ARCHIMEDIS SYRACVSANI PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EXCELLENTISSIMI OPERA,

quæ quidem extant omnia, latinitate iam olim donata, nuncq́ primum in lucem edita.

Cum Cæsareæ Maiestatis gratia & priuilegio ad quinquennium.

BASILEAE.

AMPLISSIMO SENATORVM ORDINI VRBIS NORINBERGAE, DOMINIS SVIS obseruandis, Thomas Gechauff, cognomento Venatorius, se ipsum commendat.

PHilosophorum omnium, ut uidere licet, P. C. unum hoc ac subinde continuum fuit studium, ut simul & animos & actiones inconditæ multitudinis, ab illis nunquam non genus nostrum sequentibus erroribus, eximerent, atq; ad inquirendæ ueritatis amorem potius inclinarent, instigarent, inflammarent. Quorum magistros bifariam diuisos à ueteribus iam olim accepimus. Aut enim Italici uocabantur, ab ea Italiæ parte, quæ pridem magna Græcia est dicta, quorum autor & magister Pythagoras ille Samius fuisse perhibetur. Putabant illi plenam naturalium rerum, synceramq; cognitionem penes se unos reperiri posse. Qui ab ea secta alieni esse uidebantur, Ionicos se dicebant, hoc potissimum nomine sibi placentes, quod in ipsa media, ut dicitur, Græcia philosophiæ placita traderent. Post longam uerò seriem doctorum tandẽ ad Anaxagoram et summa et caput eius sectæ rediјt: cui deinde Archelaũ successisse perhibent. Huius Archelai successorem, Augustinus doctor ecclesiasticus sanctus, Socratem facit: quem ipse Plato (aliorum philosophorum quasi deus) magistrum habuisse, antiqua et iam olim recepta in scholis nostris opinione, ad nos usq; perlatum est. Atqui Socrates cũ uideret causas rerum ab illis non rarò inquiri, qui parum purgato essent animo: cum ipse interim animum suum ad cognitionem potius ueri et summi illius boni intenderet: noluit imperitam multitudinem rebus illis, quæ captum humani ingenij ut plurimum superant, implicatam teneri. placuit communi hominum utilitati consulere, ac ipsum iam sapientiæ studium ad corrigendos mores, componendasq; ciuiles actiones, quasi cœlo ereptam prædam, inter homines collocare. Et rectè quidem ille censuit. Vt quid enim relictis imis, ad summa statim admitterentur, quæ alioqui infausto sidere nata cõspiciuntur ingenia? ad aratrum potius quàm ad Musarum sacra, idonea iudicamus huiusmodi portenta. Præter rugas, & triste supercilium, & uesanam in pectore bilem, quid illi aliud è studijs suis referunt? Quæ uerè generosa est aquila, implumis adhuc cum est, nunquam se cœlo credit aperto: secus factura, ubi ad solis radios contuendos iam luminis sibi esse uiderit satis. Sic præclara quæ sunt ingenia, intra præscri ptos sapientiæ limites tantisper sese continebunt, donec non tam suo amore, quàm doctorum uirorum iudicio, summas bonarum artium partes cũ laude tueri & poßint & ualeant. Quisquis hæc quæ dicimus hic, improbare conatus fuerit, illum nos extra se positum, equidem non temerê contenderimus. Quid enim omnino eßet uita nostra, si hisce studijs carere oporteret, sine quibus nulla inter nos constare potest humanitatis societas, nisi barbara quædam barbaries, aut (ut Plato uocat) ἀφιλόσοφος καὶ ἄμουσος. Homine nesciente pōdera, atq; adeò nesciente mensuras rerum, quid stolidius, imò quid inhumanius uidere queat ille omnia inspicientis solis oculus? Quare non ab re uidetur ille mihi cum sacra tũ prophana polluere, quisquis posthac honestas disciplinas uel contẽpserit, uel alijs ad ea penetrare uolẽtibus, aditum recluserit, aut alioquin data opera remoratus fuerit. Præstat cum præclaris ingenijs conuenire potius, quàm longè lateq; regnantem, ac bonas artes uastantem, iuuentutem à contemplatione ueritatis deterrentem, sequi consuetudinem. Quid est enim consuetudo ad ueritatem collata, nisi pabulum erroris? Qui tales sunt, in orbẽ illum disciplinarũ, quæ studio quærendæ ueritatis famulantur, nullo modo se intromitti sperent. Occinimus illis uetus hoc: Procul este prophani. Procul, inquã ego, à lectione Archimedis nostri absint uniuersi, qui nihil ad regulã, nihil ad perpendiculum, nihil ad libellam reuocare didicerunt. Nos ut hoc cõsilium nostrũ admiserint, non ualde laboramus. nõ enim studemus placere illis, dum ui magna conamur rectis studijs prodesse, ac ipsi etiam humanitati satisfacere. Officij nostri partes sunt, latentẽ adhuc in rebus ueritatẽ eruere, ac omnia illius optima quæ sunt, humanis oculis conspicienda inferre. Quid hic enim positi agimus aliud, quàm ut plurimos ad ueritatis studia inuitemus, dum reuelata facie, ipsam perfectè contemplaturi sumus in patria? Interim tanquam in transcursu hisce uerè liberalibus artibus tædia præsentis uitæ fallentes non illibenter. Solent enim hæ artes honestißimæ non tantũ delectare suos cultores, sed etiam commouere, afficere quoq; & inflammare animũ ipsum, ut hoc maiore desiderio ad perfruendæ olim ueritatis bonũ rapiatur, quo præstantior est umbrâ ueritas, lux tenebris, deniq; quo est maior & melior hominibus ipse Deus. Nouimus uestri Senatorij ordinis uiros non paucos, qui se hisce artibus penè immerserint, cum alioqui naturalium rerum contemplatione & eßent & haberentur clarißimi ab omnibus. Arbitrati sunt illi sapienter quidem, quòd in his ipsis studijs insumptas in Remp. uires, recollecturi eßẽt, ac parum reclusis à se publicis curis, quoties in gratiã

redi-

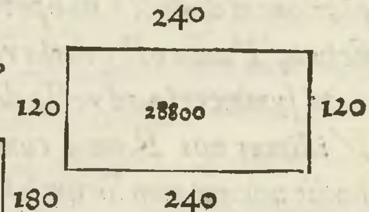
redirent cum literatis literis, laudem longè amplissimam sese consecutos esse censebant. Quis enim indecorum putauerit in ea re recreari, refocillariq; animo, à qua neq; naturæ nostræ Genius abhorret, neq; ipse opifex rerũ subinde offendi possit unquã? Et meritò illi in hoc potissimũ studiorũ genus incubuerũt. Quia enim liberæ ciuitates aut mari aut terra uictus rationẽ quærere uidẽtur: ut naufragia uitẽt gubernatores, astronomiæ cognitio cũ primis sulcãtib. maria, nõ tam utilis quàm necessaria erit futura. quæ hac deinde industria importãtur merces, ut rectissimè in singulos dispensentur, numerorũ scientia primas sibi uendicare solet. Ne porrò termini rerũ confunderentur, ab Aegyptijs, propter Nili exundationes, noua apud illos iuuẽta esse perhibetur dimensio agrorum, quæ ob eam causã Geometriæ nomen ferre iure queat. Excelluisse in hisce disciplinis Vulcanum illum, Homerus haud obscurè significauit:

> Cum Thetis Idæos (heu nunquam uana parentum
> Auguria) expauit uitreo sub gurgite remos.

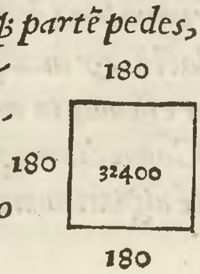
Vulcanus itaq; ad Thetidis preces, Achilli clypeum cõfecturus, quid non summè, quid non artificiosissimè ob oculos lectoris posuit? Videmus eodem in clypeo non tam uirtutum quàm disciplinarum semina omnium, ac rerum præclarissimarum perfectissimè expressa simulacra, quibus ille artificiosa compositione sua, dij boni, quantam maiestatem addere solet? Quantum deinde gratiæ & laudis consecutus est, in coniungendis per duas subinde ciuitates, cum machinamentis, tum instrumentis, tum ornamentis, ut in unius clypei circumferentiam unà simul & officia magistratus, & studia militum, & uulgi spectacula, & agricolarum exercitia, & pastorum lusus, & alia id genus multa, quæ Geometrica proportione contemplanda doctorum uirorum oculis obiecerit: quæ omnia, qui sapientiæ nomen daturus est, ignorare non debet. Nam uirtutis & iustitiæ imaginem in eius clypei descriptione propositam, facile quisquis non est ingenio præditus obtuso, dispicere queat. Quid quod optimus uates & sphæram imaginum cœli, solis dico & lunæ, stellarumq; cursus, cum alijs multis, callidissime unius clypei planicie est complexus? quæ in contemplationem deducta, ut operosum, ita magnificum absoluere uidentur ædificium. Tanta est gratia rerum bene dispositarũ, ubi illa singularum partium symmetria ad recte doctos & inculpatos iudices fuerit conuocata. Vidimus nos Romæ cum essemus in monte Capitolino (Capitolium hodie uocant eum locum) Comœdiam agi, cumq; à personis peragẽda esset Pœnulus, ipsa quæ una è uiginti numero est comœdia Plauti, per eos *homines, qui haud ita bene ad illam subeundam prouinciam essent parati. Neq; enim personas, quas referebant (licet Itala proles) ubique fœliciter repræsentabāt: quod cuius uitio factum sit, equidem nunc non sum scripturus. Erat hic locus nō parum à prima sui constitutione iam factus alienissimus. In eo tamen, quia erat capax multitudinis, & quia omnia numero, pondere quoq; & mensura digesta esse uidebantur, facile quod in actoribus fabulæ desiderabant complures, iusta illa compositæ aulæ symmetria, spectatores in officio retinebat. Tanta est, ut diximus, bene in ordinem digestarum rerum gratia.*

Hic iuuat augustum Romæ uidisse theatrum,
Instratumq; locum tabulis, nitidisq; columnis,
Qui ter uiginti, sex atq;, ascendit in ulnas,
Si in longum reuoces. latè contraxior exit,
Fert uix dimidio, ceu continet area longi.
Bis quoq; quindenis ulnis spaciatur in altum.
Hic quia Saturnus latuit, Saturnius olim
Dictus. post Cicero cecinit, Tarpeia rupes.
Postera deinde ætas tenuit Capitolia dici.
Non ratione tamen sine, &c.

Hæc ideo retulimus copiosius, ut opinionibus imperitæ multitudinis commodius occurreremus: ac dein ut intelligant hi qui tractabiles adhuc sese præbēt mansuetioribus Musis, hæc studia non tantum priuatis hominibus summam sæpè adferre uoluptatem, sed etiam publicè & in foro & in curia, & in scholis exercitamēta esse honesta, docta & laude digna, utilia quoq;, & rebusp. necessaria. Ob eā, opinor, causam, M. Fabius Quintil. lib. de Institutione oratoria primo, futurū ait oratorē Geometriæ oportere omnino esse peritū, quòd Geometria potiss. in numeros diuisa sit, atq; formas. Nos hic de iugeri mēsura, quæ adfert ille, adducimus tantū, & præterea nihil. Nos facillimū, inquit Quintilianus, et imperitis sequamur experimentū. Iugeri mensurā ducētos et quadraginta lōgitudinis pedes esse, dimidioq; in latitudine patēre, non ferè quisquā est qui ignoret. Huius schema nos ita rudibus literarū exprimimus.

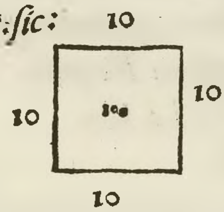


At centeni & octogeni in quamq; partē pedes, idē spaciū extremitatis. Sed multo amplius diuisæ quatuor lineis areæ faciunt. exemplum esto.

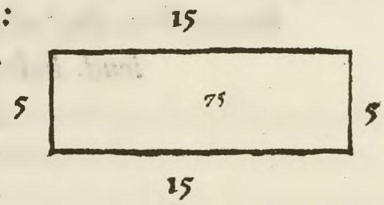


Id si computare quē piget, breuioribus numeris idem discat.

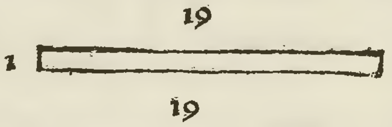
scat. Nam deni in quadram pedes, quadraginta per oram intra centum erunt: sic:



At si quini deni per latera, quini in frōte sint, ex illo amplectuntur quartam partem deducent, eodē circumductu, sic:



Si uero porrecti utrinq; undeuiceni singulis distent, non plures intus quadratos habebunt, quàm per quot lōgitudo circūducetur: quæ circūibit autē linea, eiusdem spacij erit, cuius ea quæ centum continet. Schema illius sic formabis. Hunc locum ideo figuris suis expositū, oculis subijcere uolui, quod uiderim quosdam alioqui non indoctos uiros, qui ipsum aut non intellexerunt: aut quod iuxta est, simulando præterierunt.



Hæc cum dico, non doctoris partes usurpo mihi, sed monitoris tamen personā ubi recepero, qui æqui sunt iudices, nō contēnent. Non hic ostendā quæ elemēta geometrica, quo nomine à nostris appellentur. nam quid signum sit, quid linea, quid angulus, circunferentia quoq; & superficies, præter Archimedē nostrū Euclides quoq; philosophus et mathematicus Megarensis, nō utiq; incelebris, admodū copiose cōscripsit. In solidis corporibus cōficiendis, qualia sunt pyramides, coni, cylindri, cubi, sphæræ, & id genus alia corpora, magistrū hunc nostrū Archimedem, nemo non tutissime fuerit sequutus. Hic est Archimedes ille, cuius machinationibus M. Marcellus multū ac diu uictoriā suā apud Syracusas inhibitā sensit: eximia tamen hominis prudentia delectatus uictor, adeò, ut captis Syracusis capiti illius parceretur edixerit: penè tantū gloriæ in seruato Archimede, quantū in oppressis Syracusis reponens. Quanquā intentū geometricis formis, quas in puluere descripserat, ab ignaro milite, quis'nā esset rogatus, cū nomen suū non statim indicaret, obtruncatus, sanguine suo artis propriæ lineamēta confudit. Quo factū, ut propter idē studiū modò donaretur uita, modò spoliaretur. Aegrè id Marcellum tulisse, sepulturæq; curā habuisse, ac propinquis etiā inquisitis, honori, præsidioq; nomē eius ac memoriam fuisse. Atque hæc de Archimede partim ex T. Liuio, partim ex Valerio Max. in præsentia retulisse sit satis. Superest P.C. ut magno cōsensu, hisce præsertim turbulentiss. temporib. exulātes, nudasq; ac penè iam extinctas illas uerè liberales disciplinas humaniter colligere atq; fouere studeatis. Decet enim magistratus assuescere cū primis nō tantū rebus humi repentib. sed etiā stu-

dijs Musarum, ut quæ solæ molem illam tractandarum rerum, non raro leuare, frequenter uerò & excutere ab humeris uestris, quàm longissime & possint et ualeant. Valete unà cum florentissima Republica uestra, diu fœlices. Ex urbe uestra, IIII. Calend. Februarij, Anno M.D. XLIIII.

ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET CYLINDRO LIBER PRIMVS.

ARCHIMEDES DOSITHEO Salutem.

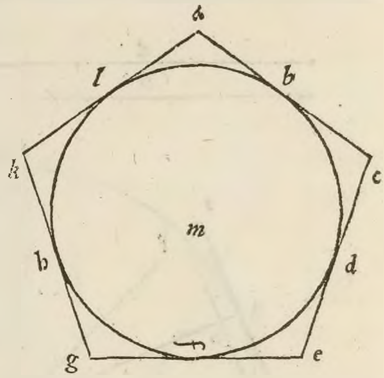
PRIVS quidem ad te miſi quę à nobis inſpecta eſſent, cõſcribentes eorum demonſtrationes, quod omnis portio contenta à recta, & à coni rectanguli ſectione, ſeſquitertia ſit triangulo habenti baſim cum portione eandem, & altitudinẽ eidem æqualem. Nunc autem quorundam occurrentiũ theorematum, quæ effectu probata uidentur, demonſtrationes conſcripſimus. Ipſa uero huiuſmodi ſunt. Primum quidem, quod omnis ſuperficies ſphæræ quadrupla eſt circulo in ea maximo. Deinde quod ſuperficiei cuiuſcunq; portionis ſphæræ circulus ille æqualis eſt, cuius quæ ex centro æqualis ſit rectæ ductæ à uertice portionis, ad circuli qui baſis eſt portionis circumferentiam. Ad hæc quòd cuiuſq; ſphæræ cylindrus, qui baſem habeat circulum in ſphæra maximum, & altitudinem æqualem ſphæræ diametro ſeſquialter habetur: & ſuperficies eius cum baſibus ſuperficiei ſphærę eſt itidem ſeſquialtera. Hæc autem accidentia natura ipſa inerant prius circa dictas figuras, uerum non fuerant à ſuperioribus cognita, qui ante nos

Scribantur autem prius & dignitates, & sumpta ad demonstrationem eorũ. Sunt quædam in plano curuæ lineæ terminatæ, quæ rectis iũgentibus terminos earum, aut totæ sunt in easdem partes cauæ, aut nihil habent in alteras. In easdem partes cauam uoco lineam talem, in qua si duo puncta utcunq; sumantur, lineæ rectæ inter illa puncta mediæ, aut omnes in easdem partes dictæ lineæ cadunt: aut quædam in easdem partes, quædam secundum eam, nulla uero in alteras partes. Similiter autem & superficies quædam finitæ sunt ipsæ quidem nõ in plano, sed terminos suos in plano habentes: & in easdem plani eius in quo earum sunt termini, partes aut totæ erunt, aut nihil habebunt in alteras partes. In easdẽ partes cauas illas uoco, in quibus si sumantur duo puncta, rectæ inter illa ductæ mediæ, aut omnes in easdem partes cadunt superficiei: aut quædam quidem in easdem partes, quædam secundum eas, nulla autem earum in alteras partes. Frustũ uerò solidum uoco, si quando sphæram secuerit conus, qui uerticem habeat ad centrum sphæræ, figuram intra comprensam, & à superficie coni, & à superficie sphæræ intra conum comprensæ. Rhombum autem solidum uoco, ubi duo coni in eadem base constantes, uertices habuerint utrinq; sitos plano basis, ita ut axes eorum sint in directum sibi inuicem coniuncti, figuram ex utrisq; conis cõpositam. Sumo autem hæc: Linearum eosdem terminos habentium rectam minimam esse. Aliarum uero quæ in plano fuerint, si eosdem habuerint terminos, eas inæquales esse. Vbi autem ambæ in easdem partes cauæ fuerint, ut uel altera tota comprendatur ab altera, uel altera earum ab alterius superficie, & recta eosdem cum illa terminos habente contineatur: uel quidpiam ipsius contineatur, quidpiam uero habeat commune cum altera, & comprensam esse minorem. Similiter autem & superficierum eosdem terminos habentium, si in plano terminos habuerint, minimam esse planam. Aliarum uero superficierum, et eosdem terminos habentium, si in plano terminos habeant, eas esse inæquales: ubi autem ambæ in partes easdem cauæ fuerint, & uel altera tota contineatur ab altera, aut alteram earum ab altera superficie, & plana eosdem terminos cum illa habente: aut eius partem quidem comprendi constet, partem uero communem habere, & comprensam esse cõprendente minorem. Amplius autem & inæqualium linearum, siue superficierum, siue solidorum, maius excedere minus tanto, quantum ipsum sibiipsi totiens complicari potest, ut excedat omnem propositam sui generis quãtitatem. His autem suppositis, si in circulum figura multiangula inscribatur, constat ambitum figuræ inscriptæ esse circumferentia circuli minorem. Vnumquodq; enim figuræ inscriptæ latus minus est ea circumferentiæ parte, quæ per ipsum abscisa fuerit.

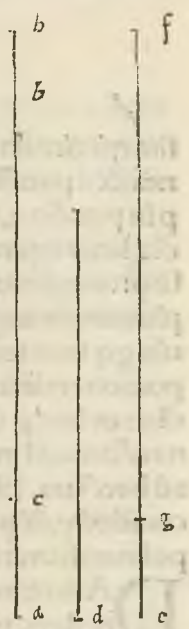
Si

SI circulo figura plurium angulorum circumſcribatur, linea recta quæ ex omnibus figuræ circumſcriptæ lateribus ſimul in directum coniunctis efficitur, ipſius circuli circũferentia longior eſſe probatur. 1

Circulo itaq; cuicunq; figura quæuis pluribus angulis conſtituta circumſcribatur: Dico lineas dictam figuram claudentes, ſi ſimul in directum cõiungantur, lineam unam rectam conſtituere, circuli dicti circumferentia longiorem. Eſto igitur, exempli gratia, circulus cuius centrum m, quem circa ſit aptata figura a b c d e f g h k l, cuius anguli ſint ad puncta a c e g k notati, contactus uero laterum & circuli ad puncta b d f h l. Quoniam itaque a b, a l, cum arcum b l intra ſe coerceant, ipſo longiores habentur: ſimiliter c b, c d, ſuo arcu b d: item e d, e f, maiores: item f g, g h ſuo, demum k h, k l, quæq; duæ coniunctæ ſuis arcubus maiores ſint. eiſdem enim terminis cum ſuo quæq; duæ arcu prodeuntes ipſum includunt, erit, ut ſi una ex omnibus his recta linea iungatur, circuli circumferentia ſit longior, quæ ex illis arcubus colligitur.

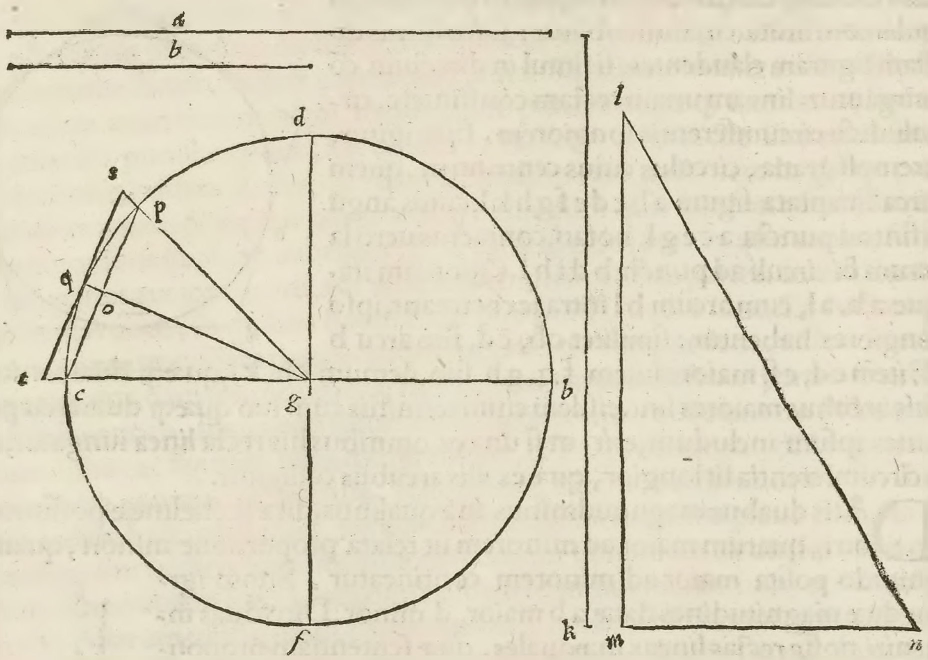


DAtis duabus magnitudinibus inæqualibus, duæ rectæ lineæ poſſunt inueniri, quarum maior ad minorem ſit relata proportione minori, quàm magnitudo poſita maior ad minorem contineatur. Sunto igitur duæ magnitudines datæ a b maior, d minor. Dico duas inueniri poſſe rectas lineas inæquales, quæ ſententiam propoſitionis exæquantur. Statuatur itaq; per ſecundam primi Euclidis b c æqualis ipſi d, ſumatur deinde linea quæuis recta, quæ ſit f g, atq; a c totiens ſibi ipſi coaceruetur & multiplicetur, donec productum excreſcat maius ipſo d, quod uocetur a k. eſto et f g tantundem multiplex ipſius g h. erit itaq; ex hoc, ut quemadmodum a k & a c ſeſe reſpiciunt, ita f g, & g h. & item modo cõuerſo, ſicut a c refertur ad a k, ita quoq; g h ad g f. Aſt quoniam a k eſt maius ipſo d, cui c b poſitus eſt æqualis, referetur igitur a c ad a k minori proportione, quàm idem a c ad c b. quare ex coniuncta proportione c a k ad a k minori, quàm a c b ad c b. ea dem ratione h g f ad g f minori, quàm a c b ad c b. Verum c b erat ipſi d ſumpta æqualis, ergo linea h g f ad g f lineam minori proportione habetur, quàm a c b magnitudo ad ipſam d. Inuentæ ſunt igit̃ duæ rectæ inæquales, quæ id quod iuſſum fuerat effecerunt, ut maior ad minorem proportione ſit relata minori, quàm magnitudo maior data ad magnitudinem minorem. 2



DAtis duabus magnitudinibus inæqualibus, & circulo quocunq;, fieri poteſt ut intra circulum datũ plurium angulorũ figura collocetur, at altera huic ipſi ſimilis eidem circulo aptetur extrinſecus, ita ut exterioris latus ad latus interioris proportione minori colligetur, quàm magnitudo data, maior ſcilicet ad minorẽ. 3

Sint duæ datæ magnitudines a b, & circulus quiuis datus. Dico id effici poſſe, quod propoſitio iubet. Inuentæ iam duæ rectæ ſuprà proximè fuerunt, quarum ſit k maior, l m minor, contineantq; minorem proportionem quàm duæ datæ magnitudines. educaturq; à puncto m linea perpendicularis m n, & à puncto l ducatur ad lineam m n recta æqualis k, quod fieri poteſt. ducantur etiam in circulo duæ diametri c b, d f, ſeſe ad angulos rectos ſecantes in centro g. diuidentes igitur in duo æqualia angulum d c g, & huius iterum dimidiũ in duo æqua: ab hac diuiſione nõ deſiſtemus, donec angulum offenderimus quempiam, qui ſit minor duplo anguli m l n, qui sit p g c. & ducatur linea recta p c, quæ erit latus figuræ plurium angulorum æquilateræ. angulus enim p g c, angulum d g c metitur. & p c arcus eadem ratione d c arcum metitur, & circulum totum. quapropter figura quæ-

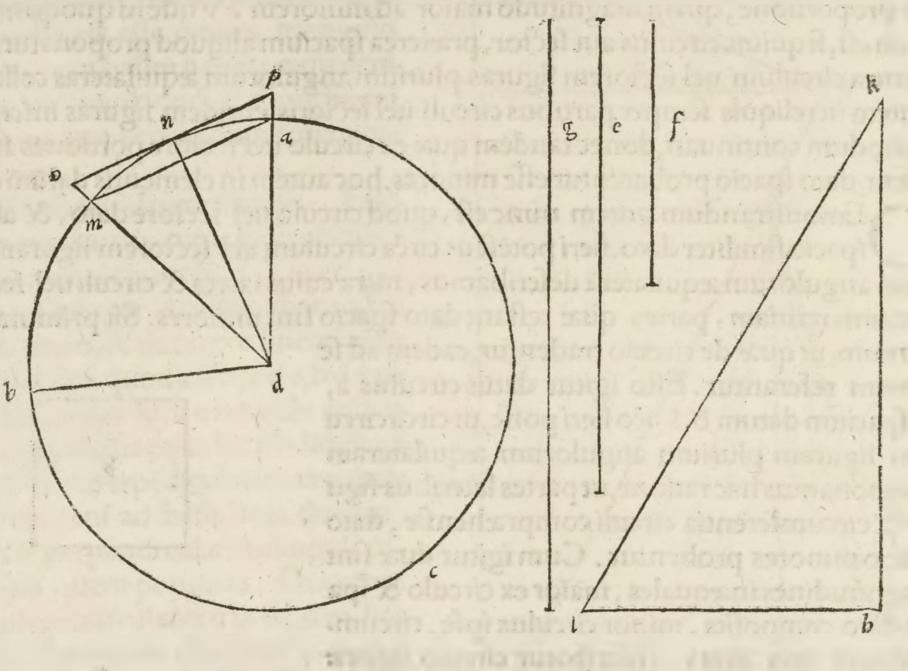


sita erit circulo inscripta. Secetur item in duo æqua angulus p g c, ducta g q linea, & à puncto q ducatur una recta contingens circulum s q t, occurrens lineæ g p in puncto s, & lineæ g c in pũcto t, extra circulum ductis utrisq;: erit igitur s t recta, latus figuræ plurium angulorum æquis lateribus compræhensæ, quæ circulo sit circumducta. At uero quoniam p g c angulus minor est duplo anguli m l n, duplus autem angulo q g c, minor erit angulus q g c angulo m l n. cumq; o angulus, ubi g q secat rectam p c, & angulus m sint recti: l n recta ad l m rectam maiore proportione referetur, quàm g c recta ad g o rectam. est autem g c recta æqualis g q rectæ: ex hoc g q rectam ad g o rectam constat minori proportione referri, quàm l n rectam ad l m rectã. prçterea l n ad l m minori proportione tenetur, quàm a recta ad b rectam. Est igitur s q t latus figuræ plurium angulorũ æquilateræ circulo circumductę, & p o c latus intra circulum collocatæ figuræ; quæ sic se habent, ut propositum fuerat inueniri posse.

4 DAtis item duabus magnitudinibus inæqualibus, & circuli cuiuspiam sectore dato, potest altera circa sectorem, altera intra eundem aptari figura pluriũ angulorũ, ita ut exterioris latus ad latus interioris minorẽ proportionem retineat, quàm magnitudo maior data ad minorem. Sint itẽ duæ magnitudines inæquales datæ, e maior, f minor. Esto etiam quiuis circulus a b c, cuius centrum d, sectorque eius ad ipsum d terminatus a d b. iubemur itaq; ipsi sectori circumaptare, & intra duas figuras plurium angulorum reliqua latera habentes æqualia, exceptis d a & d b, ita effectas ut propositio dicit. Esto inuentas esse duas rectas inæquales g h k, maiorem g, atq; ita effectas ut g recta ad h k minorem proportionem habeat, quàm magnitudo maior ad minorem. hoc enim fieri posse suprà demonstrauimus. & à puncto h ducatur perpendicularis h l, & à puncto k ducatur ad rectam h l recta æqualis g rectæ. quod fieri potest, cum g recta sit longior h k. diuiso igitur angulo a d b in duo æqua, & item eius dimidio in duo æqua distributo, & hac diuisione perducta quousq; occurrat angulus minor duplo anguli h k l, qui

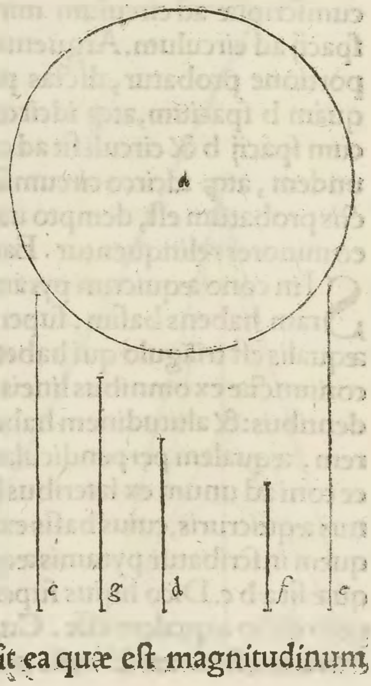
sit

sit a d m. erit igitur a m recta latus figuræ plurium angulorum intra sectorem collocatæ. Si præterea diuidamus in duo æqua angulum a d m, ducta recta d n, & à puncto n eduxerimus rectam p n o, contingentem sectorem in puncto n, occur-



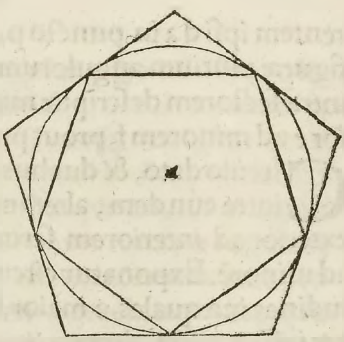
rentem ipsi d a in puncto p, & ipsi d m in puncto o, fecerimus p n o rectam, latus figuræ plurium angulorum ipsi sectori circumductæ, quod ad latus figuræ iam intra sectorem descriptæ minorem seruat proportionem, quàm magnitudo maior e ad minorem f, prout propositio dicebat fieri posse.

CIrculo dato, & duabus magnitudinibus inæqualibus, ipsi circulo posse unã intra eundem, alteram extra aptare figuram plurium angulorum, quarum exterior ad interiorem seruat minorem proportionem, quàm magnitudo maior ad minorē. Exponatur circulus a, & duæ magnitudines inæquales, e maior, f minor. Oportet igitur ipsi circulo a alteram intra, alteram extrà aptare figuram plurium angulorum, ita ut fiat quod propositum est. Constituam primo duas rectas inæquales, c maiorem, d minorem, ita ut c minori proportione referat ad ipsam d, quàm e ad ipsam f. accepta media proportionali inter c & d, quæ sit g, constat c ipsa g esse maiorem. Circumdetur itaque circulo figura plurium angulorum, & altera similis illi intra eundem statuatur, hoc pacto ut latus exterioris ad latus interioris minorem teneat proportionem, quàm c ad ipsam g, quemadmodū suprà docti fuimus. Quoniam igitur figuræ exterioris ad interiorem est ea quæ lateris illius ad latus istius duplicata proportio, hæc autem ipsa minor habetur quàm c ad ipsam g duplicata, quæ est c ad ipsam d, quæ quidem & ipsa minor est cōstituta quàm ea quæ maioris magnitudinis habetur ad f minorem: colligitur inde, ut figuræ exterioris & figuræ interioris proportio multo minor sit ea quæ est magnitudinum e & f proportione. 5

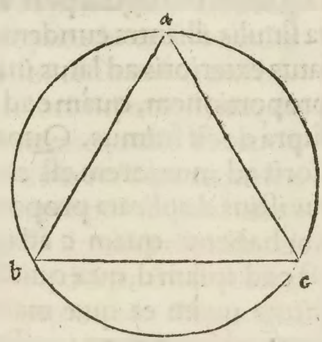


Similem ostendemus, duabus inæqualibus magnitudinibus datis, & circuli sectore dato, posse duas, alteram circa ipsum, alteram intra constituere figuras plurium angulorum inter se similes, quarum exterior ad interiorem minori teneatur proportione, quàm magnitudo maior ad minorem. Vnde id quoq; manifestum est, si quiuis circulus aut sector, præterea spacium aliquod proponatur, posse intra circulum uel sectorem figuras plurium angulorum æquilateras collocari, & item in reliquis semper partibus circuli uel sectoris eundem figuras inscribendi modum continuari, donec tandem quæ ex circulo uel sectore portiones superessent, dato spacio probarentur esse minores. hoc autem in elementis datum est.

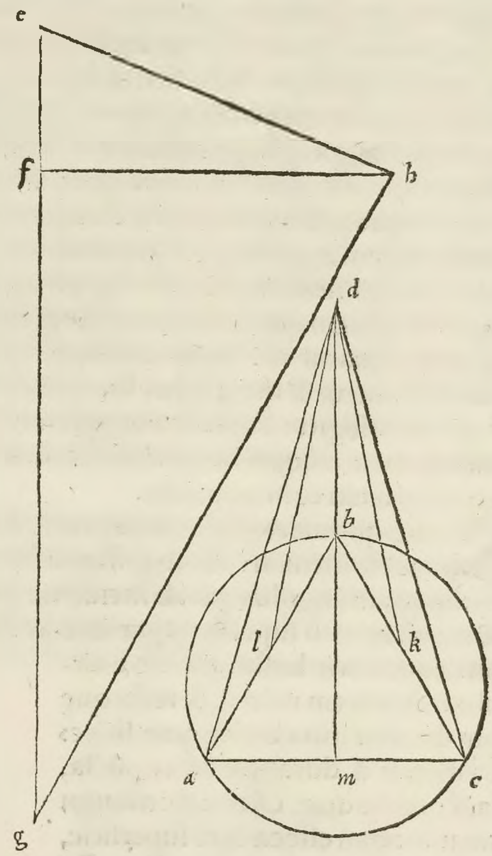
6 DEmonstrandum autem nunc est, quod circulo uel sectore dato, & aliquo spacio similiter dato, fieri potest ut circa circulum uel sectorem figuram plurium angulorum æquilaterã describamus, intra cuius latera & circuli uel sectoris circumferentiam, partes quæ restant dato spacio sint minores. Sit primum conuentum, ut quæ de circulo tradentur, eadem ad sectorem referantur. Esto igitur datus circulus a, & spacium datum b. Dico fieri posse, ut circa circulum figuram plurium angulorum æquilateram componamus hac ratione, ut partes lateribus figuræ & circumferentia circuli compræhensæ, dato spacio minores probentur. Cum igitur duæ sint magnitudines inæquales, maior ex circulo & spacio dato composita, minor circulus ipse, circumscribatur una altera, inscribatur circulo figuræ plurium angulorum, ita ut circumscripta minorem proportionem habeat ad inscriptam, quàm dicta magnitudo maior ad minorem. Dico hanc figuram circumscriptam esse, cuius partes à lateribus suis & circumferentia cõprehensæ minores sunt b spacio. Si enim circumscriptæ ad inscriptã minor sit proportio, quàm circuli, & spacij b ad circulum, inscripta uero maior est circulus, erit circumscriptæ ad circulum minor quàm circuli, & spacij ad circulum. Arguenti igit̃ ex disiũcta proportione probatur, dictas partes minorem proportionem ad circulum habere, quàm b spacium, atq; idcirco minores esse b spacio dato. Vel etiam hac ratione, cum spacij b & circuli sit ad circulum proportio maior quàm circumscriptæ ad eundem, atq; idcirco circumscriptam minorem esse circulo & spacio b simul iunctis probatum est, dempto utrinq; circulo: illic spacium b maius, istic partes dictæ eo minores relinquentur. Eandem rationem in sectore sequemur.



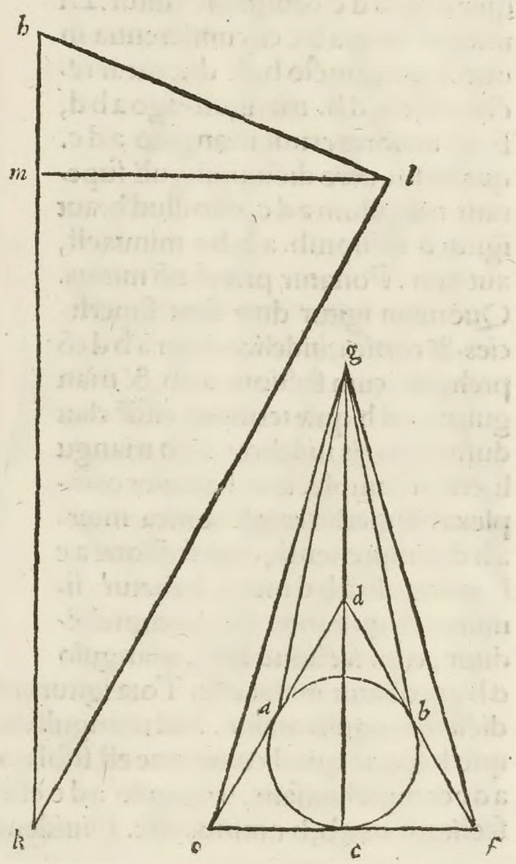
7 SI in cono æquicruri pyramis inscribatur ęquilateram habens basim, superficies eius dempta base æqualis est triãgulo qui habet basim æqualem lineæ coniunctæ ex omnibus lineis basim pyramidis claudentibus: & altitudinem habet lineam perpendicularem, æqualem perpendiculari quæ ducta sit à uertice coni ad unum ex lateribus basis pyramidis. Sit conus æquicruris, cuius basis existat circulus a b c, intra quem inscribatur pyramis æquilaterã basim habens, quæ sit a b c. Dico huius superficiẽ, basi dempta, triãgulo dicto æqualem esse. Cum enim conus sit æquicruris constitutus, & basis pyramidis æquilatera ponatur, altitudines triangulorum



rum basim pyramidis claudentium perpendiculares inter se æquales esse oportet, trianguli uero basim habent a b, b c, c a. altitudinem autem eam quàm diximus perpendicularem: quare triangulos necesse est esse omnes triangulo æquales, qui basim habeat æqualem a b, b c, c a simul iunctis: altitudinem uero eam quæ sæpe dicta est, perpendicularem.



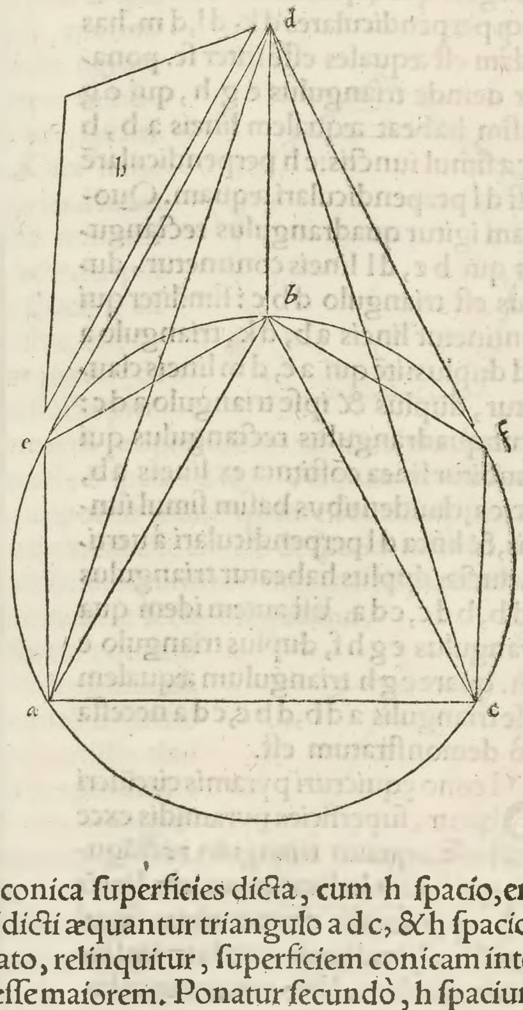
Alia clarior demonstratio. Esto conus æquicruris, cuius basis circulus a b c, uertex aũt punctũ d. & in eũ pyramis inscribatur, basim habens a b c æquilateram, & ducantur lineæ rectæ d a, d b. Dico quod a d b, a d c, b d c trianguli æquales sunt triangulo rectangulo, cuius basis ęqua sit trib. lineis trianguli a b c: perpẽdicularis uero, quæ à uertice coni ad basis latus ducitur, æqualis perpendiculari trianguli rectanguli quem ponimus. Ducantur itaq; perpendiculares d k, d l, d m. has palàm est æquales esse inter se. ponatur deinde triangulus e g h, qui e g basim habeat æqualem lineis a b, b c, c a simul iunctis: e h perpendicularẽ ipsi d l perpendiculari æquam. Quoniam igitur quadrangulus rectangulus qui b c, d l lineis continetur, duplus est triangulo d b c: similiter qui continetur lineis a b, d k, triangulo a b d duplus: itẽ qui a c, d m lineis clauditur, duplus & ipse triangulo a d c: fit ut quadrangulus rectangulus qui clauditur linea cõstituta ex lineis a b, b c, c a, claudentibus basim simul iunctis, & linea d l perpendiculari à uertice ducta, duplus habeatur triangulus a d b, b d c, c d a. Est autem idem quadrangulus e g h f, duplus triangulo e g h. quare e g h triangulum æqualem esse triangulis a d b, d b c, c d a necessariò demonstratum est.



SI cono ęquicruri pyramis circũscribatur, superficies pyramidis excepta base æquatur triangulo rectãgulo, qui basim habeat æqualem lineis basim pyramidis cõtinentibus simul iunctis, altitudinem uero lateri ipsius coni æqualem. Esto conus, cuius basis circulus a b c. huic pyramis circũscribatur, ita ut latera eius basis d e f

circum-circulum contingant. Dico igitur superficiem huius pyramidis, excepta base, triangulo dicto probari æqualem. Quoniam igitur ipsius coni axis supra basim a b c perpendiculariter erectus habetur, uidelicet suprà circulum a b c. & quæ ab eius centro rectæ ad contactus ducuntur, perpendiculares sunt ipsis d e, e f, f d contingentibus: erunt etiam quæ à g uertice coni ad eosdem contactus deductæ fuerint rectæ, g a, g b, g c, eisdem d e, e f, f d perpendiculares, quas inter se æquas esse positum est, cum sint latera coni. Ponatur itaq; triangulus h k l, qui habeat h k latus æquum lineis d e, e f, f d claudentibus basim pyramidis, & habeat m l perpendicularem æquam g a. Quoniam itaq; quadrangulus rectangulus qui continetur d e, a g lineis, duplus est e d g trianguli: & qui continetur d f, g b, duplus trianguli d f g: item qui continetur e f, e g, duplus trianguli e g f: erit igitur qui h k, & a g, quæ æquatur m l lineis continetur quadrangulus, duplus e d g, f d g, e g f triãgulis. Est autem & qui h k, l m lineis clauditur quadrangulus, duplus triangulo h k l. quare colligitur, superficiem pyramidis excepta base æquam esse triãgulo, qui basim habeat æquam lineis claudentibus basim pyramidis simul iunctis: altitudinem uero lateri coni æqualem.

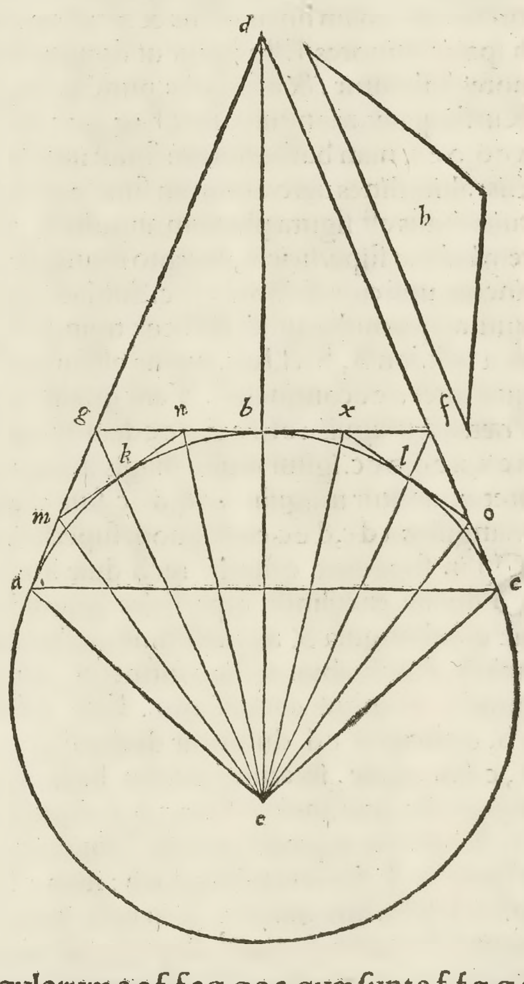
9 SI cono quouis exposito æquicruri, intra circulum, qui est basis ipsius coni, linea recta inciderit, & ab ipsius rectæ terminis duæ rectæ ad coni uerticem educantur: triangulus qui ab incidente & ab eductis ad uerticem comprehendit, minor est ea coni superficie quæ inter rectas ad uerticem ductas continetur. Esto coni æquicruris basim esse a b c circulum, uerticem uero d, & recta quędam ducatur intra basim quæ sit a c: & à uertice d, ducantur ad a c pũcta, d a, d c rectæ duæ. Dico a d c triangulum minorem esse ea coni superficie, quæ intra a d c comprehenditur. Diuidatur itaq; a b c circumferentia in duo æqua puncto b, & ducantur rectæ a b, c b, d b. trianguli ergo a b d, b c d maiores erunt triangulo a d c. quantum uero dicti trianguli superant triãgulum a d c, esto illud h: aut igitur h sectionib. a b, b c minus est, aut non. Ponatur primò nõ minus. Quoniam igitur duæ sunt superficies, & conica, uidelicet inter a b d cõprehensa, cum sectione a e b, & triangularis a d b quæ terminis eisdẽ clauduntur, lineis uidelicet a d b trianguli, erit ut complectens sit maior complexa. Superficies igit conica inter a b d comprehensa, cum sectione a e b, triangulo a b d maior habetur. similiter & quæ inter d b c comprehẽditur, cum sectione b f c, triangulo d b c probatur maior esse. Tota igitur conica superficies dicta, cum h spacio, erit dictis triangulis maior. Sed trianguli dicti æquantur triangulo a d c, & h spacio: ipso h spacio quod commune est sublato, relinquitur, superficiem conicam inter a d c comprehensam, triangulo a d c esse maiorem. Ponatur secundò, h spacium sectionibus a b, b c minus esse. Diuidentes igitur a b, b c arcus in duo æqualia, &



eorum

eorum dimidia rurſus in duo æqualia, ſumemus tandem ſectiones quæ ſint h ſpacio minores, ſintq; illæ a e, e b, b f, f c lineis contentæ. & ducatur rectæ d e, d f. Rurſus eadem prorſus argumentatione, ſuperficies coni inter a e d contenta, cum ſectione a e, triangulo a d e probatur eſſe maior. & ea quæ inter e d b, cum ſectione e b, triangulo e d b maior. Superficies igitur conica inter a d b comprehenſa, cum ſectionibus a e, e b, maior erit a d e, e b d triangulis. Cum autem a d e, e d b trianguli, ſint a d b maiores, uti demonſtratum eſt, multo magis erit ſuperficies coni inter a d b comprehenſa, cum ſectionibus a e, e b, maior triangulo a d b. atq; eadem ratione ſuperficies conica quæ inter b d c comprehendit, cum ſectionibus b f, f c, triangulo b d c maior eſſe oſtenditur. quare tota ſuperficies conica, quæ inter a d c cõprehenditur, cum ſectionibus a e, e b, b f, f c dictis, maior eſſe colligitur triangulis a b d, b d c. ipſi autem æquales ſunt triangulo a d c, & ſpacio h. atq; horum ſectiones dictæ h ſpacio ſunt poſitæ minores. reliquum eſt igitur, ut ſuperficies conica inter a d c comprehenſa, neceſſariò maior eſſe dicatur triangulo a d c: quod erat oſtendendum.

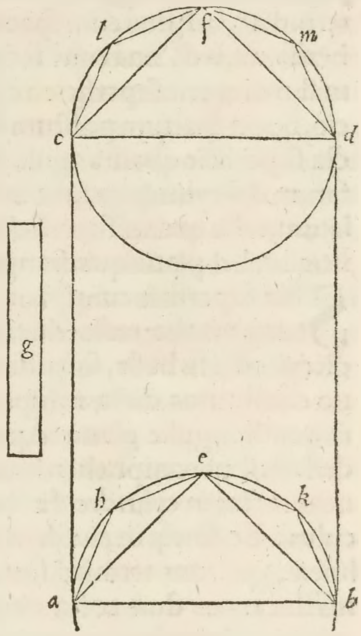
SI rectæ ductæ circulum, qui ſit coni baſis, contingant, in eodem plano cum cir- 10
culo conſtitutæ, atq; inuicem concurrant, & à punctis contactuum atq; cõcurſu rectæ ducantur ad uerticem coni trianguli à rectis circulum contingentibus, & ab his quæ à uertice ad dicta puncta deſcendunt comprehenſi, ſunt maiores ea ſuperficie coni quam dicti trianguli complectuntur. Eſto conus, cuius baſis circulus a b c, uertex autem punctum e, & circulum a b c contingentes ducãtur in eodem plano cum circulo quæ ſint a d, c d. & à puncto e, qui eſt uertex coni, ad puncta a d c rectæ ducantur, quæ ſint e a, e d, e c. Dico triangulos a e d, d e c maiores eſſe ea coni ſuperficie, quæ rectis e a, e c, & arcu a b c continet. Diuiſo enim arcu a b c per æqua in puncto b, ab ipſo puncto ducatur in utramq; partem recta, cõtingens circulum in dicto puncto, quæ ſit f b g, eritq; lineæ a c intra circulum æquediſtans. & f ſit punctũ quo ipſa incidit lineæ a d, punctum uero ubi incidit lineæ c d ſit g. deinde ab e uertice deducantur deorſum lineæ e f, e g. Quoniam igitur lineæ f d, & g d maiores ſunt ſimul iũctæ, quàm linea f g, ſi ſimul ſumantur communes a f & c g, erũt totæ a d, d c lineæ maiores a f, f g, g c. & quia e a, e b, e c ſunt latera coni, idcirco ſunt inter ſe æquales, cum conus ſit poſitus æquicruris. Sunt etiam perpendiculares lineis a d & c d, quia anguli e a f, e c g ſunt recti. Cum igitur triangulorum a e d, d e c baſes, ſcilicet a d, d c, ſint maiores baſibus triangulorum a e f, f e g, g e c, quæ ſunt a f, f g, g c:



eorum uero altitudines, id est perpendiculares, sunt inter se æquales, uidelicet e a, e b, e c. propter hoc erunt trianguli a e d, d e c, maiores triãgulis a e f, f e g, g e c. Quantum igitur trianguli a e d, d e c excedunt triangulos a e f, f e g, g e c, sit æquale spacio quod uocetur h. aut igitur h minus est eis plani particulis, quæ lineis rectis a f, f g, g c, & arcubus a b, b c circa circumferentiam compræhenduntur: aut non minus eisdem. Esto primum h non minus. Quoniam igitur duas superficies coniũctas habemus, unam pyramidis eius quæ basim habet f a g c quadrãgulam superficiẽ, quæq; uerticem habet e: alteram conicam, quæ inter a e c includitur, cum sectione a b c, hæcq; ambæ eisdem terminis insistunt, uidelicet trianguli a e c lineis. manifestum est ex hoc, superficiem pyramidis excepto triangulo a e c, maiorem esse conica superficie, unà cum sectione circuli a b c. Hac igitur sectione, quæ utrisq; superficiebus sumitur communis, remota ab utrisque, relinquentur trianguli a e f, f e g, g e c, unà cum plani particulis, quæ circa circumferentiam lineis rectis continentur: relinquetur etiam superficies conica a b c arcu, & e uertice comprẹhensa, quæ dictis triangulis unà cum particulis dictis ostensa est minor esse. Verum quoniam h spacium fuit positum non minus particulis illis: erunt idcirco dicti trianguli a e f, f e g, g e c unà cũ spacio h prædicta superficie conica maiores. ipsi uero trianguli unà cum h spacio æquãtur triangulis a e d, d e c. Erũt igitur a e d, d e c trianguli, dicta superficie conica ampliores. Esto secundò spaciũ h minus particulis dictis, tunc assidue circa circumferentiam a b c describemus figuras plurium angulorũ, semper diuidendo arcus in duo æqua, & à punctis sectionum lineas rectas educẽdo, quæ circulum contingant: nec ab ista opera desistemus, donec particulas circa circumferentiam lineis dictis & arcubus contentas, simul omnes habuerimus ipso h spacio minores. Esto igitur ut sumptẹ sint a m k, k n b, b x l, l o c, quæ h spacio minores habentur. & à singulis punctis singulæ lineæ rectæ ad uerticem e erigãtur. Rursus patet, triangulos a e f, f e g, g e c, maiores esse triangulis a e m, m e n, n e x, x e o, o e c. nam bases illorum simul iunctæ, sunt maiores basibus horum simul iũctis: altitudines uero omnium sunt æquales. Vnde rursus sequitur, quod pyramis cuius basis est figura plurium angulorũ, uidelicet a m n, x o c, uertex uero e maiorem habeat superficiem, excepto triangulo a e c, superficie conica quæ inter a e c cõtinetur, unà cum sectione a b c. Sublata igitur a b c, sectione utrisq; communi, reliquum pyramidis quod cõstat ex triangulis a e m, m e n, n e x, x e o, o e c, & particulis a m k, k n b, b x l, l o c, maius esse necesse est reliquo, scilicet superficie conica quæ inter a e c continetur. Verũ prædictis particulis spacium h positũ est maius. Præterea triãguli a e f, f e g, g e c demõstrati sunt esse maiores triãgulis a e m, m e n, n e x, x e o, o e c. igitur multo magis trianguli a e f, f e g, g e c, unà cũ spacio h, qui scilicet æquantur triãgulis a e d, d e c, sunt maiores conica superficie sæpe dicta. quare triangulos a d c, d e c, eadẽ quoq; superficie maiores esse, necessariò probatũ est.

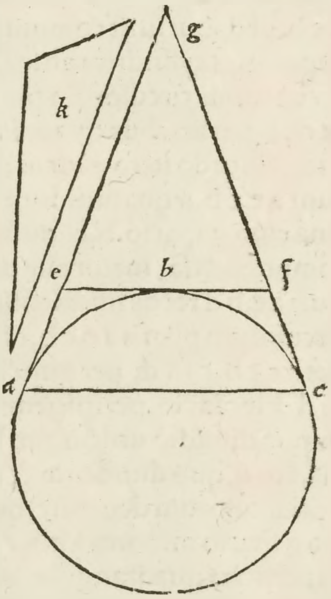
11 SI in superficie cylindri recti duæ lineæ rectæ fuerint ab eius capite ad basim ductæ, ea cylindri superficies quæ dictis lineis includetur, maior erit superficie quadrangula & æquedistantium laterum, quæ quidem superficies dictis lineis & alijs duabus rectis continetur, quæ duæ extrema prædictarum duarum puncta utrinque connectunt. Esto cylindrus rectus, cuius basis sit circulus a b, eius caput c d. ducantur duæ rectæ a c, b d: item duæ aliæ rectæ a b in basi, c d in capite, secantes circulos basis & capitis. Dico itaque, quod ea cylindri superficies quæ lineis rectis a c, b d cõprehenditur, maior est superficie a b c d plana, & laterum æquedistantium. Diuidantur enim a b, & c d arcus in duo æqua ad e f puncta. & ducant rectæ a e, e b: item c f, f d. hoc facto, quoniam a e, b e rectæ ipsa a b recta sunt maiores, & in ipsis stant duæ superficies quadrangulæ laterum æquedistantium, & æquẽ altæ ipsi cylindro & superficiei a b c d quadrangulæ, fit ut dictæ duæ superficies planẹ, quarum bases sunt a e, e b, superficie a b c d quadrã

gula plana maiores habeantur. Esto igitur g spaciũ æquale ei, quo illæ inueniuntur illa maiores. aut igitur g spacium minus est partibus plani, quæ continentur ab arcubus & rectis a e, e b, c f, f d, aut non minus est. Ponatur igitur primò non minus eis, tunc quoniam superficies cylindrica à lineis rectis a c b d abscisa, & superficies composita ex superficiebus quadrã gulis æquedistantium laterum, quarum bases sunt a e, e b: altitudo uero eadem cum cylindro & triangulis a e b, c f d terminum habent eundem, scilicet superficiem planam a b, c d rectis cõpræhensam, & ambæ sunt uersus eandem concauitatem collocatæ, colligitur superficiem cylindricam rectis lineis a b c d abscisam, simul cum portionibus circulorum a b, c d maiorem esse superficie composita ex superficiebus quadrangulis æquedistantium laterum, quarum bases sunt a e, e b: altitudo uero eadem cum cylindro. & ex triangulis a e b, c f d: sublatis utrinq; triangulis a e b, c f d, qui sunt communes utrisq;: relinquet̃ superficies cylindrica abscisa rectis a b, c d, unà cũ



sectionibus circulorum planis a e, e b, c f, f d: quæ sunt maiores superficie composita ex superficiebus quadrangulis æquedistantium laterum, quarum bases a e, e b sunt: altitudo uero eadem cum cylindro. Dictæ autem superficies, quarum bases sunt a e, e b, æquantur superficiei a c b d quadrangulæ, & æquedistantium laterũ, unà cum g spacio. Reliquum est igitur, ut cylindrica superficies rectis lineis a c, b d compræhensa, maior esse dicatur superficie quadrangula æquedistantium laterũ, quæ a c, b d rectis lineis cõtinetur. Esto igitur secundò, ut g spacium sectionib. circulorum planis a e, e b, c f, f d minus sit: tunc scindantur in duo æqua singuli arcus a e, e b, c f, f d, per puncta h k l m. & ducantur rectæ a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d. Hoc facto, perspiciemus à portionibus circulorum planis a e, e b, c f, f d, non minus dimidio unicuique suo ablatum esse per triangulos rectilineas a h e, e k b, c l f, f m d. quo diuidendi & auferendi modo seruato, necesse est tandem ad portiones circulorum deuenire, quæ sint g spacio minores. Esto igitur ut sumptæ sint dicto g spacio minores a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d. Similiter demõstrabimus quod superficies quadrangulæ æquedistantium laterum, quarũ bases sunt a h, h e, e k, k b, & altitudo æqualis cylindro maiores sunt superficieb. quadrangulis æquedistantium laterum, quarum bases sunt a e, e b, & altitudo æqualis cylindro. Cum igitur cylindrica superficies abscisa rectis lineis a c, b d, unà cum sectionibus circulorum planis a c b, c f d terminum habeant superficiem planam rectis lineis a c, b d contentam: præterea eundem terminum habeat superficies composita ex superficiebus quadrangulis æquedistantium laterum, quarum bases sunt a h, h e, e k, k b: altitudo uerò cũ cylindro est eadẽ, & ex rectilineis plani portionibus a h e k b, c l f m d: cumq; sint utręque in eandem concauitatis partem collocatæ, & cylindrica complectatur rectilineam, erit complectens maior cõplexa. Si igitur rectilineæ plani portiones a h e k b, c l f m d, quæ utrisq; communes sunt, auferantur, restabit superficies cylindrica rectis a c, b d compræhensa, unà cum sectiunculis circulorũ planis a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d: quæ maior esse concluditur superficieb. quadrangulis æquedistantiũ laterum, quę similiter sunt relictæ: quarum bases habentur a h, h e, e k, k b: altitudo eadem cum cylindro. Hæ autem superficies nuper dictæ maiores sunt superficiebus quadrangulis æquedistantium laterum, quarum bases sunt a e,e b. & altitudo eadem cum cylindro. Item istæ improprie dictæ superficies quadrangulæ, sunt æquales superficiei quadrangulæ æquedistantium laterum a c,b d, unà cum spacio g. Superficies igitur cylindrica rectis lineis compræhensa a c,b d, unà cum sectiunculis circulorum planis a h,h e,e k, k b,c l,l f, f m, m d, maior erit superficie a c,b d quadrangula æquedistantium laterũ, unà cũ g spacio, quod spacium positum est maius dictis sectiunculis. Hoc igitur spacio g à dicta superficie quadrangula sublato, dictis etiam sectiũculis a h,h e,e k,k b,c l,l f, f m,m d, à cylindrica subtractis, cum maius de minori, & minus de maiore sit ablatum, relinquetur superficies cylindrica rectis a c,b d compræhensa, maior superficie a c, b d plana quadrangula.

12 SI in superficie cuiuspiam cylindri recti duæ rectæ lineæ ductæ sint, & ab earũ terminis aliæ rectæ ducantur contingentes circulum, qui quidem circulus dicti cylindri sit basis, sitq; idem cum lineis rectis eum contingentibus in eodem plano constitutus, dictæ insuper contingentes ad unum concurrant: tunc superficies quadrangulæ planæ æquedistantium laterum ab ipsis contingentibus & cylindri lateribus compræhensæ, maiores erunt ea superficie cylindri quæ intra duas lineas rectas in cylindro ductas continetur. Esto itaq; cuiuscunq; cylindri basis circulus a b c, sintq; in eiusdem superficie duæ rectæ lineæ, quarum termini sint a c. à quibus terminis ducantur duæ rectæ circulum contingentes, atq; in eodem plano cum circulo cõstitutæ, & itẽ concurrentes in puncto g. notentur & in capite cylindri aliæ duæ à terminis ductarũ in cylindro linearum ductæ, & in eodem plano cum circulo capitis constitutæ, & ipsum capitis circulum contingentes, & uersus eandem partem concurrẽtes in quam lineæ circulum basis contingentes concurrerunt. Hoc facto, ostendendum est superficies planas quadrangulares æquedistantibus lateribus contentas, quæ uidelicet superficies cõpræhenduntur à prædictis lineis contingentibus, & à lateribus cylindri, maiores esse superficie cylindri quæ secundum a b c arcum basis est compræhensa. Diuiso enim a b c arcu in duo æqua in pũcto b, ab ipso b puncto ducatur in utramque partem recta contingens circulum basis, & applicãs extremitates suas lineis basim contingentibus in punctis e f. & ab ipsis punctis e f erigantur duæ



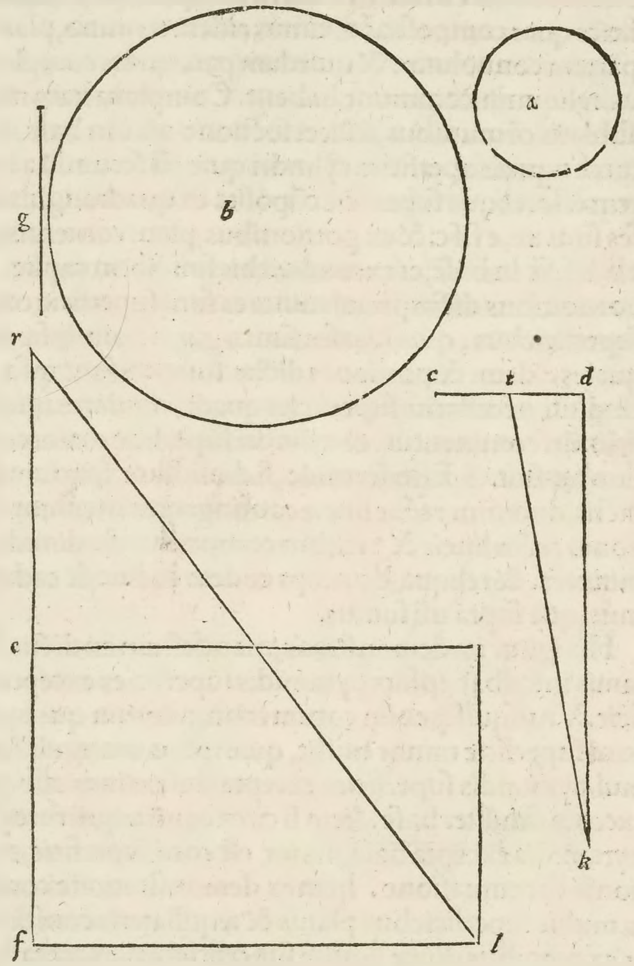
rectæ usq; ad superficiem capitis, quæ sint æquedistantes axi cylindri. tunc superficies quadrangulares æquedistantium laterum, quæ continentur lineis rectis a g & g c, & à lateribus cylindri, maiores sunt eis superficiebus quadrangularibus æquedistantium laterum, quæ sub rectis a e,e f,f c, & sub laterib. cylindri sunt cõpræhensæ. Cum enim e g & g f maiores sint e f, si posuerimus a e,f c communes, sequetur totas simul a g,g c sumptas maiores esse a e,e f, f c. & ideo superficies a g,g c, superficiebus a e,e f,f c simul sumptis esse maiores. Quo autẽ sunt maiores illis, sit æquale spacio k. dimidium igitur spacij k, aut est maius portionibus plani compræhensis ab a e,e f,f c rectis lineis & ab arcubus a d,d b,b h, h c, aut non est maius. Esto primò maius. eius itaq; superficiei quæ componitur ex quadrangularib. & æquilateris superficiebus, quarum bases sunt a e,e f,f c, & ex quadrãgula plana a e,f c, in base cylindri, & alio quadrangulo ei simili in capite eiusdem cylindri constituto, termini sunt lineæ rectæ claudentes superficiem quadrangularem, cuius

basis

basis est linea recta a c. Sunt etiam prædictæ lineæ termini eius superficiei, quæ cõponitur ex cylindri superficie illa quæ secundum a b c arcum sumpta est, & ex sectionibus a b c in base, & altera in capite, quæ similis est illi. Duæ igitur dictę superficies quas compositas diximus eidem termino, plano insistunt, & sunt in eandem partem conuolutæ. & quædam pars unius complectitur quandam partem alterius, reliquum commune habent. Complexa itaq; minor erit complectente. Igitur sublatis cõmunibus, scilicet sectione a b c in base, & ea quæ sibi similis est in capite relinquetur superficies cylindri quæ est secundũ a b c sumpta, quam cõstat minorem esse reliqua superficie cõposita ex quadrangularib. superficiebus, quarum bases sunt a e, e f, f c: & ex portionibus plani contentis ab arcubus & lineis rectis a e, e b, b f, f c in base, et ex totidem his similib. in capite. Sed superficies nuper dictę cũ portionibus dictis, simul minores sunt superficie composita ex quadrangularibus superficiebus, quarũ bases sunt a g, g c. nam ipsæ cum k spacio fuerant positæ æquales eidem. & portiones dictæ sumptæ sunt ipso k spacio minores. quare concluditur necessariò, superficies quadrangulares quæ lineis rectis a g, g c, & laterib. cylindri continentur, ea cylindri superficie maiores esse, quæ secundum a b c arcũ sumpta fuit. Esto secundò, si dimidium spacium k nõ fuerit maius portionibus dictis, ducentur rectæ lineæ contingentes circulum, ut suprà factum est, donec portiones rectis lineis & arcubus compræhensæ dimidio k spacio simul sumptæ sint minores. & reliqua deinceps eodem ordine & eadem arguendi ratione conficiemus, qua suprà usi sumus.

