



Józef Stawicki

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania
Katedra Ekonometrii i Statystyki
stawicki@umk.pl

WYZNACZANIE VaR PRZY POMOCY ŁAŃCUCHA MARKOWA

Streszczenie: Artykuł przedstawia możliwości wykorzystania łańcuchów Markowa do określania wartości zagrożonej. W określaniu VaR preferuje się metodę kwantyli warunkowych. Prosta metoda konstrukcji modelu łańcucha Markowa poprzez określenie stanów oraz szacowanie macierzy prawdopodobieństw przejść wpisuje się w tę preferowaną metodę. Wyznaczenie VaR następuje poprzez wybór modelu łańcucha Markowa przy znajomości bieżącej stopy zwrotu.

Słowa kluczowe: VaR, łańcuch Markowa.

JEL Classification: G11, G32.

Wprowadzenie

Trafna ocena ryzyka na rynkach z dynamiczną zmiennością notowań wymaga monitorowania zajętej pozycji w czasie rzeczywistym zgodnie z częstotliwością obserwowania. Trudno w takiej sytuacji decyzje podejmowane w krótkim horyzoncie czasu opierać na założeniu, że w badanym okresie zmienność notowań jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie.

Łańcuchy Markowa mogą stanowić użyteczne narzędzie dla opisu zjawiska zmian zachodzących na rynku finansowym (notowań giełdowych, kursów walutowych, wolumenu obrotu itp.). Opis ten może służyć rozpoznaniu samego zjawiska, jego charakteru, analizie porównawczej rynków czy wyznaczeniu pewnych charakterystyk obserwowanego procesu. Konstrukcja modelu łańcucha Markowa rozpoczyna się od precyzyjnego określenia stanów. W przypadku analizy procesu stóp zwrotu stanami łańcucha Markowa mogą być przedziały, w których może się znaleźć stopa zwrotu. Ustalenie tych przedziałów jest określone

potrzebami badania czy konsekwencjami podejmowanych decyzji na podstawie rozpoznanego i opisanego odpowiednim modelem procesu. Drugim niezwykle ważnym etapem konstrukcji modelu łańcucha Markowa jest wybór metody estymacji. Obserwacja długich szeregów czasowych pozwala wykorzystać metodę estymacji parametrów opartą o mikrodane, tzn. bezpośrednią obserwację zmiany klasy. Szczególne znaczenie mają prognozy otrzymywane na podstawie oszacowanego modelu łańcucha Markowa. Prognozy mogą służyć pojedynczym inwestorom indywidualnym czy instytucjonalnym, a także instytucjom oceniającym i nadzorującym dany rynek. Prostota procesu skończonego łańcucha Markowa i jego naturalna interpretacja stwarzają szanse popularności proponowanych analiz. W niniejszym artykule podejmuje się próbę określenia wartości zagrożonej (VaR) poprzez wybór odpowiedniego modelu łańcucha Markowa (konstrukcja stanów, szacowanie macierzy prawdopodobieństw przejść).

1. Łańcuchy Markowa

Literatura dotycząca łańcuchów Markowa jest obfita¹. Proces stochastyczny X_t jako ciąg zmiennych losowych o dyskretnym parametrze czasowym i dyskretnej przestrzeni fazowej $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ nazywa się *łańcuchem Markowa*, jeśli spełniony jest warunek:

$$p(x_t \in S_j | x_{t-1} \in S_i, x_{t-2} \in S_{i_1}, \dots) = p(x_t \in S_j | x_{t-1} \in S_i) \quad (1)$$

Prawdopodobieństwo to określa się jako prawdopodobieństwo przejścia w jednym kroku i oznacza się $p_{ij}(t)$. Łańcuch Markowa $\{X_t, t \in N\}$ o przestrzeni fazowej $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ nazywamy *jednorodnym łańcuchem Markowa*, jeżeli prawdopodobieństwa warunkowe $p_{ij}(t)$ przejścia ze stanu fazowego i do stanu j w jednostce czasu, tzn. w czasie od $(t-1)$ do t , nie zależą od wyboru momentu t , tzn.:

$$\forall_t p_{ij}(t) = p_{ij} \quad (2)$$

Łańcuch Markowa określony jest zatem przez swoje stany oraz macierz postaci:

$$\mathbf{P} = [p_{ij}]_{r \times r} \quad (3)$$

¹ Wystarczy przywołać publikacje: Kemeny i Snell [1976], Iosifescu [1988], Podgórska i in. [2002], Stawicki [2004], Ching i Ng [2006] i inne.

