



Urszula Grzybowska

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
w Warszawie
Wydział Zastosowań Informatyki i Matematyki
Katedra Informatyki
urszula_grzybowska@sggw.pl

Marek Karwański

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
w Warszawie
Wydział Zastosowań Informatyki i Matematyki
Katedra Informatyki
marek_karwanski@sggw.pl

INDEKS MALMQUISTA I ZMIANY EFEKTYWNOŚCI WZGLĘDEM GRANICY NIEEFEKTYWNOŚCI: ANALIZA WYBRANYCH FIRM NOTOWANYCH NA GPW W WARSZAWIE

Streszczenie: W pracy przedstawiono zastosowanie pesymistycznego modelu DEA CCR oraz pesymistycznego indeksu Malmquista do badania zmian efektywności i produktywności polskich firm notowanych na GPW w Warszawie. Analiza efektywności poparta została wizualizacją obiektów w przestrzeni dwuwymiarowej. Obliczenia wykonano w pakiecie SAS w oparciu o wskaźniki finansowe firm publikowane w raportach finansowych.

Słowa kluczowe: indeks Malmquista, granica nieefektywności, DEA.

JEL Classification: C38, C61, C88.

Wprowadzenie

Skuteczne zarządzanie przedsiębiorstwem związane jest z dążeniem do efektywnego przekształcania nakładów na wyniki. Stąd też cenne są metody pozwalające na wyznaczenie efektywności obiektów oraz badanie zmian efektywności w czasie. Firmy efektywne są także pożądanymi obiektami z punktu widzenia inwestorów giełdowych, bowiem powinno się przyjmować, że firma dobrze zarządzana będzie przynosić efekty w postaci dobrych wyników finansowych oraz wzrostu notowań giełdowych akcji. Przykładem metod, które pozwalają na wyznaczenie efektywności, są metody obwiedni danych (DEA). W pracy pokażemy zastosowanie stosunkowo nowego podejścia DEA, opartego

na analizie obiektów nieefektywnych, zwanego pesymistyczną metodą DEA [Wang, Lan, 2011].

Metoda pesymistycznej obwiedni danych nie była jeszcze szeroko dyskutowana w literaturze polskojęzycznej. Podejście to pozwala na dokonanie podziału obiektów, a także wyznaczenie zmian efektywności oraz indeksu Malmquista względem obiektów nieefektywnych. Metoda pesymistyczna DEA stanowi uzupełnienie klasycznego podejścia. W pracy prezentujemy przykład zastosowania pesymistycznej metody DEA do badania zmian efektywności i produktywności dwóch jednorodnych grup spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Otrzymane wyniki, dotyczące podziału spółek na obiekty efektywne, nieefektywne oraz te, które nie są ani nieefektywne, ani efektywne, zostały zilustrowane przy pomocy metody skalowania wielowymiarowego. Obliczenia przeprowadzono w pakiecie SAS ver. 9.4.

1. Metoda obwiedni danych

Metoda obwiedni danych (DEA) jest opartą na programowaniu matematycznym metodą wyznaczania efektywności obiektów opisywanych wektorami nakładów i wyników. W ramach metod DEA możliwe jest wyznaczenie w zbiorze obiektów tych obiektów, które są efektywne, a także dla obiektów nieefektywnych uzyskanie informacji dotyczących koniecznych zmian w technologii, które doprowadzą do poprawy efektywności [Guzik, 2009a, 2009b]. Podstawowy i najstarszy model DEA to model CCR [Charnes, Cooper, Rhodes, 1978].

1.1. Model CCR z obwiednią efektywności oraz nieefektywności

Założmy, że mamy n obiektów, które oznaczamy przez DMU $_o$, $o = 1, 2, \dots, n$. Przez x_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$ oznaczamy wielkości nakładów, zaś przez y_{rj} $r = 1, 2, \dots, s$ wielkości wyników dla obiektu j , $j = 1, 2, \dots, n$. Dla każdego obiektu DMU $_o$, $o = 1, \dots, n$, opisywanego nakładami x_{io} , $i = 1, 2, \dots, m$ i wynikami y_{ro} , $r = 1, 2, \dots, s$, wyznaczmy miarę efektywności θ_o jako rozwiązanie pewnego problemu optymalizacyjnego [Guzik, 2009a, 2009b]. W modelu CCR zadanie zorientowane na nakłady przyjmuje postać:

$\theta_0^* = \min \theta_0$ przy warunkach:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jo} &\leq \theta_0 x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_{jo} &\geq y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s \\ \lambda_{jo} &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