His igitur ita demonstratis, manifestum ex dictis fit, quod si cono æquicruri pyramis inscribatur, ipsius pyramidis superficies excepta base, minor est conica superficie. Vnusquisq; enim eorum triangulorum qui pyramidem compręhendunt, ea coni superficie minor existit, quæ ipsius trianguli lateribus insistit. quare tota simul pyramidis superficies excepta base minor esse probatur tota coni superficie, excepta similiter base. Item si circa conũ æquicrurem pyramis aptetur, superficies pyramidis excepta base, maior est coni superficie, excepta similiter base eadem rationis continuatione. Item ex demonstratione constat, si in cylindro recto figura multis superficiebus planis & æquilateris constituta inscribatur, quod superficies ex omnibus dictæ figuræ superficiebus excepta base collecta, minor necessariò existit superficie cylindri excepta base. nam unaquæq; superficies dictæ figuræ parallelis lateribus constans, minor est ea cylindri superficie quæ sibi incumbit. Item si circa cylindrum figura multis superficiebus planis & parallelis lateribus constituta circumponatur, superficies dictæ figuræ ex omnibus suis superficiebus excepta base collecta, maior est superficie cylindri excepta similiter base.

CViuslibet cylindri recti superficies, excepta base, illi circulo æqualis esse probatur, cuius quidem circuli semidiameter inter latus cylindri & diametrum basis eius media secundum proportionem existat. 13 Esto cuiuspiam cylindri recti basis circulus à diametro, cuius æqualis ponatur linea c d, lateri uero cylindri linea e f æquetur. linea uero g statuatur inter e f lineam, & c d lineam, media secundum proportionem. describatur etiã circulus b, cuius semidiameter sit æqualis lineæ g. his constitutis, demonstrandum est b circulum dicti cylindri superficiei esse æqualem, excepta cylindri base. Et si non sit ei æqualis, aut maior erit, aut minor necessariò. Esto primũ, si fieri potest, minor. tunc cum duas magnitudines inæquales habeamus, circulum b, & superficiem cylindri dictam, possumus intra circulum b unam figuram rectilineam multorũ angulorum & æqualium laterum inscribere, & alteram illi similem eidem circulo circumscribere hoc pacto, ut circumscriptę ad inscriptam minor proportio habeatur, quàm superficiei cylindri dicti ad circulũ. Intelligamus igitur ita circũscriptam & inscriptam dicto circulo esse, ut posuimus, dictam figuram. deinde circa circulum a circumscribatur rectilinea figura, similis uidelicet illi quæ circa b circulum intelligitur circumscripta, & ab angulis & punctis dictæ figuræ rectilineæ circulo a circumscriptæ erigantur lineæ rectæ uersus caput cylindri, quæ cōcludent figuram plurium laterum & æqualium circa ipsum cylindrum descriptam. Esto etiam perimetro eius figuræ rectilineæ circa a circulum constitutæ, æqualis k d linea. iterū ipsi k d sit æqualis l f. sit aūt dimidiū ipsius c d linea c t, & fiat triangulus rectāgulus k d t, ita quòd angulus rectus sit ad punctū d. erit igit triangulus k d t, æqualis figuræ rectilineæ, quam circa a circulum suprà descripsimus: quoniā dictus k d t triangulus basem habet æqualem perimetro illius figuræ, & altitudinem æqualem lineæ ex centro a ad circumferentiam ductæ. Super e f constituatur figura lineis quatuor parallelis contenta, & rectis angulis. Huius figuræ superficies probatur esse æqualis superficiei figuræ rectilineæ circa cylindrum suprà descriptæ, quoniam continetur linea e f æquali lateri cylindri, & linea f l æquali basi perimetræ dictæ figuræ circa cylindrum constitutæ. Ponatur item e r linea æqualis e f lineæ, & ducatur linea r l, erit confectus triangulus f r l æqualis superficiei e l parallelogrāmæ: quare & idem triangulus æqualis erit superficiei figuræ circa cylindrum stantis. & quoniam rectilinea figura circa b circulum descripta, similis est figuræ rectilineæ circa ipsum a circulū descriptæ, habebūt istæ duæ figuræ inter se proportionem illam, quam habent semidiametri dictorum circulorum a & b, secundum potentiam. igitur triangulus k d t, habebit eandem proportionem ad figuram rectilineam circa b circulum descriptam, quam habet t d linea ad lineam g secundum potentiam. nam t d, g lineæ æquantur lineis quæ ex centris ducuntur ad circumferentias. Sed quam proportionem habet linea t d ad lineam g potestate, hanc habet t d linea ad lineam r f longitudine. nam g linea inter t d & r f lineas, media est secundum proportionem. Propterea quòd etiam inter e d & e f lineas media est secundum proportionem.



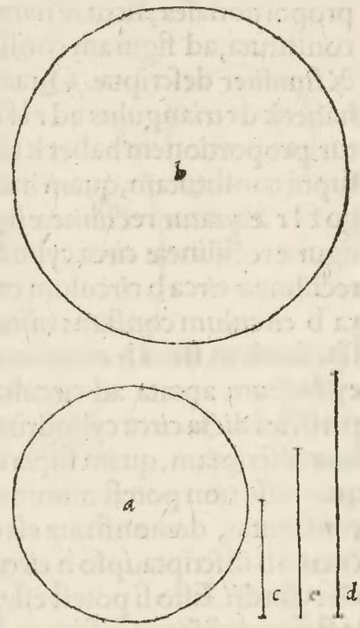
Quomodo autem hoc fit, declaratur sic. Quoniā enim d t linea æquatur t c lineæ, & r e linea e f lineæ est æqualis: linea igitur c d dupla est lineæ t d, & linea r f dupla r e. Ergo sicut se habet linea d c ad lineam d t, sic linea r f ad f e. Id igitur quod fit ex c d in e f, æquatur ei quod producitur ex t d in r f. Quod autem ex c d in e f producitur, æquale est ei quod fit ex g linea in se ducta. igitur quod fit ex t d in r f, æqua-

æquatur ei quod fit ex g in se. Est ergo sicut t d ad g, ita g ad r f. quare sicut t d se habet ad r f, sic quadratum t d ad quadratum g. Nam si tres lineæ ponãtur continuæ proportionales, sicut se habet prima ad tertiam, ita figura æquilatera super primã constituta, ad figuram constitutam super secundam, si fuerit similis dictæ figuræ, & similiter descriptæ. Quam proportionem habet t d ad r f longitudine, eandem habet k d t triangulus ad r l f triangulum, cum k d & l f sint æquales. Eandem igitur proportionem habet k t d triangulus ad rectilineam figuram circa b circulum suprà constitutam, quam habet t k d triangulus ad r f l triangulum. Triangulus ergo f l r æquatur rectilineæ figuræ circa b circulum descriptæ. quare & superficies figuræ rectilineæ circa cylindrum suprà descriptæ æqualis erit superficiei figuræ rectilineæ circa b circulum constitutæ. At uero quoniam rectilinea superficies circa b circulum constans minorem proportionem habet ad superficiem rectilineã sibi similem, intra b circulum inscriptam, quàm habeat superficies rectilinea circa cylindrum aptata ad circulum b: propter hoc minorẽ habebit proportionem superficies dicta circa cylindrum constans, ad superficiem rectilineam intra b circulum inscriptam, quàm superficies cylindri ad circulum b. & permutatim quoque: quod esse non potest omnino. nam superficies figuræ rectilineæ circa cylindrum constitutæ, demonstrata est esse maior superficie cylindri. rectilinea uero figura circulo b inscripta, ipso b circulo minor existit. Nõ est igitur b circulus minor superficie cylindri. Esto si potest esse, quod ponatur maior. Rursus intelligatur in b circulo figura rectilinea inscripta, & eidem altera circumscripta similis inscriptæ, ita ut circumscriptæ ad inscriptam minor sit proportio, quàm circuli b ad superficiem cylindri. et inscribatur in a circulo figura polygonia, similis ei quæ b circulo fuit inscripta: & erigatur, ut suprà, figura rectilinea ex angulis figuræ circulo a nuper inscriptæ, & rursus k d linea sit æqualis perimetro figuræ rectilineæ in a circulo inscriptæ. Sit etiam l f linea æqualis eidem. Istis sic positis, cætera ut suprà teneantur, erit triangulus k t d maior figura rectilinea circulo a inscripta: quoniam basis ipsius trianguli æqualis est perimetro dictæ figuræ: altitudo uero maior ea linea quæ à centro a ducitur perpendiculariter ad unũ latus dictæ figuræ. At uero e l superficies quadrilatera æquatur superficiei quæ fit cõposita ex quadrilateris superficieb. omnib. figuræ rectilineæ cylindro suprà inscriptæ: quoniã dicta e l superficies cõtinetur à latere cylindri, & à linea quæ æqualis est posita perimetro figuræ dicto circulo a inscriptæ, quæ est basis figuræ rectilineæ quæ cylindro fuit inscripta. Quare etiam l r f triangulus, est æqualis superficiei dictæ figuræ cylindro inscriptæ. Et quoniam similes sunt rectilineæ figuræ in circulo a b inscriptæ, proportionem inter se eandẽ habebunt, quam habent suæ inter se diametri in potentia: trianguli quoque k t d & f r l inter se habẽt proportionem, quam habẽt dictorũ circulorum semidiametri in potentia. Eandem igitur proportionem habebit rectilinea superficies circulo a inscripta, ad rectilineam circulo b inscriptam, quam habet triangulus k t d ad triãgulum l f r. Rectilinea uero superficies circulo a inscripta, minor est k d t triangulo. quare & eandem minorem esse oportet superficie figuræ rectilineæ cylindro inscriptæ: quod sanè esse non potest. quoniam minorem habet proportionem figura rectilinea circulo b circumscripta, ad figuram sibi similem eidem b inscriptam, quã circulus b ad superficiem cylindri: & permutatim. Maior autem est figura rectilinea circulo b circumscripta, quàm ipse b circulus. maior igitur est figura rectilinea circulo b inscripta, quàm sit cylindri superficies: quare et quàm sit superficies figuræ rectilineæ cylindro inscriptæ. non erit igitur maior circulus b superficie cylindri. Et demonstratum est quod minor esse nõ potest. igitur necesse est eidem esse æqualem.

CViuslibet coni æquicruris superficies excepta base æqualis est circulo, cuius semidiameter media est secundum proportionem inter latus coni & semidia- 14

metrum

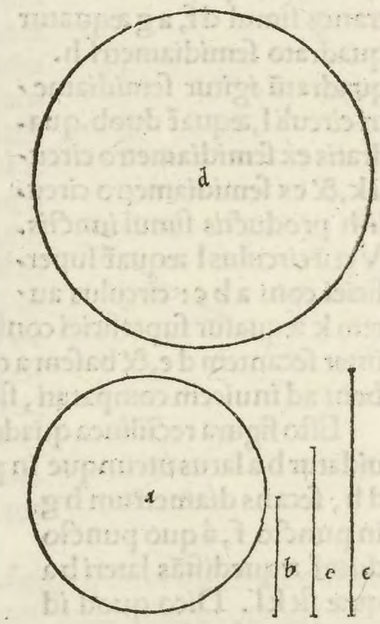
metrum circuli, qui quidem circulus dicti coni basis existat. Esto conus æquicruris, cuius basis sit circulus a, eius circuli semidiameter sit c: lateri uero coni esto d æqualis. media autem inter d & c, secundum proportionem esto e. ponatur deinde b circulus, cuius semidiameter sit æqualis e lineæ. Assero igitur, b circulum æquum esse superficiei dicti coni, excepta base. Et si non concedatur æqualis ei, esto aut maior ea, aut minor dicetur. Primum igitur ponatur minor, si fieri potest. habebimus itaque duas magnitudines inæquales, superficiem uidelicet coni, & circulum b. & coni superficies ponatur maior. Potest igitur intra circulum b, figura una polygonia inscribi, & æquilatera: & altera eidem circumscribi similis inscriptæ, ita ut circumscriptæ ad inscriptam minor sit proportio, quàm superficiei coni ad b circulum. Intelligatur itaque sic factum esse. deinde circa circulum a, figura polygonia circumscribatur similis ei quæ b circulo intelligitur circumscripta: & ab ea quæ circulo a circumscripta est erigatur pyramis ad uerticem coni dicti, quæ eundem uerticem cum cono habebit. Quoniam igitur figuræ polygoniæ circulis a & b circumscriptæ similes sunt effectæ, eandem inter se habebunt proportionem, quam habent semidiametri dictorum circulorum in potentia. Quam uero habet semidiameter c ad semidiametrum e, eandem habet c ad ipsum d in longitudine: & quam habet c ad d in longitudine, eandem habet figura polygonia circulo a circumscripta, ad superficiem pyramidis circa conum erectæ. nam c æqualis est perpendiculari, quæ à centro a circuli ducitur ad unum latus figuræ polygoniæ, linea uero d lateri coni est æqualis. Cõmunis uero est altitudo, linea æqualis perimetro dictæ polygoniæ figuræ. & superficies pyramidis, excepta base, æquatur dimidio superficiei quæ producitur ex d latere coni in lineam æquam perimetro dictæ figuræ polygoniæ. & superficies eiusdem figuræ polygoniæ æquatur dimidio superficiei, quæ producitur ex c linea in eandem lineam dicto perimetro æqualem. Eandem igitur proportionem habebit rectilinea figura circulo a circumscripta, ad rectilineam figuram circulo b circumscriptam, quam habet eadem superficies ad superficiem pyramidis cono circumscriptæ. atque idcirco superficies pyramidis dictæ, æqualis erit figuræ rectilineæ circulo b circumscriptæ. At uero quoniam dicta figura circulo b circumscripta, ad eam sibi similem quæ ipsi b fuit inscripta minorem habet proportionem quàm superficies coni ad circulum b, sequitur ut superficies pyramidis circa conum aptatæ, ad figuram rectilineam circulo b inscriptam minorem habeat proportionem, quàm superficies coni ad circulum b: quod quidem esse non potest. nam superficies pyramidis ostensa est maior esse superficie coni. Figura uero rectilinea circulo b inscripta, ipso b minor existit. non est igitur b circulus minor superficie coni. Dico præterea, quod neque maior esse potest. Quod si potest, esto maior. & rursus intelligatur b circulo figura una plurium angulorum inscripta, & altera illi similis circumscripta, ita ut circumscriptæ ad inscriptam minor proportio habeatur, quàm b circuli ad superficiem coni. & ipsi circulo a intelligatur inscriptam esse figuram multorum angulorum, similem illi quæ b circulo fuit inscripta. & ab hac figura erigatur pyramis intra conum inscripta, quæ eundem uerticem cum ipso cono habeat. Quoniam igitur figuræ polygoniæ ipsis a & b circulis inscriptæ positæ fuerunt similes, eandem inter se proportionem retinebunt,



quam

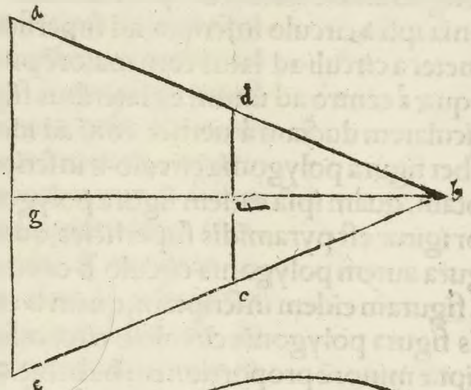
quam habeãt dictorum circulorum ſemidiametri inter ſe potentia. Eandem igitur
habet figura polygonia, ad figuram polygoniam proportionem, quam habet c ad
lineam d, in longitudine. c autem ad ipſam d maiorem habet proportionẽ, quàm
figura polygonia ipſi a circulo inſcripta, ad ſuperficiem pyramidis cono inſcriptæ.
nam ſemidiameter a circuli ad latus coni maiorẽ proportionem habet, quàm per-
pendicularis, quæ à centro ad unum ex lateribus figuræ polygoniæ ducitur, habe
at ad perpendicularem ductam à uertice coni ad idem latus. Quare maiorem pro-
portionem habet figura polygonia circulo a inſcripta, ad poligoniam figuram b
circulo inſcriptam, quàm ipſa eadem figura polygonia habeat ad ſuperficiem py-
ramidis. Maior igitur eſt pyramidis ſuperficies, quàm figura polygonia circulo b
inſcripta. Figura autem polygonia circulo b circumſcripta, minorem habet pro-
portionem ad figuram eidem inſcriptam, quàm b circulus ad ſuperficiẽ coni. Mul
to igitur magis figura polygonia circulo b circumſcripta, ad ſuperficiem pyrami-
dis cono inſcriptæ minorẽ proportionem habebit, quàm ipſe b circulus ad ſuper-
ficiem coni: quod eſſe non poteſt. nam figura polygonia b circulo circumſcripta,
maior eſt eo circulo: ſuperficies uero pyramidis cono inſcriptæ, minor eſt ſuperfi-
cie coni. Oſtenſum itaq; eſt, quod b circulus neq; coni ſuperficie maior, neque mi-
nor eſſe poteſt. relinquitur ergo, ut neceſſariò ſit ei æqualis.

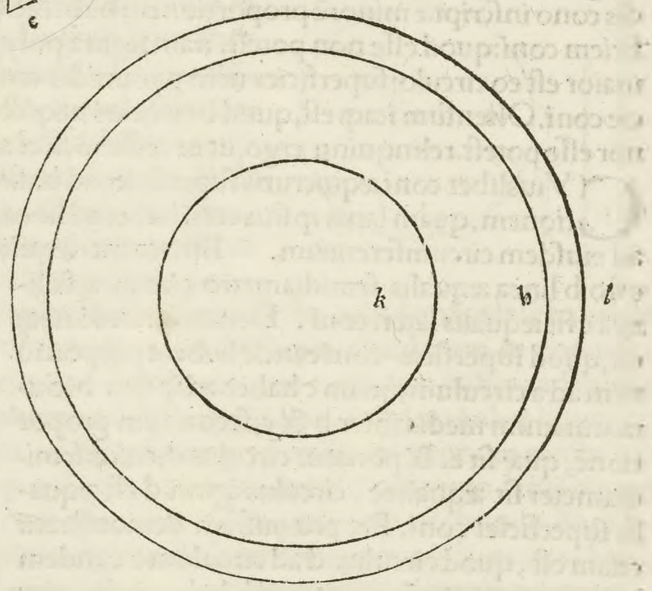
CVIuslibet coni æquicruris ſuperficies ad baſim ſuam, eandem habet propor 15
tionem, quàm latus ipſius coni habet ad lineam eductam à centro baſis coni
ad eiuſdem circumferentiam. Eſto conus æquicruris, cuius baſis ſit circulus a,
eſto b linea æqualis ſemidiametro circuli a, & li-
nea c ſit æqualis lateri coni. Demonſtrandũ itaq;
eſt, quod ſuperficies coni eandẽ habeat proportio
nem ad a circulum, quam c habet ad ipſam b. Su-
matur enim media inter b & c, ſecundum propor
tionẽ, quæ ſit e. & ponatur circulus d, cuius ſemi-
diameter ſit æqualis e. circulus igitur d eſt æqua-
lis ſuperficiei coni. Per præmiſſam demonſtratũ
etiam eſt, quod circulus d ad circulum a eandem
habet proportionẽ, quam c ad b habet in longitu
dine. Vtraq; enim proportio eadẽ eſt proportio-
ni e ad b, in potentia: quoniam circuli ad circulũ
ea eſt proportio, quę eſt quadrati diametri ad qua
dratum diametri: & ſimiliter ſe habent quadrata
ſemidiametrorum. ſicut enim diametri totæ, ita ea
rum dimidia. Semidiametris uero ſunt æquales
lineæ b & e. Igitur manifeſtum eſt, ſuperficiem co
ni eandem habere proportionem ad a circu-
lum, quam habet c linea ad b lineam, in lon-
gitudine.



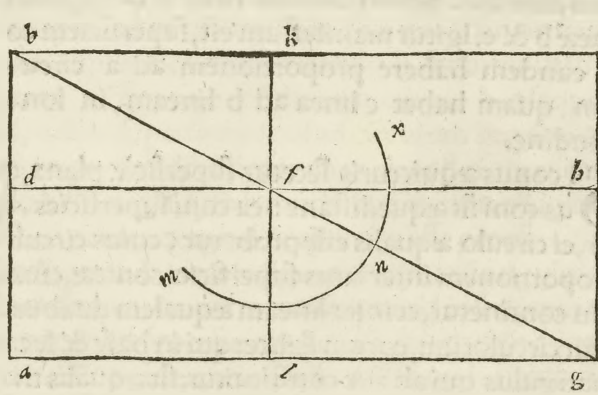
SI conus æquicruris ſecetur ſuperficie plana, quæ quidem ſuperficies baſi ipſi- 16
us coni ſit æquediſtans: ea coni ſuperficies, quæ à ſecante & à baſe concludi-
tur, ei circulo æqualis eſſe probatur, cuius circuli ſemidiameter ſit media ſecundũ
proportionem inter latus ſuperficiei conicæ, eius ſcilicet quæ inter baſim & ſecan
tem continetur, et inter lineam æqualem duabus ſemidiametris ſimul iunctis duo
rum circulorum, eorum ſcilicet qui in baſe & ſecante notãtur. Eſto conus cuius
triangulus qui ab axe conſtituitur, ſit æqualis triangulo a b c, qui a b c à linea qua
dam ſecetur, quæ linea ſit baſi eius æquediſtans, & uocẽ d e. axis uero coni ſit b g.
& exponatur circulus aliquis, cuius ſemidiameter ſit media ſecundum proportio-
nem inter a d latus, & inter compoſitam ex d f, & a g: ſemidiametri uero huius

circulus sit h. Dico igit, quod circulus h ęqualis est ei superficiei coni quæ inter d e & a c compræhẽditur. Igitur statuantur duo circuli k, l, & semidiameter circuli k tantũ possit quantum continetur sub b d, d f. semidiameter uero circuli l tantum possit quã tum continet sub b a, a g. Circulus igitur l æqualis superficiei a b c coni, circulus uero k æquatur superficiei a d e. Et quoniam id quod ex a b in a g fit, ęquatur his: ei quod fit ex b d in d f, & ei quod fit ex a d in utrãq; d f & a g: quoniam æquedistantes sunt d f, & a g. At uero quod ex a b in a g producitur, æquatur quadrato semidiametri circuli l. et quod ex b d in d f nascitur, ęquatur quadrato semidiametri circuli k: quod ex d a in utranq; simul d f, a g æquatur quadrato semidiametri h. quadratũ igitur semidiametri circuli l, æquat duob. quadratis ex semidiametro circuli k, & ex semidiametro circuli h productis simul iunctis. Verũ circulus l æquat superficiei coni a b c: circulus autem k æquatur superficiei coni d b e. relinquitur ergo, ut superficies compræhensa inter secantem d e, & basem a c, sit æqualis circulo h. nam circuli quicunq; sic se habent ad inuicem comparati, sicut quadrata suarum diametrorum.





Esto figura rectilinea quadrilatera rectangula b a g, cuius diameter sit b g, diuidatur b a latus utcunque in puncto d, à quo ducatur æquedistans a g, quæ sit d h, secans diametrum b g in puncto f, à quo puncto ducat æquedistãs lateri b a quæ sit k l. Dico quod id quod fit ex b a in a g, æquatur ei quod fit ex b d in d f, & ex d a in utrãq; simul d f, a g. quoniã igit id quod fit ex b a in a g totã, est b g superficies: quod aũt fit ex b d in d f, est b f: & quod ex d a, in utramq; simul d f, a g, est gnomõ m n x. Quod enim ex d a in a g, æquatur k g, quia supplementũ k h æquatur supplemento d l. quod fit ex d a in d f, æquatur d l. Tota igitur superficies b g, quæ fit ex b a in a g. æquat ei quod



ei quod fit ex b d in d f, & gnomoni n m x, qui æquatur ei quod fit ex d a in utrãque simul a g, d f.

Coni qui altitudines habuerint æquales, suis basibus sunt proportionales. qui uero bases æquas habuerint, suis altitudinibus proportionales erunt.

Si cylindrus plana superficie secetur, quæ æquedistet basi suæ, erit totius ad quãcunq; partem suam, uel etiam partis ad partem, sicut axis ad axem proportio.

Coni in eisdem basibus cum cylindris constituti, eadem proportione qua cylindri referuntur.

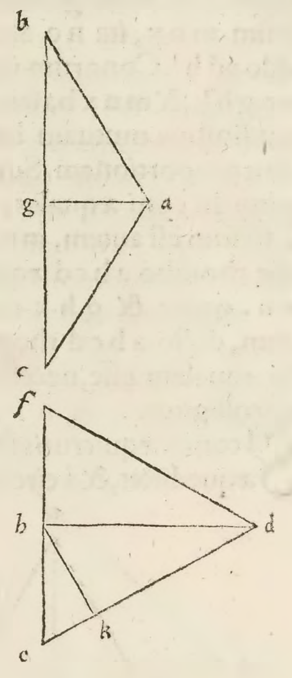
Altitudines conorum æqualiũ, mutuam suis basibus proportionẽ sequuntur.

Coni quorum altitudines mutuam suis basibus proportionem sequũtur, sunt inter se æquales.

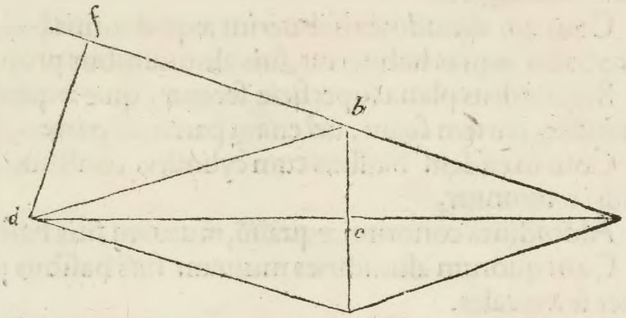
Coni, quorum diametri basium eãdem cum suis axibus proportionem habuerint, seruant inter se proportionem, quæ inter diametros suarum basium habetur triplicatam. Hęc autem omnia à superioribus sunt demonstrata.

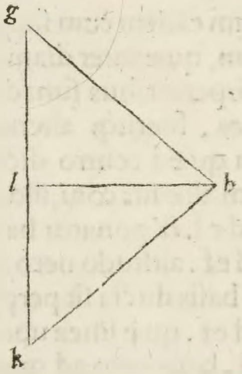
SI fuerint duo coni æquicrures, fueritq; alterius superficies basi alterius æqualis, fuerit item linea recta quæ à centro dictæ basis ducta sit ad latus coni perpẽdiculariter æqualis altitudini alterius coni, illos conos æquos esse necesse est. 17

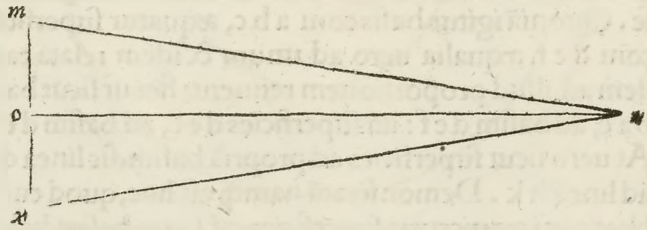
Esto duo coni æquicrures a b c, d e f. & ponatur basis ipsius a b c, æqualis superficiei d e f. altitudo uero a g esto æqualis lineæ quæ à centro basis ducta sit perpẽdiculariter ad unum latus coni d e f, quæ linea uocetur h k. centrum à quo ducitur sit h. latus uero ad quod ducta est, d k e. Dico igitur hos duos conos æquales esse. Quoniã igitur basis coni a b c, æquatur superficiei coni d e f, æqualia uero ad unum & idem relata eandem ad illud proportionem retinent: fiet ut sicut basis b a c, ad basim d e f: ita superficies d e f, ad basim d e f. At uero sicut superficies ad propriã basim, sic linea d h ad lineã h k. Demonstratũ namq; est hoc, quod cuiuslibet coni æquicruris superficies ad suam basim habet eandem proportionem, quam latus ipsius coni ad semidiametrũ basis, sicut uidelicet d e ad e h: sed sicut d e ad e h, ita d h ad h k. sunt enim trianguli æquiãguli. est autem h k æqualis a g. igitur sicut basis a b c coni ad basim d e f coni, ita altitudo d e f ad altitudinem a b c. Horum igitur conorum altitudines mutuam suis basibus habent proportionem. Ex quo sequitur, eos esse æquales.



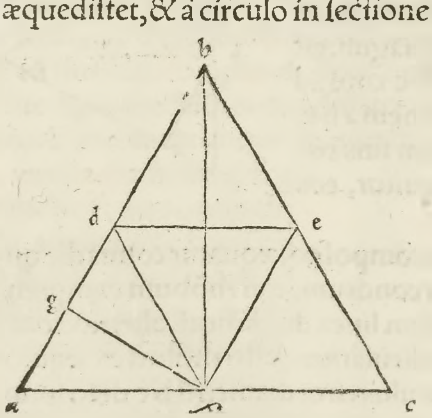
CVilibet rhõbo ex conis æquicruribus composito, æquatur conus ille qui basem æquam habeat superficiei alterius conorum, qui rhõbum comprendũt: altitudinem uero æqualem lineæ, quæ quidem linea ducta sit ab alterius coni uertice ad unumquoduis latus alterius perpendiculariter. Esto rhõbus ex æquicruribus conis collectus a b c d, cuius basis sit circulus circa diametrũ b c descriptus, altitudo uero a d. Exponatur etiam alter conus g h k, qui basim habeat superficiei a b c coni æqualem, altitudinem uero æquam lineæ quæ ab ipso d puncto ducta sit ad latus a b perpẽdiculariter, quæ sit d f. altitudo uero g h k coni, sit h l. & esto h l æqualis d f. Dico tunc quod etiam conus rhõbo æquatur. Exponatur & alter conus m n x, basim habens æqualem basi a b c coni, altitudinem uero ipsi a d: sitq; eius altitudo n o. Quoniam igitur n o ipsi a d æquatur, erit idcirco sicut n o ad ipsum d e, ita a d ad d e. At uero sicut a d ad d e, sic a b c d rhombus ad b c d conum. Sicut autem n o ad d e, ita m n x conus ad b c d conum: propterea quod eorum 18 baſes ſunt æquales. Ergo ſicut m n x conus ad b c d conum, ſic a b c d rhombus ad b c d conum. Conus igit̃ m n x eſt æqualis rhombo a b c d. item quia ſuperficies a b c æquatur baſi g h k. ſicut ergo ſuperficies a b c ad propriã baſim, ſic baſis g h k ad baſim m n x. At uero ſicut ſuperficies a b c ad propriam baſim, ſic a b ad b e, quod idẽ eſt a d ad d f. nam trianguli ſunt ſimiles. quare ſicut baſis ipſius g h k ad baſim n m x, ſic a d ad d f. Eſt aũt a d æqualis n o per ſuppoſitum: d f uero æqualis h l. quare ſicut baſis g h k ad baſim m n x, ita n o altitudo ad h l. Conorum igitur g h k, & m n x baſes altitudinibus mutuam habent proportionem. Sunt igitur hi coni æquales. Oſtẽſum eſt autem, m n x eſſe rhombo a b c d æqualem. quare & g h k conum, dicto a b c d rhombo æqualem eſſe, neceſſariò colligitur.

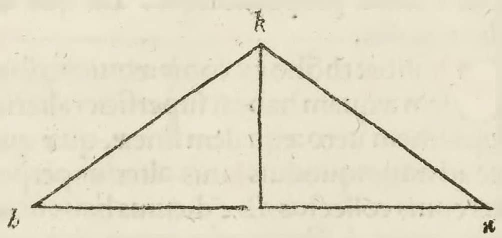


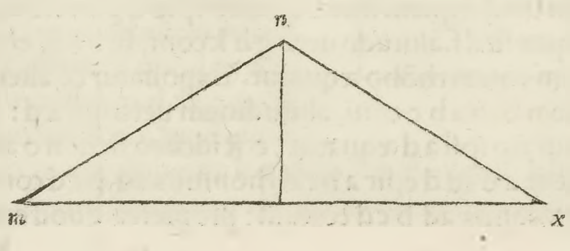


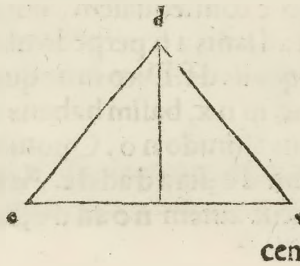


19 SI conus æquicruris ſuperficie plana ſecetur, quæ quidem ſuperficies baſi coni æquediſtet, & à circulo in ſectione producto conus deorſum deſcribat̃, uerti-





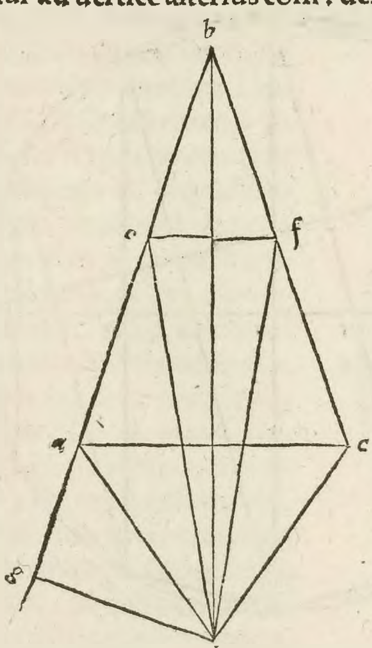


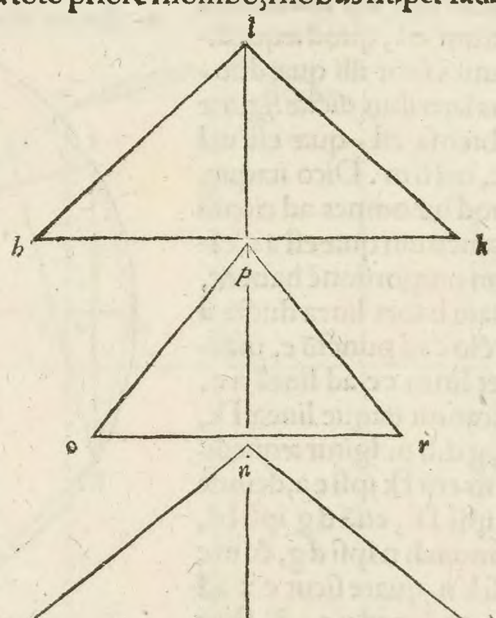


cem

cem defigens in centrum basis prioris coni, rhombū cum coni parte superiori effi ciet, qui quidem rhōbus si à toto priore cono auferatur, ei quod relinquitur conus ille probatur æqualis: cuius quidem coni basis sit æqualis ei superficiei coni qui se ctus ponitur, quæ superficies intra secantem & basem concluditur. altitudo præte rea prædicti coni sit æqualis lineæ à centro basis primi coni ductæ perpendicula riter, ad unumquoduis latus primi coni. Esto conus æquicruris a b c, qui secetur à plana superficie quæ basi ipsius æquedistet. Esto hæc sectio d e, centrum uero ba sis f. & à circulo, cuius diameter est d e, describatur conus, cuius uertex sit f. & sic habemus rhombū ex duobus conis æquicruribus constitutum, qui est b d f e. Ex ponatur etiam quidam conus k h l, cuius basis esto æqualis superficiei, quæ inter a c, d e continetur: altitudo uero æqualis lineæ quæ à centro f ducta sit perpen diculariter ad latus a b, quæ ducta sit f g. Dico itaq;, quod si à cono a b c intelliga tur ablatus rhombus b d f e, ei quod relinquetur æqualis erit conus h k l. Exponā tur itē duo coni m n x, o p r, ita ut basis ipsius m n x superficiei coni a b c sit æqua lis, & altitudo æqualis f g. Propter hoc itaq; m n x conus est æqualis a b c cono. Nā si duo coni æquicrures ita statuantur, ut superficies alterius coni sit æqualis basi alterius: præterea linea à centro ducta perpendiculariter ad unum latus alterius, sit æqualis altitudini alterius, conos illos æquos esse demonstratum est. Propter id ue ro quod coni o p r basis est posita æqualis superficiei d e b coni, & altitudo ipsi f g, conus o p r æquatur rhombo b d f e. hoc enim suprà demonstratum fuit. Quoniā autem superficies coni a b c componitur ex b d e, & ea quæ inter d e & a c contine tur: præterea superficies a b c coni: æquatur basi m n x coni: superficies uerò d b e coni æquatur basi o p r coni, quæ uero media est inter d e & a c æquatur basi h k l: sequitur, ut basis m n x sit æqualis basibus conorum h k l, o p r. Cum'que sint hi coni altitudine æqua erecti, erit conus m n x, æqualis conis simul h k l, o p r. Verū conus m n x, æqualis est cono a b c: conus uero o p r, æqualis rhombo b d e f. Reli quum est igitur, ut h k l conus, æqualis sit ei quod sublato rhombo relinquitur.

SI ex his conis æquicruribus, quib. rhombus compositus sit, alter plana superfi cie secetur, quæ sit basi æquedistans: & à producto in sectione circulo conus e rigatur ad uerticē alterius coni: deinde à toto priore rhombo, rhōbus nuper factus 20



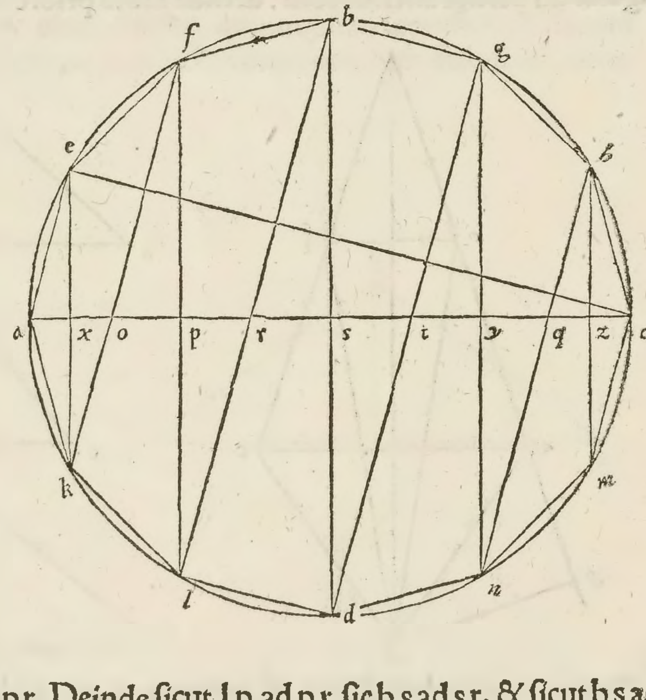


auferatur: ei quod residuum est æquatur conus, qui basim habeat æqualem ei su perficiei coni, quæ inter secantem & basem continetur: altitudinem uero æqualē

 lineæ,

lineæ, quæ à uertice alterius coni, ad unum latus alterius coni perpendiculariter ducta sit. Esto rhombus, ex conis æquicruribus compositus a b c d, & alter illorum conorum secetur plana superficie, quæ basi æquedistans sit, & fiat sectio e f. à circulo uero cuius diameter est e f, erigatur conus habẽs uerticem d punctũ, iãq; factus est rhombus e b d f, qui intelligatur ablatus à toto rhombo. Exponatur autem quidem conus h k l, qui basim habeat æqualem superficiei coni, quæ à secante & base concluditur a c e f: altitudinem uero ei lineæ quæ à puncto d ducitur, perpendiculariter ad latus b a. Dico itaq;, quod h k l conus æqualis est dicto residuo. Expositi autem sint duo coni isti, uidelicet m n x, o p r. & basis m n x coni æqualis ponatur superficiei a b c: altitudo uero æqualis d g. Propter illa erga quæ demonstrata sunt, conus m n x æquatur rhombo a b c d. coni uero o p r basis, cũ ponatur æqualis superficiei e b f coni, & altitudo æqualis lineæ d g: similiter o p r conus æquatur rhombo e b d f. Quoniam igitur superficies a b c coni, similiter componatur ex superficie coni e b f, & ex ea quæ media est inter e f, a c. Insuper coni a b c superficies æquatur basi m n x, superficies uero e b f æquatur basi coni p o r. quæ autem media est inter e f, a c, æquatur basi h k l. Basis igitur m n x, æquatur basibus conorum o p r, h k l. & sunt hi coni sub eadem altitudine. quare m n x conus æquabitur h k l, o p r conis. Verũ conus m n x æquatur rhombo a b c d, conus aũt o p r rhombo e b d f est æqualis. reliquus igĩ conus h k l ęqualis residuo erit necessariò.

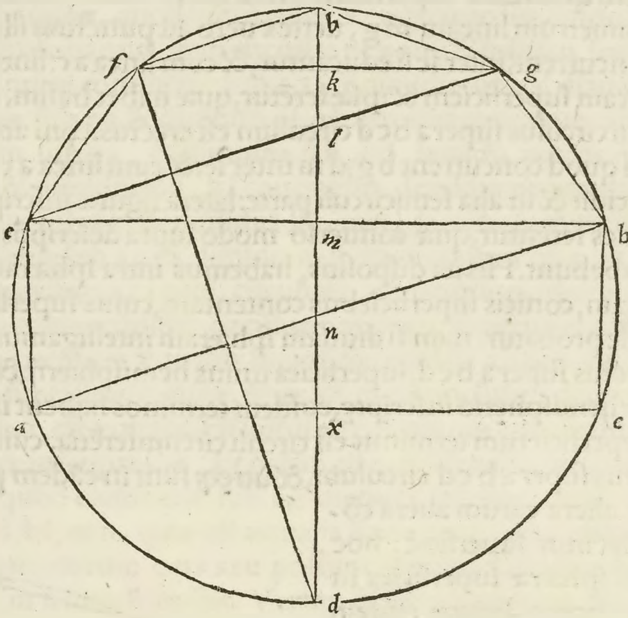
21 SI intra circulum quemcunq; inscribatur figura rectilinea, quæ multis angulis constet, quæq; latera inter se æqualia & numero paria habeat, insuper ducantur lineæ rectæ ab angulis ad angulos dictæ figuræ latera ipsius coniũgentes, sitq; ut hæ ductæ sint æquedistantes uni ex earum numero: illi scilicet, quæ duobus dictæ figuræ lateribus subtenditur: tunc istæ quæ latera dicta coniungunt, omnes ad diametrum circuli eandem habent proportionem, quam habet illa linea recta ad latus dictæ figuræ, quæ quidem linea ipsi diametro & lateri dictæ figuræ quod diametro sit applicatum subtenditur. Esto circulus a b c d, & sibi inscribatur figura rectilinea multis angulis constans, quæ sit a e f b g h c m n d l k: & iungantur e k, f l, b d, g n, h m, ductis lineis e k, f l, &c. manifestum est, quod æquedistantes sunt illi quæ duobus lateribus dictæ figuræ subtensa est, quæ est uel e k, uel h m. Dico itaque, quod hæ omnes ad circuli diametrum quæ est a c, eãdem proportionẽ habent, quam habet linea ducta à pũcto c ad punctũ e, uidelicet linea c e ad lineã a e. ducantur itaque lineæ f k, l b, g d, h n. Igitur æquedistans erit f k ipsi e a, deinde b l ipsi f k, etiã d g ipsi b l, demum h n ipsi d g, & m c ipsi h n. quare sicut e x ad x a, ita k x ad x o. & sicut k x ad x o, ita f p ad p o. sicut autem f p ad p o, ita l p ad p r. Deinde sicut l p ad p r, sic b s ad s r. & sicut b s ad r s, ita d s ad s t. & sicut d s ad s t, ita g y ad y t. & sicut g y ad y t, ita n y ad y q. & sicut



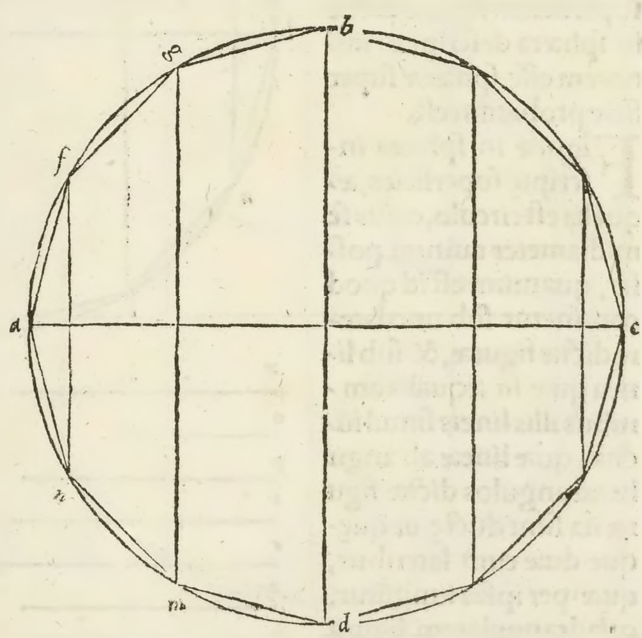
n y ad

n y ad y q, ita h z ad z q. & ſicut h z ad z q, ita m z ad z c. & demum ſicut una ad unam, ita omnes ſimul collectæ ad omnes ſimul collectas ſe habent. quare ſicut e x ad x a, ita e k, f l, b d, g n, h m ad ipſam a c diametrum. At uero ſicut e x ad x a, ita c e ad e a. unde ſicut c e ad e a, ita omnes e k, f l, b d, g n, h m ad a c diametrum.

SI in circuli cuiuſpiam portione figura multorum angulorum inſcribatur, quæ 22
quidem figura latera habeat excepta baſe inter ſe ęqualia, & numero paria, deinde rectæ lineæ ducantũ æquediſtantes baſi portionis, & quæ latera dictæ figurę coniungant: tunc hę omnes ductæ ſimul, cũ dimidio baſis portionis, habebũt ad altitudinem portionis eandem proportionẽ, quã habet linea illa ad latus figuræ dictæ, quæ linea ab una extremitate diametri totius circuli ad latus figuræ ipſi diametro applicatum ducta ſit. Intra circulum a b c, quædã linea recta ducatur, quæ ſit a c. & ſuper baſe a c inſcribatur in a b c circuli portione, multorum angulorum figura, æqualibus & numero paribus lateribus, excepta baſe, a c conſtãs. Dico igitur, quod ſicut f g, e h, a x ad b x, ita d f ad b f. Ducantur rurſus g e, a h lineæ, quæ quidem æquediſtantes erũt ipſi b f. atq; idcirco ſicut k f ad k b, ita g k ad k l, & ita e m ad l m, & m h ad m n, & x a ad x n, & omnes ſimul ad omnes, ut una ad unam. igitur ſicut f g, e h, a x ad b x, ita f k ad k b. At uero ſicut f k ad k b, ita d f ad f b. ſicut ergo d f ad f b, ita f g, e h, a x ad b x.

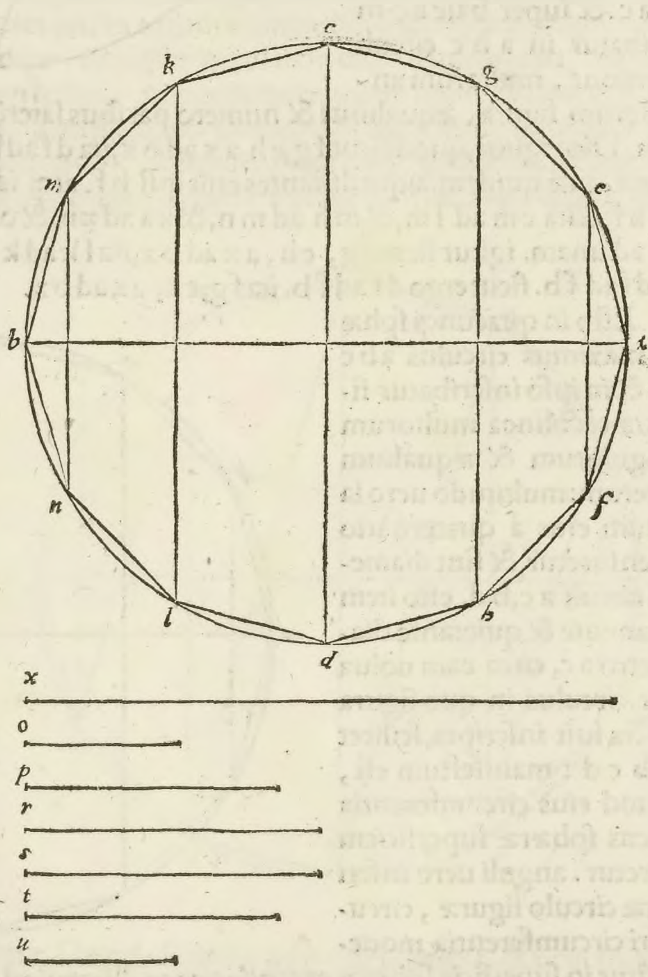


Eſto in quacunq; ſphæra maximus circulus a b c d, & in ipſo inſcribatur figura rectilinea multorum angulorum & æqualium laterum: multitudo uero laterum eius à quaternario menſuretur, & ſint diametri circuli a c, b d. eſto item manente & quietante diametro a c, circa eam uoluatur circulus in quo figura dicta fuit inſcripta, ſcilicet a b c d: manifeſtum eſt, quod eius circumferentia ſecus ſphæræ ſuperficiem feretur. anguli uero inſcriptæ circulo figuræ, circulari circumferentia mouebũtur in ſuperficie ſphęræ; exceptis tamen illis, qui ad puncta a et c inſiſtũt. quotq;



ipſi

ipsi fuerint qui moti sunt, totidem circulos intra sphæram describent qui erunt supra a b c d circulum erecti, & eorum diametri erunt lineæ illæ quæ figuræ inscriptæ latera coniungebant: eruntq; omnes ipsi b d æquedistantes. latera uero figuræ inscriptæ eodem modo circumuoluta, quasdam conicas superficies intra sphæram describunt: sed a f & a n conum perficient, cuius basis erit circulus ille qui habet lineam f n diametrum, uerticem uero punctum a. Lineæ autem f g, m n secundum quandam superficiem conicam ferentur, cuius basis circulus est, qui habet diametrum lineam m g, uertex uero ad punctum illud, ad quod f g & m n lineæ concurrent, inter se si educantur, & cum linea a c: lineæ uero b g, m d secundum conicam superficiem & ipsæ feretur, quæ habet basim, circulum cuius diameter b d, qui circulus super a b c d circulum est erectus. coni autem uertex ad punctum illud ad quod concurrent b g, d m inter se, & cum linea a c si educantur. Similiter quoq; accidit & in alia semicirculi parte: latera figuræ inscriptæ secundum conicas superficies ferentur, quæ conuerso modo supra descriptis, in sphæra figuras descriptas habebunt. His ita dispositis, habemus intra sphæram figuram corpoream descriptam, conicis superficiebus contentam, cuius superficies minor sphęræ superficie esse probatur. nam si diuisam sphæram intelligamus à circulo b d plano, qui est erectus super a b c d, superficies unius hemisphærij, & superficies figuræ dictæ in ipso hemisphęrio inscriptę, eosdem terminos habent in eodem plano. nam utrarumq; superficierum terminus est circuli circumferētia, cuius diameter est b d, qui est erectus super a b c d circulum, & utręq; sunt in eādem partem eductæ & conuolutæ, & altera earum alterā cōplectitur superficiē: hoc est sphæræ superficies superficiem figuræ eisdem terminis cum ea contentam. Similiter etiam in ālio hemisphærio figuræ superficies, concluditur minor esse superficie hemisphærij: quare totam superficiem figuræ dictæ in sphæra descriptæ, minorem esse sphæræ superficie probatum est.

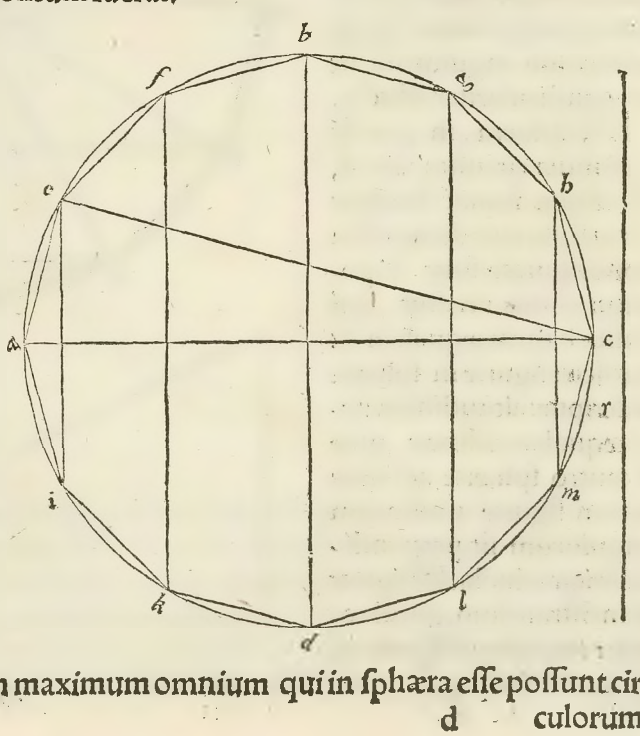


23 Figuræ in sphæra inscriptę superficies, æqualis est circulo, cuius semidiameter tantum possit, quantum est id quod continetur sub uno latere dictæ figuræ, & sub linea quæ sit æqualis omnibus illis lineis simul iūctis, quæ lineæ ab angulis ad angulos dictæ figuræ ita sunt ductę, ut quęque duæ cum lateribus, quæ per ipsas iungūtur, quadrangularem figurā efficiāt: & ei quæ duob.

late-

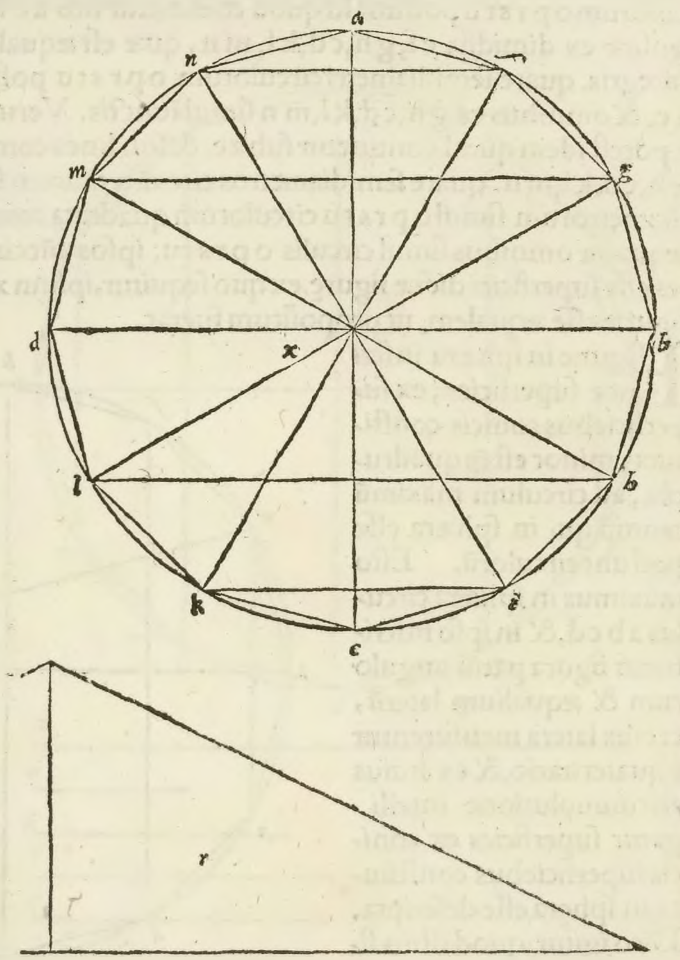
lateribus subtenditur, sint æquedistantes. Esto in sphæra maximus circulus a b c d, & in ipso inscribatur figura multorum angulorum, & æqualium laterum, cuius multitudo laterũ numeretur à quaternario, & ab hac figura intelligatur figuram corpoream esse in sphęra descriptã: & ducãtur e f, g h, c d, k l, m n lineæ, quæ sint æquedistãtes illi quæ duobus lateribus dictæ figuræ subtensa est. Exponatur item quidam circulus qui sit x, cuius semidiametros tantũ possit, quantũ est quod continetur sub a e latere dictæ figuræ, & sub linea quæ sit æqualis e f, g h, c d, k l, m n, lineis simul iunctis. Dico igitur, quod hic circulus x, æquatur superficie figuræ in sphæra descriptæ. Exponantur item circuli o p r s t u, & ipsius o semidiametros possit tantum quantum continetur sub e a, & dimidio e f. & diameter p possit id quod continetur sub e a, & dimidijs e f, g h. semidiametros uero ipsius r possit id quod continetur sub e a, & dimidijs g h, c d. semidiametros ipsius s possit id quod sub e a, & dimidijs c d, k l continetur. semidiametros ipsius t, possit id quod continetur sub a e, & dimidijs k l, m n. semidiametros demum u, possit id quod continetur sub a e, & dimidia m n. Ex his igitur quæ posita sunt, circulus o æquatur superficiei a e f coni. circulus p æquatur superficiei conicæ quæ inter e f & g h lineas comprenditur. circulus r æquatur superficiei conicæ à lineis g h, c d comprensæ. circulus s æquatur superficiei conicæ à lineis c d, k l contentæ. præterea circulus t superficiei conicæ, inter k l, m n conclusæ. demum circulus u superficiei coni m b n, est æqualis. Hi igitur circuli omnes ęquales sunt superficiei figuræ, quæ sphæræ inscripta fuit. Et palàm est quòd semidiametri circulorum o p r s t u possunt id quod continetur sub a e latere, & sub linea dupla cõpositæ ex dimidijs e f, g h, c d, k l, m n, quæ est æqualis lineæ compositæ ex ipsis integris. quare semidiametri circulorum o p r s t u possunt id quod cõtinetur sub a e, & omnibus e f, g h, c d, k l, m n simul iunctis. Verum & semidiametros circuli x potest idem quod continetur sub a e, & sub linea composita ex omnibus illis e f, g h, c d, k l, m n. quare semidiametros circuli x tantum sola potest, quantum semidiametrorum simul o p r s t u circulorum quadrata componunt. Igitur circulus x, æquatur omnibus simul circulis o p r s t u. ipsos aũt circulos ostensum est æquales esse superficiei dictæ figurę. ex quo sequitur, ipsum x circulum superficiei dictæ figuræ esse æqualem, ut propositum fuerat.

Figuræ in sphæra inscriptæ superficies, ex superficiebus conicis constituta, minor est quàm quadrupla, ad circulum maximũ omniũ qui in sphæra esse possunt circulorũ. Esto maximus in sphæra circulus a b c d, & in ipso inscribatur figura pariũ angulorum & æqualium laterũ, et eius latera mensurentur à quaternario, & ex huius circumuolutione intelligatur superficies ex conicis superficiebus constituta, in sphęra esse descripta. Dico igitur, quod istius figuræ superficies minor est quàm quadrupla ad circulum maximum omnium qui in sphæra esse possunt circulorum. 24



culorum. Ducantur itaq; duæ lineæ, quæ ſubtendantur ſingulæ duobus laterib. figuræ prædictæ, quorum hæc duo quib. una ſubtenditur, ſint oppoſita reliquis duobus quibus altera ſubtenſa eſt. ſintq; hæ ductæ e t, h m: & reliquæ iſtis æquediſtãtes f k, d b, g l. Exponatur item circulus r, cuius ſemidiametros poſſit id quod ſub a e, & ſub linea æquali compoſitæ ex omnibus illis e t, f k, b d, g l, h m. Ex his igitur quæ ſuperius demonſtrata ſunt, circulus r æquatur ſuperficiei dictæ figuræ. & quoniam inſuper demonſtratum eſt, quod ſicut linea æqualis omnibus ſimul illis e t, f k, b d, g l, h m ſe habet ad diametrum circuli a c, ſic linea c e ad lineam e a. Quod igitur ſub illa quæ æquatur omnibus ſimul dictis, & ſub ea cõtinet, quod idẽ eſt ei quod à ſemidiametro circuli r, in ſe ducto producitur, æquale eſt ei quod ſub a c & c e comprenditur. uerũ id quod ſub a c & c e cõprenditur, minus eſt quadrato a c. quadratum igitur ſemidiametri r circuli minus eſt quadrato lineæ a c, ſequitur ergo, diametrũ r circuli minorem eſſe quàm duplam diametri a b c d circuli. Duæ igitur diametri a b c d circuli, diametro r circuli ſunt maiores. & quod fit, à diametro circuli a b c d, hoc eſt a c linea quater in ſe ducta, maius eſt quadrato diametri circuli r. At uero ſicut eius quod fit ab a c linea, quater in ſe ducta, ad quadratum diametri circuli r, ita quatuor circuli æquales a b c d ad circulum r. quatuor itaq; circuli ęquales a b c d circulo, ſunt maiores circulo r. Igitur circulus r minor eſt quadruplo a b c d circulo in ſphæra maximo. Circulus autem r demonſtratus eſt æqualis ſuperficiei dictæ figuræ. quare colligitur, ſuperficiem dictæ figuræ minorem eſſe, quàm quadruplam maximi circuli in ſphæra deſcripti.

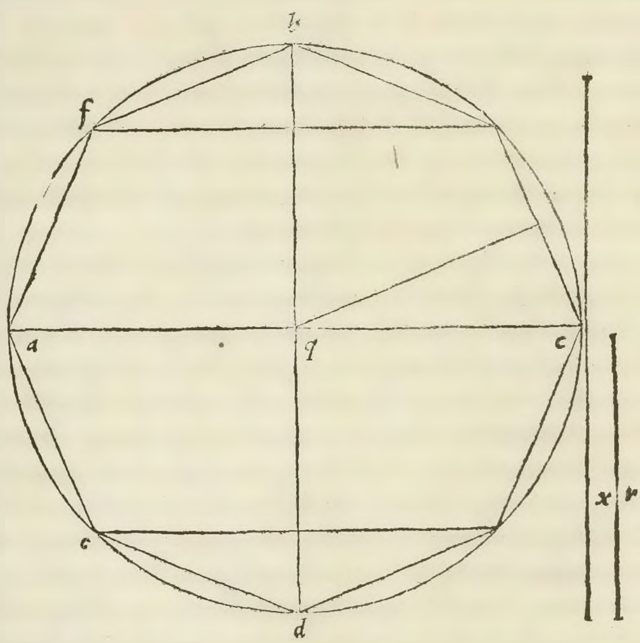
25 Figuræ in ſphęra deſcriptæ, quæ conicis ſuperficiebus contineatur, ille conus æqualis eſſe probatur, cuius coni baſis ſit circulus, qui æquatur ſuperficiei figuræ in ſphæra deſcriptæ: altitudo uero eius æqualis ſit lineæ illi, quæ à centro ſphęræ ad unumquoduis latus figurę multorum angulorum ſit perpendiculariter educta.



Eſto ſphæra, in qua ſit maximus circulus a b c d, & reliqua ſumãt̃ ſimiliter uti in ſuperiori demonſtratione figurata ſunt. & ponatur conus r rectus, qui baſim habeat æqualem ſuperficiei figuræ in ſphæra deſcriptæ: altitudinem uero æqualem ei lineæ, quæ à centro ſphæræ ad latus unum figuræ multorum angulorum ſit perpendiculariter educta. Eſt igitur demõſtrandum, quod conus r æqualis eſt figuræ in ſphæra deſcriptæ, nam deſcribantur coni à circulis, quorum diametri ſunt f n, g m, h l, i k, quorum conorum bases sint dicti circulie, uertices uero ad x centrum sphæræ deducti. Habemus rhombum solidū, qui conficitur ex cono, cuius basis est circulus, qui circa f n diametrum constat, uertex uero punctum a: & ex cono, cuius basis est idem circulus, uertex uero punctum x. qui quidem rhombus est æqualis cono qui basim habeat superficiem coni n a f, altitudinem uero æqualem lineæ à centro x perpendiculariter ad unum latus ductæ. Rursus residuum à rhombo dicto relictū, quod continetur à superficie coni, illa scilicet quæ inter æquedistātes planas superficies f n, g m cōprę hēditur, & inter superficies conorū f n x, & g m x æquale est cono habenti basem æqualem superficiei conicæ, illi uidelicet quæ inter planas superficies f n, g m continetur. altitudo uero, lineæ ab x centro ad f g latus perpendiculariter eductæ. Hæc autem suprà sunt demonstrata. item residuum coni illius qui continetur à conica superficie, quæ includitur à planis æquedistantibus g m, b d, & à superficie coni m g x, & circulo cuius diameter b d ęqualis est cono basim habenti æqualem ei coni superficiei, quæ inter g m, b d planas continetur: altitudinem uero æqualem lineæ à centro x ad latus b g perpendiculariter ductæ. Similiter quoque in alio hemisphærio rhombus x k c l, & residua conorū æqualia esse probabuntur talibus & tantis conis, ut suprà dictum est. Manifestum itaq; est, quod tota simul figura sphæræ inscripta æqualis erit omnib. simul conis dictis. coni uero ipsi æquales sunt ipsi r cono, cum conus r altitudinem quidem habeat unicuiq; illorum æqualem, & basim omnibus simul illorū basibus æqualem. Constat igitur, inscriptam sphæræ figuram exposito cono esse æqualē.

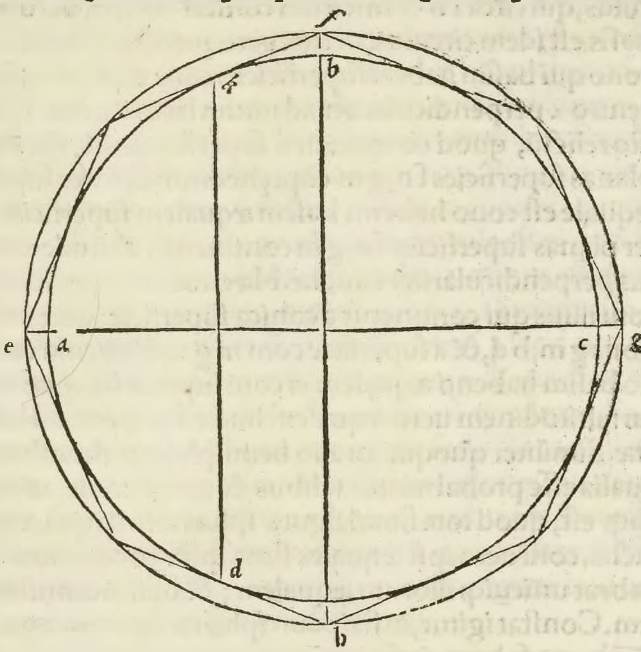
Figura sphæræ inscripta, quæ conicis superficieb. contineatur, minor est quàm quadrupla eius coni qui basim habeat æqualem circulo, qui in sphæra sit maximus, altitudinē uero æqualem semidiametro sphæræ. Esto descriptus sit conus 26

æqualis figuræ inscriptæ sphęræ, qui conus basim habeat æqualem superficiei dictæ figuræ inscriptæ sphęræ, altitudinem æqualem lineæ à centro circuli ad unum latus figuræ multorum angulorū, quæ circulo sit inscripta, perpendiculariter ductæ. sitque hic conus r. sit alter conus x, qui basim habeat æqualem circulo a b c d, altitudinem uero semidiametro a b c d circuli. Quoniam igitur conus r, basim habet æqualem superficiei figuræ inscriptæ in sphæra, altitudinem autem æqualem lineæ à centro, ad latus a f, perpendiculariter ductæ. ostensum est autem, superficiem figuræ inscriptæ minorem



esse quàm quadruplam circuli in sphæra maximi. est igitur coni ipsius r basis minor, quàm quadrupla basis x coni. Est etiā coni r altitudo minor altitudine x coni. Cū igitur conus r minorē habeat basim quàm quadruplam ad basim x, altitudinē etiā minorem illius altitudine, manifestum est quod ipse r conus minor est quàm quadruplus ad conum x. Verum conus r æqualis est figuræ inscriptæ, figura igitē inscripta minor est quàm quadrupla ad conū x, quod principio propositū fuerat.

27 ESto in sphæra maximus circulus a b c d, circa quem describatur figura multorum angulorum & æqualium, quæ latera quoq; habeat æqualia, quorũ multitudo à quaternario mensuret. Huic aũt figuræ circumscribatur circulus, cõprendẽs eam, circa idem centrum con uolutus circa quod a b c d existit. Deinde quiescẽte e g diametro, circũuoluatur plana superficies e f g h, in qua multorum angulorum figura & circulus a b c d continetur. Perspicuũ est, quod circumferentia circuli a b c d, secundum sphæræ superficiẽ feretur. circumferentia uero circuli e f g h, secundum alterius sphæræ superficiem ducetur, quæ idem centrum cũ minori sphæra habebit. puncta uero in quibus latera figuræ inscriptæ contingunt

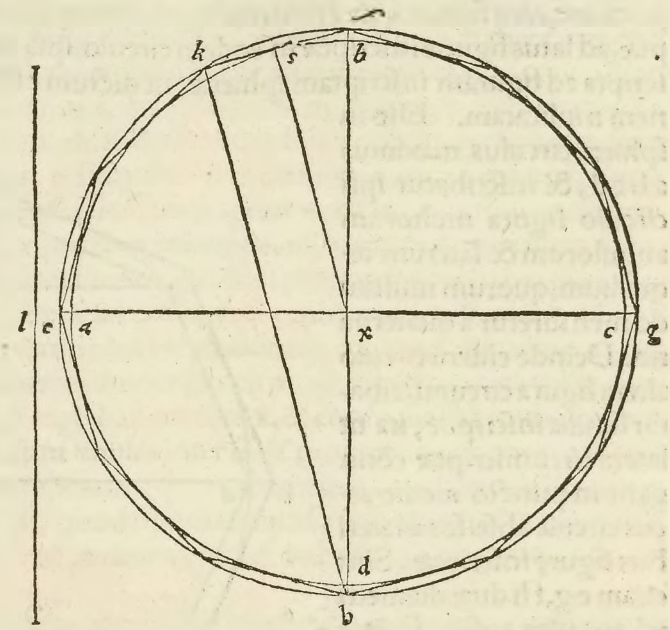


circulum a b c d, in circumuolutione, describent circulos qui sunt erecti supra circulum a b c d in sphæra minori. anguli uero dictæ figuræ secundum circuli circũferentias ferentur, illis duobus exceptis, qui sunt alter ad e, alter ad g puncta collocati: describentq; in superficie sphæræ maioris singuli singulos circulos, qui sunt erecti super circulum e f g h. Latera uero dictæ figuræ conicas superficies circumuoluta designabunt, quemadmodum in superiori proxima figuratione conspectum est. atq; ipsa figura conicis superficiebus compræhensa minori quidem sphæræ erit circumscripta, maiori uero inscripta. Quod aũt ipsius figuræ superficies maior sit superficie sphæræ cui est circũscripta, hac ratione demonstrabitur. Esto k d diametrus cuiuspiã circuli in sphęra minori: puncta k d sint, in quibus duo latera dictæ figuræ contingant circulum a b c d. si igitur sphæra intelligatur secta à plano k d, circulo super a b c d erecto, superficies quoq; figurę sibi circumscriptæ simul secta esse intelligetur ab eodem plano. Vnde manifestum erit, utrasq; superficies sectas eisdẽ terminis in illo plano compræhensas esse. nam utrarũq; terminus est circuli circumferentia, cuius diametrus est k d, erecti super circulum a b c d: & ambæ sunt in eandem partem conglobatæ, & altera earum ab altera complectitur: sphærica scilicet à planę figuræ superficie, quæ illi finitima est. Minor igitur illa est, quæ compræhensa est, scilicet sphęrica illius sectionis superficies, quàm superficies figuræ circũscriptæ sibi. Similiter probabitur, residui superficiem sphæricam minorem esse superficie residui figuræ sibi circũscriptę. Manifestũ igitur est quod tota quoq; simul sphęræ superficies minor est superficie figurę sibi circumscriptæ.