tn. macierzy o elementach dodatnich i spełniających dodatkowe warunki w:

$$\forall_i \sum_j p_{ij} = 1 \quad (4)$$

Oznaczając przez $\mathbf{D}_t$ wektor bezwarunkowego rozkładu zmiennej losowej $\mathbf{X}_t$, tzn.:

$$\mathbf{D}_t = [d_{1t}, d_{2t}, \dots, d_{rt}], \text{ gdzie } d_{it} = \Pr\{\mathbf{X}_t = \mathbf{i}\} \quad (5)$$

określa się prawdopodobieństwo, z jakim proces w momencie t znajdzie się w stanie fazowym i . Składowe wektora $\mathbf{D}_t$ spełniają poniższe warunki:

$$\forall_t \forall_i d_{it} \geq 0 \quad (6)$$

oraz:

$$\forall_t \sum_i d_{it} = 1 \quad (7)$$

Zależność między rozkładami bezwarunkowymi zmiennych losowych $\mathbf{X}_t$ oraz $\mathbf{X}_{t-1}$ wyrażona jest wzorem wynikającym z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym:

$$\mathbf{D}_t = \mathbf{D}_{t-1} \cdot \mathbf{P} \quad (8)$$

stąd:

$$\mathbf{D}_t = \mathbf{D}_0 \mathbf{P}^t \quad (9)$$

Macierz $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{r \times r}$ odzwierciedla mechanizm zmian rozkładu analizowanego ciągu zmiennych losowych $\mathbf{X}_t$.

Dla jednorodnych łańcuchów Markowa opisanych macierzą przejścia $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ można wyznaczyć oczekiwane czasy pierwszego przejścia i powrotu. Macierz tych czasów wyznacza się na podstawie wzoru [Decewicz, 2011, s. 30]:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{1}_{r \times r} \mathbf{Z}_{dg}) \mathbf{E}_{dg}^{-1} \quad (10)$$

gdzie $\mathbf{Z}$ jest macierzą fundamentalną, a $\mathbf{E}$ macierzą ergodyczną. Elementy macierzy $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ mają prostą interpretację jako oczekiwana liczba kroków potrzebna do osiągnięcia stanu j po opuszczeniu stanu i . Jeśli $i = j$, to mamy do czynienia z oczekiwanym czasem pierwszego powrotu.

Ze względu na charakter obserwacji badanego zjawiska wykorzystuje się dla estymacji macierzy prawdopodobieństw przejścia odrębne metody. W przypadku mikrodanych, które rozumie się jako obserwacje obiektu w kolejnych jednostkach i rejestracje, w jakim stanie w danej jednostce znajdował się obiekt, możemy zastosować estymator największej wiarygodności w postaci:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=2}^T n_{ij}(t)}{\sum_{t=2}^T n_i(t-1)} \quad (11)$$

gdzie:

$$n_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy obiekt w chwili } t-1 \text{ był w stanie } S_i, \text{ a w chwili } t \text{ był w stanie } S_j \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$n_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy obiekt w chwili } t \text{ był w stanie } S_i \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Estymator ten ma pożądane własności zgodności asymptotycznej nieobciążoności oraz ma asymptotyczny rozkład normalny o wartości oczekiwanej:

$$E(\hat{p}_{ij}) = p_{ij} \quad (12)$$

i wariancji:

$$\text{var}(\hat{p}_{ij}) = \frac{p_{ij}(1-p_{ij})}{\sum_{t=2}^T n_i(t-1)} \quad (13)$$

2. Bezwarunkowy i warunkowy VaR

Kwantyfikacja ryzyka na rynkach finansowych najczęściej następuje poprzez wyznaczenie pewnej miary. Jedną z nich, powszechnie stosowaną jest wartość narażona na ryzyko, inaczej wartość zagrożona – *Value at Risk*, znana jako VaR. Istnieje wiele sposobów wyznaczanie wartości zagrożonej w zależności od modelu, jakim posługuje się analityk czy inwestor. Dostępna jest bogata literatura na ten temat także w języku polskim². W niniejszym artykule proponuje się wykorzystanie do wyznaczenia VaR metodologii łańcuchów Markowa.