Dla obiektów efektywnych miara efektywności wynosi 1, zaś dla nieefektywnych jest mniejsza od 1. Klasyczne modele DEA za punkt odniesienia przyjmują obiekty efektywne. Uzupełnieniem rozważań dotyczących efektywności jest wzięcie pod uwagę, jako punkt odniesienia, grupy obiektów nieefektywnych. W pracy [Aldamak, Hatami-Marbini, Zolfaghari, 2016] omówiono pojęcie granicy nieefektywności i przedstawiono bibliografię dotyczącą podejścia związanego z nieefektywnością. Obiekty nieefektywne tworzą obwiednię nieefektywności¹, a zadania optymalizacyjne prowadzące do ich wyodrębnienia nazywają się modelami pesymistycznymi DEA. Pesymistyczna wersja modelu CCR może być sformułowana następująco dla okresu t [Wang, Lan, 2011]:

$\theta_0^t(x^t, y^t) = \max \theta_0$ przy warunkach:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{i,j}^t \lambda_{jo} &\geq \theta_0 x_{io}^t \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n y_{rj}^t \lambda_{jo} &\leq y_{ro}^t \quad r = 1, 2, \dots, s \\ \lambda_{jo} &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

Obiekty, dla których otrzymane wartości wskaźnika θ_0 są równe 1, tworzą granicę nieefektywności. Wartości wskaźnika θ_0 dla obiektów, które nie są nieefektywne, są większe od 1.

1.2. Indeks produktywności Malmquista i jego wykorzystanie

Tradycyjnie do badania zmian produktywności wykorzystuje się indeksy np. Törnquista, Fishera lub Malmquista. W szczególności ten ostatni, zaproponowany w 1982 r. przez Cavesa [Caves, Christensen, Diewert, 1982a, 1982b], wykorzystywany jest do opisu zmian produktywności obiektów wyznaczonej

¹ W języku angielskim używa się określenia *worst practice frontier* lub *inefficiency frontier*.

w DEA [Coelli i in., 2005, s. 67]. Dla modelu zorientowanego na nakłady obliczenie indeksu Malmquista dla danego obiektu wymaga rozwiązania 4 zadań optymalizacyjnych [Ćwiąkała-Małys, Nowak, 2011].

Indeks produktywności Malmquista (MPI) jest dany wzorem:

$$MPI_o = \left[\frac{\theta_o^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{\theta_o^t(x^t, y^t)} \cdot \frac{\theta_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{\theta_o^{t+1}(x^t, y^t)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

gdzie $\theta_o^s(x^t, y^t)$ oznacza efektywność o -tego obiektu dla technologii wspólnej z okresu s oraz technologii obiektu o z okresu t i rozkłada się na dwa czynniki [Coelli i in., 2005, s. 68]:

zmianę efektywności:

$$\frac{\theta_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{\theta_o^t(x^t, y^t)} \quad (4)$$

oraz postęp technologiczny:

$$\left[\frac{\theta_o^t(x^t, y^t)}{\theta_o^{t+1}(x^t, y^t)} \cdot \frac{\theta_o^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{\theta_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Szczegółową dekompozycję indeksu Malmquista można znaleźć w [Ćwiąkała-Małys, Nowak, 2011]. Wykorzystując indeks Malmquista obliczony względem granicy efektywności oraz indeks obliczony względem granicy nieefektywności, możemy wyznaczyć średnią geometryczną obu indeksów:

$$IM_o = [Opt_MPI_o \cdot Pes_MPI_o]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

gdzie Opt_MPI_o oznacza klasyczny indeks Malmquista, czyli liczony względem granicy efektywności, zaś Pes_MPI_o oznacza indeks Malmquista, liczony względem granicy nieefektywności. Analogicznie możemy wyznaczyć średnią zmianę efektywności jako średnią geometryczną zmiany efektywności technicznej (optymistycznej) oraz zmiany efektywności liczonej względem granicy nieefektywności [Wang, Lan, 2011; Alimohammadlou, Mohammadi, 2016].

1.3. Skalowanie wielowymiarowe

Skalowanie wielowymiarowe [Gatnar, Walesiak, red., 2009, s. 354] pozwala m.in. na wizualizację struktury badanych obiektów oraz wyjaśnienie podobieństw lub odmienności między nimi. W pracy stosując metodę skalowania wielowymiarowego z odległością euklidesową dla standaryzowanych danych, poka-

zujemy, że grupa obiektów nieefektywnych istotnie wyróżnia się na tle pozostałych obiektów, stanowiąc podzbiór wyraźnie oddzielony. Ponadto obliczone zostały wskaźniki efektywności i ich zmiana oraz indeksy Malmquista: klasyczny (IM Opt.) i pesymistyczny (IM Pes.) oraz średnia geometryczna obu (IM).

