A = B$, to obie części definicji dadzą nam $(A \mid B) = (0, 0)$.

Oznaczymy też:

Def. 2. $(A, 0) \stackrel{\text{df}}{=} + A,\ (0, B) \stackrel{\text{df}}{=} - B.$

Def. 3. Pary (A, B), gdzie $A = 0$ lub $B = 0$ nazwiemy *zredukowanemi*.

Tw. 1. $(A, B)\, \varepsilon\, \mathscr{A} : \supset : (A \mid B)\, \varepsilon\, \mathscr{A}$.

Dem. Z definicji.

Tw. 2. $(A, B) \equiv_a (C, D) : \supset : (A \mid B) = (C \mid D)$.

Dem. Wtedy $A + D = B + C$, więc:

1° albo $A \geqq B$, to $C \geqq D$ i $A - B = C - D$, skąd $(A \mid B) = (A - B, 0) = (C - D, 0) = (C \mid D)$,

2° albo $A \leqq B$, to $C \leqq D$ i $B - A = D - C$, skąd: $(A \mid B) = (0, B - A) = (0, D - C) = (C \mid D)$.

Tw. 3. $(A, B), (C, D) \varepsilon \mathcal{H} . (A \mid B) = (C \mid D) : \supset : (A, B) \equiv_a (C, D)$.

Dem. Wtedy:

1° albo $(A \mid B) = (A - B, 0) = (C - D, 0)$, $A - B = C - D$ i $A + D = B + C$,

2° albo $(A \mid B) = (0, B - A) = (0, D - C) = (C \mid D)$ i $B - A = D - C$, skąd $A + D = B + C$.

Przykłady:

$(3, 2) \equiv_a (5, 4); (3, 2) \prec_a (4, 2) \equiv_a (2, 0) = +2;$
$(3 \mid 1) = (2, 0) = +2; (3 \mid 7) = (0, 4) = -4.$

4. **Abstrahowanie od $\equiv_a$.**

Wybierzemy tu zasadę reprezentacji:

Def. 1. Abstraktem pary arytmetycznej (A, B) nazwiemy parę zredukowaną $(A \mid B)$.

Tw. 1. Każda para zredukowana jest reduktem jakiejś pary arytmetycznej.

Dem. Wystarczy zauważyć, że gdy (A, B) jest parą zredukowaną, to $(A \mid B) = (A, B)$.

Def. 2. Ogół par zredukowanych oznaczymy przez q i nazwiemy ogółem *liczb rzeczywistych (względnych)*.

Abstrakcja od $\prec_a$ da nam teraz:

Def. 3. Określimy związek $x <_q y$, jako spełnianie warunków:

(1) $x, y \, \varepsilon \, q$.

(2) ilekroć $(A \mid B) = x$ i $(C \mid D) = y$, to
$$(A, B) \prec_a (C, D).$$

Dzięki niezmienniczości $\prec_a$ wobec $\equiv_a$ mamy:

Tw. 1. $x <_q y$ jest równoważne stwierdzeniu, że $\quad (p'x, k'x) \lessdot_a (p'y, k'y)$

lub, że $\quad p'x + k'y < k'x + p'y.$

System $(q; <_q)$ jest systemem porządkowym, którego typ zbadamy później.

§ 2. Działania na liczbach rzeczywistych (względnych).

5. **Dodawanie i Mnożenie.**

Moglibyśmy wprowadzić sumę i iloczyn tak, jak to czynią elementarne książki szkolne. Większą elegancją odznacza się postępowanie następujące:

Def. 1. Gdy x i y są liczbami rzeczywistemi (względnemi), to

$$x +_q y \,.\overset{\mathrm{df}}{=}.\, (p'x + p'y \,|\, k'x + k'y)$$

$$x \times_q y \,.\overset{\mathrm{df}}{=}.\, (p'x \times p'y + k'x \times k'y \,|\, p'x \times k'y + p'y \times k'x).$$