² Przykładami mogą być pozycje: Jajuga [2000], Bałamut [2002], Piontek [2002], Doman i Doman [2009], Kozirowska [2010].

Formalna definicja VaR nie uwzględnia procesowego charakteru zjawiska, a skupia się na zmiennych losowych:

$$P(W \leq W_0 - VaR) = \alpha \quad (14)$$

gdzie:

W_0 – obecna wartość instrumentu;

W – wartość instrumentu na koniec okresu;

α – poziom tolerancji (jeden minus, poziom ufności).

Przywołując klasyczną definicję wartości zagrożonej [zob. Osińska, 2006, s. 105], należy zwrócić uwagę na fakt wartości rynkowej związanej z aktualną realizowaną stopą zwrotu oraz na horyzont, tzn. zadany przedział czasowy:

$$P(Y_{t+\Delta t} \leq Y_t - VaR_\alpha) = \alpha \quad (15)$$

gdzie:

$\alpha \in (0, 1)$ – zadane prawdopodobieństwo;

Δt – określony czas trwania inwestycji;

Y_t – obecna wartość waloru w chwili t ;

$Y_{t+\Delta t}$ – wartość waloru na końcu trwania inwestycji.

Idea wyznaczania VaR sprowadza się do określenia takiej wartości, dla której stopa zwrotu spełnia warunek:

$$P(r_t \leq -VaR) = \alpha \quad (16)$$

Klasyczne metody szacowania wartości VaR to metoda: wariancji – kowariancji, symulacji historycznych, symulacji Monte Carlo [Jajuga, 2000]. W miarę rozwoju rynków finansowych dynamicznie rozwija się teoria dotycząca pomiaru VaR. Obecnie w badaniach empirycznych finansowych szeregów czasowych, które w większości przypadków zachowują się jak niestacjonarne procesy stochastyczne, do estymacji VaR wykorzystywane są metody dynamiczne oparte o modele warunkowej wariancji GARCH i modelach dalszych klas podobnego typu [Piontek, 2002; Ganczarek, 2006; Doman, Doman, 2009; Fiszedler, 2009; Trzpiot, 2010].

Traktowanie VaR jako warunkowego kwantyla, gdzie $\mathcal{F}_{t-1}$ jest zbiorem informacji z okresu wcześniejszego, okazuje się szczególnie ważne:

$$P(r_t \leq -VaR | \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha \quad (17)$$

W niniejszej pracy zostaną zaprezentowane wyniki estymacji VaR z uwzględnieniem metodologii konstrukcji modeli procesów stochastycznych w szczególności modeli łańcuchów Markowa.

3. Łańcuchy Markowa i VaR

Pierwsza myśl wykorzystania łańcuchów Markowa do wyznaczania VaR została przedstawiona w pracy Stawickiego [2016] przy okazji prezentowania innego problemu decyzyjnego. W niniejszym artykule przedstawia się sposób postępowania dla wyznaczenia VaR jako warunkowego kwantyla. VaR wyznaczany jest dla zadanego α przy znanej ostatniej obserwacji procesu stopy zwrotu z danego waloru lub indeksu. Idea estymacji VaR na dany moment za pomocą łańcuchów Markowa polega na odpowiedniej konstrukcji stanów oraz wyznaczeniu prawdopodobieństw przejścia $\mathbf{P} = [p_{ij}]$. Wyznaczenie VaR oznacza wybór odpowiedniego modelu łańcucha Markowa, w którym prawdopodobieństwo przejścia w stan zagrożenia jest nie większe niż zadana wartość α . Określając stany łańcucha Markowa jako odpowiednio dobrane przedziały, w których może znaleźć się stopa zwrotu, poszukujemy takiego modelu, w którym prawdopodobieństwo przejścia w stan zagrożenia nie jest większe niż wskazana wartość α .

