

O całkowaniu algebraicznym

FUNKCYJ ALGEBRAICZNYCH

n a p i s a ł

DR. LUDWIK BIRKENMAJER.

(Fragment wyjęty z rozprawy „O ogólnych metodach całkowania“ napisanej
w celu uzyskania stopnia doktora filozofii).

3164.



LWÓW.

(Osobne odbicie z „Albumu uczącej się młodzieży polskiej poświęconego
J. I. Kraszewskiego“).

Z drukarni „Gaz. narod.“ J. Dobrzańskiego i K. Gromana.

1879.

3 16 5 15

20.11.1938



68

2614
52

43878

II

Bibl. Muir - Lwów

17 IX 31

Da



51



X 124953
43878 II

O całkowaniu algebraicznym funkcji algebraicznych.

Nipisał

LUDWIK BIRKENMAJER.

(Fragment wyjęty z rozprawy „O ogólnych metodach całkowania“ napisanej w celu uzyskania stopnia doktora filozofii).

W poniższej pracy podaję niektóre rezultaty poszukiwań nad całkowalnością algebraiczną funkcji algebraicznych. Są to po części rezultaty znane, po części zupełnie nowe, które jako takie, sądzę, powinny budzić pewien interes. Podwaliną całej odnośnej teorii położył Abel: po nim Liouville, Czebyszew, i inni rozpowszechnili ją znakomicie, przyczem pierwszy posługiwał się własną metodą, którą możnaby nazwać „metodą identyczności“, drugi metodami Abela. Po tych genialnych poszukiwaniach zdawałoby się mogło dziwną rzeczą, iż przedmiot ten pozornie tak wyczerpująco zbadany, zostaje jeszcze poruszonym — wszelako wielka ogólność i różnorodność jego usprawiedliwią zaiste aż nadto może każde podobne przedsięwzięcie. Zdobycze czynią się tu na bardzo wdzięcznem polu, a chociaż szczególne trudności napotykają się tutaj co krok prawie, to te nie odstraszą badacza — rzecz dziwna, umysł ludzki rzuca się tam najchętniej, gdzie najwięcej trudności napotyka.

Od dawna ulubionym przedmiotem analizy matematycznej była dla mnie ta gałąź matematyki, która zajmuje się całkowaniem ogólnych funkcji algebraicznych i do nich podobnych (Liouville). Genialne utwory wspomnianych powyżej geometrów zachęciły mnie do próbowania sił własnych, jak sądzę, z niejakim powodzeniem, co mię tem bardziej skłoniło do dalszego zajmowania się tym przedmiotem. Jedną część tych dociekań uczyniłem przedmiotem niniejszej rozprawki.

Niech mi będzie wolno na tem miejscu złożyć swe podziękowanie Wielmożnemu Panu Dr. Wawrzyńcowi Żmurce, Profesorowi Uniwersytetu we Lwowie, za Jego wzniosłe prelekcje tamże i osobiste z Nim rozmowy pełne pożytku dla mnie dzięki którym pobudzony zostałem do oddania się głównie temu kierunkowi matematyki. Jakiegokolwiek zresztą przyjęcia dozna ta moja praca, uwielbienie moje dla Niego pozostanie niezachwianem.

Rozprawkę tę dzielę na dwie części: w pierwszej zajmuję się własnościami i badaniem całkowalności funkcyj algebraicznych wyraźnych (rozwikłanych), w drugiej poddaję rozważaniu funkcyje algebraiczne niewyraźne (zawikłane), wyłącznie których to całkowaniem Abel się zajmował. Uwagi godną jest rzeczą, iż oba te rodzaje funkcyj algebraicznych pozwalają zupełnie podobnego traktowania (jak to zobaczymy) tak, że dalszy ciąg badania jednej z nich jest metodycznie zawartym w drugiej. Z tego powodu przy funkcjach algebraicznych pierwszego rodzaju, t. j. wyraźnych, można opuścić te rozumowania i rozwinięcia, które przy funkcjach algebraicznych drugiego rodzaju się powtarzają. Nadarzającego się zastosowania, jakie te rozważania w teorii równań różniczkowych liniowych (o ogólnym całkowitym dodatnim wskaźniku), o współczynnikach wymiernych zmiennej niezależnej za sobą pociąga, nie umieszczamy tutaj, aby zbyt daleko nie odbiegać od rzeczy.



I.

Funkcye algebraiczne wyraźne.

1. Ogólnym kształtem funkcyi algebraicznej wyraźnej jest

$$(1) \quad A_{\mu} = p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_{\sigma-1} r^{\sigma-1},$$

gdzie

$$(2) \quad r^{\sigma} = q.$$

Taka funkcyja algebraiczna zowie się funkcyą μ go rzędu (ordre), a w ogólności m go stopnia (degré), jeżeli funkcyje $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{\sigma-1}$, są μ go rzędu, $(m-1)$ go stopnia, q algebraiczną $(\mu-1)$ go rzędu, a σ liczbą całkowitą dodatnią i pierwotą.¹⁾ Znaczenie pojęć „rzędu“ i „stopnia“ funkcyi algebraicznej uczynimy zrozumiałem, jeżeli powiemy:

Funkcya algebraiczna μ go rzędu, stopnia zero, jest funkcyą algebraiczną $(\mu-1)$ go rzędu; funkcyja algebraiczna rzędu zero, stopnia jakiegokolwiek, jest funkcyą algebraiczną wymierną.²⁾ Funkcya algebraiczna pierwszego rzędu zawiera tylko pierwiastniki z funkcyj wymiernych w ilości m' , a ta ostatnia liczba jest jej stopniem; funkcyja algebraiczna drugiego rzędu zawiera tylko pierwiastniki z funkcyj algebraicznych pierwszego rzędu w ilości m'' oznaczającej jej stopień i funkcyje algebraiczne pierwszego rzędu i t. d.³⁾

Oczywiście, że wszystkie funkcyje, z których ogólna A_{μ} jest zbudowaną, są funkcyami zmiennej niezależnej x .

O ile mi wiadomo, dotąd nie zajmowano się wcale badaniem całek z funkcyj kształtu A_{μ} , zakładając je zbudowanemi w powyższy sposób ze zmiennej niezależnej x . A jednak teoria taka jest nie tylko łatwiejszą od teorii całek funkcyj algebrai-

¹⁾ Abel O'Euvres completes t. I. pag. 9; t. II. pag. 195.

Abel Journal f. d. reine u. angewandte Math. h. v. Crelle t. I. pag. 3 i nast.

Serret Cours d'Algèbre Supérieur t. I.

²⁾ Abel l. c. t. I. pag. 8.

³⁾ Abel l. c. t. I. pag. 7; t. II. pag. 195.

cznych wyrażonych niewyraźnie równaniami algebraicznymi o współczynnikach wymiernych i całkowitych, lecz oraz dogodniejszą w zastosowaniach tak teoretycznych, gdy chodzi o znalezienie własności całek, jako też i praktycznych, gdy potrzebna jest znajomość wyraźna całki funkcji algebraicznej.

Założmy, że $\mu=1$, t. j. funkcja A jest algebraiczną pierwszego rzędu. Wówczas funkcje $p_0, p_1, p_2, \dots$ są także rzędu pierwszego lecz stopnia o jedność niższego, q funkcją wymierną.

2) Pochodna funkcji A będzie

$$\begin{aligned} & A'_1 \\ = & p'_0 + (p'_1 r + p_1 r') + (p'_2 r^2 + 2p_2 r r') + (p'_3 r^3 + 3p_3 r^2 r') + \dots + \\ & + (p'_{\sigma-1} r^{\sigma-1} + (\sigma-1)p_{\sigma-1} r^{\sigma-2} r') \\ = & (p'_0 + p'_1 r + p'_2 r^2 + p'_3 r^3 + \dots + p'_{\sigma-1} r^{\sigma-1}) + \\ & + r'(p_1 + 2p_2 r + 3p_3 r^2 + \dots + (\sigma-1)p_{\sigma-1} r^{\sigma-2}). \end{aligned}$$

Różniczkując równanie (2) otrzymamy

$$\sigma r^{\sigma-1} r' = q'$$

mnożąc obustronnie przez r i bacząc na (2), otrzymamy stąd r'

$$(3) \quad r' = \frac{q'}{\sigma q} r = t \cdot r,$$

gdzie dla skrócenia położyliśmy:

$$(4) \quad \frac{q'}{\sigma q} = t$$

Podstawiając wartość (3) w rozwinięcie na A'_1 , otrzymamy po uporządkowaniu według potęg r

$$\begin{aligned} (5) \quad & A'_1 \\ = & p'_0 + (p'_1 + p_1 t) r + (p'_2 + 2p_2 t) r^2 + \dots + \\ & + (p'_{\sigma-1} + (\sigma-1)p_{\sigma-1} t) r^{\sigma-1}; \end{aligned}$$

tak tutaj jak i w następstwie, pochodne funkcji oznaczać będziemy sposobem Lagrange'a, t. j. kreskując samą funkcję odpowiednią ilość razy.

Dotąd nie dbaliśmy o to, jakiego stopnia ma być funkcyja A_1 . Założmy nasamprzód, iż jest ona stopnia pierwszego, to funkcyje $p_0, p_1, p_2 \dots$ będą wymiernymi, a ponieważ q , zatem i t są funkcyjami wymiernymi, przeto współczynniki ostatniego rozwinięcia będą także funkcyjami wymiernymi zmiennej niezależnej x . Pochodna A'_1 będzie więc funkcyją algebraiczną pierwszego rzędu i pierwszego stopnia, a co więcej o tym samym pierwiastniku (*radykału*) r .

Takie dwie funkcyje algebraiczne, które są zbudowane z tego samego pierwiastnika r , które przeto posiadają kształty

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_{\sigma-1} r^{\sigma-1} \\ \pi_0 + \pi_1 r + \pi_2 r^2 + \dots + \pi_{\sigma-1} r^{\sigma-1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$r^{\sigma} = q,$$

bez względu na ich rząd i stopień nazwiemy funkcyjami algebraicznymi przystającymi (*congru*) odpowiedniego rzędu i stopnia.

Widzimy tedy, że

Pochodna funkcyi algebraicznej pierwszego rzędu i pierwszego stopnia, jest przystającą tego samego rzędu i stopnia.

Stąd wynika bezpośrednio, że

Wszelka pochodna funkcyi algebraicznej pierwszego rzędu i pierwszego stopnia jest przystającą tego samego rzędu i stopnia.

Założmy teraz, że stopień funkcyi A_1 jest 2. Zatem funkcyje $p_0, p_1, p_2 \dots$ są stopnia pierwszego, q zatem i t funkcyjami wymiernymi. Według poprzedniego twierdzenia, pochodne

$$p'_0, p'_1, p'_2 \dots$$

są algebraicznymi stopnia pierwszego do

$$p_0, p_1, p_2 \dots$$

przystającymi, zatem współczynniki rozwinięcia (5)

$$p'_0, (p'_1 + p_2 t), (p'_2 + 2p_1 t) \dots$$

są również algebraicznymi stopnia pierwszego, do funkcyj

$$p_0, p_1, p_2 \dots$$

przystającami. Widoczną jest bowiem rzeczą, że summa kilku przystających funkcyj stanowi znowu przystającą funkcję. A że funkcje $p'_0, p'_1, p'_2 \dots$ są tego samego rzędu i stopnia co $p_0, p_1, p_2 \dots$ przeto oczywiście

Pochodna funkcji algebraicznej pierwszego rzędu, drugiego stopnia, jest przystającą tego samego rzędu i stopnia, mającą nadto współczynniki ¹⁾ funkcjami przystającami do współczynników danej funkcji.

Stąd wynika bezpośrednio, że

Wszelka pochodna funkcji algebraicznej pierwszego rzędu, drugiego stopnia jest przystającą tego samego rzędu i stopnia, mającą nadto współczynniki funkcjami przystającami do współczynników danej funkcji.

Podobne twierdzenia istnieją dla funkcji algebraicznej pierwszego rzędu, a jakiegokolwiek stopnia. Oznaczywszy ten stopień przez m , udowodnimy to łatwo zapomocą t. z. wyższej indukcji, t. j. przypuszczając jego prawdziwość dla funkcji algebraicznej pierwszego rzędu, stopnia $(m-1)$ go i udowadniając, że następstwem tego założenia jest prawdziwość jego dla funkcji tego samego rzędu, a stopnia o jedność wyższego.

W istocie zakładając, że funkcje $p_0, p_1, p_2 \dots$ są algebraicznymi pierwszego rzędu stopnia $(m-1)$ go, q funkcją wymierną — funkcja A_1 będzie algebraiczną pierwszego rzędu, stopnia m go. Pochodne $p'_0, p'_1, p'_2 \dots$ mocą uczynionego założenia będą funkcjami algebraicznymi $(m-1)$ go stopnia, do $p_0, p_1, p_2 \dots$ przystającami, zatem i współczynniki rozwinięcia (5) będą takimi funkcjami, a pochodna A'_1 funkcją, równego co i A_1 stopnia, do niej przystającą. Twierdzenie powyższe będąc tedy ważnem dla stopnia $(m-1)$, jest także ważnem dla stopnia m . Ponieważ jest ono ważnem dla $m=2$, przeto jest ważnem i dla $m=3, 4 \dots$ jest więc ogólnem.

Dla podobnej przyczyny A''_1 będzie algebraiczną równego co i A'_1 stopnia, do niej przystającą, zatem także równego co i A_1 stopnia do niej przystającą i t. d., zatem w końcu możemy powiedzieć, że

¹⁾ Współczynnikami nazywamy dla krótkości funkcje mnożące wyraźne pierwiastki, t. j. funkcje $p_0, p_1, p_2 \dots$ innym razem $p'_0, (p'_1 + p_1 t) \dots$

Wszelka pochodna funkcyi algebraicznej pierwszego rzędu, stopnia m go, jest funkcją algebraiczną pierwszego rzędu, stopnia m go do pierwszej przystającą.

Nadto współczynniki rozwinięcia pochodnych są funkcyami do odpowiednich współczynników danej funkcyi przystającemi.

3. Z kolei zauważmy funkcyę algebraiczną drugiego rzędu. Niechaj taką funkcją będzie

$$(6) \quad A_2 = g_0 + g_1 \rho + g_2 \rho^2 + \dots + g_{\nu-1} \rho^{\nu-1}$$

gdzie

$$(7) \quad \rho^{\nu} = \gamma$$

a funkcyę $g_0, g_1, g_2 \dots$ są algebraicznymi drugiego rzędu stopnia $(m-1)$ go, funkcya γ algebraiczną rzędu pierwszego, a ν liczbą całkowitą, dodatnią i pierwotną. Funkcya A_2 jest zatem stopnia m go.

Pochodna funkcyi A_2 jak poprzednio tak i teraz będzie miała kształt

$$\begin{aligned} A'_2 &= (g'_0 + g'_1 \rho + g'_2 \rho^2 + \dots + g'_{\nu-1} \rho^{\nu-1}) + \\ &+ (g_1 + 2g_2 \rho + 3g_3 \rho^2 + \dots + (\nu-1)g_{\nu-1} \rho^{\nu-2}) \rho'. \end{aligned}$$

Z równania (7) otrzymamy różniczkowaniem

$$\nu \rho^{\nu-1} \rho' = \gamma'$$

mnożąc obustronnie przez ρ i bacząc na (7) otrzymamy na ρ'

$$\rho' = \frac{\gamma'}{\nu \gamma} \cdot \rho = \Theta \cdot \rho$$

gdzie dla skrócenia położyliśmy

$$(8) \quad \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\gamma'}{\gamma} = \Theta.$$

Podstawiając powyższą wartość na ρ' w rozwinięcie na A'_2 otrzymamy porządkując według potęg pierwiastnika ρ

$$\begin{aligned} (9) \quad A'_2 &= g'_0 + (g'_1 + g_1 \Theta) \rho + (g'_2 + 2g_2 \Theta) \rho^2 + \dots + \\ &+ (g'_{\nu-1} + (\nu-1)g_{\nu-1} \Theta) \rho^{\nu-1}. \end{aligned}$$

Stopień funkcji A_2 był dotąd nieoznaczonym, założmy więc nasamprzód $m=1$. Funkcje $g_0, g_1, g_2 \dots$ będą wówczas algebraicznymi rzędu drugiego, stopnia zerowego czyli funkcjami algebraicznymi rzędu pierwszego, a to samo i funkcje $g'_0, g'_1, g'_2 \dots$ mocą poprzednich twierdzeń. Potrzeba jeszcze bliżej rozpoznać funkcję Θ .