2. Opis danych

Analizę przeprowadzono, wykorzystując raporty finansowe spółek notowanych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Do analizy wybrano dwa okresy: rok 2007 i rok 2011. Łącznie wyróżniono 66 spółek produkcyjnych, z których wyodrębniono 2 grupy spółek jednorodnych pod względem kierunku działalności według wskaźników EKD (tabela 1). W analizie wykorzystano następujące wskaźniki: DR (wskaźnik zadłużenia), AT (rotacja aktywów) jako nakłady oraz CR (wskaźnik płynności bieżącej), OPM, (marża zysku operacyjnego), ROA (stopa zwrotu z aktywów), ROE (stopa zwrotu z kapitału własnego) jako wyniki.

Tabela 1. Wyróżnione grupy spółek i ich liczebności

Spożywcze, Produkcyjne chemiczne, EKD 23, 24, 25	34	AMBRA, ATLANTA, DUDA, GRAAL, INDYKPOL, KOFOLA, KRUSZWIC, MAKARONY, MIESZKO, MISPOL, PAMAPOL, PEPEES, SEKO, WAWEL, ZYWIEC, BUDVAR, DEBICA, DECORA, ERG, EUROFILM, LENTEX, LOTOS, MIRACUL, PKNORLEN, PLASTBOX, POLICE, POLLENA, PUŁAWY, ROPCZYCE, SNIEZKA, STALPROD, STOMIL_S, SUWARY, SYNTHOS
Produkcyjne metalurgia, EKD 27, 28; Produkcyjne sprzęt, EKD 29-34	32	ALCHEMIA, ENERGOIN, FERRUM, HUTMEN, KETY, KOELNER, ODLEWNIE, POLIMEX, PROJPRZM, RAFAKO, RAWLPLUG, ZUK AMICA, APATOR, ARMATURA, ELZAB, ESSYSTEM, FAMUR, FASING, GROCLIN, HYDROTOR, INTERCAR, LENA, MOJ, PANITERE, POLNA, RAFAMET, RELPOL, WIELTON, ZELMER, ZETKAMA, ZPUE

Źródło: Opracowanie własne.

3. Wyniki i ich interpretacja

Wyniki obliczeń zamieszczono w tabelach 2 i 3 oraz na rysunkach 1-4. W tabeli 2 przedstawiono wartości wskaźników efektywności firm z grupy 1 dla roku 2007 oraz 2011, wskaźniki nieefektywności dla roku 2007 oraz 2011, a także średnią geometryczną zmian efektywności oraz indeksy Malmquista. W roku 2007 jedynie 3 obiekty były efektywne, zaś obiektów nieefektywnych, tj. takich, dla których miara nieefektywności wyniosła 1, było 5. W roku 2011 obiektów

efektywnych i nieefektywnych było 8. Warto zauważyć, że pojawiły się dwa obiekty leżące na przecięciu obwiedni efektywności i nieefektywności. Są to obiekty: 15 (Żywiec) i 34 (Synthos). Rozrzut obiektów w przestrzeni dwuwymiarowej dla lat 2007 i 2011 pokazano na rysunkach 1 i 2. Obiekty efektywne oznaczono kwadratami, nieefektywne zaś kołami. Na rysunku 5 przedstawiono wykres porównujący zmiany efektywności między latami 2007 i 2011. W okresie tym 17 spółek z grupy 1 zwiększyło efektywność optymistyczną i tylko 14 zwiększyło efektywność wyznaczaną względem granicy nieefektywności. Średnia geometryczna wyznaczonych efektywności świadczy o wzroście efektywności w przypadku aż 18 firm.

Wartości indeksu Malmquista dla spółek grupy 1, przedstawione w tabeli 2, większe od 1 świadczą o wzroście produktywności we wszystkich trzech przypadkach: indeksu klasycznego (IM Opt.), pesymistycznego (IM Pes.) oraz średniej geometrycznej obliczonych obiektów (IM). Na rysunku 6 przedstawiono porównanie zmian produktywności wyznaczanych przy pomocy trzech indeksów produktywności Malmquista. W grupie 1 każdy z indeksów wskazywał na znaczną przewagę firm, dla których nastąpił spadek produktywności. Klasyczny indeks Malmquista wskazuje na spadek produktywności u 22 firm, pesymistyczny u 26, zaś średnia geometryczna u 24 firm.