28 SVperficiei figuræ circa sphęram descriptę circulus ille æqualis est, cuius quidem circuli semidiametrus tantum potest quantũ quod continetur sub uno latere figuræ circumscriptę, & sub linea quæ sit æqualis omnibus simul lineis, quæ latera dictę figuræ ita continuent, ut omnes sint uni earum æquedistantes, quæ una duobus dictę figurę lateribus sit subtensa. Figura enim quæ circũscribitur sphęræ minori, inscribitur sphæræ maiori. eius uero figuræ quæ sphæræ inscribitur, quæ ue superficiebus conicis cõtineatur, superficies æquatur circulo, cuius semidiametros tantũ potest quantum est quod continetur sub uno latere dictæ figuræ,

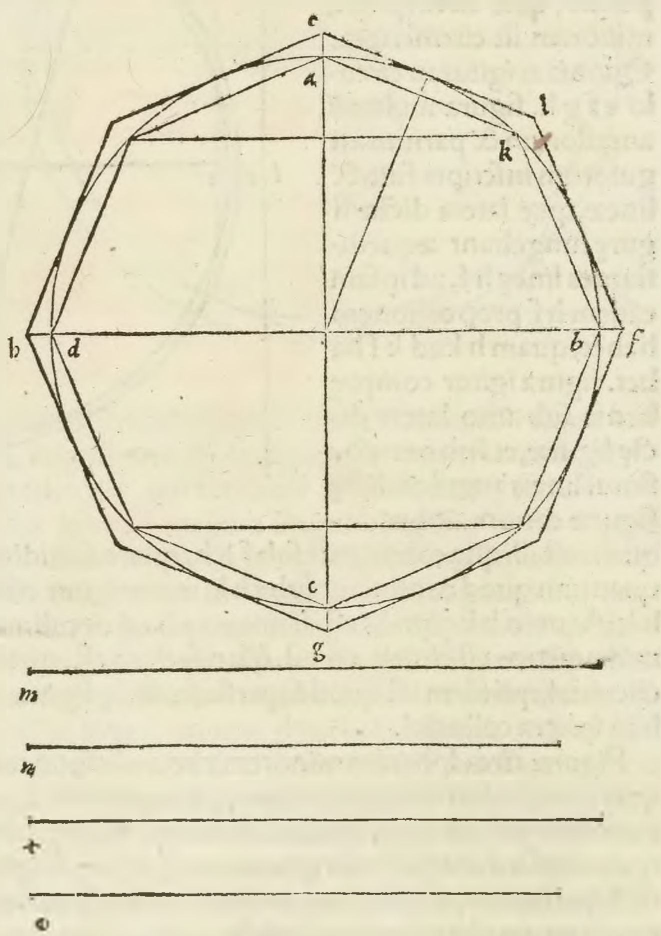
ræ, & ſub linea quæ ſit æqualis omnibus ſimul lineis, quæ dictæ figuræ angulos ita coniungant, ut ſint æquediſtantes uni earum, quæ duobus dictæ figuræ lateribus ſubtenditur. Quare manifeſtum eſt, id quod propoſitum fuerat.

FIguræ circa ſphæram deſcriptæ ſuperficies maior eſt, quàm quadrupla ad maximum circulum in ſphæra collocatũ. Eſto itaqꝫ & ſphæra, & circulus, & cætera ſumantur eadem & eodem modo, ut ſuprà in proximis fuit poſitum: et ponatur l circulus æqualis ſuperficiei figurę propoſitæ, quæ circa ſphęrã minorem ſit circũſcripta. Quoniam igitur in circulo e f g h, figura multorũ angulorum & parium angulorum inſcripta fuit, & lineæ, quæ latera dictæ figurę iungebant æquediſtantes lineę h f, ad ipſam eãdem h f proportionem habẽt, quam h k ad k f habet. figura igitur comprę henſa ſub uno latere dictę figuræ, et ſub omnib. ſimul lineis angulos dictę figuræ continuãtibus, æqualis eſt illi quę continetur ſub f h k. quare ſemidiametros circuli l tãtum poteſt, quantum quod continetur ſub f h k. maior igitur eſt ſemidiametros circuli l, quàm h k. At uero h k ęqualis eſt diametro a b c d circuli. nam dupla eſt lineæ ſ x, quæ ſemidiametros eſt circuli a b c d. Manifeſtum eſt, quod maior eſt quàm quadruplus circulus l, qui idem eſt quod ſuperficies dictę figuræ ad ſuperficiem maximi circuli in ſphęra collocati. 29



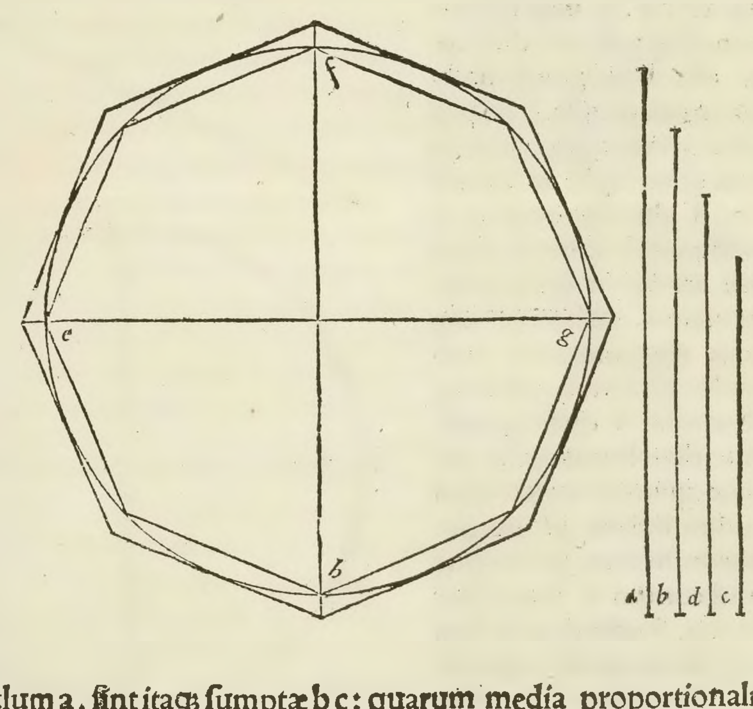
Figuræ circa ſphęram minorem circumſcriptæ conus ille ęqualis eſſe probatur, qui conus baſim habeat circulum qui æqualis ſit ſuperficiei dictæ figurę, altitudinem uero habeat æqualem ſemidiametro ſphęrę. Figura enim quę minori ſphęrę circumſcribitur, eſt inſcripta maiori ſphęræ. Figuræ autem inſcriptæ quæ conicis ſuperficiebus cõtineatur, conus ille oſtenſus eſt ęqualis eſſe, qui baſim habeat circulum ęqualem ſuperficiei dictę figurę: altitudinem uero, lineam linęę illi ęqualem, quę quidem linea à centro ſphęræ ad unum latus dictæ figuræ ſit perpendiculariter educta. Hęc eadem uero æqualis eſt ſemidiametro minoris ſphęrę. quare conſtat id quod propoſitum fuerat. Ex his igitur quæ ſunt demonſtrata, manifeſtum eſt quod figura circumſcripta minori ſphęræ maior eſt, quàm quadrupla coni qui habet baſim maximum in ſphæra circulum, & altitudinem ſemidiametro ſphæræ æqualem. Quoniam igitur dictæ figuræ ille conus æqualis eſt qui habet baſem æqualem ſuperficiei dictæ figuræ, altitudinẽ uero æqualem lineæ quæ à cẽtro ſphęræ ſit ad unũ latus dictæ figuræ perpendiculariter educta, hoc eſt ſemidiametro minoris ſphæræ. Superficies autem circumſcriptæ figuræ circa ſphærã maior eſt, quàm quadrupla maximi in ſphæra circuli. Figura igitur dictæ ſphęræ circumſcripta, maior eſt quàm quadrupla coni, qui baſim habeat maximum in ſphęra circulum, altitudinem uero ſemidiametrum ſphęrę: quoniam conus qui dictę figuræ eſt ęqualis, maior eſt, quàm quadruplus ad dictum conum. nam & baſim maiorem, quàm quadruplam ad illius baſem habet, & altitudinem ſeruat æqualem.

30 SI figura una ſphæræ ſit inſcripta, & eidem altera circumſcripta, quæ quidem figuræ ambæ ſint, ut ſuprà dictum eſt, à duabus planis figuris circum & intra circulum in ſphæra maximum deſcriptis, per circumuolutionem productæ: ſuperficies figuræ circumſcriptæ ad ſuperficiem inſcriptæ habet proportionem duplicatam, eam ſcilicet quæ eſt lateris figuræ planę circulo, ut dictum eſt, circumſcriptæ, ad latus figuræ inſcriptæ in eodem circulo. ipſa uero figura corporea circumſcripta ad figuram inſcriptam ſphæræ, ut dictum eſt, habebit eandem proportionem triplicatam. Eſto in ſphæra circulus maximus a b c d, & inſcribatur ipſi circulo figura multorum angulorum & laterum æqualium, quorum multitudo menſuretur à quaternario. Deinde eidem circulo altera figura circumſcribatur ſimilis inſcriptæ, ita ut latera circumſcriptæ cõtingant in puncto medio arcus circuli abſciſos à lateribus figurę inſcriptæ. Sint etiam e g, f h duæ diametri ad angulos rectos ſecãtes ſeſe circuli comprænhendẽtis figuram circumſcriptã, ſintq́ omnino ſimiliter & ad eaſdem partes ductę ad quas ſunt diametri a b c d. Deinde intelligãtur lineæ rectæ ductæ ad oppoſitos figuræ angulos, quæ iungant latera eius quæ quidem erunt & inter ſe æque diſtantes, & ipſis h f, b d. quieſcente itaq́ e g diametro, & circa eam lateribus figurarum circumuolutis, & circulis ipſis, ſphæræ ſimul duæ & duæ figuræ multorum angulorum corporeæ efficientur, quarum figurarum altera ſphęrę circumſcripta erit, altera eidem inſcripta. Demonſtrandum itaq́ eſt primũ, quòd ſuperficies circumſcriptę ad ſuperficiem inſcriptæ habeat eã proportionẽ duplicatã, quam habet latus e l ad latus a k. Secũdò, quòd ipſa figura circũſcripta ad figuram inſcriptã habeat eandem proportionem triplicatam. Eſto itaq́ circulus m æqualis ſuperficiei figuræ circa ſphæram deſcriptæ, circulus uero n æqualis ſuperficiei figurę inſcriptæ. Semidiametros itaq́ circuli m, poteſt tantũ, quantum eſt quod continetur ſub e l, & ſub linea quæ ſit æqualis omnibus ſimul lineis, quæ angulos figuræ circumſcriptæ coniungunt. Semidiametros uero circuli n poteſt id quod ſub a k, & ſub linea æquali omnibus ſimul lineis, quæ iungunt angulos inſcriptæ. At uero quoniam dictæ figuræ ſunt ſimiles poſitæ, ſpacia quoque



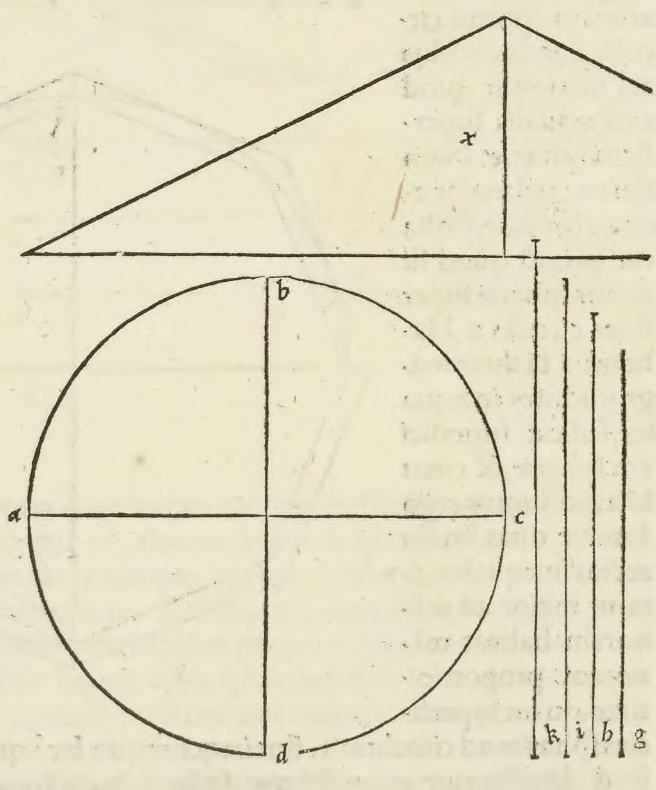
que à dictis lineis,hoc est angulis & lateribus dictarum figurarum comprehensa, similia esse necesse est. quare eandem inter se proportionem retinebunt, quam habent semidiametri circulorum m & n inter se potentia. Quare sequitur, diametros circulorum m & n eandem habere inter se proportionem, quam habent latera figurarum. Circuli uero habent inter se eam proportionem duplicatam, quam habent suæ diametri inuicem, qui circuli æquantur superficiebus duarum figurarum, inscriptæ scilicet & circumscriptæ. Constat igitur, superficiem figuræ circa sphæram descriptæ, ad superficiē figuræ eidem sphæræ inscriptæ, habere eam proportionem duplicatam, quam habet e l ad a k. Sumantur prȩterea duo coni o & x. Esto x conus, cuius basis sit circulus x, qui sit æqualis m. alter uero conus basim habeat o circulum, qui sit æqualis n. altitudinē uero ipsius x ponamus æqualem semidiametro sphæræ. at uero conus o altitudinē habeat lineam, quæ à centro sphæræ ad latus a k perpendiculariter ducta sit. Conus igitur x erit æqualis figuræ circumscriptæ sphæræ, conus uero o æquabitur inscriptæ. nā hæc iam demonstrata sunt. at uero quoniam figurȩ dictæ sunt similes, eandem proportionem habet e l ad a k, quam habet semidiametros sphȩræ ad eam quæ à centro perpendiculariter ducta est ad a k. Eandem igitur proportionem habet altitudo coni x ad altitudinem coni o, quam e l habet ad a k. Diametrus autem circuli m, ad diametrum circuli n, eam habet quam e l ad a k. diametri ergo basium coni x, & coni o, suis altitudinib. sunt proportionales. igitur hi coni sunt similes inter se. & propter hoc conus x ad conū o habet eam proportionem triplicatam, quam diametrus circuli m ad dimetrum circuli n. Manifestum igitur est, quod figura circumscripta habet ad figuram inscriptam, proportionem illam triplicatam, quam habet e l ad a k: quod erat demonstrandum.

CViuslibet sphæræ superficies quadrupla est circuli, qui in ea maximus habetur. Esto sphæra quȩcūq; : esto deinde superficies quȩdā quadrupla ad maximū in sphæra circulū, quȩ sit circulus a. Dico igitur quod a est æqualis superficiei sphæræ. Nam si non, uel maior erit, uel minor. Ponatur primò quod sit maior sphȩræ superficies circulo a. Habemus iā duas magnitudines inæquales, scilicet superficiem sphȩræ, & circulū a. possumus ergo sumere duas lineas rectas inæquales, ita ut maior ad minorem habeat minorem proportionem, quàm superficies sphæræ ad circulum a. sint itaq; sumptæ b c: quarum media proportionalis sit d. Intelligatur etiam sphæra secta à plana superficie transeunte per eius centrum, sitq; illa secans circulus e f g h. intelligatur præterea illi circulo una figura circumscripta, altera inscripta multorum angulorum, ita ut circumscripta sit inscriptæ 31



ptæ similis: & circumscriptæ latus minorem habeat proportionem ad latus inscriptæ, quàm b habet ad ipsam d, & sic illa proportio duplicata minor erit hac similiter proportione duplicata. Proportio autem b ad c est duplicata, ea quam habet b ad ipsam d: proportio autem lateris figuræ circumscriptæ, ad latus figuræ inscriptæ, duplicata est tanta, quanta est superficiei circumscriptæ figuræ solidæ, ad superficiem inscriptæ. Superficies igitur figuræ solidæ circumscriptæ sphæræ, ad superficiem figuræ inscriptæ, minorem proportionem habet quàm superficies sphæræ ad a circulum. quod quidem est inconueniens, & absurdum. Nam superficies figuræ circumscriptæ, superficie sphæræ maior existit. superficies uero inscriptæ a circulo minor est. Ostensum est enim, superficiem figuræ inscriptę minorem esse quàm quadruplam circuli in sphæra maximi. Circulus autem a quadruplus est positus circuli in sphæra maximi. Igitur sphæræ superficies non potest maior esse superficie circuli a. Dico item quod neque minor esse potest. nam si potest, esto: & inueniantur similiter duæ lineæ rectæ b, c: ita ut b ad c habeat minorem proportionem, quàm circulus a ad superficiem sphæræ. sitque illarum media proportionalis d, & circumscribatur iterum, & inscribatur figura ut suprà, ita ut circumscriptæ ad inscriptam minor sit proportio quàm b ad lineam d. igitur & ea duplicata erit minor. Quare superficies circumscriptæ ad superficiem inscriptæ minorem habet proportionem, quàm a circulus ad sphæræ superficiem. quod sanè absurdum est. nam circumscriptæ superficies maior est a circulo, inscriptæ uero superficies sphæræ superficie minor existit. Nõ ergo superficies sphęræ a circulo potest esse minor. Cum etiam demonstratum sit quod nequeat maior esse, necessariò colligitur eam circulo a, hoc est quadruplo circuli in sphæra maximi æqualem esse.

32 QVælibet sphæra quadrupla est eius coni, qui quidem conus habuerit basim æqualem circulo in sphæra maximo, altitudinẽ uero ęqualem semidiametro sphæræ. Esto quædã sphęra, & maximus in ea circulus a b c d. Si itaque sphæra non est quadrupla dicti coni, esto si fieri potest maior quàm quadrupla. Esto præterea conus x, qui basim habeat quadruplã ad circulũ a b c d, altitudinem uero semidiametro sphæræ æqualem. erit igitur sphæra maior cono x. Habemus itaque duas magnitudines inæquales, sphæram uidelicet, & conum x. quare poterimus duas lineas rectas sumere, quarum maior ad minorem habeat proportionem minorem, quàm sphęra ad conum x. Sint igitur istę k g, & aliæ duæ i h sumptæ, ita ut æquali quantitate sese excedant. k excedat i, & i h, & h ipsam g. intelligatur etiam in circulo a b c d inscripta una figura, cuius multitudo laterum mensuretur à quaternario. al-

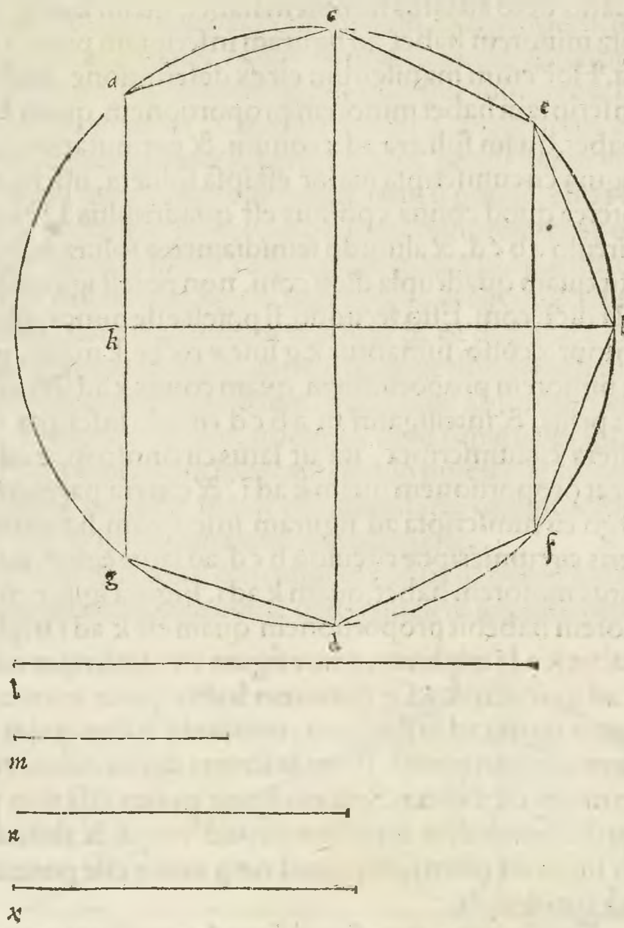


tera

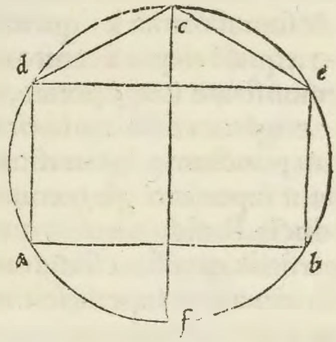
tera præterea circumſcripta ſimilis inſcriptæ, quemadmodum ſuperius quoq; factum eſt. Latus uero circumſcriptæ ad latus inſcriptæ minorem habeat proportionem, quàm k ad ipſam i: & ſint a c, b d diametri ſe ad angulos rectos ſecantes. Si igitur quieſcente a c diametro circumferatur planus circulus, in quo figura eſt inſcripta, & circa quem altera circũſcripta fuerat, fient duæ figuræ, altera circa ſpheram, altera intrà deſcripta. Et circumſcripta habebit ad inſcriptam eam proportionem triplicatam, quam habet latus circũſcriptæ, ad latus inſcriptæ circulo a b c d. Latus uero ad latus minorem habet, quàm k ad ipſam i: quare figura circumſcripta minorem habet ad figuram inſcriptam proportionem, quàm eſt k ad i triplicata. Hoc enim manifeſtum eſt ex deſcriptione. multo magis ergo circumſcripta ad inſcriptam habet minorem proportionem, quàm k ad g. At uero k ad g minorem habet, quàm ſphæra ad x conum. & permutatim: quod ſanè eſſe non poteſt. nam figura circumſcripta maior eſt ipſa ſphæra, inſcripta uerò eſt minor cono x: propterea quod conus x poſitus eſt quadruplus ad eum conũ, cuius baſis æqualis ſit circulo a b c d, & altitudo ſemidiametro ſphæræ. inſcripta uero figura minor exiſtit quàm quadrupla dicti coni. non poteſt igitur ſphæra maior eſſe quàm quadrupla dicti coni. Eſto ſecundò, ſi poteſt eſſe minor quàm quadrupla, ita ut ſphæra ſit minor x cono. ſumantur k g lineæ rectæ, k maior, g minor. Habeatq; k ad ipſam g minorem proportionem, quàm conus x ad ſphæram. & diſponantur i & h lineę ut prius, & intelligatur in a b c d circulo inſcripta figura multorum angulorum, altera circumſcripta, ita ut latus circumſcriptæ ad latus inſcriptæ, minorem habeat proportionem quàm k ad i, & cætera parentur eodem modo ut prius. figura ergo circumſcripta ad figuram inſcriptam, habebit eam proportionem quæ eſt lateris circumſcriptæ circulo a b c d, ad latus eidem inſcriptę triplicata. Latus uero ad latus minorem habet, quàm k ad i. Figura igitur circumſcripta ad inſcriptam, minorem habebit proportionem quàm eſt k ad i triplicata. k uero ad g eſt ea quam habet k ad i triplicata. quare figura circumſcripta ad inſcriptam, habet minorem quàm k ad g. at uero k ad g minorem habet quàm x conus ad ſphæram. Circumſcripta igitur figura ad inſcriptam, minorem habet quàm x conus ad ſphærã. quod quidem eſſe non poteſt. Nam inſcripta figura minor eſt ipſa ſphæra. circumſcripta uero maior eſt x cono. Sphæra igitur minor eſſe non poteſt, quàm quadrupla coni, qui habeat baſim æqualem circulo a b c d, & altitudinem ſemidiametro ſphæræ. Et ſuprà eſt oſtenſum, quod neq; maior eſſe poterat: erit igitur dicti coni neceſſariò quadrupla.

Ex illis igitur quæ ſuprà ſunt demonſtrata, manifeſtum eſt, quod quilibet cylindrus, qui baſim habeat maximum in ſphæra circulum, & altitudinem diametrum ſpheræ, ad ipſam ſpheram ſeſquialter habetur, & ſuperficies eius cum baſibus ſeſquialtera ad ſphæræ ſuperficiem. nam cylindrus prædictus ſextuplus eſt eius coni qui baſim habeat cum cylindro eandem, habeat uerò altitudinem æqualem ſemidiametro ſphæræ. Sphæra uero eſt demonſtrata eſſe quadrupla dicti coni. ex quo conſtat, cylindrum eſſe ſphæræ ſeſquialterum. Item cum ſuperficies cylindri exceptis baſibus circulo oſtenſa eſt æqualis, cuius ſemidiametrus ſit media proportionalis inter latus cylindri & diametrum baſis eius: dicti autem cylindri circa ſphæram latus eſt æquale diametro baſis ſuæ: manifeſtum eſt, quod media proportionalis eſt & ipſa æqualis eidem diametro. Circulus autem cuius ſemidiametrus ſit æqualis diametro baſis, quadruplus eſſe probatur ad baſem, quæ eſt maximus in ſphæra circulus. Superficies autem cylindri exceptis baſibus habet quadrupla maximi in ſphæra circuli. quare tota ſimul cum baſibus ad eundem circulum ſextupla apparebit. ipſa quoq; ſphæræ ſuperficies ad circulum in ſphæra maximum, quadrupla probata eſt. quare tota cylindri ſuperficies, ad ſphæræ ſuperficiem exiſtet ſeſquialtera.

33 SVperficies figuræ in portione sphæræ descriptæ, æqualis est circulo, cuius semidiametros tantum possit, quantum est quod continetur sub uno latere figuræ multorum angulorum, inscriptæ in sectione maximi circuli, & sub linea quę sit æqualis omnibus simul lineis, quæ base sectionis sint æquedistantes, & dimidio ipsius basis cum prælictis adiecto. Esto sphæra, & in ipsa portio secta, cuius basis sit circulus, cuius sit diametrus a g: inscribatur in ipsa portione figura qualis sæpe dicta est, comprensa à conicis superficiebus. & sit maximus in sphæra circulus a g h, & sit figura pari laterum numero constãs a c e h f d g, excepto latere a g: & sumatur circulus l, cuius semidiametros tantum possit, quantum quod continet sub latere a c, & sub omnibus simul e f c d, atq; etiã dimidia base, hoc est a k. demõstrandum deinceps est, quod l circulus æqualis est superficiei dictæ figuræ. Sumatur enim circulus m, cuius semidiametros tantũ possit quantum quod cõtinetur sub h e, & sub dimidia e f. Circulus ergo m æqualis est superficiei coni illius, cuius basis est circulus habens e f diametrum: eius uero altitudo et uertex, signum h. sumatur item alius circulus n, cuius semidiametrus tantum possit quantum continetur sub e c, & dimidia utriusq; simul e f, c d, erit hic ęqualis superficiei coni, illi uidelicet quæ sita est media inter planas superficies æquedistantes, secundum lineas uel circulos e f, c d. Item alius similiter sumatur qui sit circulus x, cuius semidiametrus possit id quod sub a c, & dimidia utriusq; simul c d, a g continetur, qui & æqualis est superficiei conicæ, quæ inter planas æquedistantes a g c d comprenditur. Omnes igitur circuli æquales erunt toti superficiei figuræ dictæ. Et eorum semidiametri tantum poterunt, quantum sub uno latere a c, & sub linea quæ sit æqualis omnibus simul e f, c d, & dimidia basi a k. poterat autem semidiametrus circuli l æquale eidem spacio. quare sequitur, l circulum circulis m n x æqualem esse: unde & superficiei figuræ inscriptæ æqualis existet.

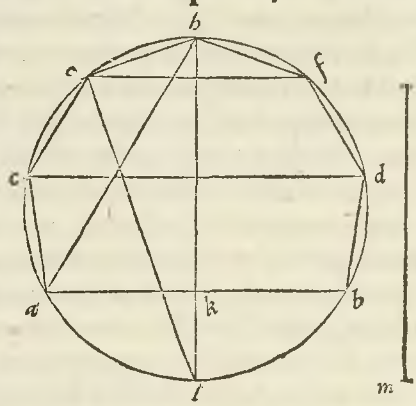


34 SEcetur sphæra plana, superficie non transeunte per centrum eius, & sit in ea maximus circulus a e f, qui secet superficiem secãtem ad angulos rectos, & inscribatur in a c b sphæræ portione figura multorum angulorum & parium numero, & æqualium laterum, excepta base a b, similiter superiorib. si manente & quiescente g c circumferatur figura anguli quidem d, e, a, b secundum circumferentias circulorum, latera uero secundum conicas superficies ferentur, eritque figura



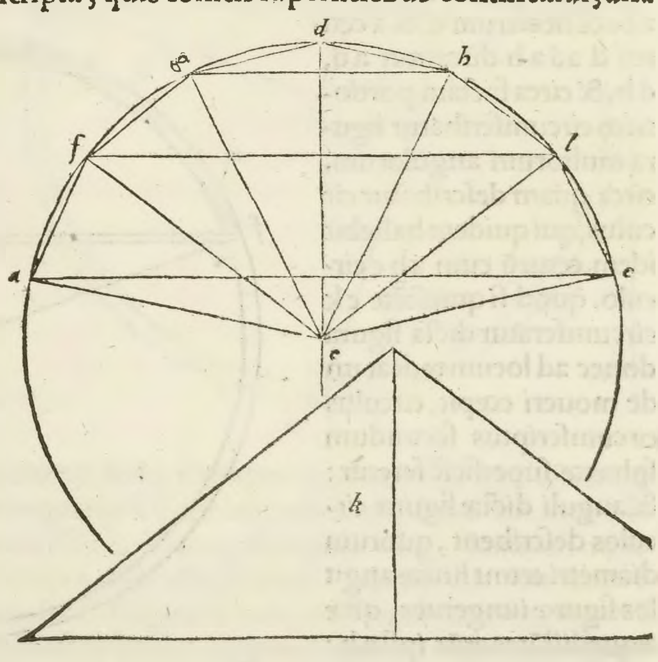
ra solida quæ inde confecta est, superficiebus conicis compræhensa, quæ basim habebit eum circulum cuius diametrus est a b, uerticem uero punctum c. Hæc igitur figura similiter his quæ dicta sunt superius, superficiem habebit minorem superficie eius figuræ quæ complectatur eam. idem enim est utrisque terminus in plano portionis, scilicet circumferentia circuli, cuius diametros est a b: & ambæ sunt in eandem partem conglobatæ superficies, & altera sub altera tenetur complexa.

SVperficies figuræ in sphæræ portione descriptę, minor est eo circulo, cuius semidiametros æqualis est lineæ, quæ à uertice portionis ad circumferentiã circuli ducitur: qui quidem circulus basis est portionis. 35



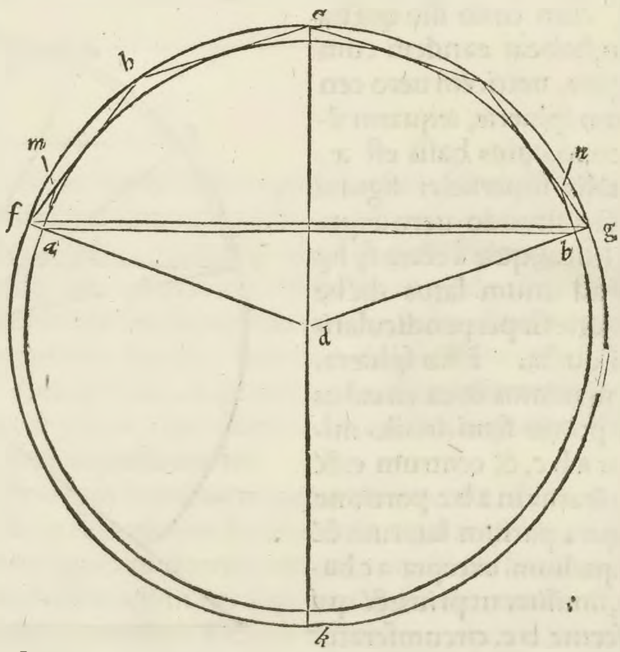
Esto sphæra, & maximus in ea circulus a b f e: & esto portio sphæræ, cuius basis sit circulus circa diametrum a b, & inscribatur in ipsa dicta figura & in portione circuli, figura multorum angulorum, & cętera eadem. Esto sphęræ diametros h l, coniunctis l e, h a. & sit circulus m, cuius semidiametrus sit æqualis a h. Ostendendum est, quod circulus m maior est superficie figuræ. superficies aũt figuræ demonstrata est æqualis esse circulo, cuius semidiametros tantum potest, quantum continetur sub e h, & sub omnibus e f, c d, k a. idipsum cõtentum sub e h, & sub e f, c d, k a, æquatur contento sub e l, k h. contentum uero sub e l, k h, minus est contento sub a h. nam & minus contento sub a h, k h. Manifestũ igitur est, quod semidiametrus circuli, qui est æqualis superficiei figuræ, minor est semidiametro m. Constat igitur, circulum m superficie figuræ maiorem etiam.

FIgura portioni sphæræ inscripta, quæ conicis superficiebus contineatur, unà cum cono illo qui basim habeat eandem cum figura, uerticem uero centrum sphæræ, æquatur illi cono, cuius basis est æqualis superficiei figuræ dictę: altitudo uero æqualis lineæ, quæ à cẽtro sphęræ ad unum latus dictæ figuræ sit perpendiculariter ducta. 36



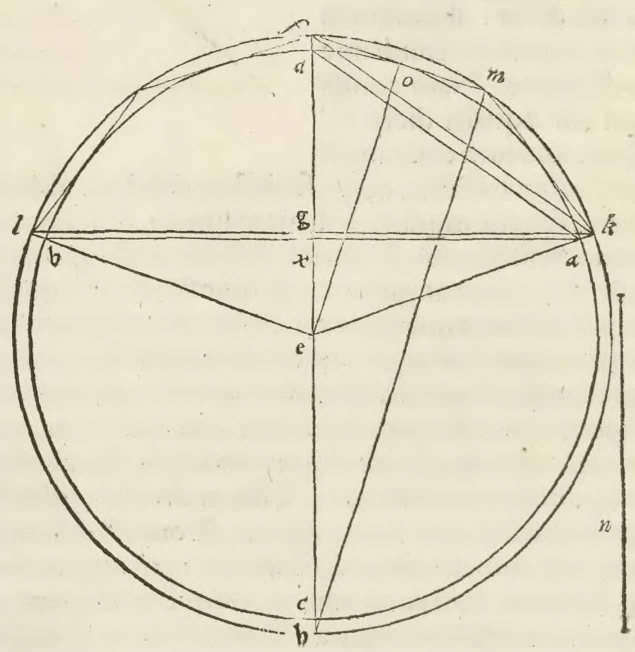
Esto sphæra, et maximus in ea circulus & portio semicirculo minor a b c, & centrum e: & scribatur in a b c portione figura parium laterum & æqualium, excepta a c base, similiter ut prius: & quiescente b e, circumferatur sphæra, quæ faciet figurã quandam conicis superficiebus comprensam. & à circu lo cuius diametros est a c, conus erigatur, qui uerticem habeat centrum sphæræ. & sumat̃ conus k, qui basem habeat æqualem superficiei figuræ, altitudinem uero æqualẽ ei quæ à centro e ducitur perpendiculariter ad unum latus figuræ. Demonstrare itaq; oportet, quod conus k æquetur figuræ dictæ, unà cum cono a e c. erigãtur etiam coni à circulis, quorum diametri sunt g h, f l, qui uerticem habeant punctum e. Igitur rhombus g b h e solidus, æqualis est cono cuius basis æquatur superficiei g b h: coni altitudo uero ei quæ ab e ad g b, sit perpendiculariter ducta. Residuum uero quod continetur sub superficie intermedia inter planas superficies, quæ sunt secũdum g h, f l, & sub conicis f e l, g e h, æquatur cono cuius basis æqualis sit superficiei intermediæ inter æquedistantes planas, quæ sunt secũdum g h, f l: altitudo uero æqualis ei quæ sit à centro e ad f g perpendiculariter ducta. Rursus residuum compræhensum à superficie intermedia planarum æquedistantium, quæ sunt secundum f l, a c, & à conicis a e c, f e l, æquatur cono cuius basis æqualis est superficiei, quæ intermedia est inter planas æquedistantes, quæ sunt secundum f l, a c, altitudo uero ei quæ ducta sit perpendiculariter ab e ad f a. Prædicti igitur coni æquales erunt figuræ unà cum cono a e c. & altitudinem quidem habent eam quæ ab e ad unum latus figuræ perpendiculariter sit ducta, bases uero æquales superficiei a f g b l c figuræ. Habet aũt & conus k eãdem altitudinem, & basem æqualem superficiei dictæ figuræ: quare erit æqualis dictis conis. Coni uero dicti ostẽsi sunt æquales esse dictæ figuræ, unà cum a e c cono. Igitur & k conus æquat̃ dictæ figuræ, unà cũ a e c cono. Ex hoc igitur manifestũ est, quod conus qui basem habeat circulum, cuius semidiametros æqualis sit ei quæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui est basis figuræ, ducta sit: altitudinem uero æqualem semidiametro sphęræ: maior est figura portioni inscripta unà cum cono, &c. nam dictus conus maior est cono æquali figurę, unà cum cono, &c. qui conus basem habeat basem figuræ portionis ad centrum: hoc est, qui basem habeat æqualem superficiei figuræ, altitudinem uero æqualem ei quæ sit à centro ad unum latus figuræ multorum angulorum perpendiculariter ducta. nam basis illius, base huius maior existit, & altitudo altitudine maior.

37 ESto sphæra, & maximus in ea circulus a b c, & secetur in ea portio semicirculo minor, quã secet a b, & sit cẽtrum d, & à centro d ad a b ducantur a d, d b. & circa factam portionem circumscribatur figura multorum angulorum, circa quam describatur circulus, qui quidem habebit idem centrũ cum a b c circulo. quod si quiescẽte e k circumferatur dicta figura donec ad locum redeat unde moueri cœpit, circulus circumscriptus secundum sphæræ superficiẽ feretur: & anguli dictæ figuræ circulos describent, quorum diametri erunt lineæ angulos figuræ iungentes, quæ æquedistãtes erũt ipsi a b: puncta uero, in quibus latera figuræ contingunt circulum minorem, circulos descri-



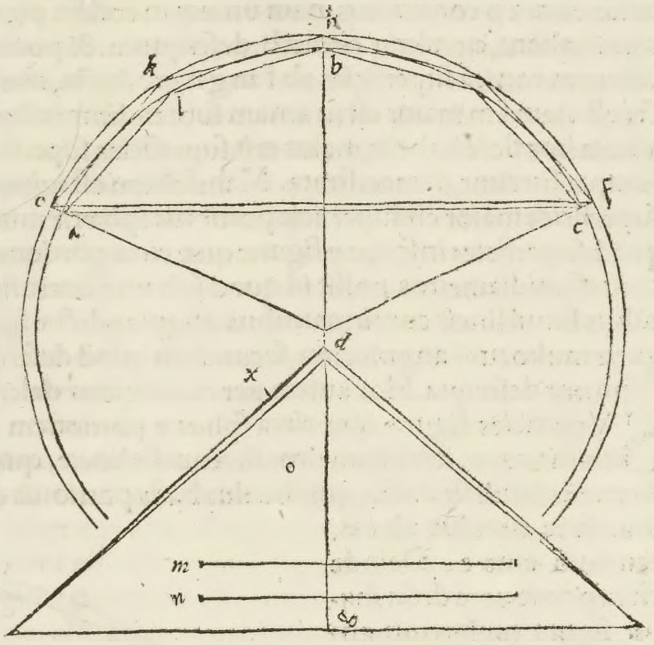
describent in minori sphæra, quorum diametri erunt lineæ continuantes puncta contactuum æquedistantes lineæ a b, latera uero dictæ figuræ secundum conicas superficies ferentur. & figura circumscripta sub conicis superficiebus continetur, cuius basis circulus est, qui est circa f g diametrũ: dictæ uero figuræ superficies est maior superficie minoris sectionis, cuius basis est circulus qui est circa a b diametrum. Ductæ enim sunt contingentes a m, b n. quare secundum conicas superficies ferentur: & figura quæ causatur à figura multorum angulorum, circumuoluta a m h e n b, maiorem habebit superficiem quàm portio sphæræ, cuius basis est circulus circa a b constitutus. nam utræq; in eodem plano existunt, & eundem terminum habent, circulum circa a b descriptum. & portio à figura comprehenditur. cæterum conica superficies ab f m g n producta, maior est ea quæ ab m a n b effecta est. nam f m maior est m a: nam subtenditur rectæ. linea uero n g, maior n b. cũ autem hoc sic se habeat, maior erit superficies superficie. nam hæc sunt in his quæ sumpta fuerunt, demonstrata. Manifestum est igitur, quod circumscriptæ figuræ superficies maior est superficie portionis sphæræ minoris. Insuper manifestũ est, quod superficies inscriptæ figuræ quæ circa portionem existit, æqualis est circulo cuius semidiametros possit id quod sub uno latere figuræ continetur, & sub omnibus simul lineis continuantibus angulos dictæ figuræ, & dimidia base dictæ figuræ multorum angulorum, secundum quod descripta fuit figura solida in maiori sphæra descripta. Hoc autem per ea quæ antè descripta sunt, manifestum est.

SVperficies figuræ quæ circa sphæræ portionem sit descripta, eo circulo maior existit, cuius semidiametros sit æqualis lineæ, quæ à uertice portionis ad circũferentiã circuli sit ducta, qui circulus basis portionis existat. Esto sphæra, & maximus in ea circulus a b c d, centrum eius e. Deinde circa portionem describatur figura multorum angulorum l k f, & circa hãc describatur circulus, & fiat figura, ut prius circumuoluendo, &c. deinde esto circulus n, cuius semidiametros possit id quod continetur sub uno latere figuræ, & sub omnibus simul coniungentibus angulos, & dimidia k l. uerũ idem spacium dictũ æquatur ei quod sub m h & f g continetur, quæ est altitudo portionis maioris sphæræ. Hoc autem prius ostẽsum est. semidiametros igitur circuli n, potest æquale ei quòd sub m h, g f continetur. sed g f quidem maior est d x, quæ est altitudo minoris portionis. nam si iungamus k f, erit æquedistans ipsi d a. Est autem & a b æquedistans ipsi k l, & conus est f e. Triangulus igitur f k g, similis est triangulo d a x. & maior est f k quàm d a. maior est igitur etiã f g quàm d x. At uero m o æquatur ipsi o f, ipsa uero h e ipsi e f. est igitur e o æquedistans ipsi m h: igitur m h dupla est e o. Sed etiam c d dupla est ipsius e o. quare c d æqualis est ipsi m h. Quod aũt sub c d & d x continetur, est æquale quadrato a d. Superficies igiĩ figuræ k f l, 38



maior est circulo cuius semidiametros sit æqualis ei quæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli ducta sit, qui est basis eius portionis quæ est circa diametrũ a b. quoniam n circulus æqualis est superficiei figuræ circa portionẽ descriptæ.

39 Figura circa sphæræ portionem descripta, unà cum cono cuius basis sit circulus circa k l diametrum constitutus, uertex centrũ sphæræ æqualis est cono, cuius basis sit ęqualis superficiei figuræ: altitudo uero æqualis ei lineę, quæ à cẽtro ad latus figurę sit perpendiculariter ducta, quæ quidem semidiametro quoq; sphęræ inuenitur æqualis. Nã figura portioni circumscripta, est in portione maioris sphærę inscripta, cuius centrum est idem cum minori. unde constat, quod propositum est ex antè descripta figuratiõe. Ex hoc igitur manifestũ est, quod figura circumscripta unà cum cono, maior est eo cono qui basim habeat circulum, cuius semidiameter æqualis sit lineæ ductæ à uertice portionis sphæræ minoris, ad circumferentiam circuli, qui sit basis portionis dictæ: altitudinem uero æqualem semidiametro sphæræ. Nam conus qui erit æqualis dictæ figurę, unà cum cono maiorem basim habebit, quàm sit dictus circulus: altitudinem uero æqualem semidiametro sphęræ minoris.

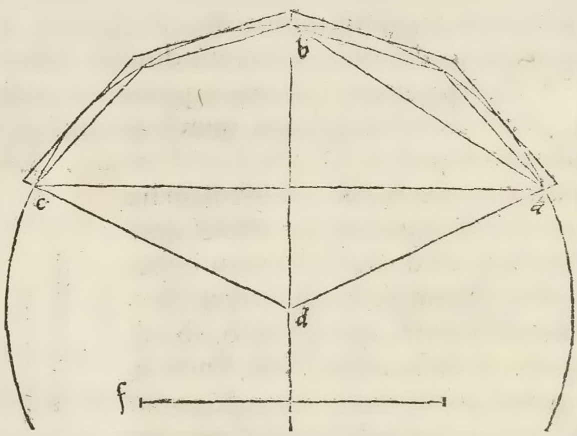


Esto item sphęra, & maximus in ea circulus & portio a b c, minor semicirculo, & cẽtrum d: & intra a b c portionem inscribatur figura multorum & parium angulorum, & huic similis circumscribatur eidem, & ponantur latera lateribus æquedistantia. & circulus circumscribatur figuræ circumscriptæ, & ut prius quiescente g h, circuli circumducti producant figuras conicis superficiebus compræhensas. Ostendere oportet, quod circumscriptæ figurę superficies ad superficiem inscriptę eam habet proportionem, quæ est lateris circũscriptæ ad latus inscriptæ duplicatã. Figura uero ipsa, simul cum cono ad figurã, habet eandẽ proportionem triplicatam. Esto m circulus, cuius semidiametros tantum potest, quantum sub uno latere figuræ, & omnibus simul lineis angulos continuantibus, unà cum dimidia e f continetur: erit itaq; m circulus æqualis superficiei figurę. Sumatur deinde circulus n, cuius semidiametros tantum possit, quantum sub uno latere inscriptæ figuræ, & omnibus simul lineis iungentibus angulos unà cũ dimidia a c. Hic quoq; circulus erit æqualis superficiei figuræ inscriptæ. Verum dicta spacia habẽt inter se eam proportionem, quam habet quadratum lateris e k ad quadratum a l. Igitur ut figura ad figuram, ita m circulus ad n circulum. Quare manifestũ est, quod superficies figurę circumscriptę ad superficiem inscriptæ figuræ, habet eam proportionem duplicatam, quã habet e k ad a l: eandem uidelicet, quam figura ad figuram. Esto item conus x, qui basim habeat æqualem circulo m, altitudinem uero semidiametrum sphæræ minoris. Hic conus æqualis est figuræ circumscriptæ unà cum cono illo, cuius quidẽ coni basis est circulus qui est circa e f

ca e f

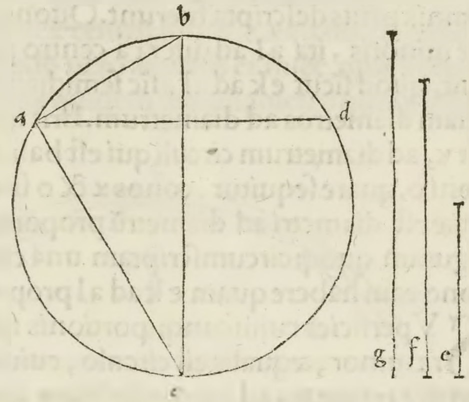
ca e f diametrum, uertex uero d. Eſto item alius conus o, qui baſim habeat æqualẽ ipſi n, altitudinem uero æqualem ei quæ ab ipſo d ad a l perpendiculariter ducta ſit. hic quoq; figuræ inſcriptæ unà cum una cono eſt æqualis, cuius quidem coni baſis eſt circulus circa a c diametrum deſcriptus, uertex uero d cẽtrum. Hæc enim omnia prius deſcripta fuerunt. Quoniam igitur ſicut e k ad ſemidiametrum ſphæræ minoris, ita a l ad ductã à centro perpẽdiculariter ad ipſam a l. Oſtenſum aũt fuit, quod ſicut e k ad a l, ſic ſemidiametros circuli m ad ſemidiametrũ circuli n, et etiam diametros ad diametrum. Erit igitur, ſicut diametros circuli illius qui eſt baſis x, ad diametrum circuli qui eſt baſis ipſius o, ita altitudo coni x ad altitudinem coni o. quare ſequitur, conos x & o ſimiles eſſe. conus ergo x habet ad conũ o, eã quæ eſt diametri ad diametrũ proportionem triplicatam. Vnde manifeſtum eſt, figuram quoq; circumſcriptam unà cum cono ad figuram inſcriptam, unà cum cono eam habere quam e k ad a l proportionem triplicatam. quare, &c.

SVperficies cuiuſcunq; portionis ſphæræ, quæ quidem portio ſit dimidia ſphæ 40
ra minor, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiametros æquatur lineæ illi, quæ à uertice portionis ad circumferẽtiam circuli ducta ſit, qui circulus portionis eſt baſis. Eſto ſphæra, et maximus in ea circulus a b c, itẽ ſectio in ea minor dimidia ſphæra, cuius baſis ſit circulus circa a c cõſtitutus, erectus ſuper a b c circulo. & ſumatur circulus f, cuius ſemidiametros ſit æqualis lineæ a b. Oportet itaq; demõſtrare, ſuperficiẽ a b c portionis ęqualem eſſe circulo f. nã ſi non ſit: eſto primò maior dicta ſuperficies circulo f, & ponatur d centrũ, & ab ipſo duę lineę ductę ad a, & ad c extra educantur. Cũ igitur ſint duę

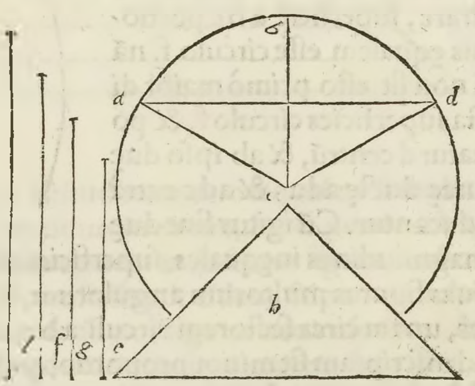


magnitudines inęquales, ſuperficies uidelicet portionis, et f circulus, deſcribemus duas figuras multorum angulorum, & parium & ęqualium laterũ, omnino ſimiles, unam circa ſectorem circuli a b c, alteram intra eundem, ita ut circumſcriptę ad inſcriptam ſit minor proportio, quàm ſuperficiei portionis ſphęrę ad circulum f. circumuoluto deinde circulo, ut prius, duas figuras efficiemus conicis ſuperficiebus compręhenſas, quarum altera circumſcripta, altera inſcripta erit: & ſuperficiés circumſcriptę ad ſuperficiem inſcriptę eandem habebit proportionem, quam circumſcripta figura habet ad inſcriptam. nam utraq; proportio eſt duplicata illa quam habet latus circumſcriptę, ad latus inſcriptę figurę multorum angulorum. Sed circumſcripta multorum angulorũ figura ad inſcriptã, minorem habet proportionem, quàm dictę portionis ſuperficies ad circulum f. maior autem eſt circũſcriptę figurę ſuperficies ſuperficie portionis. igitur & ſuperficies figurę inſcriptę maior erit f circulo. quod quidem eſſe non poteſt. Nam ſuprà demonſtratum eſt, dictam figurę ſuperficiem tali circulo minorem eſſe. Eſto ſecundò, quod circulus ponatur maior eſſe ſuperficie, & ſimiliter circumſcribatur & inſcribatur figura altera alteri ſimilis, & circumſcriptæ ad inſcriptam minor ſit proportio quàm circuli f ad ſuperficiem figurę: & item demonſtrabitur deducendo ad idem inconueniens, circulum f non poſſe eſſe maiorem dicta ſuperficie. Cum igitur neq; maior eſſe poſſit dicta ſuperficies f circulo, neq; minor, ut demonſtratum eſt, ſit neceſſariò, ut ſit eidem æqualis.

41 SI portio sphęrę sit maior dimidia sphęra, rursus eius superficies æquatur circulo, cuius semidiametros sit ęqualis lineę illi quę ducta sit à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui est basis dictæ portionis. Esto sphęra, & maximus in ea circulus a b c d, & intelligatur ipsa secta à plano secũdum a d, & sit a b d minor dimidia sphęra, et diametrus b c secet ad angulos rectos diametrum a d, & ipsa c & b iungantur c a, b a: & sit e circulus, cuius semidiametrus sit ęqualis ipsi a b. Sit autem f circulus, cuius semidiametrus sit ęqualis ipsi a c. & g sit circulus, cuius semidiametrus sit ęqualis b c. Circulus igitur g, ęqualis est duobus simul circulis e, f. Circulus autem g, ęqualis est toti superficiei sphęræ, cum utraq; sint quadrupla circuli, qui est circa diametrum b c. circulus e, æqualis est superficiei a b d portionis minoris: nam hoc est demonstratũ proxima superiori in portione minori dimidia sphæra. reliquus ergo circulus f, æqualis est superficiei a c d portionis maioris dimidia sphæra.



42 QVicũq; portioni sphæræ æquatur conus ille, qui basim habeat æqualẽ superficiei sectionis sphæræ, quæ secundum dictam portionem habeatur: altitudinem uero æqualem sphæræ semidiametro. Esto sphæra, & maximus in ea circulus a b d, centrum c. & conus basem habens circulũ æqualem superficiei, quæ secundum a b d circũferentiam habetur, altitudinem uero æqualem ipsi b c. Ostendẽdum est, quod portio a b c d, æqualis est dicto cono. Nam si non: esto primò portio maior cono, & ponatur h conus qualis dictus est. Cum igitur duæ sint magnitudines inęquales, portio scilicet, & conus h, inueniantur duæ lineæ l & e, l maior, e minor, quæ habeãt minorẽ proportionem, quàm portio ad conum: & sumantur duæ lineæ, f, g: ita ut l tantum excedat f, quantum f excedit g, & g, e. & circa planam circuli portionem circumscribatur figura multorum angulorum, & æqualium laterũ, & parium angulorum: & altera huic similis inscribatur eidem, ita ut circumscriptæ ad inscriptam sit maior proportio, quàm l ad ipsam f. & simili modo, ut prius factum est, circũducto circulo producentur duæ figuræ conicis superficiebus compræhensæ. Figura itaq; circumscripta, unà cum cono, qui uerticem habeat punctum c ad figuram inscriptam, unà cum cono habet eam proportionem triplicatam, quam habet latus figuræ multorum angulorum circumscriptæ, ad latus inscriptæ. Verum latus circumscriptę ad latus inscriptæ, habet minorem proportionem quàm l ad f. Figura igitur solida quæ dicta est, minorem habebit proportionem quàm est l ad f triplicata. At uero l ad e maiorem habet proportionem, quàm est l ad f triplicata. figura ergo solida circumscripta portioni, ad inscriptam figuram, minorem habet proportionem, quàm est l ad e. Verum l ad e minorem habet, quàm portio solida, ad conum h. quare figura solida circumscripta portioni, ad inscriptam eidem, minorem habet



bet

bet proportionem, quàm portio ſolida ad conum h: & permutatim. figura ſolida uero circumſcripta maior eſt portione. Inſcriptam ergo figuram ipſi portioni maiorem eſſe cono concludemus, quod ſanè eſſe non poteſt. demōſtratum enim eſt in ſuperioribus, dictam figurã minorẽ eſſe oportere eo uidelicet cono, qui baſim habeat circulũ, cuius ſemidiametros æqualis ſit lineæ à uertice portionis ad circũferentiam portionis ductæ, qui circulus baſis portionis exiſtat: altitudinem uero ſemidiametrum ſphæræ. Hic aũt eſt dictus conus h. habet enim baſem circulum æqualem ſuperficiei portionis, hoc eſt dicto circulo, & altitudinem æqualem ſemi diametro ſphæræ. Portio igitur ſolida non eſt maior cono h. Eſto ſecundò conus h maior ſolida portione: rurſus atq; ſimiliter l ad ipſam e, cum ſit maior, ea minorẽ habeto proportionem, quàm conus ad portionem. & ſimiliter ſumantur f g, ita ut latus figuræ multorum angulorum & parium circumſcriptæ circa planam portionem circuli ad latus inſcriptæ eidem, minorem habeat proportionem quàm eſt l ad f. & fiant circa portionem ſolidam figuræ ſolidæ, ut ſuperius fecimus. Demonſtrabimus itaq; eodem modo, quòd figura ſolida portioni ſolidæ circumſcripta, ad inſcriptã figuram minorem habeat proportionem, quàm l ad e, & quàm h conus ad portionem. quare portio quoque ad conum minorem habebit proportionem, quàm figura ſolida portioni inſcripta ad figuram circumſcriptam. Portio autem maior eſt figura ſibi inſcripta. igitur concludemus, h conum eſſe figura circumſcripta maiorem: quod item eſſe non poteſt. nam hoc demōſtratum eſt, quod talis conus neceſſariò minor eſt figura portioni circumſcripta. Ex qua re colligimus, portionem cono dicto eſſe æqualem.

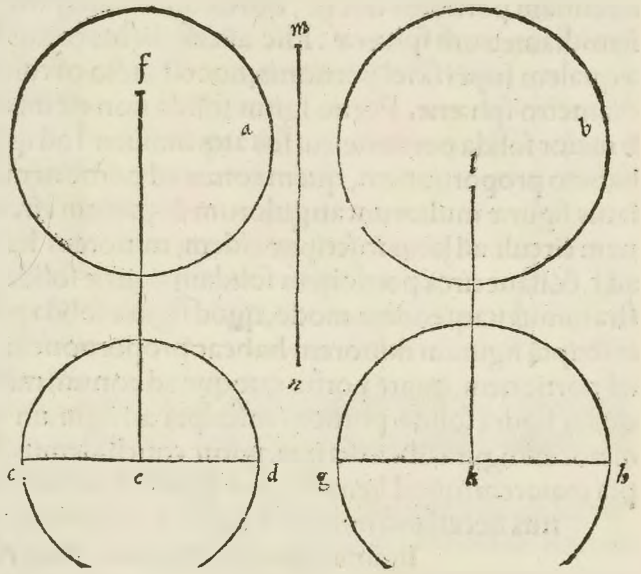
ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET Cylindro Libri primi Finis.

ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET CYLINDRO LIBER ſecundus.

ARCHIMEDES DOSITHÆO Salutem.

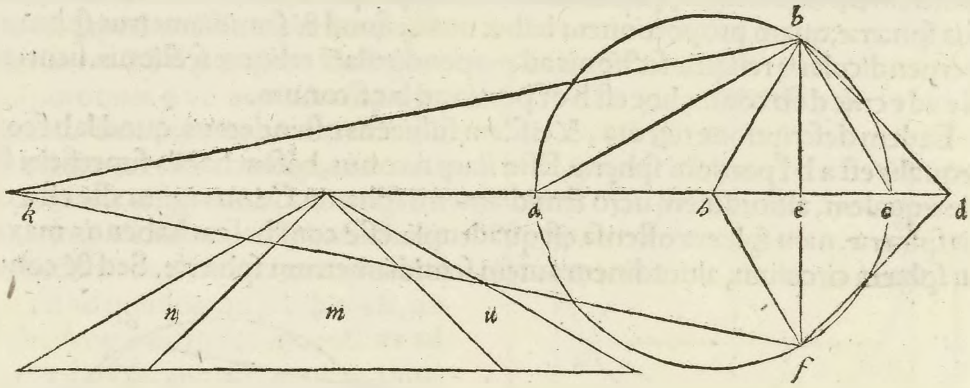
ANTEA quidem mihi iuſſeras, ut problematum demonſtrationes ſcriberem, quorum ipſe iam propoſitiones miſeram ad Cononem. Contingit autem eorum plurima ſcribi per theoremata, quorum iampridem ad te miſeram demonſtrationes. Quòd uidelicet cuiuslibet ſphæræ ſuperficies maximi in ſphæra circuli quadrupla exiſtit. Et quòd ſuperficiei cuiuſcunque ſphæræ circulus ille eſt æqualis, cuius ſemidiametros diametro ſphæræ eſt æqualis. Item cuiuſcunque portionis ſphæræ ſuperficies æquatur circulo, cuius ſemidiametros eſt æqualis lineæ rectæ, quæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui eſt baſis portionis, ducatur. Itẽ quod cylindrus qui baſem habeat maximum in ſphæra circulum, altitudinem uerò æqualem diametro ſphæræ, ipſeq; ſeſquialter eſt magnitudini ſphæræ, & eius ſuperficies ſuperficiei ſphæræ ſeſquialtera habetur. Item quòd omnis portio ſolida ſphæræ æqualis eſt cono, qui baſim habeat circulum, qui ſit æqualis ſuperficiei portionis ſphæræ: altitudinem uerò æqualem ſemidiametro ſphæræ. Quæcunq; igitur inſpecta theoremata & problemata ex his quę dicta ſunt oriuntur, ad te miſſa ſunt, omnia in hoc libro conſcripta. Quæ uero ex alia inſpectione colliguntur, ut quæ de elicis & conoidibus, nitor quàm celeriter mittere. Primũ autem quod propositum fuerat, habebatur huiusmodi. Sphæra data spacium planum inuenire, quod superficiei sphæræ esset æquale. Hoc autem manifestum & demonstratum est ex prædictis inspectis & theorematibus. Spacium enim planum quod circulo in sphæra maximo sit quadruplum, æquale est superficiei sphæræ.

1 Secundum propositũ fuit, cono, siue cylindro dato sphæram inuenire, dicto cono uel cylindro æqualem. Esto datus conus, siue cylindrus, a: & sphæra ipsi a æqualis, sit b: & ponatur cylindrus c f d, qui sit sesquialter dato cono, uel cylindro a. Sphæræ uero b cylindrus sesquialter esto, qui basem habet circulum, qui est circa diametrum g h: axem uero k l, æqualem diametro sphæræ b. erit igitur e cylindrus æqualis cylindro k. cylindrorũ aũt æqualium bases suis altitudinib. sunt mutuæ in proportione. Sicut ergo e circulus ad k circulum, hoc est sicut quadratum c d ad quadratum g h, sic k l ad e f. Est autem k l æqualis ipsi g h. nam cylindrus sesquialter sphæræ, axem habet æqualem diametro sphæræ, & circulus k est in sphæra maximus. sicut ergo quadratum c d ad quadratum g h, sic g h ad e f. Esto id quod sub c d, m n continetur, æquale quadrato g h. Sicut ergo c d ad m n, sic quadratum c d ad quadratum g h, hoc est g h ad e f: & permutatim, sicut c d ad g h, ita g h ad m n, & m n ad e f. Et utraque c d & e f data est. Igitur inter duas datas rectas lineas duæ mediæ proportionales sunt, g h, m n. quare utraq; g h & m n data erit. Componetur autem iam propositum hoc modo. Esto datus conus, siue cylindrus, a. oportet itaq; ipsi cono, uel cylindro, sphæram æqualem constituere. Esto coni, siue cylindri a, cylindrus sesquialter, cuius basis sit circulus qui est circa diametrũ c d, axis uero e f. & sumantur inter c d & e f duæ mediæ proportionales g h, m n: ita ut sicut c d ad g h, ita g h, ad m n, & m n ad e f. Et intelligatur cylindrus, cuius basis sit circulus, qui fiat circa diametrum g h, axis autem k l æqualis diametro g h. Dico iam, quod æqualis est e cylindrus ipsi k cylindro. Nam quoniã sicut c d ad g h, ita m n ad e f. & permutatim, & g h est æqualis ipsi k l. Sicut igitur c d ad m n, hoc est quadratum c d ad quadratum g h, sic e circulus ad k circulum. sicut ergo e circulus ad k circulum, sic k l ad e f. Cylindrorũ igitur e & k bases, suis altitudinibus in proportione sunt mutuæ. quare e cylindrus ipsi k cylindro erit necessariò æqualis. Cylindrus uero k sphæræ illius est sesquialter, cuius diametros est g h. Ergo sphæra cuius diametros æquatur g h, hoc est b, æqualis est a cono, siue cylindro.



2 CVicunq; portioni sphæræ conus ille habetur æqualis, qui basim habeat eandem cum portione, altitudinem uero lineam rectã, quæ ad altitudinem portionis eandem habeat proportionem, quam semidiametros sphæræ unà cum altitudine reliquæ portionis habet, ad eandem reliquæ portionis altitudinem.

Esto sphæra, & maximus in ea circulus, cuius diametros a c, & secet sphæra à plano secundum b f, ad angulos rectos super ipsam a c, & sit centrum h, & fiat sicut utraq; simul h a, a e ad a e, sic d e ad c e. Item fiat sicut utraq; simul h c, c e ad c e, sic k e ad ad e a. Et erigantur coni utrinque à circulo circa b f diametrum constituto, uertices habentes puncta k d. Dico itaq;, quod b d f conus, æquatur ei quæ est secundũ c portioni sphæræ. conus autem b k f portioni, quæ est secũdum a punctum. Iun-

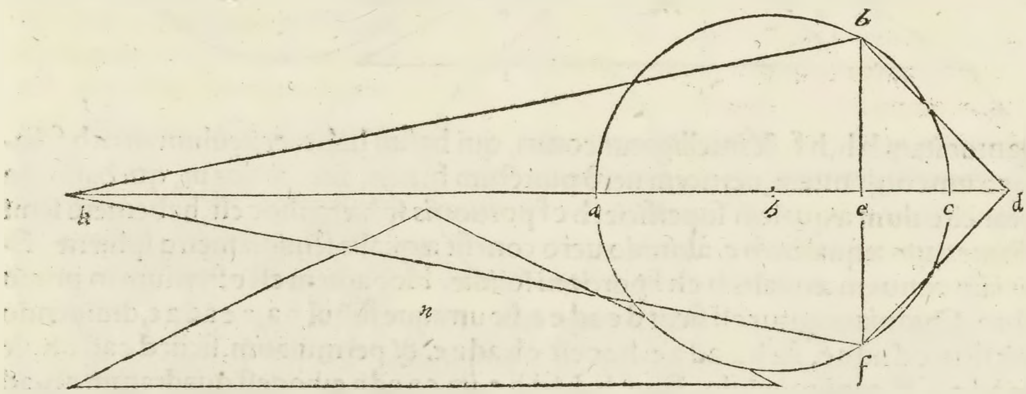


gantur itaq; b h, h f: & intelligatur conus, qui basim habeat circulum circa b f diametrum constantem, uerticem uerò punctum h. item alter conus m, qui basim habeat circulum æqualem superficiei b c f portionis sphæræ: hoc est, habentem semidiametrum æqualem b c. altitudo uero coni sit æqualis semidiametro sphæræ. Erit iam conus m æqualis b c h f portioni solidæ. Hoc autem est ostensum in primo libro. Quoniam igitur est sicut d e ad e c, sic utraque simul h a, a e ad a e, diuidendo erit sicut c d ad c e, ita h a ad a e: hoc est c h ad a e. & permutatim, sicut d c ad c h, sic c e ad e a. & coniungendo, sicut h d ad h c, ita c a ad a e: hoc est quadratum c b, ad quadratum b e. Sicut ergo d h ad c h, ita quadratum c b ad quadratum b e. Est autem c b æqualis semidiametro circuli m. At uero b e est semidiametros circuli circa b f diametrum constituti. Erit igitur, ut d h ad h c, sic m circulus ad circulum circa diametrum b f constitutum, & h c est æqualis axi coni m. ergo sicut d h ad axem coni m, sic circulus m ad circulum circa b f diametrum constitutum. Conus igitur qui habet basem circulum m, & altitudinem sphæræ semidiametrum, æqualis est b d f h solido rhombo. nam hoc in his quæ in primo libro sumpta sunt, demõstratum fuit. Vel hoc modo cõcludemus: Quoniam est sicut d h ad altitudinem m coni, ita m circulus ad circulum circa b f diametrum constitutum. quare conus m æquabitur cono, cuius basis sit circulus circa b f diametrum constitutus, altitudo autem d h. nam istorum bases altitudinibus sunt mutuæ in proportione. sed conus qui basem habet circulum circa b f diametrum constitutum, altitudinem autẽ d h, æqualis est b d f h solido rhombo: conus uero m æquatur b c f h, solidæ portioni: & b c f h solida portio æqualis erit b d f h solido rhombo. Communi itaq; sublato cono uidelicet cuius basis est circulus circa b f diametrum conuolutus, altitudo autem e h: residuum scilicet b d f conus, æqualis erit b f c portioni sphæræ. Similiter autem ostendetur, b k f conum portioni sphæræ b a f esse æqualem. Nam quoniã sicut utraq; simul h c, c e se habet ad c e: sic k e ad e a, diuidendo erit sicut k a ad a e, ita h c ad c e. æqualis est aũt h c ipsi h a. quare & permutatim, sicut k a ad a h, ita a e, ad e c. unde cõponendo, sicut k h ad h a, sic a c ad e c: hoc est, quadratũ b a ad quadratum b e. Ponatur itaq; rursus circulus n, semidiametrum habens æqualem lineæ ductæ à uertice portionis b a f, ad circumferentiam basis portionis, & intelligatur conus n, qui altitudinem habeat æqualem semidiametro sphæræ: æqualis ergo hic erit b h f a solidæ portioni. nam hoc in primo fuit ostensum. Et quoniam demonstratum est, sicut k h ad h a, ita esse quadrati a b ad quadratum b e, hoc est quadrati semidiametri n circuli, ad quadratum semidiametri circuli circa b f diame-

 trum

trum conuoluti: hoc eſt n circuli ad circulum circa b f diametrum conſtitutum. at uero a h æquatur altitudini n coni. quare ſicut k h ad altitudinem coni n, ſic circulus n ad circulum circa b f diametrum cõſtitutum, altitudinem uero k h. Tota igit a b f portio ſphæræ æquatur cono b k f, qui baſem habeat eãdem cum portione, & altitudinem æqualem ei, quæ eandem habeat proportionẽ ad altitudinem portionis ſphæræ, quam proportionem habet utraq; ſimul & ſemidiametrus ſphæræ, & perpendicularis reliquæ ſectionis ad perpendicularẽ reliquæ ſectionis. ſicut enim d e ad e c: ſic d f b conus, hoc eſt b c f portio ad b c f conum.