Otóż γ jest funkcją algebraiczną pierwszego rzędu, a według poprzedzających twierdzeń γ' jest także funkcją algebraiczną pierwszego rzędu do pierwszej przystającą, a to jakimkolwiek byłby ich stopień λ . Funkcja, którą dla skrócenia przez Θ oznaczyliśmy, będzie wyglądać

$$\Theta = \frac{p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_{\sigma-1} r^{\sigma-1}}{\pi_0 + \pi_1 r + \pi_2 r^2 + \dots + \pi_{\sigma-1} r^{\sigma-1}} = \frac{f_1(x, r)}{f_2(x, r)},$$

gdzie

$$r^\sigma = q$$

a $p_0, p_1, p_2 \dots \pi_0, \pi_1, \pi_2 \dots$ są funkcjami algebraicznymi pierwszego rzędu stopnia $(\lambda-1)$, q algebraiczną zerowego rzędu czyli funkcją wymierną. Oznaczywszy licznik tego wyrażenia przez $f_1(x, r)$, mianownik przez $f_2(x, r)$, jak to uczyniliśmy, możemy pisać

$$\Theta = \frac{f_1(x, r) f_2(x, ra) f_2(x, ra^2) f_2(x, ra^3) \dots f_2(x, ra^{\sigma-1})}{f_2(x, r) f_2(x, ra) f_2(x, ra^2) f_2(x, ra^3) \dots f_2(x, ra^{\sigma-1})}$$

gdzie a jest pierwiastkiem pierwotnym równania

$$a^\sigma - 1 = 0.$$

Mianownik powyższego wyrażenia jest funkcją wymierną i symetryczną pierwiastków równania

$$r^\sigma - q = 0,$$

daje się przeto mocą twierdzenia Waring — Lagrange'a ¹⁾ wyrazić wymiennie współczynnikami tego równania i funkcjami $\pi_0, \pi_1, \pi_2 \dots$ czyli wymiennie zapomocą funkcji $q, \pi_0, \pi_1, \pi_2 \dots$

¹⁾ E. Waring *Meditationes algebraicae* Ed. III. Cantabr. 1782.
Serret *Cours d'Algèbre supérieure* t. I. pag. 372 i nast.

Ponieważ zaś funkcyje $\pi_0, \pi_1, \pi_2 \dots$ są algebraicznymi pierwszego rzędu, stopnia $(\lambda-1)$ go, przeto wspomniany mianownik jest również funkcją algebraiczną pierwszego rzędu, stopnia $(\lambda-1)$. Licznik zaś ostatniego wyrażenia na Θ , daje się wiadomym sposobem rozwinąć według całkowitych dodatnich potęg pierwiastnika r i ograniczyć do liczby σ członów, tak że Θ przedstawi się w postaci ilorazu funkcyj algebraicznych pierwszego rzędu, stopnia λ go a względnie $(\lambda-1)$ go. Ponieważ wprzód takie funkcyje dające na iloraz funkcję Θ były obie stopnia λ go, przeto widzimy, iż stopień mianownika daje się zniżyć powyższem działaniem o jedność, podczas gdy stopień licznika pozostaje niezmiennym. Zważając, że nowy licznik jest przystającym do dawnego licznika, łatwo zobaczymy, iż zniżając w ten sposób ciągle stopień mianownika do zera, t. j. mianownik stanie się funkcją algebraiczną pierwszego rzędu stopnia zerowego, t. j. rzędu zerowego czyli funkcją wymierną, podczas gdy licznik będzie trwale algebraiczną pierwszego rzędu, a tak funkcja Θ będzie algebraiczną pierwszego rzędu czyli algebraiczną drugiego rzędu, zerowego stopnia do r przystającą.

To pamiętając, jak również to, że funkcyje

$$g'_0, g'_1, g'_2 \dots$$

zatem i współczynniki

$$g'_0, (g'_1 + g_1 \Theta), (g'_2 + 2g_2 \Theta) \dots$$

są funkcjami algebraicznymi pierwszego rzędu czyli drugiego rzędu, zerowego stopnia, widocznem jest z rozwinięcia (9), że

Pochodna funkcji algebraicznej drugiego rzędu pierwszego stopnia, jest przystającą tego samego rzędu i tego samego stopnia.

Wynika stąd bezpośrednio, że

Wszelka pochodna funkcji algebraicznej drugiego rzędu pierwszego stopnia jest przystającą funkcją drugiego rzędu pierwszego stopnia.

Należy teraz założyć $m=2$. Wówczas funkcja algebraiczna rzędu drugiego jest stopnia drugiego, a funkcyje $g_0, g_1, g_2 \dots$ algebraicznymi drugiego rzędu stopnia pierwszego, r jak wprzód funkcjami algebraicznymi pierwszego rzędu. Pochodne $g'_0, g'_1, g'_2 \dots$

będą teraz według poprzedniego algebraicznymi rzędu drugiego stopnia pierwszego, a ponieważ i w tym razie funkcyja Θ będzie algebraiczną pierwszego rzędu, przeto współczynniki

$$g'_0, (g'_1 + g_1\Theta), (g'_2 + g_2\Theta) \dots$$

będą funkcyjami algebraicznymi rzędu drugiego, stopnia pierwszego, więc A'_2 algebraiczną rzędu drugiego stopnia drugiego. Zatem:

Pochodna funkcyi algebraicznej rzędu drugiego stopnia drugiego jest algebraiczną rzędu drugiego, stopnia drugiego, do danej funkcyi przystającą

Stąd wynika, że

Wszelka pochodna funkcyi algebraicznej rzędu drugiego stopnia drugiego jest algebraiczną rzędu drugiego, stopnia drugiego, do danej funkcyi przystającą.

Za pomocą wyższej indukcji łatwo stąd wysnuć twierdzenie:

Pochodna funkcyi algebraicznej rzędu drugiego stopnia m go, jest algebraiczną tego samego rzędu i stopnia, do danej funkcyi przystającą,

czego koniecznem następstwem będzie twierdzenie:

Wszelka pochodna funkcyi algebraicznej rzędu drugiego, stopnia m go, jest funkcyą algebraiczną tego samego rzędu i stopnia do danej funkcyi przystającą,

4. Nasuwa się teraz samo przez się pytanie, czy takie samo twierdzenie jest ważnem dla funkcyj algebraicznych μ go rzędu m go stopnia, czyli dla ogólnych funkcyj algebraicznych. Okażemy zaraz, że tak jest w istocie, przyczem uczynimy użytek znowu ze sposobu dowodzenia t. z. wyższą indukcją.

Założmy, że pochodne funkcyj algebraicznych $(\mu-1)$ go rzędu, jakiegokolwiek stopnia, są algebraicznymi tego samego rzędu i stopnia, do pierwszych przystającymi; okażemy, że w takim razie ma to miejsce i dla funkcyj algebraicznych μ go rzędu.

Jak powyżej tak i tutaj rozpoczniemy od $m=1$. Funkcya

$$(10) \quad Au = h_0 + h_1\phi + h_2\phi^2 + \dots + h_{\epsilon-1}\phi^{\epsilon-1},$$

gdzie

$$(11) \quad \phi^\epsilon = \zeta$$

będzie rzędu μ go stopnia pierwszego, zatem funkcyje $h_0, h_1, h_2 \dots$ algebraicznymi rzędu μ go stopnia zerowego, t. j, algebraicznymi rzędu $(\mu-1)$ go, funkcyja ζ również algebraiczną $(\mu-1)$ go rzędu, ε liczbą całkowitą dodatnią i pierwotną.

Pochodna wyrażenia (10) będzie

$$\begin{aligned} & A'_{\mu} \\ &= (h'_0 + h'_1 \phi + h'_2 \phi^2 + \dots + h'_{\varepsilon-1} \phi^{\varepsilon-1}) + \\ &+ (h_1 + 2h_2 \phi + 3h_3 \phi^2 + \dots + (\varepsilon-1)h_{\varepsilon-1} \phi^{\varepsilon-2}) \phi', \end{aligned}$$

a ponieważ z równania (11) różniczkowaniem otrzymujemy

$$\varepsilon \phi^{\varepsilon-1} \phi' = \zeta'$$

$$\varepsilon \phi^{\varepsilon} \phi' = \zeta' \phi$$

skąd wypada

$$(12) \quad \phi' = \frac{\zeta'}{\varepsilon \phi} \cdot \phi = \eta \cdot \phi$$

przeto wstawiając tę wartość w rozwinięcie na A'_{μ} i porządkując według potęg pierwiastnika ϕ , otrzymamy

$$(13) \quad \begin{aligned} & A'_{\mu} \\ &= h'_0 + (h'_1 + h_1 \eta) \phi + (h'_2 + 2h_2 \eta) \phi + \dots + (h'_{\varepsilon-1} + (\varepsilon-1)h_{\varepsilon-1} \eta) \phi^{\varepsilon-1} \end{aligned}$$

Szukajmy kształtu funkcyi, którą dla skrócenia oznaczyliśmy przez η ,

$$\eta = \frac{\zeta'}{\eta \cdot \zeta}$$

Funkcyja ζ jest algebraiczną $(\mu-1)$ go rzędu, stopnia n . p. łgo, a mocą uczynionego założenia pochodna ζ' będzie algebraiczną tego samego rzędu i stopnia do pierwszej przystającą, tak że funkcyja η będzie wyglądać

$$\eta = \frac{l_0 + l_1 w + l_2 w^2 + \dots + l_{s-1} w^{s-1}}{k_0 + k_1 w + k_2 w^2 + \dots + k_{s-1} w^{s-1}} = \frac{F_1(x, w)}{F_2(x, w)}$$

gdzie $k_0, k_1, k_2 \dots l_0, l_1, l_2 \dots$ są funkcyami algebraicznymi $(\mu-1)$ go rzędu, $(\lambda-1)$ go stopnia, funkcyja w określona równaniem

$$w^s = \Delta$$

gdzie Δ jest algebraiczną $(\mu-1)$ go rzędu, s liczbą całkowitą dodatnią i pierwotną.

$$\eta = \frac{F_1(x, w) F_2(x, \alpha w) F_2(x, \alpha^2 w) \dots F_2(x, \alpha^{s-1} w)}{F_2(x, w) F_2(x, \alpha w) F_2(x, \alpha^2 w) \dots F_2(x, \alpha^{s-1} w)}$$

gdzie α jest pierwotnym pierwiastkiem równania

$$\alpha^s - 1 = 0.$$

Niepotrzebujemy zdaje się nawet nadmienić, że funkcje F_1 i F_2 służą do skróconego pisania powyżej napisanych wielomianów całkowitych co do pierwiastnika w .

Mianownik powyższego wyrażenia jest widocznie funkcją wymierną i symetryczną pierwiastków równania.

$$w^s - \Delta = 0$$

a jako taki daje się wyrazić wymiennie zapomocą współczynników tego równania i funkcyj $k, k_1, k_2 \dots$ t. j. zapomocą funkcyj $\Delta, k_0, k_1, k_2 \dots$. Mianownik będzie przeto funkcją algebraiczną $(\mu-1)$ go rzędu, $(\lambda-1)$ go stopnia, licznik zaś dający się jak poprzednio rozwinąć według całkowitych dodatnich potęg pierwiastnika w i ograniczyć do liczby s członów, tak że funkcja η przedstawi się w postaci ilorazu funkcyj algebraicznych $(\mu-1)$ go rzędu, a względnie stopnia λ i $(\lambda-1)$. Ponieważ wprzód te funkcje dające na iloraz funkcję η były obie stopnia λ , przeto widzimy, iż stopień mianownika w wyrażeniu na η daje się zniżyć o jedność, podczas gdy stopień licznika pozostaje niezmiennym. Zważając, że nowy licznik jest i teraz przystającym do dawnego licznika, łatwo zobaczymy, iż zniżając w ten sposób ciągle stopień mianownika, dojdziemy do zera, t. j. mianownik stanie się funkcją algebraiczną $(\mu-1)$ go rzędu, stopnia zerowego czyli algebraiczną $(\mu-2)$ go rzędu, podczas gdy licznik ówczesny pozostanie funkcją algebraiczną $(\mu-1)$ go rzędu, do przystającą, zawierającą tyleż pierwiastników, co ostatnia funkcja. Wyciągamy stąd dalszy wniosek, iż w wyrażeniu funkcji η rząd mianownika daje się zniżyć o jedność, przeto o dwie, trzy $\dots$ jedności, podczas gdy licznik co do swego rzędu pozostanie niezmiennym, a mianownik wreszcie stanie się funkcją algebraiczną zerowego rzędu czyli funkcją wymierną. Funkcja η będzie przeto

$$\eta = m_0 + m_1 w + m_2 w^2 + \dots + m_{s-1} w^{s-1}$$

gdzie $m_0, m_1, m_2 \dots$ są funkcjami algebraicznymi $(\mu-1)$ go rzędu, $(\lambda-1)$ go stopnia, tak że funkcja η będzie algebraiczną $(\mu-1)$ go rzędu, stopnia λ , czyli algebraiczną μ go rzędu stopnia zerowego.

Pochodne

$$h'_0, h'_1, h'_2, \dots$$

są według uczynionego powyżej założenia algebraicznymi $(\mu-1)$ go rzędu, stopnia równego odpowiednio stopniom funkcji

$$h_0, h_1, h_2 \dots$$

i do nich odpowiednio przystającymi. Współczynniki rozwinięcia (13)

$$h', (h'_1 + h_1 \eta), (h'_2 + 2h_2 \eta) \dots$$

są tedy funkcjami algebraicznymi $(\mu-1)$ go rzędu i pewnego stopnia czyli funkcjami algebraicznymi μ go rzędu, $0+1=1$ go stopnia. Zatem

Pochodna funkcji algebraicznej μ go rzędu pierwszego stopnia, będzie algebraiczną tego samego rzędu i stopnia, przystającą do funkcji danej, jeżeli uczynione powyżej założenie jest prawdziwym.

Bezpośrednio stąd wynika, że

Wszelka pochodna funkcji algebraicznej μ go rzędu, pierwszego stopnia, będzie algebraiczną tego samego rzędu i stopnia, przystającą do funkcji danej, jeżeli uczynione powyżej założenie jest prawdziwym.

Biorąc $m=2$, funkcje $h_0, h_1, h_2 \dots$ będą algebraicznymi μ go rzędu, stopnia pierwszego, funkcja η pozostanie algebraiczną $(\mu-1)$ go rzędu, funkcje

$$h'_0, h'_1, h'_2 \dots$$

jako pochodne algebraicznych μ go rzędu, stopnia pierwszego, będą również algebraicznymi μ go rzędu, stopnia pierwszego, a to samo oczywiście współczynniki

$$h'_0, (h'_1 + h_1 \eta), (h'_2 + 2h_2 \eta) \dots$$

rozwiniecia (13). Funkcya A'_μ będzie przeto wówczas algebraiczną μ go rzędu, stopnia drugiego do A_μ przystającą, skąd wynika, że

Wszelka pochodna funkcyi algebraicznej μ go rzędu, stopnia drugiego, jest przystającą algebraiczną funkcją tego samego rzędu i stopnia, jeżeli uczynione powyżej założenie jest prawdziwem.

Oczywiście, że tak samo możemy założyć $m=3, 4 \dots$ wreszcie $(m-1)$, m , a dla ostatniej wartości przez wyższą indukcję z bezpośrednio poprzedzającej podobne twierdzenie udowodnić.