Przykłady:

$$(+3) +_q (+7) = (3, 0) +_q (7, 0) = (10|0) = +10,$$

$$(+3) +_q (-7) = (3, 0) +_q (0, 7) = (3|7) = (0, 4) = -4,$$

$$(-3) +_q (+7) = (0, 3) +_q (7, 0) = (7|3) = (4, 0) = +4,$$

$$(-3) +_q (-7) = (0, 3) +_q (0, 7) = (0|10) = (0, 10) = +10$$

$$(+3) \times_q (+7) = (3, 0) \times_q (7, 0) = (21|0) = +21$$

$$(+3) \times_q (-7) = (3, 0) \times_q (0, 7) = (0|21) = -21$$

$$(-3) \times_q (+7) = (0, 3) \times_q (7, 0) = (0|21) = -21$$

$$(-3) \times_q (-7) = (0, 3) \times_q (0, 7) = (21|0) = +21.$$

Z definicji tej wynika prawie natychmiast:

Tw. 1. Działania $+_q$ i $\times_q$ są *nieograniczenie wykonalne* i *wewnętrzne* w q, *przemienne, łączne* i $+_q$ jest *rozdzielne* wobec $\times_q$.

Def. 2. Oznaczymy:

$$0_q \overset{\text{df}}{=} (0\,,0) = +0 = -0.$$

$$1_q \overset{\text{df}}{=} (1\,,0) = +1.$$

Tw. 2. $x \varepsilon q : \supset : x +_q 0_q = x,\ x \times_q 1_q = x.$

Dem. Przez wykonanie działań odnośnych.

Tw. 3. Gdy $x +_q y = x$, a $x \times_q z = x$ dla każdego x należącego do q, to

$$y = 0_q \quad \text{i} \quad z = 1_q.$$

Dem. Wtedy:

$$y = 0_q +_q y = 0_q\,,\ z = 1_q \times_q z = 1_q$$

A więc: 0_q jest Modułem $+_q$ i 1_q jest Modułem $\times_q$.

Tw. 4. $0_q \mp 1_q$.

6. Odejmowanie i Dzielenie.

Tw. 1. Każda liczba rzeczywista x posiada *symetryczną* {str. 89} i jest nią:

$$\overline{x} = (k'x \,|\, p'x) = (k'x\,, p'x).$$

Dem. Rzeczywiście:

$$x +_q \overline{x} = (p'x + k'x \,|\, k'x + p'x) = (0\,,0) = 0_q.$$

Gdyby

$$x + y = 0_q,\ \text{to}\ y = (\overline{x} +_q x) +_q y = \overline{x} + 0_q = \overline{x}.$$

Tw. 2. Działanie $+_q$ jest nieograniczenie odwracalne (obustronnie) i różnicą

$$x -_q y \ \text{jest}\ x +_q \overline{y}.$$

Dem.

1. $y +_q (x +_q \overline{y}) = x +_q (y +_q \overline{y}) = x +_q 0_q = x.$

2. Gdyby $y +_q z = x$, to $\bar{y} +_q (y +_q z) = x +_q \bar{y}$, więc $z = z +_q (y +_q \bar{y}) = x +_q \bar{y}$.

Tw. 3. Gdy $x \neq 0_q$, to $1_q /_q x$, czyli $/_q x$ ma sens i należy do q.

Dem.

1. albo $x = (p'x, 0)$ i $p'x \neq 0$, to $x \times_q \left(\frac{1}{p'x}, 0\right)$

$= (p'x, 0) \times_q \left(\frac{1}{p'x}, 0\right) = (1, 0) = 1_q$ i gdyby

$x \times_q z = 1_q$, toby $z = \left(\frac{1}{p'x}, 0\right) \times_q x \times_q z =$

$= \left(\frac{1}{p'x}, 0\right) \times 1_q = \left(\frac{1}{p'x}, 0\right)$, więc

$$/_q x = \left(\frac{1}{p'x}, 0\right).$$

2. albo $x = (0, k'x)$ i $k'x \neq 0$, to analogicznie

$$/_q x = \left(0, \frac{1}{k'x}\right).$$

Tw. 4. *Działanie* $\times_q$ jest *nieograniczenie odwracalne z zastrzeżeniem* co do 0_q.

Dem. 1. Gdy $x, y \varepsilon q$ i $y \neq 0_q$, to

$$y \times_q (x \times_q /_q y) = x \times_q 1_q = x.$$

2. Gdyby jeszcze $y \times_q z = x$, to byłoby

$$z = /_q y \times_q y \times_q z = x \times_q /_q y.$$

Ilorazem $x /_q y$ jest więc $x \times_q (/_q y)$.