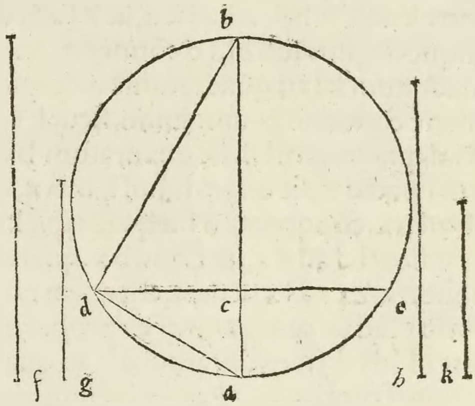
Eadem deſcriptione retenta, & eiſdem ſubiectis oſtendemus, quod k b f conus æqualis eſt a b f portioni ſphæræ. Eſto itaq; n conus, baſem habẽs ſuperficiei ſphæræ æqualem, altitudinem uero ſemidiametrũ ſphæræ. Conus igitur iſte eſt æqualis ſphæræ. nam ſphæra oſtenſa eſt quadrupla eſſe coni baſem habentis maximũ in ſphæra circulum, altitudinem autem ſemidiametrum ſphæræ. Sed & conus n



eſt quadruplus eiuſdem coni, cum baſis ſit quadrupla baſis. Nam ſuperficies ſphæræ quadrupla eſt maximi in ea circuli, & altitudo altitudini æqualis. & quoniam ſicut utrũq; ſimul h a, a e ad a e, ſic d e ad e c, diſiũgendo & permutatim argumentabimur, ſicut h c ad c d, ita a e ad e c. Rurſus quoniã ſicut k e ad e a, ſic utraque ſimul h c, c e ad c e diſiungendo, & permutatim ſicut k a ad c h, hoc eſt ad h a, ſic a e ad e c: hoc eſt h c ad c d. & coniungendo. æqualis eſt autem a h, h c. Sicut ergo k h ad h c, ſit h d ad d c. & ſic tota k d ad d h, ut d h ad d c, hoc eſt k h ad h a. quod continetur igitur ſub d k, h a, æquatur ei quod ſub d h k cõtinetur. rurſus quoniã eſt ſicut k h ad h c, ſic h d ad c d, & permutatim. at uero ſicut h c ad c d oſtẽſum eſt, ſic eſſe a e ad e c. ſicut igitur k h ad a h, ſic a e ad e c. quare & ſicut quadratum k d, ad id quod continetur ſub k h, h d: ſic quadratum a c ad id quod continetur ſub a e, e c. quod continetur uero ſub k h, h d, oſtenſum eſt æquale eſſe ei quod ſub k d a h continetur. Sicut igitur quadratum k d ad id quod continetur ſub k d a h, hoc eſt k d ad a h: ſic quadratum a c, ad id quod ſub a e, e c continetur, hoc eſt ad quadratum e b. & a c, æqualis eſt ſemidiametro circuli n. ſicut ergo quadratum ſemidiametri n circuli ad quadratum b e, hoc eſt n circulus ad circulum circa b f diametrum conuolutum: ſic k d ad a h: hoc eſt k d ad altitudinem coni n. Conus igitur n, hoc eſt ſphæra, æqualis eſt b d f k ſolido rhombo. Vel ſic. eſt igitur ſicut circulus n ad circulum circa b f diametrum conſtitutum, ſic d k ad altitudinem coni n. Conus igitur n æqualis eſt cono, cuius baſis ſit circulus circa b f diametrum conſtans, altitudo d k. eorũ enim baſes ſuis altitudinibus ſunt in proportione mutuæ. ſed talis conus æqualis eſt b k f d ſolido rhombo. quare conus quoq; n, hoc eſt ſphæra, æquatur b f k d ſolido rhombo, ex conis b d f & b k f compoſito. quorum b d f conus oſtenſus eſt eſſe æqualis b c f portioni ſphæræ: reliquus igitur b k f conus erit neceſſariò æqualis b a f reliquæ portioni ſphæræ.

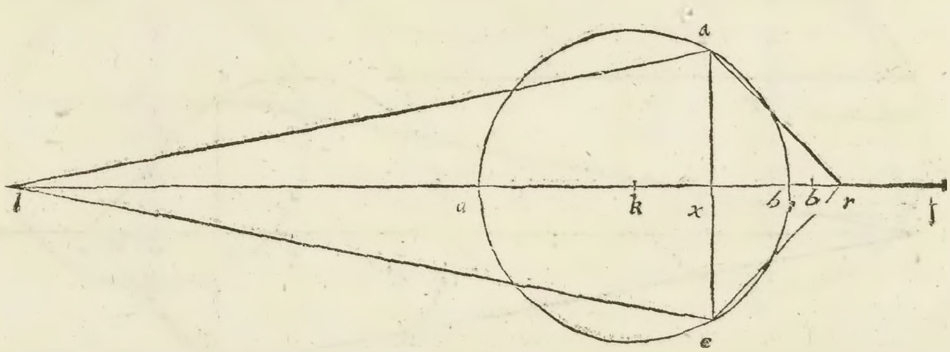
Datam

DAtam sphæram sic secare plana superficie, ut portionũ superficies inter se si milẽ cuicũq; proportioni datæ retineant proportionẽ. Vt hoc exequamur, esto hoc factũ esse. & sit maximus in sphera circulus a d b e, diametros eius a b, & emittatur plana superficies ad a b secũdum angulos rectos, & fiat à plana superfi cie in a d b e circulo sectio d e, & iungantur lineæ a d, b d. Quoniã itaq; proportio 3



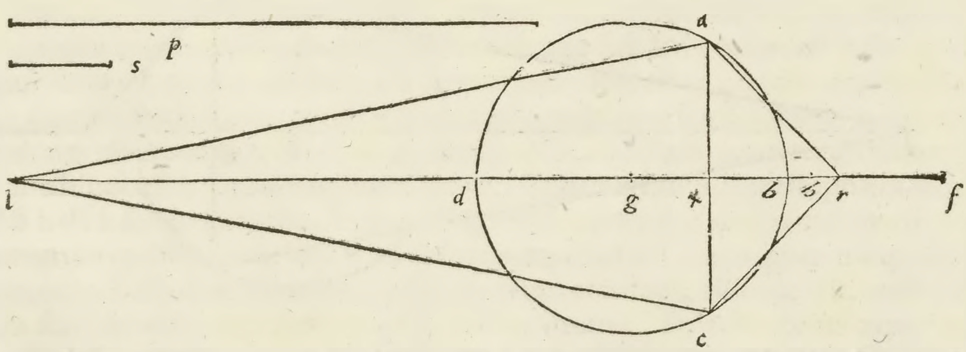
data est superficiei d a e portionis, ad superficiem d b e portionis: & superficiei portionis d a e æqualis est circulus, cuius semidiametros æqualis est ipsi a d: superficiei autem portionis d b e, æqualis est circulus, cuius semidiametrus est æqualis ipsi b d. Sicut autem dicti circuli inter se, sic quadratum a d ad quadratum d b: hoc est, a c ad c b. Proportio igitur quæ est a c ad c b, erit data proportio. quare c punctum datum erit, & super a b ad angulos rectos erecta est linea d e. ergo & plana superficies, quæ est secundũ d e, erecta stabit similiter. Cõficietur autem sic. Esto sphæra, & maximus in ea circulus a b d e, cuius diametros a b. proportio autem data sit f ad g, & diuidatur a b ad punctum c. diuidatur sphæra à plano ad angulos rectos super a b linea recta constituto, & sit communis sectio d e, & iungantur a d, d b. & exponantur duo circuli h k: circulus h æqualem habens semidiametrum ipsi a d, circulus uero k æqualem semidiametrum ipsi d b habens. Est igitur h circulus æqualis superficiei d a e portionis, k uero æqualis superficiei d b e portionis. Hoc enim ante demonstratũ est in primo libro. & quoniam data est superficies quæ sub a b d conti netur, & c d perpẽdicularis existit, erit ut a c ad c b, hoc est f ad g, sic quadratum a d ad quadratum d b: hoc est quadratum semidiametri h circuli, ad quadratum semi diametri k circuli: hoc est h circulus ad k circulũ. hoc item est superficies d a e portionis, ad superficiem d b e portionis sphæræ.

DAtam sphæram sic secare, ut portiones sphæræ inter se eandem habeant proportionem ei, quęcunq; data sit proportioni. Esto data sphæra a b c d, oportet eam plano secare, sic ut ipsæ sphæræ portiones inter se habeant propor- 4



tionem datam. Diuidatur itaq; secundũ a c à plano. proportio igitur a d c portionis, ad a b c portionem sphæræ est data. diuidatur autem sphæra per centrum, & sit sectio maximus circulus a b c d, centrum autem k, & diametros d b. & fiat, ut sicut utraq; simul k d, d x ad d x, sic r x ad x b. Sicut autem utraq; simul k b, b x ad b x, sic l x ad x d: & iungantur a l, l c, a r, r c. conus igitur a l c, est æqualis a d c portioni sphæræ, a r c uero ipsi a b c. Proportio igitur a l c coni ad a r c conum est data. Sicut autem conus ad conum, sic l x ad x r, cum eandem basem habeant, circulum qui est circa a c diametrum conuolutus. Proportio igitur etiam l x ad x r est data, & iam eadem sequuntur, quæ prius propter apparatum sicut l d ad k d, sic k b ad b r, & d x ad x b. & quoniam est sicut r b ad b k, ita k d ad l d coniungendo sicut r k ad k b, hoc est ad k d, sic k l ad l d. Tota igitur r l ad totam k l est, sicut k l ad l d. quod igitur sub r l, l d cõtinetur, æquatur quadrato l k. Sicut igitur r l ad l d, sic quadratum k l ad quadratum l d. & quoniam est sicut l d ad d k, sic d x ad x b: erit etiam è conuerso & iungendo, sicut k l ad l d, sic b d ad d x. sicut igitur quadratum k l ad quadratum l d, sic quadratum b d ad quadratum d x. Rursus quoniam est sicut l x ad d x, sic utraque simul k b, b x, ad b x. disiungendo erit sicut l d ad d x, ita k b ad b x. & ponatur b f æqualis ipsi k b. quod autẽ f extra r cadet, manifestũ est. & est sicut l d ad d x, ita f b ad b x. quare & sicut d l ad l x, sic b f ad f x. Cum autem proportio r x ad l x sit data, erit etiam r l ad l x proportio data. Quoniam igitur proportio r l ad l x componitur ex proportione quam r l habet ad l d, & d l ad l x. uerũ sicut r l ad l d, sic quadratum d b ad quadratum d x. sicut autem d l ad l x, sic b f ad f x. igitur proportio r l ad l x coniungitur ex proportione, quam habet quadratũ b d ad quadratũ d x, & ex b f ad f x. Fiat autem sicut r l ad l x, sic b f ad f h. Proportio autẽ r l ad l x erat data: quare & proportio b f ad f h erit data. Linea uero b f est data, nam est æqualis semidiametro: igitur & f h linea data erit, & proportio b f ad f h componitur ex proportione quadrati b d ad quadratum d x, & ex b f ad f x. sed b f ad f h proportio componitur ex proportione b f ad f x, & ex f x ad f h. sublata cõmuni, quę est b f ad f x: reliquum erit igitur, sicut quadratum b d quod est datum ad quadratum d x, sic x f ad f h quod est datum. & est f d linea data iuxta datã d b, quam diuidere oportet secundum x, & facere ut x f ad f h datam sit sicut quadratum b d datum ad quadratum d x. Hoc autem non habet determinationem simpliciter dictam, sed ijs quæ istic requiruntur positis: hoc est posito hoc, duplam esse d b ipsius b f, & hoc, maiorem esse f h quàm h b, tanquam per resolutionem, nõ habet determinationem. Problema uero tale est. Datis duabus lineis rectis d b, b f, quarũ d b sit dupla ipsius b f, & signo h in b f posito, diuidere ipsam d b in puncto x, & facere quod sicut quadratum b d ad quadratum d x, sic f x ad f h. Vtraque uero hæc in fine resoluentur & componentur.

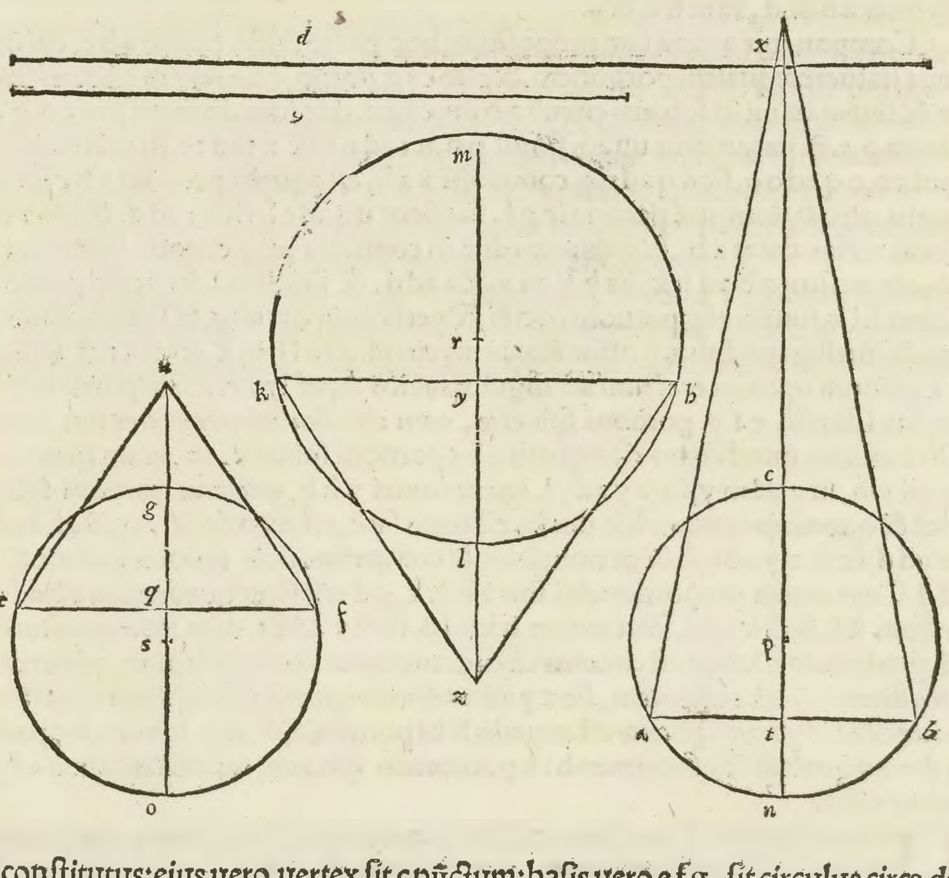
Componitur autem problema hoc modo. Esto data proportio, quam p maior habeat ad s minorem, & detur quædam sphæra, & diuidatur plano per cen-



trum ducto, & sit sectio a b c d circulus, cuius diametros sit b d, centrum k, & ipsi k b ponatur æqualis b f, & diuidatur b f in puncto h, ita ut sit h f ad h b, sicut p ad s. &

s. & etiam diuidatur b d in puncto x, ita ut sit x f ad h f, sicut quadratũ b d ad quadratũ d x. Et per punctum x educatur planum, erectũ super b d secundũ angulos rectos. Dico itaq;, quod planũ illud diuidit sphęram, ita ut maior portio ad minorem sic se habeat, uti p ad s. Factũ sit enim, ut sicut utraq; simul k b, b x ad b x, sic l x ad d x. Sicut aũt utraq; simul k d, d x ad x d, ita r x ad x b. Et iungantur a l, l c, a r, r c. est igitur secundũ apparatum ita, sicut in resolutione ostendimus, id quod sub r l, l d continetur, æquale quadrato l k: & sicut k l ad l d, ita b d ad d x. Quare sicut quadratum k l ad quadratum l d, sic quadratum b d ad quadratum d x. & quia id quod sub r l, l d continetur, est æquale quadrato l k, erit sicut r l ad l d, ita quadratum l k ad quadratum l d. erit igitur, & sicut r l ad l d, sic quadratum b d ad quadratum d x: hoc est, x f ad f h. & quoniam sicut utraq; simul k b, b x ad b x, sic l x ad x d. æqualis est autẽ k b ipsi b f, erit igitur & sic f x ad x b, sicut l x ad x d. & euertẽdo, sicut x f ad f b, ita x l ad l d. quare & sicut l d ad l x, sic b f ad f x. & quoniam est sicut r l ad l d, sic f x ad f h. sicut autem d l ad l x, sic b f ad f x. & per æquale in proportionalitate indirecta, sicut r l ad l x, ita b f ad f h. sicut ergo l x ad x r, sic f h ad h b. sicut autem f h ad h b, sic p ad s. quare sicut l x ad x r: hoc est, a l c conus ad a r c conum: hoc est a d c portio sphęræ, ad a b c portionem sphæræ, sic p ad s.

DAtis duabus sphæræ portionibus, tertiam constituere portionem, quæ alteri earum quæ datæ sunt similis sit, alteri uero æqualis. Esto duæ portiones sphæræ datæ a b c, e f g: & sit basis ipsius portionis a b c, circulus circa diametrum 5



a b constitutus: eius uero uertex sit c pũctum: basis uero e f g, sit circulus circa diametrum e f constans: uertex g punctũ. Oportet itaq; portionem sphæræ inuenire, quæ sit æqualis ipsi a b c portioni, & ipsi e f g similis. Esto inuenta sit, & ponatur esse h k, & sit eius basis circulus circa h k diametrum conuolutus, uertex uero l punctum. Sint etiam circuli in sphæris a n b c, h m k l, e o f g: diametri uero eorũ

ad

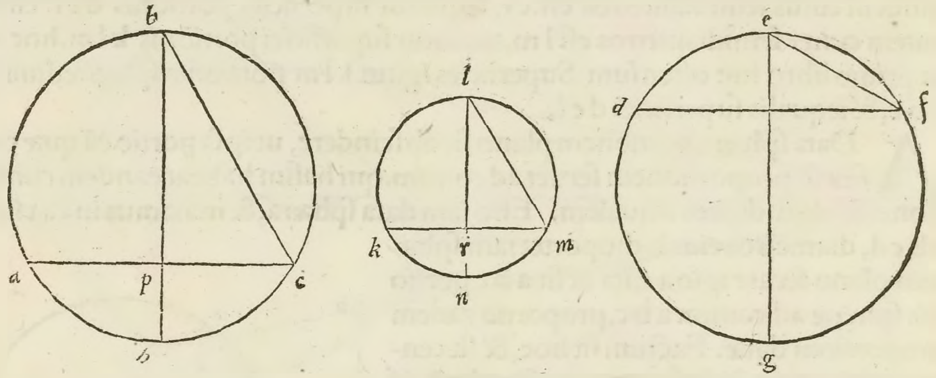
ad angulos rectos basibus portionum instituti sint c n, l m, g o. & sint centra p, r, s. & factum sit sic, ut utraque simul p n, n t ad n t, ita x t ad t c. sicut autẽ utraque simul r m, m y ad m y, sic z y ad y l. & sicut utraque simul s o, o q ad o q, sic u q ad q g. et intelligantur coni, quorum bases sint circuli circa diametros a b, h k, e f constituti, uertices uero x z u puncta. conus itaque a b x, æquatur portioni a b c sphæræ. conus uero h z k, æquatur ipsi h k l. conus demum e u f, æquatur ipsi e g f. hoc enim demonstratum est antea. Et quoniam sphæræ portio a c b ęquatur h l k portioni, conus a x b erit æqualis h z k cono. æqualiũ autem conorum bases sunt altitudinibus mutuæ. Circulus igitur circa diametrum a b, ad circulum circa diametrum h k, est sicut z y ad x t. sicut autem circulus ad circulum, sic quadratum a b ad quadratum h k. Sicut ergo quadratum a b ad quadratum h k, sic z y ad x t. Et quoniã similis est e f g portio portioni h l k, conus igitur e u f similis est cono z h k. Hoc autem ostendetur. Est igitur sicut u q ad e f, sic z y ad h k. proportio autem ipsius u q ad e f data est: igitur proportio z y ad h k erit data. Esto eadem x t ad d, & x t data est, erit & d data. & quoniam est sicut z y ad x t, hoc est quadratũ a b ad quadratũ h k, sic h k ad d. Ponatur id quod sub a b & 9 continetur, æquale esse quadrato h k, erit igitur quadratum a b ad quadratum h k, sicut a b ad 9. Ostensum est aũt, quod sicut quadratum a b ad quadratũ h k, sic h k ad ipsam d: & permutatim, sicut a b ad h k, sic 9 ad d. Sicut aũt a b ad h k, sic k h ad 9. propterea quod quadratum h k æquatur ei quod fit ex a b in 9. sicut ergo a b ad h k, ita h k ad 9, & 9 ad d. Inter duas igitur datas duæ mediæ in proportione continua sunt positæ: hoc est inter a b & d, sunt h k, & 9.

Componetur autem iam propositum hoc pacto. Esto portio a b c, cui uolumus statuere æqualem portionem. & esto e f g portio, cui similem oportet statuere. & sint maximi in sphæris circuli a b c n, e f g o: quorum diametri sint c n, g o: & centra p, s. & fiat, ut sicut utraque simul p n, n t ad n t, sic x t ad t c. sicut aũt utraque simul s o, o q ad o q, sic u q ad q g. conus igit͂ x a b, est ęqualis portioni a b c sphęræ. conus uero f u e, æquat͂ portioni e g f. fiat sicut u q ad e f, sic x t ad d. & inter duas lineas rectas datas a b, & d duæ mediæ in continua proportione sumantur h k & 9: ita ut sicut a b ad h k, ita h k ad 9, & 9 ad d. & similiter h k circulo portio statuatur h l k, similis e f g portioni circuli, & perficiatur circulus, & sit eius diametros l m, & intelligatur sphæra cuius maximus circulus sit l h m k, centrũ r. & secũdum h k planum transeat erectum ad angulos rectos super l m, erit iam portio sphæræ uersus l similis e f g portioni sphæræ, cum circulorum portiones sint similes. Dico autem, quod etiam est æqualis a b c portioni sphæræ. fiat enim sicut utraque simul r m, m y ad m y, sic z y ad y l. igitur conus z h k, æquatur portioni sphæræ h k l. & quoniam conus z h k similis est cono f u e, est ergo sicut u q ad e f, hoc est x t ad d, sicut z y ad h k: & permutatim, & conuersim. sicut igitur z y ad x t, sic h k ad d. Cum autem proportionales sint a b, h k, 9, d erit sicut quadratum a b ad quadratum h k, sic h k ad d. sicut autem h k ad d, sic z y ad x t. ergo sicut quadratũ a b ad quadratum h k, hoc est circulus circa diametrum a b constitutum, ad circulum circa diametrũ h k cõstantem, sic z y ad x t. conus igitur a x b æquatur cono h z k. quare & a b c portio sphæræ est æqualis h k l portioni sphæræ. Igitur a b c portioni datæ æqualem constituimus h l k portionem sphæræ, quæ etiam alteri e f g similis existit.

6 DVabus portionibus, siue eiusdem siue non eiusdem sphæræ datis, tertiam inuenire sphæræ portionem, quæ quidem alteri datarum portionum sit similis, superficiem uero habeat alterius portionis superficiei æqualem. Sint sphæricæ portiones secundum a b c, d e f circumferentias sumptæ. & esto portio, cui similem inuenire oporteat secundum a b c circumferẽtiam sumpta. ea uero cuius superficies æqualis esse debeat superficiei portionis inueniendæ, sit secundum

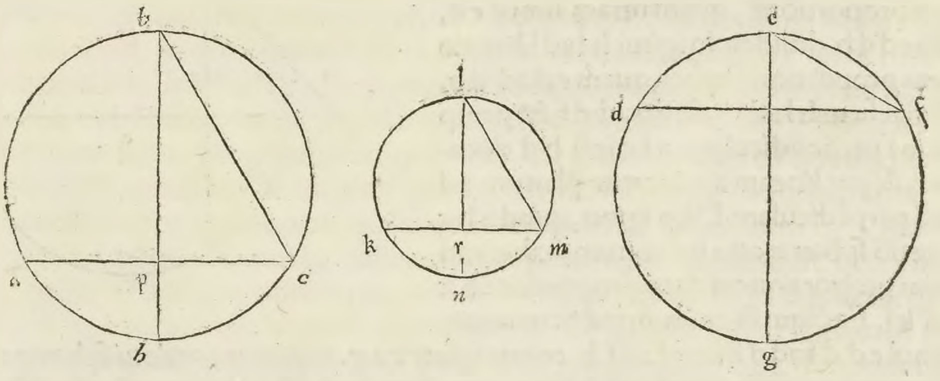
d e f

d e f circumferentiam. & ponatur factũ quod quæritur, & esto k l m portio sphæræ ipsi a b c portioni similis. superficiem quoque habeat superficiei d e f portionis æqualem: & intelligantur centra sphærarum, & per ea transeat plana erecta per-



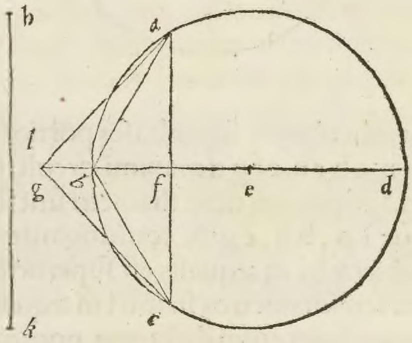
pendiculariter super bases portionum. & in sphæris quidem sint sectiones hæ k l m n, a b c h, e f g d maximi circuli, & in basibus portionum sint k m, a c, d f diametri. sphærarum uero diametri sint super k m, a c, d f perpendiculariter erectæ. sintque l n, b h, e g: & coniungantur l m, b c, e f. & quoniam superficies portionis sphæræ k l m æqualis est superficiei d e f portionis, æqualis erit ergo circulus cuius semidiametros sit ipsi l m æqualis, circulo cuius semidiametros sit æqualis e f. Superficies enim dictarum portionũ ostensæ sunt esse æquales circulis, quorum semidiametri sint æquales lineis, quæ à uerticibus portionum ad bases earum deducantur. Quapropter l m erit æqualis e f. Cum autem k l m sit similis portioni a b c, erit sicut l r ad r n, sic b p ad p h. & cõuersim, & coniungendo, sicut n l ad l r, sic h b ad b p. uerum & sicut r l ad l m, sic b p ad b c. nam trianguli similes existũt. Sicut ergo n l ad l m, hoc est ad e f, sic h b ad b c: & permutatim. proportio uero e f ad b c est data. nam utraque earum est data. igitur proportio l n ad b h data erit. sed b h est data: quare & l n, & sphæram quoque datam esse necesse est.

Componetur autem propositum hoc modo. Sunto duæ portiones sphæræ datæ a b c, d e f. & sit a b c, cui similem d e f, cuius superficiei æqualem oporteat constituere superficiem, & eadem parentur omnia, quæ in resolutione parata fuerunt.

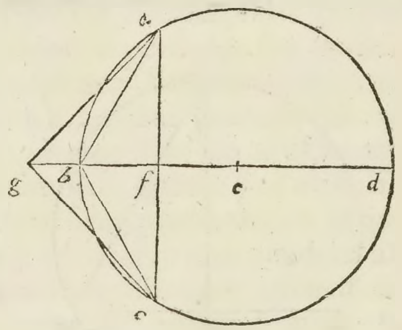


runt. & fiat, sicut b c ad e f, sic b h ad l n. & circa diametrum l n describatur circulus, & intelligatur sphæra cuius sit maximus circulus l k n m. & diuidatur n l in puncto r, ita ut sit sicut h b ad b p, sic n l ad l r. & secundum r diuidatur superficies plano super l n perpẽdiculariter erecto, & ducatur linea l m. portiones igitur circulorum, quæ sunt super k m, a c lineas rectas, sunt inter se similes: quare & sua rum ſphærarum portiones ſimiles erunt. & quoniam eſt ſicut h b ad b p, ſic n l ad l r. etenim ſunt ſecundum diuiſionem. Sed & ſicut b p ad b c, ſic r l ad l m. ergo & ſicut h b ad n l, ſic b c ad e f. erit igitur e f ipſi l m æqualis. quare & circulus cuius ſemidiametros eſt e f, æquabitur circulo cuius ſemidiametros eſt l m. & circulus quidem cuius ſemidiametros eſt e f, æquatur ſuperficiei portionis d e f. circulus autem cuius ſemidiametros eſt l m, æquatur ſuperficiei portionis k l m. hoc enim in primo libro fuit oſtenſum. Superficies igitur k l m portionis ſphæræ, ſimilis eſt a b c, & æqualis ſuperficiei d e f.

7 A Data ſphæra portionem plano ſic abſcindere, ut ipſa portio eã quæ propoſita ſit proportionem ſeruet ad conum, qui baſim habeat eandem cum portione, & altitudinem æqualem. Eſto iam data ſphæra, & maximus in ea circulus a b c d, diametros eius b d: oportet iam ſphæram plano ſecare ipſo a c, ita ut ſit a b c portionis ſphęræ ad conum a b c, proportio eadem proportioni datæ. Factum ſit hoc, & ſit centrum ſphæræ e, & ſit ſicut utraq; ſimul e d, d f ad d f, ſic g f ad f b. conus igitur a c g eſt æqualis portioni a b c. Proportio igitur coni a g c, ad conum a b c eſt data. quare & proportio g f ad f b data erit. Sicut autem f g ad f b, ſic utraq; ſimul e d, d f ad d f. igitur proportio utriuſque ſimul e d, d f ad d f eſt data: quare et e d ad d f data, quare & d f data erit. ſimiliter a c data. & quoniam utraq; ſimul e d, d f ad d f maiorem habet proportionẽ quàm utraq; ſimul e d, d b ad d b, & eſt utraq; ſimul e d, d b ter ipſa e d. ipſa uero b d, bis e d: habebit utraque ſimul e d, d f ad d f maiorem proportionẽ, quàm ſicut tria ad duo. proportio uero utriuſq; ſimul e d, d f ad d f, eſt eadem proportioni datæ. Oportet igitur proportionem datam in compoſitione maiorem eſſe quàm tria ad duo.

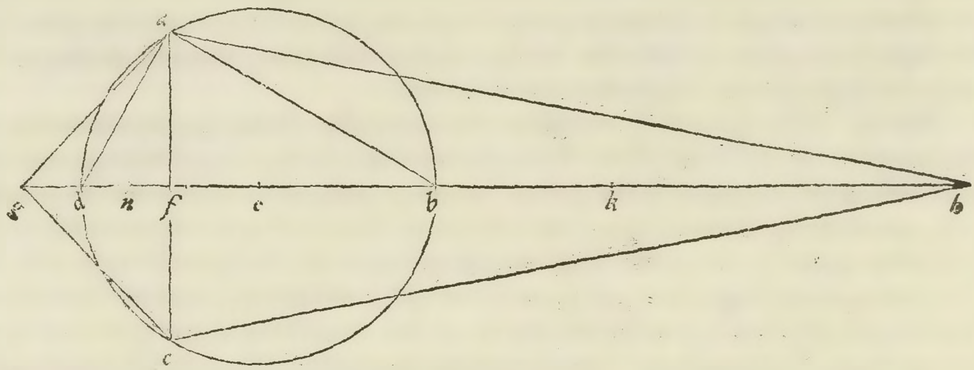


Componetur autem propoſitum hoc pacto. Eſto data ſphæra, & maximus in ea circulus a b c d, diametros uero b d, centrum e. proportio autem data ſit h k ad k l, maior ſcilicet quàm tria ad duo. ſicut autem tria ad duo, ſic utraq; ſimul e d, d b, ad d b. & ideo h k ad k l maiorem habet proportionẽ, quàm utraq; ſimul e d, d b ad d b. diuidendo igitur h l ad l k maiorem proportionẽ habet, quàm e d ad d b. & fiat ſicut h l ad l k, ſic e d ad d f, & per ipſum f perpendicularis a f c ipſi b d ducatur, & per lineam a c ducatur planum ad b d perpẽdiculare. Dico igitur, quod a b c portio ſphæræ ad a b c conum, habet eandem proportionem datæ proportioni h k ad k l. Factum ſit enim, quod ſicut utraq; ſimul e d, d f ad d f, ſic g f ad f b. conus igitur c a g, æquatur portioni ſphæræ a b c. & quoniam eſt ſicut h k ad k l, ſic utraque ſimul e d, d f ad d f: hoc eſt g f ad f b, hoc eſt a g c conus ad a b c conum. conus uero a g c æquatur portioni ſphæræ. Sicut igitur a b c portio ad a b c conum, ſic h k ad k l.



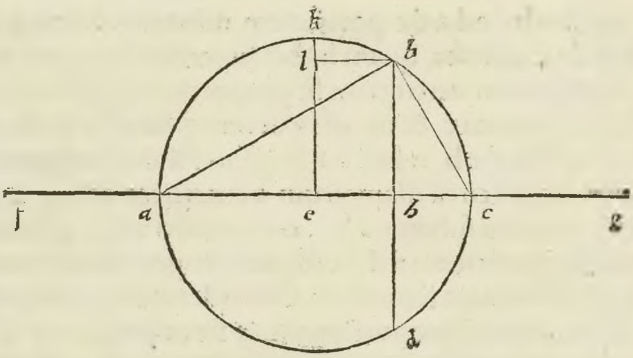
8 S I ſphæra quæuis à plano non per centrum ducto ſecetur, maior portio ad minorem habere probatur proportionem minorem, quàm ſit ea proportio duplicata, quam habet ſuperficies maioris ad ſuperficiem minoris portionis, maiorẽ uero

uero quàm sit proportio, quæ sit sesquialtera ad dictam proportionem. Esto sphæra, & maximus in ea circulus a b c, & diametros b d. & secet plano per a c ducto, & erecto super a b c d circulo, & sit maior sphæræ portio a b c. Dico itaq;, quod



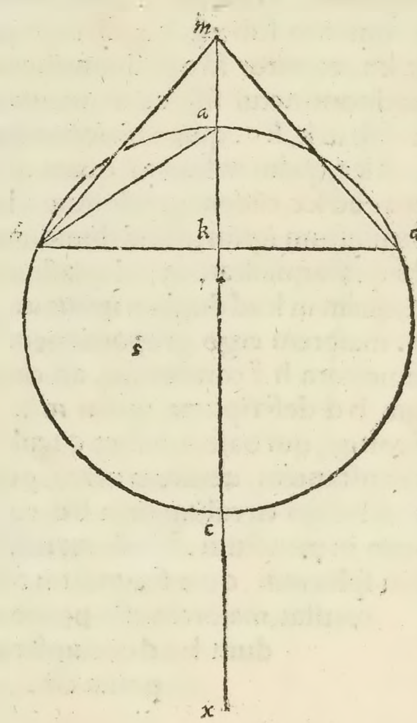
portio a b c ad a d e portionem, minorem habet proportionem, quàm sit ea proportio duplicata, quam habet superficies maioris portionis ad superficiem minoris. maiorem uero quàm sit proportio sesquialtera ad eandem. Iungantur b a, a d: & sit centrum e, & fiat ut sicut utraq; simul e d, d f ad d f, ita h f ad f b. sicut autem utraq; simul e b, b f ad b f, sic g f ad f d. & intelligantur coni basem habentes circulum, qui est circa diametrum a c: uertices uero puncta h, g. & conus a h c, æqualis erit portioni sphæræ a b c. conus uero a c g, ipsi a d c æqualis. & est sicut quadrati b a ad quadratum a d, sic superficies portionis a b c ad superficiem a d c portionis. hoc enim antea scriptũ est. Ostendendum, quòd maior portio sphæræ ad minorẽ habet minorẽ proportionem, quã sit ea proportio duplicata, quam superficies maioris portionis habet ad superficiẽ minoris portionis. Dico quòd a h c conus, ad a g c conũ, hoc est f h ad f g, habet minorem proportionẽ, quàm est illa duplicata, quam habet quadratum b a ad quadratum a d, hoc est b f ad f d. Et quoniam est sicut utraq; simul e d, d f ad d f, sic h f ad f b. sicut autem utraq; simul e b, b f ad b f, sic f g ad f d: erit & sicut b f ad f d, ita h b ad b e. nam b e est æqualis ipsi d e. hoc enim in superioribus simul ostensum fuit. Rursus quoniam sicut utraque simul e b, b f ad b f, sic g f ad f d. Esto ipsi b e æqualis b k. manifestum nãq; est, quòd h b est maior b e: quoniam & b f maior est f d. & erit sicut k f ad f b, sic g f ad f d. sicut autem f b ad f d, ita ostensum est esse h b ad b e. æquatur autem b e ipsi k b. sicut ergo h b ad b k, sic k f ad f g. Et quoniã h f ad f k minorem proportionem habet, quàm h b ad b k: sicut autem h b ad b k, ostensum est ita esse k f ad f g. igitur h f ad f k minorem habet proportionem, quàm k f ad f g. minus ergo est quod continetur sub h f, f g, quadrato f k. Id igitur quod cõtinetur sub h f, f g, ad quadratum f g minorem habet proportionem, quàm quadratum k f ad quadratum f g. Quadratum uero k f ad quadratum f g, habet eam proportionem duplicatam, quæ est k f ad f g. igitur h f ad f g minorem proportionem habet, quàm est ea duplicata quæ est k f ad f g. Hoc autem est quod quærebamus. Et quoniam b e est æqualis ipsi d e, minus est igitur id quod sub b f, f d cõtinetur, eo quod sub b e, e d continetur. ergo f b ad b e minorem habet proportionem, quàm e d, ad d f, hoc est h b ad b f. quadratum igitur f b, minus est eo quod fit ex h b in b e. Sit itaq; quadratum b n æquale ei quod sub h b, b e. est igitur sicut h b ad b k, sic quadratum h n ad quadratum n k. quadratum autem h f ad quadratum f k maiorem habet proportionem, quàm quadratum h n ad quadratum n k. quadratum ergo h f, ad quadratũ f k maiorem proportionẽ habet, quàm h b ad b k. hoc est, quàm h b ad b e. Hoc idem est, quàm k f ad f g. ergo h f ad f g maiorem habet proportionem, quàm sit sesquialtera ad proportionem k f ad f g. hoc enim perficit quod intendimus. et est sicut h f ad f g, sic a h c conus ad a g c conum: hoc est portio a b c ad portionē a d c. sicut autem k f ad f g, sic b f ad f d: hoc est quadratum b a ad quadratum a d: hoc idem est sicut superficies portionis a b c a d superficiē a d portionis. sed maior portio ad minorem habet minorem proportionem, quàm sit ea duplicata, quam habet superficies maioris portionis ad superficiem minoris portionis, maiorem uero quàm sit proportio sesquialtera ad eandem.

Aliter. Esto sphæra, & maximus in ea circulus a b c d, diametros autem a c, centrum uero e. & secetur plano secundum b d erecto super a c. Dico quod maior portio d a b, ad minorem b c d, habet minorem proportionem quàm sit ea duplicata, quam habet superficies a d b portionis ad superficiem b c d portionis: maiorem uero quàm sit proportio sesquialtera ad eandem. Jungantur enim a b, b c. Proportio autem superficiei ad superficiem est, sicut circuli, cuius est semidiametros a b, ad circulum cuius semidiameter est b c. hoc est h a ad a c. ponatur autem utraque a f, c g esse æqualis ipsi semidiametro. proportio autem b a d, portionis ad b c d, componitur ex proportione b a d portionis ad conum, cuius basis sit circulus circa b d diametrū descriptus, uertex uero a punctum: & ea quam habet idem conus ad conum habentem eandē basem, uerticem uero c punctū: & ex ea quam habet dictus conus ad b c d portionem. sed proportio b a d, portionis ad b a d conū est, sicut g h ad h c. coni uero ad conum est sicut

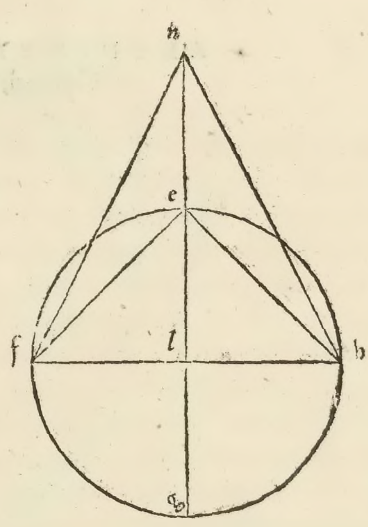


a h ad h c. coni autem b c d ad portionem b c d, est sicut a h ad h f. At uero proportio cōposita ex proportione g h ad h c, & ex a h ad h c, est sicut eius quod fit ex g h in a h, ad quadratum h c. eius autem quod fit ex g h in a h ad quadratum h c, cum ea quæ est a h ad h f, est sicut ea quæ est eius quod fit ex g h, in quadratum h a, ad quadratū h c in h f. proportio aūt eius quod fit ex g h in quadratū h a, ad id quod fit ex quadrato h c in g h, est sicut quadratum h a ad quadratum h c. quod igitur fit ex quadrato h a in h g, ad id quod fit ex quadrato c h in h f, minorem proportionē habet, quàm proportio quadrati a h ad quadratum h c. Quoniam enim est maius quadratū c h in f h, quàm quadratum c h in h g: quoniam maior est h f ipsa h g. Dico igitur, quod maior portio habet ad minorem proportionem, maiorem quàm sesquialteram proportioni superficiei ad superficiem. Portio enim ad portionem ostensa est habere eam proportionem, quam habet quadratum a h, ductum in h g, ad quadratum h c in h f. proportioni autem superficierū sesquialtera est proportio cubi a b, ad cubum b c. Dico iam, quòd quadratum a h in h g, ad quadratū c h in h f maiorem habet proportionē, quàm cubus a b ad cubum b c: hoc est cubus a h ad cubum h b, hoc est quadrati a h ad quadratum h b, et a h ad h b. proportio autem quadrati a h ad quadratum b h, assumens simul proportionem a h ad h b, est sicut quadrati a h, ad id quod fit ex c h in h b. proportio autē quadrati a h, ad id quod fit ex h b in b c, est sicut quadrati a h in h g, ad id quod fit ex h b in h c, ductum in h g. Dico iam quòd quadratū a h, in h g, ad quadratum c h in h f maiorem proportionē habet, quàm quadratum a h, ad id quod fit ex b h in h c: hoc est quadratum a h in h g, ad id quod continetur sub b h, h c, ductū in h g. Est igitur osten-

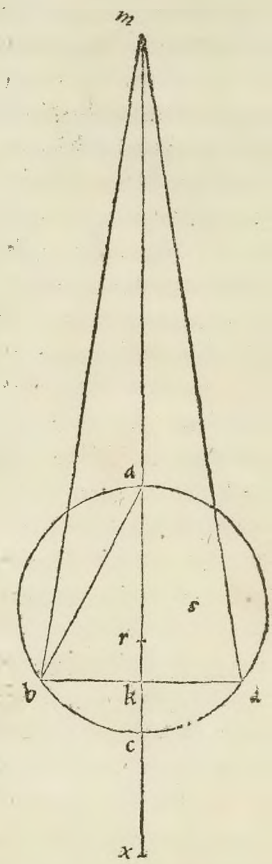
ostendēdum, quod quadratum h c in h f minus producit, quàm id quod sub b h, h c continetur, ductum in g h. quod idem est ac si demonstremus, quòd quadratū h c ad id quod sub b h, h c cōtinetur, minorem habet proportionem quàm g h ad h f. Oportet itaque ostendere, quod g h ad h f maiorem habet proportionē, quàm c h ad h b. Ducatur ab ipsō b perpendicularis super ipsam g f, quæ sit b d. oportet itaq; ostendere, quòd g h ad h f maiorem proportionem habet, quàm c h ad h b. Est autem h f æqualis utriq; simul a h, k e. quare ostēdere oportet, quòd g h ad h f, hoc est ad utrāq; simul h a, k e maiorem habet proportionē, quàm c h ad h b. sublata igit̄ c h ab ipsa g h, & ab ipsa k e sublata e l, æquali b h oportebit ostēdere, quòd reliqua c g ad reliquam utramq; simul a h, k l maiorem habet proportionē, quàm c h ad h b, hoc est h b ad h a, hoc est l e ad h a, & permutatim, quòd k e ad e l maiorem habet proportionem, quàm utraque simul k l, h a ad h a: & diuidendo k l ad l e habet maiorem proportionem, quàm k l ad h a. quare minor est l e, quàm h a.



Earum sphæræ portionum, quæ æqualibus superficiebus continentur, 9
medietas sphæræ maxima existit. Esto maximus in sphæra circulus a b c d, cuius diameter a c. Et esto alia sphæra, cuius maximus circulus e f g h: eius diameter e g. & secentur ambæ plano, altera per centrum ducto, altera non per centrum ducto. & sint plana secantia erecta super diametros a c, e g: & sectæ sint secundum lineas d b, f h. Est igitur portio sub f e h superficie cōtenta, dimidia sphęra: portionū uero quæ secundum b a d circumferentiam habentur in alia figura, ad a punctum, altera est maior dimidia sphæra, altera in alia figura minor dimidia sphęra. Esto aūt superficies maioris portiōis unius sphęræ superficiei dimidiæ sphęræ æqualis, quæ est ad circumferentiam f e h. Dico igitur, quod maior est dimidia sphæra, quæ est ad circumferentiam f e h, quàm portio quæ est secundum b a d circumferentiam. Quoniam igitur superficies dictarum portionū positæ sunt æquales, manifestū est quod b a linea recta est æqualis e f rectæ. nam ostensum est, quod cuiuscunq; portionis sphæræ superficies æqualis sit circulo, cuius semidiametros sit æqualis lineę rectæ, ductæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui est basis portionis. Et quoniam b a d circumferentia maior est dimidio circulo in altera figura, in qua est s pū ctum: manifestum igitur est, quod b a minor est quàm dupla in potētia ipsius a k, semidiametro autem maior quàm dupla in potentia. Esto etiam quòd c x sit æqualis semidiametro circuli a b d, & quā pro



portionem habet c x ad c k, hanc habeat m a ad a k. A' circulo uero circa diametrum b d descripto, erigatur conus, cuius uertex m punctum. conus igitur iste æquatur portioni sphæræ, quæ est ad circumferentiam b a d. Esto ipsi e l æqualis ipsa e n, & à circulo circa diametrum h f constituto erigatur conus, cuius uertex sit punctum n. & iste quoque æqualis est dimidiæ sphæræ, quæ est secundum h e f circumferentiam. id autem quod continetur sub a r, r c, maius est contento sub a k, k c: propterea quod habet latus minus suum minore latere alterius maius. quadrato uero a r æquatur id quod continetur sub a k, c x. nam dimidium est quadrati a b. igitur utrumque simul est maius utroque simul. Quod igitur continetur sub c a, a r, maius est contento sub x k, k a. Ei uero quod continetur sub x k, k a, æquatur id quod continetur sub m k, k c. quare quod continetur sub c a, a r, maius est eo quod continetur sub m k, k c. quare maiorem habet proportionem c a ad k c, quàm m k ad a r. quam uero proportionem habet a c ad k c, eãdem quadratum a b ad quadratum b k. Manifestum igitur, quod dimidium quadrati a b, quod est æquale quadrato a r, ad quadratum b k maiorem habet, quàm m k ad duplam ipsius a r, quæ æquatur lineæ l n. maiorem ergo proportionem habet circulus circa diametrum h f constitutus, ad circulum circa diametrum b d descriptum, quàm m k ad l n. quare minor est conus, qui basem habet circulum circa diametrum h f constantem, uerticem uero n punctum, eo cono qui habet basem circulum circa b d constitutum, uerticem autem m punctum. Vnde manifestum quoque, dimidiam sphæram, quæ secundum e f h circumferentiam constat, maiorem esse portione, quæ secundum b a d circumferentiam posita est.

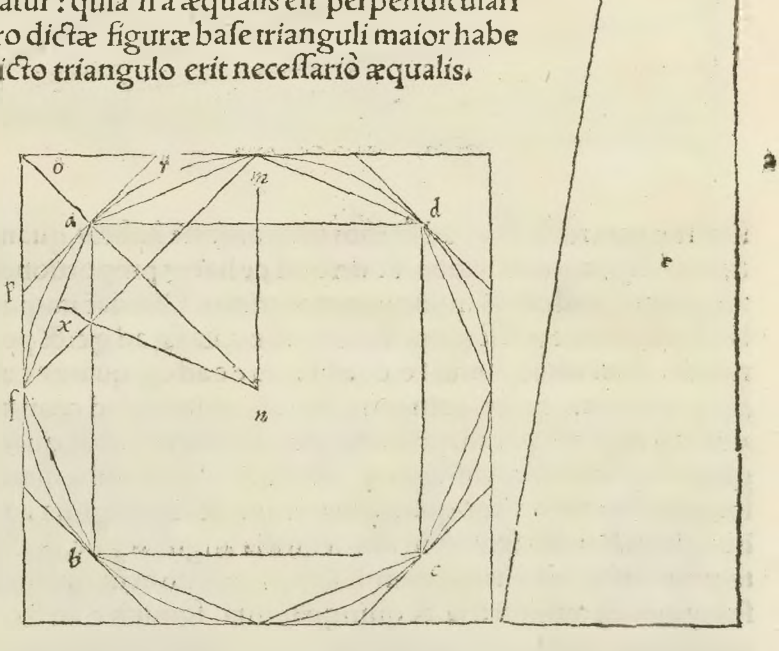


ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET
Cylindro Libri secundi Finis.

ARCHI-

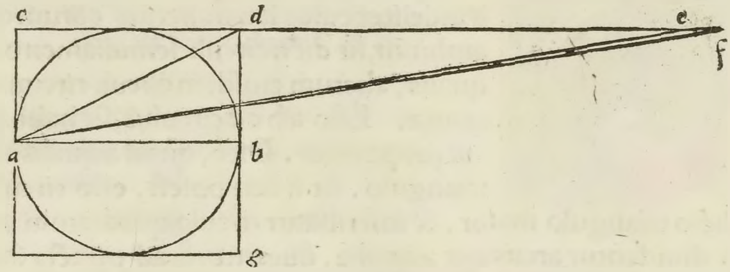
ARCHIMEDIS CIRCVLI DIMENSIO.

QVILIBET circulus triangulo rectangulo æqualis est, illi uidelicet cuius latus alterum eorum quæ rectum angulum ambiunt, sit dicti circuli semidiametro æqualis, alterum eiusdem circuli circumferentiæ. Esto a b c d circulus, sic habeat sicut proponitur. Dico, quod æqualis est e triangulo. Et si fieri potest, esto circulus dicto triangulo maior, & inscribatur circulo quadratum a c, & diuidantur arcus per æqualia, ducanturq; ad puncta diuisionum lineæ rectæ, fiantq; hoc modo intra circulum figuræ rectilineę, donec inciderimus in aliquam figuram rectilineã, quæ sit maior dicto triangulo: & ponatur centrum n. & sit super unum latus figuræ perpendicularis n x. igitur n x est minor latere trianguli. Est etiam linea claudens figuram, minor reliqua trianguli linea, cum sit minor circuli limbo. Dicta igitur figura minor est dicto triangulo: quod quidem absurdum est. Esto item si fieri potest, sit triangulo circulus minor, & circulo circumscribatur quadratum, & arcus inter puncta cõtingentiæ circuli interclusi in æqua diuidantur, & per puncta diuisionum ducantur lineę contingentes. rectus igitur angulus à lineis o a r ambitur, quare o r erit maior r m. nã r m, r a sunt æquales, & triãgulus r o p est maior figura o f a m q; dimidium: quare & maior dimidio eius partis quadrati circulo circumscripti, quæ est ex parte o. Sumptæ sint itaq; portiones similes ipsi p f a, quæ sint minores eo, quo triangulus e superat circulum a b c d: atque idcirco ipsa quoque figura rectilinea circulo circumscripta, minor erit triangulo e. quod item absurdum est. nam maior esse probatur: quia n a æqualis est perpendiculari trianguli, limbus uero dictæ figuræ base trianguli maior habetur. quare circulus dicto triangulo erit necessariò æqualis. 1

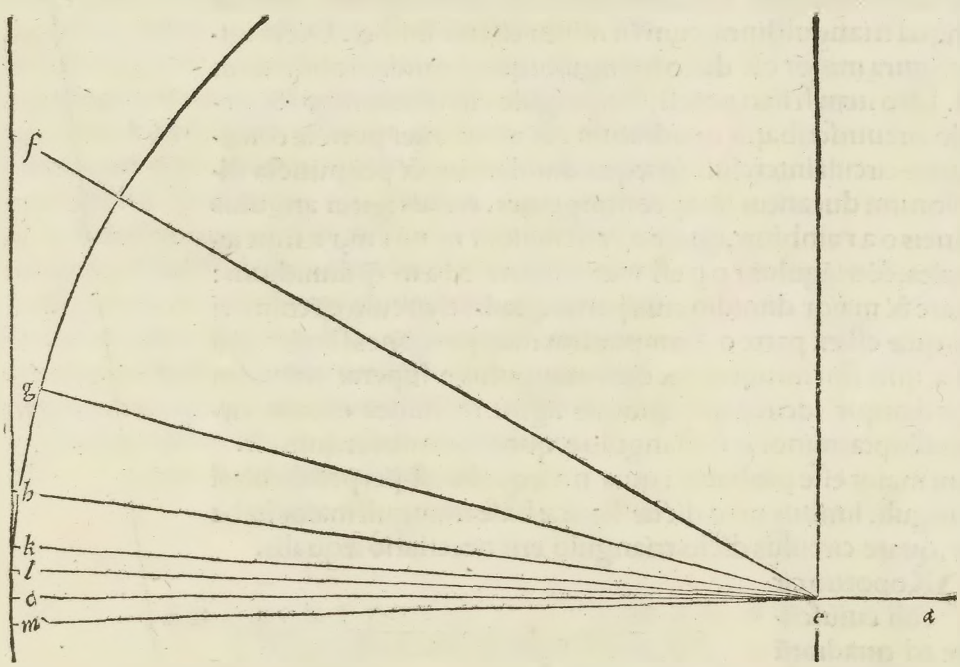


PRoportio circuli cuiuscũque ad quadratũ suæ diametri est, sicut undecim ad quatuordecim. Esto circulus, cuius diametrus a b & circumscribatur ei quadratum c g: & ipsa c d dupla sit d e: ipsius etiam c d, sit e f pars septima. Quoniam igitur c e ad c d eam habet proportionẽ, quam uicenum primum ad septenum tenet: i c d uero ad e fetiam, quam septenum

num ad unum. c f igitur ad c d, uti uicenũ secundum ad septenum habebit. Verum ipsius a c d trianguli quadruplum est c g. quadratum & triangulus a c d f est ipsi circulo æqualis, cum c d perpendicularis sit semidiametro æqualis, & basis diametro sit tripla, & propè sesquiseptima, uti ostendetur. Circulus igitur ad quadratum c g proportionem habet eam, quam undenus ad quatuordenum.



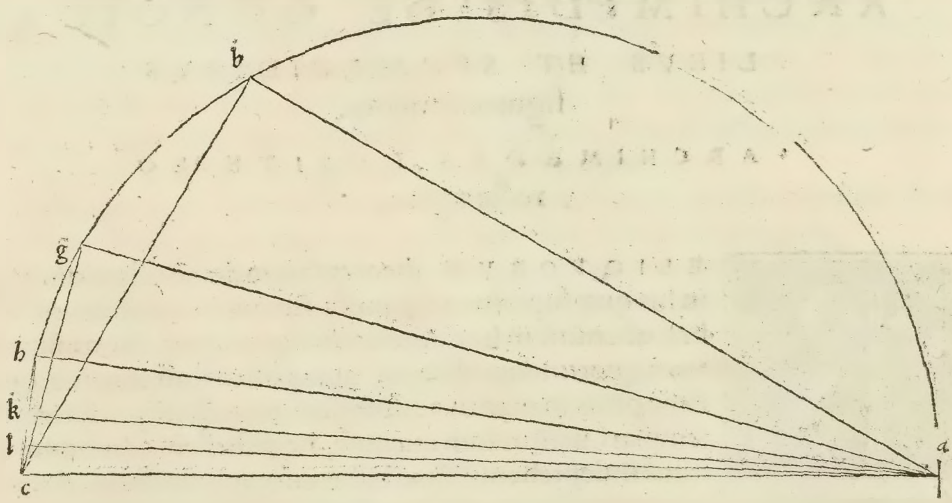
3 CViuslibet circuli circumferẽtia suæ diametri est tripla, & plus parte, quæ minor est septima, & maior decem septuagenis primis. Esto circulus, cuius diametrus a c, centrũ e, & c l f circulum cõtingens, angulus qui sub f e c cõtinetur,



sit tertia pars recti: & e f ad f c eam proportionẽ habeat, quam trecenti seni ad centum quinquagenos trinos. f c uero ad c e habet proportionem, quam ducenti sexageniquini ad centũ quinquagenos trinos. Diuidat̃ itaq; angulus f e c, in æqualia, ducta linea e g. Est igitur sicut f e ad e c, ita f g ad g c: & permutatim, & componendo, sicut utraq; simul f e, e c ad f c, ita e c ad c g. quare e c ad c g maiorem habet proportionem, quàm quingenti septuageniprimi ad centum quinquagenos trinos. e g ergo ad g c eam potentia proportionem habet, quam trecenta sex & uiginti milia unũ & quadraginta, ad tria & uiginti milia quadringenta & nouem. longitudine uero sicut quingenta unum & septuaginta ad centum tria & quinquaginta. Rursus secetur in duo æqualia angulus g e c, ducta linea e h. Eadem itaq; ratione e c ad c h maiorem habet proportionem, quàm mille centum duo & sexaginta ad centum tria & quinquaginta. Igitur h e ad h c maiorem habet proportionem, quàm mille centũ septuaginta duo ad centum tria & quinquaginta. Item in duo æqua diuidatur angulus h e c, ducta linea e k. igit̃ e c ad c k maiorẽ habet

habet proportionē, quàm duo milia trecenta quatuor & triginta & quarta ad centum tria & quinquaginta. ergo e k ad c k maiorem habet, quàm duo milia trecenta nouem & triginta & quarta ad centum tria & quinquaginta. Item in duo æqua diuidatur angulus k e c, ducta linea e l. igitur e c ad l c habet maiorem proportionē, quàm quatuor milia quadringenta tria & septuaginta, ad centum tria & quinquaginta. Quoniam igitur angulus f e g, cum sit tertia pars anguli recti, quater diuisus est in æqualia, erit angulus l e c anguli recti pars quadragesimaoctaua. Ponatur itaq; ipsi angulo l e c æqualis angulus c e m. Angulus ergo l e m erit recti pars uigesimaquarta, quare linea l m est latus figuræ multorum angulorum circa circulum descriptæ, quæ sex & nonaginta lateribus concluditur. Cum igitur sit ostensum, e c habere ad c l maiorem proportionem, quàm quatuor milia sexcēta tria & septuaginta & semis, ad centum tria & quinquaginta. Sed et ipsius e c dupla est a c, ipsius uero l c dupla est l m. habebit ergo a c, ad limbum ipsius figuræ sex & nonaginta laterum, proportionem maiorem, quàm quatuor milia sexcenta tria & septuaginta & semis, ad quatuordecim milia sexcenta & octo & octuaginta. & est tripla, & insuper habens sexcentas septem & sexaginta partes & semis, ipsorum quatuor milium sexcentorum trium & septuaginta & semis: quæ quidem sunt dicti numeri minus septima parte. quare figuræ multorum angulorum circulo circumscriptæ, latera simul iuncta diametro circuli sunt tripla, & insuper partem parte septima diametri minorem habent. Quare multo magis limbus circuli cum sit diametro sua plus quàm triplus, minorem tum parte septima super triplicatam diametrum addet.

Esto item circulus, cuius diametrus a c, angulus uero b a c, sit tertia pars anguli recti. Igitur a b ad b c minorem habet proportionem, quàm trecenta quatuor



& quinquaginta ad septingenta octuaginta. a c uero ad c b habet eam quam mille quingenta sexaginta ad septingenta octuaginta. Secetur in duo æqua b a g, sit æqualis angulo g c b: sed et angulo g a c, & angulus g c b æqualis angulo g a c. & communis est angulus rectus a g c, & tertius angulus g f c erit tertio angulo a c g æqualis. quare triangulus a g c est æquiangulus triangulo c g f. erit ergo sicut a g ad g c, sic g c ad g f, & ita a c ad c f. Verum sicut a c ad c f, ita & utraq; simul c a, a b ad b c. & sicut utraq; simul c a, a b ad b c, sic a g ad g c. Propter hoc itaque a g, ad g c minorem habet proportionem, quàm duo milia nongenta undecim ad septingēta octuaginta, uerum a c ad c g minorem habet proportionem, quàm tria milia tredecim ad ſeptingenta octuaginta. Diuidatur item in duo æqua angulus c a g, ducta linea a h. igitur a h ad h c eadem ratione minorē proportionē habet quàm quinque milia trecenta quatuor & uiginti & quinta & quarta ad ſeptingenta octuaginta, uel quam mille octingenta quatuor & uiginti ad ducenta quinquaginta. nam utraq; utrinq; quare a c ad c h minor, quàm mille octingenta octo & triginta & nona ad ducenta quadraginta. Item angulus h a c in duo æqua diuidatur

Item k a c angulus diuidatur per lineam a l: ergo a l ad l c minorem habet proportionē quàm duo milia ſedecim & ſexta ad ſex & ſexaginta. ipſa uero a c ad c l minorem quàm duo milia decem & ſeptem & quarta, ad centum & ſex & ſexaginta. Conuerſim uero limbus figuræ multorum angulorum ad diametrum maiorem habet proportionem, quàm ſex milia trecenta & unũ & ſexta ad duo milia decem & ſeptem & quartam. Sunt illa duobus milib. decem & ſeptē & quarta maiora, q̃ tripla ſuper decies partientia ſeptuageſimas primas. igitur limbus figuræ ſex & nonaginta lateribus concluſæ circulo inſcriptæ, maior eſt diametro circuli, quàm tripla ſuper decies partiens ſeptuageſimas primas. quare multo magis circumferentia circuli maior erit ſua diametro, quàm tripla ſuper decies partiens ſeptuageſimas primas. Vnde colligitur, circuli circumferentiam ſua diametro maiorem eſſe quàm triplam ſeſquioctauã, minorē uero quàm triplã ſeſquiſeptimã.

ARCHIMEDIS DE CIRCVLI DImenſione Finis.

ARCHIMEDIS DE CONOIDALIBVS ET SPHAEROIDIBVS figuris inuenta.

ARCHIMEDES DOSITHAEO recte agere.

RELIQVORVM theorematum demonſtrationes, quas in his quæ ſuperius ad te miſſa ſunt uoluminibus, nõ habebas, tibi nunc in hoc libro conſcriptas mitto. Nonnullas pręterea quorundam aliorum, quæ poſtea ſunt inuenta. quæ cũ ſæpe prius in manus adduxiſſem, tentaſſemq; inſpicere & cõtemplari, ueritus ſum maxime, ne difficilem admodum & penitus indeprehenſibilem haberent explicationem. Atque idcirco cum cæteris tibi data non fuerunt ipſa propoſita. Verum poſteaquam ęa diligentiori ſtudio inueſtigare cœpiſſem, quæ prius dubia & perobſcura uidebantur, omnia cõpræhendi. Erant autem reliqua quidem priorum theorematum de rectangula figura conoidali propoſita. Quę uero nuperrimè ſunt inuẽta circa obtuſianguli figuram conoidalem, & etiam ſphæroidas figuras uerſantur: quarum quaſdam oblongas, quaſdam prolatas libet appellare. De rectangulo itaq; conoidali hæc ſubiecta fuerant.

Si rectanguli coni ſectio quieſcente diametro circumferatur, donec in eũ unde duci cœperat locum redierit figura, quæ à rectanguli coni ſectione cõpræhendetur, conoidale rectangulum uolumus appellari, & eius axem diametrum quieſcentem, uerticem uero punctũ in quo ſuperficiei conoidalis axis applicatur.

Item

Item si conoidalem figuram rectangulam planum contingat, ipsi uero contin genti alterum planum æquedistanter ductum aliquam conoidalis portionẽ abscindat, ipsius portionis basim uocari planũ, quod ab ipsa conoidalis sectione in abscindendo compręhensum sit: uerticem uero, punctũ illud in quo alterum planum conoidale contingit. axem aũt lineam rectam, quæ inter portionem deprę hendit à linea recta, quæ à uertice portionis ducta, sit axi conoidalis æquedistãs.

Hæc autem proponebantur consideranda & inspicienda. Cur fiat, quod si conoidalis rectanguli sectio secetur à plano super axem erecto, portio abscisa erit sequialtera cono qui habet basem cum portione eandem, & axem eundem. Rursus quare est, si à conoidali rectangulo duæ portiones à planis utrinq; ductis abscindantur, portiones abscisæ habent inter se, eam quæ est suorum axiũ, proportionem duplicatam.

Circa uero obtusianguli conoidale hæc supposita uolumus. Si in eodem plano sit obtusianguli coni sectio, & eius diametrus & lineæ, quæ sint proximę dicti coni portioni, & quiescente diametro uertatur planum donec redeat ad locum unde cœpit moueri, in quo scilicet plano dictę lineæ existunt, lineæ rectæ quæ sectioni coni obtusianguli proximę sunt, palàm est quod conum compræhendent æquicrurem, cuius uertex punctum erit in quod lineæ quæ proximę sunt cõcurrunt. axis uero diametros immota. Figura uero sub sectione coni obtusianguli compræhensa, conoidale obtusiangulum appelletur. axem autem eius diametrum immotam: uerticem uero, punctum in quo axis superficiei conoidalis applicatur. Conum aũt compræhensum à lineis sectioni coni obtusianguli proximis complectentem conoidale uocari. Lineam uero rectam, quæ intermedia capitur inter uerticem conoidalis & uerticem coni complectentis conoidale, adiectam axi dici. Et si obtusianguli conoidale planum contingat, ipsi autem contingenti alterum planum æquedistanter ducatur, quod abscindat à conoidali portionem, basem abscisę portionis uocari planum quod sit à sectione conoidalis in secando compræhensum. uerticem autem, punctum in quo planum contingit conoidale. axem uero, lineam intra portionem compræhensam, à linea ducta per uerticẽ portionis & uerticem coni complectentis conoidale, & quæ dictis uerticibus intermedia habetur rectam lineam ad axem adiectam uocari.

Omnia uero conoidalia rectangula sunt similia. Eorum autem quæ sunt obtũsianguli, similia dicantur illa, quæ à conis similibus sunt compræhensa.

Hæc autem inspicienda proponuntur. Quare est, si à conoidali obtusianguli portio abscindatur plano super ipsius axem erecto, portio abscisa ad conũ eandem basem cum portione & eundem axem habentem, habet eam proportionẽ quam habet utraq; simul linea, & ea quæ æquatur axi portionis, & ea quæ tripla est lineę axi adiectæ, ad lineã æqualem his duab. simul, axi portionis, & lineę quę dupla sit lineæ axi adiectæ.

Item quare est, si à cono anguli obtusi portio abscindatur plano non erecto super axem, portio inde abscisa ad figuram, quæ basim habeat eandem, & axem eũdem portioni, quæ figura sit sectio coni, eam habet proportionem, quam utraq; simul linea quæ axi portionis sit æqualis: & linea quæ tripla sit lineæ axi adiectæ ad lineam æqualem istis utrisq;, uidelicet axi portionis, & lineæ duplæ ad lineam axi adiectam.

At uero circa sphæroidas figuras subiecimus ista.

Si sectio coni anguli acuti, quiescente eius maiore diametro circũferatur, donec redeat in eum locum unde moueri cœpit, figuram inde compræhensam à sectione coni anguli acuti, sphæroides oblongum appellari. Si autem minori diametro quiescente circũferatur, item donec ad locum unde cœpta est moueri portio coni acuti anguli redeat, figuram inde à sectione coni anguli acuti compræhẽ

h 2 sam,

ſam ſphæroides prolatum uocari. Vtriuſq; autem ſphæroidis axem dici diametrum quieſcentem: uerticem uero punctum illud in quo axis applicatur ſuperficiei ſphæroidis. Centrum uero punctum axis medium: diametrum uero lineam à centro eductam perpendiculariter ipſi axi.

Si ſphæroidas figuras utcunq; plana contingant æquediſtantia, & figuras nõ ſecantia: ipſis autem, ut dictum eſt, contingentibus alterum planum æquediſtanter agatur, diuidatq; dictas figuras ſphæroidas, portionum inde naſcentium baſem quidem uocari, id plani quod compræhenſum eſt à ſphæroidis ſectione in diuidente plano: uertices uero, puncta in quibus plana æquediſtantia contingunt ſphæroides. axes autem lineas rectas, in portionibus comprehenſas ex recta linea, quæ uertices earum iungit. Quòd aũt plana contingentia in uno ſolum puncto contingant ſphæroidis ſuperficiem, quodq; linea recta contactus coniũgens per centrum ſphæroidis tranſeat, in ſequentibus oſtendemus. Similes autem figuras ſphæroidas dici, quarum axes ad diametros eandem habent proportionẽ.