Pochodna funkcyi algebraicznej μ go rzędu, m go stopnia jest przeto przystającą funkcją algebraiczną tego samego rzędu i stopnia, jeżeli podobne twierdzenie dla funkcji algebraicznych $(\mu-1)$ go rzędu, stopnia ogólnego m' ma miejsce. Lecz udowodniliśmy powyżej, że jest ono ważnem dla $\mu=2$, zatem będzie ważnem dla $\mu=3$, więc i dla $\mu=4 \dots$ dla $\mu=\mu$ jest więc ogólnem. Ponieważ jednak funkcya algebraiczna rzędu ogólnego μ , stopnia ogólnego m jest najogólniejszą funkcją algebraiczną, przeto możemy wypowiedzieć bardzo ogólne i zasadnicze twierdzenie.

Pochodna najogólniejszej funkcyi algebraicznej μ go rzędu, m go stopnia, jest przystającą funkcją algebraiczną tego samego rzędu i stopnia, czego bezpośredniem następstwem jest, że

Wszelka pochodna najogólniejszej funkcyi algebraicznej μ go rzędu, m go stopnia jest przystającą funkcją algebraiczną tego samego rzędu i stopnia.

Pomijam dalsze własności ogólnych funkcji algebraicznych, a to aby nie odbiegać zadaleko od przedmiotu — nadmieniam tutaj tylko, iż te funkcyje posiadają piękne własności analogiczne do własności pewnej klasy funkcji przestępnych, pozwalające rozlicznych zastosowań, n. p. w teorii liniowych równań różniczkowych. Znajdę może jeszcze kiedy sposobność wyprowadzić je i okazać jak łatwą i jednostajną metodą dają się wynachodzić najdonioślejsze twierdzenia w tej gałęzi analizy matematycznej.

Trzymając się atoli zakresu przeznaczonego tej rozprawce jej nagłówkiem, przystąpimy do badania całek funkcji A_μ .

5. Żądajmy algebraicznego wyrażenia całki ogólnej funkcyi algebraicznej. W takim razie założyć należy.

$$(14) \quad \int A_{u,m} dx = A_{u',m'}$$

oznaczywszy pierwszym wskaźnikiem rząd, drugim stopień algebraicznej funkcji A . Pisząc wyraźnie, żądamy aby było

$$(14') \quad \int (p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_{\sigma-1} r^{\sigma-1}) dx = \\ = P_0 + P_1 R + P_2 R^2 + \dots + P_{s-1} R^{s-1}$$

gdzie

$$(15) \quad r^\sigma = q \quad R^s = Q;$$

$p_0, p_1, p_2 \dots$ są funkcjami algebraicznymi p -go rzędu, $(m-1)$ -go stopnia, $P_0, P_1, P_2 \dots$ funkcjami algebraicznymi p' -go rzędu, $(m'-1)$ -go stopnia, q i Q algebraicznymi $(p-1)$ -go i $(p'-1)$ -go rzędu, σ i s liczbami całkowitymi dodatnimi i pierwotnymi.

Różniczkowanie równania (14') daje z uwagi na poprzednie twierdzenia

$$p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_{\sigma-1} r^{\sigma-1} = P_{0,0} + P_{1,0} R + P_{2,0} R^2 + \dots + \\ + P_{s-1,0} R^{s-1}$$

gdzie $P_{0,0}, P_{1,0}, P_{2,0} \dots$ są równego rzędu i stopnia co i $P_0, P_1, P_2 \dots$.

Dla symetrii równanie to napiszemy tak

$$(16) \quad p_{0,0} + p_{1,0} r + p_{2,0} r^2 + \dots + p_{\sigma-1,0} r^{\sigma-1} = \\ = P_{0,0} + P_{1,0} R + P_{2,0} R^2 + \dots + P_{s-1,0} R^{s-1}$$

i zważajmy, że ono ma być identycznym¹⁾. Twierdzimy nasamprzód, że pierwiastniki r i R nie różnią się od siebie, t. j. że jest ono ze względu na r i R identycznym czyli

$$r = R$$

skutkiem czego

$$\sigma = s.$$

W istocie różniczkując równanie (16) w przypuszczeniu jego nieidentyczności ze względu na pierwiastniki r i R , $(\sigma-2)$

¹⁾ gdyż równania (14) i (14') wyrażają identyczność.

razy, otrzymamy z uwagi na poprzedzające twierdzenia ($\sigma-2$) równań kształtu

$$(17) \left\{ \begin{aligned} & p_{0,1} + p_{1,1}r + p_{2,1}r^2 + \dots + p_{\sigma-1,1}r^{\sigma-1} = \\ & = P_{0,1} + P_{1,1}R + P_{2,1}R^2 + \dots + P_{\sigma-1,1}R^{\sigma-1} \\ & p_{0,2} + p_{1,2}r + p_{2,2}r^2 + \dots + p_{\sigma-1,2}r^{\sigma-1} = \\ & = P_{0,2} + P_{1,2}R + P_{2,2}R^2 + \dots + P_{\sigma-1,2}R^{\sigma-1} \\ & p_{0,3} + p_{1,3}r + p_{2,3}r^2 + \dots + p_{\sigma-1,3}r^{\sigma-1} = \\ & = P_{0,3} + P_{1,3}R + P_{2,3}R^2 + \dots + P_{\sigma-1,3}R^{\sigma-1}, \dots \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Funkcje $p_0, p_1, p_2 \dots$, czyli $p_{0,0}, p_{1,0}, p_{2,0} \dots$ są dane, zatem i funkcje $p_{0,1}, p_{1,1}, p_{2,1} \dots p_{0,2}, p_{1,2}, p_{2,2} \dots p_{0,3}, p_{1,3}, p_{2,3} \dots$ są wiadome. Zawierają one według poprzedzającego nie większą ilość pierwiastników jak $p_0, p_1, p_2 \dots$. Uważając zatem lewe strony ostatniego układu równań za wiadome, widzimy, że równania te są liniowe ze względu na $R, R^2, R^3 \dots$ a te w powyższym układzie równań (17) za niewiadome uchodzić mogą. Otrzymamy je przeto rozwiązując ostatni układ równań wraz z równaniem (16) wyrażone wymiennie zapomocą znanych pierwiastników i funkcji $P_{0,0}, P_{1,0}, P_{2,0} \dots P_{0,1}, P_{1,1}, P_{2,1} \dots P_{0,2}, P_{1,2}, P_{2,2} \dots$ i t. d., a te wartości podstawione w rozwinięcie (14') sprawią, że pierwiastnika R we funkcji $A_{\mu', m'}$ zupełnie się pozbędziemy, a więc liczbę wszystkich pierwiastników zawartych we funkcji $A_{\mu', m'}$ o jednąś zmniejszymy (przypuściwszy z góry, że w niej znane pierwiastniki funkcji $A_{\mu, m}$ były już zawarte). Lecząc ilość pierwiastników z funkcji algebraicznych rzędu $(\mu-1)$ go, jakie zawiera funkcja $A_{\mu, m}$ jest m , ilość ich [oczywiście z funkcji algebraicznych rzędu $(\mu'-1)$] jakie funkcja $A_{\mu', m'}$ zawiera, jest m' , przeto ilość m' według poprzedniego daje się zniżyć o jednąś, następnie o drugą jednąś, więc o dwie jedności, trzy jedności $\dots m'$ jedności, a funkcja $A_{\mu', m'}$ rzędu μ' go stanie się funkcją rzędu $(\mu'-1)$ go. Jednak zakładając wyrażenie (14), mogliśmy z góry przypuścić, że rząd μ' funkcji $A_{\mu', m'}$ został sprowadzonym do najmniejszej możliwej liczby, t. j. założyć, że funkcja ta była nieredukowalną na inną funkcję $A_{\mu'', m''}$ niższego rzędu tak, że $\mu'' < \mu'$, jako też, że rząd funkcji $A_{\mu', m'}$ był większym niż rząd

danej funkcji $A_{\mu, m}$. W przeciwnym bowiem razie uważając w układzie równań (17) pierwiastniki $r, r^2, r^3 \dots$ za niewiadome, wyrazilibyśmy je wymiennie zapomocą funkcji niższego rzędu $P_{0,1}, P_{1,1}, P_{2,1} \dots P_{0,2}, P_{1,2}, P_{2,2} \dots P_{0,3}, P_{1,3}, P_{2,3} \dots$ i t. d. i pierwiastnika R , o którym w takim razie zawsze przypuszczać można, iż jest zwartym we funkcjach $p_{0,0}, p_{1,0} \dots p_{0,1}, p_{1,1} \dots p_{0,2}, p_{1,2} \dots$ a to jest możliwem. Zakładając przeto:

$$\mu' > \mu$$

dochodzimy do przekonania, że w takim razie μ' daje się zniżyć o jedność, zatem także o dwie jedności $\dots$ a ponieważ nie może być $\mu' < \mu$, przeto zniżenie to doprowadzi do równania

$$\mu' = \mu.$$

Według tego, co poprzednio powiedzieliśmy, funkcja $A_{\mu', m'}$ nie zawiera innych pierwiastników jak tylko te, które we funkcji $A_{\mu, m}$ są już zawarte, w przeciwnym bowiem razie, niezawarte w ostatniej, sposobem jaki podaliśmy, dałyby się wyrazić wymiennie we funkcji pozostałych, a to jest niemożliwem, gdyż obie funkcje $A_{\mu, m}$, $A_{\mu', m'}$ są nieredukowalne. Zatem konieczne także

$$m' = m;$$

rozwijając funkcję $A_{\mu', m'}$ według tego pierwiastnika, według którego funkcja $A_{\mu, m}$ jest już rozwiniętą (co od nas zależało) i ograniczywszy to rozwinięcie wiadomym sposobem do σ członów, otrzymamy rozwinięcie funkcji $A_{\mu', m'}$

$$A_{\mu', m'} = P_0 + P_1 r + P_2 r^2 + \dots + P_{\sigma-1} r^{\sigma-1}$$

tak, że

$$R = r, \quad s = \sigma,$$

co było do dowiedzenia.

Mamy zatem bardzo ogólne i godne uwagi twierdzenie:

Jeżeli całka ogólnej funkcji algebraicznej jest wyrażalną algebraicznie, wyrażeniem jej jest funkcja algebraiczna przystająca do danej, równa jej rzędem i stopniem.

Pociąga to za sobą twierdzenie:

Jeżeli wielokrotna całka funkcji algebraicznej jest wyrażalną algebraicznie, wyrażeniem jej będzie funkcja algebraiczna przystająca do danej, równa jej rzędem i stopniem.

Twierdzenie to zawiera w sobie w całej ogólności znajome twierdzenie Abła — Liouville'a ¹⁾:

Jeżeli całka

$$\int \sqrt[m]{N} \cdot dx$$

gdzie N jest funkcją wymierną zmiennej niezależnej x , jest wyrażalną algebraicznie; wyrażeniem jej będzie

$$\int \sqrt[m]{N} dx = p \sqrt[m]{N} + \text{stała}$$

gdzie p jest funkcją wymierną.

Powyższe twierdzenie zawiera w sobie całą teorię algebraicznej całkowalności funkcji algebraicznych budowanych wymiennie z pierwiastników funkcji wymiernych. Takie funkcje będące, jak łatwo widzieć, funkcjami algebraicznymi pierwszego rzędu, (według nomenklatury Abła) nazywa pan Liouville algebraicznymi pierwszego rodzaju (*fonctions irrationnelles de première espèce*), a badając ich całkowalność w sposób podobny do powyższego, dochodzi do rezultatów podobnych, atoli mniej ogólnych ²⁾. Pan Liouville zapowiada wprawdzie, iż swoją teorię później uzupełni i do funkcji „drugiego, trzeciego . . . rodzaju,“ zastosuje mówiąc: „...On peut étendre cette méthode aux fonctions irrationnelles de seconde ou de troisième espèce, et en général à une fonction algébrique quelconque: c'est ce que je prouverai dans un autre écrit; mais le théorème doit alors être présentée sous un point de vue un peu différent . . .“, lecz o ile mi wiadomo, takowa praca ogłoszona nie została (przynajmniej dla funkcji rozwikłanych). Jak już wspomniałem, z równą łatwością i ogólnością daje się wynaleźć twierdzenie o całkowalności funkcji algebraicznych zapomocą funkcji algebraicznych i pewnych przestępnych $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$. . . takich, jakie umówimy się za zasadnicze uważać. Do wyprowadzenia jednak odnośnych wzorów potrzebnem jest bliższe zbadanie

¹⁾ Abel O'Euvers completes t. I.

Liouville Journal für die reine u. ang. Math. her. v. Crelle t. X. pag. 347.

Folkierski Zasady rachunku różniczkowego i całkowego t. II. pag. 177.

²⁾ Journal de l'Ecole polytechnique t. XIV. cahier 22. pag. 139 i nast.

własności tychże przestępnych, a z tego powodu obecnie zająć się tem nie możemy.

Prawa, jakie w ten sposób powstają, są niezawodnie najogólniejszemi, jakie analiza na wyrażalność funkcyj algebraicznych przestępnymi rachunku całkowego zdoła dostarczyć.¹⁾

6. Zatrzymamy się jeszcze chwilę przy tym przedmiocie, aby wyprowadzić kilka uwagi godnych twierdzeń. Okażemy nasamprzód, że ostatnie twierdzenia są odwracalne, t. j. że istnieje twierdzenie:

Jeżeli całka funkcji algebraicznej nie daje się wyrazić funkcją algebraiczną przystającą do danej, równą jej rzędem i stopniem — całka nie jest wyrażalną algebraicznie.

Bo, gdyby była wyrażalna algebraicznie, kształt jej mocą poprzedniego twierdzenia byłby do danej funkcji przystającym, równy jej rzędem i stopniem, a to się sprzeciwia założeniu.

7. T w i e r d z e n i e. Jeżeli całka ogólnej funkcji algebraicznej jest wyrażalną algebraicznie

$$\int (p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_{\sigma-1} r^{\sigma-1}) dx = \\ = P_0 + P_1 r + P_2 r^2 + \dots + P_{\sigma-1} r^{\sigma-1}$$

(według twierdzeń poprzedzających); wyrażenie takowe jest tylko jedno możliwe.

Gdyby istniało drugie jeszcze wyrażenie, to mocą poprzedniego posiadałoby postać

$$\int (p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_{\sigma-1} r^{\sigma-1}) = \\ = Q_0 + Q_1 r + Q_2 r^2 + \dots + Q_{\sigma-1} r^{\sigma-1}$$

skąd założywszy, co jest koniecznem

$$Q_0 \leq P_0, \quad Q_1 \leq P_1, \quad Q_2 \leq P_2 \dots$$

odejmując, otrzymalibyśmy

¹⁾ Miedzy innemi postawiłem sobie pytanie, czy wszelka funkcja przestępna da się zbudować sposobami rachunku całkowego, czy też nie. Mimo, że nie udało mi się dotąd znaleźć zaspakajającej odpowiedzi na to pytanie, to jednak, jeśli się nie mylę, znajduję się na tropie rozwiązania,

$$(P_0 - Q_0) + (P_1 - Q_1)r + (P_2 - Q_2)r^2 + \dots + (P_{\sigma-1} - Q_{\sigma-1})r^{\sigma-1} = 0,$$

czyli krócej

$$(18) \quad \pi_0 + \pi_1 r + \pi_2 r^2 + \dots + \pi_{\sigma-1} r^{\sigma-1} = 0.$$

Pisząc to równanie w postaci

$$(18') \quad \pi_{0,0} + \pi_{1,0}r + \pi_{2,0}r^2 + \dots + \pi_{\sigma-1,0}r^{\sigma-1} = 0$$

i bacząc, że mocą uczynionego założenia ma być ono nieidentycznym, otrzymamy zeń kolejnem różniczkowaniem równania

$$(19) \quad \begin{cases} \pi_{0,1} + \pi_{1,1}r + \pi_{2,1}r^2 + \dots + \pi_{\sigma-1,1}r^{\sigma-1} = 0 \\ \pi_{0,2} + \pi_{1,2}r + \pi_{2,2}r^2 + \dots + \pi_{\sigma-1,2}r^{\sigma-1} = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

nieidentyczne również w takiej liczbie, w jakiej tylko nam by się podobało.