Przyjmuje się cztery stany łańcucha Markowa. Dwa z nich pełnią funkcję szczególną. Pierwszy (oznaczony $\mathcal{S}_1$) – to stan zagrożenia; ma on postać przedziału:

$$\mathcal{S}_1 = (-\infty, -VaR)$$

drugi (symbolicznie oznaczony jako $\mathcal{S}_3$) – stan obserwowanej stopy zwrotu, tzn. przedział, w którym znajduje się stopa zwrotu w bieżącej chwili $r_t \in \mathcal{S}_3$, przyjmuje postać przedziału:

$$\mathcal{S}_3 = [x, y)$$

Przedział ten można określić jako symetryczny względem bieżącej obserwacji r_t o zadanej długości 2ε .

Pozostałe dwa stany odgrywają rolę uzupełniającą całą przestrzeń stopy zwrotu. Stan $\mathcal{S}_2$ jest określony w postaci przedziału $\mathcal{S}_2 = [VaR, x)$, a ostatni stan jako przedział $\mathcal{S}_4 = [y, \infty)$.

Ta konstrukcja jest zasadna w przypadku, gdy spełniony jest warunek $VaR < x$. Jeśli $VaR > y$, konstrukcja stanów jest następująca:

$$\mathcal{S}_1 = (-\infty, x)$$

$$\mathcal{S}_2 = [x, y)$$

$$\mathcal{S}_3 = [y, VaR)$$

$$\mathcal{S}_4 = [VaR, \infty)$$

Szczególną rolę odgrywają tutaj stany $\mathcal{S}_2$ oraz $\mathcal{S}_4$. W tym przypadku prawdopodobieństwo przejścia ze stanu $\mathcal{S}_2$ do stanu $\mathcal{S}_4$ musi być większe niż $1 - \alpha$ ($p = p_{21} + p_{22} + p_{23} < \alpha$).

W pierwszym przypadku wartość zagrożoną ustala się zgodnie z przyjętą zasadą, według której empirycznie zmienia się przedział $\mathcal{S}_1$ i tym samym jednocześnie przedział $\mathcal{S}_2$, szacując przy każdej zmianie macierz prawdopodobieństw przejść do momentu, gdy prawdopodobieństwo przejścia p_{31} w odpowiedniej macierzy P osiągnie wartość mniejszą od założonego poziomu ryzyka α lub w drugim przypadku, gdy w odpowiedniej macierzy P prawdopodobieństwo $p = p_{21} + p_{22} + p_{23}$ osiągnie wartość mniejszą od założonego poziomu ryzyka α . Dla szacowania parametrów macierzy prawdopodobieństw przejścia wykorzystuje się wzór (11). W przypadku, gdy wartość zagrożona znajduje się wewnątrz przedziału $[x, y)$, VaR można aproksymować odpowiednią funkcją liniową.

Konstrukcja wyżej opisanego łańcucha Markowa i estymacja jego parametrów, to znaczy dobór stanów szacowanie elementów macierzy przejścia, jest konstrukcją modelową ściśle związaną z daną obserwacją stopy zwrotu r_t . Dla tej obserwacji konstruuje się stan $\mathcal{S}_3$ (lub $\mathcal{S}_2$ w drugim przypadku) oraz poszukuje się odpowiedniego przedziału $\mathcal{S}_1 = (-\infty, -VaR)$ (w drugim przypadku $\mathcal{S}_4 = [VaR, \infty)$). Wielkość przedziału $\mathcal{S}_3 = [x, y)$ ($\mathcal{S}_2$ w drugim przypadku) podyktowana jest ilością dostępnej informacji (długością obserwowanego szeregu czasowego), a tym samym możliwością szacowania prawdopodobieństw przejścia w całej macierzy P .

Ustalając w ten sposób wartość zagrożoną, otrzymujemy prosty sposób uzależnienia VaR na okres następny od bieżącej obserwowanej wartości stopy zwrotu r_t . Postać zależności $VaR(r_t)$ może być aproksymowana dostępnymi postaciami funkcyjnymi (wielomianową, logarytmiczną, wykładniczą lub inną). W przypadku procesu białoszumowego funkcja ta jest constans o wartości zadanego

kwantyla. Dla innych procesów, o określonych własnościach, postać ta ma ściśle określony kształt zależny od własności procesu generującego i parametrów jego opisu (parametrów modelu procesu). W proponowanej metodzie nie poszukujemy modelu procesu stopy zwrotu, a modelu warunkowej wartości zagrożonej, przy warunku znanej bieżącej wartości stopy. Postępowanie dla wyznaczania VaR może być zalgorytmizowane i z łatwością zaimplementowane nawet w arkuszu kalkulacyjnym.