Tabela 2. Wskaźniki efektywności i nieefektywności firm grupy 1 w 2007 r. i 2011 r., średnia zmian efektywności oraz indeks Malmquista optymistyczny, pesymistyczny i zagregowany

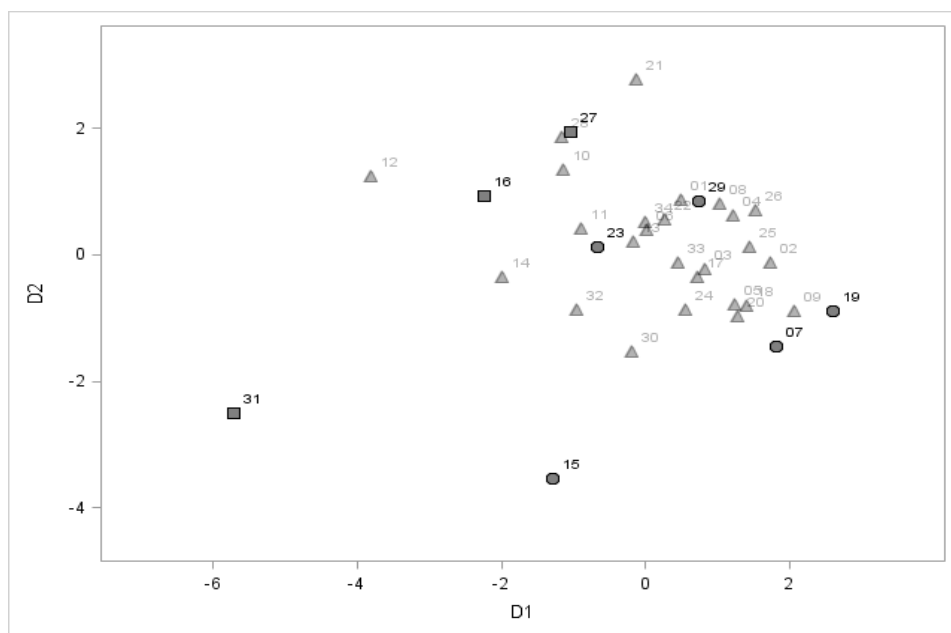
DMU	Efekt. 2007	Efekt. 2011	Nieefekt. 2007	Nieefekt. 2011	Zmiana Efekt.	IM Opt.	IM Pes.	IM
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.29	0.55	1.20	2.29	1.91	1.50	0.92	1.18
2	0.39	1.00	2.29	4.52	2.24	3.05	2.27	2.63
3	0.23	0.33	1.31	1.72	1.37	1.19	1.15	1.17
4	0.26	0.17	1.54	1.19	0.72	0.50	0.50	0.50
5	0.59	0.47	2.11	1.00	0.61	0.92	0.29	0.51
6	0.43	0.15	1.73	1.00	0.44	0.28	0.31	0.29
7	0.21	0.64	1.00	3.20	3.15	2.61	3.70	3.11
8	0.32	0.17	1.66	1.00	0.57	0.48	0.44	0.46
9	0.22	0.30	1.28	1.31	1.20	1.17	1.06	1.11
10	0.76	0.15	1.55	1.00	0.35	0.17	0.35	0.25
11	0.50	0.27	1.99	1.68	0.68	0.43	0.52	0.47
12	0.97	0.79	1.55	3.99	1.44	0.60	1.13	0.83
13	0.69	0.25	4.27	1.12	0.31	0.35	0.25	0.30
14	0.77	1.00	2.72	5.75	1.66	0.94	1.29	1.10
15	0.48	1.00	1.00	1.00	1.44	1.96	0.97	1.38
16	1.00	0.60	6.22	3.95	0.62	0.43	0.39	0.41
17	0.39	0.47	2.39	1.88	0.98	1.01	0.86	0.93
18	0.25	0.22	1.36	1.14	0.86	0.66	0.74	0.69
19	0.17	0.34	1.00	1.96	1.98	1.89	3.19	2.46

cd. tabeli 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	0.28	0.26	1.56	1.00	0.77	0.77	0.34	0.52
21	0.93	0.76	2.49	2.03	0.82	0.68	0.26	0.42
22	0.63	0.44	3.81	1.64	0.55	0.63	0.44	0.53
23	0.51	0.52	1.00	1.00	1.00	0.61	0.44	0.52
24	0.36	0.47	1.93	1.61	1.05	1.09	0.91	1.00
25	0.23	0.32	1.35	1.87	1.40	1.10	0.80	0.94
26	0.42	1.00	2.27	1.78	1.36	1.91	0.74	1.19
27	1.00	1.00	6.10	1.02	0.41	0.77	0.16	0.35
28	0.91	1.00	5.22	6.37	1.16	0.88	0.70	0.78
29	0.44	0.29	1.00	1.91	1.13	0.54	2.41	1.14
30	0.39	0.30	1.91	1.67	0.82	0.51	0.82	0.65
31	1.00	1.00	4.33	5.78	1.16	0.63	0.79	0.70
32	0.45	0.58	2.32	2.89	1.26	0.85	0.99	0.91
33	0.41	0.41	2.49	2.67	1.04	0.84	0.74	0.79
34	0.46	1.00	2.79	1.00	0.89	5.50	0.06	0.56