Funkcye $\pi_0, \pi_1, \pi_2 \dots$ zatem także i $\pi_{0,0}, \pi_{1,0}, \pi_{2,0} \dots \pi_{0,1}, \pi_{1,1}, \pi_{2,1} \dots \pi_{0,2}, \pi_{1,2}, \pi_{2,2} \dots$ i t. d. są jak widać funkcjami algebraicznymi μ go rzędu, $(m-1)$ go stopnia. Z układu równań (19) i z równania (18') eliminacją pozbędziemy się wszystkich potęg pierwiastnika r z wyjątkiem jednej, a ta wyrażoną oczywiście zostanie wymiernie zapomocą ilości π . Podstawiając te wartości na $r, r^2, r^3 \dots$ w wyrażenie powyższe na całkę szukaną, otrzymalibyśmy po prawej stronie funkcję algebraiczną μ go rzędu, $(m-1)$ go stopnia, a to się sprzeciwia założeniu. Równanie (18) jest tedy identycznością, t. j.

$$\pi_0 = 0, \pi_1 = 0, \pi_2 = 0 \dots \pi_{\sigma-1} = 0$$

czyli

$$P_0 = Q_0, P_1 = Q_1, P_2 = Q_2 \dots P_{\sigma-1} = Q_{\sigma-1}$$

co było do dowiedzenia.

8. Teorya powyższa dozwala jeszcze znamienitego uproszczenia, które teraz okażemy. Różniczkując identyczność

$$\begin{aligned} & \int (p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_{\sigma-1} r^{\sigma-1}) dx \\ & = P_0 + P_1 r + P_2 r^2 + \dots + P_{\sigma-1} r^{\sigma-1} \end{aligned}$$

otrzymamy równanie

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_{\sigma-1} r^{\sigma-1} = \\ = P_0 + (P_1 + P_1 \Theta) r + (P_2 + 2P_2 \Theta) r^2 + \dots + \\ + (P_{\sigma-1} + (\sigma-1) P_{\sigma-1} \Theta) r^{\sigma-1}, \end{aligned}$$

które z tego samego powodu musi być identycznością. W przeciwnym bowiem razie, kolejnem różniczkowaniem wydostalibyśmy stąd szereg nieidentycznych równań liniowych co do $r, r^2, r^3, \dots, r^{\sigma-1}$, zapomocą których te ilości z wyrażenia na funkcję algebraiczną A zostałyby zupełnie wyrugowanemi, co jest niemożliwem. Oczywiście, że tutaj jak poprzednio

$$r^{\sigma} = q, \quad \Theta = \frac{q'}{\sigma q}.$$

Z ostatniej identyczności wypada

$$\begin{aligned} p_0 &= P_0 \\ p_1 &= P_1 + P_1 \Theta \\ p_2 &= P_2 + 2P_2 \Theta \\ &\dots \dots \dots \text{i t. d.;} \end{aligned}$$

mnożąc którekolwiek z tych równań, n. p, s te przez $r^s dx$ i całkując, otrzymamy

$$\begin{aligned} \int p_s r^s dx &= \int [P_s + sP_s \Theta] r^s dx \\ (s=0, 1, 2, 3 \dots) \end{aligned}$$

a ponieważ

$$\frac{d(P_s r^s)}{dx} = P_s r^s + sP_s \frac{q'}{\sigma q} r^s = (P_s + sP_s \Theta) r^s,$$

przeto

$$\int p_s r^s dx = P_s r^s$$

dla $s=0, 1, 2, 3 \dots (\sigma-1)$.

Mamy zatem następujące uwagi godne twierdzenie:
Jeżeli całka ogólnej funkcji algebraicznej

$$\int (p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_{\sigma-1} r^{\sigma-1}) dx$$

gdzie

$$r^b = q$$

jest wyrażalną algebraicznie, to każda z jej części składowych

$$\int p_0 dx, \int p_1 r dx, \int p_2 r^2 dx \dots \int p_{\sigma-1} r^{\sigma-1} dx$$

musi być osobno wyrażalną algebraicznie. Co gdy się uskuteczni, wyrażeniem każdej z nich będzie

$$P_0, P_1 r, P_2 r^2, \dots, P_{\sigma-1} r^{\sigma-1}.$$

9. Znajdziemy jeszcze ciekawy kształt warunków całkowalności algebraicznej, funkcji $A_{\mu, m}$ i warunek, który gdy się spełnia, całka funkcji stanowi przestępną.

Oznaczywszy dla krótkości funkcję $A_{\mu, m}$ przez u , t. j. kładąc

$$(20) \quad u = p_{0,0} + p_{1,0}r + p_{2,0}r^2 + \dots + p_{\sigma-1,0}r^{\sigma-1},$$

to różniczkowaniem kolejnem otrzymamy następujący układ równań

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} u' = p_{0,1} + p_{1,1}r + p_{2,1}r^2 + . . . + p_{\sigma-1,1}r^{\sigma-1} \\ u'' = p_{0,2} + p_{1,2}r + p_{2,2}r^2 + . . . + p_{\sigma-1,2}r^{\sigma-1} \\ \\ u^{(\sigma-2)} = p_{0,(\sigma-2)} + p_{1,(\sigma-2)}r + p_{2,(\sigma-2)}r^2 + \dots + p_{\sigma-1,(\sigma-2)}r^{\sigma-1} \\ u^{(\sigma-1)} = p_{0,\sigma-1} + p_{1,\sigma-1}r + p_{2,\sigma-1}r^2 + . . . + p_{\sigma-1,\sigma-1}r^{\sigma-1} \end{array} \right.$$

gdzie funkcje $p_{0,0}$, $p_{1,0}$. . . $p_{0,1}$, $p_{1,1}$. . . są algebraicznymi
równego rzędu z u , stopnia o jedność niższego. Układ równań
(21) w ilości $(\sigma-1)$ jest co do ilości r , r^2 , r^3 . . . $r^{\sigma-1}$ uwa-
żanych za niewiadome liniowym, a te ilości łatwo stąd się dają
wynaieść. Oznaczwszy wyznacznik układu równań (21)

$$(22) \quad \left| \begin{array}{cccccccccccc} p_{1,1}, & p_{2,1}, & p_{3,1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{\sigma-1,1} \\ p_{1,2}, & p_{2,2}, & p_{3,2} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{\sigma-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{1,\sigma-2}, & p_{2,\sigma-2}, & p_{3,\sigma-2} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{\sigma-1,\sigma-2} \\ p_{1,\sigma-1}, & p_{2,\sigma-1}, & p_{3,\sigma-1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{\sigma-1,\sigma-1} \end{array} \right| = \nabla$$

otrzymamy na wyrażenie jednej z powyższych nie wiadomych wyrażenie

$$(23) \quad \begin{aligned} & r^k \cdot \nabla \\ &= U_{1,k}(u' - p_{0,1}) + U_{2,k}(u'' - p_{0,2}) + \dots + \\ &+ U_{\sigma-2,k}(u^{(\sigma-2)} - p_{0,\sigma-2}) + U_{\sigma-1,k}(u^{(\sigma-1)} - p_{0,\sigma-1}) \end{aligned}$$

gdzie $U_{1,k}, U_{2,k} \dots$ oznaczają oczywiście minory wyznacznika ∇ . Te minory są, jak algebra uczy, wymiernymi i całkowitymi funkcjami ilości, z których są zbudowane, t. j. wszystkich ilości p , a ponieważ te są funkcjami algebraicznymi μ go rzędu, $(m-1)$ go stopnia, przeto i owe minory są takież funkcjami. Podobnie wyrażenie

$$U_{0,k} = - (U_{1,k}p_{0,1} + U_{2,k}p_{0,2} + \dots + U_{(\sigma-2),k}p_{0,\sigma-2} + U_{(\sigma-1),k}p_{0,\sigma-1})$$

jest funkcją algebraiczną μ go rzędu, $(m-1)$ go stopnia, oznaczając tedy takie funkcje przez $U_{0,k}, U_{1,k}, U_{2,k} \dots U_{\sigma-1,k}$, otrzymamy

$$(24) \quad \begin{aligned} & r^k \cdot \nabla \\ &= U_{0,k} + U_{1,k}u' + U_{2,k}u'' + \dots + U_{(\sigma-2),k}u^{(\sigma-2)} + U_{\sigma-1,k}u^{(\sigma-1)}, \end{aligned}$$

wyrażenie, które w dalszym ciągu tych poszukiwań okazuje się użytecznem.

Powyższe twierdzenie jest zawsze możliwem i daje wyrażenie na r^k ($k=1, 2, 3 \dots \sigma-1$), jeżeli tylko

$$(25) \quad \nabla \leq 0.$$

Aby otrzymać wyrażenie funkcji u zapomocą pochodnych $u', u'', u''' \dots u^{(\sigma-1)}$, wystarczyłoby wartości z równania (24) dla $k=1, 2, 3 \dots (\sigma-1)$ wypadające podstawić w równanie (20). Można to uczynić także w ten sposób, że do układu równań (21) wliczymy jeszcze równanie (20): otrzymamy w ten sposób σ równań między $(\sigma-1)$ niewiadomymi $r, r^2, r^3 \dots r^{\sigma-1}$ współistniejących, co pociąga za sobą, jak wiadomo, jako konieczne następstwo, aby wyznacznik całego układu był zerem, t. j.

¹⁾ Wykazaliśmy poprzednio, że iloczyn, a nawet iloraz takich funkcji może być przedstawionym w kształcie znowu takiej funkcji.

$$\begin{vmatrix} p_{0,0}-u, & p_{1,0}, & p_{2,0} & \dots & p_{\sigma-1,0} \\ p_{0,1}-u', & p_{1,1}, & p_{2,1} & \dots & p_{\sigma-1,1} \\ p_{0,2}-u'', & p_{1,2}, & p_{2,2} & \dots & p_{\sigma-1,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{0,\sigma-2}-u^{(\sigma-2)}, & p_{1,\sigma-2}, & p_{2,\sigma-2} & \dots & p_{\sigma-1,\sigma-2} \\ p_{0,\sigma-1}-u^{(\sigma-1)}, & p_{1,\sigma-1}, & p_{2,\sigma-1} & \dots & p_{\sigma-1,\sigma-1} \end{vmatrix} = 0$$

Rozwijając ten wyznacznik minorami według pierwszego rządka pionowego, otrzymamy wyrażenie kształtu

$$V_{0,0}(p_{0,0}-u) + V_{0,1}(p_{0,1}-u') + V_{0,2}(p_{0,2}-u'') + \dots + \\ + V_{0,\sigma-1}(p_{0,\sigma-1}-u^{(\sigma-1)}) = 0,$$

gdzie $V_{0,0}, V_{0,1}, \dots$ są jak widać funkcjami algebraicznymi μ go rzędu, $(m-1)$ go stopnia. To równanie uporządkowane daje

$$V_{0,0}u + V_{0,1}u' + V_{0,2}u'' + \dots + V_{0,\sigma-1}u^{(\sigma-1)} = V$$

gdzie

$$V = p_{0,0}V_{0,0} + p_{0,1}V_{0,1} + p_{0,2}V_{0,2} + \dots + p_{0,\sigma-1}V_{0,\sigma-1}$$

jest funkcją algebraiczną rzędu i stopnia funkcji $V_{0,0}, V_{0,1}, \dots$; albo opuszczając dla krótkości pierwszy ze znaczków funkcji V

$$(26) \quad V_0u + V_1u' + V_2u'' + V_3u''' + \dots + \\ + V_{\sigma-2}u^{(\sigma-2)} + V_{\sigma-1}u^{(\sigma-1)} = V$$

$$(27) \quad V = p_{0,0}V_0 + p_{0,1}V_1 + p_{0,2}V_2 + \dots + p_{0,\sigma-1}V_{\sigma-1}.$$

Równanie (26) ostoi się jeszcze, jeżeli obie strony jego pomnożymy przez $\Theta \cdot dx$ i nieoznaczenie całkować będziemy, t. j.

$$\int \Theta V_0 u dx + \int \Theta V_1 u' dx + \int \Theta V_2 u'' dx + \dots + \\ + \int \Theta V_{\sigma-2} u^{(\sigma-2)} dx + \int \Theta V_{\sigma-1} u^{(\sigma-1)} dx = \int \Theta \cdot V dx$$

gdzie Θ jest pewną funkcją samego x , której wyznaczenie zastrzegamy sobie na później.

Położmy dla skrócenia

$$\Theta \cdot V_s = W_s, \quad \Theta \cdot V = W$$

i zauważmy ogólny człon ostatniego rozwinięcia. Całkowaniem przez części mamy ogólnie

$$\int T u^{(s)} dx = \int T d(u^{(s-1)}) = T u^{(s-1)} - \int T' u^{(s-1)} dx,$$

a podług tego wzoru typowego znajdziemy dla $s = \sigma - 1$, $T = W_s$

$$\begin{aligned} & \int W dx \\ &= \int W_0 u dx + \int W_1 u' dx + \int W_2 u'' dx + \int W_3 u''' dx + \dots + \\ & \quad + \int W_{(\sigma-2)} u^{(\sigma-2)} dx + W_{\sigma-1} u^{(\sigma-2)} - \int W'_{\sigma-1} u^{(\sigma-2)} dx \\ &= \int W_0 u dx + \int W_1 u' dx + \int W_2 u'' dx + \int W_3 u''' dx + \dots + \\ & \quad + \int [W_{(\sigma-2)} - W'_{(\sigma-1)}] u^{(\sigma-2)} dx + W_{\sigma-1} u^{(\sigma-2)}. \end{aligned}$$

Zakładając teraz

$$s = \sigma - 2, \quad T = W_{(\sigma-2)} - W'_{(\sigma-1)}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} & \int W dx \\ &= \int W_0 u dx + \int W_1 u' dx + \int W_2 u'' dx + \int W_3 u''' dx + \dots + \\ & \quad + \int W_{(\sigma-3)} u^{(\sigma-3)} dx + \\ & \quad + [W_{(\sigma-2)} - W'_{(\sigma-1)}] u^{(\sigma-3)} - \int [W'_{(\sigma-2)} - W''_{(\sigma-1)}] u^{(\sigma-3)} dx + \\ & \quad + W_{(\sigma-1)} u^{(\sigma-2)} = \\ & \int W_0 u dx + \int W_1 u' dx + \int W_2 u'' dx + \int W_3 u''' dx + \dots + \\ & \quad + \int W_{(\sigma-4)} u^{(\sigma-4)} dx + \\ & \quad + \int [W_{(\sigma-3)} - W'_{(\sigma-2)} + W''_{(\sigma-1)}] u^{(\sigma-3)} dx + \\ & \quad + [W_{(\sigma-2)} - W'_{(\sigma-1)}] u^{(\sigma-3)} + W_{(\sigma-1)} u^{(\sigma-2)} \end{aligned}$$

Biorąc tu znowu

$$s = \sigma - 3, \quad T = W_{(\sigma-3)} - W'_{(\sigma-2)} + W''_{(\sigma-1)}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} & \int W dx \\ = & \int W_0 u dx + \int W_1 u' dx + \int W_2 u'' dx + \int W_3 u''' dx + \dots + \\ & + \int W_{(\sigma-5)} u^{(\sigma-5)} dx + \\ & + \int W_{(\sigma-4)} u^{(\sigma-4)} dx + [W_{(\sigma-3)} - W'_{(\sigma-2)} + W''_{(\sigma-1)}] u^{(\sigma-4)} - \\ & - \int [W'_{(\sigma-3)} - W''_{(\sigma-2)} + W'''_{(\sigma-1)}] u^{(\sigma-4)} dx + \\ & + [W_{(\sigma-2)} - W'_{(\sigma-1)}] u^{(\sigma-3)} + W_{(\sigma-1)} u^{(\sigma-2)} \\ = & \int W_0 u dx + \int W_1 u' dx + \int W_2 u'' dx + \int W_3 u''' dx + \dots + \\ & + \int W_{(\sigma-5)} u^{(\sigma-5)} dx + \\ & + \int [W_{(\sigma-4)} - W'_{(\sigma-3)} + W''_{(\sigma-2)} - W'''_{(\sigma-1)}] u^{(\sigma-4)} dx + \\ & + [W_{(\sigma-3)} - W'_{(\sigma-2)} + W''_{(\sigma-1)}] u^{(\sigma-4)} + \\ & + [W_{(\sigma-2)} - W'_{(\sigma-1)}] u^{(\sigma-3)} + W_{(\sigma-1)} u^{(\sigma-2)} \end{aligned}$$

i t. d.