Portiones autem ſphæroidum & conoidalium figurarum ſimiles illę dicãtur, quæ à ſimilibus figuris ſint abſciſæ, quæq; baſes ſimiles habeãt, & axes earum aut erecti ſint ſuper planas baſium ſuperficies, aut angulos æquales habeant ad diametros baſium (correlatiuas) conſimiles, proportionemq; teneant ad diametros baſium conſimiles eandem.

Proponuntur autem hæc circa ſphæroidas figuras conſideranda: Cur fiat, ſi figurarum ſphæroidum aliqua ſecetur plano per eius centrum tranſeunte, & ſuper axem erecto, portionum inde productarum utraq; dupla ſit cono ſuo, eãdem baſim & axem eundem cum portione habenti. Si autem plano ſecetur non ſuper axem erecto, & per centrum tranſeunte: earum quæ inde reſultant portionũ, maior quidem ad conum eãdem baſim, & eundem cum portione axem habentem, habebit eandem proportionem, quam habet linea, quę ſit æqualis utriſque ſimul iſtis, dimidio axis ſphæroidis, & axi minoris portionis, ad axem minoris portiõis. Minor autem portio ad conum, qui eandem baſem & axem eundem cum portione habuerit, eam tenet proportionem, quam linea æqualis utriſq; ſimul iſtis, dimidio axis ſpheroidis, & axi maioris portionis habet, ad axem portionis maioris.

Item quare ſit, ſi qua figurarum ſphæroidum plano ſecetur, tranſeunte per cẽtrum non erecto ſuper axem, utraque portionum inde naſcentium dupla erit figuræ, quæ baſim eandem, & axem habeat cum portione eundem: ſit autem ipſa figura abſciſor coni.

Item ſi neq; per centrum, neq; erecto ſuper axem plano, ſphæroides ſecetur, portionum inde factarum maior ad figuram eandem baſim, & eundem cum portione axem habentem, tenebit eam proportionem, quam linea æqualis utriſque ſimul iſtis dimidiæ lineæ, quæ utriuſq; portionis uertices iungit, & axi portionis minoris habet ad axem portionis minoris. Minor autem portio ad figuram eandem baſem & axem habentem cum portione eundem, habebit eam proportionem, quam linea æqualis utriſque ſimul iſtis dimidiæ lineæ, quæ utriuſque portionis uertices iungit, & axi maioris portionis ad axem maioris portionis. ſit autẽ & in his figura abſciſor coni.

Iſtis itaq; quæ dicta ſunt theorematibus demonſtratis, per hæc ipſa inueniũtur multa alia theoremata, et problemata multa: quale eſt hoc quod ſequit̃, Quod ſphæroides figuræ ſimiles, & portiones ſphæroidum figurarum ſimiles, & ſimiliter conoidalium, habent eam quæ eſt axis ad axem proportionem triplicatam.

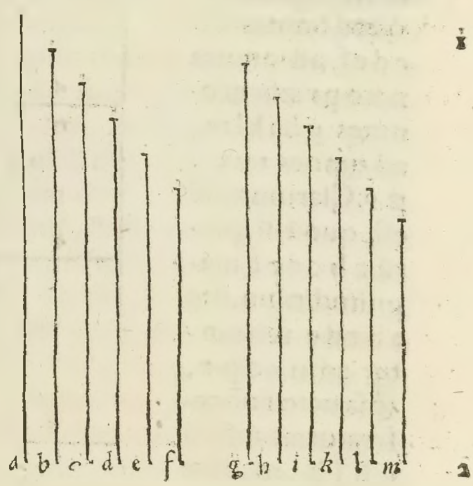
Item quare ſphæroidum figurarum æqualium quadrata diametrorum mutuam habent axium proportionem. & ſi figurarum ſphæroidum quadrata diametrorum mutuam habuerint axium proportionem, ſphæroides figuras illas æquales eſſe.

Propo

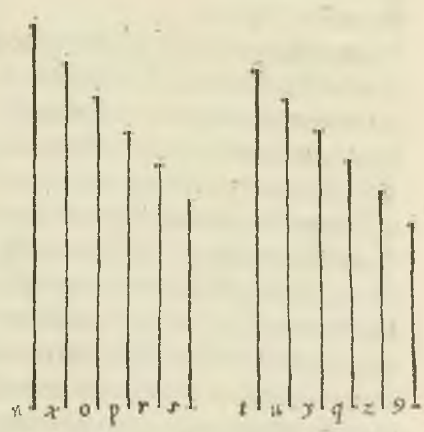
Propositum autem quale est hoc, A' data figura sphæroidis, aut conoidalis portionem abscindere plano, quod sit alteri plano dato æquedistanter ductum. Esse autem portionem abscisam æqualem aut cono dato, aut cylindro, aut sphæræ datæ. Præmittens igitur primùm & theoremata & pręcepta proposita, quę ad illorum demonstrationem sunt necessaria, postea tibi ea quæ suprà sunt proposita, describemus feliciter.

Si conus plano secetur omnibus lateribus suis coincidenti, sectio erit aut circulus, aut coni anguli acuti sectio. Quod si dicta sectio sit circulus, palàm est quod portiò ab eo uerticem uersus comprænsa, conus existit. Si uero sectio sit coni anguli acuti sectio, figura à coni sectione dicta uersus uerticem coni comprahensa, abscisor coni uocetur. Huius uero abscisoris basis uocetur planũ illud quod à sectione coni acuti anguli continetur. uertex uero punctum, quod est & coni uertex. axis autem, linea à uertice ad centrum sectionis coni acuti anguli ducta.

Et si cylindrus duobus planis æquedistantibus secetur, quæ omnib. lateribus cylindri coincidant, sectiones erunt aut circuli, aut coni acuti anguli sectiones æquales & similes inuicem. Siquidem sectiones circuli fuerint, manifestũ est quod figura à cylindro abscisa inter plana æquedistantia intercepta, cylindrus existit. Si uero sectiones fuerint coni acuti anguli sectiões, abscisa à cylindro figura, quæ est inter plana æquedistantia contenta, sector cylindri appelletur. Ipsius autem sectoris bases uocentur plana comprehensa à sectione coni acuti anguli. axis uero linea ducta ad centra, sectionum coni acuti anguli. Erit autem hæc ipsi axi cylindri eadem.

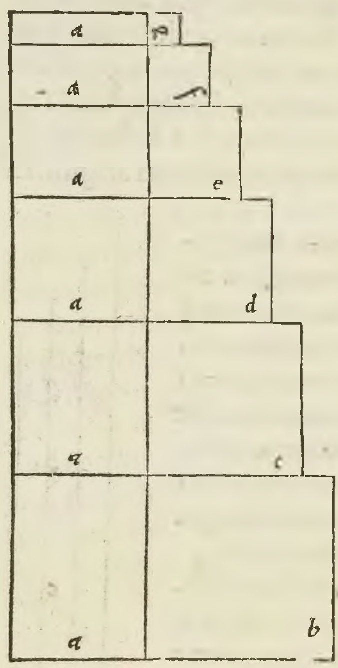


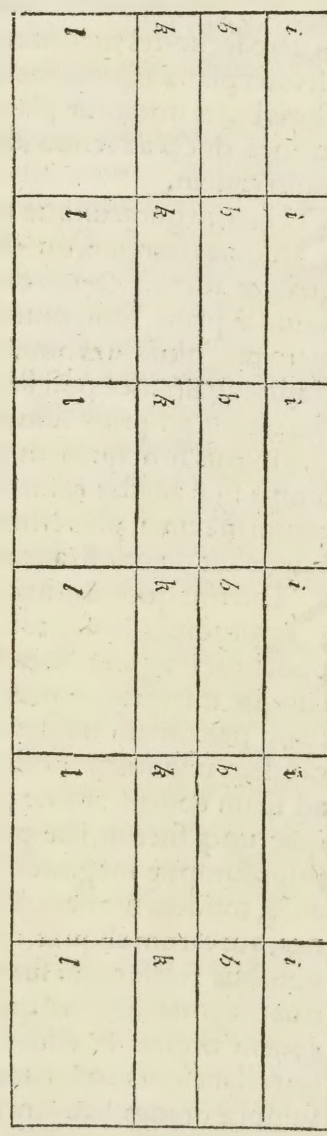
SI fuerint quotcunque numero magnitudines sumptæ, quæ sese excedant æqualiter, fueritq; earum excessus minime illarum æqualis, sumantur aliæ totidem numero magnitudines omnes maximè prædictarũ æquales. istæ pòst simul sumptæ collectæ omnis ad prius sumptas omnis collectas minus sunt quàm duplæ. item eædem omnis istæ ad illas easdem omnes, dempta earum maxima, plus erunt quàm duplæ. Huius aũt demonstratio manifesta existit.



SI fuerint quotcũq; numero sumptę magnitudines, itemq; totidem alię numerò ponantur magnitudines, hoc pacto, ut quãcunque unaquaque prius sumptarum ad suam proximam habuerit proportionem, eandem unaquæq; posterius sumptarum ad suam eodem ordine proximam seruet, quæcunq; fuerint illæ proportiones, item prius sumptæ magnitudines ad quasdam alias, totidem numero magnitudines omnes, aut earum aliquas, quibuscũq; proportionibus referantur: sumptæ quoq; posterius magnitudines ad quasdã alias totidẽ, eodem ordine & eisdem proportionibus sint relatæ: erit tunc, ut magnitudines prius sumptæ omnes, habeant ad eas magnitudines omnes ad quas dicta ratione comparãtur, eandem proportionem, quam magnitudines posterius sumptæ omnis habuerint,

rint, ad omnes illas magnitudines ad quas fuerint similiter comparatæ. Esto quę dam magnitudines a b c d e f, item aliæ totidẽ g h i k l m, sitq́ ut unaquæq́ prius sumptarum habeat ad suam proximam, sicut unaquæq́ posterius sumptarum ad suam proximam. Vt uidelicet a habeat ad b eandem proportionem, quam g ad h. ipsa uero b habeat ad c, sicut h ad ipsam i, & reliquę deinceps similiter. referãtur autem a b c d e f magnitudines, ad alias magnitudines n x o p r s, in quibuscũque proportionib. ipsæ uero g h i k l m ad alias, uidelicet t u y q z 9, eisdem eodem ordine proportionibus: ut sicut a habet ad n, ita g ad t, & sicut b ad x, ita h ad u, & reliquæ istis similiter. Ostẽdendũ itaq́ est, quod omnis a b c d e f, ad omnis n x o p r s eandem habent proportionem, quam habent omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z 9. quoniam n ad a eandem habet proportionem, quam t ad g: ipsa uero a ad b, sicut g ad h. uerum b ad x, sicut h ad u. erit sicut n ad x, ita t ad u. eadem ratione & x ad o, sicut u ad y: & reliqua his similiter. Habent autem omnes a b c d e f g ad a, sicut g h i k l m ad g. uerum a ad n, sicut g ad t. at uero n ad omnes n x o p r s, sicut t ad omnes t u y q z 9. Manifestum igitur est, quod omnes a b c d e f, ad omnes n x o p r s: sicut omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z 9. Clarum autẽ est, quod si ipsarũ a b c d e f magnitudinum, istę a b c d e referantur ad n x o p r, ipsa uero f nõ refe-ratur: at ipsarũ g h i k l m, istæ g h i k l, referantur ad t u y q z sibi correspondentes eisdem proportionibus, m uero nõ referatur. Et similiter omnis a b c d e f, ad omnes n x o p r eandem habebunt proportionẽ, quã omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z.





3 Si lineæ quotcunq́ numero, fuerint inter se æquales, & unicuiq́ earũ accedat spaciũ, ita quod spaciũ secundæ superet spaciũ primę quadrata forma, & sic deinceps reliqua se habeant, sintq́ excessuũ latera æqualẽ excedẽtia, & hic laterũ excessus sit æqualis minimæ huius numeri lineæ. item sint alia spacia prædictis numero æqualia, quantitate uero unumquodq́ maximo prædictorum æquale. Dico, tunc hęc simul omnia spacia minorem habere proportionem ad prædicta simul omnia, quàm linea

quæ

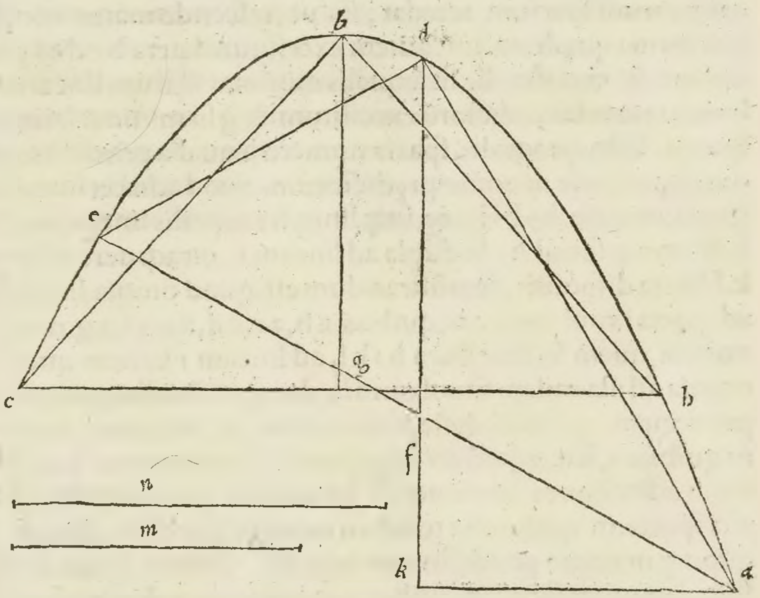
quæ sit æqualis utrisque simul istis lineis, ei quæ est latus excessuum spaciorũ maximum, & uni ex lineis æqualibus habeat ad lineam æqualem utrisq; simul istis, lineæ quæ sit tertia pars lateris excessus maximi, & lineæ quæ sit unius æqualiũ dimidia. Et item hæc eadem spacia ad illa eadem omnia, dempto eorum maximo, maiorem habere proportionem, quàm sit dictarum linearum proportio. Esto lineæ rectæ quotcunque numero quantitate inter se æquales, in quibus a, & unicuiq; earum spacium accedat, ita ut crescendo maius excedat sibi proximum minus forma quadrata. sint autem excessuum latera b c d e f g, quæ sese æqualiter excedant. & excessus ille sit æqualis minimæ illarum linearum, uidelicet ipsi g. sitq; b maximum latus dictorũ excessuum, & g sit minimũ latus minimi spacij ex dictis spacijs. Esto quoq; alia spacia numero æqualia prædictis, quantitate uero unumquodq; æquale maximo prędictorum, quod adiacet lineæ a b. sintq; hæc secunda spacia, in quib. h i k l lineę, sitq; linea h i æqualis linę a, linea uero k l æqualis lineę b: & utraq; simul h i sit dupla ad lineam i. utraq; uero k l simul sit tripla ad lineam k. His ita dispositis, demõstrandum est, quod omnia simul spacia in quibus h i k l, ad spacia simul omnia in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g minorem habent proportionem, quàm habeat linea h i k l, ad lineam i k. Item quod hæc eadẽ spacia simul omnia ad illa eadem simul omnia, dempto maximo eorum, maiorem habent proportionem, quàm sit dicta lineæ ad lineam proportio. Sunt enim quędam spacia, in quibus a, sese æqualiter excedentia: & eorum excessus est æqualis numero, quoniam adiectiones linearum & latitudines sunt æqualiter sese excedentes. sunt itẽ alia spacia, in quibus h i totidem numero prædictis spacijs, quantitate uero unũquodq; maximo prædictorum æquale. Omnia igitur simul in quibus h i spacia sunt, omnium simul in quibus a, minus quàm dupla. sunt item eadem simul omnia, eorundem simul omnium, dempto eorum maximo, plusquam dupla. Spacia igitur omnia simul in quibus i, erunt omnibus simul in quibus a, minora: omnibus item simul dempto maximo, maiora erunt quàm dupla. Rursus quædam lineæ sunt hæ b, c, d, e, f, g: quæ sese æqualiter excedunt: & ille excessus est æqualis minimæ earum. & item aliæ lineæ, in quib. k l lineis prædictis multitudine æquales, magnitudine uero unaquæq; æqualis maximæ illarum. quadrata igitur simul omnia linearum secundarum inter se, & lineæ prioris ordinis maximę æqualium sunt minus quàm tripla ad quadrata simul omnia, linearum prioris ordinis sese æqualiter excedentium. ad quadrata uero simul omnia reliquarum, dempto maximæ lineæ quadrato, sunt eadem plus quàm tripla. Hoc autem est ostensum in his quę circa lineas cocleares sunt exposita. Spacia igitur in quibus k, spacijs simul omnibus in quibus b c d e f g, sunt minora: spacijs uero simul omnibus in quibus c d e f g, sunt maiora. quare & omnia simul spacia in quib. i k, spacijs simul omnib. in quibus a b c d e f g, erũt minora. Illis aũt in quibus a c d e f g spacijs, simul omnibus maiora erunt. Patet igitur, omnia simul spacia in quib. h i k l, ad spacia simul omnia in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g, esse minora: illis uero in quibus a c, a d, a e, a f, a g spacijs simul omnibus maiora. Ex quo clarum est, spacia simul omnia in quibus h i k l, ad spacia simul omnia in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g minorẽ proportionem habere, quàm habeat linea h l ad lineã i k. ad reliquas uero illarũ dempta a b linea, maiorem proportionem dicta proportione seruare. quare, &c.

Si cuiuscunq; coni sectionẽ lineę rectæ ab eodem puncto exeuntes cõtigerint, sint autem & aliæ rectę lineæ intra coni sectionẽ lineis contingentib. æquedistãter ductæ, & sese inuicẽ secantes quadrãgulæ superficies, quæ sub dictarũ linearũ sectionib. cõtinentur, eandẽ habent proportionẽ ad quadrata contingentiũ, unaquæq; ad quadratũ cõtingentis illius quæ sibi respondeat, quã habet superficies producta ex partib. alterius lineæ una in alterã ductis, ad quadratum cõtingentis eius quæ sibi fuerit æquedistãs. Hoc aũt demonstratũ iam fuit in conicis elemẽtis.

Si

4 SI ab eadem rectanguli coni sectione duæ portiones, utcunq; contingant, abscindantur, quæ diametros habeant æquales, ipsæ quoq; portiones æquales erunt, & trianguli ipsis inscripti, qui eandem cum portionibus basim & altitudinem habuerint, erunt æquales. Diametrum autem uoco cuiuscunq; portionis lineam rectam, quæ diuidit in duo æqua omnem lineam rectam basi ipsius portionis æquedistantē.

Esto rectanguli coni sectio a b c, et ab ea abscindantur duę portiones a d e, & h b c. Esto autem ipsius portionis a d e, diametros d f: ipsius uero h b c diametros b g, & esto d f æqualis ipsi b g. Ostendendum est, quod portiões ipsę sunt æquales inuicem, a d e ipsi h b c. & trianguli quoque ipsis eo modo, quo dictū est inscripti, æquales inuicem.

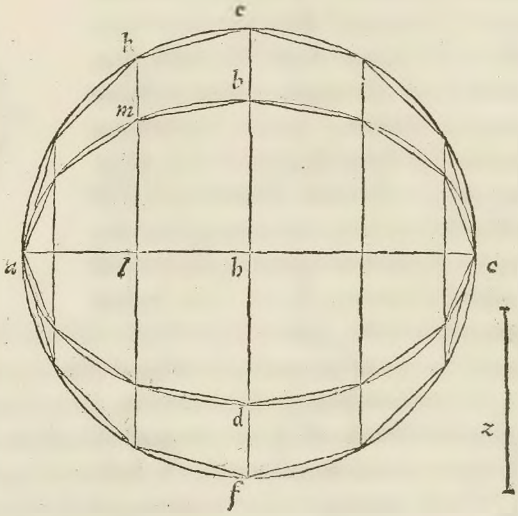


Esto primum quæ scindit alteram portionem h c, secundum angulos rectos ad diametrum portionis coni rectanguli. sumatur autem ea iuxta quā possunt illæ quæ à sectione ducuntur dupla eius quę à sectione ad axem ducitur, esto illa in qua m: ducatur autem ab ipso a perpendicularis super d f, quæ sit a k. Quoniam igitur d f est diametros portionis, & a e in duo æqua diuiditur in puncto f, & d f est æquedistans diametro sectionis coni rectanguli: sic enim in duo diuidit omnes æquedistāter ipsi a e ductas. quam itaq; proportionem habet quadratum a f ad quadratum a k, eandem habeat m ad n. quæ autem à sectione ad ipsam d f ducuntur æquedistanter ipsi a e possunt ea spacia, quæ lineæ ipsi n æquali adiaceant, latitudinem habentia lineam illam, quam illæ ductæ æquedistanter ipsi a e ex d f diametro incidunt uersus d terminum sumptam. Nam hoc est ostensum in conicis. Igitur a f ualet tantum, quantum continetur sub n & d f. potest autem & h g æquale ei quod continetur sub m & b g, cum h g sit perpendicularis super diametrum, & quadratum a f ad quadratum h g habeat eandem proportionem quam m habet ad n, quia d f & b g sunt positæ æquales. habet autem quadratum a f ad quadratum a k eandem proportionem, quam habet m ad n, erunt igitur h g & a k æquales. sunt autem & b g, & d f ęquales: quare id quod fit ex h g in b g, æquatur ei quod fit ex a k in d f. æqualis est igitur triangulus h g b triangulo d a f, quare & eorum dupla æqualia sunt. Portio autem a d e, est sesquitertia trianguli a d e: trianguli uero h b c, similiter sesquitertia est portio h b c: quare patet, portiones & triangulos ipsis portionibus inscriptos inter se esse æquales. Si uero neutra earum quæ diuidunt portiones linearum fuerit ad ipsam sectionis diametrum secundum angulos rectos, ducta ex diametro sectionis coni rectanguli uersus eam partē à qua diametros sectionis ab ipsa sectione exierit, sumat̄ pars quæ sit æqualis diametro portionis unius, & à puncto huius sumptæ extremo ducat̄ in utramq; partem secundū angulos rectos linea recta, quæ abscindit portionem

utrisq;

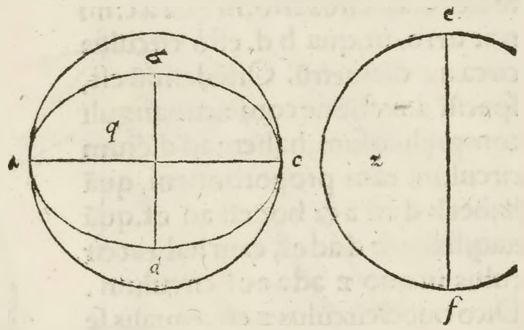
utriq; prædictarum æqualem, ut ſuprà oſtenſum eſt. quare conſtat propoſitū.

OMne ſpacium quod comprænenditur à ſectione coni acutianguli ad circulum, qui habeat diametrum æqualem maiori diametro ſectionis coni acutianguli, habet eam proportionem quam minor ſectionis diametros habet ad maiorem, quæ eſt circuli diametros. Eſto coni acutianguli ſectio, in qua a b c d, eius maior diametros eſto, in qua a c: minor uero, in qua b d. eſto circulus circa a c diametrū. Oſtēdendū eſt, ſpaciū à ſectione coni acutianguli comprehenſum, habere ad dictum circulum eam proportionem, quā habet b d ad a c: hoc eſt ad e f. quā itaq; habet b d ad e f, eam habeat circulus in quo z ad a e c f circulum. Dico quod circulus z eſt æqualis ſectioni coni acutianguli. Si enim circulus z non dicatˀ ęqualis ſpacio cō prehēſo à ſectione coni acutiāguli, eſto primū ſi fieri poteſt maior. poteſt itaq; in circulo z figura multorum angulorum & numero pariū inſcribi, quæ ſit maior dicto ſpacio a b c d. intelligatur ergo inſcripta, 5

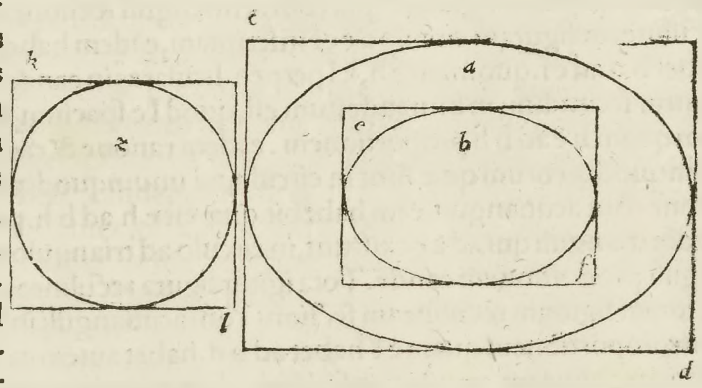


& inſcribatur circulo a e c f figura ſimilis inſcriptæ circulo z, & ab eius angulis ducantur perpendiculares ſuper a c diametrum: in quibus uero punctis perpendiculares ſcindunt ſectionem coni acutianguli, ea puncta lineis rectis iungantur. eritq; iam quædam figura in ipſa coni acutianguli ſectione inſcripta, quę figura ad rectilineam figuram circulo a e c f inſcriptam, eādem habebit proportionem, quā habet b d ad e f. quoniam e h, k l perpendiculares in eandem proportionem diuiduntur ſecundum m b: manifeſtum eſt, quod l e ſpacium tabulare, ad h m habet eam quam h e ad b h proportionem. eadem ratione & cætera ſpacia tabularia, unumquodq; eorum quæ ſunt in circulo, ad unumquodq; eorum quæ ſunt in ſectione coni acutianguli, eam habebit quæ eſt e h ad b h proportionem: habent quoq; trianguli qui ad a c exiſtunt, in circulo ad triangulos in ſectione coni acutianguli proportionem eandē. Tota igitur figura rectilinea circulo inſcripta a e c f, ad totam figuram rectilineam ſectioni coni acutianguli inſcriptam, habebit eandem proportionem quam e f habet ad b d. habet autem eadem ipſa figura rectilinea ad rectilineam circulo z inſcriptam, hanc eandem proportionem, quoniam circuli eandem proportionem inter ſe retinebant. Igitur rectilinea circulo z inſcripta, eſt æqualis rectilineæ ſectioni coni acutianguli inſcriptæ: quod quidē eſſe non poteſt, nā maior erat toto ſpacio à ſectione coni anguli acuti cōpræhenſo. Sed eſto item ſi fieri poteſt minor. Rurſus poteſt in ſectione coni acutianguli inſcribi figura paribus contenta lateribus, quæ maior ſit circulo z. Eſto igitur inſcripta, & ab angulis eius perpendiculares ducantur ad a c, & educātur ad circuli circumferentiam. Rurſus igitur erit, ut rectilinea circulo a e inſcripta, ad rectilineā ſectioni coni acutianguli inſcriptam, habeat eam proportionē, quam e f ad b d. ſi itaq; circulo z inſcribatur ſimilis illi, oſtendetur eam quæ in circulo z eſt inſcripta, æqualem illi eſſe quæ ſectioni coni acutianguli eſt inſcripta: quod ſanè eſſe non poteſt. Circulus igitur z neq; minor eſt ſpacio à ſectione coni acutianguli compræhenſo. Manifeſtum eſt igitur, quod dictum ſpacium habet ad a e c f circulum eandem proportionem, quam habet b d ad e f.

6 QVodlibet ſpacium à coni acutianguli ſectione compræhenſum, ad quemcunq; circulum comparetur, eam habet proportionem, quam ſuperficies ex utriſque eius ſectionis diametris producta habere percipitur, ad quadratum diametri eius circuli ad quem fuerit comparatũ. Eſto ſpacium à coni acutianguli ſectione compręhenſum, in quo q. eius ſectionis diametri ſint a c, b d maior autem a c: & eſto circulus in quo z, eius autẽ diametros in quo eſt e f. Eſt igitur demõſtrandũ, ſpacium q ad circulum z eam habere proportionem, quam ſuperficies producta ex a c diametro in b d habet, ad quadratum diametri e f. Circũſcribatur itaq; circulus ipſi a c diametro. Spacium igitur q, ad circulũ cuius diametros eſt a c, eam habet proportionem, quam ſuperficies ex a c in b d producta habet, ad quadratum diametri a c. circulus quoque cuius diametros eſt a c, ad circulum cuius diametros eſt e f, habet eandem proportionem, quam habet quadratũ a c ad quadratum e f. Ergo manifeſtum eſt, ſpacium q ad circulum z eam proportionem habere, quam ſuperficies ex a c in a d producta, habet ad quadratum e f.

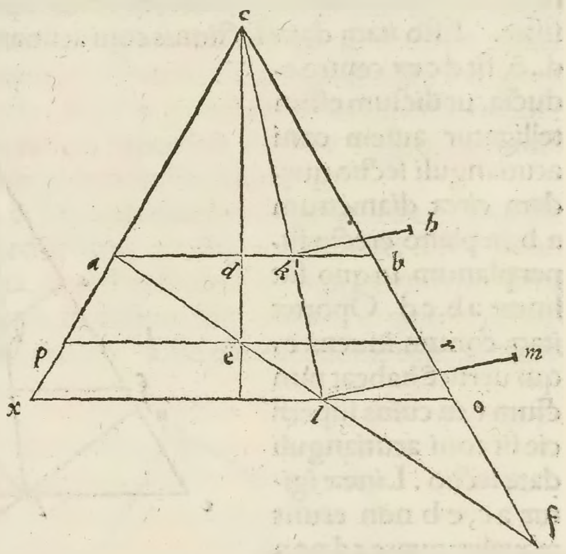


7 SPacia quæq; à coni acutianguli ſectione compræhenſa, ad alia quæq; ſpacia quæ à coni acutianguli ſectione compræhendantur comparata, eandem proportionem habere probantur, quam ſuperficies ex iſtorum diametris productæ, ad ſuperficies ex illorum diametris productas habuerit. Eſto ſpacia à coni acuti anguli ſectione cõpræhenſa, in quibus a b: eſto etiam c d ſuperficies producta ex diametris ſectionis a. eſto item e f ſuperficies producta ex diametris ſectionis b. Eſt itaq; declarandũ, ſpacium a ad ſpacium b, eandem proportionem habere, quam c d habuerit ad e f. Sumatur itaque quiſpiam circulus in quo z, quadratum diametri illius eſto k l: habet itaq; a ſpacium ad circulum z eandem proportionem, quam c d ad k l: circulus autem z ad b ſpacium eandem habet proportionem, quam k l ad e f. Manifeſtum eſt igitur, a ſpacium habere ad b ſpacium eã, quam c d ad e f habuerit proportionem. Ex hoc igitur manifeſtum eſt, quod ſpacia à ſimilibus ſectionibus coni acutianguli compræhenſa, eam inter ſe proportionem ſeruabunt, quam ſectionum diametri, quæ rationis eiuſdem fuerint, potentia inuicem retinebunt.



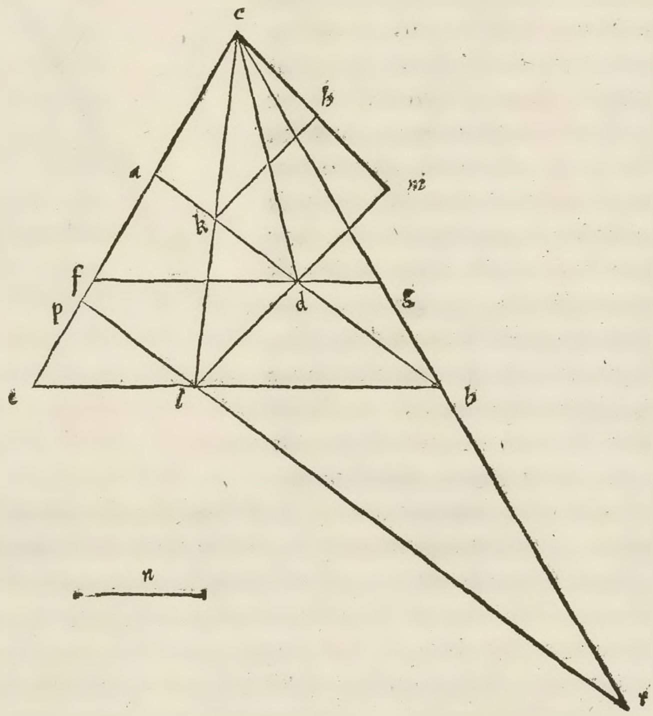
8 DAta coni acutianguli ſectione, & ab eius centro recta linea ſuper plano in quo dicta ſectio exiſtit, perpendiculariter erecta, fieri poteſt, ut conus quidã deprehendatur, qui uerticem habeat erectæ lineæ terminum, in cuius coni ſuperficie data coni ſectio compræhendatur. Detur aliqua coni acutianguli ſectio, & de eius centro recta linea ſuper planum perpendiculariter erigatur, in quo data ſectio

ctio continetur: per minorem uero diametrum & lineam erectam planum educatur, & sit in ipso minor diametros a b: centrum uero datæ sectionis d, linea à cētro erecta c d, eius terminus c. sectio autem coni acutianguli intelligatur circa diametrum a b descripta, in plano erecto a d, c d. Oportet itaq; conum inuenire, qui uerticem habeat punctum c, in cuius superficie sit coni acutianguli sectio. Ducatur autem à pūcto c ad a b recta, quæ educatur: & à puncto a ducatur a f, ita ut id quod fit ex a e in e f, ad quadratum e c, eam habeat proportionem, quam habet quadratum dimidiæ maioris diametri ad quadratum d c. hoc enim fieri potest, cum maior sit proportio ista, quàm ea quam habet id quod fit ex a d in d b, ad quadratum d c. Secūdum uero a f planum erigatur, erectum super planum in quo est a c, a f. in quo item plano circulus describatur circa diametrum a f, & ab hoc circulo conus fiat qui uerticem habeat pūctum c. in huius autem coni superficie demonstrabitur esse sectio coni acutianguli. Nam si non fuerit, necesse est punctum aliquod esse in sectione coni acutianguli, quod non erit in superficie coni. intelligatur itaq; punctum quoddam in sectione coni acutianguli sumptum, quod sit h, quod non sit in superficie coni, & ducatur ab ipso h perpēdicularis h k, erit igitur ipsa super plano erecta in quo est a c, a f. ducta itaq; linea recta à puncto c ad k, incidet iā ipsa lineæ a f. esto in pūcto l: et à pūcto l erigatur perpēdicularis super a f, quæ sit l m, in circulo circa a f descripto. intelligatur autem m eleuatum in circūferentia eius. ducatur autem et à puncto l æquedistans ipsi a b, quæ sit x o: à puncto autem e, ducatur p r. Quoniam igitur id quod sub e a & e f continetur, ad quadratum e c, eam habet proportionem, quam quadratum dimidiæ maioris diametri, ad quadratum d c: quadratum uero e c, ad id quod cōtinetur sub e p, e r, eam habet quam quadratū d c ad id quod fit ex a d in d b. Id igitur quod fit ex a e in e f, eā habet ad id quod ex p e in e r, quā quadratum dimidiæ maioris diametri habet ad id quod fit ex a d in d b. Est aūt sicut id quod fit ex a e in e f, ad id quod fit ex p e in e r: sic id quod fit ex a l in l f, ad id quod fit ex l x in l o. sicut autem quadratum dimidiæ maioris diametri, ad id quod fit ex a d in d b: sic quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b. Igitur eandem habet proportionem id quod fit ex a l in l f, ad id quod fit ex x l in l o: quam quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b. Habet autem id quod fit ex x l in l o, ad quadratum c l, eandem proportionem, quam id quod fit ex a k in k b, ad quadratum k c. Igitur id quod fit ex a l in l f, ad quadratum c l, eandem proportionem, quam quadratum h k ad quadratum k c. ei autem quod fit ex a l in l f, æquale est quadratum l m. nam in semicirculo circa a f descripto, ducta est l m perpendicularis. eandem igitur habet proportionem quadratum l m ad quadratum l c, quam quadratum h k ad quadratum k c. quare in eadem linea recta sunt puncta tria, c h m: ipsa uero c m linea est in superficie coni. manifestum igitur, quod punctum h in coni superficie existet. Suppositum autem fuerat, ibi non existere: nullum igitur punctum in sectione coni acutianguli est, quod non existat in superficie dicti coni.



ni. Tota ergo coni acutianguli ſectio in ſuperficie eiuſdem coni exiſtet.

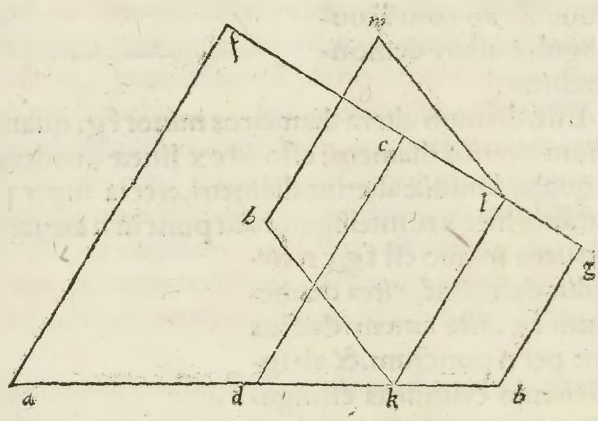
9 DAta coni acutianguli ſectione, & linea recta ex eius centro non perpendiculariter educta in altum, in plano quod ex altera diametro ſit erectum, ſuper plano in quo eſt coni acutianguli data ſectio, poteſt conus inueniri, qui uerticem habeat terminum lineæ eductæ, in cuius ſuperficie coni acutianguli ſectio data cōſiſtet. Eſto itaq; datæ ſectionis coni acutianguli diametros b a, centrum autem d. & ſit d c ex centro educta, ut dictum eſt: intelligatur autem coni acutianguli ſectio quędam circa diametrum a b, in plano erecto ſuper planum in quo ſūt lineæ a b, c d. Oportet itaq; conum inuenire, qui uerticē habeat punctum c, in cuius ſuperficie ſit coni acutianguli data ſectio. Lineæ igitur a c, c b non erunt æquales: quare c d non ſtat erecta ſuper plano, in quo eſt ipſius coni acutianguli ſectio data. Sit igitur ęqualis c e ipſi c b, eſto uero n recta æqualis dimidiæ alterius diametri, quæ eſt coniugalis ipſi a b, & per d ducatur f g ęquediſtans ipſi e b: ab ipſo



uero e b erigatur planum erectè ſtans ſuper planum in quo eſt a c, c b: & in hoc plano deſcribatur circulus circa diametrum e b, aut ellipſis. ſiquidem quadratum n eſt æquale ei quod fit ex f d in d g, fiat circulus. Sin autem fiat coni acutianguli ſectio talis, ut quadratum alterius diametri ad quadratum e b eandem habeat proportionem, quam habet quadratum n ad id quod fit ex d f in d g: deinde conus ſumatur, qui uerticem habeat punctum c, in cuius ſuperficie erit circulus: aut coni acutianguli ſectio circa diametrum e b. hoc enim eſſe poteſt, quoniam linea à puncto c ad mediam e b ducta, recta eſt ad planum quod eſt ſecundum e b conſtitutum. in hac itaq; ſuperficie ineſt etiam coni acutianguli ſectio circa diametrum a b. Si non exiſtit in dicta ſuperficie, dabitur aliquod punctum in coni acutianguli ſectione, quod non erit in dicta ſuperficie coni. Intelligatur quoddam huiuſmodi punctum ſumptum h, quod non ſit in dicta coni ſuperficie: & à puncto h ducatur perpendicularis h k ſuper a b: iuncta uero c k extra ducatur, & coincidat e b in puncto l. per punctum uero l ducatur quædam in plano erecto ſecundum e b perpendicularis ſuper e b, quæ ſit l m: ipſum autē m punctum intelligatur eleuatum ſuper ſuperficiem coni, & ducatur per punctum l æquediſtans ipſi a b linea p r: erit iam ſicut quadratum n ad id quod fit ex f d in d g, ita quadratū l m ad id quod fit ex e l in l b. uerum ſicut id quod fit ex f d in d g, ad id quod fit ex a d in d b: ita quod fit ex e l in l b, ad id quod fit ex e l in l r. erit igitur ſicut quadratū n, ad id quod fit ex a d in d b, ita quadratū l m, ad id quod fit ex p l in l r. ſicut autē qua-

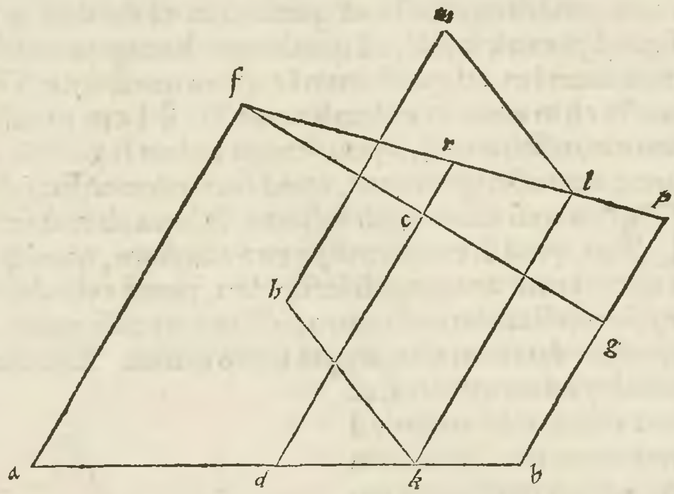
quadratum n, ad id quod fit ex a d in d b, ita quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b, quoniam in eadem coni acutianguli sectione ductæ sunt perpendiculares super diametrum a b. eandem igitur proportionem habet quadratum l m, ad id quod fit ex p l in l r, quam habet quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b. habet autem quod fit ex p l in l r ad quadratum c l eandem proportionem, quam habet id quod fit ex a k in k b, ad quadratum k c: igitur eandem proportionem habet quadratum l m, ad quadratum l c, quam quadratum h k ad quadratum k c, quare puncta c h m erunt in eadem linea recta. sed c m puncta sunt in superficie coni: quare manifestum est, h punctum in eadem superficie existere. suppositum autē fuerat, non esse: igitur patet, quod fuerat demonstrandum.

DAta coni acutianguli sectione, & linea ab eius sectionis centro erecta in pla no, quod sit ex altera diametro eductum, quodq; erectum stet super plano 10
in quo est coni acutianguli sectio data, potest cylindrus effingi, qui axem habeat directè iunctum lineæ à centro sectionis, ut dictum fuit, erectæ, in cuius cylindri superficie data coni acutianguli sectio existat. Esto datæ sectionis coni acutianguli altera diametros b a, cētrum eius d. esto autem c d linea ex centro, ut dictum fuit, erecta: intelligatur autem coni acutianguli sectio circa diametrum a b in plano illo constituta, quod stet erectū super plano, in quo sunt lineæ a b, c d. oportet itaque cylindrum effingere, qui axem habeat in directū lineæ c d coniunctum, in cuius cylindri superficie data coni acutianguli sectio existat.

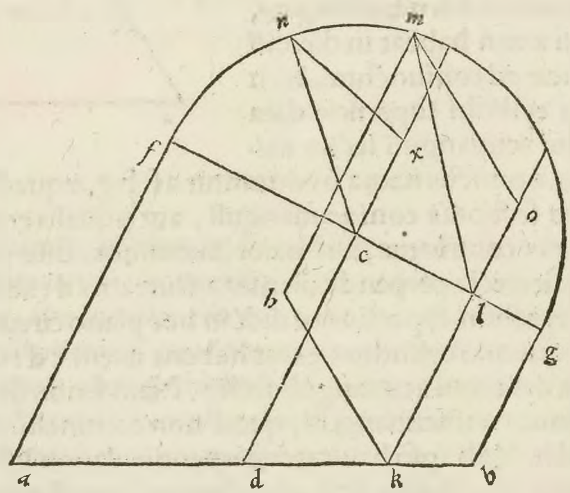


à punctis itaq; a b educantur a f, b g, æquedistantes ipsi c d: altera iam diametros sectionis coni acutianguli, aut æqualis erit interuallo quod inter a f & b g lineas continetur, aut maior, aut minor. Esto primum æqualis f g lineæ, & linea f g sit erecta perpendiculariter ad lineam c d: ab ipsa uero f g exeat planum, quod sit erectum super linea c d: & in hoc plano circulus esto circa diametrum f g, & ab hoc circulo cylindrus exeat habens axem c d: in superficie igitur huius cylindri erit data coni acutianguli sectio. Nam si non sit, dabitur aliquod punctum in sectione coni acutianguli, quod non continebitur in superficie dicti cylindri. sit illud h, & ab ipso h ducatur perpendicularis h k super a b: erit autem ipsa erecta super plano, in quo sunt a b, c d lineæ. à puncto uero k ducatur k l æquedistans ipsi c d, & à puncto l erigatur l m perpendiculariter ad f g, in circulo circa f g cōstituto. intelligatur autem m eleuatum in superficie semicirculi eius qui est circa diametrum f g. habet itaq; eandem proportionem quadratum h k perpendicularis, ad id quod fit ex a k in k b: & quadratum f c, ad id quod fit ex a d in d b. quoniam f g est æqualis alteri diametro. Habet autem & id quod ex f l in l g, ad id quod fit ex a k in k b, eam quam habet quadratū f c ad quadratū a d ellipsis: quare id quod fit ex f l in l g, æquatur quadrato h k, & etiam idem æquale quadrato l m: æquales igitur h k & l m perpendiculares erunt: quare lineæ l k & m h sunt æquedistātes. atq; ideo d c & m h, æquedistantes erunt. unde & in superficie cylindri erit h m, quoniam ab m puncto in superficie cylindri constituto ducta est m h, æquedistans axi. ex quo sequitur, punctum h in eadem existere superficie. Fuerat suppositū, non sic esse, unde patet id, quod oportuit demonstrare. Clarum iam est, quod cylindrus compræhendens ellipsim, erit erectus, si altera diametros æqualis fuerit interuallo, quod interiacet inter lineas ab extremis alterius diametri ductas, ipsi lineæ ex centro erectæ æquedistantes.

Esto item altera diametros maior f g. et esto æqualis f p linea alteri diametro: ab ipsa autē p f erigatur planum erecte, stās super plano, in quo est b c d: & in hoc plano esto circulus circa diametrū p f. ab hoc circulo prodeat cylindrus, qui axem habeat d r. in superficie itaq; cylindri huius eadem ratione sectio coni acutianguli existere demonstrabitur.



Esto demum altera diametros minor f g. quantum maius potest f c, quàm dimidium alterius diametri: esto id c x lineæ quadratum. & à puncto x erigatur linea æqualis dimidiæ alterius diametri, erecta super plano in quo sunt lineæ rectæ a b c d, sitq; hæc x n. intelligatur aūt punctū n eleuatū. c n igitur erit æqualis c f. in plano uero in quo est f g, c n circulus describať, circa diametrum f g. iste autem ductus erit per n punctum. & ab ipso circulo cylindrus effingatur, qui axem habeat c d: in superficie itaq; huius cylindri sectio coni acutianguli existit. Sin autem non sic, dabitur aliquod punctum in sectione coni acutiāguli, quod nō erit in superficie cylindri. esto illud h, & ducatur h k perpendicularis super a b, & à puncto k ducatur k l æquedistans lineæ c d. & à puncto l ducatur erecte l m super f g in semicirculo circa diametrum f g constituto. intelligatur autem punctum m eleuatum in arcu semicirculi circa f g constituti, super semicirculum circa f g constitutum. & à puncto m ducatur m o, perpendicularis super lineam k l eductam. erit aūt hæc erecta super plano in quo sunt a b, c d, quia est linea k l erecta perpendiculariter super lineam f g. est itaq; sicut quadratū m o ad quadratū m l, ita quadratum n x ad quadratum c n: sicut autem quadratum m l, ad id quod fit ex a k in b k, sic quadratum c n ad quadratum a d. quia quadratum m l est æquale ei quod fit ex f l in l g: quadratū uero c n quadrato c f æquatur. erit igitur sicut quadratum m o, ad id quod fit ex a k in k b, sic quadratū x n, ad quadratum a d. Est aūt & quadratū k h, ad id quod fit ex a k in k b, sicut quadratū x n ad quadratum a d: quia x n est æqualis dimidiæ alterius diametri, patet quod lineæ perpendiculares m o, h k, erunt



erunt æquales: quare o k & h m erunt æquales. quoniam autem m h est ducta æquedistans axi in cylindro, et punctum m est situm in superficie eius, necesse est et lineam m h in cylindri esse superficie collocatam. manifestum est igitur, quod & h punctum in eadem superficie continetur. Sumptum autem fuerat, non contineri in illa. Constat ergo necessarium esse, sectionem coni acutianguli in superficie cylindri contineri.

OMnis coni ad quemcunque conũ proportionem compositam esse ex proportione basium inter se, & ex proportione altitudinum, demonstratur ex his quæ prius sunt ostensa: & quod omnis abscisio coni ab abscisione coni, habet proportionem compositam ex proportione basium & proportione altitudinum: & quod omnis sector cylindri triplus est ad abscisionẽ coni quę basim habeat eandem cum sectore, & eandem altitudinem. Eadem enim est demonstratio, & eius quod cylindrus est triplus ad conum, qui basim eandem, & altitudinem habeat eandem cum cylindro. 11

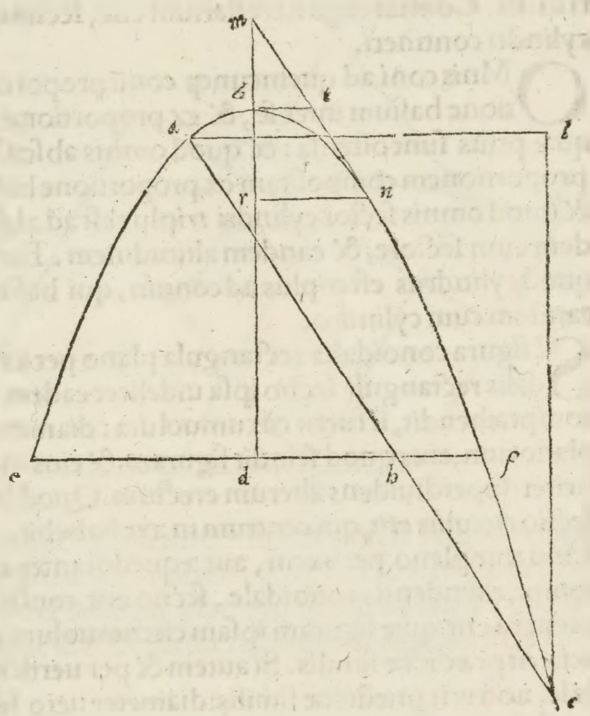
SI figura conoidalis rectangula plano per axẽ ducto scindatur, sectio erit conoidalis rectanguli sectio ipsa uidelicet eadem, quæ ipsam figuram conoidalem comprætendit, si fuerit circumuoluta: diametros eius erit cõmunis sectio duorũ planorum, eius quod scindit figuram, & eius quod per axem ducitur perpendiculariter, superdiuidens alterum erectum. Quod si secetur plano super axem erecto, sectio circulus erit, qui centrum in axe habebit. Si conoidale obtusiangulum scindatur plano per axem, aut æquedistanter axi ductum, aut per uerticem coni comprætendentis conoidale, sectio erit coni obtusianguli sectio. Siquidem per axem ea erit quæ figuram ipsam circumuoluta describit. Si autem æquedistanter axi, erit prædictæ similis. Si autem & per uerticem coni comprætendentis conoidale, non erit prædictæ similis: diameter uero sectionis erit communis sectio planorũ, diuident * figuram, & eius quod per axem ducatur erectum super planum diuidens. 12

Si conoidale secetur plano super axem erecto, sectio erit circulus, cuius centrũ est in axe situm.

Si quæcunque sphæroidũ figurarum scindatur plano per axem, aut æquedistanter axi ducto, sectio erit coni acutianguli sectio: quod si per axem, eadem erit quæ figuram ipsam circũuoluta describit: si autem æquedistanter axi, erit illi similis. eius uero diametros erit sectio cõmunis duûm planorũ: eius quod secat, et eius quod per axem ducitur erectum super planum secans. Si autem secetur plano super axem erecto, sectio erit circulus, cuius centrum in axe situm habetur. Si autem quæcunque dictarum figurarum plano per axem ducto secetur, lineæ à punctis quæ in figuræ superficie sunt, non in sectione sita ductę perpendiculariter, ad planum secans intra sectionem figuræ cadent. Horum autem omnium demonstrationes sunt manifestæ.

SI conoidale rectangulum plano secetur, neque per axem, neque æquedistanter axi ducto, neque super axem erecto, sectio erit coni acutianguli sectio. eius maior diametros erit pars in conoidali deprehensa: pars dico sectionis communis duûm planorum, eius quod figuram secuerit, & eius quod per axem ductum, erectum super secans planum: minor uero eius diameter erit æqualis interuallo inter illas duas comprætensio, quæ ab extremitatibus maioris diametri ductæ sint axi æquedistantes. Secetur itaque conoidale rectangulum plano, uti dictum est, ipso eodem prius scisso à plano per axem ducto, & erecto super planum secans. 13
Esto conoidalis sectio a b c, plani autem figuram secantis sit c a linea recta: axis autem conoidalis sit, & diametros sectionis b d. Ostendendum est, sectionem conoidalis quæ à plano circa a c fit, esse coni acutianguli sectionem: & maior eius diametros est a c, minor autem diametros æqualis est ipsi a l, cum c l fuerit ipsi b d ęquedistans,

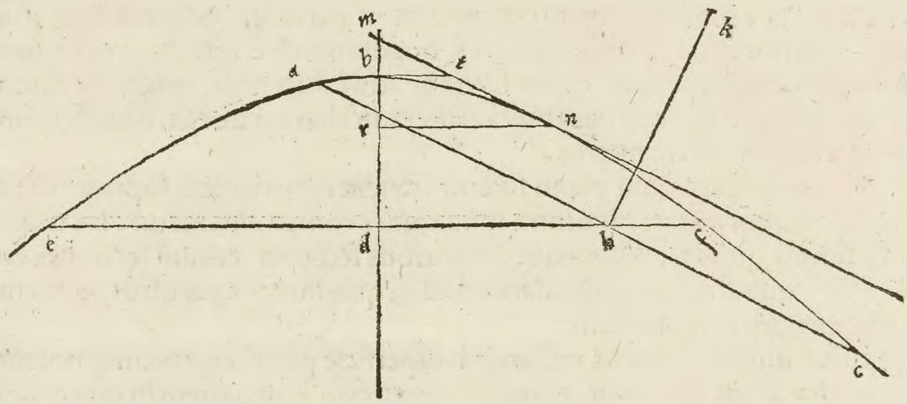
ſtans, & a l fuerit ſuper c l ducta perpendicularis: intelligatur aliquod punctum k in ipſa ſectione ſumptum, & à puncto k ducatur k h perpendicularis ſuper c a: erit igitur k h erecta ſuper plano perpendicularis, in quo eſt a c b coni rectanguli ſectio, quia & planum ſecans ſtat erectũ ſuper eodem plano. per h autem ducatur e f, quæ faciat angulos rectos ſuper b d, & per e f & k h rectas lineas extra ducatur planum: erit autem hoc erectum ſuper lineam b d. diuiditur itaq; figura conoidalis plano ſuper axem erecto, quare ea ſectio circulus erit cuius centrũ eſt d. igitur k h, æquum poterit ei quod fit ex f k in k e. nã quod eſt ſuper e f, ſemicirculus eſt: & k h, in eo eſt perpendicularis. nã eius quod fit ex e h in h f, eſt media proportionalis. ducatur aũt contingens coni ſectionem linea m n, æquediſtans ipſi a c. cõtingat uero in puncto n: ducatur item b t, æquediſtans ipſi e f. id itaq; quod fit ex a h in c h, ad id quod fit ex e h in h f, eandem habet proportionem, quam quadratum n t ad quadratum b t:



hoc enim oſtenſum eſt. linea uero n t æqualis eſt lineæ t m: quoniã & b r, ipſi b m eſt æqualis. habet igitur id quod fit ex a h in h c, ad quadratum k h, eandem proportionem quam quadratum t m ad quadratum t b. quare & quadratum perpẽdicularis h k, ad id quod fit ex a h in h c, habet eandem proportionem, quam quadratum b t ad quadratũ t m. Quoniã igitur trianguli c a l, t m b ſunt ſimiles, ſimiliter oſtendentur quadrata, quæ fiũt ab alijs perpendicularib. ductis à ſectione ad a c, ad ea quæ fiũt ex partibus a c, altera in alterã ductis, eandẽ habebũt proportionẽ, quã quadratũ a l ad quadratum a c. unde manifeſtũ eſt, quod ſecto eſt coni acutianguli ſectio: eius uero maior diametros eſt a c, minor uero æqualis ipſi a l.

14 Si conoidale obtuſiangulum plano ſecetur, coincidenti omnibus lateribus figuræ compræhendentis conoidale, ſitq; ipſum planum non ſuper axem erectum, huiuſmodi ſectio erit coni acutianguli ſectio, eiuſq; maior diametros erit linea intra conoidale deprehenſa, quæ pars eſt ſectionis duûm planorum: eius uidelicet quod eſt ſecans, & eius quod per axem conoidalis ductum eſt, erectum ſuper planum ſecans. Secetur itaq; conoidale obtuſiangulum, ut dictum eſt, & alio item plano ducto per axem, & erecto ſuper planum ſecans, ſectio uero conoidalis eſto a b c, coni obtuſianguli ſectio: plani autem ſecantis figuram ſit linea recta a c, axis autem conoidalis & diametros ſectionis b d. intelligatur iam punctũ aliquod k in ſectione ſumptum, & à puncto k ducatur k h perpendicularis ſuper a c: ipſa iam erit erecta ſuper plano in quo eſt a b c ſectio coni: per punctum uero h ducatur perpendiculariter e f ad b d, & per e f & k h lineas rectas planũ ducatur ſecans conoidale, ſecabitur iam planum recto ſuper axem. quare huiuſmodi ſectio erit circulus, cuius centrum eſt d: igitur k h perpendicularis, æquum poterit ei quod fit ex h e in h f. Ducatur item m n æquediſtans ipſi a c, & contingens ſe-

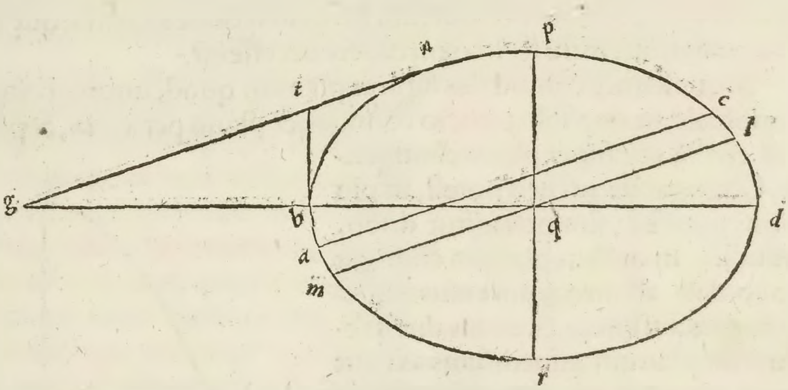
sectionem coni in puncto n, ducatur b t æquedistans ipsi e f. Id iam quod fit ex e h in h f, ad id quod fit ex a h in h c, eādem habet proportionem, quam quadratū b t, ad quadratum t n. quare quadratū k h perpendicularis ad id quod fit ex a h in h c,



eam habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n. Similiter igitur ostenditur, quod & quadrata aliarū perpendicularium, quæ à sectione ad a c ducentur, ad ea quæ fiunt ex partib. a c, altera in alteram ductis, quæ partes ab ipsis fiunt perpendicularibus, eam habent proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n. & b t, minor est ipsa t n, quoniam & m t minor est ipsa t n: etenim m b minor est b r. Hoc enim est in sectionib. coni obtusianguli accidens. Constat igitur, sectionem esse coni acutianguli sectionem, & maior eius diametros a c. Similiter exeunte n r perpendiculari in sectione coni obtusianguli, diametros eius maior erit c l.

SI sphæroides oblongum plano secetur super axem non erecto, sectio huiusmodi erit coni acutianguli sectio, eius maior diametros erit linea quæ pars cōmunis sectionis duûm planorum existit, eius quod secat, & eius quod per axem ductum est, erectum super planum secans, quæ linea intra sphæroides in secando intercipitur. 15

Si enim secetur per axem, aut axi æquedistāter, manifestum est. Secetur autem alio plano per axem ducto, erecto super alterum secans, & esto sphæroidis sectio a b c d, sectio coni acutiāguli: plani autem secantis esto c a linea recta. axis autē sphæroidis, & diametros sectionis coni acutianguli esto b d, centrum autem q, & minor diametros esto p r: Ducatur autē b t perpēdicularis ad b d, & g n æquedistans ipsi a c, cōtingens coni acutianguli sectionem in puncto n. ducatur & m l per punctum q, æquedistās ipsi a c. Similiter iam his quæ prius dicta sunt ostendetur, quadrata perpendicularium earum quæ à sectione ad a c ducuntur, ad ea quæ fiunt ex partibus a c altera in alteram ductis, eandem habere proportionem, quam quadratum b t ad quadratum



k dratum

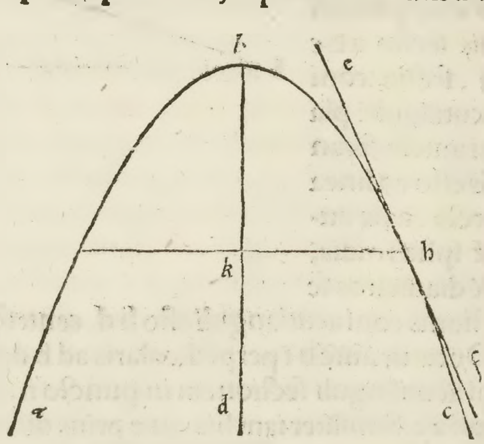
dratum t n. quod itaque huiusmodi sectio sit coni acutianguli sectio, patet: & quod diametros eius sit a c, item patet. Quod autem sit maior, ostendendum est. quod enim fit ex p q in q r, ad id quod fit ex m q in q l, eandem habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum n t: quia æquedistantes contingentibus sunt m l, & r p. minus autem est quod fit ex p q in q r, eo quod fit ex m q in q l, cum r q minor sit q l. Minus igitur est quadratum b t, quadrato m t: quare & quadrata perpendicularium, quæ à sectione ad a c ducentur, uel ductæ sunt, minora erunt his quæ fiunt ex partibus a c, altera in alteram ductis. Manifestum igitur, quod a c est maior diametros.

Si sphæroides prolatum plano secetur, cætera erunt eadem supradictis: diametros uero minor erit, ea quæ intra sphæroides comprehendetur. Ex istis autē manifestum est, quod si planis æquedistantibus secentur, eorum sectiones erunt similes. Nam quadrata perpēdicularium ad ea quæ fiunt ex partibus, eandem inter se proportionem retinebunt.

16 SI in cuiuscunque conoidis rectanguli superficie puncta quæcunque notentur, lineæ quæ ab eis ducentur, æquedistantes axi in eam partem in qua conoidis conuexa sunt, extra ipsum conoides cadunt: quæ autem in alteram partem trahuntur, eas intra ipsum cadere necesse est. Ducto enim plano per axem et per pūctum, à quo æquedistās axi ducta est, huiusmodi sectio est coni rectanguli sectio, diametrus uero eius axis conoidis. Verum in sectione coni rectanguli à quocunque signo in sectione sito, lineæ ducantur axi æquedistātes, quæ uersus eam partem in qua sunt eius conuexa trahuntur, extra sectionem cadere necesse est: quæ uero in alteram, intrà cadunt. patet igitur propositum.

In conoidali obtusiangulo à quocunque puncto in superficie eius sito lineæ ducantur, æquedistātes lineæ cuipiam quæ in conoidali existit, ducta à uertice coni eius qui conoidale complectitur, quæ in eam partem ducentur in qua eius conuexa existunt, extra conoidale cadunt: quæ uero in alteram partem, intra cadere necesse est. Ducto enim plano per lineam quæ à uertice coni complectentis conoidale intra conoidale ducta sit, & per punctum à quo ducitur æquedistans illi, huiusmodi sectio erit sectio coni obtusianguli, diametros eius linea quæ à uertice coni intra conoidale ducta est. In sectione autem coni obtusianguli, à quocunque puncto in sectione sito ducantur lineæ æquedistantes, lineæ sic ductæ à uertice quæ in eam partem ducentur, ubi sunt eius conuexa, extra: quę uero in alterā partem trahentur, intra sectionem cadere necesse est.

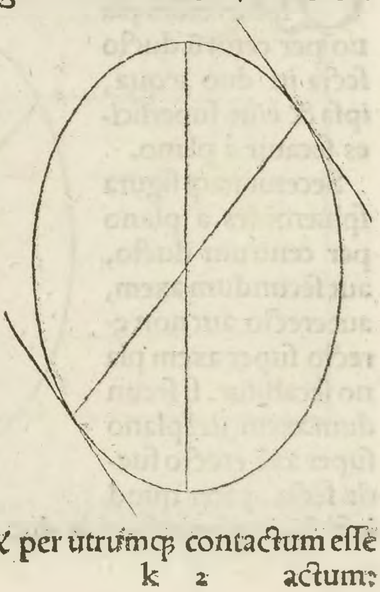
Si quascunque conoidales figuras planum quodcunque contingat, non scindēs conoidale, in uno solo puncto cōtinget, & planū per axem, & per contactum ductū, erectū erit super plano cōtingente. Cōtingat itaque si fieri potest, in pluribus punctis: sumptis igitur duob. punctis, in quibus planum cōtingat conoidale, ab utroque ducemus æquedistantes axi lineas, & ab his ductis educetur planum æquedistans axi. aut enim per axem, aut ęquedistanter axi ductum erit. quare sectionem faciet coni sectionem, & pūcta erunt in coni sectione sita. quoniam igitur sunt in una superficie, & in plano linea recta, quæ inter illa cadit, erit intra coni sectionem: quare & intra conoidalis



superficiem existat, ipsa uero eadem recta linea est in plano contingente, quia & puncta pũcta in ea sunt. erit igitur ut aliquid plani contingentis sit intra conoidale, quod esse non potest. nam supponebatur, non secare: in uno igitur solo puncto contin get. Quod autem planũ per contactum & per axem ductũ, erectum sit super contingens planum. Si enim in puncto uerticis conoidale cõtingat, patet. nam duobus planis per axem ductis conoidalis sectionis, erunt coni sectiones, quæ diame trum habent ipsum axem: lineæ uero plani contingentis sunt, quæ sectiones conorum contingunt in extremitate diametri, quæ angulos rectos faciũt diametro sectionum. erunt igitur in plano contingenti duæ lineæ rectæ, angulis rectis ad axem directæ: erit igitur planum ipsum super axem erectũ. quare & planum per axem ductum, erit super illud erectum. Sed esto non contingat in uertice conoidalis planum. ducatur iam planum per contactum & axem, & sectio conoidalis sit b c coni sectio, axis autem sit & diametros sectionis b d: contingentis autem plani sectio sit e h f, linea recta contingens coni sectionem in puncto h: & perpẽdicularis ab ipso h ducatur h k ad b d, & planum statuatur erectum super axem. efficiat autem hoc planum sectionem, circulum cuius centrum sit k, sectio autem communis huius & contingentis plani erit contingens circulum: ergo faciet angulos rectos ad h k. quare erecta erit super plano, in quo sunt k h, b d. Cõstat igitur, planum contingens esse erectum super plano, cũ & lineæ rectæ sint in eodẽ.

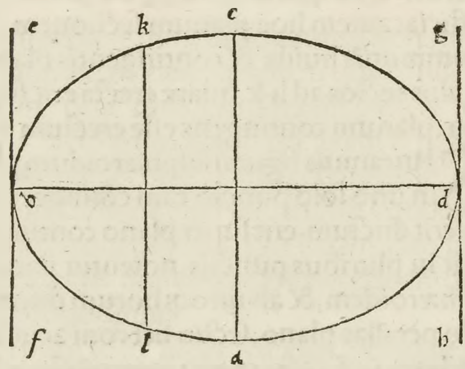
SI utramuis figurarũ sphæroidum planum contingat, nõ scindendo figuram, 17
in uno solo puncto eam cõtinget: & id planum quod per axem & cõtactum fuerit ductum, erit super plano contingenti erectum. Esto, si fieri potest, contin gat in pluribus punctis. notentur itaq; hæc puncta, in quibus planum contingit sphæroidem, & ab utroq; horum ducantur lineæ rectæ æquedistantes axi: & ducto per illas plano, sectio fiet coni acutianguli sectio, & pũcta erũt in sectione co ni: linea igit recta media inter pũcta, erit intra coni sectionem: quare & intra sphæ roidis superficiem existet. ipsa autem recta linea in plano cõtingente situatur, quo niam & puncta sita sunt in eodẽ: plani igitur contingentis aliquid erit intra sphæ roidem, non est aũt hoc uerum. nam suppositum fuit, planum nõ secare sphæroi dem. Igitur manifestum est, quod in uno solo puncto contingit. Quod autem pla num per axem & contactum actum, sit erectum super plano contingente, similiter sicut in conoidali figura ostensum fuit, & in hoc demonstrabimus.

Si & sphæroidum figurarum utrauis plano scindatur, per axem ducto, & sectionem inde factam aliqua contingens linea recta ducatur, & per contingentem planum statuatur erectum super plano quod secet figuram, continget figuram se cundum idem punctum, in quo linea eam contingit sectionem coni. non enim in alio puncto superficiei suæ eam cõtinget. Sin autem ducta perpendicularis à pũcto super planum scindens, incidet intra coni sectionem: nã super cõtingentem cadet, quoniam plana alternatim alterum super altero sunt erecta: quod esse non potest. nam ostensum est quod intra cadet.