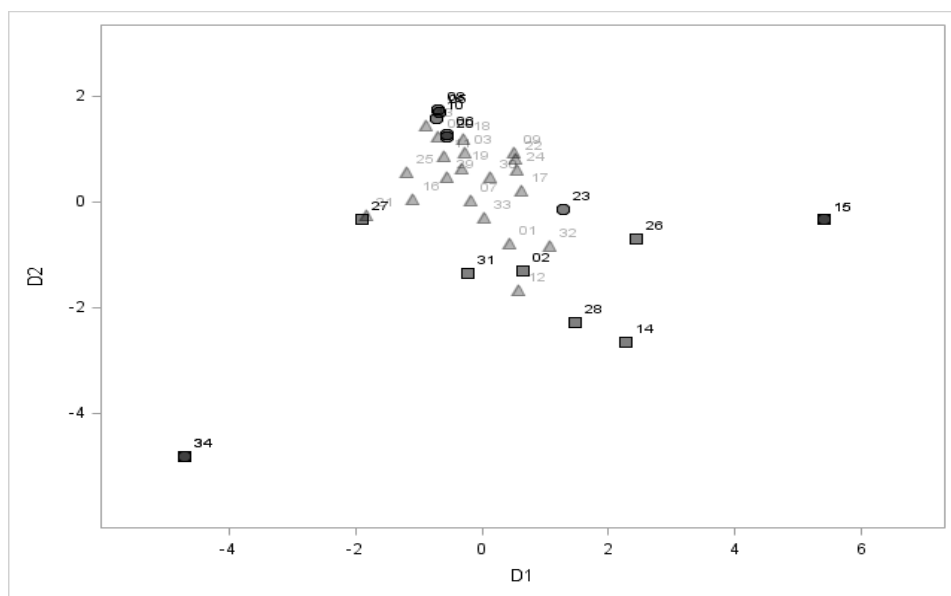
Kolorem szarym oznaczono obiekty efektywne oraz nieefektywne.

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 1. Podział obiektów grupy 1 względem efektywności w 2007 r. Obiekty efektywne oznaczono kwadratami, nieefektywne kołami

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 2. Podział obiektów grupy 1 względem efektywności w 2011 r. Obiekty efektywne oznaczono kwadratami, nieefektywne kołami, pozostałe trójkątami

Źródło: Obliczenia własne.

W tabeli 3 przedstawiono wartości wskaźników efektywności firm grupy 2 dla roku 2007 oraz 2011, wskaźniki nieefektywności dla roku 2007 oraz 2011, a także średnią geometryczną zmian efektywności oraz indeksy Malmquista. W 2007 r. 8 spółek było efektywnych, a 5 spółek było nieefektywnych. W roku 2011 obiektów efektywnych było 5, zaś nieefektywne były 4. Rozrzut obiektów w przestrzeni dwuwymiarowej dla lat 2007 i 2011 pokazano na rysunkach 3 i 4. Obiekty efektywne oznaczono kwadratami, nieefektywne zaś kołami. Na rysunku 5 przedstawiono wykres porównujący zmiany efektywności między latami 2007 i 2011. W okresie tym tylko 13 spółek grupy 2 zwiększyło efektywność optymistyczną oraz aż 20 zwiększyło efektywność wyznaczaną względem granicy nieefektywności. Średnia geometryczna wyznaczonych efektywności świadczy o wzroście efektywności w przypadku 15 firm.

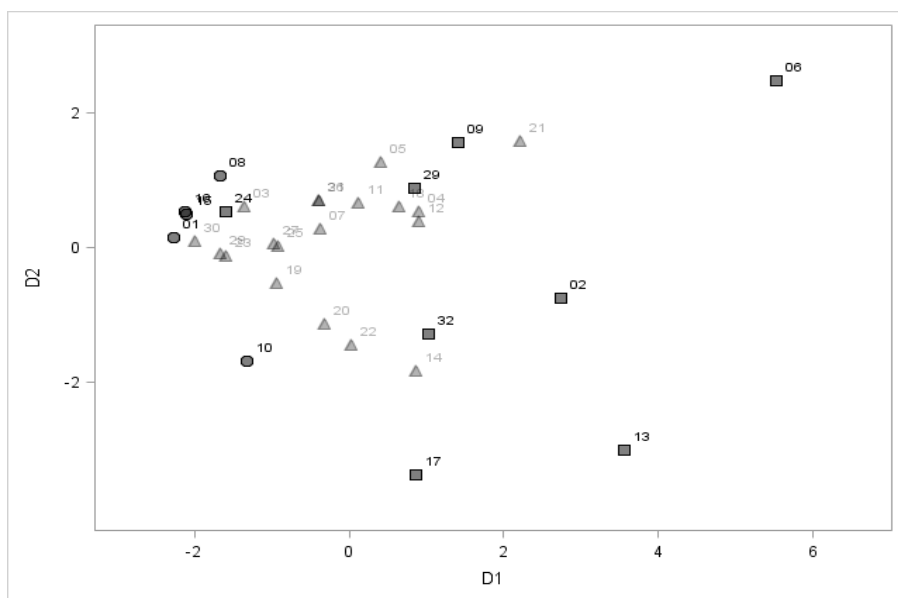
Wartości indeksu Malmquista dla spółek grupy 2 przedstawiono w tabeli 3. Na rysunku 6 przedstawiono porównanie zmian produktywności wyznaczanych przy pomocy trzech indeksów produktywności Malmquista. Podobnie jak dla grupy 1 w grupie 2 każdy z indeksów wskazywał na znaczną przewagę firm, dla których nastąpił spadek produktywności. Klasyczny indeks Malmquista wskazu-