Prowadząc dalej powyższą redukcję, dojdziemy wreszcie do równania

$$(28) \left\{ \begin{aligned} & \int W dx \\ = & \int \left\{ W_0 - W'_1 + W''_2 - W'''_3 + \dots + (-1)^{\sigma-1} W_{(\sigma-1)} \right\} u dx \\ & + [W_1 - W'_2 + W''_3 - \dots + (-1)^{\sigma-2} W_{(\sigma-1)}] u \\ & + [W_2 - W'_3 + \dots + (-1)^{\sigma-3} W_{(\sigma-1)}] u' \\ & + [W_3 - W'_4 + \dots + (-1)^{\sigma-4} W_{(\sigma-1)}] u'' \\ & \dots \dots \dots \\ & + [W_{(\sigma-2)} - W'_{(\sigma-1)}] u^{(\sigma-3)} + W_{(\sigma-1)} u^{(\sigma-2)} \end{aligned} \right.$$

Oznaczmy dla krótkości

$$(29) \quad W_0 - W'_1 + W''_2 - W'''_3 + \dots + (-1)^{\sigma-1} W^{(\sigma-1)}_{\sigma-1} = S,$$

jak również współczynniki pochodnych $u^{(0)}, u', u'' \dots u^{(\sigma-2)}$ w rozwinięciu (28) przez $-t_0, -t_1, -t_2 \dots -t_{\sigma-2}$, otrzymamy

$$(28') \quad \int S u dx = \int W dx + t_0 u + t_1 u' + t_2 u'' + \dots + t_{\sigma-2} u^{(\sigma-2)}$$

godne uwagi wyrażenie całki z funkcji algebraicznej μ -go rzędu zapomocą całki niższego o jedność rzędu i pochodnych danej funkcji u .

Podstawiając tu z poprzedniego układu równań wartości na $u, u', u'' \dots u^{(\sigma-2)}$, otrzymamy po uporządkowaniu według potęg pierwiastnika r rezultat kształtu

$$(28'') \quad \int S u dx = \int W dx + Q_0 + Q_1 r + Q_2 r^2 + \dots + Q_{\sigma-1} r^{\sigma-1}.$$

Jeżeli mamy stąd znaleźć szukaną całkę $\int u dx$, musimy żądać, aby S było ilością stałą, t. j. aby

$$W_0 - W'_1 + W''_2 - W'''_3 + \dots + (-1)^{\sigma-1} W^{(\sigma-1)}_{\sigma-1} = k$$

a ponieważ

$$W_s = \Theta \cdot V_s$$

przeto

$$(30) \quad \Theta \cdot V_0 - \frac{d}{dx} (\Theta \cdot V_1) + \frac{d^2}{dx^2} (\Theta \cdot V_2) - \frac{d^3}{dx^3} (\Theta \cdot V_3) + \dots + (-1)^{\sigma-1} \frac{d^{(\sigma-1)}}{dx^{\sigma-1}} (\Theta \cdot V_{\sigma-1}) = k$$

Jeżeli to równanie się spełnia, t. j. jeżeli nieoznaczona dotąd funkcja Θ , dogadza temu równaniu różniczkowemu, wyrażeniem szukanej całki będzie

$$(28''') \quad k \int u dx = \int W dx + Q_0 + Q_1 r + Q_2 r^2 + \dots + Q_{\sigma-1} r^{\sigma-1},$$

gdzie oczywiście w ilościach $W, Q_0, Q_1, Q_2 \dots Q_{\sigma-1}$, za Θ podstawić należy wartość tej funkcji, jaka po całkowaniu z równania różniczkowego (30) wypada.

Szukajmy kształtu funkcji $Q_0, Q_1, Q_2 \dots Q_{\sigma-1}$. Mamy nasamprzód według poprzedniego

Summa

znajdująca się po prawej stronie równania (28') dla $S=k$, przedstawi się podług równań poprzednich w postaci

a przez porównanie otrzymuje się stąd

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} Q_0 = t_0 p_{0,0} + t_1 p_{0,1} + t_2 p_{0,2} + \dots + t_{\sigma-2} p_{0, \sigma-2} \\ Q_1 = t_0 p_{1,0} + t_1 p_{1,1} + t_2 p_{1,2} + \dots + t_{\sigma-2} p_{1, \sigma-2} \end{array} \right.$$

Równania (31) napiszemy jeszcze wyraźniej tak:

[illegible]

Bacząc na równania (31') i (32) widzimy, że funkcye Q ze względu na Θ i pochodne tej funkcji są linijnymi, t. j., że następujący ogólny kształt ma miejsce

$$(34) \quad Q_k = q_0 \Theta + q_1 \Theta' + q_2 \Theta'' + \dots + q_{(\sigma-2)} \Theta^{(\sigma-2)},$$

które równanie daje się zużytkować przy rozważaniu przestępnych mogących powstać całkowaniem $\int u dx$.

10. Jeżeli całka $\int u dx$ ma być wyrażalną algebraicznie, to $\int W dx$ i wszystkie ilości $Q_0, Q_1, Q_2 \dots$ muszą dać się wyrazić algebraicznie. W przeciwnym bowiem razie, wiedząc, iż algebraicznym kształtem całki $k \int u dx$ jest według poprzedniego

$$k \int u dx = P_0 + P_1 r + P_2 r^2 + \dots + P_{\sigma-1} r^{(\sigma-1)}$$

otrzymalibyśmy odejmując to równanie od (28'')

$$\begin{aligned} \int W dx + (Q_0 - P_0) + (Q_1 - P_1)r + (Q_2 - P_2)r^2 + \dots + \\ + (Q_{\sigma-1} - P_{\sigma-1})r^{(\sigma-1)} = 0 \end{aligned}$$

albo krócej

$$\int W dx + \pi_0 + \pi_1 r + \pi_2 r^2 + \dots + \pi_{\sigma-1} r^{\sigma-1} = 0.$$

To równanie żąda nasamprzód, aby całka $\int W dx$ była wyrażalną algebraicznie; różniczkowaniem następnie pozbedziemy się całki $\int W dx$, a stąd kolejnem różniczkowaniem, otrzymamy szereg równań kształtu

$$\pi_0 + \pi_1 r + \pi_2 r^2 + \dots + \pi_{\sigma-1} r^{\sigma-1} = 0$$

skąd oczywiście pierwiastnik r dałby się wyrazić we funkcji wymiernej reszty pierwiastników, tak, że liczba pierwiastników całki $\int u dx$ zmniejszyłaby się o jedność, co jest niemożliwem.

Zatem oba wyrażenia na całkę $\int u dx$ nie mogą być różniami,

co żąda, aby funkcyje $Q_0, Q_1, Q_2 \dots$ były algebraicznymi, nadto, aby

$$Q_1 = P_1, \quad Q_2 = P_2 \dots \int W dx + Q_0 = P_0.$$

Aby to być mogło, potrzeba (34), aby funkcyja Θ wyznaczona równaniem różniczkowym była najwyższej algebraiczną μ go rzędu $(m-1)$ go stopnia. Tylko wówczas bowiem pochodne $\Theta', \Theta'' \dots$ są tego samego rzędu i stopnia, a więc i funkcyje $Q_0, Q_1, Q_2 \dots$ także μ go rzędu $(m-1)$ go stopnia jak być powinno.

Twierdzimy teraz, że, jeżeli całka jest algebraicznie wyrażalną, funkcyja Θ jest wymierną samej zmiennej niezależnej x .

W istocie założmy

$$\Theta = \pi_0 + \pi_1 R + \pi_2 R^2 + \dots + \pi_{\nu-1} R^{\nu-1}$$

$$R^\nu = Q$$

gdzie π_0, π_1, π_2 są funkcyjami algebraicznymi μ go rzędu $(m-2)$ go stopnia, Q algebraiczną $(\mu-1)$ go rzędu, ν liczbą całkowitą dodatnią i pierwotną. Wyrażenie to piszemy dla symetrii z poniższymi równaniami tak

$$(35) \quad \Theta = \pi_{0,0} + \pi_{1,0} R + \pi_{2,0} R^2 + \dots + \pi_{\nu-1,0} R^{\nu-1}$$

skąd kolejnem różniczkowaniem wyprowadzamy

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta' = \pi_{0,1} + \pi_{1,1} R + \pi_{2,1} R^2 + \dots + \pi_{\nu-1,1} R^{\nu-1} \\ \Theta'' = \pi_{0,2} + \pi_{1,2} R + \pi_{2,2} R^2 + \dots + \pi_{\nu-1,2} R^{\nu-1} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

i t. d.

Równanie warunkowe (30) po rozwinięciu wskazanych tam różniczkowań iloczynu przybierze postać

$$(30') \quad T_0 \Theta + T_1 \Theta' + T_2 \Theta'' + \dots + T_{\sigma-1} \Theta^{(\sigma-1)} = k$$

mnożąc teraz równanie (35) przez T_0 , równania (36) odpowiednio przez $T_1, T_2 \dots$ i dodając je stronami do siebie, otrzymamy z uwagi na ostatnie równanie

$$\left. \begin{aligned} & [T_0\pi_{0,0} + T_1\pi_{0,1} + T_2\pi_{0,2} + \dots + T_{c-1}\pi_{0,(c-1)} - k] \\ & + [T_0\pi_{1,0} + T_1\pi_{1,1} + T_2\pi_{1,2} + \dots + T_{c-1}\pi_{1,(c-1)}]R \\ & + [T_0\pi_{2,0} + T_1\pi_{2,1} + T_2\pi_{2,2} + \dots + T_{c-1}\pi_{2,(c-1)}]R^2 \\ & + \dots \end{aligned} \right\} = 0$$

Równanie to musi być identycznym ze względu na pierwiastnik R ; w przeciwnym bowiem razie pisząc je w postaci krótszej

$$M_0 + M_1 R + M_2 R^2 + \dots + M_{\nu-1} R^{\nu-1} = 0$$

kolejnym różniczkowaniem otrzymalibyśmy $(\nu-1)$ równań co do R , R^2 . . . $R^{\nu-1}$ liniowych, skąd te ostatnie ilości wymierne we funkcji ilości M_0 , M_1 , M_2 . . . i pochodnych tych ilości wyznaczyć się dały: po podstawieniu ich zatem w równanie (35) pozbylibyśmy się zupełnie pierwiastnika R , a tak stopień funkcji Θ dałby się zniżyć o jedność, co jest niemożliwem, gdyż zawsze kształt Θ przypuszczać należy nieredukowalnym. Powyższe rozwinięcie jest przeto identycznością ze względu na pierwiastnik R , a to żąda, aby każdy z jego współczynników z osobna stawał się zerem, t. j.

$$(37) \left\{ \begin{aligned} & T_0\pi_{0,0} + T_1\pi_{0,1} + T_2\pi_{0,2} + \dots + T_{c-1}\pi_{0,c-1} = k \\ & T_0\pi_{1,0} + T_1\pi_{1,1} + T_2\pi_{1,2} + \dots + T_{c-1}\pi_{1,c-1} = 0 \\ & T_0\pi_{2,0} + T_1\pi_{2,1} + T_2\pi_{2,2} + \dots + T_{c-1}\pi_{2,c-1} = 0 \\ & \dots \end{aligned} \right.$$

Jeżeli funkcja Θ na mocy powyżej uczynionego zastrzeżenia jest algebraiczną najwyżej μ go rzędu $(m-1)$ go stopnia; to wszystkie funkcje π_0 , π_1 , π_2 . . . są co najwyżej μ go rzędu $(m-2)$ go stopnia: pierwsze z równań (37) w porównaniu z (30') wykazuje, że ostatniemu równaniu dogadza także funkcja algebraiczna μ go rzędu $(m-2)$ go stopnia. Stąd wynika, że równaniu (30') dogodzi na Θ wartość algebraiczna $(m-2)$ go stopnia, zatem i $(m-3)$ go stopnia i t. d. zerowego stopnia czyli funkcja algebraiczna $(\mu-1)$ go rzędu. Jeżeli przeto równaniu (30') dogodzi funkcja μ go rzędu, to dogodzi mu także funkcja algebraiczna $(\mu-1)$ go rzędu, zatem i $(\mu-2)$ go rzędu, $(\mu-3)$ go rzędu i t. d. zerowego rzędu, t. j. funkcja wymierna x , co było do dowiedzenia.

Co więcej, funkcyje $V_0, V_1, V_2 \dots$ były algebraicznymi μ go rzędu, $(m-1)$ go stopnia; zatem bacząc na równania (30) i (30') funkcyje $T_0, T_1, T_2 \dots$ są również algebraicznymi μ go rzędu, $(m-1)$ go stopnia. Z równań (37) atoli liniowych co do ilości $T_0, T_1, T_2 \dots$ wyrazimy je wymiennie zapomocą funkcyj $\pi_{0,0}, \pi_{0,1}, \pi_{0,2} \dots \pi_{1,0}, \pi_{1,1}, \pi_{1,2} \dots \pi_{2,0}, \pi_{2,1}, \pi_{2,2} \dots$ i t. d. algebraicznych μ go rzędu, $(m-2)$ go stopnia tak, że funkcyje $T_0, T_1, T_2 \dots$ będą algebraicznymi μ go rzędu, $(m-2)$ go stopnia. Stąd wynika, że stopień ostatnich funkcyj daje się zniżyć o jedność, zatem także o dwie jedności, o trzy jedności $\dots$ i t. d. tak, że wreszcie funkcyje te staną się algebraicznymi μ go rzędu, zerowego stopnia czyli algebraicznymi $(\mu-1)$ go rzędu. W podobny sposób przekonamy się, że one mogą być algebraicznymi $(\mu-2)$ go rzędu, $(\mu-3)$ go rzędu i t. d., wreszcie zerowego rzędu, t. j. staną się funkcyami wymiennymi zmiennej niezależnej x .

Zważając, że $W = \Theta \cdot V$, gdzie V zatem i W są funkcyami algebraicznymi μ go rzędu, $(m-1)$ go stopnia, otrzymamy po tem wszystkim twierdzenie:

Całka funkcyi algebraicznej μ go rzędu, m go stopnia, jest wyrażalną algebraicznie, jeżeli znajdzie się funkcyja wymierna Θ taka, która uczyni zadość linijnemu równaniu różniczkowemu (30') rzędu nie wyższego nad $(\sigma-1)y$ o współczynnikach wymiennych zmiennej niezależnej x , a nadto jeżeli całka z algebraicznej μ go rzędu, $(m-1)$ stopnia

$$\int \Theta \cdot V dx = \int W dx = \int u_1 dx$$

jest wyrażalną algebraicznie.

Możemy zatem dalej powiedzieć:

Całka funkcyi algebraicznej μ go rzędu, m go stopnia jest wyrażalną algebraicznie, jeżeli istnieją dwie funkcyje wymierne Θ, Θ_1 , takie, które uczynią zadość liniowym równaniom różniczkowym kształtu (30') rzędu nie wyższego nad $(\sigma-1)y$ i $(\sigma_1-1)y$, a nadto, jeżeli całka z algebraicznej μ go rzędu, $(m-2)$ go stopnia

$$\int \Theta_1 \cdot (V)_1 dx = \int (W)_1 dx = \int u_1 dx$$

jest wyrażalną algebraicznie. Liczba σ_1 jest oczywiście wykładnikiem pierwiastnika, według którego funkcyja $u_1 = W$ została rozwinięta.

Podobnie znajdziemy, że:

Całka funkcyi algebraicznej μ go rzędu, m go stopnia, jest wyrażalną algebraicznie, jeżeli znajdzie się m funkcyj wymiernych $\Theta, \Theta_1, \Theta_2 \dots \Theta_{m-1}$ takich, które uczynią zadość m liniowym równaniom różniczkowym rzędów nie wyższych nad $(\sigma-1)y, (\sigma_1-1)y, (\sigma_2-1)y \dots (\sigma_{m-1}-1)y$, o współczynnikach wymiernych zmiennej niezależnej x (kształtu 30'), a nadto, jeżeli całka z algebraicznej μ go rzędu, zerowego stopnia czyli z algebraicznej $(\mu-1)$ rzędu, m go stopnia

$$\int u_m dx$$

jest wyrażalną algebraicznie.

