

LUDWIK SILBERSTEIN.

TWIERDZENIE
HYDROKINEMATYCZNE.

TOwarzystwo
Biblioteki Polskiej
we Wiedniu



73

W KRAKOWIE.

NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ.

1895.

259202

II

Osobne odbicie z Tomu XXIX. Rozpraw Wydziału matematyczno-przyrodniczego
Akademii Umiejętności w Krakowie.



Wyd. 1895
2085

W Krakowie, 1895. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem A. M. Kosterkiewicza.

Twierdzenie hydrokinematyczne.

Przez

Ludwika Silbersteina.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. matem.-przr. z dnia 7. stycznia 1895 r.;
ref. czł. Witkowski.

Niechaj będą u_1, u_2, u_3 składowymi prędkości cząstki płynu ciągłego w punkcie o współrzędnych prostokątnych x_1, x_2, x_3 w chwili t , wziętymi wzdłuż osi x_1, x_2, x_3 . Jeżeli ruch płynu jest niewirowy, możemy wyrazić prędkości u_i zapomocą pochodnych cząstkowych, wziętych ze względu na x_i , pewnej funkcji ϕ , którą nazywamy potencjałem prędkości: $u_i = \partial\phi/\partial x_i$, $i=1, 2, 3$. W ogólnym zaś przypadku, gdy płyn jest wypełniony wirami, t. j. gdy prędkości wirowe

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \\ \zeta_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \zeta_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)\end{aligned}\tag{1}$$

są wogóle różne od zera, możemy zawsze — według Clebsch'a — wyrazić prędkości u_i w sposób następujący:

$$u_i = 2 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + 2\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3,\tag{2}$$

jeżeli oczywiście λ , ψ są funkcjami współrzędnych i czasu niezależnymi od siebie. Wyrazy (1) prędkości wirowych przybierają wówczas kształt:

$$(3) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \\ \xi_2 &= \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \\ \xi_3 &= \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

[Gdyby, wbrew założeniu, między ψ i λ zachodziło równanie, niezawierające x_1 , x_2 , x_3 , byłoby według (3)

$$\xi_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \frac{d\psi}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \frac{d\psi}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = 0, \text{ podobnie } \xi_2 = \xi_3 = 0.] \text{ —}$$

Ruch płynu będzie zupełnie jednoznacznie określony, jeżeli dla każdej chwili czasu podamy położenie i kształt każdej z powierzchni $\varphi = \text{const.}$, $\lambda = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$, tworzących układ potrójnie nieskończony. Przez każdy punkt x_1 , x_2 , x_3 przestrzeni wypełnionej płynem można w każdej chwili t przeprowadzić linię prądu i linię wirową. Linie prądu i linie wirowe mogą, w ogólnym wypadku, przecinać się wzajemnie pod kątami jakimikolwiek, zmieniającymi się z czasem. Otóż, zapytujemy, jakie własności przysługują układowi powierzchni φ , λ , ψ , jeżeli linie prądu i linie wirowe w danej chwili czasu przecinają się wszędzie prostokątnie.

Oznaczmy przez dx'_1 , dx'_2 , dx'_3 składowe elementu ds' linii prądu wzięte wzdłuż osi x_1 , x_2 , x_3 , przez dx''_1 , dx''_2 , dx''_3 składowe elementu ds'' linii wirowej; wówczas równania różniczkowe linii prądu będą:

$$(4) \quad \frac{dx'_1}{u_1} = \frac{dx'_2}{u_2} = \frac{dx'_3}{u_3},$$

równania zaś różniczkowe linii wirowych:

$$(5) \quad \frac{dx''_1}{\xi_1} = \frac{dx''_2}{\xi_2} = \frac{dx''_3}{\xi_3}.$$

Jeżeli więc linie wirowe mają tworzyć z liniami prądu kąty proste, musi być:

$$(6) \quad \sum_1^3 dx'_i \cdot dx''_i = 0,$$

czyli, według (4) i (5), dla każdego punktu x :

$$\sum_i^3 u_i \xi_i = 0. \quad (7)$$

Podstawiając za u_i wartości z równań (2), otrzymamy:

$$\sum_i^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \xi_i = 0; \quad (8)$$

lecz — mnożąc wartości ξ_i , podane w równaniach (3), przez odpowiednie czynniki $\lambda \partial \psi / \partial x_i$, widzimy, że $\sum \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \xi_i$ równa się zeru identycznie; z równania (8) pozostaje więc:

$$\sum_i^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \xi_i = 0. \quad (9)$$

Otrzymujemy przeto, po zastąpieniu w powyższej sumie składowych ξ_i przez prawe strony równań (3), dla wszelkich wartości współrzędnych x , równanie:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} & \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Równanie to atoli jest warunkiem, niezbędnym i wystarczającym, współistności trzech równań liniowych jednorodnych dla dx_1 , dx_2 , dx_3 :

$$\begin{aligned} \sum_i^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i &= 0, \\ \sum_i^3 \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} dx_i &= 0, \\ \sum_i^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

równania zaś te orzekają, że dx_1 , dx_2 , dx_3 są składowymi elementu krzywej, która jednocześnie czyni zadość równaniom

$$\varphi = \text{const.}, \quad \lambda = \text{const.} \quad \text{i} \quad \psi = \text{const.} \quad (12)$$

Z pierwotnego założenia [(6) lub (7)] wynika przeto ostatecznie, że powierzchnie φ , λ , ψ mają w s p ó ł n e linie przecięcia. Jeżeli, odwracając

rozumowanie, założymy, że powierzchnie te przecinają się ze sobą wzdłuż jednych i tych samych krzywych, możemy z równań (12) wyprowadzić przez różniczkowanie równania (11) wraz z warunkiem (10), stąd zaś według (3) równanie (9), dalej, przez dodanie wyrazu $\sum \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \xi_i$ równego zeru, równanie (8) i wreszcie (7), według (2). Otrzymujemy więc następujące

Twierdzenie. Linie prądu przecinają się z liniami wirowymi pod kątami prostymi wtedy i tylko wtedy, gdy powierzchnie λ, ψ, φ mają wspólną linię przecięcia.

Lecz powierzchnie λ przecinają się z powierzchniami φ wzdłuż linii wirowych. [Dzieląc bowiem równania $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \partial x_i = 0$,

$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i = 0$ przez dx_3 np. i rozwiązując je ze względu na dx_1/dx_3 i dx_2/dx_3 , otrzymujemy:

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 = \begin{vmatrix} -\frac{\partial \lambda}{\partial x_3} & \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} & -\frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & -\frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

t. j., według (3), równania różniczkowe linii wirowych:

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3.]$$

Możemy przeto otrzymane twierdzenie wyrazić innemi słowy:

Linie prądu przecinają się prostokątnie z liniami wirowymi wtedy i tylko wtedy, gdy każda linia wirowa leży całkowicie na pewnej powierzchni φ .