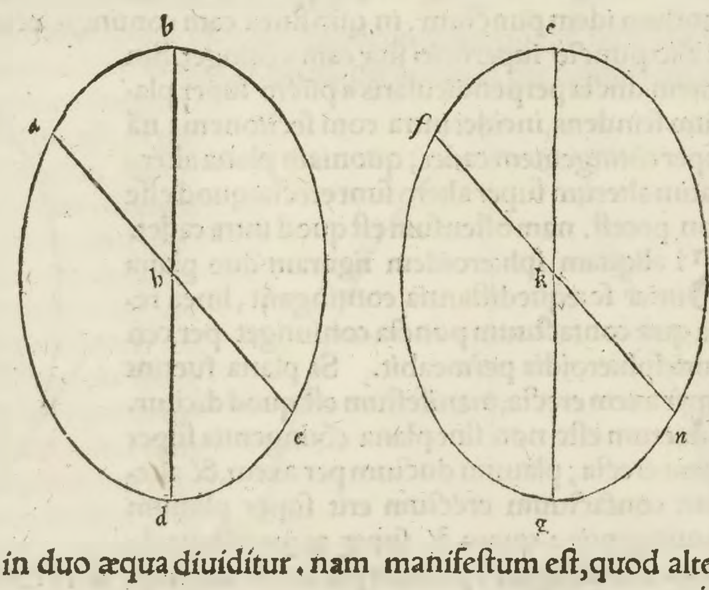
SI aliquam sphæroidem figuram duo plana inter se æquedistantia contingant, línea recta quæ contactuum puncta coniunget, per cen trum sphæroidis permeabit. Si plana fuerint super axem erecta, manifestum est quod dicitur. Cæterum esto non sint plana cõtingentia super axem erecta, planum ductum per axem, & alterum contactuum erectum erit super planum contingentis: quare & super æquedistans illi. necesse est igitur, planum per axem ductum, & per utrumq; contactum esse 18 actum: ſi autem non, erunt duo plana ſuper idem planum erecta, per eandem lineam ducta, quæ non ſit ſuper planum erecta. nam ſuppoſitum eſt, axem non eſſe erectum ſuper plana æquediſtantia. in eodem igitur erunt plano, axisq; & cõtactus ipſi, & ſecta erit ſphæroides ſuper axem: ſectio igitur huiuſmodi erit coni acutianguli ſectio: ſectiones autem planorum contingentium æquediſtantes erunt, quæ contingent coni acutianguli ſectiones in contactibus planorum. & ſi duæ rectæ lineæ inter ſe æquediſtantes contingant coni acutianguli ſectionem, centrum ſectionis coni acutianguli, & puncta contactuum in eadem recta linea erunt ſita.

19 SI quamcunq; figuram ſphæroidem duo plana æquediſtantia contingant, ducatur autem planum quoddam per centrum ſphæroidis, æquediſtans planis contingentibus lineæ rectæ, quæ ex facta ſectione ducentur æquediſtantes ei lineæ quæ ipſos contactus coniungat, extra ſphæroidẽ cadẽt. Supponant̃ quæ dicta ſunt, & notetur pũctum aliquod in ſectione facta. Ex puncto igitur notato, & ex linea recta quę iungit cõtactus, ducatur planum. ſcindet autẽ hoc & ſphæroidem, & plana æquediſtantia. Eſto igitur ſphæroidis ſectio a b c d, coni acutianguli ſectio: ſectiones autem planorum cõtingentium, ſint e f, g h lineę rectæ. ſignum autem notatum a. ea uero quæ contactus cõiungit, ſit b d. Ipſa igitur per centrũ tranſibit. ſectio uero plani æquediſtãtis contingentibus eſto a c. ipſa quoq; in centrum cadet. nam et planum ipſum in quo ipſa eſt, per centrũ trãſit. Quoniã igitur a b c d, uel circulus eſt, uel coni acutianguli ſectio, & ipſam contingunt duę rectæ e f g h, per centrum autem ducta eſt eis æquediſtans a c: manifeſtũ eſt quod ductæ à punctis a c, æquediſtantes ipſi b d, contingent ſectionem, & extra ſphæroidẽ cadent. Si aũt planum æquediſtans punctis contingentib. non ſit per centrum actũ, eſto k l. manifeſtũ eſt, illæ quæ à recta ex ſectione facta in eam partem efficientur, in qua portio minor exiſtat, extra ſphęroidem cadent: quę autem in alteram partem ducentur, intra ſphæroidem cadere oportere probatum eſt.



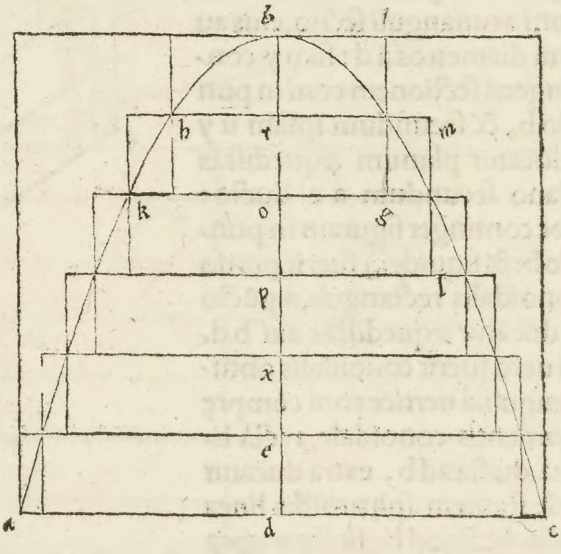
20 QVælibet figura ſphæroides plano per centrũ ducto ſecta in duo æqua, ipſa & eius ſuperficies ſecatur à plano.

Secetur itaq; figura ſphæroides à plano per centrum ducto, aut ſecundum axem, aut erecto, aut non erecto ſuper axem plano ſecabitur. ſi ſecundum axem, uel plano ſuper axẽ erecto fuerit ſecta, patet quod ipſa & eius ſuperficies in duo æqua diuiditur. nam manifeſtum eſt, quod altera eius



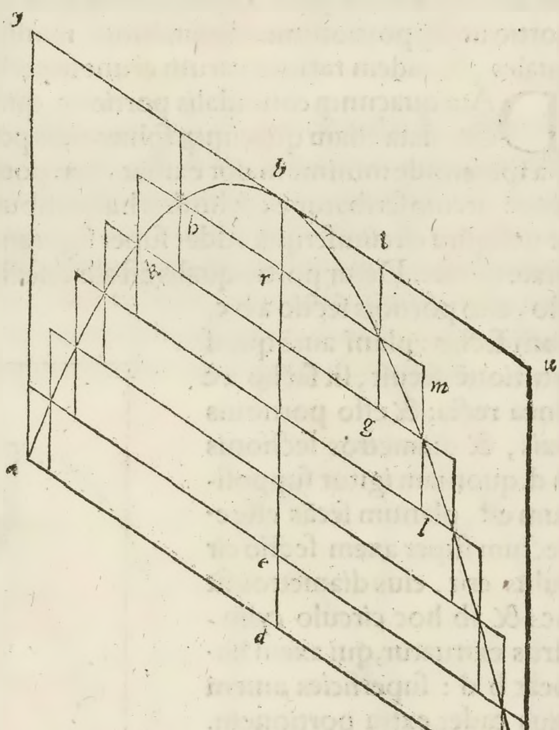
eius pars alteri coaptaẽ, & alterius partis superficies superficiei alterius. Sed esto non secundum axem, neq; plano super axem erecto secetur: secta ipsa sphæroide à plano super primum planum secans erecto, sit sectio a b c d, coni acutianguli sectio: eius diametros & axis sphęroidis esto b d, & centrũ h: plani aũt quod per centrũ sphæroidẽ diuiserit, esto sectio a c linea recta. Sumatur item altera sphæroides huic similis & ęqualis, & secta ipsa secundũ axem à plano, esto eius sectio e f g n, coni acutianguli sectio: diametros uero eius & axis sphæroidis esto e g, centrum k. & per k ducatur f n, faciens angulum k æqualem angulo h: à linea uero f n, educatur planum erectum super planum in quo est e f g n sectio: erunt iam conorum acutianguli sectiones a b c d, f g n, æquales & similes. aptatur itaq; altera alteri, posita e g super b d, & f n super a c. aptatur etiam planum quod est secundum n f, plano quod est secundum a c: quoniam ab eadem linea super idem planũ consistit utrumq;. aptabitur ergo & portio secta ex sphæroide à plano secundum n f constituto, quæ est in parte ubi est e, alteri portioni sectę ex altera sphæroide à plano secundum a c ducto, quæ est in parte in qua est b: & reliqua sectio reliquæ sectioni, & superficies portionum superficiebus similiter. Rursus e g posita super b d, sic ut e super d situm sit, & g super b, linea media inter punctum f n, super lineam inter puncta a c constituta: manifestum est, quod & conorum acutianguli sectiones inuicẽ aptabunẽ altera super alterã, & f cadet super c, & n super a. similiter autem & planum quod est secundum n f, aptabitur plano secundum a c ducto: & portionum quæ à plano secundum n f ducto sectæ sunt, illa quidem quæ ad partem g, aptabitur portioni à plano secundũ a c acto sectæ, quæ est in parte b. illa uero quæ est in parte e, aptabitur illi quæ est in parte d. quoniam igitur eadem portio utriq; portionum adæquabitur, manifestum est quod portiones erunt æquales, & eadem ratione earum erunt superficies æquales.

DAta quacunq; conoidalis portione, quæ sit abscisa à plano super axem erecto, data etiam quacunq; sphæroidis portione similiter abscisa, quæ dimidia sphæroide minime maior existat, fieri potest ut portio solida una ei inscribaẽ, altera circumscribatur ex cylindris habentibus altitudinem æqualem confecta, ita ut figura circumscripta addat super figuram inscriptam, quacunq; solida quantitate minus. Detur portio qualis est a b c: secta aũt ipsa plano secundum axẽ ducto, esto portiõis sectio a b c, coni sectio: plani autẽ quod portionẽ secuit, sit sectio a c linea recta: & esto portionis axis, & diametros sectionis b d. quoniam igitur suppositum est, planum secãs esse erectum super axem, sectio circulus erit. eius diametros sit a c: & ab hoc circulo cylindrus extruatur, qui axem habeat b d: superficies autem eius cadet extra portionem. quia est aut conoidale, aut sphæroides, non maius dimidio sphæroide. hoc cylindro assiduẽ in duo æqua secto, à plano super axem erecto, fiet tandem ut residuum erit solida quantitate data minus. Esto reliquum ab eo cylindrus, qui basem habeat circulum circa diametrum a c constitutum, axem autẽ e d: 21



minorq; ſit data quantitate ſolida. diuidatur itaq; b d in partes æquales e d, punctis r o p x: & à diuiſionibus ducantur lineæ rectæ æquediſtantes ipſi a c ad coni ſectionem. ab his autem ductis, educantur plana erecta ſuper b d: erunt igitur quæ inde fient ſectiones, circuli quorum centra erunt in b d linea. ab utroq; itaq; horum circulorum duo cylindri extruantur, quorũ uterq; habeat axem æqualem ipſi e d, alter quidem in parte cylindri uerſus d, alter uero in parte uerſus b, erit iã quædam in portione ſolida figura inſcripta ex cylindris cõpoſita, qui in eam partem effecti ſunt in qua eſt d: & altera item circumſcripta, compoſita ex illis cylindris, qui in partem in qua eſt b, ſunt ducti. Reliquũ eſt ut oſtendamus, quod circumſcripta addit ſuper inſcriptam, data ſolida quantitate minus. Vnuſquiſque ergo cylindrorum qui figuræ ſunt inſcripti, eſt ęqualis cylindro qui ab eodem circulo uerſus partem b exeat, ſicut h g ipſi h i, & k l ipſi k m, & reliqui tantundem, & omnes cylindri omnibus ſunt æquales. manifeſtum eſt igitur, quod figura circumſcripta inſcriptam ſuperat cylindro, qui baſim habet circulum circa diametrũ a c conſtitutum, axem uero e d. hic autem minor eſt ſolida quantitate propoſita.

22 Portione conoidalis quacunq; data, quæ à plano ſuper axem non erecto abſciſa fuerit, & data item ſphæroidis portione quacunq;, ſimiliter abſciſa, quæ dimidia ſphæroide minime maior exiſtat, fieri poteſt ut altera portioni inſcribatur ſolida figura, altera uero circũſcribatur ex cylindris, ſectionibus, altitudinem altitudini ſectionis æqualem habentibus compoſitam: hoc pacto, ut figura circũſcripta addat ſuper inſcriptam minus quacunq; ſolida quantitate data. Detur portio qualis dicta eſt: ipſa uero figura ſecta alio plano ſecũdum axem ducto, & erecto ſuper plano portionem ſecante, ipſius quidẽ figuræ ſectio ſit a b c d, coni ſectio: ipſius aũt plani, quod portionẽ abſcidit, eſto ſectio c a linea recta. quia igitur poſitum eſt, planum abſcindens portionem non eſſe erectum ſuper axem, ſectio erit coni acutianguli ſectio, eius autem diametros a d: ſit u y contingens ſectionem coni in puncto b, & ſecundum ipſam u y educatur planum æquediſtãs plano ſecundum a c ducto: hoc continget figuram in puncto b: & ſiquidem fuerit portio conoidalis rectanguli, à pũcto b ducatur æquediſtãs axi b d. Si uero fuerit conoidalis obtuſianguli, à uertice coni comprę hendentis conoidale, recta linea ducta ad b, extra ducatur b d: ſi autem ſphæroidis linea recta ducta ad b, ſit intercepta

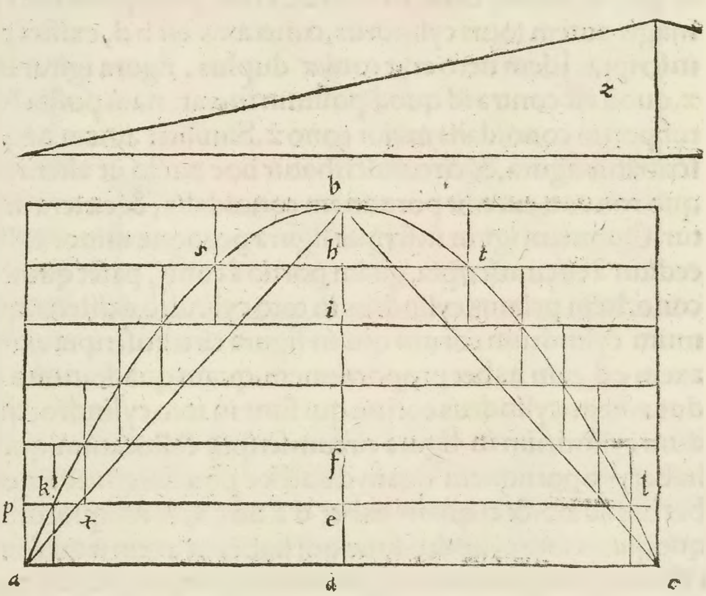


b d: manifeſtũ eſt quod b d diuidit a c in duo æqua. erit igitur b uertex portionis, & b d axis. Iam eſt coni acutianguli ſectio circa diametrum a c, & linea b d à centro erecta in plano, erecto ſuper planum in quo eſt coni acutianguli ſectio, alio plano

plano secundum alterum diametrum constituto: potest igitur cylindrus construi qui axem habeat b d. in cuius superficie erit data coni acutianguli sectio circa diametrum a c cõstituta. eius autem superficies cadet extra portionem, quoniam est aut conoidalis aut sphæroidis portio, & non maior dimidia sphæroide. Erit igitur quoddam cylindri frustum, quod basim habet coni acutianguli sectionem circa a c diametrum constitutam, axem uero d b. hoc autem frusto in duo diuiso planis æquedistãtibus, plano secundum a c ducto, erit residuum minus solida quantitate proposita. Esto frustum, quod habeat basim coni acutianguli sectionem, diametrum a c, axem uero e d, minus solida quantitate proposita: diuidatur a b in partes æquales e d, & à punctis diuisionum ducantur lineæ rectæ, quæ æquedistent a c, erunt erectæ super coni sectionem: ab his exeant plana æquedistantia plano secundum a c ducto. secant itaq; hæc superficiem portionis, & erunt huiusmodi conorum acutianguli sectiones similes illi quæ est circa diametrum a c: quia plana æquedistantia sunt. In unaquaq; igitur coni acutianguli sectione extruantur cylindri frusta duo, hoc quidem in parte sectionis coni acutianguli uersus d, illud autem uersus b, quæ axem habeat æqualem d e: erunt itaq; quædam figuræ solidæ, hæc quidem inscripta portioni, illa uero circũscripta eidem, quæ ex cylindri frustis componuntur. Reliquum autem est, ut ostendamus quod figura circumscripta super figuram inscriptam, minus addat solida quantitate proposita. Ostendetur autem hoc similiter priori, quod figura circumscripta excedit inscriptam frusto, quod basim habet coni acutianguli sectionem, quæ circa diametrum a c consistit, axem uero e d. hoc autem minus existit proposita quantitate solida.

His itaq; hoc ordine præstitutis, demonstrabimus ea quæ de figuris proposita fuerunt.

Omnis portio conoidalis rectanguli, quod sectum fuerit plano super axem 23
erecto, sesquialtera esse probatur coni, qui basim & axem eandem habeat cum portione. Esto itaq; portio conoidalis rectanguli abscisa plano super axẽ erecto, & secto ipso conoidali ab altero plano secũdum axem ducto. esto quidem superficiei sectio a b c, coni rectanguli sectio. plani autem portionem abscindentis sit sectio linea a c recta: axis uero portionis, b d. esto item conus eandem basim & eundem axem cum portione habẽs, cuius uertex sit b. demonstrãdũ est, quod portio conoidalis sesqaltera est huius coni. Exponat̃ itaq; conus z, q sesquialter sit huius coni, cuius basis circulus circa a c diametrum cõstitutus: axis uero b d. Esto autem cylindrus, qui basim habeat circulum circa a c diametrum cõstitutum, axem autem b d: erit igitur conus z dimidium huius cylindri, cum conus z sit sesquialter eiusdem coni. Dico igitur, portionem conoidalis æqualem esse cono z, nam si non est ęqualis, uel maior uel minor existet.

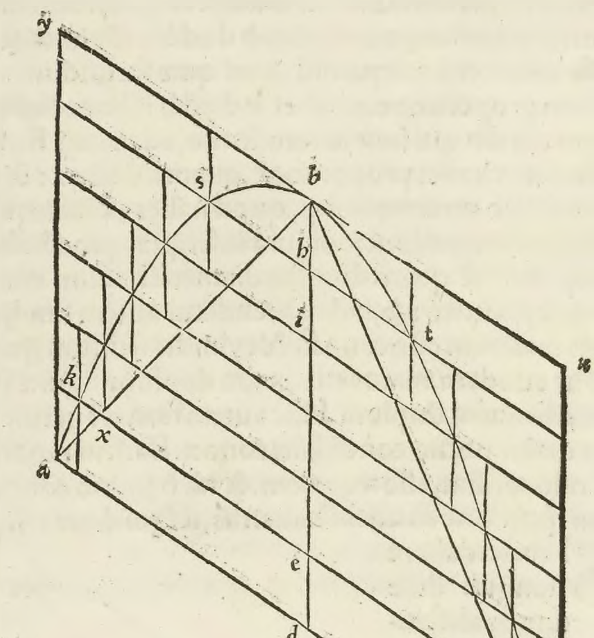


existet. Esto itaq; si fieri potest, maior: inscribatur aũt portioni quædam solida figura, & altera circumscribatur ex cylindris altitudinem æqualem habentibus, cõpositam hoc pacto, ut circumscripta super inscriptam minus addat eo, quo portio conoidalis excedit conum z: & sit maximus cylindrorum ex quibus figura circũscripta componitur, qui basim habeat circulum circa diametrum a c constitutum, axem uero e d. eorum autem minimus sit ille qui basim habeat circulum circa s t diametrum descriptum, axem uero b i. Cylindrorum uero ex quibus figura inscripta componitur, maximus sit ille, qui basim habeat circulum circa k l constitutum, axem uero d e. minimus autẽ, qui basim habeat circulum circa s t diametrũ, axem autem h i. Educantur autem plana omnium cylindrorum ad superficiem cylindri, qui basim habeat circulum circa a c diametrum descriptum, axem uero b d: erit iam totus cylindrus dissectus in cylindros, qui multitudine erunt æquales illis qui sunt in figura inscripta comprahensi, magnitudine uero æquales eorum maximo. & quoniam circumscripta figura portioni minus addit super inscriptam, quàm portio super conum, constat figuram inscriptam maiorem haberi cono z. Primus autem cylindrus eorum qui sunt in toto cylindro, qui axem habet d e, ad primum cylindrum eorum qui in figura portioni inscripta habentur, habentem axem d e, eãdem habet proportionem, quam d a habet ad k e potestate. Hæc autem eadem est illi quam habet b d ad b e, & quam habet d a ad e x. similiter ostenditur, secundus cylindrus eorum qui sunt in toto cylindro, qui axem habet e f, ad secundum cylindrũ eorum qui sunt in figura inscripta, eandem habere proportionem, quam p e, hoc est d a, ad q f. & unusquisq; cæterorũ qui sunt in toto cylindro, ad cylindrum in figura inscripta, qui basim habeant eandem, eãdem habebit proportionem, quam dimidia diametros basis suæ, habet ad eam sui partem quæ intermedia linearum rectarum a b, b d comprahenditur. & omnis cylindri, qui in cylindro comprahenduntur, cuius basis est circulus circa a c diametrum descriptus, axis uero d i linea recta, ad omnes cylindros in figura inscripta comprahensos, eandem habebunt proportionem, quam omnes rectæ lineæ ex centris circulorum eductę, qui sunt in basibus dictorum cylindrorum, ad omnes lineas rectas inter medium a b & b d interceptas. Dictæ uero lineæ rectæ sunt dictis, dempta a d, plusquam dupla. quare & cylindri simul omnes qui in toto sunt cylindro, cuius axis est d i, erunt plus quàm dupli figuræ inscriptæ: multo magis autem totus cylindrus, cuius axis est b d, existet plus quàm duplus figuræ inscriptæ. Idem uero erat coni z duplus. figura igitur inscripta minor erit cono z, quod est contra id quod positum fuerat. nam posita fuerat maior: non est igitur portio conoidalis maior cono z. Similiter autem neq; minor. Rursus enim inscribatur figura, & circumscribatur hoc pacto ut altera alteram excedat minus eo quo conus z excedit portionem conoidalis, & cætera ut suprà similiter disponantur. Quoniam igitur inscripta figura portione minor existit, & inscripta minus exceditur à circumscripta, quàm portio à cono, patet quod circumscripta minor est cono. Item primus cylindrus in toto cylindro existens, qui axem habet d e, ad primum cylindrum eorum qui in figura circumscripta existunt, eundem qui habet axem e d, eam habet proportionem, quam quadratum a d ad ipsum idem. Secundus autem cylindrus eorum qui sunt in toto cylindro, qui habet axem e f, ad secũdum cylindrum in figura circumscripta collocatum, qui basim habet e f, eandem habet proportionem quam d a ad k e potestate: hæc autem est eadem ei quam habet b d ad b e, & ei quam habet d a ad e x. & reliquorum cylindrorum unusquisque qui in toto cylindro sunt, qui habeant axem æqualem d e, ad unumquemque cylindrorum qui sunt in figura circumscripta, qui habent eandem axem, habebit eam proportionem quam dimidia basis eius ad eam sui partem, quæ inter a b, b d interducitur media: & omnis cylindri in toto cylindro existẽtes, quorũ axis est b d

linea

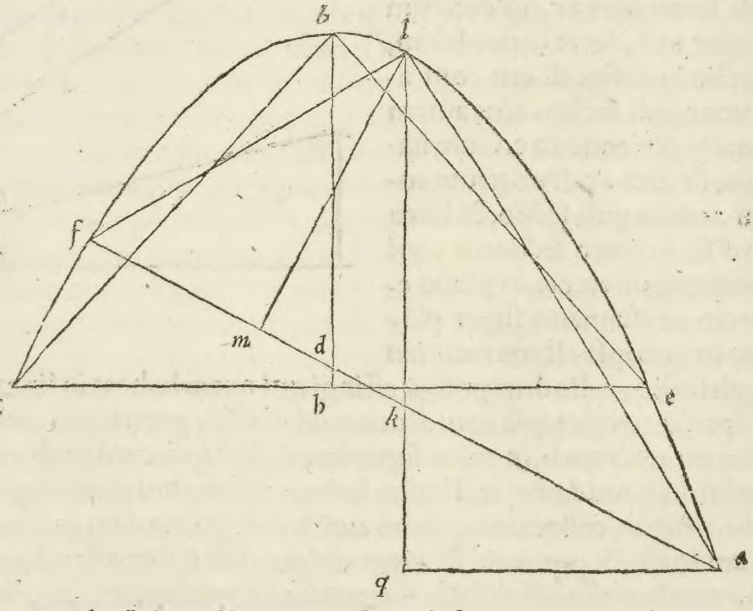
linea recta, ad omnis cylindros in figura circumscripta collocatos eam habebunt proportionem, quam omnes rectæ lineæ ad omnes lineas rectas: ipsæ autem omnes rectæ, quæ ex centris circulorum exeunt, qui bases sunt cylindrorum ad rectas lineas omnes quæ ab ipsis assumptę sunt, simul cum a d minores sunt, quàm duplæ. manifestum igitur, quod cylindri omnes qui in toto cylindro existunt, minores erũt quàm dupli ad cylindros in figura circumscripta existentes. cylindrus igitur, qui basim habet circulum circa diametrum a c constitutum, axem autem b d, minor existet quàm duplus circumscriptæ figuræ. non est autem sic, uerum maior quàm duplus eadem. nam coni z duplus existit. Et ostensum est figurã circumscriptam cono z esse minorem. non igitur conoidalis portio cono z minor. & ostensum est, quod neq; eo maior habetur. quare eam esse sesquialteram coni habentis basim, & axem cum portione eundem, necessariò conclusum est.

SI à conoidali rectangulo portio abscindatur plano super axem non erecto, si- 24
militer sesquialtera esse probatur portionis abscissæ à cono quæ basim & axẽ eundem habet, cum ipsa portione. Esto portio conoidalis rectanguli abscissa uti proponitur, & ipso secto à plano secũdum axem ducto, erecto super planam quod abscindit portionem, figuræ quidem sectio esto a b c, coni rectanguli sectio: plani uero abscindentis portionem esto a c linea recta. ducatur autem u y æquedistans ipsi a c, et contingens coni rectanguli sectionem in puncto b. & ducatur b d æquedistans axi. Hæc autẽ iam in duo diuidit ipsam a c. planum autem ab u y educatur, æquedistãs plano quod est secundum a d. cõtinget autem hoc conoidalem in puncto b, & erit portionis uertex punctum b, axis autem b d. Quoniam igitur planũ quod est secundum a c, nõ erectum super axẽ, secat conoidalem, sectio huiusmodi erit coni acutianguli sectio. eius autem maior diametros a c. Cum itaque sit circa a c diametrum coni acutianguli sectio, & linea b d sit à centro sectionis coni acutianguli erecta, in plano erecto ex diametro super plano in quo ipsa est coni acutianguli sectio, cylindrus poterit effingi qui axem habeat in linea recta a b d, in cuius superficie existet ipsa coni acutianguli sectio: poterit etiã conus effici, qui uerticẽ habeat pũctum b, in cuius superficie existet ipsa coni acutianguli sectio, & frustũ cylindri quoddam quod basim habeat ipsam coni acutianguli sectionem circa a c diametrum collocatam, axem autẽ b d: & portio coni qui basim habeat eandem cum frusto & portione, & axem eũdem. Est igitur ostendendum, conoidalis portionem huiusmodi abscisoris coni esse sesquialteram. Esto itaq; z conus sesquialter



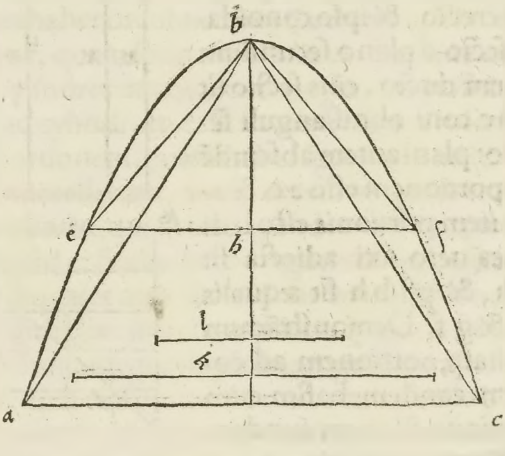
ter huius abſciſoris coni prædicti. erit igitur cylindri fruſtum, quod baſim habeat eandem cum abſciſore, & axem eundem, duplus coni z. hic namq; ſeſquialter exiſtit abſciſoris coni, baſim habentis eandem cum portione, & axem eundem. abſciſor autem coni dictus tertia pars exiſtit fruſti cylindri, baſim & axem habentis eũdem cũ portione. Dico itaq; neceſſe eſſe portionẽ conoidalis cono z eſſe æqualẽ. nã ſi non ęqualis erit, maior aut minor eo exiſtet. Eſto primũ maior, ſi fieri poteſt: inſcribatur itaq; portioni quædam ſolida figura, & altera circumſcribatur ex fruſtis cylindrorũ compoſita, quæ baſim habeant & altitudinem æqualem inter ſe, hoc pacto, ut figura circũſcripta ſuper inſcriptam figuram addat minus eo, quo portio conoidalis excedit conum z: & plana fruſtorum erunt ad ſuperficiem fruſti baſim habentis eandem cum portione, & axem eundem. Rurſus itaq; primũ fruſtum eorum quæ in toto fruſto quod habet axem d e, ad primum fruſtum eorum quæ ſunt in figura inſcripta, quod habet axem d e, eam habet proportionem quam quadratum a d, ad quadratum k e. nam ſi fruſta æquam altitudinem habentia, eandem inuicem proportionem ſuis baſibus habeant, baſes autẽ eorum cum ſint ſimiles conorum acutianguli ſectiones, eandem habent inter ſe proportionem, quam diametri eius rationis ſuæ poteſtate: ſunt autem diametrorũ eiuſdem rationis dimidiæ lineæ a d, k e. quam autem habet proportionem a d ad ipſam k e poteſtate, eam habet b d ad b e lõgitudine, cum b d diametro æquediſtet. ipſæ uero a d, k e æquediſtant ei quæ ſecundum a c, puncto b contingit: quam autem proportionem habet b d ad b e, hanc habet a d ad e x. Primum igitur fruſtum eorum qui ſunt in toto fruſto, ad primũ fruſtum in figura inſcripta collocatum, eam habet proportionẽ, quam a d ad e x: & reliquorum eorum quæ ſunt in toto fruſto unumquodq;, quod habet axem æqualem ipſi d e, ad unumquodque fruſtorum quæ ſunt in figura inſcripta, quod habeat axem eundem, habet eãdem proportionẽ quam dimidia diametri baſium eius ad eam quæ ab ipſa eſt media, interſecta inter a b, b d. Oſtendetur autem ſimiliter ſuperioribus inſcriptam figuram maiorem eſſe cono z, & cylindri fruſtum quod baſim habeat & axem cũ portione eundem, maius eſſe quàm duplum figuræ inſcriptæ: quare etiam coni z maius eſſe quàm duplum. Hoc autem non eſt uerum, ſed duplum exiſtit: non eſt igitur maior portio conoidalis cono z. Eadem ratione oſtẽdetur, quod neq; minor. Vnde conſtat, eſſe æqualem. & ideo portio conoidalis coni baſim eandem, & axẽ cum portione eundem habentis, ſeſquialtera eſſe probata eſt.

25 SI conoidalis rectanguli duæ portiones abſcindantur, duob. planis, altero ſup axẽ erecto, altero non ſuper axẽ erecto, ſintq; portionũ axes ęquales, ipſas quoq; portiones ęquales eſſe neceſſe eſt. Abſcindanť itaque à conoidali duę portiões, ut dictũ eſt: ſecto itaq; conoidali ſecũdũ axẽ plano ducto, & altero plano ſuper axẽ erecto, eſto conoidalis ſectio a b c, coni rectãguli ſectio, eius aũt diametros b d:



b d: planorum uero sint sectiones a f, e c lineæ rectæ: eius quidem quod est super axem erectum sit e c, nõ erecti uero super axem sit a f. axes autem portionum sunto b h, k l inuicem æquales, uertices uero puncta b l: demonstrandum est, quod portio conoidalis cuius uertex est b, portioni conoidalis cuius uertex est l, existit æqualis. Quoniam igitur ab eadem coni rectanguli sectione coni duæ portiones sunt abscisæ, a l f, & e b c, & earum sunt diametri æquales k l, b h, triãgulus a l k æqualis est triangulo e h b. ostensum est enim, triangulum a l f triangulo e b c esse æqualem. ducatur iam a q perpendicularis super k l eductam: & quoniam b h, & k l sunt ęquales, sunt quoq; e h & a q æquales. Esto itaq; in portione cuius uertex est b conus inscriptus, eandem basim & axem eundem habens cum portione: in portione uero cuius uertex l, sit abscisor coni eandem basim & axem eundem cũ portione habens: ducatur autem perpendicularis ab l super a f, quæ sit l n: erit iã ipsa altitudo abscisoris coni, cuius uertex est l. abscisor autem coni cuius uertex l, & conus cuius uertex b, habent inter se proportionem compositam, ex basiũ proportione, & ex altitudinum proportione. habent itaq; proportionem compositam ex proportione, quam habet spacium contentum à sectione coni acutiangu li circa diametrum à f constituta, ad circulum circa diametrum e c descriptum, & ex proportione quam habet n l ad b h. spacium autem ab coni acutianguli sectio ne contentum ad eundem circulum eam habet proportionem, quam id quod fit ex diametris altera in alteram ductis ad quadratum e c. & abscisor coni cuius uer tex est l, ad conum cuius uertex est b, habet proportionem compositam ex proportione, quam habet k a ad e h, & ex proportione quam habet n l ad b h. at uero k a dimidia est diametri basis abscisoris coni, cuius uertex est l: ipsa uero e h, dimidia est diametri basis coni: ipse autem l n, b h sunt eorum altitudines. habet autem l n ad b h eandem proportionem, quam habet ad k l, cum b h sit ipsi k l æqualis: habet etiam l n ad k l eam, quam q a ad a k: habet quoq; abscisor coni ad conũ proportionem compositam, ex ea quam habet a k ad a q. nam a q ęquatur ipsi e h, & ex ea quam habet l n ad h b. Composita autem ex dictis proportio, scilicet a k, ad a q, eadem est ei quam habet l n ad l k. abscisor ergo habet ad conum eam proportionem, quam l n ad l k, & quam habet l n ad b h. b h autem æquatur ipsi l k. manifestum est igitur, quod abscisor coni cuius uertex est l, æquatur cono cuius uertex est b. Ex quo constat portiones quoq; æquas esse, cum altera earum coni sesquialtera sit, altera item abscisoris coni sesquialtera, cũ hic & ille sint æquales.

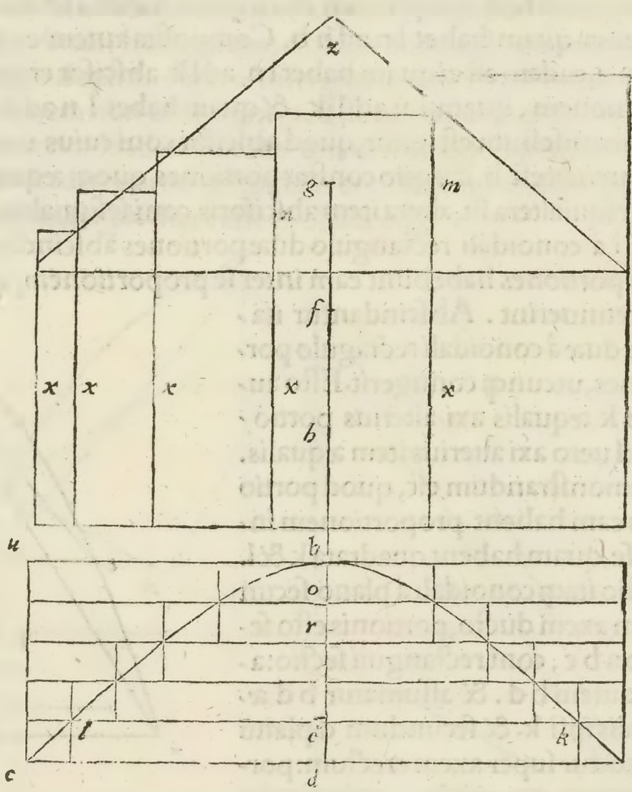
SI à conoidali rectangulo duæ portiones abscindantur planis utcunq; ductis, 26
portiones habebunt eam inter se proportionem, quam quadrata axium inter se retinuerint. Abscindantur itaque duæ à conoidali rectãgulo portiones, utcunq; contigerit. Esto autem k æqualis axi alterius portionis: l uero axi alterius item æqualis. Demonstrandum est, quod portiones eam habent proportionem inter se, quam habent quadrata k & l. sectio itaq; conoidali à plano secundum axem ducto, portionis esto sectio a b c, coni rectanguli sectio: axis autem b d. & assumatur b d æqualis ipsi k, & secundum d planũ educatur super axem erectum: portio autem conoidalis, quæ basim habet circulum circa diametrum a c descriptũ, axem uero b d, æqualis est portioni a-



xem habenti æqualem ipſi k. Siquidem igitur ipſa k ſit æqualis ipſi l, manifeſtũ eſt portiones quoq; inter ſe eſſe ęquales. nam utraq; ipſarum erit æqualis uni & eidẽ, & quadrata ipſarum l k æqualia. quare eandem habebunt proportionem portiones, quam habuerint quadrata axium. Si aũt l non ſit æqualis ipſi k, eſto æqualis ipſa l ipſi b h. & per punctum h ducatur planum erectum ſuper axem: portio autem, quæ baſim habuerit circulum circa diametrum e f deſcriptum, axem autem b h, æquatur portioni habenti axem æqualem ipſi l. Deſcribantur iam coni, qui baſes habeãt circulos circa diametros a c, e f conſtitutos, uerticem uero b punctũ. Conus aũt habens axem b d, ad conũ habentẽ axem b h, proportionem habet cõpoſitam ex ea quam habet a d ad h e poteſtate, & ex ea quam habet d b ad b h longitudine. quam autem proportionem habet d a ad h e poteſtate, eam habet b d ad b h longitudine. conus igitur habẽs axem b d, ad conum habentem axem b h, habet proportionem compoſitam ex ea quam habet d b ad b h, & ex ea quam habet d b ad b h. hæc autem eſt eadem illi quam habet quadratum d b, ad quadratũ h b. quam proportionem autem habet conus axem habens b d, ad conum habentem axem h b, hanc habet eandem portio conoidalis habens axem b d, ad portionem habentem axem h b. utraq; enim utriq; eſt ſeſquialtera: & portioni axem habenti b d æquatur portio conoidalis axem habens æqualem ipſi k. portioni autem habenti axem ipſam h b, æquatur portio conoidalis axem habens æqualem ipſi l, & ipſi b d æquatur k, ipſi uero h b æquatur ipſa l. Clarum eſt ergo, quod portio conoidalis axem habens æqualem ipſi k, eandem habet proportionem ad portionem conoidalis habentem axem æqualem ipſi l, quam quadratum k ad quadratum l.

27 QVælibet portio conoidalis obtuſianguli abſciſa plano ſuper axem erecto, habet ad conum, qui eandem baſim & axem cum portione teneat eundem, eam proportionem, quã habet utraque ſimul linea quæ ſit æqualis axi portionis, et ea quæ ſit tripla lineę ad axem adiectæ, ad lineã his utriſque æqualem, axi portionis & lineæ duplæ, ad lineam axi adiectam.

Eſto aliqua portio conoidalis cuiuſpiam obtuſianguli, abſciſa plano ſuper axẽ erecto, & ipſo conoidali ſecto à plano ſecundum axem ducto. eius ſectio ſit a b c coni obtuſianguli ſectio: plani autem abſcindẽtis portionem eſto a c, & axis item portionis eſto b d: linea uero axi adiecta ſit b h, & ipſi b h ſit æqualis f h & g f. Demonſtrãdum eſt itaq;, portionem ad conum eandem baſim cum portione, & axem eundem habẽtem, eam habere proportionem, quam g d ad d f.



Eſto itaq; cylindrus quidam, eandem baſim, & axem cum

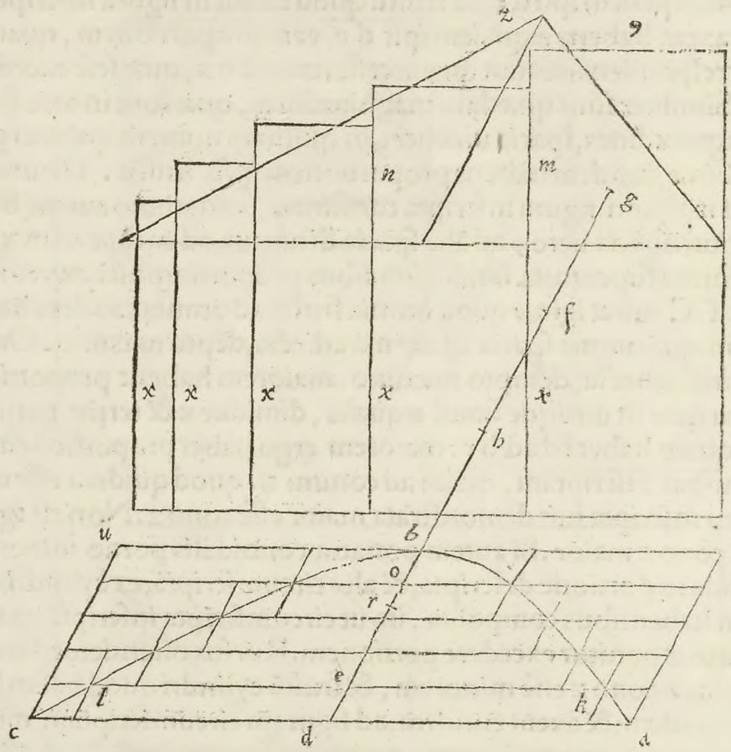
cum portione eundem habens: eius uero latera esto u a, c y. Esto item conus quis in quo z, & hic ad conum habentem eandem basim cum portione, & axem b d, eam habeat proportionem, quam habet g d ad d f. Dico tunc portionem conoidalis æqualem esse cono z. Quod si non fuerit ei æqualis, aut maiorem eo, aut minorem esse necesse est. Esto primum, ut sit ea maior si fieri potest: inscribatur autem in portione quædam figura solida, & altera circumscribatur ex cylindris æquam altitudinem habentibus composita, hoc pacto, ut figura circumscripta super inscriptam minus eo addat, quo conoidalis portio superat conum z. educantur iam plana omnium cylindrorum ad superficiem cylindri, qui habeat basim circulum circa diametrum a c constitutum, & axem b d: erit tunc hic cylindrus totus distributus in cylindros numero æquales cylindris, qui in figura inscripta sunt extructi: magnitudine uero æquales maximo illorum. & quoniam circumscripta figura minus excedit inscriptam, quàm portio conum z, & figura circumscripta maior est portione, constat inscriptam quoque cono z esse maiorem. esto itaque b r pars tertia ipsius b d, erit ergo g d tripla ad h r. Et quoniam cylindrus qui basim habet circulum circa diametrum a c descriptum, axem uero b d, ad conum eandē basim & axem eundem habentem, habet eam proportionem quam g d ad h r: dictus autem conus habet ad z conum, eam quam f d ad g d: proportionibus non mensis similiter permutatis, habebit dictus cylindrus ad z conum eādem proportionem, quam f d ad h r. Sunto autem lineæ positæ, in quibus x numero æquales portionibus eis quæ sunt in b d linea recta, magnitudine uero unaquæque æqualis f b: & ad unamquamque ipsarum accedat spacium, superans alterum forma quadrata, & eorum maximum esto in quo f b d, minimum uero quod sub f r b continetur: latera autem excessuum sese æqualiter excedūt. nam illæ sunt istis æquales, quæ in b d linea recta sese pariter excedunt. Et esto maximi excessus latus, in quo m æquale b d, minoris uero æquale b i. Sunto item alia spacia in quibus 9 multitudine istis æqualia, magnitudine uero unumquodque æquale maximo quod cōtinetur sub f d b. at uero cylindrus qui basim habet circulum circa a c d ametrum constitutum, axem autem d e, ad cylindrum qui basim habet circulum circa k l diametrū descriptum, axem aūt d e, eam habet proportionem, quam d a ad k e potestate. Hæc autem eadem est ei quam habet spaciū contentum sub f d, b d, ad cōtentum sub f e, b e. in omni enim coni obtusianguli sectione hoc contingit. nam dupla eius quæ adiecta est, hoc est eius quæ ex centro obliquū est formæ latus, & spacium x m, est æquale ei quod continetur sub f d, b d. ei uero quod sub f e, b e æquale est spacium x n. est enim b d linea æqualis ipsi m. b e autem ipsi n æqualis. Cylindrus igitur qui basim habet circulum circa diametrum a c descriptū, axem autem d e, habet ad cylindrum qui basim habet circulum circa diametrum k l constitutum, axem uero d e, eam proportionē, quam spacium 9 ad x m. Similiter autem ostendetur & unusquisque aliorum cylindrorum qui in toto cylindro existūt, axem æqualem habens ipsi d e, habere ad cylindrum existentem in figura inscripta, habentem eundem axem, eam proportionem, quam habet spacium 9 ad sibi correspondens, eorum quæ ad ipsam n x accesserunt, cætera excedens quadrato. Sunt autem quędam magnitudines hi cylindri, qui in toto cylindro existūt, quorum unusquisque axem habet æqualem ipsi d e: & aliæ item magnitudines ea spacia, quæ sunt in quibus 9 numero, illis æquales quæ secundum binas & binas eandem habent proportionem, cum cylindri sint inter se æquales, & spacia similiter in quibus 9 inuicem æqualia. Referūtur autem cylindrorum quidam ad alios quosdam cylindros, qui in figura inscripta existunt: extremus autem nullo pacto refertur: & spacia in quibus 9 ad alia spacia, ea scilicet quæ ad m x accesserūt, excedentia forma quadrata, similia sunt in proportionibus: extremū autem nullo pacto refertur. manifestum est, quod omnis cylindri qui in toto cylindro existunt,

ſtunt, ad omnis cylindros in figura inſcripta conſtitutos eam habebũt proportionem, quã ſpacia in quibus 9 ad omnia exceſſa, dempto maximo. Oſtenſum eſt autem, quod omnia ſpacia in quibus 9, ad omnia acceſſa dempto maximo maiorem habent proportionem, quàm m x ad eam quæ ſit æqualis utriſq; ſimul iſtis, dimidiæ x & tertiæ parti ipſius m. quare & totus cylindrus ad figuram inſcriptam maiorem habet proportionem, quàm f d ad h r, quam totus cylindrus oſtenſus eſt habere ad conum z. totus ergo cylindrus maiorẽ habet proportionem ad figuram inſcriptam, quàm ad conum z. quare ſequitur, conum z maiorem eſſe figura inſcripta: quod quidẽ eſſe nõ poteſt. nam ſuprà oſtenſum fuit, figuram inſcriptã cono z eſſe maiorem: non eſt igitur portio conoidalis maior cono z. Neq; utiq; minor. Eſto enim, ſi eſſe poteſt. rurſus inſcribatur portioni figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris altitudinem æqualem habentibus compoſita, hoc pacto, ut circumſcripta figura addat ſuper inſcriptam minus eo quo conus portionem excedit, & cętera præparentur ut prius. Quoniam igitur figura inſcripta portione minor exiſtit, & circumſcripta inſcriptam minus excedit quàm conus z portionem, manifeſtum eſt, circumſcriptam figuram cono z eſſe minorem. Rurſus primus cylindrus eorum qui in toto cylindro exiſtunt, qui habet axem d e, ad primum cylindrum in figura circumſcripta conſtitutum, habentem axem d e, eam habet proportionem quam ſpacium 9 ad m x. nam utrumq; eſt æquale: & cæterorum cylindrorum unuſquiſq;, eorum qui ſunt in toto cylindro, habens axem æqualem d e, ad cylindrum qui eſt in circumſcripta figura, in eandem partem exeũtem, & eundem axem habentem, eam habebit proportionem, quam ſpaciũ 9 ad ſpacium ſibi correſpondens, quod eſt adiectum ad m x ſimul cum exceſſu: propterea quod unumquodq; circumſcriptorum, dempto maximo, æquale eſt unicuiq; inſcriptorum ſimul cum maximo. Habebit igitur totus cylindrus ad figuram circumſcriptã eam proportionem, quã omnia ſpacia ad omnia adiecta, ſimul cũ exceſsibus. Oſtenſum eſt rurſus, omnia ſpacia 9 ad omnia alia minorem habere proportionẽ, quàm m x ad eam quæ ſit æqualis utriſq;, ſimul dimidiæ x & tertię parti m, quare & totus cylindrus ad circumſcriptam figuram minorem habebit proportionem, quàm f d ad h r. uerum ſicut f d ad h r, ſic totus cylindrus ad conum z. minorem igitur habebit proportionem ipſe cylindrus ad figuram circumſcriptam, quàm ad conum z. quare ſequitur, figuram circumſcriptam cono z eſse maiorem: quod quidem eſſe non poteſt. nam figura circumſcripta oſtenſa eſt eſſe minor cono z. non eſt igitur portio conoidalis cono z minor. Cum igitur neque maior, neq; minor eſſe poſſit, conſtat propoſitum eſſe demonſtratum.

28 SI portio conoidalis obtuſianguli abſcindatur plano etiam ſuper axem non erecto, eam proportionem habebit ad abſciſorem coni, baſim eãdem & axem eundem cum portione habentem, quam habent utræq; ſimul, linea æqualis axi portionis, & tripla ad adiectã axi, ad eam quæ ſit æqualis utriſq; ſimul, axi, & eius quæ dupla ſit ad axi adiectã. Eſto portio conoidalis obtuſianguli abſciſa plano ſuper axem non erecto: ipſa uero figura alio plano abſciſa ſecũdum axem ducto, erecto ſuper planum abſcindens portionem figuræ quidem: eſto ſectio a b c coni obtuſianguli ſectio, plani autem abſcindentis portionem eſto linea recta c a: uertex autem coni complectentis conoidale eſto punctum h, & ducatur u y per b æquediſtans ipſi a c, & contingens coni ſectionem in puncto b, & ducatur ab h ad b coniungens, & educatur in longum: diuidet propter eadem f æqualia ipſam a c, diuidet uerſus eam partem a c, & erit uertex portionis b punctum, axis autem b d. adiecta uero axi b h: ipſi autem b h æqualis eſto h f & f g, ab ipſa uero u y exeat planum æquediſtans plano ſecundum a c educto. continget autem conoidale in puncto b, & erit planum ſecũdum a c eductum non ſuper axem erectum, & diuidet conoidale cuius ſectio erit coni acutianguli ſectio, diametros autem

eius

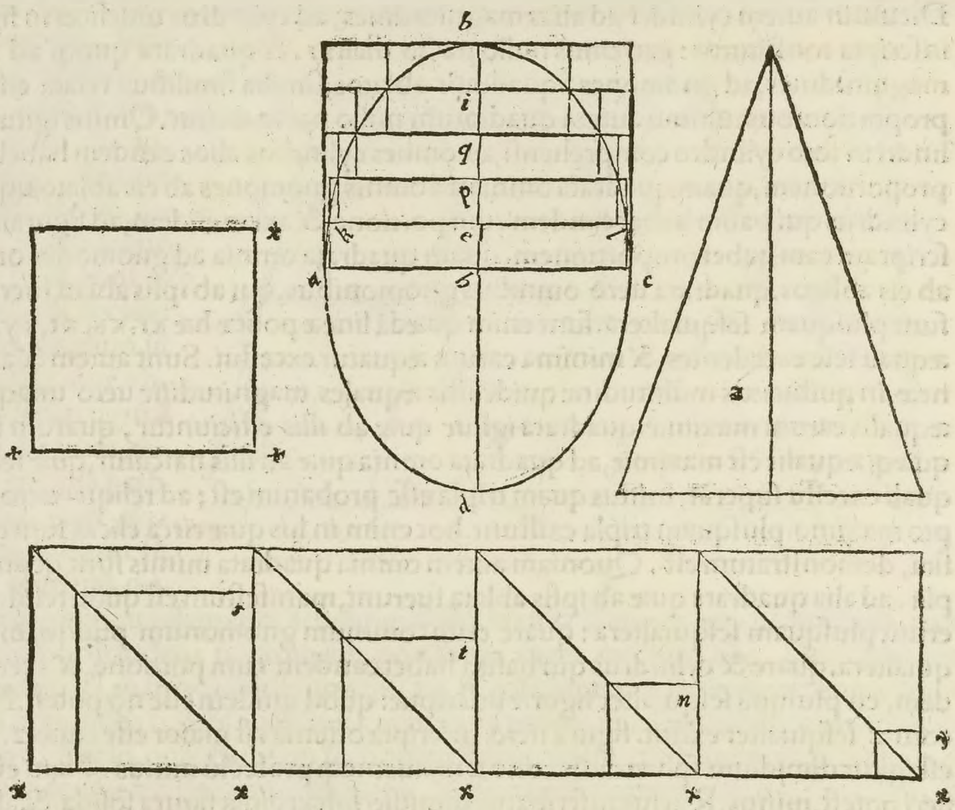
eius maior c a, cum sit alia coni acutianguli sectio circa diametrum a c, & recta linea b d à centro erecta in plano quod est à diametro erectum, super planũ in quo est coni acutianguli sectio. Potest igitur cylindrus effingi, qui axem habeat in linea recta b d, in cuius superficie sit coni acutianguli sectio circa diametrum a c cõstituta. hoc igitur effecto, erit quoddã cylindri frustũ, eandem habẽs cũ portiõe basim, & axem eundem: altera uero eius basis erit planũ, quod est secundum u y ductum. Item poterit etiam conus extrui, qui uerticem habeat pũctum b, in cuius superficie erit coni acutianguli sectio circa diametrum a c cõstructa, & axis idem. Hoc inuento, ostendendum est portionem conoidalis ad coni abscisorem dictum, eam habere proportionem, quam g d ad d f. sicut enim g d ad d f, ita sit conus z ad abscisorem coni. Dico portionem conoidalis esse æqualem cono z. Si igitur non est æqualis portio conoidalis cono z, si esse potest, sit maior. inscribatur autem figuræ conoidali figura solida, & altera circumscribatur ex frustis cylindri eandem altitudinem habentibus composita, hac ratione, ut circumscripta figura super inscriptam minus addat, quàm portio conoidalis super conum z. Cum igitur figura circumscripta sit maior portione, & minus excedat inscriptam figuram, quàm portio conum z: manifestum est sequi, inscriptam figuram cono z esse maiorem. educantur autem plana frustorum omnium, quæ in figura sunt inscripta, exibunt ad superficiem frusti basim habentis cum portione eandem, & axem eundem: & esto b r tertia pars ipsius b d, & cętera omnia similiter superioribus disponantur. Rursus itaq; primum frustum eorum quæ sunt in toto cylindri frusto, quod habet axem d e, ad primum frustum in figura inscripta constitutum, habens axem d e, eã proportionem habet, quam quadratum a d ad quadratum k e. nam frusta æqualem altitudinem habentia eam habent inter se proportionem, quam eorum bases habere contigerit: cum sint coni acutianguli sectiones similes, habebunt inuicem eam proportionem, quam earum diametri eiusdem rationis habuerint potestate: quam autem habet quadratum a d proportionem ad quadratum k e, eam habet id quod sub f d, d b continetur, ad id quod sub f e, e b: cum f d sit ducta per h, secundum eas quæ proxime concidunt & concurrunt: ipsæ uero a d, k e æquedistantes sunt eis, quæ secundum b contingunt. Est autem id quod sub f d, d b,



d b, continetur æquale ſpacio 9: quod autem ſub f e, e b, æquale x n. Habet igitur primum fruſtum, in toto fruſto exiſtens, quod axem habet d e, ad primum fruſtū in figura inſcripta conſtitutum, quod axem habet d e, eam proportionem, quam ſpacium 9 ad x n, & aliorum unumquodq; in fruſto toto exiſtentium, axem habē tium æqualem ipſi d e, ad fruſtū quod exiſtit in figura inſcripta, illi correſpondēs, & axem habens æqualem ipſi d e, eam proportionem, quam 9 ſpacium ad ſibi correſpondens, eorum quæ acceſſerunt ad n x, quæ ſeſe excedunt forma quadrata. Similiter ſunt quædam magnitudines, quæ ſunt in toto fruſto: & aliæ rurſus magnitudines, ſpacia uidelicet, in quibus 9 numero quidem ęquales ipſis fruſtis, & binæ, eandem habent proportionem ipſis fruſtis. Dicuntur autem fruſta ad alia fruſta in figura inſcripta conſtituta, extremum autem fruſtum nullo pacto dicitur: ſpacia uero 9 ad alia ſpacia dicuntur, ad ea quæ ad m x acceſſerunt quadra ta forma ſuperantia, ſimilia ſimilibus proportionibus. extremum aūt nullo pacto dicitē. Conſtat igitur quod omnia fruſta ad omnia eandem habebunt proportionem, quā omnia ſpacia ad omnia adiecta, dēpto maximo. Omnia uero ſpacia ad omnia adiecta, dempto maximo, maiorem habent proportionem, quàm n x ad eam quæ ſit utriſque ſimul æqualis, dimidiæ x & tertiæ parti m. quare & maiorē ea quam habet f d ad h r: maiorem ergo habet proportionem fruſtum totum ad figuram inſcriptam, quàm ad conum z. quod quidem eſſe non poteſt. Nam figura inſcripta fuit demonſtrata maior eſſe cono z. Non eſt igitur conoidalis portio cono z maior. Si autem ponatur conoidalis portio minor eſſe cono z, figura ſolida in portione deſcripta, & alia circumſcripta, ex cylindris altitudinem æqualem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta inſcriptā eo minus excedat, quo conus z ponitur excedere portionem. Rurſus oſtendetur, ſimiliter circumſcriptā figuram cono z eſſe minorem, & fruſtū cylindri quod baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram circumſcriptam minorem habere proportionem, quàm ad conum z: quod eſſe non poteſt. Non eſt igitur portio conoidalis maior cono z, neq; minor eſſe poteſt. Neceſſe ergo eſt, æqualem eſſe. quare patet propoſitum.

29 CViuslibet figuræ ſphæroidis plano per cētrum ducto, & erecto ſuper axem ſectæ, dimidium ſphæroidis duplum eſt coni qui baſim habet eandem cum portione, & axem eundem. Eſto ſphæroidis portio plano per centrum ducto, & erecto ſuper axem abſciſſa: ſecta uero ſphæroide alio plano ſecundum axem ducto, huius portionis ſectio ſit a b c d, coni acutianguli ſectio: eius autem diametros & axis ſphæroidis b d, centrum uero h. nihil autem intererit ſiue b d ſit maior diametros, ſiue minor ſectionis coni acutianguli: plani uero abſcindentis figuram ſectio ſit a c linea recta, & ipſa tranſibit per h, & rectos angulos faciet ad b d, cum planum ponatur per centrum duci, & ſuper axem eſſe erectum. Oſtendendum itaq;, dimidiam ſphæroidis portionem, quæ baſim habet circulum circa dia metrum a c deſcriptum, uerticem uero punctum b, duplam eſſe coni eius qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eūdem. Eſto igitur conus quis, in quo z duplus coni baſim habentis cum portione eādem, & axem eundem, ſcilicet h b. Dico dimidium ſphæroidis cono z eſſe æquale. Si enim dimidium dictum dicatur cono dicto minime æquale eſſe, eſto primū ſi fieri poteſt maius eo, & iam inſcribatur portioni dimidiæ ſphæroidis figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta inſcriptam minus excedat eo quo dimidium ſphæroidis conum ſuperat. Cum igitur circumſcripta figura maior ſit dimidio ſphæroidis, & minus excedat figuram inſcriptam, quàm ſphæroidis dimidium excedat conum z, ſequitur figuram portioni inſcriptam cono z eſſe maiorem. Eſto iam cylindrus, qui baſim habeat circulū circa diametrum a c conſtitutū, axem uero b h. Quoniā igitur hic cylindrus tri-

plus habetur coni, qui basim habeat cum portione eandem, & axem eundem: conus uero z eiusdem coni duplus existit, constat cylindrum hunc cono z sesqui alterum haberi. Educantur itaq; plana omnia cylindrorum, ex quibus figura por



tioni inscripta conficitur, exibunt ad superficiem cylindri basim habentis cũ portione eandem, & axem eundem. erit iam totus cylindrus in cylindros distributus, qui multitudine sunt æquales in figura inscripta constitutis: magnitudine autem maximo illorum æquales. Sunto iam lineæ positæ, in quibus x multitudine æquales portionibus lineæ b h rectæ, magnitudine uero unaquæque æqualis b h: & ab unaquaq; quadratum constituatur, ab ultimo uero quadrato auferatur gnomon qui latitudinem habeat æqualem b i. erit autem hic æqualis ei quod continetur sub b i, i d: à quadrato autem ei proximo auferatur gnomon, latitudinem habens duplam ipsius b i: erit & hic ęqualis contento sub e q, q d. & perpetuò à quadrato sequente gnomon auferatur, latitudinem habens pręcedentis eum gnomonis, & ante eum ablati portionem maiorem: eritq; utiq; eorum unusquisq; æqualis ei quod sub portionibus b d continetur, quarum altera portio æqualis fuerit latitudini gnomonis. erit etiam à quadrato secundo reliquum quadratum, latus habens æquale h q. Cylindrus autem primus eorum qui in toto cylindro constant, axem habens h e, ad primum cylindrum eorum qui in figura inscripta continentur, eundem axem h e habentem, eam habet proportionem, quam quadratũ a h ad quadratum k e: quare & quam contentum sub b d, d h, ad contentum sub b e, e d: habet igitur cylindrus ad cylindrum eam proportionem, quam quadratum primum habet ad gnomonem, à quadrato secundo ablatum. Similiter autem & aliorum cylindrorum unusquisq;, qui axem habeat æqualem ipsi h e, ad cylindrum in figura inscripta cõstitutum, axem cum eo eundem habentem, eam pro-

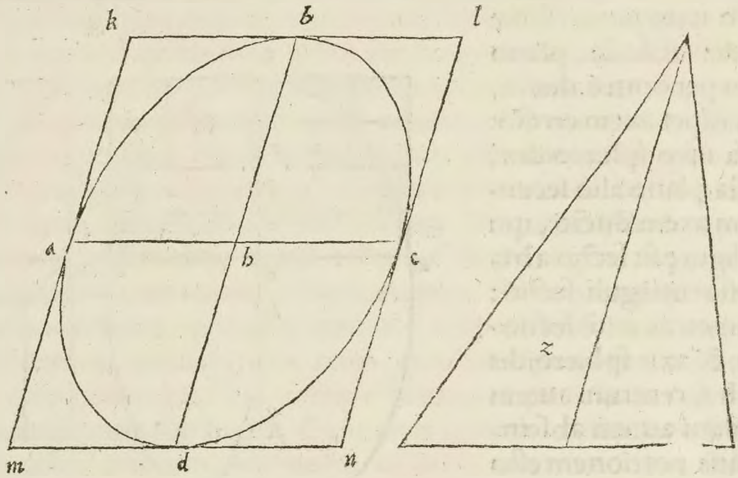
m portio-

portionem habet, quam quadratum sibi similiter ordinatũ, ad gnomonem à quadrato sibi proxime subsequenti ablatum: erunt iam quædam magnitudines, uidelicet cylindri qui sunt in toto cylindro, & item aliæ, scilicet quadrata linearum x x æquales multitudine cylindris: & binæ & binæ eandem habent proportionem. Dicuntur autem cylindri ad alias magnitudines, ad cylindros uidelicet in figura inscripta constitutos: extremus nullo pacto dicitur. & quadrata quoque ad alias magnitudines, ad gnomones à quadratis ablatos, similia similibus relata eisdem proportionibus: ultimũ autem quadratum nullo pacto dicitur. Omnis igitur cylindri in toto cylindro comprehensi, ad omnes cylindros alios eandem habebunt proportionem, quam quadrata omnia ad omnis gnomones ab eis ablatos. quare cylindrus qui basim habet eandem cum portione, & axem eũdem, ad figuram inscriptam eam habet proportionem, quam quadrata omnia ad gnomones omnis ab eis ablatos. quadrata uero omnibus gnomonibus, qui ab ipsis ablati fuerunt, sunt plusquam sesquialtera: sunt enim quædã lineæ positæ hæ x r, x s, x t, x y, x u, æquali sese excedentes, & minima earum æquatur excessui. Sunt autem & aliæ lineæ, in quibus x x multitudine quidẽ istis æquales, magnitudine uero unaquæque æqualis earum maximæ. quadrata igitur quæ ab illis efficiuntur, quarum unaquæque æqualis est maximæ, ad quadrata omnia quæ ab illis nascũtur, quæ sese æquali excessu superãt, minus quàm tripla esse probatum est: ad reliqua uero, dempto maximo, plusquam tripla existunt. hoc enim in his quæ circa elicas sunt exposita, demonstratum est. Quoniam autem omnia quadrata minus sunt quàm tripla, ad alia quadrata quæ ab ipsis ablata fuerunt, manifestum est quod residuorũ erunt plusquam sesquialtera: quare erunt omnium gnomonum plusquam sesquialtera. quare & cylindrus qui basim habet eandem cum portione, & axem eũdem, est plusquã sesquialter figuræ inscriptæ: quod quidem esse nõ potest. Nam coni z sesquialter existit. figura uero inscripta ostensa est maior esse cono z. non est igitur dimidium sphæroidis cono z maius: neque profectò minus. Nam esto si fieri potest, minus. Rursus inscribatur dimidio sphæroidis figura solida, & altera circumscribatur ex cylindris æquam altitudinem habentibus composita, ita ut circumscripta super inscriptam minus addat quàm conus z super dimidium sphæroidis: & reliqua sint prioribus similiter disposita. Quoniam igitur figura inscripta portione minor existit, sequitur circumscriptam figuram cono z esse minorẽ. Rursus primus cylindrus eorum qui in toto cylindro existunt, qui habet axem h e, ad primum cylindrum eorum qui in figura circumscripta cõstructi sunt, qui habet axem e h, eam habet proportionem, quam quadratum primum ad ipsummet. Secundus autem cylindrus eorum qui in toto cylindro, habens axem e p, ad secundum cylindrum eorum qui in circumscripta figura existunt, habentem axem e p, eam habet proportionem, quam secundum quadratum ad gnomonẽ ab eo ablatum, & reliquorum cylindrorum, qui in toto cylindro continentur unusquisque qui axem habeat æqualem h e, ad cylindrum sibi coniunctum, eorum qui sunt in figura inscripta, eandem habet proportionem, quam habet quadratum sibi correspondens ad gnomonem ab eo ablatum. Omnis igitur cylindri in toto cylindro constituti, ad omnis cylindros in figura circumscripta comprehẽsos, eam habebunt proportionem, quam quadrata omnia ad id quod primo quadrato æquale est, & ad omnes gnomones à reliquis quadratis ablatos: & quadrata omnia sunt minus quàm sesquialtera eius quod primo quadrato æquale existit, & gnomonum à reliquis ablatorũ: propterea quod quadratis quæ à lineis sese æqualiter excedentibus sunt producta, dempto quadrato à maxima earũ producto, plusquam tripla existunt. Cylindrus igitur qui basim cum portione habet eandem, & axem eũdem, est minor quàm sesquialter figura circumscripta: quod quidem esse non potest. nam cono z sesquialter habetur: circumscripta uero figu-

ra

ra ostensa est cono z minor esse: non erit igitur dimidium sphæroidis cono z minus: uerum neqꝫ maius. necesse est igitur esse æquale.