4. Algorytm wyznaczania VaR

Przedstawiony niżej algorytm wyznacza wartość zagrożoną dla przyszłej obserwacji, gdy znana jest ostatnia obserwacja r_i wybrana z procesu R_t . Macierz prawdopodobieństw przejść szacowana jest na podstawie całego zadanego okresu obserwacji. Główny moduł algorytmu to wyznaczanie parametrów macierzy przejścia dla łańcucha Markowa i nie będzie on w tej części szczegółowo prezentowany. Istota algorytmu sprowadza się do zmiany przedziału zagrożenia, powiększając go o wielkość δ tak długo, aż osiągnie się żądany poziom bezpieczeństwa α :

1. Wczytaj liczbę obserwacji T oraz proces $R_t = \{r_1, \dots, r_T\}$.
2. Wczytaj poziom istotności dla VaR α oraz δ – krok zmiany przedziału dla określenia VaR.
3. Określ wielkość przedziału, w jakim ma znajdować się obserwacja r_i jako $\varepsilon = \gamma \cdot std(R_t)$.
4. Weź obserwację stopy zwrotu r_i .
5. Weź $VaR_a = \min\{r_t\}$.
6. Określ stany łańcucha Markowa jako przedziały:

$$S_1 = (-\infty, -VaR_a)$$

$$S_2 = [VaR_a, r_i - \varepsilon)$$

$$S_3 = [r_i - \varepsilon, r_i + \varepsilon)$$

$$S_4 = [r_i + \varepsilon, \infty)$$

7. Wyznacz macierz prawdopodobieństw przejść $P = [p_{ij}]$.
8. Czy $p_{31} < \alpha$?
 - a) Jeśli NIE – przejdź do 9.
 - b) Jeśli TAK – przejdź do 10.
9. Weź za $VaR(i+1) = VaR_a$ i przejdź do 18.

10. Czy $VaR_a < r_i - \varepsilon - \delta$?
 - a) Jeśli NIE – przejdź do 11.
 - b) Jeśli TAK – weź za $VaR_a = VaR_a + \delta$ i wróć do 6.
11. Weź za $VaR_b = \max\{r_i\}$
12. Określ stany łańcucha Markowa jako przedziały:

$$S_1 = (-\infty, r_i - \varepsilon)$$

$$S_2 = [r_i - \varepsilon, r_i + \varepsilon)$$

$$S_3 = [r_i + \varepsilon, VaR_b)$$

$$S_4 = [VaR_b, \infty)$$
13. Wyznacz macierz prawdopodobieństw przejść $P = [p_{ij}]$ oraz $p = p_{21} + p_{22} + p_{23}$.
14. Czy $p > \alpha$?
 - a) Jeśli NIE – przejdź do 15.
 - b) Jeśli TAK – przejdź do 16.
15. Weź za $VaR(i+1) = VaR_b$ i przejdź do 18.
16. Czy $VaR_b > r_i + \varepsilon + \delta$?
 - a) Jeśli NIE – przejdź do 17.
 - b) Jeśli TAK – weź za $VaR_b = VaR_b - \delta$ i przejdź do 12.
17. Weź za $VaR(i+1) = r_i - \varepsilon + 2 \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{\alpha - p_{31}}{p - p_{31}}\right)$.

Blok pierwszy (punkty 5-10) opisuje sytuację, gdy $VaR(i+1)$ jest poniżej dolnej granicy przedziału, w którym znajduje się bieżąca stopa zwrotu, drugi blok (punkty 11-16) opisuje sytuację, gdy $VaR(i+1)$ znajduje się powyżej górnej granicy przedziału, w którym znajduje się bieżąca stopa zwrotu oraz punkt 17 określa wartość zagrożoną w sytuacji, gdy znajduje się ona wewnątrz tego przedziału.