Tw. 5. $x \varepsilon q \,.\, y <_q z : \supset : x +_q y <_q x +_q z$.

Dem. $x +_q y = (p'x + p'y \,|\, k'x + k'y)$, $x +_q z =$ $= (p'x + p'z \,|\, k'x + k'z)$, $p'y + k'z < k'y + p'z$, więc $p'x + p'y + k'x + k'z < k'x + k'y + p'x + p'z$, skąd: $\quad x +_q y < x +_q z$.

Tw. 6. $0_q <_q x \,.\, 0_q <_q y : \supset : 0_q <_q x \times_q y$.

Dem. Wtedy: $0 < p'x$, $0 < p'y$, $k'x = k'y = 0$,

więc $0 < p'x \times p'y$, skąd $0_q <_q x \times_q y$,

gdyż $x \times_q y = (p'x \times p'y, 0)$.

§ 3. System liczb rzeczywistych.

7. **System** $(q; +_q; \times_q; <_q)$. Twierdzenia poprzednich ustępów wykazują, po konfrontacji z określeniem na str. 88, że system $(q; +_q; \times_q; <_q)$ jest *systemem liczbowym względnym*. Mamy prawo stosować całą grupę twierdzeń oznaczoną na str. 95 przez $\mathcal{G}$.

Rozważmy jeszcze klasę:

$$q\,Q_0 = \text{„ogół } x \text{ takich, że } x \geqq_q 0_q\text{“}$$

oraz system: $(q\,Q_0; +_q'; \times_q'; <_q')$,

gdzie $+_q$, $\times_q$, $<_q$ zwężono odpowiednio do $q\,Q_0$.

Kładąc $p'x = T(x)$ dla $x \varepsilon q\,Q_0$, wykażemy izomorfję z systemem $(Q_0; +; \times; <)$ i otrzymamy nowy egzemplarz systemu liczb rzeczywistych bezwzględnych.

Temsamem system porządkowy $(q\,Q_0; <_q')$ ma typ $1 + \lambda$.

8. **Elementy wymierne.**

Wykażemy łatwo, że:

(1) klasę $q\,N_0$ stanowią liczby $+k$ dla $k|0, 1 \ldots$

(2) klasę $q\,\overline{N_0}$ „ „ $-k$ dla $k|0, 1 \ldots$

(3) klasę $q\,R_0$ „ „ $+x$, gdzie $x \varepsilon R_0$

(4) klasę $q\,\overline{R_0}$ „ „ $-x$, gdzie $x \varepsilon R_0$

(5) klasę $q\,r$ „ „ $+x$ i $-x$, gdzie $x \varepsilon R_0$.

[p. str. 102 i dalsze].

System $(qR_0; +_q''; \times_q''; <_q'')$, gdzie $+_q, \times_q, <_q$ zwężono do qR_0 daje nam egzemplarz systemu liczb wymiernych bezwzględnych, system

$$(qr; +_q'''; \times_q'''; <_q'''),$$

ze zwężeniem $+_q, \times_q, <_q$ do qr system *liczbowy względny liczb wymiernych.*

9. **Typ porządkowy systemu** $(q; <_q)$.

Udowodnimy teraz tw.:

Tw. 1. System $(q; <_q)$ ma typ porządkowy λ [str. 78].

Dem. Wiemy już, że skoro $(Q_0; <)$ posiada typ $1+\lambda$, to $(Q; <')$, gdzie $Q = Q_0 - \{0\}$ i $<'$ oznacza zwężenie $<$ do Q mieć będzie typ λ. Odpowiedniość *doskonała* (jak to łatwo wykazać) następująca:

$$\begin{cases} y = 2^{p(x)}, & \text{gdy } x \varepsilon q \text{ i } x \geqq_q 0 \\ y = \dfrac{1}{2^{k(x)}}, & \text{gdy } x \varepsilon q \text{ i } x <_q 0 \end{cases}$$

wykaże nam izomorfję między $(q; <_q)$ a $(Q; <')$, a więc temsamem uzasadni, że $(q; <_q)$ posiada typ λ.