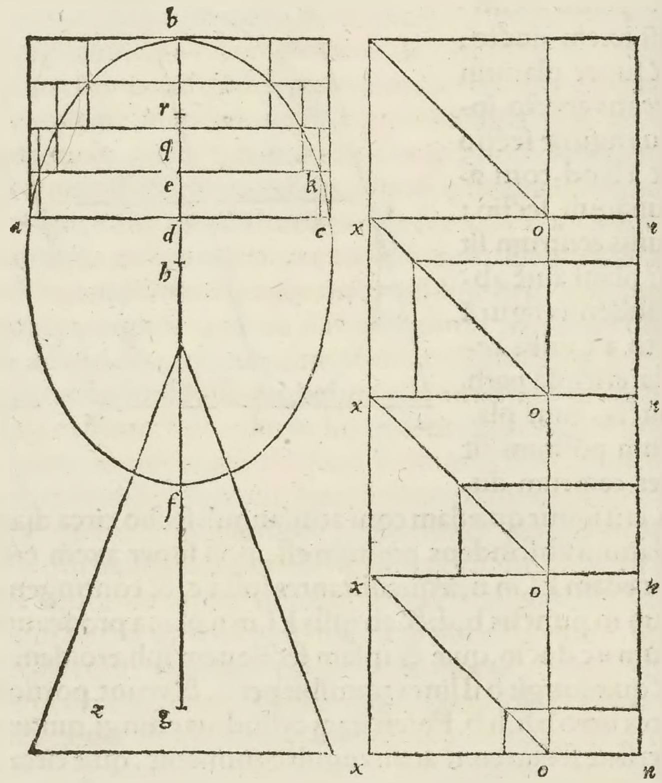
SI figura sphæroidis plano secetur per centrum ducto, super axem non erecto, 30
dimidium sphæroidis similiter duplum existet abscisoris coni, qui quidem abscisor basim habeat cum portione eandem, & axem eundem. Secetur itaqꝫ portio sphæroidis, secta ipsa sphęroide alio plano secundũ axem ducto, & super planum secans erecto, ipsius figuræ sectio sit a b c d, coni acutiãguli sectio: cuius centrum sit h: plani autẽ abscindentis figurã esto a c linea recta: erit ipsa per h ducta, cum planum positum sit per centrum duci. erit igitur quædam coni acutianguli sectio circa diametrum a c constituta. nam planum abscindens positum est, non super axem erectum esse. Ducantur iam quædam k l, m n, æquedistantes ipsi a c, & contingentes sectionem coni acutianguli in punctis b, d: & ab ipsis k l, m n plana prodeant æquedistantia plano secundum a c ducto, quæ & ipsam sectionem sphæroidem contingent in punctis b, d: & quæ iungit b d linea transibit per h, & erunt portionum uertices puncta b, d: axes uero b h, h b. Potest itaqꝫ cylindrus effingi, qui axem habeat b h, in cuius superficie sectio coni acutianguli continetur, quæ circa diametrum a c est constituta. eo autem effecto, erit quoddam cylindri frustum, quod eandem habeat cum dimidia sphæroide basim, & axem eundem. Rursus & conus effici potest, qui uerticem habeat punctum b, in cuius superficie sectio coni acutianguli existet à diametro a c. eo pacto erit abscisor coni, qui eandem cum portione basim, & eũdem axem habebit. Dico iam, quòd sphæroidis dimidium huius coni duplum existet. Esto conus z duplus ad abscisorem coni. si dimidium sphæroidis dicatur cono z non esse æquale, esto primum si fieri potest maius. inscribatur autem in dimidia sphæroide figura solida, & altera circũscribatur ex cylindricis frustis altitudinem æqualem habentibus composita, hoc pacto ut figura circumscripta excedat figuram inscriptã, minus eo quo dimidia sphęroidis excedit conum z. Iam simili ratione qua superius factum est, ostendetur figuram inscriptam cono z maiorem existere, & frustum quod basim habeat cum portione eandem, & axem eundem cono z sesquialterum existens, figura inscripta dimidiæ sphæroidi maius quàm sesquialterum esse, quod esse non potest. non erit ergo dimidia sphæroidis cono z maior. Si uero minor illo ponatur esse, inscribatur dimidiæ sphæroidi figura solida, & altera circumscribatur ex frustis cylindri æqualem altitudinem habentibus composita, ita ut circumscripta excedat inscriptam minus eo quo conus z excedit dimidiam sphæroidem. Rursus similiter superioribus demonstrabitur, figuram circumscriptam minorem esse cono z, & frustum cylindri quod basim habeat cũ portione eandem, & axem eundem, cono z sesquialterum esse: circumscriptæ uero figuræ minus quàm sesquialterum haberi, quod esse non potest. Conus itaqꝫ



z, neq; minor dimidia sphæroide poterit, neq; maior haberi. æqualis igitur esse illi necessariò reliquitur, quod demonstrare uolebamus.

31 CVIuscunq; figuræ sphęroidis plano sectæ non per centrum ducto, sed super axem erecto, minor portio ad conum qui eandem habeat cum portione basem, & axem eundem, eam proportionem habere probatur, quam utraque simul dimidia axis sphæroidis, & axis maioris portionis, ad axem maioris portionis.

Esto itaq; portio sphæroidis abscissa, plano non per centrũ ducto, sed super axem erecto: ipsa uero sphæroides, secta plano alio secundum axem ducto, ipsius figurę sit sectio a b c, coni acutiãguli sectio: diametros autẽ sectionis, & axis sphæroidis sit b f, centrum autem h: plani autem abscindentis portionem esto sectio a c linea recta. faciet autem cum ipsa rectos angulos ad b f, cũ planum sit supet axem erectum, ut ponitur. esto autem portio abscissa, cuius uertex sit punctum b minor dimidia sphæroide figura, & ipsi b h æqualis esto f g. Ostendendũ est, quod portio cuius uertex est



punctum b, ad conum qui basim habet cum portione eandem, & axem eundem, habet eam proportionem, quam d g ad d f. Esto itaq; cylindrus qui eandem habeat basim cum portione minori, & axem eundem: esto item conus, in quo z ad conum basim eandem habentem, eam habeat proportionem, quam d g ad d f. Dico iam conum z portioni esse æqualem illi, quæ uerticem habeat punctum b. nã si non est æqualis, esto primò si fieri potest, minor. Inscribatur iam portioni figura solida, & alia circumscribatur, ex cylindris altitudinem æqualem habentibus composita, hoc pacto, ut circumscripta inscriptam minus excedat, quàm sphæroidis portio conum z. Cum igitur circumscripta figura portione maior existat, & inscriptam minus excedat, quàm portio conum z, sequitur figuram inscriptam cono z maiorem haberi. Esto deinde b r tertia pars ipsius b d: cum igitur ipsius b h sit tripla b g, & d g ipsius h r tripla erit. cylindrus itaq; qui basim habeat cum portione eandem, & axem b d, ad conum habentem eandem basim, & axem eũdem, habebit eam proportionem, quam habet d g ad h r. Dictus autem conus ad conũ z eandem habet proportionem, quam d g ad d f. Habebit igitur cylindrus, qui basim habeat cum portione eandem, & axem eundem, proportionibus dissimiliter ordinatis, eam proportionem ad conum z, quam d f ad h r. Sunto itaq; lineæ positæ, in quibus x n multitudine quidem æquales portionibus ipsius b d, magnitudine uero unaquæq; ipsi d f. sit autem & unaquæq; x o ęqualis ipsi b d: erit igitur unaquæq;

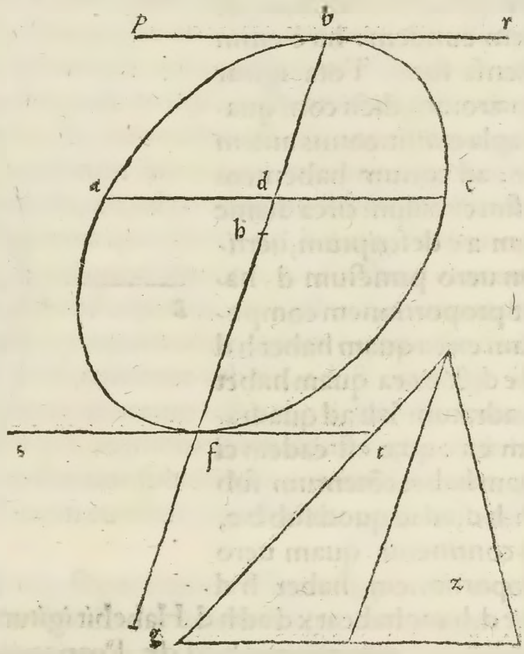
naquæque n o dupla ipsius h d. Accedat igitur ad unamquanque earum spacium quoddam, cuius latitudo sit æqualis ipsi b d, ita ut sint diametri quadratorum diametros habentium. auferatur autem à primo gnomon, qui latitudinem habeat æqualem ipsi b e: à secundo uero gnomon, latitudinem habens æquam ipsi b q: & ab unoquoque eodem modo sequente spacio gnomon auferatur, latitudinem habens una parte minorem latitudine præcedentis eum gnomonis ablati. Gnomon itaque à primo spacio ablatus, æqualis erit ei quod sub b e, e f continetur: & reliquum spacium accedens ad ipsam n o, superat forma quadrata latus excessus habens æquale ipsi d e: gnomon uero à secundo spacio ablatus, æquatur ei quod cõtinetur sub f q, q b: & reliquum spacium quod adiacet ipsi n o, excedens forma quadrata, & reliqua istis similiter. His sic se habentibus, plana omnium cylindrorum ex quibus inscripta figura componitur, ad superficiem cylindri basim habentis cum portione eandem, & axem eundem educantur. Iam totus cylindrus in cylindros distributus erit, multitudine æquales illis qui sunt in figura circumscripta constituti, magnitudine uero maximo illorũ æquales. Primus itaque cylindrus eorum qui sunt in toto cylindro, qui habet axem d e, ad primum cylindrum in figura inscripta constitutum, qui habeat d e axem, eam habet proportionem, quã quadratum d c, ad quadratum k e. Hæc autem est eadem ei quam habet contentum sub b d, d f, ad contentum sub b e, e f. Cylindrus igitur ad cylindrum habet eam proportionem, quam primum quadratum ad primum gnomonem, ablatũ ab eo. Similiter autem & aliotum cylindrorum, qui sunt in toto cylindro, unusquisque axem habens æqualem ipsi d e, ad cylindrum sibi coniunctum in figura inscripta constitutum, axem habentem eundem, habebit eam proportionem, quã spacium sibi correspondens, ad gnomonem ablatum ab eo. Erunt quædam magnitudines cylindri, qui sunt in toto cylindro: & aliæ item magnitudines, spacia ad n x adiecta, latitudinem habentia æqualem ipsi b d, multitudine cylindris æqualia, & bina & bina habent eandem proportionem. dicuntur autem cylindri ad alios cylindros in figura inscripta constitutos, ultimus autem nullo pacto dicitur: & spacia dicuntur ad alia spacia, ad gnomones ablatos ab eis quæque duo simi lis rationis in eadem proportione: ultimum uero spacium nullo pacto dicitur. Constat igitur, cylindros omnes ad alios omnes eam habere proportionem, quã omnia spacia ad omnis gnomones. Cylindrus igitur, qui basim habeat cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram portioni inscriptã, eam habebit proportionem, quã spacia omnia ad omnes gnomones. Et quoniam erant lineæ quędam positæ æquales, in quibus n o, & ad unamquanque accessit spacium superãs forma quadrata, latera uero excessuum inter se æqualiter sese excedentia, & erãt excessus eorum æquales illarum minimæ: & alia item erant spacia ad ipsam n x adiacentia, latitudinem ipsi b d æqualem habentiã, multitudine æqualia spacijs prius dictis, magnitudine uero unumquodque maximo illorum æquale, manifestum est quod omnia simul spacia quorum unumquodque æquale est maximo, ad omnia alia spacia minorem habent proportionem, quàm n x ad lineam æqualem utrisque simul, dimidiæ n o, & tertiæ parti x o. Constat igitur, eadem spacia ad omnis gnomones maiorem habere proportionem, quàm n x ad lineam æqualem utrisque simul, dimidiæ n o, & duabus tertijs ipsius x o. Cylindrus ergo qui basim habet cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram portioni inscriptam, maiorem habet proportionem, quàm n x ad lineam æqualem utrisque simul, dimidiæ n o, & duabus tertijs x o. Est autem n x æqualis d f, dimidia uero n o æqualis ipsi d h: ipsis autem tertijs ipsius x o, æqualis est ipsa d r. totus ergo cylindrus ad figuram portioni inscriptã, maiorem habet proportionem, quàm d f ad h r: quam uero proportionem d f habet ad h r, eandem ostensum est habere cylindrum ad conum z: maiorem ergo proportionem habebit cylindrus ad figuram portioni

m 3 inscriptam,

inſcriptam, quàm ad conum z, quod eſſe non poteſt: nam oſtenſum eſt, figuram inſcriptam cono z eſſe maiorem. Non eſt ergo portio ſphæroidis cono maior. Verum ſi fieri poteſt, eſto minor eodem. Rurſus autem inſcribatur portioni figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus compoſita hoc pacto, ut circumſcripta excedat inſcriptam minus eo quo conus z excedit portionem, & cætera ſuperioribus eadem diſponantur. Cum itaque inſcripta figura ſit portione minor, & circũſcripta minus excedit inſcriptam, quàm conus z portionem: ſequetur ex hoc, figuram circumſcriptam cono z minorem eſſe. Item primus cylindrus eorum qui ſunt in toto cylindro, axem habens d e, ad primum cylindrum in figura circumſcripta conſtitutum, & axem eandem habẽtem, eam habet proportionem, quam ultimum ſpacium eorum quæ ad x n adiacent, latitudinem habentiũ æqualem ipſi b d ad ſe ipſum. utraq; enim ſunt æqualia. & ſecundus cylindrus eorum qui ſunt in cylindro toto, axem habens æqualem ipſi d e, ad cylindrum ſibi coniunctum in figura circumſcripta conſtitutum, eam habet proportionem, quam ſecundum ſpacium eorum quæ ipſi n x adiacẽt, latitudinem ipſi b d æqualem habentium, habet ad gnomonem ablatum ab eo, & aliorum cylindrorum in toto cylindro conſtantium, qui axem habent ipſi d e æqualem: unuſquiſq; ad cylindrum ſibi coniunctum in figura circumſcripta conſtitutum, eam habet proportionem, quam ſpacium ſibi correſpondens eorũ quæ ad n x adiacent, ad gnomonem ablatum ab eo ante ultimum dictum. Omnes igitur cylindri, qui in toto cylindro conſiſtunt, ad omnis cylindros in figura circumſcripta conſtitutos eam habebunt proportionem, quam omnia ſpacia ad n x adiacentia, ad ſpacium æquale ſpacio ultimo poſito, & gnomonibus ablatis ab alijs eadem ratione, ut ſuprà factum eſt. Cum igitur oſtenſum ſit, ſpacia omnia ad n o adiacentia, ad ſpacia omnia excedentia forma quadrata, dẽpto maximo, maiorem habere proportionem, quàm x n ad lineam æqualem utriſq; ſimul, dimidiæ n o, & tertiæ parti x o, conſtat eadem ſpacia ad reliqua quæ ſunt æqualia ultimo ſpacio poſito, & gnominibus qui à reliquis ſunt ablati, minorem proportionem habere, quam n x ad lineam æqualem utriſq; ſimul, dimidię n o, & duabus tertijs ipſius x o. Vnde ſequitur, cylindrũ quoq; qui baſim habeat cum portione eandẽ, & axem eundem, ad figuram circumſcriptam minorem habere proportionem, quàm f d ad h r. quam autem proportionem habet f d ad h r, eam habet dictus cylindrus ad conum z. minorem igitur habebit dictus cylindrus ad circumſcriptam figuram, quàm ad conum z: quod quidem eſſe non poteſt. nam oſtenſum eſt, figuram circumſcriptam cono z eſſe minorem. Non eſt igitur portio ſphæroidis minor cono z: neque, ut prius oſtendimus, maior: neceſſe eſt igitur, eidem eſſe æqualem.

32 SI figura ſphęroidis plano ſecetur non ſuper axem erecto, neq; per centrum ducto, eius portio minor ad abſciſorem coni, qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, eam habebit proportionem, quam utraq; ſimul linea dimidia eius quæ iunget uertices portionum effectarum, & axis maioris portionis ad axem portionis maioris. Diuidatur itaq; aliqua figura ſphæroides, ut dictũ eſt: & diuiſa ipſa alio plano per axem ducto, erecto ſuper planũ ſecans, eſto figuræ ſectio a b c d coni acutianguli ſectio: plani autem ſecantis figuram ſit a c linea recta. & ducantur p r, s t ęquediſtantes ipſi a c, & contingentes ſectionem coni in punctis b, f: & ab eis exeant plana æquediſtantia plano ſecundum a c ducto. contingent quoq; ipſam ſphæroidem in punctis e, f: & erunt uertices portionum cõiuncti, ducta b f linea. ipſa uero tranſibit per centrum: & eſto centrum ſphęroidis & ſectionis coni acutianguli h. Quoniam igitur poſitum eſt, figuram ſecari plano ſuper axem non erecto, ſectio erit coni acutianguli ſectio, & eius diametros c d. Sumatur cylindrus axem habens in directum b d, in cuius ſuperficie erit coni acutian-

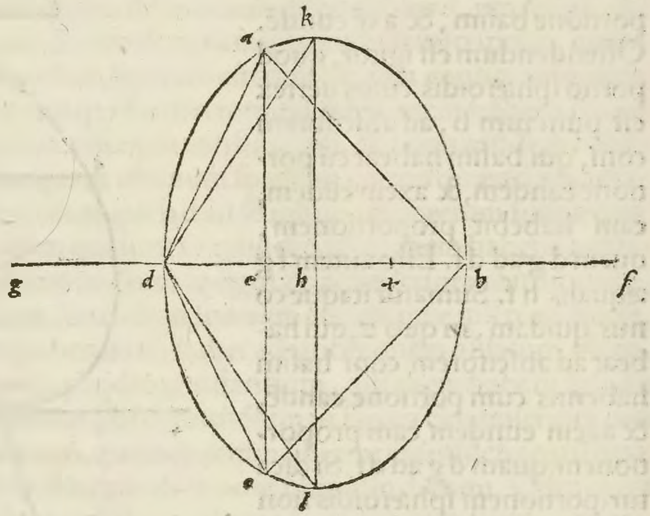
cutianguli ſectio circa diametrum a c conſtituta: & conus qui habeat uerticẽ punctum b, in cuius ſuperficie erit coni acutianguli ſectio circa diametrum a c conſtituta: erit iam quoddam cylindri fruſtum, quod baſim habet cum portione eandem, & axem eundem: & abſciſſor coni qui habeat eãdem cum portione baſim, & axẽ eundẽ. Oſtendendum eſt igitur, quod portio ſphæroidis, cuius uertex eſt punctum b, ad abſciſorem coni, qui baſim habeat cũ portione eandem, & axem eũdem, eam habebit proportionem, quam d g ad d f. Eſto autem f g æqualis h f. Sumatur itaque conus quidam, in quo z, qui habeat ad abſciſorem coni baſim habentis cum portione eandẽ, & axem eundem, eam proportionem, quam d g ad d f. Si dicatur, portionem ſphæroidis non eſſe æqualem cono z, eſto primum, ſi fieri poteſt, maior eo: & inſcribatur portioni figura ſolida, & altera circumſcribatur, ex cylindrorum fruſtis altitudinẽ æqualem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta excedat inſcriptam minus eo quo portio ſphæroidis excedit conum z. Similiter iam præcedenti oſtendetur, inſcriptam figuram cono z eſſe maiorem, & fruſtum cylindri quod baſim habet cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram inſcriptam maiorem habere proportionem, quàm ad conum z: quod eſſe non poteſt. Non erit ergo portio ſphæroidis cono z maior. Sed eſto item, ſi eſſe poteſt, minor: & rurſus inſcripta ſit portioni ſolida figura, & altera circumſcripta ex cylindricis fruſtis æqualem altitudinem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta figura excedat inſcriptam minus eo, quo conus z excedit portionem. Rurſus eadem ratione oſtendetur, circumſcriptam figuram cono z eſſe minorem, & fruſtum cylindri quod baſim habeat eandem cum portione, & axem eundem, ad circumſcriptam figuram habere minorem proportionem, quàm ad conum z: quod eſſe non poteſt. neq; igitur ſphæroidis portio minor eſſe poteſt cono z. quare conſtat, id quod ſuſceperamus demõſtrandum.



CViuslibet ſphęroidis figuræ plano ſectæ ſuper axem erecto, nõ aũt per centrũ ducto, maior portio ad conum qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, eam habet proportionem, quam habet linea æqualis utriſq; ſimul, dimidio axi ſphęroidis, & axi minoris portionis ad axem minoris portionis. 33

Secetur itaq; ſphæroides, ut dictum eſt: ſecta uero ipſa figura plano alio ſecundum axem ducto, ſuper planum ſecans erecto, figuræ quidem eſto a b c coni acutianguli ſectio. eius autem diametros, & axis figurę b d: plani uero ſecantis ſectio ſit c a linea recta. erit autem ipſa angulis rectis ſuper b d. Eſto autem maior portionum, cuius uertex ſit b punctum, & centrum ſphæroidis ſit h. addatur autem d g ad e d, ipſi d h æqualis, & b f eidem ſit æqualis. Demonſtrandum eſt, portionem ſphæroidis cuius uertex b punctum, ad conum qui habeat baſim eandem cum portione, & axem eundem, eam habere proportionem, quam e g habet ad e d. Secetur

cetur iam sphæroides plano per centrum ducto, & super axem erecto: & à circulo inde facto conus exurgat, qui uerticem habeat punctum d. Est iam tota sphæroides dupla portionis habentis basim circulum circa diametrum k l constitutum, uerticem autem punctum d. Dicta uero portio dupla est coni, qui habeat basim cum portione eandem, & axem eundem. hæc enim ostensa sunt. Tota igitur sphæroides, dicti coni quadrupla existit. conus autem iste, ad conum habentem basim circulum circa diametrum a c descriptum, uerticem uero punctum d, habet proportionem compositam ex ea quam habet h d ad e d, & ex ea quam habet quadratum k h ad quadratum e a: quæ est eadem ei quam habet cōtentum sub b h, h d, ad id quod sub b e, e d continetur. quam uero proportionem habet h d ad e d, hanc habeat x d ad h d. Habebit igitur contentum sub x d, b h, ad contentū sub b h, h d, eam quam d h ad d e. Proportio autem composita ex ea quam habet contentum sub x d, h b, ad contentū sub b h, h d: & ex ea quam habet contentum sub b h, h d, ad contentum sub b e, e d: eadem est ei quam habet contentum sub x d, b h, ad contentum sub b e, e d. Conus igitur qui basim habet circulum circa diametrum k l constitutum, uerticem uero punctum d, ad conum qui basim habeat circulum circa diametrum a c descriptum, uerticem uero punctum d, eam habet proportionem, quam contentum sub x d, b h, ad contentum sub b e, e d. Conus autem qui basim habet circulum circa diametrum a c, uerticem uero punctum d, ad portionem sphæroidis, quæ basim habeat eandem eidem, & axē eundem, eam habet proportionem, quam contentum sub b e, e d, ad contentum sub f e, d e: hoc est, b e ad e f. nam minus quàm dimidium ipsius sphæroidis, ad conum qui basim habeat cum portione eandem, & axem eundem, ostensum est, quod eam habet proportionem, quam linea quæ sit æqualis utrisq; simul, dimidio axi sphæroidis, & axi maioris portionis, ad axem maioris portionis. ea uero est illa quam habet f e ad b e. Conus igitur qui est in dimidia sphæroide, ad portionem sphæroidis dimidio illius minorem, eam habet proportionem, quam cōtentum sub x d, b h ad contentum sub f e, d e. quoniā autem tota sphæroides, ad conum in eius dimidio constitutum, eam habet proportionem, quam compræhensum sub f g, x d, ad compræhensum sub b h, x d. nam utraq; quadrupla est: Conus autem in dimidio sphæroidis constitutus, ad portionem eo dimidio minorem, eam habet proportionem, quam cōtentum sub x d, b h, ad contentū sub f e, e d: sphæroides quoq; totum ad portionem eius minorem, eam habet proportionem, quam contentum sub f g, x d, ad contentum sub f e, e d. quare & maior sphęroidis portio, ad minorem, eam habet proportionem, quam excessus quo cō tentum sub f g, x d excedit contentum sub f e, e d. Contentum autem sub f g, x d, excedit contentum sub f e, d e, eo quod continetur sub x d, e g, & eo quod continetur sub f e, x e. Habet igitur maior portio ad minorem, eam proportionem, quam id quod est æquale utrisq; simul, contento sub x d, e g, & contento sub f e,

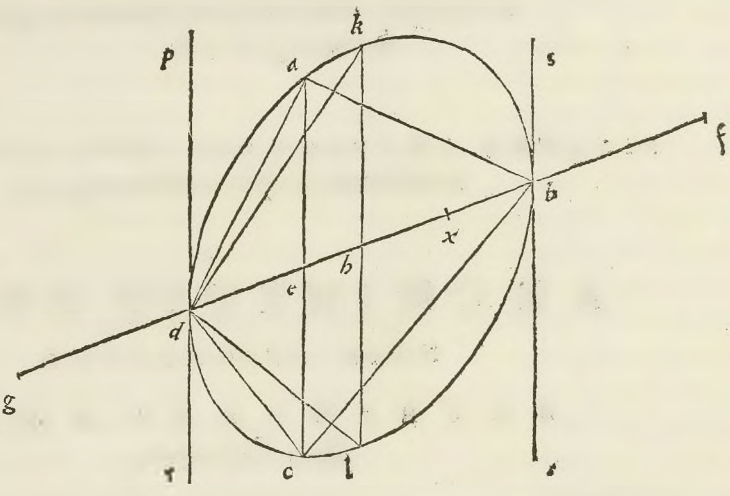


x e,

xe ad contentum ſub f e,e d: portio uero ſphæroidis minor, ad conum baſim habentem cum portione eandem, & axem eũdem, eam habet proportionem, quam contentum ſub f e,e d ad contentum ſub b e,e d: habet enim eam proportionem, quam f h ad b e. Conus autem in minori portione conſtitutus, ad conum qui eſt in portione maiori, eam habet proportionem, quam cõtentum ſub b e,e d ad quadratum b e. nam cum coni habeant baſes æquales, altitudinum proportionem ſequentur: habet itaq; & maior portio ſphæroidis ad conum in ea inſcriptum eam proportionem, quam habet id quod eſt ęquale utriſq; ſimul, contento ſub x d, e g, & contento ſub f e, x e, ad quadratum b e. Ea uero eadem eſt ei quam habet e g ad e d. nam contentum ſub x d, e g, ad contentum ſub x d,e d, eam habet proportionem, quam e g ad e d: & contentum ſub f e, x e, ad contentum ſub f e, h e eam habet proportionem, quã e g ad e d. Propterea quod linea x d, h d, d e, ſunt inter ſe proportionales, & h d æqualis g d: igitur id quod æquatur utriſq; ſimul contento ſub x d, e g, & contento ſub f e, x e, ad id quod æquatur utriſq; ſimul, contento ſub x d,e d, & contento ſub f e, h e, eam habet proportionem, quam e g ad e d: quadratum uero ipſius b e, æquatur utriſq; ſimul, contento ſub x d,e d, & contento ſub f e,h e. nam quadratum ipſius b h, æquatur contento ſub x d,e d. Exceſſus autem quo quadratum b e excedit quadratum b h, æquatur cõtento ſub f e, h e. cum b h & b f ſint æquales. Conſtat igitur, quod maior ſphæroidis portio ad conum, qui baſim habeat cũ portione eandem, & axem eundem, eam habeat proportionem, quam e g habet ad e d.

SI figura ſphæroidis plano ſecetur, neq; ſuper axem erecto, neq; per cẽtrum ducto: maior eius portio ad eum coni abſciſorem qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, habebit eam proportionẽ, quam linea quæ ſit æqualis utriſq; ſimul, dimidiæ illius quæ portionum inde effectarum uertices iunxerit, & axi minoris portionis ad axem minoris portionis habuerit. 34

Secetur itaque ſphæroides, ut dictum eſt. ipſo autẽ secto, per aliud planum ſecundum axem ductum, et erectum ſuper planũ ſecans, figuræ quidem ſectio eſto a b c d coni acutianguli ſectio: plani autẽ figuram ſecantis ſit a c linea recta: ducãtur autem p r, ſ t æquediſtantes ipſi a c, & contingentes in punctis b d coni acutianguli ſectionem:



& exeant ab eis plana æquediſtantia plano ſecundum a c ducto. contingẽt quoq; ipſa ſphæroidem in punctis b d, & erunt uertices portionum puncta b, d: ducatur iam b d linea recta coniungens uertices portionum effectarum: trãſibit autem ipſa per centrum, & eſto h cẽtrum maior portio dimidio ſphæroidis. ſit illa cuius uertex eſt b: adijciatur ipſi d h æqualis d g, & b f eidem. Oſtendendum eſt, maiorem ſphæroidis portionem ad abſciſorem coni, qui habeat baſim cum portione eandem, & axem eundem, eam habere proportionem, quam e g ad e d. ſecetur enim ipſum ſphæroides plano per centrum ducto, & æquediſtanti ipſi plano quod ſecundum a c ductum eſt: & inſcribatur dimidiæ portioni ſphæroidis abſciſor coni, qui uerticem habeat punctum d. & quam proportionem habet d h ad e d, eam habeto x d ad h d: ſimiliter iam ſuperioribus oſtendetur, abſciſorem coni dimidio ſphærodi inſcriptum, ad abſciſorem coni in minori inſcripto eam habere proportionem, quam contentum ſub x d, b h habet ad contentum ſub b e, e d: & abſciſor coni in minori portione cõſtitutus ad portionem cui eſt inſcriptus, eam habet proportionem, quam contentum ſub b e, e d ad contentum ſub f e, e d. habebit ergo abſciſor coni in dimidia ſphæroide inſcriptus, ad portionem minorem ſphæroidis eam proportionem, quam contentum ſub x d, b h ad contentum ſub f e, e d. Quare tota ſphæroides habebit ad abſciſorem coni in dimidia ſphæroide inſcripti eam proportionem, quam contentum ſub f g, x d ad contentum ſub b h, x d. nam utrumque eſt quadruplum utriuſq;. Abſciſor autẽ coni dictus ad minorem ſphæroidis portionem eam habet proportionem, quam contentum ſub x d, b h, ad contentum ſub f e, e d: habebit ergo tota ſphæroides ad eius minorem portionem eam proportionem, quam habet contentum ſub f g, x d ad contentum ſub f e, e d. ipſa uero maior portio ad minorem eam habet proportionẽ, quam habet exceſſus, quo contentum ſub f g, x d excedit cõtentum ſub f e, e d, ad contentum ſub f e, e d: minor autem portio ad abſciſorem coni in ea deſcripti, eã habet proportionem, quam contentum ſub f e, e d, ad contentum ſub b e, e d. nã oſtenſum eſt eam habere proportionem, quã f e ad b e. Abſciſor uero coni in maiori portione deſcriptus, eam habet proportionem ad abſciſorem coni deſcriptũ in minore, quam contentum ſub b e, e d ad quadratum b e. Abſciſores enim conorum dicti habent inter ſe proportionem ſuarum altitudinum: eorum uero altitudines eam habent inter ſe proportionem, quam d e ad e b: habet autem maior ſphæroidis portio ad abſciſorem coni in ea deſcriptũ eam proportionem, quã exceſſus quo contentum ſub f g, x d excedit contentum ſub f e, e d ad quadratum b e habet. Hæc autem eadem proportio, eadem ratione, ut ſuprà factum eſt, demonſtratur eſſe eadem, quam habet e g ad e d.

FINIVNT ARCHIMEDIS INVENTA DE CONOIDALIBUS & ſphæroidibus figuris.

ARCHIMEDIS DE LINEIS SPIRALIBVS.

ARCHIMEDES DOSITHEO Salutem.

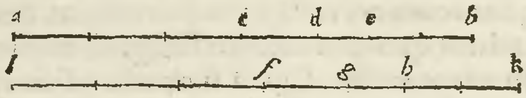
EORVM quæ ad Cononem miſſa fuerant theorematum, quorum aſſiduè à me flagitas ut demonſtrationes conſcribam, complurium quidem confectas habes in illis quæ ab Hercule allata ſunt, quaſdam uero in hoc libro collegi, quas ad te mitto. Verũ ne mirere, ſi in huiuſmodi demonſtrationũ expoſitionem plurimum temporis conſumpſimus. Hoc enim nobis accidit, propter id quod antequam de his ſcriberemus, eos percontari & perquirere ſtatueramus, qui circa doctrinas uerſati ſunt, quiq; ſibi iſthæc inueſtiganda propoſuerant. Nam certa quædam ſunt in Geometria theoremata, quæ non breuiter tradi

poſſe

posse principio uideantur, eorum inuestigationem tempore intercipiẽte. Conon quidem non temporis satis ad hęc excogitanda sortitus, uitam permutauit, & ipsa reliquit inexplicata, cum illa inuenisset, & alia quàm plurima perquisisset, ac multum adeò geometricas facultates ampliasset. Nouimus enim quantum ingenij, quàm admirabile in eo uiro iudicium uigebat, quàm non uulgaris circa doctrinas & assidua opera, quàm excellens studium. Multis autem annis post Cononis mortem neminem accepimus inuentum fuisse, qui ne unum quidem problema tractare tentarit. Equidem statuo eorum unumquodq; perlustrare. nam duo quædam ex his quæ habentur in Conone, sunt quæ minime depræhensa fuere. Tandem uero accedemus, ut hi qui cuncta se gloriantur inuenisse, nullam autem proferunt eorum quæ profantur demonstrationem, reprehendantur. nam ex his quæ à se inuenta uolunt, falsa quædam, & à naturæ sunt potestate penitus aliena. Quorundam uero iam tenes demonstrationes ad te missas, quorundam in hoc libro contulimus, dignum existimantes esse ut ea tibi explicaremus. Primum itaq; problematum erat, Sphæra data spacium inuenire quod superficiei illius esset æquale. quod quidem quamprimũ fuit declaratũ ex libro quem de Sphæra confecimus. Nam cum ibi demõstratum esset, superficiem sphæræ maximo in ea circulo quadruplam haberi, illicò patuit spaciũ inueniri posse superficiei sphęræ æquale. Secũdum autem, Cono seu cylindro dato sphæram ipsi cono uel cylindro æqualem inueniri. Tertiũ, Datam sphæram sic secare, ut eius portiones inter se propositam proportionem retineant. Quartũ, Datam sphæram sic secare plano, ut portiones superficiei sphæræ seruent inter se datam proportionem. Quintum, Datã sphæræ portionem alteri sphæræ portioni datæ similem reddere. Sextum, Duabus portionibus siue eiusdem siue nõ eiusdem sphęræ datis, tertiam sphæræ portionem inuenire, quæ alteri portionũ datarum sit similis, superficiem uero superficiei alterius portionis habeat æqualem. Septimum, A' data sphæra portionem ea ratione abscindere, ut abscisa inde portio ad conum qui eadem base & eadem constat altitudine, cum portione quamcunq; datam proportionem habeat, quæ quidem proportio ea quam tria ad duo habent, proportione minime maior existat. Horum igitur inuentorum omnium Hercules attulit demonstrationes. Id autem quod post hæc erat separatum, falsum existit. Est autem huiusmodi: Si sphęra plano secetur in partes inæquales, maior portio habebit ad minorem eam proportionem duplicatam, quam maioris portionis superficies ad minoris habet superficiem. Cõstat autem ex his quæ ad te missa sunt, hoc falsum esse. Erat & itẽ hoc separatum in illis. Si sphęra in partes inæquales secetur, plano erecto super una quacunq; ex his quæ sunt in sphæra diametro, maior portio ad minorem eam proportionem habebit, quam maior diametri portio ad minorem. Nam maior sphæræ portio ad minorem habet proportionem minorem, quàm sit ea quæ est superficiei maioris ad superficiem minoris duplicata proportio: maiorem uero, quã sesquialtera illius. Erat autem & ultimum problema separatum, falsum: Quod si sphæra alicuius diametro in partes inæquales scindatur, ita ut quadratum maioris partis quadrato minoris existat triplum, & per punctum huius diuisionis agatur planum erectum super diametrum ipsam, figura tali specie constans qualis est uidelicet sphæræ portio, maxima est aliarũ portionum omnium quæ habeant superficiem sibi æqualem. Quod autem hoc falsum sit, ex his theorematibus manifestum est, quæ ad te prius missa sunt. Nam demonstratum est, dimidiam sphæram esse omnium sphæræ portionum maximam, quæ æquali inter se superficie sphærica contineantur. Posthæc circa conum quoq; hæc problemata habentur: Si coni rectanguli sectio diametro quiescente circumferatur, ita ut diametros sit axis; figura quæ à coni rectanguli sectione complectitur, conoidale uocetur. Quod si figuram conoidalem planum contigerit, & alterum planum ducatur plano cõtingenti æquedistans, quod aliquam conoidalem portionem abscindat, huius portionis abscisæ basis appelletur planum abscindens, uertex uero punctum illud in quo alterum planũ conoidale cõtingit. Quod si dicta figura plano secetur erecto super axem, eius sectionem constat circulũ fore. Quod aũt portio abscisa sesquialtera erit coni basim habentis cum portione eandem, & axem eundem, hoc nos demonstrare oportet. Item si conoidalis duæ portiones abscindãtur planis utcunq; ductis, quod sectiones inde prouenientes sint coni acutianguli sectiones cõstat, si plana abscindentia super axem non fuerit erecta. Quod autem portiones habeãt inter se proportionẽ eam quam habent inter se potestate lineæ ductę à uerticibus earum æquedistantes axi usque ad plana abscindentia, hoc restat demõstrare. Horum enim ad te nondum sunt missæ demonstrationes. Post hæc uero circa spirales lineas hæc fuerãt proposita. Est autem hoc ueluti aliud problematum genus, nihil cum prædictis communicans, de quibus tibi in hoc libro conscripsimus demonstrationes. Sunt autem huiusmodi. Si recta linea in plano altero eius termino quiescẽte circumferatur, donec ad locum redierit unde primo cœpit moueri, & simul cum hac circumducta linea punctum feratur, & ipsum sibi ipsi æquali semper uelocitate moueatur secundum ipsam lineam motam, incipiatq; à termino lineæ quiescente uersus alterum ferri pũctum huiusmodi spiralem lineam in plano describet. Dico itaq; spacium à linea spirali, & à linea recta quæ circumducta fuit comprensum, tertiam partem esse circuli eius qui centrum habeat punctum quiescens, interuallum uero secundum eam lineæ motæ partem, quæ à puncto moto fuerit in una circumuolutione permeata. Et si lineam spiralem linea recta contigerit in puncto quod fuit in spirali ultimo productum, alia item linea recta à puncto circumductæ quiescente ducatur ad ipsam circumductam, & in locum unde moueri ceperat regressa secundum angulos rectos quousq; cum contingente concurrat: dico hanc lineam productam circumferentiæ circuli in prima circumuolutione producti esse æqualem. Item si linea circumducta, & punctum latum secundum illam pluribus circumuolutionibus circumferantur, & in locum unde moueri ceperãt multotiens restituantur: dico spacij illius quod in secunda circumuolutione fuerit à spirali linea compręhensum, duplum illud existet quod in tertia compræhendetur. Quod uero in quarta triplum, quod in quinta quadruplum, & sic deinceps semper spacia in posterioribus circumuolutionibus conclusa, secundum consequens augmentum numerorum multiplicia erunt, ad spacium in secunda reuolutione conclusum. Spacium uero in prima reuolutione contentum, sexta pars existet spacij in secunda reuolutione comprensi. Item si in spirali linea duo puncta notentur, & ab eis iungantur lineæ rectæ ad terminum lineæ circumductæ quiescentem, & duo circuli circumscribantur centro quod sit punctum quiescens secundum interualla duarum linearum rectarum, quæ ad quiescentem lineæ spiralis terminum ductæ fuerunt, & earum linearum minor extrà ducatur: dico spacium comprensum à circumferentiæ maioris circuli parte illa quæ in eandem partem cum linea spirali fertur, mediaq; inter lineam spiralem & rectam lineam habeatur, & à linea recta extrà ducta, & à linea spirali ad spacium compræhensum sub minoris circuli ea circumferentiæ parte quæ inter eandem lineam spiralem & lineam rectam media existit, & sub linea quæ earũ terminos iungit, & sub eadem linea spirali eam proportionem habet, quam linea semidiametros maioris circuli cum duabus tertijs illius excessus, quo semidiametrum minoris excedit, habet ad eam semidiametrum maioris cum una dicti excessus tertia parte. Istorum itaq; & aliorum circa spirales lineas sunt à me in hoc demonstrationes collatæ. Præmittuntur uerò ueluti in cæteris quæ geometrica disciplina sunt tractata, quædam, quæ ad illorum demonstrationem sunt pernecessaria. Sumo autem in his quoq; ea quæ in alijs quos prius edidi libris sumpta fuerunt,

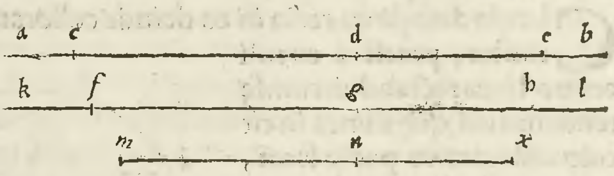
runt, uidelicet linearum inæqualium & spaciorum inæqualium excessus, quo ma ius excedit minus, illi adiectus fieri potest ut uincat omnem propositam quorumcunqꝫ inter se relatorum proportionem.

SI secundum quampiam lineam punctum feratur, ipsum sibi ipsi æque uelociter, & in latione illa duas lineas permeet, lineæ illæ eandē inter se proportionē habebunt, quam tempora habent quibus punctum lineas permeauit. Feratur itaqꝫ quoddā pūctum secundū lineam a b, ęqueuelociter sibiipsi. Et sumanť in ea duę lineæ c d, d e. Esto autem tēpus, in quo punctū permeauit lineā c d, esto f g. in quo uero permeauit d e, esto g h.



Ostendendum est igitur, quod c d linea ad lineam d e eam habet proportionem, quam tempus f g ad tempus g h. Ex lineis itaqꝫ c d, d e componātur lineæ a d, d b, secundum quamcunqꝫ compositionem, ita ut a d excedat d b. & quotiēs c d linea sumitur in a d, totiens tempus f g sumatur in tempore l g: quotiens autem d e linea sumitur in d b, totiens tempus g h sumatur in g k. Quoniam itaqꝫ supponitur pūctum æqueuelociter latum esse per lineam a b, manifestum est in quo tempore lineam c d permeauerit, in tanto quamcunqꝫ ipsi c d æqualem permeaturum esse. quare palàm est, quod lineam a d compositam in tanto tempore permeabit, quantum est totum l g tempus, cum totiens sumatur c d linea in linea a d, quotiens tempus f g in tempore l g, & eadem ratione in tanto tempore punctum permeabit lineam d b, quātum est g k tempus. Cum igitur a d linea sit maior b d, manifestum est, quod in maiori tempore punctum permeabit lineam a d, quàm lineam b d. quare colligitur, tempus l g maius esse tempore g k. Similiter autem ostendetur, si ex temporib. f g, g h componantur tempora, secūdum quamcūqꝫ cōpositionem, eo pacto ut alterum excedat reliquum, quod compositæ ex c d, & d e lineæ secundum eandem compositionem altera alteram superabit, eodem ordine sumptæ cū temporibus. Constat igitur c d eādem ad d e habere proportionem, quam habet tempus f g ad ipsum tempus g h.

SI duo puncta in duabus lineis ferantur, unumquodqꝫ sibiipsi æqueuelociter, sumantur'que in utraqꝫ linea duæ lineæ, primæ duæ in temporibus æqualibus à punctis permeatæ, & secundæ duæ in altera linea, sumptæ lineę eandem inter se proportionem habebunt. 2 Esto per lineam a b punctum feratur, ipsum sibiipsi æqueuelociter: & alterum item punctum per lineam k l. Sumantur aūt in a b duæ lineæ c d, d e et in linea k l sumanť f g, g h. in quo autem tempore punctum per a b latum lineam c d permeauerit, in tanto alterū pūctum per k l latum permeet f g.

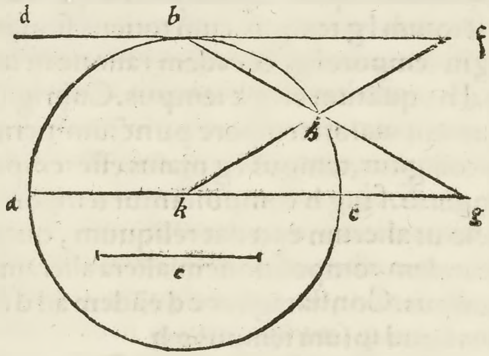


Similiter in tanto tempore punctum permeet lineam d e, in quanto alterum g h. Ostendendum est, c d eādem habere ad d e proportionem, quam f g ad g h. Esto itaqꝫ tempus, in quo punctum lineam c d permeauit, m n. in hoc itaqꝫ eodem tempore alterum punctum permeauit f g. Et item esto tempus n x, in quo punctum permeauit lineam d e, & in hoc eodem alterum punctum permeauit lineam g h. Eandem itaqꝫ proportionem habebit c d ad d e, quam tempus m n ad n x: & f g ad g h eam habet, quam tempus m n ad n x. Constat igitur, c d eādem habere ad d e proportionem, quam habet f g ad g h.

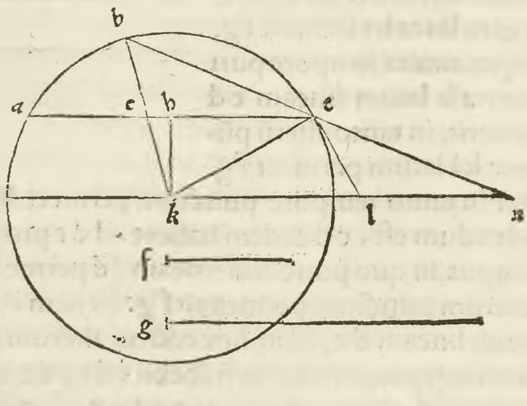
3 CIrculis quacunque multitudine datis inueniri quædam linea recta potest, quæ omnibus simul datorum circumferentijs maior existat. Si enim unicuique circulorum figura multorum angulorum circumscribatur, manifestum est, quod linea recta ex omnibus earum lateribus composita, omnibus simul circulorum circumferentijs maior existat.

4 DVabus lineis inæqualibus datis, altera recta, altera circulari potest inueniri quædam recta linea, quæ maiore datarum linearum minor, & minore maior habeat. Si enim excessus quo recta superat circularē, totiens sibijpsi coaceruetur, donec maiorē rectā recta data cōficiat, deinde recta data in tot partes æquales diuidatur, quotiens excessus sibijpsi fuerit coaceruatus, una ex partib. illis ipso excessu minor existet. Quod si circularis sit maior recta, si ipsi rectæ una pars q̄ minima adijciatur, constat hanc rectam sic confectam, maiore linearū minorem, & minore maiorem haberi. nam quæ utrinq; adijcitur pars, aut detrahitur, excessu minor existit.

5 CIrculo dato, & linea recta ipsum contingente, potest à cētro circuli linea quædam recta ad rectam contingentem hoc pacto duci, ut ea ipsius ductæ pars quæ inter cōtingentem & circuli circumferentiam intercipitur, ad semidiametrū circuli habeat minorem proportionem, quàm ea circumferentiæ pars quæ inter contactum & lineam ductam media existit ad quamcunq; datam circumferentiæ partem. Esto circulus datus a b c, cuius centrum sit k, & recta linea d f cōtingat circulum in puncto b. detur etiā pars circumferentiæ, quæcunq; fuerit. Potest autem ea circumferentiæ parte data sumi linea recta maior, sitq; ea sumpta e. Ducatur autem à centro k h linea à g æquedistans ipsi d f, & ponatur h g æqualis ipsi e, & tendens ad b à centro k ducta ad h educatur, donec concurrat cum contingente in puncto f. Eandem igitur habet proportionē h f ad h k, quàm b h ad h g. igitur f h ad h k minorem habet proportionem, quàm b h circumferentiæ pars ad datam circumferentiæ partem, quoniam b h linea recta est minor arcu b h, & linea h g maior est data circumferentiæ parte.

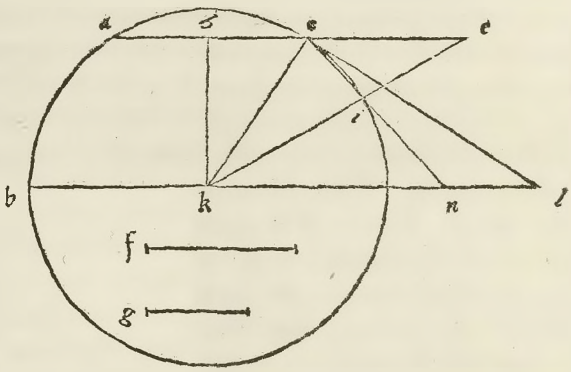


6 CIrculo dato, linea recta in eo deinde collocata, quæ quidem diametro minor existat, potest à circuli centro linea recta ad circumferentiam duci, quę à linea in circulo collocata eo pacto secet, ut pars ipsius lineę ductæ, quę inter circumferentiam et lineā collocatā media depręhendit, ad lineā quæ iungit lineæ collocatæ & ductæ terminos in circumferentia cōstitutos, habeat quamcunq; proportionē datam, dum tamē proportio illa minor existat proportione, quam habet dimidia lineæ in circulo collocatæ, ad lineam quæ à centro sit ad collocal-



locatam perpendiculariter educta. Esto datus circulus a b c, cuius centrum k, & in ipso linea collocata recta a c minor diametro, & habeat f ad g minorem proportionem, quàm c h ad h k, quæ sit à cẽtro k ad lineam a c perpendiculariter educta, Ducatur autem à centro linea æquedistans ipsi a c, quę sit k n: & educatur à puncto c secundũ angulos rectos linea c l usque ad lineam k n. trianguli itaq; c h k, & c k l sunt similes. quare erit sicut c h ad h k, ita c k ad c l. Igitur f ad g minorẽ proportionem habet, quàm c k ad c l. Quam itaq; proportionẽ habet f ad g, eam habeat c k ad maiorem ipsa c l, quæ sit b n. Ponatur autem b n inter circumferentiam, & lineam collocatam per punctum c. Hoc enim sic potest diuidi, ut pars intra circulum collocetur, pars extrà per punctum c adhæreat ipsi k n in puncto n, cum ipsa sit maior c l. Esto itaq; sic diuisa & collocata. demum ducatur k b linea secans lineam a c, primo collocatam in puncto e. Quoniam igitur k c ad b n eam proportionem habet, quam f ad g, habebit quoque e b ad b c, sicut k c ad b n. igitur & sicut f ad g. quare constat propositum.

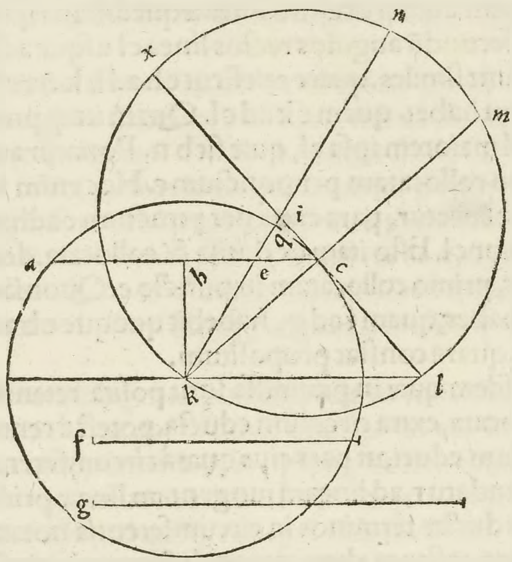
EIsdem quæ in præmissa sunt posita retentis, & linea quæ in circulo fuerit collocata, extra circulum educta, potest à centro ad eductam linea recta sic extra circulum educi, ut pars eius quæ à circumferentia & ab educta extra circulum cõpræhendatur, ad lineam iungentem lineæ principio eductæ, & à centro extra circulum ductæ terminos in circumferentia notatos habeat quamcunque proportionem proposit am, dum tamen dicta proportio sit ea proportione maior quam habet dimidia linea in circulo collocata, ad lineam quæ à centro ad ipsam collocatam sit perpendiculariter educta. Retineantur itaque ea quæ in præmissa posita sunt, & linea in circulo collocata extra ducatur, & sit proportio data, quam habet f ad g maior proportione, quam habet c h ad h k: erit quoq; maior ea quam habet k c, ad c l. Quam itaq; proportionem habet f ad g, eam habet k c ad minorem c l, quæ sit i n tendẽs in c. Potest autem sic diuidi, & cadet intra lineam c l, cũ sit minor ipsa c l. Cũ igitur eandem habeat proportionem k c ad i n, quam f ad g, & ipsa e i ad i c eãdem habebit proportionẽ, quam f ad g. 7



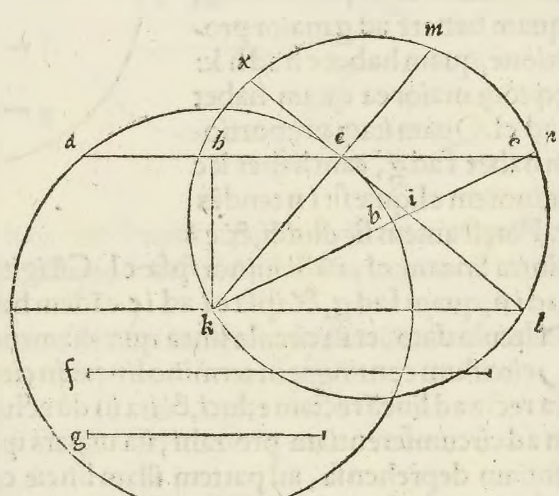
CIrculo dato, et in circulo linea quæ diametro minor sit, altera item linea quæ circulum contingat in termino lineæ in circulo datæ: potest à centro circuli linea recta ad lineã rectam educi, & ita in directum per lineæ in circulo datę sectionem ad circumferentiam protrahi, ita ut pars ipsius inter lineam rectam & circũferentiam deprehensa, ad partem illam lineæ contingentis quæ intra lineam ipsam à centro ductam, & punctũ contactus concludetur, habeat quamcunq; proportionem datam, dũ tamen dicta proportio minor fuerit ea proportione, quam dimidia lineæ in circulo datæ habet ad lineam quæ à centro sit ad ipsam in circulo datam perpendiculariter educta. Esto circulus datus a b c d, eius centrum k, & linea recta sit in circulo data a c minor diametro, & x l contingat circulum in puncto c. & proportio quam habet f ad g, sit minor ea quam habet c h ad h k. Erit quoq; minor ea quam habet c k ad c l, si k l sit æquedistanter ducta ipsi h c. habeat itaq; k c ad c x, eam quam habet f ad g proportionem. quare c x erit maior c l. Describatur circulus circa puncta k x l. Quoniam igitur x c maior est ipsa c l, & sunt ambæ ad angulos rectos lineæ k c m, potest duci linea i n æqualis lineę c m, 8

quæ

quæ tendat ad k. Igitur id quod continetur sub x i, i l ad contentum sub k e, i l, eā habet proportionem, quam x i ad k e. & contentum sub k i, i n ad contentum sub k i, c l, sicut i n ad c l, & sicut x i ad k e, & sicut c m ad c l, & x c ad k c, & ad k b. Et sicut x i ad k e, et sicut residua i c ad residuam b e eandem habebit proportionē, quā x c ad k c, & quam g ad f. Incidit autem k n in contingētem, & pars eius quæ inter circumferentiam & rectam a c capitur, uidelicet b e, ad partem cōtingentis inter k n, & cōtactum, deprensam eam habet proportionem, quam f ad g.

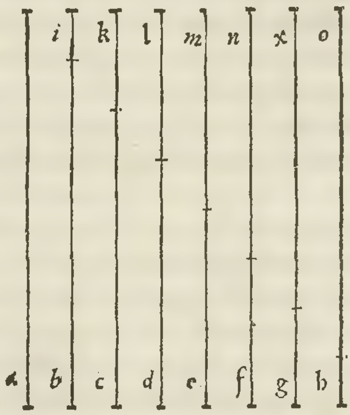


9 Eisdē quæ supra posita sunt retentis, & linea quæ in circulo datur extra circulum ducta, potest à cētro circuli ad ipsam extra ductā linea quædā recta sic duci, ut pars ipsius quæ inter circumferentiam & lineam extra ductam compræhenditur, ad partem lineæ contingentis quæ inter contactum & ipsam à centro ductam intercipitur, habeat quā cunq; datam proportionem: dum tamen proportio sit ea proportione maior, quā habet dimidia lineæ in circulo datæ, ad lineam quæ à centro sit ad ipsam perpendiculariter ducta. Esto datus circulus a b c d, & recta in circulo data minor diametro sit a c, quæ extra circulum ducatur per punctum c. & altera linea x c contingat circulum in puncto c: & proportio f ad g sit maior proportione c h ad h k. erit quoque maior proportione k c ad c l. Habeat igitur k c ad c x eā quam habet f ad g: ergo c x minor est ipsa c l. Rursus describatur circulus trāsiens per puncta x k l. cum igitur x c sit minor ipsa c l, & ambæ altera alteri ad angulos rectos insistūt, x c, & k m: potest i n poni æqualis ipsi c m, quæ tendat in punctum k. Cum itaque cōtentum sub x i, i l æquale est contento sub k i, i n: contentum uero sub l i, k e, est æquale contento sub k i, c l. propterea quod est sicut k e ad i k, ita l c ad l i. Sicut ergo x i ad k e, sic contentū sub k i, i n, ad contentū sub k i, c l. hoc est sicut n i ad c l, hoc idē est sicut c m ad c l. Est aūt sicut c m ad c l, ita x c ad k c, hoc est ad k b. Est igiť sicut x i ad k e, ita x c ad k b, & residua i c ad residuā b e, sicut x c ad k c. Quam aūt proportionem habet x c ad k c, eam habet g ad f. incidit igitur k e in lineam extra circulū ductā, & b e inter extra ductam & circūferentiā cōprensa ad c i, inter cōtactū & ipsam k e interceptā eam habet, quā f ad g proportionem.



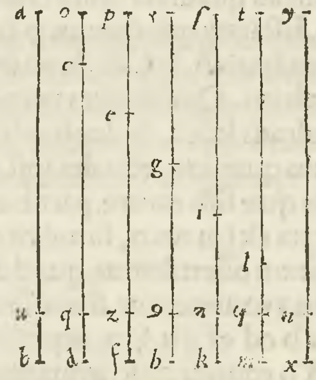
Si

SI lineæ quotcunq; numero consequenter disponantur, quæ sese æqualiter ex- 10
cedant, sitq; excessus breuissimæ illarum ęqualis: item aliæ sumantur lineæ nu mero prædictis æquales, magnitudine uero unaquæq; æqualis longissimæ: illarū quadrata omnium quæ sunt æquales lōgissimæ, & quadratum longissimæ, & cōtentum sub breuissima & linea æquali, omnibus simul æqualiter sese excedentibus: hęc omnia simul sumpta tripla erunt, ad quadrata linearum sese æqualiter ex cedentium simul sumpta. Sunto itaq; quotusq; lineæ continenter positæ, quæ sese æqualiter excedant, a b c d e f g h. Sit aūt h æqualis excessui: adijciatur uero ipsi b, linea i, æqualis ipsi h. ipsi quoq; c addatur k, æqualis ipsi g. ipsi d addatur l, æqualis f. ipsi e apponatur m, æqualis ipsi e. ipsi f addatur n, æqualis d. ipsi g addatur x, æqualis c. ipsi demum h addatur o, æqualis b. Hæ igitur quæ confectæ sunt, erunt inter se æquales, & longissimæ prædictarum. Est igitur ostendēdum, quod quadrata istarum omnium simul cum quadrato ipsius a, & eo quod continetur sub h, & sub æquali omnibus simul a b c d e f g h, tripla sunt ad quadrata simul omnium a b c d e f g h. Est itaq; quadratum b i æquale duobus quadratis b, & i, & duobus his quæ fiunt ex b in i. Quadratum uero k c est ęquale quadratis k & c, & duobus his quæ continentur sub c k. Similiter quadrata reliquarum quæ sunt æquales ipsi a, erūt æqualia quadratis partium suarum, & duobus his quæ sub earum partibus continentur. Quadrata igitur a b c d e f g h, & quadrata i k l m n x o, simul cū quadrato a, dupla sunt ad quadrata a b c d e f g h. Reliquum ostendemus, quod dupla eorum quæ sub partibus uniuscuiusq; lineę æqualis a continentur, simul sumpta cum contento sub h, & linea æquali omnib. simul a b c d e f g h, sunt æqualia quadratis a b c d e f g h. Quoniam itaq; duo quæ sub i & b continentur, æquantur duobus cōtentis sub h & b: duo autem quæ sub k & c, æquantur contento sub h, et quadrupla c, quia k est dupla ipsius h. Duo uero contenta sub l d, æquantur contento sub h, & sexcuplo ipsius d, quia l est tripla ipsius h. Similiter & alia dupla eorum, quæ sub partibus continentur, æquantur contento sub h & multiplici cuiuscunq; secundum numeros pares continenter lineæ sequenti multiplices. Omnia igitur simul sumpta cum eo quod continetur sub h, & sub æquali omnibus a b c d e f g h, ęquabuntur cōtento sub h, & sub æquali omnibus: ipsi a, & triplo ipsius b, quincuplo c, & semper impari secūdum numeros impares continenter multiplices lineæ sequentis. Quadrata quoq; ipsarum a b c d e f g h, æqualia sunt ei quod continetur sub eisdem lineis. nam quadratum ipsius a est æquale contento sub h, & sub æquali reliquis illis quarū unaquæque æquatur ipsi a. æque multipliciter enim h mensurat ipsam a, sicut a mensurat omnis sibi æquales simul sumptas. quare quadratum ipsius a, est æquale contento sub h, & omnibus simul æqualib. ipsi a, & duplo ipsarum b c d f g h. nam illæ quæ sunt ęquales ipsi a, omnes excepta a, duplæ sunt ad b c d e f g h. Similiter quadratum b æquat̄ cōtento sub h, & sub linea æquali ipsi b, & dupla ipsis c d e f g h. Et item quadratum c æquatur contento sub h, & sub æquali ipsi c, & dupla ipsarū d e f g h. Similiter aliarum quadrata æquabuntur contentis sub h, & sub æquali unicuique, & dupla reliquarum. quare constat quadrata omnium æqualia esse ei quod continetur sub h, & sub æquali omnibus, & ipsi a, & tripla b, & quincupla c, & secundum numeros continenter impares multiplici sequentis lineæ. Ex hoc



igitur manifestum est, quadrata simul omnia linearum ęqualium, longissimę quadratis simul omnibus linearum sese æqualiter excedentium minus quàm tripla esse, cum assumptis quibusdam tripla efficiantur illis. Reliquis uero, dempto longissimæ quadrato, plus quàm tripla inueniũtur, cum assumpta sint minus quàm tripla ad quadratum longissimæ. Et si simili forma describãtur ab omnibus, & ab his quæ sese æqualiter excedunt, & ab his quæ sunt æquales longissimę earũ quidem quæ sunt ab his quæ sese æqualiter excedunt formarum, minus quàm tripla existent. Reliquarum uero, dempta ea quæ à longissima fiet, plus quam tripla. nã similia specie eandem habebunt inter se proportionem, quàm quadrata habent.

11 SI lineæ quotcunq; numero consequenter disponãtur, quæ sese æqualiter excedant, & aliæ item lineæ sumãtur, quæ quidem dictis lineis sint multitudine una linea pauciores, magnitudine uero unaquæq; æqualis lõgissimæ: harũ æqualium quadrata simul omnia, ad quadrata linearũ sese æqualiter excedentiũ, dempta illarum breuissima, maiorem habẽt proportionem quàm quadratum longissimæ ad id quod est æquale utrisq; simul, ei quod sub longissima breuissimaq; cõtinetur, & tertiæ parti quadrati lineæ illius qua longissima excedit breuissimã. ad quadrata uero linearũ sese æqualiter excedentiũ, dempto lõgissimæ quadrato, habent maiorẽ proportionẽ, quàm sit superius dicta proportio. Esto itaq; quotcunq; numero lineæ sese æqualiter excedẽtes deinceps positæ a b, excedẽs c d, & c d, e f, & e f, g h, & g h, i k, et i k, l m, & l m, n x. Addatur uero ipsi c d quedã c o ęqualis uni excessui, & ipsi e f æqualis duob. e p, ipsi uero g h æqualis tribus g r, & alijs eodem modo erũt. itaq; quæ inde sunt effectæ inter se æquales, & etiam ipsi lõgissimæ unaquęq; ęqualis. Ostendendũ itaq; est, quadrata simul harum omnia, ad quadrata simul omnia earũ quæ sese ęqualiter excedunt, dempto quadrato n x, minorem habẽt proportionem, quàm quadratum a b ad id quod ęquatur utrisq; simul, ei quod continetur sub a b, n x, & tertiæ parti quadrati n y. ad quadrata uero earũdem dempto quadrato ipsius a b, maiorẽ proportione dicta habent proportionem.



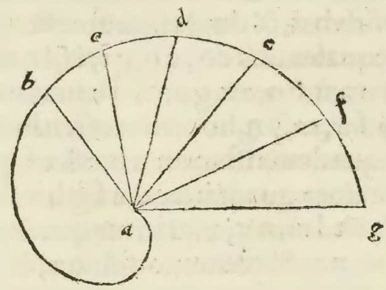
Adimatur unicuiq; earum, quæ sese æqualiter excedunt, æqualis excessus. quam itaq; proportionem habet quadratum a b ad utraq; simul, ad cõtentũ sub a b, u b, & ad tertiã partem quadrati a u, hanc habet quadratum o d ad contentum sub o d, d q, & tertiam partem quadrati o q. & quadratum p f ad contentum sub p f, z f, & tertiam partem quadrati p z, & quadrata reliquarum ad spacia similiter sumpta. Et omnia harum omnium o d, p f, r h, s k, t m, y x: ad omnia contenta sub n x, & æquali omnibus simul dictis lineis, & tertias partes quadratorum o q, p z, r 9, s π, t s, y n. eandem habebunt proportionem, quam quadratum a b ad utraq; simul, ad contentum sub a b, u b, & tertiam partem quadrati a u. Si igitur ostendatur contentum sub n x, & sub æquali omnibus simul his o d, p f, r h, s k, t m, y x, et tertias partes quadratorum o q, p z, r 9, s π, t s, y n, quadratis a b, c d, e f, g h, i k, l m esse minora: quadratis uero c d, e f, g h, i k, l m, n x maiora esse: propositum ostensum erit. Illud igitur quod sub n x, et sub ęquali omnibus simul o d, p f, r h, s k, t m, y x, & tertiæ partes quadratorum o q, p z, r 9, s π, t s, y n æquantur quadratis harũ q d, z f, 9 h, π k, s m, n x, & contento sub n x, & sub ęquali omnibus simul o q, p z, r 9, s π, t s, y n, & tertijs partibus quadratorum prædictorum. Quadrata uero a b, c d, e f, g h, i k, l m, æquantur quadratis harum b u, q d, z f, 9 h, π k, s m, & contento sub b u: & dupla istarum simul a u, c q, e z, g 9, i π, l s, cum quadratis prædictarum linearum. Communia itaque sunt utrinque quadrata lineæ æqualis ipsi n x. Contentum autem sub n x, & sub æquali simul istis o q, p z, r 9, ſ π, t s, y n minus est contento sub b u, & dupla istarum simul a u, c q, e z, g 9, i π, l s. quia lineæ nuper dictæ sunt æquales istis c o, e p, g r, i ſ, l t, n y. residuis uero sunt maiores. Et quadrata istarum a u, c q, e z, g 9, i π, l s, maiora sunt tertia parte quadratorum linearũ o q, p z, r 9, ſ π, t s, y n. hoc enim ostensum fuit supra. Spacia igitur prædicta minora erunt quadratis istarum a b, c d, e f, g, i k, l m. Reliquum igitur ostendemus, quod sunt maiora quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n y. Rursus itaque quadrata istarum c d, e f, g h, i k, l m, n x, æquantur quadratis q c, e z, g 9, i π, l s, & quadratis d q, f z, h 9, k π, m s, n x, & contento sub n x, & sub dupla harum simul omnium c q, e z, g 9, i π, l s, & sunt cõmunia quadrata q d, z f, 9 h, π k, s m, n x. Maius aũt est contentũ sub n x, & sub æquali omnibus simul istis o q, p z, r 9, ſ π, t s, y n, contento sub n x, & sub dupla istarum simul omnium c q, e z, g 9, i π, l s. Sunt autem quadrata q o, z p, 9 r, π ſ, t s, y n, quadratis c q, e z, g 9, i π, l s, plus quàm tripla. Ostensum enim est istud. Sunt igitur dicta spacia maiora quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n x. Quare constat propositum.

Si spacia quoque forma similia describantur ab omnibus, & ab his quæ sese æqualiter excedunt, & ab his quæ sunt æquales longissimæ: illarum formæ omnium, quæ ab his quæ sunt æquales longissimæ producentur, minorem proportionem habebunt ad formas simul omnis, quæ producentur à lineis sese æqualiter excedentibus, dempta breuissimæ forma, quàm quadratum lõgissimæ ad utraque simul, & contentum sub longissima & breuissima, & ad tertiam partem quadrati lineæ illius qua longissima breuissimã excedit. ad formas autem easdem, dẽpta longissimæ forma, proportionem habebunt dicta proportione maiorem. Similes enim spaciorum formæ eandem habebunt, quam quadrata habuerunt, proportionem. *Corollariũ præmissæ.*

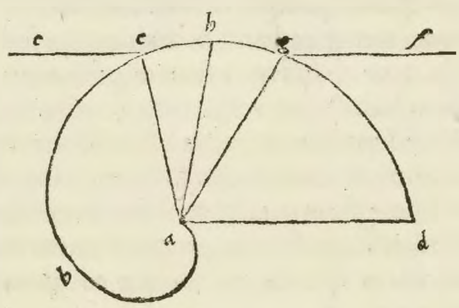
Si linea recta in plano sit ducta, & quiescente altero eius termino æquali uelocitate circumferatur, donec restituatur in eum locum unde moueri cœperat: & simul cum linea circumlata pũctum feratur æquali uelocitate ipsum sibijpsi, & per se secundum dictam lineam latum, incipiens à termino quiescente: punctum hoc describit in plano lineã spiralem. Terminus itaque lineæ sic motæ quiescẽs, uocetur initiũ lineæ spiralis. Positio autem lineæ, à qua linea recta incipit circumferri, initium circulationis. Linea uero recta quam punctum latum in prima reuolutione permeauerit, prima uocetur: & ea quam dictum punctum in secunda reuolutione permeauerit, secunda: & reliquæ similiter pari ordine cum reuolutionibus nominentur. Spacium autem compræhensum à linea spirali in prima reuolutione descripta, & à linea recta quæ prima existit, primum uocetur. Compræhensum uero à linea spirali in secunda reuolutione descripta, & à linea secũda, uocetur secundum: & reliqua deinceps hoc ordine nominentur. Item si à puncto quod est initium lineæ spiralis, ducatur linea recta, huius lineæ ea pars quæ existit, ubi circumuolutio producitur, precedens uocetur. quæ uero in alterã partem, sequens. Circulus quoque descriptus circa punctũ, quod est initium lineæ spiralis secũdum interuallum lineæ quæ prima uocatur, primus & ipse dicatur. Descriptus uero circa idem centrum, secundum interuallum lineæ duplæ priori, secundus dicatur: & reliqui deinceps eodem modo. *Diffinitiones.* *Non dicit propter cõstitutionem, sed differentiam positionis.*

12 SI ad spiralem lineam in una circumuolutione descriptam, quæcunque fuerit illa circũuolutio, ab initio spiralis lineæ ducantur quotcunque lineæ rectæ, quæ inter se angulos æquales efficiãt, ipsæ sese æqualiter excedent. Esto spiralis linea, ad quam a b, a c, a d, a e, a f lineæ rectæ sint ductæ, quæ angulos inter se æquales faciant. Ostendendum est, quod a b æqualiter exceditur ab a c, & a c ab a d, & reliquæ similiter. In quo enim tempore linea circumuoluta ex a b processit ad a c, in

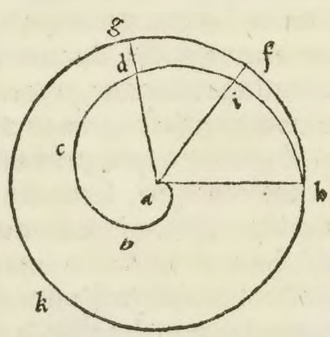
eodem punctum secundũ lineam rectam latum excessum permeauit, quo c a excedit a b. in quo uero ex a c in a d, in eadem permeauit excessum quo a d superat ipsam a c. in tempore uero æquali linea circumuoluta ex a b in a c procedit, & ex a c in a d, cũ anguli sint æquales. In tempore igitur æquali punctum secundũ lineam rectam latum permeat excessum, quo a c excedit a b, & excessũ quo a d excedit a c. æquali ergo excessu a c superat ipsam a b, & a d ipsam a c. & reliquæ similiter istis ostendentur.