Zapomocą takiej indukcji dochodzimy oczywiście do twierdzenia:

Całka funkcyi algebraicznej μ go rzędu, m go stopnia jest wyrażalną algebraicznie, jeżeli znajdzie się $(m+m_1+m_2+\dots+m_{\mu-1})$ funkcyj wymiernych takich, które uczynią zadość $(m+m_1+m_2+m_{\mu-1})$ liniowym równaniom różniczkowym rzędów nie wyższych nad wykładniki pierwiastników danej funkcyi o jedność pomniejszone, o współczynnikach wymiernych zmiennej niezależnej x , a nadto jeżeli całka z algebraicznej zerowego rzędu i zerowego stopnia, t. j. ilości stałej, jest wyrażalną algebraicznie (co się zawsze spełnia).

Twierdzenie to nie przynosi wprawdzie bezpośredniej korzyści w teorii całkowania ogólnych funkcyj algebraicznych, jest jednak teoretycznie uwagi godnem i zarazem w teorii równań różniczkowych liniowych stopni ogólnych, o współczynnikach wymiernych zmiennej niezależnej, użytecznem, jak to kiedy będę miał może sposobność okazać.

11. Powyższe rozwinięcia mają ważność, dopóki równania (24) i (26) istnieją. Jak już powyżej nadmieniliśmy, tracą one swą ważność, jeżeli wyznacznik ∇ staje się identycznie zerem: natenczas kształt (28'), a tem bardziej (28'') i (28''') uzyskać się nie daje, a całka nie będąc wyrażalną algebraicznie, stanowi pewną funkcję przestępną. Zatem:

Dostatecznym warunkiem (choć niekoniecznym), aby całkowaniem powstała przestępna, jest

$$\nabla=0,$$

Dodaliśmy „choć niekoniecznym“, gdyż zdarzyć się może, iż wyznacznik ∇ nie staje się identycznie zerem, dalsze atoli warunki algebraicznej całkowalności są niedopełnione, a całka równa się funkcyi przestępnej.

Nie zatrzymujemy się dalej przy tej rzeczy, nadmieniamy tylko, że sam przedmiot zdolny jest bardzo wiele ciekawych rezultatów dostarczyć; a to nader ogólnych i w tej części analizy doniosłych, jak również, że na zasadzie powyższych rozwińnięć, daje się zbudować teoria funkcyj przestępnych, których pochodne są algebraicznymi, misternie przez Abła rozpoczęta ¹⁾ a przez pana Liouville z innego stanowiska uważana. W istocie potrzeba tylko założyć, że wyznacznik ∇ staje się zerem, lub że równaniu różniczkowemu (30) albo (30') wymierną funkcyą na Θ dogodzić nie można i w tym przypuszczeniu badać dalej całkę $\int u dx$. Wyrażenie takiej funkcyi przestępnej, (którą nazywam „pierwszą przestępną“) daje się uzyskać w postaci uwagi godnej, (oczywiście, że nie we formie wyraźnej), w której funkcyja takowa może być poddana bliższemu zbadaniu jej własności (jak dodawanie przestępnych, okresowość i t. p.). Do podobnych rezultatów pod pewnym względem (mianowicie formalnym) prostszych, prowadzi jednak uważanie funkcyj algebraicznych wymiernych i tem zaraz się zajmamy.

Przykładów całkowania szczególnego, do wyłożonej powyżej teorii, nie podajemy, zostawiając to na inny raz, zwracamy tutaj tylko uwagę na kształty, w jakich całki funkcyj algebraicznych w razie algebraicznej wyrażalności się pojawiają w szczególnych razach. Tak n. p.

$$\int \sqrt[n]{p + \sqrt[n]{q}} dx = P \sqrt[n]{p + \sqrt[n]{q}} + \text{stałej}$$

gdzie p i q są funkcyami wymiernymi, a P funkcyą algebraiczną pierwszego rzędu — jak łatwo z podanej teorii wydedukować można. Twierdzenie to i całe mnóstwo podobnych jest analogicznem do znajomego twierdzenia Abła — Liouville'a całek z pierwiastnika funkcyi wymiernej, a jak widać ogólniejszem.

¹⁾ l. c.

Wszystkie odpowiednie twierdzenia, wyprowadzone przez pana Liouville, dadzą się dla całek powyższego kształtu rozogólnić i na przykładach jeszcze bardziej szczegółowych sprawdzić, co w gruncie rzeczy jeszcze wcale ogólnych rezultatów dostarcza. Pozostawiamy to sobie wszelako na inny raz.

II.

Funkcye algebraiczne niewyraźne.

12. Za przewodem Alba, funkcją algebraiczną niewyraźną albo krótko algebraiczną nazwiemy funkcję y ze zmienną niezależną x związaną równaniem

$$(1) \quad a_m y^m + a_{m-1} y^{m-1} + \dots + a_2 y^2 + a_1 y + a_0 = 0$$

gdzie $a_m, a_{m-1} \dots a_2, a_1, a_0$ są wielomianami wymiernymi całkowitymi samej zmiennej x . Taka funkcya, mimo to, że gdy $m > 4$, a współczynniki $a_0, a_1, a_2 \dots$ są ogólnymi, nie daje się wyrazić w postaci algebraicznej wyraźnej, jak to okazali Ruffini ¹⁾ — Abel ²⁾, a wreszcie pan Wanzel, posiada własności zupełnie analogiczne do własności funkcyj algebraicznych we właściwym ich znaczeniu, tak że w badaniu jej całki nie różni się wcale od ostatnich.

Różniczkowanie równania (1) daje

$$(a'_m y^m + a'_{m-1} y^{m-1} + \dots + a'_1 y^2 + a'_0 y) + (m a_m y^{m-1} + \dots + 2 a_2 y + a_1) y' = 0$$

skąd

$$y' = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} = \frac{f_1(x, y_1)}{f_2(x, y_1)}$$

gdzie f_1 i f_2 oznaczają dwa wielomiany całkowite co do y i x .

¹⁾ Ruffini Theor. gener. d. Equazioni in cui si dimostra imposs. la soluz. algebr. delle equaz. gener. di grado super. Bologna 1798.

Ruffini Della insolubilità d. equazioni algebraiche gener. di grado sup. al quarto. Verona 1805.

²⁾ Abel loco citato.

Ilość y_1 jest jednym z pierwiastków $y_1, y_2 \dots y_{m-1}, y_m$ równania (1) tym właśnie, którego całkę badać podejmujemy się.

Ostatnie wyrażenie możemy pisać tak

$$(2) \quad y' = \frac{f_1(x, y_1) f_2(x, y_2) f_2(x, y_3) \dots f_2(x, y_m)}{f_2(x, y_1) f_2(x, y_2) f_2(x, y_3) \dots f_2(x, y_m)}$$

Mianownik tego wyrażenia jest wymierną symetryczną funkcją pierwiastków równania (1), a jako taki daje się wyrazić wymiennie współczynnikami równania (1) czyli wymiennie samem x ¹⁾, (zważywszy, że współczynniki $a_m \dots a_1, a_0$ są wymiernymi i całkowitemi funkcjami zmiennej x). Podobnie iloczyn

$$f_2(x, y_2) f_2(x, y_3) \dots f_2(x, y_m)$$

jest wymierną, symetryczną funkcją pierwiastków równania całkowitego co do y

$$\frac{a_m y^m + a_{m-1} y^{m-1} + \dots + a_1 y + a_0}{y - y_1} = 0$$

(y_1 jest pierwiastkiem równania (1), które zatem przez czynnik pierwiastkowy $(y - y_1)$ jest podzielne bez reszty) czyli równania

$$(3) \quad a_m y^{m-1} + (a_{m-1} + a_m y_1) y^{m-2} + \\ + (a_{m-2} + a_{m-1} y_1 + a_m y_1^2) y^{m-3} + \dots = 0$$

daje się zatem wyrazić wymiennie zapomocą x i współczynników ostatniego równania, t. j. wymiennie co do x i y_1 , a jak okazemy nawet całkowicie co do y_1 .

Założmy

$$(4) \quad f_2(x, y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots + b_r y^r$$

gdzie $b_0, b_1, b_2 \dots b_r$ są funkcjami wymiernymi i całkowitemi samego x , a dla skrócenia $r = m - 1$ oznacza. Kładąc na miejsce y po kolei $y_2, y_3 \dots y_m$, otrzymamy następujący układ $(m - 1)$ równań

¹⁾ patrz ustęp 3ci.

$$f_2(x_1 y_2) = b_0 + b_1 y_2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_r y_2^r$$

$$f_2(x_1 y_3) = b_0 + b_1 y_3 + b_2 y_3^2 + \dots + b_r y_3^r$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_2(x_1 y_m) = b_0 + b_1 y_m + b_2 y_m^2 + \dots + b_r y_m^r$$

co pisać możemy w postaciach iloczynu

$$f_2(x_1 y_2) = b_r (y_2 - \Theta_1)(y_2 - \Theta_2) \dots (y_2 - \Theta_r)$$

$$f_2(x_1 y_3) = b_r (y_3 - \Theta_1)(y_3 - \Theta_2) \dots (y_3 - \Theta_r)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_2(x_1 y_m) = b_r (y_m - \Theta_1)(y_m - \Theta_2) \dots (y_m - \Theta_r).$$

Oznaczając iloczyn $f_2(x_1 y_2) f_2(x_1 y_3) \dots f_2(x_1 y_m)$ krótko przez J , otrzymamy

$$J = \begin{matrix} b_r (y_2 - \Theta_1)(y_2 - \Theta_2) \dots (y_2 - \Theta_r) \\ b_r (y_3 - \Theta_1)(y_3 - \Theta_2) \dots (y_3 - \Theta_r) \\ \dots \dots \dots \\ b_r (y_m - \Theta_1)(y_m - \Theta_2) \dots (y_m - \Theta_r) \end{matrix}$$

czyli

$$\begin{aligned} J &= b_r^{m-1} \begin{matrix} (y_2 - \Theta_1)(y_3 - \Theta_1) \dots (y_m - \Theta_1) \\ (y_2 - \Theta_2)(y_3 - \Theta_2) \dots (y_m - \Theta_2) \\ \dots \dots \dots \\ (y_2 - \Theta_r)(y_3 - \Theta_r) \dots (y_m - \Theta_r) \end{matrix} = \\ &= b_r^{m-1} \begin{matrix} (-1)^{m-1} (\Theta_1 - y_2)(\Theta_1 - y_3) \dots (\Theta_1 - y_m) \\ (-1)^{m-1} (\Theta_2 - y_2)(\Theta_2 - y_3) \dots (\Theta_2 - y_m) \\ \dots \dots \dots \\ (-1)^{m-1} (\Theta_r - y_2)(\Theta_r - y_3) \dots (\Theta_r - y_m). \end{matrix} \end{aligned}$$

Zbytecznem zdaje się nadmienić, że $\Theta_1, \Theta_2 \dots \Theta_r$ są pierwiastkami równania :

$$f_2(x_1 y) = 0.$$

Rozwijając ostatnie naznaczone iloczyny w rządках poziomych i używając zwykłych symbolicznych skrótów

otrzymamy

[illegible]

Prawa strona tego równania jest wymierną i symetryczną funkcją ilości $\Theta_1, \Theta_2 \dots \Theta_r$ będących pierwiastkami równania

$$f_1(x, \Theta) = 0$$

— w iloczynnie J nawet ślad tych ilości zaginie, gdyż cała ich funkcyja daje się wyrazić wymiennie współczynnikami ostatniego równania, t. j. wymiennie ilościami $b_0, b_1, b_2 \dots b_r$ czyli wymiennie samem x . Ilości zaś jak

$$\sum_{\varnothing}^m y_i = y_2 + y_3 + \dots + y_m$$

$$\sum_{\lambda}^m y_{\lambda} y_{\mu} = y_2 y_3 + \dots + y_{m-1} y_m, \quad (\lambda \text{ i } \mu \text{ r\u00f3\u017ane})$$

$$\sum_{\mu}^m y_{\lambda} y_{\mu} = y_1 y_2 y_3 + \dots + y_m, \quad (\lambda, \mu \dots r \text{ różne}),$$

są właśnie współczynnikami równania (3) bez względu na znak i podzielonymi przez funkcję całkowitą a_m — zatem w iloczynie J współczynniki równania (3) znajdować się będą między sobą tylko mnożone a nigdy dzielone. Lecz każdy taki współczynnik zawiera wymierną całkowitą funkcję x i całkowite potęgi z y_1 , zważywszy zatem, iż w rozwinięciu na J żadna z ilości $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_r$ znajdować się nie będzie — wyrażenie na J zawierać będzie x wymiernie, a y_1 całkowicie. Podstawiając takowe wyrażenie w równanie (2), otrzymamy rezultat kształtu

$$y' = c_0 + c_1 y_1 + c_2 y_1^2 + \dots + c_{m-1} y_1^{m-1} + c_m y_1^m + \dots$$

lub zastępując y_1 wprost przez y

$$(5) \quad y' = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots + c_{m-1} y^{m-1} + c_m y^m + \dots$$

gdzie $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{m-1}, c_m, \dots$ są funkcjami wymiernymi swej zmiennej niezależnej x .

13. Różniczkowanie równania (5) daje

$$y'' = (c'_0 + c'_1 y + c'_2 y^2 + \dots + c'_{m-1} y^{m-1} + c'_m y^m + \dots) + (c_1 + 2c_2 y + \dots + (m-1)c_{m-1} y^{m-2} + m c_m y^{m-1} + \dots) y',$$

a podstawiając tutaj za y' znaną wyżej wartość, po wykonaniu mnożenia obu wielomianów i uporządkowaniu według potęg y , dostajemy rezultat następującego kształtu

$$y'' = e_0 + e_1 y + e_2 y^2 + \dots + e_{m-1} y^{m-1} + e_m y^m + \dots$$

gdzie $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{m-1}, e_m$ są funkcjami wymiernymi zmiennej x .

Widoczne jest, że jakąkolwiek pochodną, n. p. r -tą wzięlibyśmy, otrzymamy

$$y^{(r)} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \dots + p_{m-1} y^{m-1} + p_m y^m + \dots$$

gdzie $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{m-1}, p_m, \dots$ są funkcjami wymiernymi samego x . Lecz z równania (1) określającego funkcję y , można y^m i wyższe potęgi funkcji y wyrazić całkowicie niższymi potęgami y i wymiennie zapomocą x (a to mnożąc równanie (1) kolejno przez $y^0, y^1, y^2, \dots$ i wyciągając każdym razem wartość na $y^m, y^{m+1}, y^{m+2}, \dots$), co gdy podstawionem zostanie w ostatnie równanie, otrzymuje się

$$(6) \quad y^{(r)} = P_0 + P_1 y + P_2 y^2 + \dots + P_{m-1} y^{m-1}$$

rezultat ważny dla każdego r całkowitego i dodatniego. $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{m-1}$ są funkcjami wymiernymi samej zmiennej x i wskaźnika r .

Zmieniając we wyrażeniu (6) r na $(r+1)$, t. j. różniczkując obie strony tego równania, otrzymamy

$$(7) \quad y^{(r+1)} = Q_0 + Q_1 y + Q_2 y^2 + \dots + Q_{m-1} y^{m-1},$$

Uwagi godną jest rzeczą, iż gdy w równaniu (6) po lewej stronie odbywa się różniczkowanie względem x , prawa strona

nie zmienia swej postaci, a nawet liczby członów, tylko funkcyje wymierne zmiennej niezależnej x , t. j. $P_0, P_1, P_2 \dots P_{m-1}$ zmieniają się na inne funkcyje wymierne $Q_0, Q_1, Q_2 \dots Q_{m-1}$. Co więcej pisząc dla wyraźności

$$(8) \quad P_0 = P_0(x, r), \quad P_1 = P_1(x, r), \quad P_2 = P_2(x, r) \dots$$

funkcye $Q_0, Q_1, Q_2 \dots$ będą

$$(9) \quad Q_0 = P_0(x, r+1), \quad Q_1 = P_1(x, r+1), \quad Q_2 = P_2(x, r+1) \dots$$

z których względności przy badaniu całki $\int y dx$, będącej funkcją przestępną, daje się zrobić użytek.