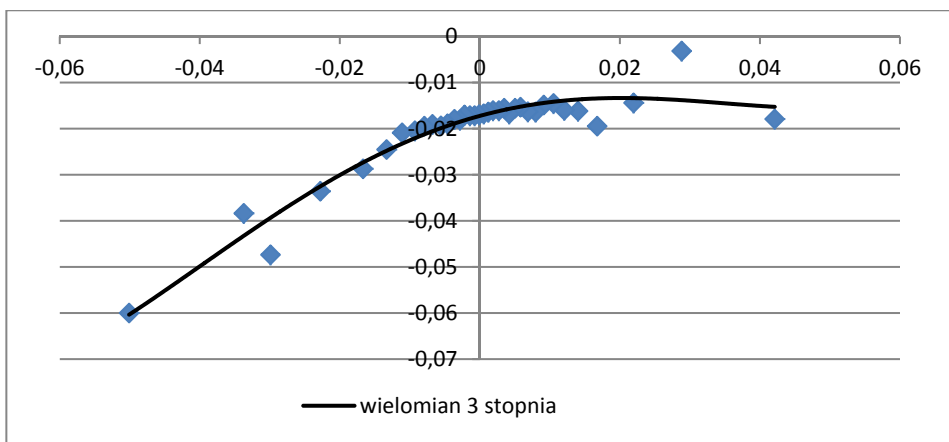
5. Przykład VaR dla stopy zwrotu dla WiG

Przedstawiony algorytm zastosowany został do prostego wyznaczenia VaR dla szeregu finansowego. Przykład ten odgrywa tylko rolę ilustracji. Dane dotyczą obserwacji stopy zwrotu dla indeksu WiG za okres 3.01.2005-13.11.2017. Do analizy wzięto notowania zamknięcia. Przyjęto, że obserwacja stopy zwrotu znajduje się w otoczeniu epsilonowym przy $\varepsilon = 0,003$.

Wyznaczone dla wybranych stóp zwrotu wartości VaR na poziomie $\alpha = 0,05$ na następną sesję pozwoliły oszacować funkcję $\text{VaR}(r_t)$ jako wielomian stopnia trzeciego (rys. 1). Korzystając z tej funkcji, wyznaczono VaR dla wszystkich stóp zwrotu. Warto zauważyć, że na 3221 obserwacji przekroczeń jest zaledwie 159. Test Kupca potwierdza poprawność wyznaczenia wartości zagrożonej w badanej próbie:

$$LR_{POF} = 0,027579$$

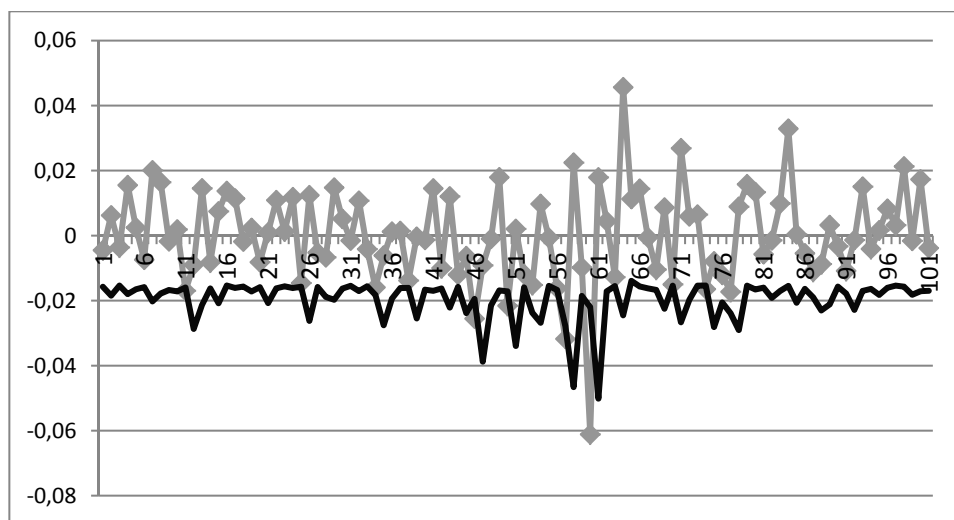
Podkreślić należy, że badacz zawsze staje przed decyzją co do wyboru okresu, który będzie podstawą wyznaczenia VaR. W tym badaniu przyjęto dość długi okres, mając świadomość niejednorodności zmian (zmiennność wariancji).



Rys. 1. Funkcja VaR dla stopy zwrotu z WiG

Źródło: Opracowanie własne.

Dla wybranego podokresu 100 obserwacji przedstawiono na rysunku 2 wyniki wyznaczonej wartości zagrożonej zaproponowaną metodą.