je na spadek produktywności u aż 28 firm, pesymistyczny u 21, zaś średnia geometryczna u 25 firm.

Tabela 3. Efektywności firm grupy 2 w 2007 r. i 2011 r. oraz średnia zmiana efektywności, indeksy Malmquista: optymistyczny, pesymistyczny oraz ich średnia geometryczna (IM)

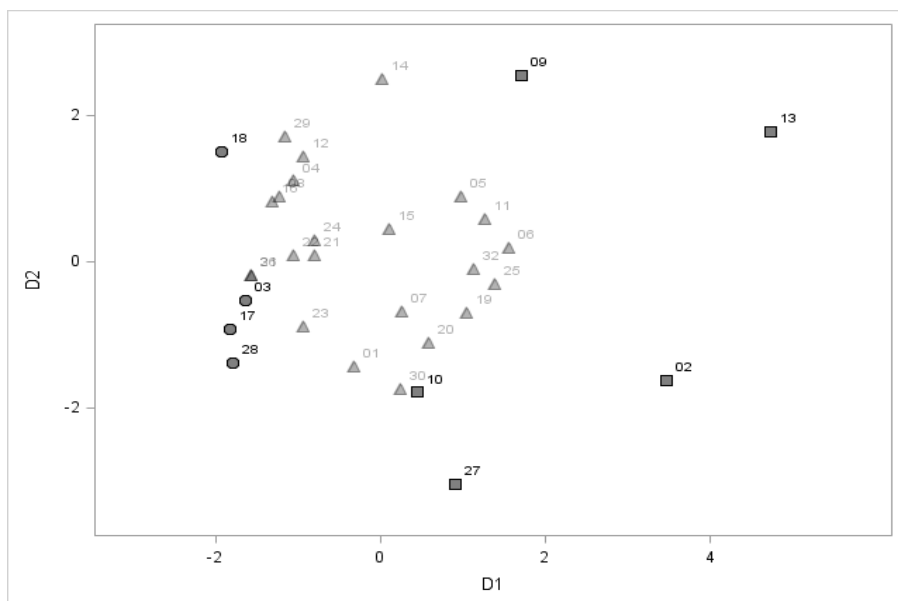
DMU	Efekt. 2007	Efekt. 2011	Nieefekt. 2007	Nieefekt. 2011	Zmiana Efekt.	IM Opt.	IM Pes.	IM
1	0.26	0.60	1.00	1.39	1.79	1.45	1.22	1.33
2	1.00	1.00	4.56	1.99	0.66	0.51	0.27	0.37
3	0.37	0.15	2.20	1.00	0.42	0.29	0.24	0.26
4	0.66	0.74	4.65	1.73	0.64	0.86	0.24	0.46
5	0.88	0.68	8.72	8.95	0.89	0.65	0.71	0.68
6	1.00	0.42	2.94	2.85	0.64	0.30	0.39	0.34
7	0.38	0.44	2.14	1.52	0.91	0.69	0.64	0.67
8	0.10	0.12	1.00	1.69	1.46	1.31	1.01	1.15
9	1.00	1.00	9.29	21.40	1.52	1.00	0.97	0.98
10	0.58	1.00	1.00	1.73	1.74	0.61	1.67	1.01
11	0.73	0.66	5.31	6.71	1.07	0.68	1.03	0.84
12	0.73	0.20	3.60	4.26	0.57	0.26	0.47	0.35
13	1.00	1.00	2.90	20.08	2.63	0.67	4.23	1.68
14	0.78	0.70	2.24	14.82	2.45	0.54	2.63	1.19
15	0.15	0.28	1.00	3.05	2.42	1.72	5.34	3.03
16	0.17	0.59	1.00	1.52	2.31	2.89	1.67	2.20
17	1.00	0.28	1.32	1.00	0.46	0.12	0.45	0.23
18	0.74	0.06	5.81	1.00	0.11	0.07	0.02	0.03
19	0.36	0.56	1.44	1.85	1.41	0.66	1.18	0.88
20	0.57	0.75	1.72	1.79	1.17	0.45	1.01	0.67
21	0.51	0.29	1.44	2.35	0.96	0.37	0.63	0.48
22	0.57	0.23	1.80	2.15	0.70	0.20	1.09	0.47
23	0.20	0.26	1.02	1.20	1.24	0.74	1.11	0.90
24	1.00	0.58	1.10	3.86	1.43	0.43	1.48	0.80
25	0.24	0.50	1.35	1.51	1.53	1.14	0.89	1.01
26	0.40	0.11	2.75	1.06	0.33	0.24	0.33	0.28
27	0.56	1.00	2.36	1.18	0.94	0.74	0.45	0.58
28	0.32	0.28	1.31	1.00	0.82	0.56	0.63	0.59
29	1.00	0.42	9.74	1.76	0.28	0.33	0.07	0.15
30	0.28	0.61	1.13	1.20	1.53	1.09	0.96	1.02
31	0.40	0.11	2.75	1.06	0.33	0.24	0.33	0.28
32	1.00	0.78	4.02	4.32	0.92	0.31	0.99	0.56