Wygląda ta rzecz tak przeto, jakgdyby funkcya y była ilością stałą, a na samych funkcjach $P_0, P_1, P_2 \dots$ działania algebraiczne i różniczkowe wykonane zostały przy przejściu do $Q_0, Q_1, Q_2 \dots$. Nazywając te działania krótko przemianieniem (variation), powiemy:

Wyrażenie (6) różniczkuje się tak, jak gdyby y było ilością stałą, przemieniając tylko funkcyje wymierne P na inne wymierne.

Wyrażenie (6) całkowane raz (a następnie ilekolwiek razy) zachowa także swą postać i ilość członów, zmieni tylko funkcyje $P_0, P_1, P_2 \dots P_{m-1}$ na inne wymiernego kształtu. To okazemy niebawem z całą ścisłością, wprzód jednak dowiedzimy twierdzenia będącego szczególnym przypadkiem wspomnianego, t. z. twierdzenia Abła, dającego kształt całki $\int y dx$ w razie, gdy ta jest wyrażalną algebraicznie.

14. Twierdzenie Abła.

Jeżeli całka $\int y dx$ jest wyrażalną algebraicznie, kształtem jej będzie

$$(10) \quad \int y dx = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \dots + q_{m-1} y^{m-1} = \varphi(x, y)$$

gdzie $q_0, q_1, q_2 \dots q_{m-1}$ są funkcjami wymiernymi samej zmiennej niezależnej x .

Jeżeli całka $\varphi(x, y) = \varphi$ ma być funkcją algebraiczną x i y , to oczywiście czynić musi zadość pewnemu równaniu algebraicznemu stopnia całkowitego μ .

$$(11) \quad T_{\mu}\varphi^{\mu} + T_{\mu-1}\varphi^{\mu-1} + \dots + T_1\varphi + T_0 = \Phi(x, y, \varphi) = \Phi = 0$$

gdzie funkcyje T_{μ} , $T_{\mu-1}$. . . T_1 , T_0 są funkcyjami całkowitemi co do x i y .

Różniczkowanie ostatniego równania daje

$$\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = 0$$

gdzie pierwsza pochodna cząstkowa odnosi się tak do wyraźnego x , jak i do niewyraźnego, t. j. we funkcyi y ukrytego; a wykonując naznaczone cząstkowe różniczkowania

$$(T'_{\mu}\varphi^{\mu} + T'_{\mu-1}\varphi^{\mu-1} + \dots + T'_1\varphi + T'_0) + \\ + (T_{\mu-1}\mu\varphi^{\mu-1} + T_{\mu-1}(\mu-1)\varphi^{\mu-2} + \dots + T_1)\varphi' = 0.$$

Ponieważ atoli

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = y$$

przeto porządkując ostatnie rozwinięcie według potęg φ

$$(12) \quad T'_{\mu}\varphi^{\mu} + [T'_{\mu-1} + \mu T_{\mu}y]\varphi^{\mu-1} + \\ + [T'_{\mu-2} + (\mu-1)T_{\mu-1}y]\varphi^{\mu-2} + \dots + [T'_0 + T_1y] = 0,$$

które to równanie napiszemy krócej tak

$$12') \quad U_{\mu}\varphi^{\mu} + U_{\mu-1}\varphi^{\mu-1} + U_{\mu-2}\varphi^{\mu-2} + \dots + U_1\varphi + U_0 = 0$$

gdzie, jak łatwo spostrzedz, U_{μ} , $U_{\mu-1}$. . . U_1 , U_0 są funkcyjami całkowitemi co do x i y .

Mnożąc równanie (11) przez U_{μ} , równanie (12') przez T_{μ} i odejmując je stronami po sobie, otrzymamy

$$(T_{\mu-1}U_{\mu} - T_{\mu}U_{\mu-1})\varphi^{\mu-1} + (T_{\mu-2}U_{\mu} - T_{\mu}U_{\mu-2})\varphi^{\mu-2} + \dots + \\ + (T_0U_{\mu} - T_{\mu}U_0) = 0$$

równanie o współczynnikach wymiernych co do x i y stopnia o jedność niższego niż (11).

Jeżeli zatem funkcyja $\varphi(x, y)$ dogadza równaniu (11) stopnia μ o współczynnikach całkowitych co do x i y , to dogadza także takiemu samemu równaniu stopnia $(\mu-1)$ go, zatem także stopnia $(\mu-2)$ go, $(\mu-3)$ go . . . i t. d., wreszcie stopnia pierwszego.

Gdyby wszelako równanie (11) było nieredukowalnem, tedy ostatnie równanie musiałoby być ze względu na φ identycznością, t. j. współczynniki jego potęg z osobna stawać musiałyby się zerem czyli

$$T_{\mu-1}U_{\mu}-T_{\mu}U_{\mu-1}=0, \quad T_{\mu-2}U_{\mu}-T_{\mu}U_{\mu-2}=0 \quad . \quad . \quad . \\ T_0U_{\mu}-T_{\mu}U_0=0.$$

Pierwsze z tych równań po wstawieniu wartości na U_{μ} i $U_{\mu-1}$ daje

$$T_{\mu-1}T'_{\mu}=T_{\mu}(T'_{\mu-1}+\mu T_{\mu}y)$$

czyli

$$\frac{T'_{\mu}}{T_{\mu}} = \frac{T'_{\mu-1}}{T_{\mu-1}} + \mu \frac{T_{\mu}}{T_{\mu-1}} y = \frac{T'_{\mu-1}}{T_{\mu-1}} + \mu \frac{T_{\mu}}{T_{\mu-1}} \cdot \varphi'$$

Założmy tu

$$\frac{T_{\mu}}{T_{\mu-1}} = \zeta \text{ to } \log T_{\mu} - \log T_{\mu-1} = \log \zeta$$

różniczkując

$$\frac{T'_{\mu}}{T_{\mu}} - \frac{T'_{\mu-1}}{T_{\mu-1}} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}$$

a podstawiając te wartości w poprzednie rozwinięcie, otrzymamy

$$\frac{1}{\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx} + \mu \zeta y = \mu \zeta \frac{d\varphi}{dx}$$

czyli

$$\frac{d\zeta}{\zeta^2} = \mu d\varphi.$$

Całkując obie strony, otrzymamy

$$\mu \varphi = K - \frac{1}{\zeta} = K - \frac{T_{\mu-1}}{T_{\mu}} = \frac{KT_{\mu} - T_{\mu-1}}{T_{\mu}},$$

gdzie K jest stałą całkowania.

Porównując to równanie z równaniem (11) widzimy, że ono jest co do φ stopnia pierwszego

$$\mu = 1$$

zatem

$$T_1\varphi + (T_0 - KT_1) = 0$$

a że równanie (11) daje teraz

$$T_1\varphi + T_0 = 0$$

przeto stała całkowania $K=0$, a

$$\varphi = -\frac{T_0}{T_1}$$

czyli $\varphi(x,y)$ jest funkcją wymierną x i y . Uwolniwszy wiadomym a często powtarzanym sposobem wyrażenie

$$-\frac{T_0(x,y)}{T_1(x,y)}$$

od mianownika i ograniczywszy rozwinięcie do liczby m członów, otrzymamy

$$\int y dx = P_0 + P_1 y + P_2 y^2 + \dots + P_{m-1} y^{m-1} = \varphi(x,y)$$

gdzie $P_0, P_1, P_2 \dots P_{m-1}$ są funkcjami wymiernymi samego x , a to stanowi właśnie powyżej zapowiedziane twierdzenie.

15. Twierdzenie. Jeżeli całka $\int y dx$ jest wyrażalną algebraicznie, wyrażenie jej może istnieć tylko jedyne.

Gdyż inaczej według twierdzenia poprzedzającego mielibyśmy równanie

$$\int y dx = Q_0 + Q_1 y + Q_2 y^2 + \dots + Q_{m-1} y^{m-1}$$

gdzie $Q_0, Q_1, Q_2 \dots Q_{m-1}$ należałoby założyć funkcjami wymiernymi zmiennej x , różnemi wszelako od funkcyj wymiernych $P_0, P_1, P_2 \dots P_{m-1}$, t. j.

$$Q_0 \leq P_0, \quad Q_1 \leq P_1, \quad Q_2 \leq P_2 \dots Q_{m-1} \leq P_{m-1}.$$

Odejmując ostatnie równanie od powyższego wyrażenia na całkę $\int y dx$, otrzymamy

$$(P_{m-1} - Q_{m-1})y^{m-1} + (P_{m-2} - Q_{m-2})y^{m-2} + \dots + (P_1 - Q_1)y + (P_0 - Q_0) = 0,$$

które wyznaczając y zapomocą równania $(m-1)$ go stopnia jest niemożliwem, gdyż przypuściliśmy, że ostatnia funkcja wyznaczoną jest równaniem stopnia m go nieredukowalnem. Równanie powyższe jest więc chyba tożsamością, co żąda, aby

$$Q_{m-1} = P_{m-1}, \quad Q_{m-2} = P_{m-2} \dots Q_1 = P_1, \quad Q_0 = P_0$$

co dowodzi powyżej wysłowionego twierdzenia.

16. Powróćmy teraz do poprzednio znalezionych wartości na pochodne y' , y'' , y''' .

Z równania (6) dla $r=1, 2, 3 \dots (m-1)$, otrzymamy następujący układ równań (po sprowadzeniu do wspólnego mianownika), aby w miejsce funkcji wymiernych wprowadzić funkcje całkowite

[illegible]

gdzie wszystkie ilości oznaczone głoskami a i b są wielomianami całkowitymi samego x i prócz tego pewnymi funkcjami wskaźnika odpowiedniej pochodnej.¹⁾

Uważając w powyższym układzie równań $y, y^2, y^3 \dots y^{n-1}$ za niewiadome, widzimy, iż jest on liniowym co do tych ilości, a tak rozwiązanie jego nie przedstawia żadnych trudności. Położmy wyznacznik

$$(14) \quad \left| \begin{array}{ccccccc} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{m-1,1} & \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{m-1,2} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1,m-2} & \alpha_{2,m-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{m-1,m-2} & \\ \alpha_{1,m-1} & \alpha_{2,m-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{m-1,m-1} & \end{array} \right| = \Delta$$

to otrzymamy

$$y = \frac{D_1}{\Delta}, y^2 = \frac{D_2}{\Delta} \dots y^{m-1} = \frac{D_{m-1}}{\Delta}$$

¹⁾ Zależność pochodnej $y^{(r)}$ funkcji algebraicznej od wskaźnika r , stanowi może najciekawszy epizod poszukiwań, jakie podjąłem. Odnosne wzory wyprowadzę innym razem, gdyż sprawa ta wiąże się ściśle z badaniem funkcji przestępnych kształtu $\int y dx$.

gdzie $D_1, D_2, \dots, D_{m-1}$ oznaczają wyznaczniki kształtu

$$D_1 = \begin{vmatrix} (b_1 y' - a_{0,1}) & a_{2,1} & \dots & a_{m-1,1} \\ (b_2 y'' - a_{0,2}) & a_{2,2} & \dots & a_{m-1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_{m-2} y^{(m-2)} - a_{0,m-2}) & a_{2,m-2} & \dots & a_{m-1,m-2} \\ (b_{m-1} y^{(m-1)} - a_{0,m-1}) & a_{2,m-1} & \dots & a_{m-1,m-1} \end{vmatrix}$$

podobnie $D_2, \dots, D_{m-1}$. Wyznacznik D_1 możemy rozwinąć minorami według pierwszego rządka pionowego, a tak uzyskamy

$$D_1 = (b_1 y' - a_{0,1}) \Delta_1 + (b_2 y'' - a_{0,2}) \Delta_2 + \dots + \\ + (b_{m-1} y^{(m-1)} - a_{0,m-1}) \Delta_{m-1}$$

gdzie oczywiście

$$(15) \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{m-1,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2,m-1} & \dots & a_{m-1,m-1} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = - \begin{vmatrix} a_{2,1} & \dots & a_{m-1,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2,m-1} & \dots & a_{m-1,m-1} \end{vmatrix}$$

i t. d.

Oznaczywszy ogólnie

$$(16) \quad b_r \Delta_r = q_r$$

a dla skrócenia

$$(17) \quad -(a_{0,1} \Delta_1 + a_{0,2} \Delta_2 + \dots + a_{0,m-1} \Delta_{m-1}) = Q$$

otrzymamy

$$D_1 = Q + q_1 y' + q_2 y'' + \dots + q_{m-2} y^{(m-2)} + q_{m-1} y^{(m-1)}.$$

Według powyższego otrzymamy stąd

$$(18) \quad \Delta \cdot y = Q + q_1 y' + q_2 y'' + \dots + q_{m-2} y^{(m-2)} + q_{m-1} y^{(m-1)}$$

zapomocą którego równania funkcyj y wyrazić się daje w charakterystycznej postaci wielomianu budowanego linijnie z jej własnych pochodnych i funkcyj wymiernych zmiennej x , a to zawsze jeżeli tylko wyznacznik

$$\Delta \leq 0.$$

Gdy wypadek ten się nie spełnia, t. j. gdy $\Delta=0$, znaczy to, że równań (13) jest za wiele, aniżeli w istocie do wyznaczenia niewiadomych $y, y^2 \dots y^{m-1}$ jest potrzebnem, czyli że pomiędzy równaniami (13) znajduje się przynajmniej jedno, n. p. ostatnie, które w poprzedzających $(m-2)$ równaniach jest już zawartem. Niachaj takimi dwoma równaniami z pomiędzy układu (13) będą r te i s te

$$\begin{aligned} b_r y^{(r)} &= a_{0,r} + a_{1,r} y + a_{2,r} y^2 + \dots + a_{m-1,r} y^{m-1} \\ b_s y^{(s)} &= a_{0,s} + a_{1,s} y + a_{2,s} y^2 + \dots + a_{m-1,s} y^{m-1}. \end{aligned}$$

Zakładając je identycznymi należy przypuścić, że różnią się one tylko czynnikiem wymiernym i całkowitym samej zmiennej niezależnej x . Mnożąc pierwsze z nich przez taki czynnik λ_r drugie przez podobny λ_s i odejmując je od siebie, otrzymać musimy identyczność

$$\begin{aligned} [\lambda_r b_r y^{(r)} - \lambda_s b_s y^{(s)}] &= (\lambda_r a_{0,r} - \lambda_s a_{0,s}) + \\ &+ (\lambda_r a_{1,r} - \lambda_s a_{1,s}) y + (\lambda_r a_{2,r} - \lambda_s a_{2,s}) y^2 + \dots \end{aligned}$$

co żąda, aby poszczególne człony z osobna stawały się zerami czyli

$$\lambda_r b_r y^{(r)} - \lambda_s b_s y^{(s)} = 0,$$

$$\lambda_r a_{0,r} - \lambda_s a_{0,s} = 0, \quad \lambda_r a_{1,r} - \lambda_s a_{1,s} = 0, \quad \lambda_r a_{2,r} - \lambda_s a_{2,s} = 0 \dots$$

i t. d.