Rys. 2. Stopa zwrotu z WiG i VaR dla $\alpha = 0,05$ dla wybranego podokresu (obserwacje od 22.05.2007 r. do 11.10.2007 r.)

Źródło: Opracowanie własne.

Wyznaczanie wartości zagrożonej ma służyć podjęciu odpowiedniej decyzji finansowej na okres następny, znając bieżącą wartość stopy zwrotu oraz (w tym przypadku) mechanizm określania VaR. Ostatnia obserwowana wartość stopy zwrotu (na dzień 13.11.2017 r.) wynosi:

$$r_T = r_{3219} = 0,008808$$

Wyznaczona wartość zagrożona na poziomie $\alpha = 0,05$ wynosi:

$$VaR(r_T) = -0,01542$$

a na poziomie $\alpha = 0,01$ wynosi:

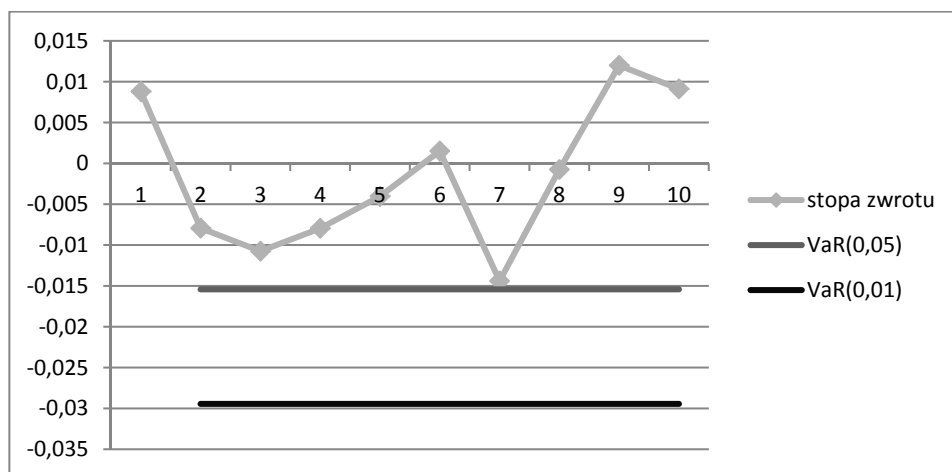
$$VaR(r_T) = -0,02944$$

Odpowiednia macierz przejścia oszacowana wzorem (11) dla łańcucha Markowa wyznaczającego wartość zagrożoną dla $\alpha = 0,05$ ma postać:

$$P = \begin{bmatrix} 0,2099 & 0,5185 & 0,1029 & 0,1687 \\ 0,0701 & 0,6559 & 0,1498 & 0,1242 \\ \mathbf{0,0493} & 0,6776 & 0,1396 & 0,1335 \\ 0,0545 & 0,6066 & 0,1991 & 0,1398 \end{bmatrix}$$

Wyróżniona wartość $p_{31} = 0,0493$ jest mniejsza od założonego poziomu $\alpha = 0,05$.

Średni pierwszy czas osiągnięcia stanu zagrożenia, a więc osiągnięcia stopy w przedziale $\mathcal{S}_1 = (-\infty, -\text{VaR}) = (-\infty, -0,01542)$ dla obserwowanej stopy zwrotu należącej do stanu $\mathcal{S}_3 = [r_i - \varepsilon, r_i + \varepsilon)$, obliczony na podstawie wzoru (10)³, wynosi $m_{31} = 15$ i świadczy o mało prawdopodobnym przekroczeniu $\text{VaR}(r_T) = -0,01542$ w najbliższym czasie. Obserwując ten proces przez kolejne 9 sesji, podkreślić należy, że żadna obserwacja nie przekroczyła tej wartości.



Rys. 3. VaR dla ostatniego dnia obserwacji i wartości stopy zwrotu w kolejnych 9 dniach

Źródło: Opracowanie własne.

Można zauważyć, że rygorystyczne postawienie warunku poziomu α przesunęło przedział ryzyka. Metodologia pozostaje taka sama. Wartość VaR dla poziomu $\alpha = 0,01$ wynosi $\text{VaR}(r_T) = -0,02944$, a średni pierwszy czas osiągnięcia stanu zagrożenia jest bardzo duży i wynosi $m_{3,1} = 66$ sesji.