Źródło: Obliczenia własne.



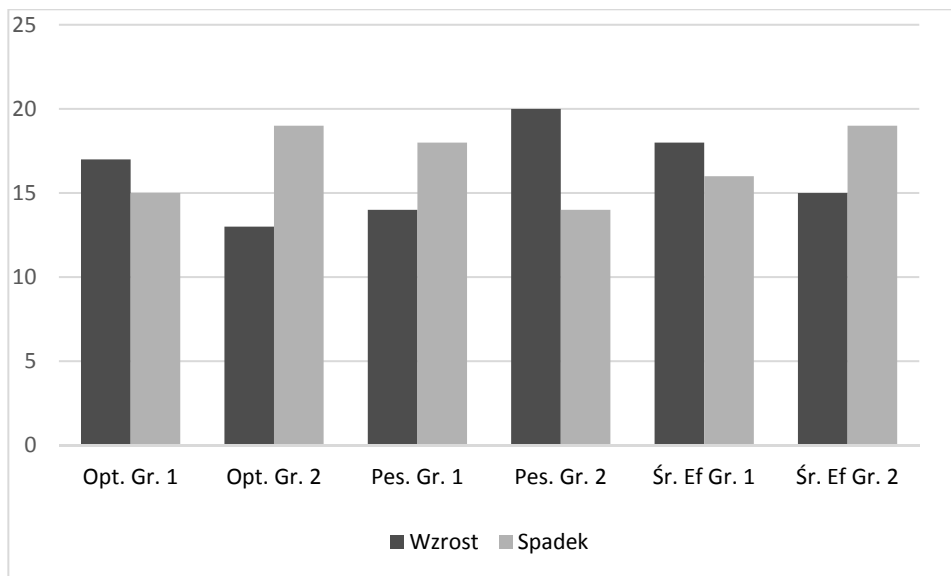
Rys. 3. Podział obiektów grupy 2 względem efektywności w 2007 r. Obiekty efektywne oznaczono kwadratami, nieefektywne kołami, pozostałe trójkątami

Źródło: Obliczenia własne.



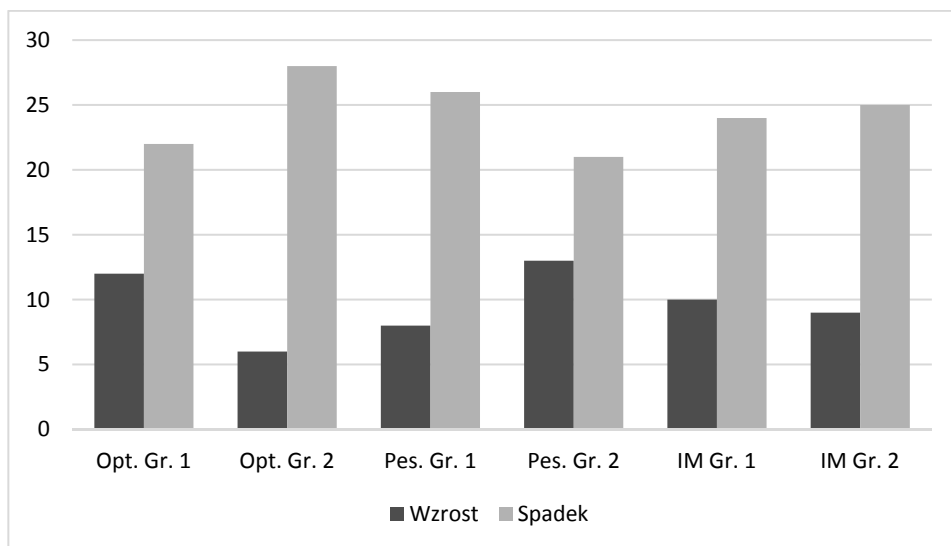
Rys. 4. Podział obiektów grupy 2 względem efektywności w 2011 r. Obiekty efektywne oznaczono kwadratami, nieefektywne kołami, pozostałe trójkątami