Z ostatnich równań otrzymamy

$$\frac{\lambda_s}{\lambda_r} = \frac{a_{0,r}}{a_{0,s}} = \frac{a_{1,r}}{a_{1,s}} = \frac{a_{2,r}}{a_{2,s}} = \dots$$

a podstawiając którąkolwiek z tych wartości, n. p. pierwszą w pierwsze z powyżej napisanych warunkowych równań, otrzymalibyśmy

$$(19) \quad y^{(r)} = \frac{P}{Q} y^{(s)}$$

gdzie P i Q oznaczają wielomiany całkowite zmiennej niezależnej x , równanie, które w powyższem przypuszczeniu wyznaczałoby funkcję y . Ponieważ zawsze założyć można $r > s$, przeto

ostatnie równanie różniczkowe sprowadza się do równania różniczkowego ($r-s$ go rzędu.¹⁾

17. Zakładając, że wspomniany wyznacznik nie staje się identycznie zerem, zauważymy całkę

$$\int S y dx$$

gdzie S oznacza funkcję wymierną samego x . W tym celu pomnożymy równanie (18) przez nieoznaczoną funkcję Θ i oznaczmy dla krótkości

$$(20) \quad \Theta \cdot q_r = t_r$$

to otrzymamy biorąc obustronnie całkę nieoznaczoną po pomnożeniu przez dx

$$\begin{aligned} \int \Theta \cdot \Delta y dx &= \int \Theta \cdot Q dx + \int t_1 y' dx + \int t_2 y'' dx + \dots + \\ &+ \int t_{m-2} y^{(m-2)} dx + \int t_{m-1} y^{(m-1)} dx. \end{aligned}$$

Całkowanie przez części daje ogólnie

$$\int t_r y^{(r)} dx = t_r y^{(r-1)} - \int t'_r y^{(r-1)} dx$$

podobnie dalej

$$- \int t'_r y^{(r-1)} dx = - t'_r y^{(r-2)} + \int t''_r y^{(r-2)} dx$$

$$\int t''_r y^{(r-2)} dx = - t''_r y^{(r-3)} - \int t'''_r y^{(r-3)} dx$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(-1)^{r-2} \int t^{(r-2)}_r y'' dx = (-1)^{r-2} t^{(r-2)}_r y' + (-1)^{r-1} \int t^{(r-1)}_r y' dx$$

$$(-1)^{r-1} \int t^{(r-1)}_r y' dx = (-1)^{r-1} t^{(r-1)}_r y + (-1)^r \int t^{(r)}_r y dx$$

¹⁾ Szczególnym przypadkiem powyższego jest badany przez Abela i Liouville'a przypadek, gdy współczynniki równania (1) stają się z wyjątkiem dwóch zerami, t. j. $a_{m-1}=0$, $a_{m-2}=0$...

$a_2=0$, $a_1=0$, a wówczas $y=\sqrt[m]{N}$, gdzie N oznacza funkcję wymierną zmiennej niezależnej x . Jest wtedy $y^{(r)}=N_r y$ gdzie N_r oznacza funkcję wymierną.

a dodając wszystkie te równania stronami do siebie po opuszczeniu obustronnem równych wyrazów, otrzymamy

$$\begin{aligned} & \int t_r y^{(r)} dx = [r] \\ &= (t_r y^{(r-1)} - t'_r y^{(r-2)} + t''_r y^{(r-3)} - \dots + \\ & \quad + (-1)^{r-2} t_r^{(r-2)} y' + (-1)^{r-1} t_r^{(r-1)} y) \\ & \quad + (-1)^r \int t_r^{(r)} y dx, \end{aligned}$$

gdzie symbolem $[r]$ oznaczyliśmy dla skrócenia całkę $\int tr. y(r) dx$.

Będzie przeto

$$\begin{aligned} \int \Theta_{\Delta y} dx &= \int \Theta.Q dx + \sum_1^{m-1} [r] \\ &= \int \Theta.Q dx + (t_1 - t'_2 + t''_3 - \dots + (-1)^{m-2} t_{m-1}^{(m-2)})y \\ &\quad + (t_2 - t'_3 + t''_4 - \dots + (-1)^{m-3} t_{m-1}^{(m-3)})y' \\ &\quad + (t_3 - t'_4 + \dots + (-1)^{m-4} t_{m-1}^{(m-4)})y'' \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (t_{m-2} - t'_{m-1})y^{(m-3)} + t_{m-1}y^{(m-2)} \\ &\quad + \int (-t'_1 + t''_2 - t'''_3 + \dots + (-1)^{m-1} t_{m-1}^{(m-1)})y dx. \end{aligned}$$

Oznaczając dla skrócenia

$$\begin{aligned}
t_1 - t'_2 + t''_3 - \dots + (-1)^{m-2} t_{m-1}^{(m-2)} &= B_0, \quad t_2 - t'_3 + t''_4 - \dots + \\
+ (-1)^{m-3} t_{m-1}^{(m-3)} &= B_1, \\
\vdots & \\
t_{m-2} - t'_{m-1} &= B_{m-3}, \quad t_{m-1} = B_{m-2} \\
t_1 - t'_2 + t''_3 - \dots + (-1)^m t_{m-1}^{(m-1)} &= G
\end{aligned}$$

napiszemy

$$\int \Theta_{\cdot \Delta} y dx = \int \Theta_{\cdot} Q dx + B_0 y + B_1 y' + B_2 y'' + \dots + B_{m-2} y^{(m-2)} - \int G y dx$$

czyli jeszcze

$$\int (\Theta \Delta + G) y dx = \int \Theta \cdot Q dx + B_0 y + B_1 y' + B_2 y'' + \dots + B_{m-2} y^{(m-2)}.$$

Aby lewą stronę tego równania przywieźć do żądanej postaci

$$\int S y d x$$

musimy założyć

$$(22) \quad \Theta \Delta + G = S$$

równanie, które dotąd nieoznaczoną funkcję Θ wyznaczyć powinno. Z uwagi na (20) i ostatnie z równań (21), możemy pisać równanie (22) tak

$$(22') \quad \frac{d}{dx}(\Theta q_1) - \frac{d^2}{dx^2}(\Theta q_2) - \frac{d^3}{dx^3}(\Theta q_3) + \dots +$$

$$+ (-1)^m \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(\Theta q_{m-1}) = S - \Delta \Theta$$

t. j. w postaci równania różniczkowego co do Θ nie wyższego rzędu jak $(m-1)$.

Jeżeli ostatniemu równaniu dogodzonym zostanie n. p. całką
 cząstkową na Θ , całka $\int S y d x$ posiadać będzie kształt

$$(23) \quad \int S y d x = \int \Theta . Q d x + B_0 y + B_1 y' + B_2 y'' + \dots + B_{m-2} y^{(m-2)}$$

gdzie $B_0, B_1, B_2 \dots B_{m-1}$ są funkcjami wymiernymi zmiennej x , całkowitami i liniowymi funkcji Θ i jej pochodnych. Według równań (21) mamy bowiem

[illegible]

które równania po rozwinięciu naznaczonych różniczkowań dają się sprowadzić do kształtu

$$\begin{aligned} B_0 &= K_{0,0}\Theta + K_{1,0}\Theta' + K_{2,0}\Theta'' + \dots + K_{m-2,0}\Theta^{(m-2)} \\ B_1 &= K_{5,2}\Theta + K_{1,1}\Theta' + K_{2,1}\Theta'' + \dots + K_{m-3,1}\Theta^{(m-3)} \\ B_2 &= K_{0,2}\Theta + K_{1,2}\Theta' + K_{2,2}\Theta'' + \dots + K_{m-4,2}\Theta^{(m-4)} \\ &\vdots \\ B_{m-3} &= K_{0,m-3}\Theta = K_{1,m-3}\Theta' \\ B_{m-2} &= K_{0,m-2}\Theta \end{aligned}$$

gdzie wszystkie funkcyje oznaczone gloskami K są wielomianami całkowitymi samej zmiennej niezależnej x .

Zakładając, że odpowiednią wartością na funkcję Θ , równanie różniczkowe (22') dopełnionem zostało, podstawmy w równanie (23) wartości na pochodne $y', y'', y''' \dots$ z równań (13), a otrzymamy po uporządkowaniu według potęg funkcji y

$$(23') \quad \int S y dx = \int \Theta \cdot Q dx + P_0 + P_1 y + P_2 y^2 + \dots + P_{m-1} y^{m-1},$$

gdzie jak widać $P_0, P_1, P_2 \dots$ są funkcjami wymiernymi zmiennej x , całkowitami i liniowymi funkcji Θ i jej pochodnych. Mianowicie otrzymujemy nasamprzód

$$\begin{aligned} P_0 &= B_1 \frac{a_{0,1}}{b_1} + B_2 \frac{a_{0,2}}{b_2} + B_3 \frac{a_{0,3}}{b_3} + \dots \\ P_1 &= B_0 + B_1 \frac{a_{1,1}}{b_1} + B_2 \frac{a_{1,2}}{b_2} + B_3 \frac{a_{1,3}}{b_3} + \dots \\ P_2 &= B_1 \frac{a_{2,1}}{b_1} + B_2 \frac{a_{2,2}}{b_2} + B_3 \frac{a_{2,3}}{b_3} + \dots \\ P_3 &= B_1 \frac{a_{3,1}}{b_1} + B_2 \frac{a_{3,2}}{b_2} + B_3 \frac{a_{3,3}}{b_3} + \dots \end{aligned}$$

a bacząc na równanie (21'')

$$(24') \quad \begin{cases} P_0 = L_{0,0} \Theta + L_{1,0} \Theta' + L_{2,0} \Theta'' + \dots + L_{m-3,0} \Theta^{(m-3)} \\ P_1 = L_{0,1} \Theta + L_{1,1} \Theta' + L_{2,1} \Theta'' + \dots + L_{m-3,1} \Theta^{(m-3)} + L_{m-2,1} \Theta^{(m-2)} \\ P_2 = L_{0,2} \Theta + L_{1,2} \Theta' + L_{2,2} \Theta'' + \dots + L_{m-3,2} \Theta^{(m-3)} \\ P_3 = L_{0,3} \Theta + L_{1,3} \Theta' + L_{2,3} \Theta'' + \dots + L_{m-3,3} \Theta^{(m-3)} \\ \vdots \\ P_{m-2} = L_{0,m-2} \Theta + L_{1,m-2} \Theta' + L_{2,m-2} \Theta'' + \dots + L_{m-3,m-2} \Theta^{(m-3)} + L_{m-2,m-2} \Theta^{(m-2)} \\ P_{m-1} = L_{0,m-1} \Theta + L_{1,m-1} \Theta' + L_{2,m-1} \Theta'' + \dots + L_{m-3,m-1} \Theta^{(m-3)} + L_{m-2,m-1} \Theta^{(m-2)} + L_{m-1,m-1} \Theta^{(m-1)} \end{cases}$$

gdzie funkcyje oznaczone głośkami L z rozmaitemi wskaźnikami są wymiernymi samej zmiennej x . Współczynniki $P_0, P_1, P_2 \dots$ wypisaliśmy tutaj, gdyż znajomość kształtu ich budowy jest konieczną, zwłaszcza gdy całka $\int y dx$ nie jest wyrażalną algebraicznie, co ma miejsce zawsze wtedy, gdy równaniu różniczkowemu (22'), algebraiczną wartością na Θ dogodzić nie można.

Ostatnie wspomniane równanie po rozwinięciu naznaczonych pochodnych iloczynu można pisać tak

$$22'') \quad N_0 \Theta + N_1 \Theta' + N_2 \Theta'' + \dots + N_{m-1} \Theta^{(m-1)} = S$$

gdzie $N_0, N_1, N_2 \dots N_{m-1}$ są wielomianami całkowitemi samej zmiennej niezależnej x .

18. Jeżeli weźmiemy $S=1$, a nadto postawimy żądanie, aby całka $\int y dx$ była wyrażalną algebraicznie, Θ musi być funkcją algebraiczną zważając, że ta funkcyja wchodzi w budowę współczynników $P_0, P_1, P_2 \dots$ [patrz równania (24)], co więcej, funkcją wymierną zmiennej x , jak tego żąda natenczas twierdzenie Abła. Nadto całka funkcyi wymiernej $\Theta \cdot Q$ musi być również algebraiczną, t. j. w tym razie funkcją wymierną x , a rozwinięcie (23') staje się wówczas po prostu twierdzeniem Abła. Że Θ musi być w takim razie funkcją wymierną, wynika bezpośrednio z równań (24') eliminując ilości $\Theta', \Theta'' \dots$ i zakładając, jak tego twierdzenie Abła żąda, funkcyje $P_0, P_1, P_2 \dots$ funkcyami wymiernymi x , jak również z równania

$$\int \Theta \cdot Q dx = \text{funkcyi wymiernej } x$$

dającego warunek dodatkowy, które różniczkowane daje w istocie

$$\Theta = \text{funkcyi wymiernej } x.$$

Możemy przeto powiedzieć:

Jeżeli równaniu różniczkowemu (22') lub (22'') dogodzić można wartością na Θ wymierną, całka $\int y dx$ jest wyrażalną algebraicznie.

Twierdzenie to, jak łatwo spostrzedz, jest odwracalnem czyli istnieje twierdzenie,

Całka $\int y dx$ jest wyrażalną algebraicznie lub nie według tego, czy równaniu różniczkowemu (22'') można dogodzić wartością na Θ wymierną czy nie. Bo jeżeli ostatniemu równaniu można dogodzić wymierną wartością na Θ , istnieje kształt

$$\int y dx = Q_0 + Q_1 y + Q_2 y^2 + \dots + Q_{m-1} y^{m-1}$$

wyrażający całkę algebraicznie. Przypuściwszy, że całka jest wyrażalną algebraicznie, a równaniu różniczkowemu (22'') wartością na Θ wymierną dogodzić nie można, wypadłoby z jednej strony, według twierdzenia Abela, że ostatni kształt całki (gdzie $Q_0, Q_1 \dots$ są funkcjami wymiernymi x) jest możliwym, a tak, aby usunąć tę sprzeczność, należy przypuścić istnienie wyżej wypowiedzianego twierdzenia.

19. Okażemy jeszcze jedno twierdzenie bardzo charakterystyczne odnoszące się do cząstkowych całek równania różniczkowego (22''). Zakładając jego całki

$$\Theta_1, \Theta_2 \dots \Theta_{m-1}$$

przypuścimy, że jedna z nich, n. p. Θ_1 jest funkcją wymierną zmiennej x . Funkcje $P_0, P_1, P_2 \dots$ [patrz (24')], są więc funkcjami wymiernymi. Podstawiając w równaniach (24') za Θ [będącą ogólną całką równania (22'')], całkę cząstkową Θ_2 otrzymamy po wykonaniu eliminacji pochodnych $\Theta'_2, \Theta''_2 \dots$ na funkcję wymierną x . Zatem:

Jeżeli równanie różniczkowe (22'') posiada jedną cząstkową całkę wymierną, to jego całka ogólna jest także funkcją wymierną x , gdyż według teorii równań różniczkowych liniowych ogólną całką jest wyrażenie

$$\Theta = c_1 \Theta_1 + c_2 \Theta_2 + \dots + c_{m-1} \Theta_{m-1}$$

gdzie $c_1, c_2 \dots c_{m-1}$ oznaczają stałe dowolne.

Podobnie, jeżeli równanie różniczkowe posiada jedną całkę cząstkową przestępną, to posiada wszystkie całki cząstkowe, zatem i całkę ogólną przestępną. Gdyby bowiem znalazła się jedna całka cząstkowa algebraiczna, to ta według poprzedzającego musiałaby być wymierną, jeżeli całka ma być wyrażalną algebraicznie, zatem wszystkie inne całki cząstkowe musiałyby być wymiernymi, co się sprzeciwia założeniu.

Na tem poprzestajemy, czyniąc tylko uwagę, że w poprzednio wyprowadzonych wzorach (23'), (24') i (22') mieści się cała teoria całkowania funkcyj algebraicznych wyrażalnych, a to nie tylko algebraicznie, ale i funkcjami przestępnymi, które w skutek całkowania równania różniczkowego (22'') wejść mogą w wyrażenie całki $\int y dx$ lub ogólniejszej od niej (23').

Całka badana będzie posiadała w każdym razie kształt analogiczny do tego, jaki daje twierdzenie Abela, z tą różnicą tylko, że współczynniki $P_0, P_1, P_2 \dots$ będące u Abela funkcjami wymiernymi zmiennej x , są tylko innemi funkcjami zależnemi od natury funkcji, którą powyżej oznaczyliśmy głóską Θ . Według tego, jaką funkcją ta ostatnia się staje, otrzymujemy wyrażenia na $\int y dx$ wyrażalną odpowiednemi przestępnymi w kształcie wszelako zawsze tym samym, jaki powyżej podaliśmy, który, jak mi się wydaje, bardzo jest dogodnym do badania wyrażalności tej całki funkcjami, jakie umówimy się za zasadnicze uważać.



Śląska Biblioteka Publiczna

43878.

II

B.