Podsumowanie

Przedstawiona propozycja nie wyczerpuje wszystkich możliwości, jakie daje narzędzie w postaci łańcucha Markowa. Metoda ta wymaga porównania wyników z innymi, powszechnie stosowanymi metodami, czy metodami uznanymi

³ Wykorzystano pakiet WinQSB.

przez Bazylejski Komitet Nadzoru Bankowego. Wydaje się jednak, że propozycja wyznaczania VaR, mająca w modelu łańcucha Markowa bardzo prostą interpretację, może być dalej rozwijana. Ze względu na obliczanie prawdopodobieństw warunkowych wymaga znacznej liczby obserwacji. Analiza finansowych szeregów czasowych daje takie możliwości. Przedstawione wyniki stają się zachętą do dalszych badań. Wskazane jest weryfikowanie jednorodności przyjętego łańcucha Markowa i rozwinięcie algorytmu na przypadek łańcuchów niejednorodnych. Szczególne znaczenie mogą mieć łańcuchy wielokrotnego wiązania [zob. Stawicki, 2004]. Odrębnego opracowania wymaga metodologia konstrukcji portfela instrumentów finansowych wykorzystująca powyższą metodę określania VaR. Opracowanie tych zagadnień przekracza zakres tego artykułu.

Literatura

- Bałamut T. (2002), *Metody estymacji Value at Risk*, „Materiały i Studia”, z. 147, NBP, Warszawa.
- Ching W., Ng M.K. (2006), *Markov Chains Models, Algorithms and Applications*, Springer Science + Business Media, New York.
- Doman M., Doman R. (2009), *Modelowanie zmienności i ryzyka*, Wolter Kluwer Polska, Kraków.
- Decewicz A. (2011), *Probabilistyczne modele badań operacyjnych*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa.
- Kemeny J.G., Snell J.L. (1976), *Finite Markov Chains*, Springer-Verlag, Berlin.
- Fiszeder P. (2009), *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń.
- Ganczarek A. (2006), *Wykorzystanie modeli zmienności wariancji GARCH w analizie ryzyka na RDN* [w:] T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko'06*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. K. Adamieckiego w Katowicach, Katowice, s. 357-371.
- Ganczarek-Gamrot A. (2015), *Porównanie metod estymacji VaR na polskim rynku gazu*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 219, s. 41-52.
- Iosifescu M. (1988), *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, PWN, Warszawa.
- Jajuga K. (2000), *Ryzyko w finansach. Ujęcie statystyczne. Współczesne problemy badań statystycznych i ekonometrycznych*, AE, Kraków, s. 197-208.
- Koziorowska K. (2010), *Warunkowa wartość zagrożona jako narzędzie do zarządzania ryzykiem inwestycji finansowych*, Rozprawa doktorska, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Poznań.

- Osińska M. (2006), *Ekonometria finansowa*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Piontek K. (2002), *Pomiar ryzyka metodą VaR a modele AR-GARCH ze składnikiem losowym o warunkowym rozkładzie z „grubymi ogonami”* [w:] *Rynek Kapitałowy. Skuteczne Inwestowanie, Materiały Konferencyjne Uniwersytetu Szczecińskiego*, Część II, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin, s. 467-483.
- Podgórska M., Śliwka P., Topolewski M., Wrzosek M. (2002), *Łańcuchy Markowa w teorii i w zastosowaniach*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa.
- Stawicki J. (2004), *Wykorzystanie łańcuchów Markowa w analizie rynku kapitałowego*, Wydawnictwo UMK, Toruń.
- Stawicki J. (2016), *Using the First Passage Times in Markov Chain Model to Support Financial Decisions on Stock Exchange*, “Dynamic Econometric Models”, Vol. 16, s. 37-47.
- Trzpiot G. (2010), *Wielowymiarowe metody statystyczne w analizie ryzyka inwestycyjnego*, PWE, Warszawa.

DETERMINATION OF VAR USING THE MARKOV CHAIN

Summary: This article presents the possibilities for using the Markov chains to determine the Value at Risk. In determining VaR, conditional quantiles are preferred. The simple method of constructing a Markov chain model by defining states and estimating the transition probability matrix is entered into these preferred methods.

Keywords: VaR, Markov chain.