[Sądzimy, że w Arytmetyce Liczb Rzeczywistych Bezwzględnych zbudowano już teorję funkcji wykładniczej $y = 2^x$].

Zauważymy też, że *klasa przeliczalna* qr jest *wszędzie gęsta* w q, gdyż skoro $x <_q y$, to:

albo $x <_q 0_q <_q y$ i wtedy $0_q \varepsilon qr$ i leży między x a y,

albo $0_q \leqq_q x <_q y$, więc $x = +p'x$, $y = +p'y$ $0 \leqq p'x < p'y$, a wtedy jakieś z z klasy R_0

da nam: $p'x < z < p'y$, więc $x <_q + z <_q y$,
albo $x <_q y \leqq_q 0_q$, więc $x = -k'x$, $y = -k'y$, $0 \leqq k'y < k'x$ i jakieś z z R_0 da nam $k'y < z < k'x$, więc $x <_q - z <_q y$.

10. Systemy liczb względnych.

Tw. Każdy system $(A; +; \times; <)$ taki, że:

1° $(A; +; \times; <)$ jest systemem liczbowym względnym,
2° $(A; <)$ jest typu λ,
3° Klasa Ar jest wszędzie gęsta w A,

jest izomorfijny z systemem $(q; +_q; \times_q; <_q)$ i tylko w jeden sposób.

Dem. 1. Wykazanie, że $(A^+; +'; \times'; <')$, gdzie A^+ oznacza ogół x takich, że $x \varepsilon A$ i $x > 0$ $(= \text{Mod}(+))$ i $+, \times, <$ zwężono do A^+, nie przedstawia trudności.

Temsamem $(A^+; +'; \times'; <')$ jest izomorfijne z $(Q_0; +_r; \times_r; <_r)$ i tylko w jeden sposób [str. 214]. Jeżeli związek

$$u = S(v), \text{ dla } v \varepsilon Q_0$$

wykazuje ową izomorfję, to kładąc

$$T(x) = S(p'x) \text{ dla } x \geqq_q 0$$
$$\text{i} \quad T(x) = \overline{S(k'x)} \text{ dla } x \leqq_q 0.\,[1]$$

wykażemy izomorfję żądaną.

Warunki 1° 2° 3° stanowią postulaty *abstrakcyjnej teorji liczb rzeczywistych* (względnych).

---

[1] $\overline{S(k'x)}$ oznacza tu element symetryczny w systemie $(A; +; \times; <)$ do $S(k'x)$.

A teraz: Przyjąwszy $(q\,;+_q\,;\times_q\,;<_q)$ za egzemplarz ustalony tej teorji:

1° Zastępujemy $(Q_0;+_r;\times_r;<_r)$ przez $(q\,Q_0;+_q';\times_q';<_q')$.

2° Zarzucamy znaczek odróżniający (q).

3° W obrębie $(q\,;+\,;\times\,;<)$ rozbudowujemy *Arytmetykę i Analizę* funkcyj — rzeczywistych zmiennych.

11. **Algebra Zespolona.**

W mej *Algebrze* I [Bibl. Kółka Mat. Fiz. t. 5] znajdzie czytelnik jeszcze jedno piętro rozbudowy Arytmetyki, a mianowicie Teorję (klasycznych) Liczb Zespolonych. Charakterystycznem będzie, że stwarzamy tam system złożony z klasy liczb zespolonych i działań na nich wykonywanych, który już nie jest systemem liczbowym w zwykłem tego słowa znaczeniu, gdyż nie wprowadzamy tam, zgodnie z tradycją, pojęcia *porządku* wśród liczb zespolonych.

Z powodu znacznej już objętości książki i przekroczenia miejsca na ten cel poświęconego, zmuszony jestem rozdział, zapowiedziany w tekscie, a zawierający uwagi odnośnie do redakcji układów założeń różnych, rozważanych w książce teoryj niestety opuścić.

SPIS RZECZY:

Rozdział VI. Str.

Abstrakty i Niezmienniki Równoważności.

Rozdział VII.

Teorja Wielkości.

Rozdział VIII.

Wielkości i Liczby Wymierne.

Rozdział IX.

Arytmetyka Liczb Rzeczywistych Bezwzględnych.

Rozdział X.

Liczby Rzeczywiste Względne.