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 5. Zmiany efektywności względem granicy optymistycznej, pesymistycznej oraz średnia geometryczna zmiany efektywności

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 6. Wzrost i spadek produktywności mierzony indeksem Malmquista: optymistycznym (IM Opt.), pesymistycznym (IM Pes.), średnią (IM)

Źródło: Obliczenia własne.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono analizę zmian efektywności technologicznej dla 66 spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie podzielonych na 2 grupy. Otrzymane wyniki wskazują, że w przypadku rozważanego podziału na grupy nie można mówić o istnieniu jednoznacznego kierunku zmian efektywności. Widoczne są różnice w zmianach efektywności między grupą 1 i grupą 2, a także w zależności od wykorzystywanej miary efektywności. Z drugiej strony, otrzymane wyniki wskazują, że w okresie od 2007 r. do 2011 r. nastąpił znaczny spadek produktywności mierzonej trzema wersjami indeksu Malmquista. Podobny kierunek zmian produktywności dla obu grup mierzony indeksem Malmquista może być związany z zaistniałymi zmianami postępu technologicznego.

Otrzymane wyniki wskazują na istnienie znacznych rozbieżności między interpretacją zmiany efektywności i produktywności mierzonej względem optymistycznej granicy efektywności, a efektywności i produktywności mierzonej względem granicy pesymistycznej. Wykorzystując skalowanie wielowymiarowe i graficzną prezentację obiektów, pokazano, że odniesienie do granicy nieefektywności jest uzasadnione. Obiekty nieefektywne stanowią wyróżnioną grupę obiektów i mogą stać się punktem odniesienia dla wyznaczania efektywności i produktywności.

Literatura

- Aldamak A., Hatami-Marbini A., Zolfaghari S. (2016), *Dual Frontiers without Convexity*, "Computer & Industrial Engineering", No. 101, s. 466-478.
- Alimohammadlou M., Mohammadi S. (2016), *Evaluating the Productivity Using Malmquist Index Based on Double Frontier Data*, "Procedia-Social and Behavioral Sciences", No. 230, s. 58-66.
- Caves D.W., Christensen L.R., Diewert W. (1982a), *Multilateral Comparisons of Output, Input, and Productivity Using Superlative Index Numbers*, "Economic Journal", Vol. 92, Iss. 365, s. 73-86.
- Caves D.W., Christensen L.R., Diewert W. (1982b), *The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output, and Productivity*, "Econometrica", Vol. 50, Iss. 6, s. 1393-1414.
- Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E.L. (1978), *Measuring the Efficiency of Decision Making Units*, "European Journal of Operational Research", No. 2, s. 429-444.

- Coelli T.J., Prasada Rao D.S., O'Donnel C.J., Battese G. (2005), *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, Springer, New York.
- Ćwiakała-Małys A., Nowak W. (2011), *Dekompozycja indeksu produktywności Malmquista w modelu DEA*, „Acta Universitatis Wratislaviensis”, „Przegląd Prawa i Administracji”, Nr 3322, Wrocław.
- Gatnar E., Walesiak M., red. (2009), *Statystyczna analiza danych z wykorzystaniem programu R*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Guzik B. (2009a), *Podstawowe modele DEA w badaniu efektywności gospodarczej i społecznej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
- Guzik B. (2009b), *Uwagi na temat zastosowania metody DEA do ustalania zdolności kredytowej*, „Przegląd Statystyczny”, R LVI, z. 2, s. 3-24.
- Wang Y.-M., Lan Y.-X. (2011), *Measuring Malmquist Productivity Index: A New Approach Based on Double Frontiers Data Envelopment Analysis*, “Mathematical and Computer Modelling”, No. 54, s. 2760-2771.

MALMQUIST INDEX AND EFFICIENCY CHANGES WITH RESPECT TO THE WORST PRACTICE FRONTIER: APPLICATION TO COMPANIES TRADED ON WARSAW STOCK EXCHANGE

Summary: In the paper, application of pessimistic CCR DEA model and pessimistic Malmquist index to examination of efficiency and productivity changes was presented. The calculations were done for two groups of companies traded on Warsaw Stock Exchange. Analysis of efficiency was supported by graphical representation obtained with use of multidimensional scaling. Calculations were done in SAS using financial indicators published in financial reports.

Keywords: Malmquist index, DEA, worst practice frontier.