13 SI linea recta contingat lineam spiralem, in uno solum puncto eam continget. Esto spiralis linea, in qua a b c d: esto eius initium a punctum: initium uero circumductionis, sit a d linea recta. Et cõtingat lineam spiralem linea e f. Dico quod in uno solo pũcto eam contingit. quod si fieri potest, contingat eam in duobus punctis g c, & iungantur a c, a g, & angulus contentus sub c a, a g in duo ęqua diuidatur. punctum autem in quo linea diuidens dictum angulum incidit in lineam spiralem, sit h. Aequaliter itaque a g excedit a h, & a h ipsam a c, cum æquales angulos inter se cõtineãt. quare a g, a c sunt simul ad a h duplæ. Sed eius lineæ quæ diuidit angulum c a g, in duo æqua, sunt lineæ a c, a g plus quàm duplæ. Manifestum igitur, quod punctum in quo a h incidit in lineam e g, est inter punctum a, & pũctum h in linea a h. Igitur e f secabit lineam spiralem, cũ aliquod punctum in c g linea collocatum sit intra lineam spiralem. Suppositum uero fuerat, quod eam contingeret. In uno igitur puncto e f continget lineam spiralem.



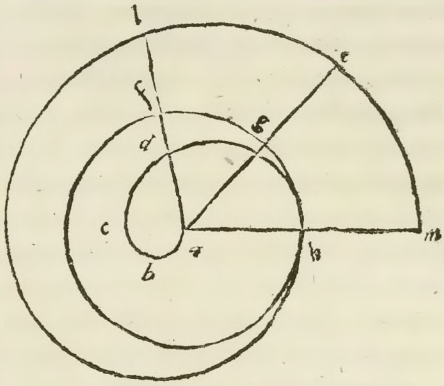
14 SI ad lineam spiralem in prima reuolutione descriptam incidant duæ lineæ rectæ, à puncto quod est lineę spiralis initium actæ: deinde extra producantur, usque ad circuli primi circumferentiam, eandem habebunt proportionem inter se illæ quæ in lineam spiralem inciderunt, quam partes circumferẽtiæ circuli, quæ inter terminum lineæ spiralis, & extrema linearum quæ ad circumferentiam productæ fuerunt, sumendo partes circumferentiæ ab termino lineæ spiralis secundum circumuolutionem. Esto linea spiralis a b c d e h in prima reuolutione descripta, initium eius esto punctum a: et initium reuolutionis esto linea a h recta. & circulus h k g, esto primus. incidant itaq; à puncto a duæ rectæ a e, a d lineæ, ad lineam spiralem: & producantur ad circumferentiam circuli, quam attingant in punctis f g. Ostendendum est, quod a e habet ad ipsam a d eam proportionem, quam h k f circumferentiæ pars, ad h k g partem. In circumductu enim lineæ a h manifestum est, pũctum h permeasse circumferentiã h k g æqua uelocitate, qua punctũ a per lineam rectam latũ permeauit lineã a d: & item punctum h per circumferentiam latum æquo tempore permeauit h k f



cir-

circumferentiam, quo punctum a lineam a c rectam. Manifestum est igitur, quod a e eandem ad ipsam a d habebit proportionem, quam h k f circũferentia ad h k g circumferentiã. Hoc aũt superius est ostensum. Similiter uero demonstrabitur, si altera incidentiũ linearũ in terminũ lineæ spiralis inciderit. nam idem continget.

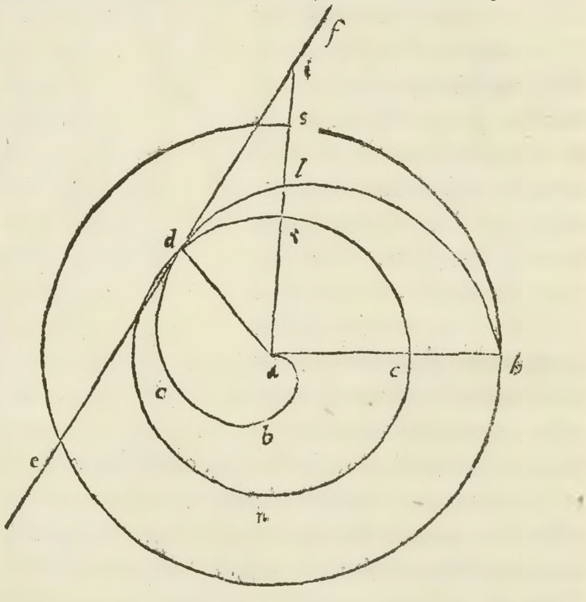
SI in lineã spiralem in secũda reuolutione descriptã, incidãt rectæ ab initio spi- 15
ralis lineæ eductæ, eandem habebunt inter se lineæ rectę proportionẽ, quã dictæ circumferentiæ simul cũ tota circũferentia circuli sumptæ. Esto linea spiralis, in qua a b c d h, quę sit in prima reuolutione descripta. itẽ h l m, in secũda. & incidant in eam duæ rectæ a e, a l. Ostendendũ est quod eandem habet a l ad a e proportionẽ, quã h k f circũferẽtia simul cũ tota circuli circũferentia ad h k g, cũ tota circuli circumferẽtia. In quãto enim tẽpore pũctum a per lineã rectã latũ permeat a l lineã, et h punctũ in eodẽ per circũferẽtiam latũ totã circuli circũferẽtiam permeat, et insuper h k f. Et item dum a punctũ permeat a e, et h punctũ permeat



totã circũferẽtiam, & insuper h k g, cũ utrũq; punctũ æque uelociter sibi ipsi ferať. Manifestũ est igitur, quod eãdem habebit a l ad a e proportionẽ, quã h k f cũ tota circuli circũferentia, ad h k g circũferẽtiam, cũ tota eadẽ circuli circũferentia. Eodẽ aũt modo ostendeť, & si in lineã spiralem in tertia reuolutione descriptã lineæ rectæ inciderint, eãdem habebũt inter se proportionem, quã dictæ circũferentiæ cũ tota circuli circũferentia bis sumpta utrisq;. Similiter aũt & quæ in alias lineas spirales inciderint, ostendenť quod eandẽ habeant proportionẽ, quã dictæ circũferentiæ cum tota circumferẽtia circuli, secundũ numerũ uno minorẽ, q̃ sint reuolutiones. et utraq; linea incidẽs in terminos ipsius lineę spiralis inciderit, idẽ eueniet.

SI lineam spiralem in prima reuolutione descriptam recta linea contingat, & à 16
puncto contactus ducatur linea recta ad punctum quod est principium lineę spiralis: anguli, quos contingens cum ducta facit, erũt inæquales: & ille quidem qui fuerit in præcedentiũ parte, obtusus existet: qui uero in parte sequentium, erit acutus.

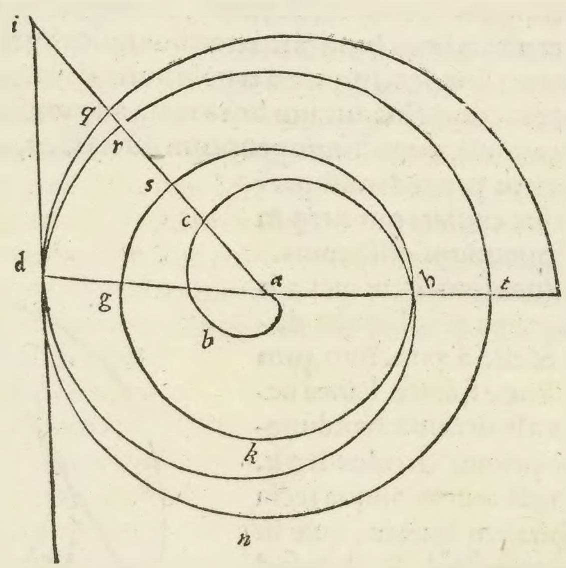
Esto linea spiralis, in qua a b c d h in prima reuolutione descripta. & esto a punctum, principium lineæ spiralis. Linea uero recta a h sit initiũ reuolutionis. Sit primus circulus h g k. Contingat autem aliqua recta linea spiralem lineam, quæ sit e d f, in puncto d, & ab ipso d ducatur ad a linea d a. Ostendẽdum est, quod d f cum d a obtusum angulum facit. Describatur d t n circulus, posito a cẽtro secundum interuallum ipsius d a. Necesse est itaq; eam huius



circuli circumferentiam, quæ est in parte præcedentium, infra lineam spiralem cadere.

dere. quæ uero in parte, ſequentium extra. Quia linea recta ab a ad lineam ſpiralem in parte præcedentium ducta, eſt maior a d linea. quæ uero ab ipſo a in parte ſequentium ducta fuerit, ipſa a d minor exiſtet. Quod autem angulus contentus ſub a d f, non ſit acutus, patet, cum ſit maior angulo ſemicirculi. Quod autẽ non ſit rectus, eſt ſic oſtendẽdum. Eſto ſi fieri poteſt, ſit rectus. Igitur e d f contingit circulum d t n. Iam poteſt ab a puncto duci linea recta ad cõtingentem, ut eius pars quæ inter circumferentiam & contingentem deprehenditur, ad ſemidiametrum minorem habeat proportionem, quàm habeat circumferentia inter contactum & lineam ductam deprẹhenſa, ad circumferẽtiam datam. Ducatur itaq;, ut dictũ eſt, a t. Secat autem ipſa lineam ſpiralem, eſto in puncto l, & circumferentia circuli d t n in puncto r. & linea a r i recta, ad lineam a r minorem habeat proportionẽ, quàm d r ad d t n circumferentiam. Tota igitur a i ad a r minorem habet proportionem, quàm r d n t circumferentia, ad d n t circumferentiam: hoc eſt quàm habet ſ g k h circumferentia ad g k h circumferentiam. Quam uero habet ſ g k h circumferentia, ad ipſam g k h circumferentiam, hãc habet a l recta ad a d rectã. hoc etiam iam oſtenſum fuit. Minorem igitur proportionem habet a i ad a r, quàm l a ad ipſam a d. Quod quidem eſſe non poteſt. nam r a eſt æqualis ipſi a d. Non eſt igitur angulus a d f rectus. Et oſtenſum eſt, eum non eſſe acutum. Quare obtuſus exiſtet. reliquus igitur eſt acutus. Similiter oſtendetur, ſi contingens contigerit in termino lineæ ſpiralis. nam idem eueniet.

17 SI lineam ſpiralem in ſecunda reuolutione deſcriptam, linea recta continget, illud idem eueniet. Contingat itaq; linea recta e f, lineã ſpiralem in ſecũda reuolutione deſcriptam, in puncto d: et cẹtera ſimiliter ſuperiorib. diſponãtur. Similiter circumferentiæ r n d circuli pars illa, quæ erit in parte præcedentium, cadet intra lineam ſpiralem: quæ uero in parte ſequentium, cadet extrà. Angulus igitur a d f non eſt acutus, neq; rectus, ſed obtuſus: quod ſic demonſtratur. Eſto enim ſi fieri poteſt, ſit rectus. linea igitur e f continget circulum r n d. Eſto in puncto d. Ducatur item a i ad contingentem, & ſecet lineam quidem ſpiralem in puncto q, circumferentiam uero circuli r n d in puncto r. Habeat autem r i ad a r minorem proportionem, quàm d r circumferentia ad totã circuli r n d circumferentiam, et ad d n t circumferentiam. Oſtenſum enim eſt, hoc eſſe poſſe. & iam tota i a ad a r minorem habet proportionẽ, quàm r d n t circumferẽtia cum tota circuli circumferẽtia, ad d n t

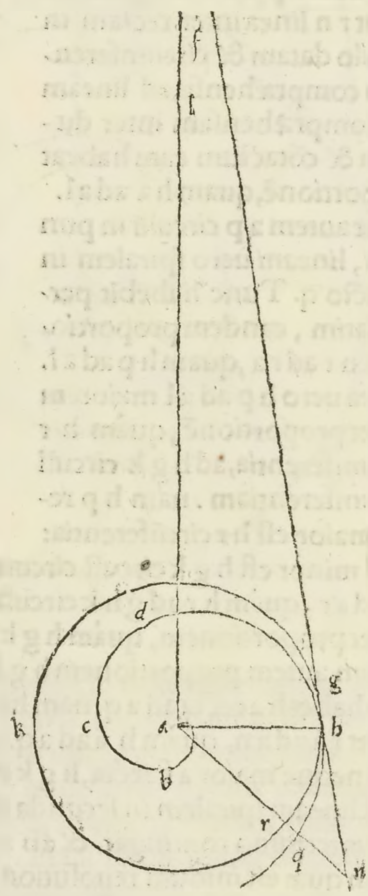


circumferentiã, cum tota d n t circũferentia. Sed quam proportionẽ habet r d n t circumferẽtia, cum tota d n t r circuli circumferentia, ad d n t circumferentiam cũ tota d n t circuli circumferentia: hanc habet ſ g k h circumferentia, cum tota circuli circumferentia h ſ g k, ad g k h circumferentiam, cum tota circuli h ſ g k circumferentia. Quam autem proportionem habent circumferentiæ poſtremò dictæ, eam habet q a linea recta, ad ipſam a d rectã. Hoc enim oſtenſum fuit. Minorem

igitur

igitur proportionem habet i a ad a r, quàm a q ad ipsam a d: quod quidem esse nõ potest. nam r a est æqualis ipsi a d. maior uero est i a, quàm a q. quare constat, angulum a d f obtusum esse, reliquum uero acutum. Hæc eadem euenient, si contingens in termino lineæ spiralis ipsam contingere ponatur: & eadem ratione demõstrabitur, ubi lineam spiralem quacunque reuolutione descriptam, linea recta contigerit, etiam in termino ipsius lineæ spiralis angulos inæquales fieri, cum linea ducta à puncto quod est initium lineæ spiralis ad punctum contactus: & eum qui in parte præcedentium fuerit, obtusum esse: qui uero in parte sequentium, acutum.

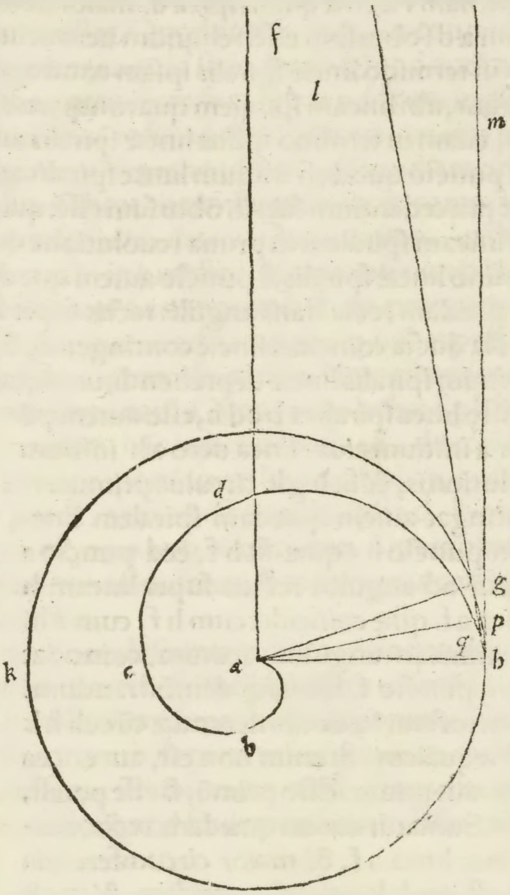
18 SI lineam spiralem in prima reuolutione descriptã linea recta contigerit in termino lineæ spiralis, à puncto autem quod est initium lineæ spiralis, ducatur linea quædam recta stans angulis rectis super lineam, quæ initium fuit reuolutionis: illa ducta coincidet lineæ contingenti, & eius pars quæ intra contingentem, & initium spiralis lineæ deprehenditur, æqualis erit circumferentiæ primi circuli.



Esto linea spiralis a b c d h, esto autem pũctum a initium eius, linea uero a h initium reuolutionis, & sit h g k circulus primus. Contingat autem quædam spiralem lineam in puncto h, quæ sit h f, & à puncto a ducatur ad angulos rectos super lineam h a, linea a f, quæ coincidet cum h f, cum f h, h a contineant angulum acutum. coincidat itaque in puncto f. Est itaque demõstrandum, lineam rectam f a circumferentiæ circuli h k g esse æqualem. Si enim non est, aut erit ea maior, aut minor. Esto primũ, si esse potest, maior. Sumatur autem quædam recta, quæ sit minor linea a f, & maior circumferentia h k g. est iam h k g circulus quidam, & in circulo linea recta minor diametro, quę est g h: & proportio linea h a ad a l maior est proportione ea quam habet dimidia h g ad lineam ab ipso a ad ipsam h g perpendiculariter ductam, quoniam & eam habet quam h a ad a f. Potest igitur à puncto a educi ad eductam a n, ita ut n r, quæ media intercipit inter h n eductam, & circumferentiã ad ipsam h r rectam, eam habeat proportionem, quã h a ad a l. Habebit igitur n r ad r a, eam quã habet h r recta ad a l. ipsa uero h r ad a l minorem proportionem habet, quàm h r circumferentia ad k h g circuli circumferentiã. nam h r recta minor est circumferentia h r, & linea a l recta maior est circumferentia circuli. Minorem igitur proportionem habebit n r ad r a, quàm h r circumferentia ad h k g circuli circumferentiam. Tota igitur n a ad a r habet minorem proportionem, quàm k r circumferentia cum tota circuli circumferentia ad h k g circuli circumferentiam. Quam autem proportionem habet h r circumferentia cum tota circuli h g k circumferentia, ad h k g circuli circumferentiam, hanc habet q a ad h a. Hoc enim ostensum est. Minorem igitur proportionem habebit n a ad à r, quàm q a ad h a. quod quidem esse non potest. Nam n a maior est ipsa q a, & a r est æqualis h a. non est igitur a f circumferentia circuli h k g maior. Esto uero, si fieri potest, minor f a circũferentia

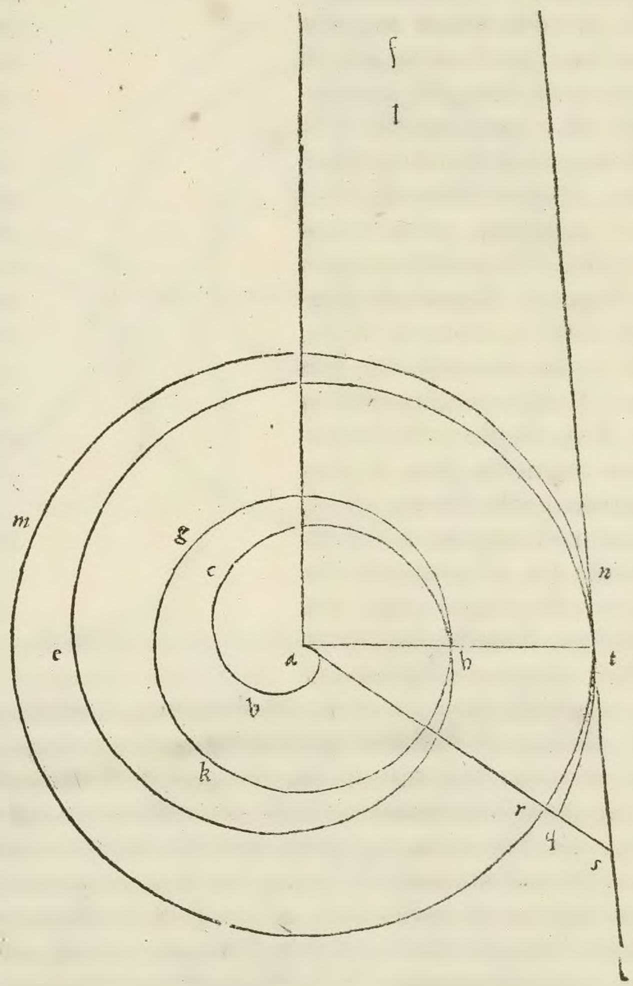
circuli

circuli h k g. Sumatur item quædam linea a l recta, quæ sit maior a f, & minor circumferentia circuli h k g. Et ducatur à puncto h recta h m, equedistans ipsi a f. Rursus est circulus h k g, & in ipso linea recta h g minor diametro, & itẽ alia quæ contingit circulũ in pũcto h. et proportio quam habet h a ad a l, est minor ea quã habet dimidia g a ad lineã ab a ad se ductam perpendiculariter. Quoniã uero & minor est ea quã habet h a ad a f, potest ab a duci a p ad cõtingentem, ita ut r n linea inter rectam in circulo datam & circumferentiam compræhensa, ad lineam h p compræhensam inter ductam & cõtactum eam habeat proportionẽ, quam h a ad a l. Secet autem a p circulũ in puncto r, lineam uero spiralem in puncto q. Tunc habebit permutatim, eandem proportionem n r ad r a, quam h p ad a l. Linea uero h p ad a l maiorem habet proportionẽ, quàm h r circumferentia, ad h g k circuli circumferentiam. nam h p recta, maior est h r circũferentia: & a l minor est h g k circuli circumferentia. maiorem ergo habet proportionem n r ad a r, quàm h r ad g h k circuli circumferentiam. quare & r a ad a n maiorem habet proportionem, quàm h g k circuli circumferentia, ad h k r circumferentiã. Quam autem proportionem h g k circuli circumferentia ad h k r circumferentiã, eam habet h a recta ad a q. nam hoc est ostensum. Maiorem ergo proportionem habet r a ad a n, quàm h a ad a q. quod quidem esse non potest. Non est igitur minor, neque maior a f recta, h g k circuli circumferentia. igitur est eidem æqualis.



20 SI lineam spiralem in secunda reuolutione descriptam aliqua linea recta in illius termino contingat, & ab initio lineæ spiralis ducatur aliqua recta super lineam quæ est initium reuolutionis constituta ad angulos rectos: illa coincidet cũ contingente, & linea recta quæ media erit inter contingentem, & initium lineæ spiralis, dupla esse probatur circumferentiæ circuli secundi. Esto itaq; a b c h linea spiralis in prima reuolutione descripta, et h e t in secũda, & h k g circulus primus, & t m n secundus. Sit autem t f quædam linea contingens lineam spiralem in pũcto t, & f a ducta ad angulos rectos super t a. Coincidet autem ipsa lineæ t f, cum sit ostensum angulum a t f esse acutum. Ostendẽdum itaq; est, a f rectam duplam esse circumferentiæ circuli t m n. Nam si non est ei dupla, aut plus aut minus erit, quàm dupla eiusdem. Esto prius si potest esse, plus quàm dupla, & sumatur a l recta minor a f recta, & maior quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. Est iam circulus quidam t m n, & in circulo linea data t n minor diametro: & quam habet t a ad a l maior est proportione quam habet dimidia t n, ad perpendicularem ab a centro

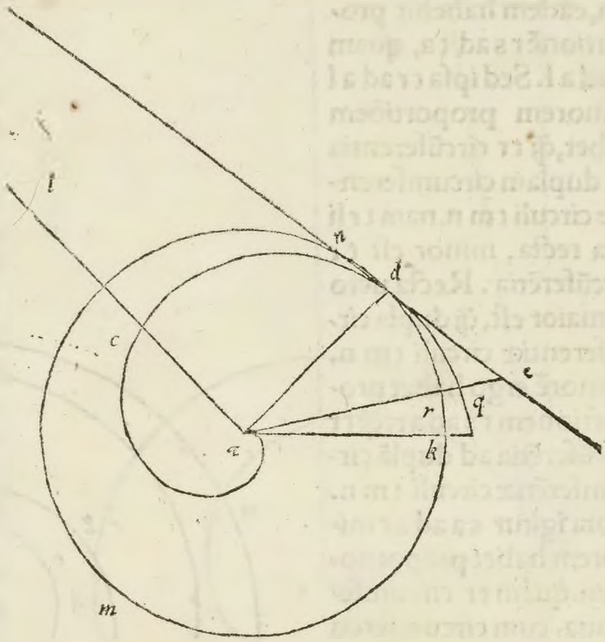
centro ad ipsam ductam. Potest igitur ab a educi a s ad t n extra actam, ita ut media inter t n extra actam, & circumferentiam quæ sit r s, habeat ad t r eam proportionem, quam t a ad a l. Secet autem a s circulum in puncto r. Et lineam spiralem in puncto q. Et permutatim, eãdem habebit proportionẽ r s ad t a, quam t r ad a l. Sed ipsa t r ad a l minorem proportiõem habet, quam t r circũferentia ad duplam circumferentiæ circuli t m n. nam t r linea recta, minor est t r circũferẽtia. Recta uero a l maior est, quam dupla circũferentiæ circuli t m n. Minorẽ ergo habet proportionem r s ad a r, quam t r circũferẽtia ad duplã circumferẽtiæ circuli t m n. Tota igitur s a ad a r minorem habet proportionem, quàm t r circumferentia, cum circumferentia circuli t m n bis sumpta, ad circumferentiam circuli t m n bis sumptã. Quam autem proportionem habent dictæ circũferentiæ, eam habet q a ad a t. hoc enim ostensum est. Minorem ergo proportionem habebit a s ad a r, quàm q a ad t a. quod esse non potest. nõ est igitur a s plus quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. Similiter autem ostendetur, quod neque minor, quàm dupla illius esse potest. Quare constat duplam esse. Ostendendum quoque, si lineam spiralem in quacunque reuolutione descriptã, recta quædam contigerit in termino illius, & ab initio lineæ spiralis ducatur super lineam quæ est reuolutionis initium, linea recta ad angulos rectos, ipsa coincidet contingenti, & multiplex est circumferentiæ circuli secundum reuolutionem numeri nominati eodem numero, & ipsa multiplex nominata.



SI lineam spiralem in prima reuolutione descriptam linea recta contingat, non in termino ipsius, & à puncto cõtactus ad initium lineę spiralis recta ducatur, & initio lineæ spiralis posito centro describatur circulus secundum interuallum lineæ ductæ, ab initio autem lineæ spiralis quædam recta ducatur super lineam reuolutionis initium ad angulos rectos constituta, ipsa cum contingente concurret. Et linea inter huiusmodi concursum & initium lineæ spiralis media, æqualis est circumferentiæ circuli descripti, quæ inter punctum contactus & sectionis pũctum compræhenditur, in quo puncto circulus descriptus secat lineam initium reuolutionis, cum in præcedentium parte circumferentia sumatur à pũcto quod situm est in reuolutionis initio. Esto linea spiralis, in qua a b c d in prima reuo- 21

p lutione

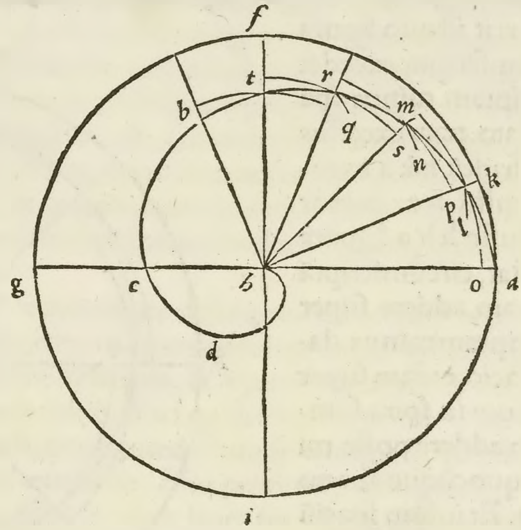
lutione descripta, & contingat eam aliqua recta e d f, in puncto d. ab ipso uero d ad initium lineæ spiralis ducatur linea d a, & super centro a describatur circulus secundum interuallum a d, qui sit d m n. Secet autem hic initium reuolutionis in puncto k. Ducatur autem f a ad a d secũdum angulos rectos. Quod autem ipsa cõcurret cũ cõtingẽte, manifestũ est. Quod uero f a recta sit æqualis k m n d circũferẽtiæ, est demõstrandũ. Nã si nõ, uel maior, uel ea minor existet. Esto primũ maior, si esse potest. Sumat aũt quædã recta l a, minor recta f a, & maior circumferẽtia k m n d. Rursus circulus est k m n, & in circulo recta d n minor diametro data, & proportio quã habet d a ad a l, maior est ea quam habet dimidia d n, ad perpendicularem à cẽtro super ipsam d n ductam. Potest igitur à puncto a educi a e ad ipsam n d extra ductã, ita ut e r ad d r eã habeat proportionẽ, quam d a ad a l. nã hoc fieri posse ostẽsum est. Habebit igitur e r ad a r eam proportionẽ, quam d r ad a l. & d r ad a l minorem habet proportionem, quàm d r circumferentia ad k m d circumferẽtiam, cum d r recta minor sit d r circumferentia, ipsa uero a l sit maior k m d circũferentia. Minorem ergo proportionem habet e r recta ad r a, quàm d r circumferẽtia ad k m d circumferentiam. quare & a e ad a r minorem habebit proportionem, quàm k m r circumferentia, ad k m d circumferentiam. Quam aũt proportionem habet k m r circũferẽtia ad k m d circumferentiã, eã habet q a ad ipsam a d. quare minorem proportionẽ habebit e a ad a r, quàm q a ad ipsam d a, quod esse non potest. Non erit igitur f a maior circumferentia k m d. Similiter autem eis quæ antea dicta sunt ostendetur, quod neq; minor est illa, quare æqualem illi esse necesse est. Eodem autem modo ostendetur, & si lineam spiralem in secunda reuolutione descriptam recta contingat, non in termino illius, & cætera ut prius disponantur, quod linea recta media inter contingentem, & initium lineæ spiralis, æqualis est toti circuli descripti circumferentiæ, & insuper circumferentiæ inter dicta puncta depræhensæ, ipsa iã dicta circũferentia similiter sumpta. Item si lineam spiralem in quacunq; reuolutione descriptam aliqua recta contigerit, non in termino ipsius, & cętera disponantur, ut suprà, quod recta intermedia inter dicta puncta multiplex existit circumferentiæ circuli descripti secundum numerum uno minorem, eo secundum quẽ reuolutio facta fuerit, & dicta insuper media inter dicta pũcta æqualis est dictæ circumferentiæ similiter sumptæ.



22 SI spacium à linea spirali in prima reuolutione descripta, & à linea recta initio reuolutionis primæ compræhensum sumatur, potest figura quædam plana circa ipsum describi, & altera intra, quæ figurę ex frustis similibus sint compositę, & ita ut id quo circumscripta inscriptam excesserit, quocunq; dato spacio minus existat. Esto linea spiralis in prima reuolutione descripta a b c d. Esto initium lineæ spiralis punctum h, & initium reuolutionis h a. Primus autem circulus

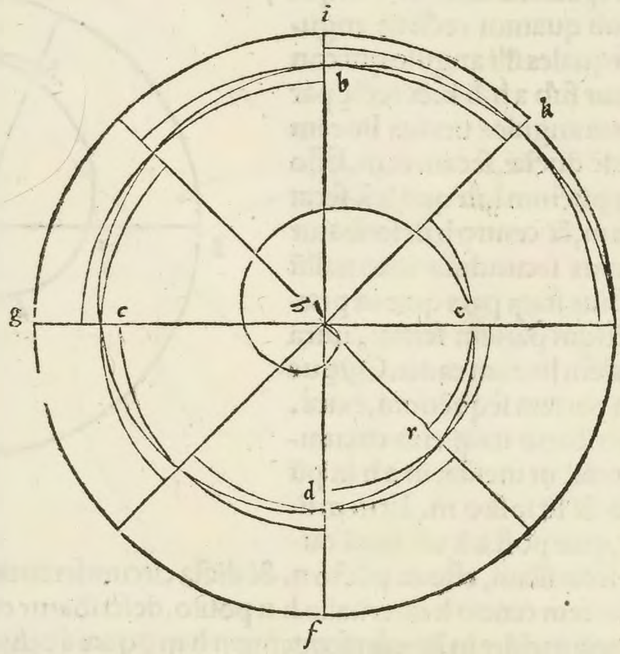
f g i a,

f g i a, & a g, f i diametri ipſius inter ſe altera alteri perpendicularis. Diuiſo itaq; angulo recto per æqualia, & fruſto ſpacij angulum rectum continentis, & hac diuiſione in reliquis retẽta, deueniemus tandem ad reſiduũ quoddã, quod minus erit dato ſpacio. & ſit illud fruſtum reſiduum factum a h k, minus dato ſpacio. Diuiſi ſunt itaque anguli quatuor recti in angulos æquales illi angulo qui continetur ſub a h, h k. & rectę partientes angulos uerſus lineam ſpiralẽ ductæ, ſecant eam. Eſto itaq; pũctum l, in quo h k ſecat ſpiram, & centro h deſcribatur circulus ſecundum interuallũ h l. Eius itaq; pars quæ in præcedẽtium partem fertur, intra ſpiralem lineam cadet. Quę uero in partem ſequẽtium, extrà. Deſcribatur itaq; eius circumferentia, ut incidat in a h in pũcto o, & ſit ipſa o m. Et item linea, quæ poſt h k ad ſpirã ducta, ſecat illam, eſto in pũcto n. & dicta circumferentia incidat in illam in puncto m. Et item centro h interuallo h n poſito, deſcribatur circulus. Huius quoq; circũferentia incidet in lineam ſequentem h m, quæ à centro ducta incidit in ſpiram. Et ſimiliter in alijs omnibus quæ ſecant lineam ſpiralem, & faciunt angulos ſecũdum unamquanq;, deſcribantur circuli in centro h, eorum circumferentiæ ſecũdum unamquamq; incident & in præcedentem & in ſequentem. Et circũferentiæ in præcedentium parte intra cadent, & in parte ſequentium extra lineam ſpiralem. Iam igitur circa ſpacium ſumptum, eſt circumſcripta quædam figura: & alia inſcripta eidem, quæ ſunt ex fruſtis ſimilibus compoſitæ, & circumſcripta addit ſuper inſcriptam dato ſpacio minus. Quod oſtendetur. nam fruſtum h l o eſt æquale fruſto h l m, & h n p æquatur h n r, & h q s ipſi h q t. Eſt etiam unumquodq; eorum fruſtorum, quæ in figura inſcripta continentur, æquale illi fruſto in figura circumſcripta contento, quod commune latus cum illo habuerit. Conſtat igitur, omnia fruſta omnibus fruſtis æqualia eſſe. Figura igitur ſumpto ſpacio inſcripta, eſt æqualis figuræ circumſcriptæ eidem, dempto a h k fruſto. nam hoc ſolum eorum quæ in figura circumſcripta exiſtunt, relictum eſt. Cõſtat igitur, circumſcriptam figuram inſcripta maiorem eſſe fruſto h k a: quod quidem eſt propoſito ſpacio minus. Ex hoc itaq; manifeſtum eſt, quod circa dictum ſpacium poteſt circumſcribi figura qualis dicta eſt, & altera inſcribi dicto ſpacio, ita quod circumſcripta dicto ſpacio ſuperaddat minus quocunq; ſpacio dato, & inſcripta diminuat ab eodem quocunq; dato ſpacio minus. Et ipſum ſpacium figuram inſcriptam excedat, ſimiliter quocunq; ſpacio dato minus.

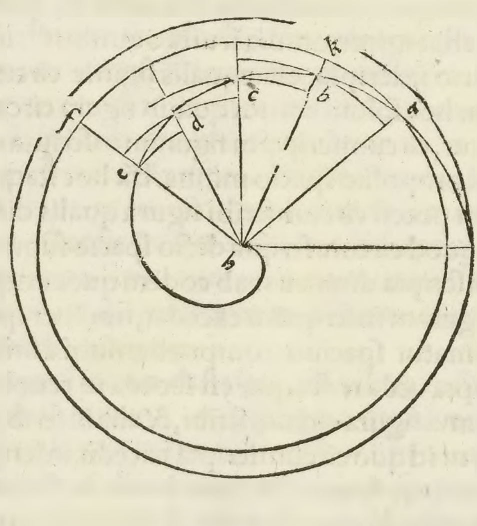


SI ſumatur ſpacium compræhenſum à linea ſpirali in ſecunda reuolutione de- 23
ſcripta, & à recta quæ eſt ſecũda in reuolutionis initio: poteſt ipſi ſpacio quædam plana figura circumſcribi, & alia inſcribi, quæ ex fruſtis ſimilibus ſint cõpoſitæ, ita ut id quo circumſcripta excedit inſcriptam, quocunq; dato ſpacio minus ſit. Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d e in ſecunda reuolutione deſcripta: & eſto pũctum h initium lineæ ſpiralis, & a h initium reuolutionis, & e a ſit recta ſecunda in reuolutionis initio, & a f g eſto circulus ſecundus, a g, f i diametri ipſius quæ

ſeſe ad angulos rectos ſecent. Et item diuiſis per æqualia angulis rectis, & fruſtis quæ continent angulos rectos ſimiliter, & pariter diuiſis, & hac diuiſione perducta, tandem deueniemus ad aliquod reſiduum, quod erit minus quocunq; ſpacio dato. Et ſit illud fruſtum h k a minus dato ſpacio. Diuiſis angulis rectis in æquales angulos ei angulo, qui continetur ſub k h a, & cæteris diſpoſitis ut ſupra, erit id quo figura circumſcripta excedet inſcriptam minus ſpacio dato. nam exceſſus quo fruſtũ h k a excedit fruſtũ h e r, minor eſt fruſto h k a. Quare conſtat, circumſcriptã figuram addere ſuper inſcriptam minus dato ſpacio, et eam ſuper ſpacium in ſpira ſumptum addere poſſe minus quocũque ſpacio dato. Et ipſum ſpaciũ ſumptum addere ſuper inſcriptam minus quocunque ſpacio dato, & hæc fieri poſſe. Eodem autem modo conſtat fieri poſſe, ut ſumpto ſpacio à linea ſpirali in quacunque reuolutione deſcripta compræhenſo, & à recta reuolutionis initio ſecundum reuolutionis numerũ dicta circa ipſum ſpacium quædam figura plana circumſcribatur, & altera inſcribatur eidem, ut dictum eſt, ita ut id quo circumſcripta ſumptum ſpacium excedat, minus ſit quocunq; ſpacio dato. Et item id quo ſpacium ſumptum excedat inſcriptam ſibi figuram, ſit minus quocunq; ſpacio dato.

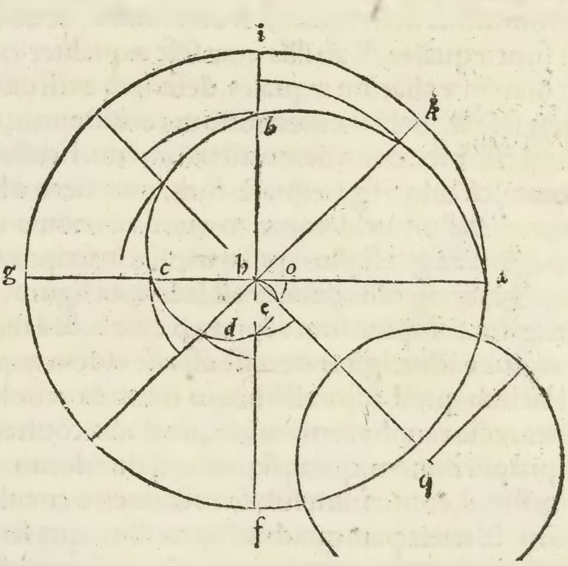


24 SI ſumatur ſpacium compræhenſum à ſpirali linea, quæ ſit minor ea quæ in una reuolutione deſcribitur, quæque non habeat terminum lineæ ſpiralis initium, & compræhenſum à rectis ductis ab initio lineę ſpiralis ad terminos dictæ ſpiralis ſpacium compræhendentis. Poteſt ipſi ſpacio plana quædam figura circũſcribi, ex fruſtis ſimilib. compoſita: & alia inſcribi eidem, ita ut circumſcripta excedat inſcriptam minus, quàm ſit quodcunq; ſpacium datum. Eſto linea ſpiralis a b c d e, eius termini a e: ſit lineæ ſpiralis initium h, & iũgantur a h, e f. deſcribatur quoque circulus centro h, interuallo h a, & incidat in h e in puncto f. Angulo itaq; ad h poſito, & fruſto a h f ſimul in æqua diuiſo, et diuiſione tali producta donec reſiduum mi-

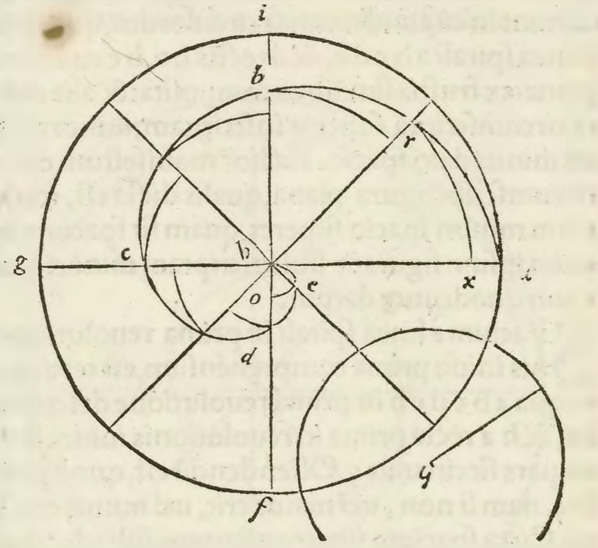


minus exiſtat dato ſpacio, eſt ut fruſtum h a k minus ſit ſpacio propoſito. Similiter iam his quæ ſuprà ſunt demonſtrata, deſcripti ſint circuli per puncta lineã ſpiralem ſecantia tranſeuntes, ſecundum lineas rectas, quæ faciunt ad h angulos æquales. & ductæ ita ſint, ut & in parte ſequentium, & in parte præcedentium incurrant in circumferentias circulorum, quæq; ſuo loco. Erit iam ipſi ſpacio quod à linea ſpirali a b c d e, & à rectis h a, h e continetur, figura quædam circumſcripta plana, ex fruſtis ſimilibus compoſita: & alia eidem inſcripta, & exceſſus quo figura circumſcripta ſuperat inſcriptam, minor eſt ſpacio propoſito. nam fruſtũ h a k eſt minus dato ſpacio. Ex hoc manifeſtum eſt, quod circa dictum ſpacium poteſt circumſcribi figura plana, qualis dicta eſt, ita ut circumſcripta figura dictum ſpacium minori ſpacio ſuperet, quàm ſit ſpacium quodcunque propoſitum. Et ſpacium ipſum figuram ſibi inſcriptam minori ſpacio ſimiliter ſuperet, quàm ſit ſpacium quodcunq; datum.

SPacium à linea ſpirali in prima reuolutione deſcripta, & à recta in reuolutio- 25
nis initio prima compręhenſum, eſt tertia pars circuli primi. Eſto linea ſpiralis in qua a b c d e h in prima reuolutione deſcripta, & h punctum initiũ lineæ ſpiralis, & h a recta prima in reuolutionis initio. & a f g i ſit circulus primus, cuius tertia pars ſit circulus q. Oſtendendũ eſt, quod prædictum ſpacium æquale eſt circulo q. nam ſi non, uel maius erit, uel minus eo. Eſto primum, ſi eſſe poteſt, minus eo. Circa ſpacium itaq; contentum ſub a b c d e h linea ſpirali, & ſub recta h a deſcribi poteſt figura quædam plana ex fruſtis ſimilibus compoſita, ita ut id quo circumſcripta figura ſuperat ipſum ſpacium, ſit minus eo quo circulus q ſuperat ſpacium dictum. Circumſcribatur itaq;, & eſto fruſtorũ ex quibus componitur dicta maximum h a k, minimum uero h e o. Manifeſtũ igitur, quod figura circumſcripta minor eſt circulo q. Eductæ autem ſunt lineæ rectæ ab h facientes angulos æquales, & incidẽtes in circumferentiam circuli. Quædam uero intra cadunt, in lineam ſpiralem incidentes, quæ ſeſe æquali exceſſu ſuperant: quarũ maior quidem eſt h a, minor uero h e, & minima ęqualis exceſſui. Sunt autẽ & aliæ lineæ ab h ad circũferentiam circuli procedentes, multitudine quidem prædictis æquales, magnitudine uero unaquæq; æqualis maximæ prædictarum, & ab omnibus ſimilia fruſta compræhenſa ſunt, & ab his quæ ſeſe æquali exceſſu ſuperant, & ab his quæ ſunt inter ſe & maximę illarum æquales. Fruſta igitur quæ cõtinẽtur, ab his quæ inter ſe ſunt & maximæ illarum æquales, ſunt minus quàm tripla fruſtorum quæ continentur ab illis quæ ſeſe æqualiter excedunt. Oſtenſum namq; hoc fuit. Sunt autem fruſta ab his compræhẽſa, quæ inter ſe ſunt & maximæ aliarum æquales, circulo a f g i æqualia. Fruſta uero contenta ab illis quæ ſeſe æqualiter excedunt, æqualia ſunt figuræ circumſcriptæ. circulus ergo a f g i minor eſt q̃ triplus figuræ circũſcriptæ. Ipſe uero eſt triplus circuli q. Circulus ergo q minor exiſtet figura cir



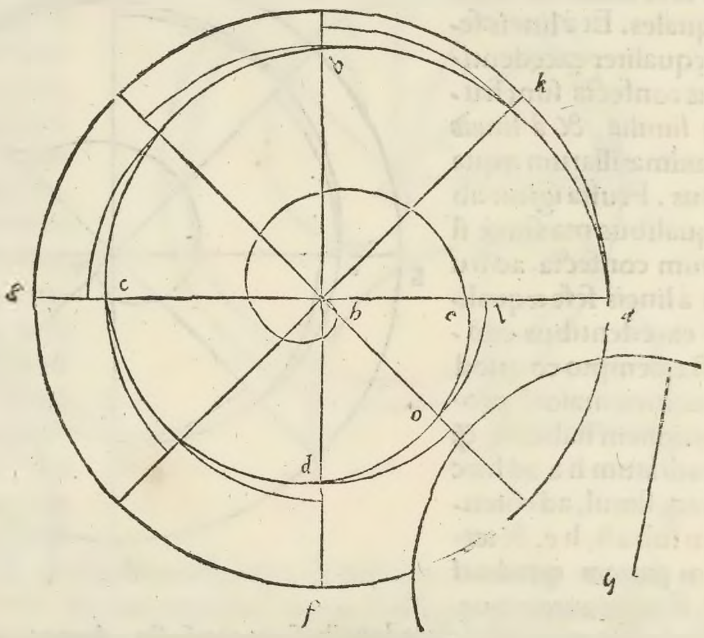
cum scripta: quod quidem uerum non est, sed maior existit illa. Non est igitur spacium comprehensum à linea spirali a b c d e h, & linea recta h a, minor circulo ɥ. Neque utique maior. Esto itaque maior, si esse potest. Item spacio comprehenso à linea spirali a b c d e h, & recta h a potest inscribi figura, ita ut dictũ spacium minus addat super figuram inscriptã, quàm sit id quodcunque spacium dictum addit super circulum ɥ. Inscribatur itaque. Et esto frustorum ex quibus inscripta componitur, maximũ h r x. minimum uero, o h e. Constat iam, figuram inscriptam circulo ɥ esse maiorem. lineę quæ angulos ad h faciebant æquales eductæ, in circuli circumferentiam inciderunt. Rursus quædam rectæ sunt sese æqualiter excedentes, ab h ad spiram procedentes, quarum maxima est h a, minima uero h e, & minima æquatur excessui. Sunt



item aliæ lineæ ab h puncto ad circuli circumferentiam eductæ, multitudine quidem æquales prædictis, magnitudine uero unaquæque æqualis maximæ illarum: & ab omnibus describuntur frusta similia, & ab illis quæ inter se & maximæ aliarum sunt æquales, & ab illis quæ sese æqualiter excedũt. Frusta igitur ab illis quæ sunt maximæ aliarum æquales, descripta existunt plus quàm tripla frustorũ quæ à lineis sese æqualiter excedentibus continentur, dempto illo quod à maxima contentum est. Hoc enim demonstratum fuit. Frusta uero à lineis maximæ æqualib. contenta, circulo a f g i æqualia sunt. quæ uero à lineis æqualiter sese excedentib. comprehenduntur, dempto eo quod à maxima æquantur, figuræ inscriptæ. Circulus igitur a f g i est plus quàm triplus inscriptæ figuræ. idem uero triplus est circuli ɥ. Quare circulus ɥ maior est inscripta figura. Sed fuerat positus minor. Spacium igitur comprensum à spira a b c d e h, & à recta a h, neque minus circulo ɥ, neque maius existit. Igitur necesse est esse eidem æquale, quod erat demonstrandũ.

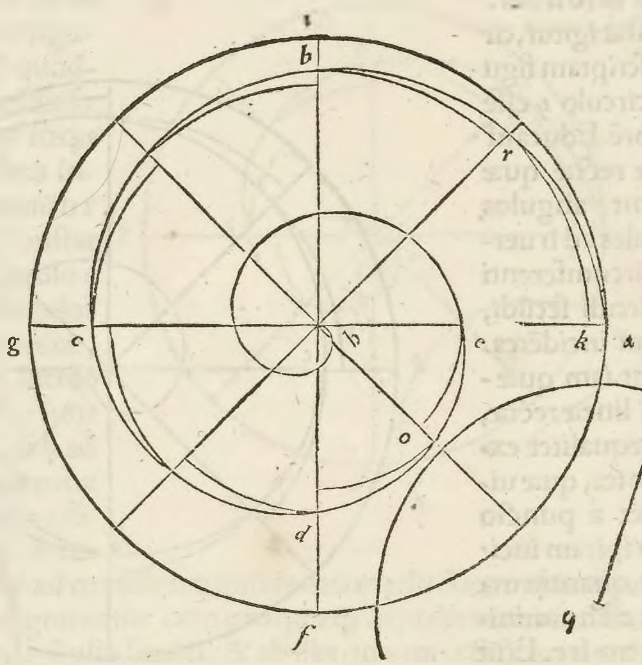
26 SPacium quod à spirali linea in secunda reuolutione descripta, & à secunda linea recta reuolutionis initio producta cõtinetur, habet ad circulum secundũ eam proportionem, quam septem ad duodecim, quæ eadem est ei quam habent utraque simul, contentum sub semidiametro circuli secundi, & semidiametro circuli primi, & tertia pars quadrati lineæ illius qua semidiametros secundi circuli excedit semidiametrum primi circuli, ad quadratum semidiametri circuli secundi. Esto linea spiralis, in qua a b c d e, in secũda reuolutione descripta. Esto h pũctum lineæ spiralis initium, recta uero h e in reuolutionis initio prima. recta autem a e, in reuolutionis initio secunda: circulus a f g i secundus. sint autem a g, f i diametri eius, altera alteri sit perpendicularis. Ostendendum est itaque, spacium contentum à linea spirali a b c d e, & à recta a e ad circulum a f g i, habere eam proportionem, quam septem habent ad duodecim. Esto circulus quidam ɥ, cuius semidiametrus potestate sit æqualis ei quod continet sub a h, h e, & tertiæ parti quadrati lineæ a e. habebit iam circulus ɥ ad circulum a f g i, sicut septem ad duodecim. Quoniam semidiametrus eius ad semidiametrum a f g i circuli eam habet proportionem potestate. Sed circulus ɥ ostendetur æqualis esse spacio contento à linea spirali, & à recta a e, nam si non sit, uel itaque maior erit, uel minor eo. Esto itaque primum maior,

ior, si esse potest. Circa spacium itaq; describi potest quædam plana figura, ex frustis similibus composita, ita ut figura circumscripta super spacium addat minus, quàm sit spacium quo ɣ circulus excedit dictum spacium. Esto circumscripta, & sit h a k frustum maximum eorũ ex quibus figura circumscripta componitur, minimũ uero h o d. Constat igitur, circumscriptam figuram circulo ɣ esse minorẽ. Educant̃ lineæ rectæ quæ faciunt angulos æquales ad h uersus circumferentiam circuli secũdi, in eam incidẽtes. Erunt iam quædam lineæ rectæ, sese æqualiter excedentes, quæ uidelicet à puncto h, in spiram incidunt, quarum maxima est h a, minima uero h e. Erũt etiam aliæ lineæ à puncto h, ad circumferentiã circuli a f g i eductæ, multitudine quidẽ una pauciores illis: magnitudine uero & inter se, & maximæ illarum æquales, & confecta sunt frusta similia, & ab eis quæ sunt inter se & maximæ illarum æquales, & ab eis quæ sese æqualiter excedunt: à minima autem non est confectum aliquod. Frusta igitur, ab eis quæ sunt æquales maximæ illarum confecta, habent ad frusta confecta à lineis sese æqualiter excedentibus, dempto eo quod à minima, minorem proportionem, quàm quadratum h a maximæ ad utraq; simul hæc, ad contentũ sub h a, h e, & tertiam partem quadrati a e. Hoc enim ostensum est. Circulus autem a f g i æquatur frustis, quæ à lineis inter se & maximæ illarum æqualibus confecta sunt. Frustis autem confectis à lineis sese æqualiter excedentibus, æquatur figura circumscripta. Minorem igitur proportionem habet circulus a f g i, ad figuram circumscriptam, quàm quadratum ad hæc utraq; simul, ad contentum sub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e. Quam autem proportionem habet quadratum a h, ad cõtentum sub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e: hanc habet circulus a f g i, ad circulum ɣ. Minorem ergo proportionem habet a f g i circulus ad figuram circumscriptam, quàm ad circulum ɣ. Quare colligitur, circulum ɣ minorem esse figura circumscripta. quod est cõtrarium ei quod positum fuerat. Circulus igitur ɣ spacio à linea spirali a b c d e, & recta a e contento, maior esse non potest. Verum neque minor. Esto namq;, si esse potest. Rursus in spacio à linea spirali a b c d e, & recta a e contento, potest quædam figura plana inscribi, ex frustis similibus composita, ita ut spacium à linea spirali a b c d e, & recta a e contentum, addat supra figuram inscriptam minus eo quo idem spacium excedit circulum ɣ. Esto igitur inscripta, & sit h k r frustum maximum eorum ex quibus componitur inscripta figura. Minimum uero, sit h e o. Constat igitur figuram inscriptam circulo ɣ esse maiorẽ. Educãtur lineæ rectæ, quæ faciunt angulos æquales ad h, uersus circumferentiã



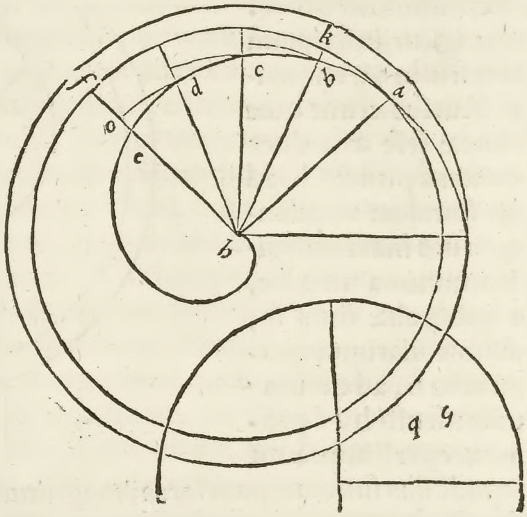
cir-

circuli a f g i, in quam incidant. Rurſus erunt lineæ quædam æqualiter ſeſe excedentes, quæ à puncto h in ſpiralem incidunt, quarum maxima h a, minima uero h e. Erunt item aliæ lineæ à puncto h ductæ in circumferentiam circuli incidẽtes, multitudine quidẽ una pauciores illis, magnitudine uero & inter ſe & maximæ illarũ æquales. Et à lineis ſeſe ęqualiter excedentibus confecta ſunt fruſta ſimilia, & à lineis maximæ illarum æqualibus. Fruſta igitur ab æqualibus maximæ illarum confecta, ad fruſta à lineis ſeſe æqualiter excedentibus confecta, dempto eo quod à maxima maiorẽ proportionem habebit, ꝙ quadratum h a ad hæc utraq; ſimul, ad cõtentum ſub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e. Fruſtis autem quę à lineis ſeſe æqualiter excedentib. ſunt confecta, dempto eo quod à maxima æquatur figura inſcripta ſpacio: fruſtis uero alijs circulus æquatur. Quare ſequitur circulum a f g i maiorem habere proportionem ad figuram inſcriptam, quàm quadratum h a ad hæc utraq; ſimul, ad contentum ſub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e, hoc eſt circulus a f g i ad circulum ɥ. Vnde colligitur, circulum ɥ figura inſcripta eſſe maiorem. Quod poſitioni contrariũ eſt. Neq; igitur circulus ɥ ſpacio à linea ſpirali a b c d e, & recta a h contento minor eſſe poteſt. igitur illi æqualem eſſe neceſſe eſt. Eodem autem modo oſtendetur ſpaciũ à linea ſpirali in quacunq; reuolutione deſcripta, & à recta contentum, quæ ſecundum numerum reuolutioni eundem, nominetur ad circulum ab eodem numero denominatum, eã habere proportionem quam utraq; ſimul iſta, cõtentum ſub ſemidiametro circuli à numero reuolutionis dicti, et ſub ſemidiametro circuli dicti à numero qui ſit unitate minor numero reuolutionis, et tertia pars quadrati ab ea linea producti, qua ſemidiametros maioris circuli ex prædictis excedit ſemidiametrum minoris circuli prædictorum, ad quadratum ſemidiametri maioris circuli prædictorum.

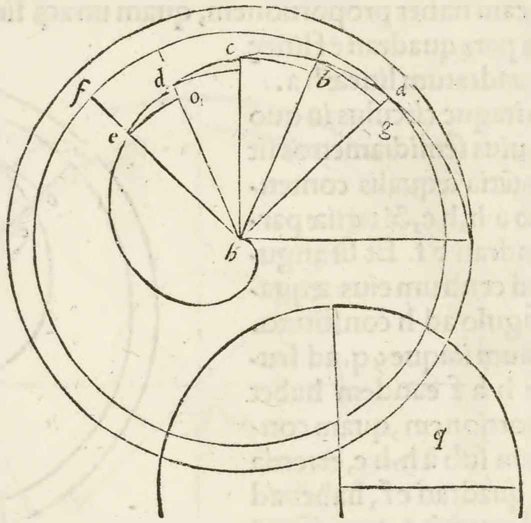


27 SPacium quod continetur à linea ſpirali, quę ſit minor ea quam una reuolutio deſcribit, quæq; non habeat terminum initiũ lineæ ſpiralis, ſed lineas rectas à terminis ſuis ad lineæ ſpiralis initium ductas, habet ad fruſtum quod eam quæ ex centro habeat æqualem maiori earum quæ à terminis ad lineæ ſpiralis initium ductæ ſint: circumferentiam uero eam quæ inter dictas lineas media intercipitur in parte lineæ ſpiralis, eam proportionem quam hæc utraq; ſimul, cõtentum ſub lineis quæ à terminis ad lineæ ſpiralis initium ductæ ſunt, & tertia pars quadrati eius lineæ qua maior dictarum linearum minorem excedit, ad quadratum maioris earum quæ à terminis ad lineæ ſpiralis initium iunctæ fuerunt. Eſto linea ſpiralis in qua a b c d e, minor ea quam una reuolutio deſcriberet: eius ſint termini a e. Eſto autem lineæ ſpiralis initium pũctum h, et centro h, interuallo autem h a, cir-

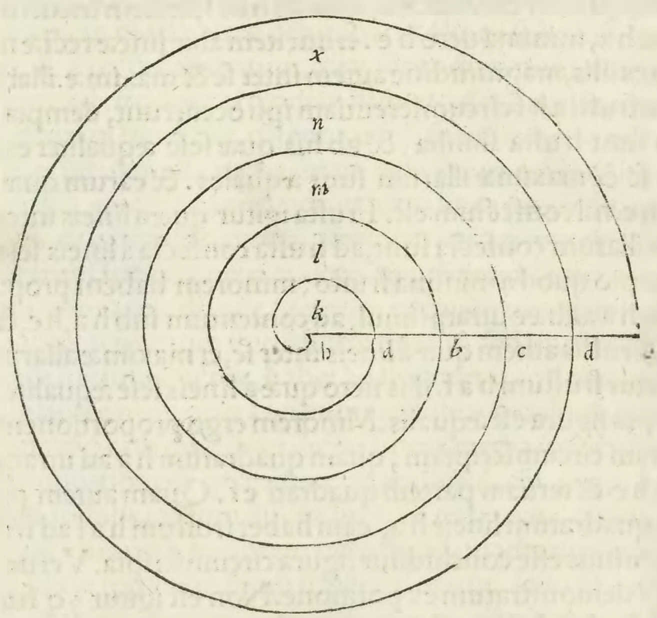
circulus describatur, & concurrat eius circumferentia h e in puncto f. Ostendendum est, quod spacium ab a b c d e linea spirali, & ab a h, h e contentum ad frustũ a h f, eam habet proportionem, quam utraq; simul ista, contentum sub a h, h e, & tertia pars quadrati e f lineę ad quadratum lineæ h a. Esto itaque circulus in quo ϟ q. cuius semidiametros sit in potẽtia æqualis contento sub a h, h e, & tertiæ parti quadrati e f. Et sit angulus ad centrum eius æqualis angulo ad h constituto. Frustum itaque ϟ q, ad frustum h a f eandem habet proportionem, quam contentum sub a h, h e, et tertia pars quadrati e f, habet ad quadratum h a. nam istorũ semidiametri hanc proportionem potentia inter se habent. Ostendendum iam est, frustum ϟ q, æquale esse spacio contento sub a b c d e linea spirali, & sub a h, h e rectis. nam si non, uel maius erit, uel minus. Sit itaque primò maius, si esse potest. Spacio igitur potest figura quędam plana circũscribi ex frustis similibus cõposita, ita ut ipsa addat super spacium minus eo quo ϟ q frustum excedit ipsum spacium dictum. esto circumscripta, & sit frustorum ex quibus componitur dicta figura maius quidem h a r, minus uero h o d. Manifestũ est, his positis figuram circũscriptam minorem haberi frusto ϟ q. Iam actæ sunt lineæ quæ faciunt angulos æquales ad h, uersus circumferentiam frusti h a f, in quam incidunt. Erunt iam quædam lineæ rectæ sese æqualiter excedentes, quæ ab h in spiralem incurrunt, quarum maxima quidem h a, minima uero h e. erunt item aliæ lineæ rectæ numero quidem una pauciores illis, magnitudine autem inter se & maximæ illarum æquales, quæ à pũcto h ad frusti a h f circumferentiam ipsi occurrunt, dempta h f. & ab omnibus confecta sunt frusta similia, & ab his quæ sese æqualiter excedunt, & ab his quæ inter se & maximæ illarum sunt æquales. & earum quæ sese æqualiter excedunt, ab h e, nil confectum est. Frusta igitur quæ à lineis inter sese æqualibus & maximæ illarum confecta sunt, ad frusta confecta à lineis sese æqualiter excedentibus, dempto quod a minima frusto, minorem habent proportionem, quàm quadratum h a ad hæc utraq; simul, ad contentum sub h a, h e, & tertiam partem quadrati e f. Frustis autem quæ à lineis inter se, et maximæ aliarum æqualibus constant, æquatur frustum h a f. Illis uero quæ à lineis sese æqualiter excedentibus sunt, circũscripta figura est æqualis. Minorem ergo proportionem habet h a f frustum ad figuram circumscriptam, quàm quadratum h a ad utraq; simul, ad contentum sub h a, h e, & tertiam partem quadrati e f. Quam autem proportionem habet ad dicta quadratum lineæ h a, eam habet frustum h a f ad frustum ϟ q. Quare frustum ϟ q, minus esse concluditur figura circumscripta. Verum positum fuerat maius esse, & demonstratum ex positione. Non est igitur ϟ q frustum maius spacio cõtento sub a b c d e linea spirali, & h a, h e. Neq; utique minus esse potest. ponatur nãque minus, si esse potest, & reliqua eadem disponantur. Rursus spacio potest figura quædam plana inscribi, ex similibus frustis composita, ita ut dictũ spaciũ su-



pra figurã inſcriptã minus addat, eo quo ipſum ſpacium excedit ϛ q fruſtum. inſcribatur itaque: & fruſtorum ex quibus inſcripta figura conſtituitur, eſto maius h b c, minus uero o h e. Conſtat igitur, inſcriptam figuram fruſto ϛ q eſſe maiorem. Rurſus erunt quædam lineæ ſeſe æqualiter excedentes à puncto h, ad lineam ſpiralem accedentes: quarum maxima quidem h a, minima uero h e. Eunt quoq; aliæ inter ſe, & maximæ illarum ęquales à puncto h, ad circumferentiam fruſti h a f productæ, excepta h a, quæ numero quidẽ illis ſunt una pauciores, magnitudine uero inter ſe & maximæ aliarũ æquales. & ab unaquaque fruſta ſimilia conſcripta ſunt: à maxima uero earũ quæ ſeſe ęqualiter excedunt, nullum conſcriptum eſt. Fruſta igitur à lineis æqualibus inter ſe, & maximę aliarum confecta, ad fruſta à lineis ſeſe ęqualiter excedentibus contenta, dempto eo quod à maxima, maiorem habent proportionem, quàm quadratum h a, ad contentum ſub h a, h e, & tertiam partem quadrati e f. Quare & fruſtum h a f ad figuram inſcriptam, maiorem habebit proportionem, quàm ad ϛ q fruſtum. Vnde ſequitur ϛ q fruſtum maius eſſe figura inſcripta. At uero poſitũ fuerat, minus eſſe. Non poteſt igitur fruſtum ϛ q minus eſſe ſpacio à ſpirali linea, & rectis h a, h e comprehenſo. quare eidem æquale eſſe neceſſe eſt.



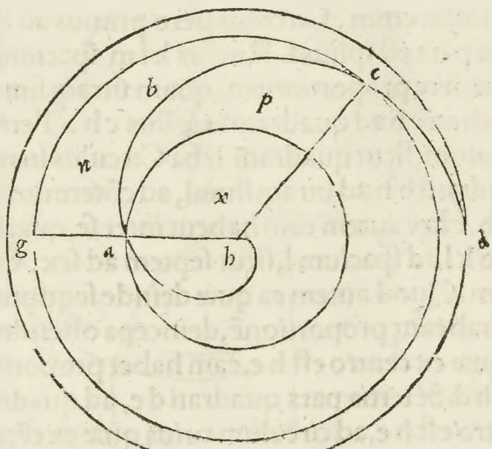
28 EOrum quæ continentur à lineis ſpiralibus, & rectis quæ in reuolutionibus reputãtur ſpaciorum, id quidem quod tertium datur, eſt duplum ſecundi, quartum eſt eius triplum, quintum eſt quadruplum: & ſic deinceps ſecundum numeros creſcentes, ſemper ſequens ſpaciũ eſt multiplex ſecũdi, primũ autem ſpacium ſexta pars ſecundi eſſe demonſtratur. Eſto linea ſpiralis propoſita, & in prima, & in ſecunda, & in cæteris deinceps deſcripta reuolutionibus quotcunq;. Eſto pũctum h lineæ ſpiralis initium, & recta h e initium reuolutionis. Primum uero ſpacium ſit k, ſecundum l, tertium m, quartum n. Oſtendendum eſt itaque ſpacium k, ſextam



tam partem esse spacij se sequentis, & spacium m duplum esse ipsius l, ipsum n triplum ipsius l. Et eorum quæ sequuntur, semper id quod deinceps sumitur multiplex ipsius l secundum numeros se sequentes. Quod autem k sit sexta pars ipsius l, sic ostēditur: quoniam l spacium eã habet proportionem ad circulum, secũdum quam habent septem ad duodecim. Secundus uero circulus ad primũ, sicut 12 ad 3. constat enim. Circulus uero primus ad spacium k, sicut tria ad unum. k igitur sexta pars est ipsius l. Rursus k l m spacium ad circulum tertium, eam ostensum est habere proportionem, quam utraq; simul, cõtentum sub c h, h b, et tertia pars quadrati c b ad quadratum ipsius c h. Tertius uero circulus habet se ad secũdum circulum, sicut quadratũ h b. Circulus item secundus habet ad k l spacium, sicut quadratũ h b ad utraq; simul, ad cõtentum sub h b, h a, & tertiam partem quadrati a b. Hæc autem eam habent inter se, quam decem & nouem ad septem. Spaciũ uero k l ad spacium l, sicut septem ad sex. Cõstat igitur spacium m, ipsius l esse duplum. Quod autem ea quæ deinde sequuntur, secundum numeros deinde sequẽtes habeant proportionẽ, deinceps ostendetur. Nam k l m n x, ad circulum cuius ea quæ ex centro est h e, eam habet proportionẽ quam utraq; simul, contentũ sub h e, h d, & tertia pars quadrati d e, ad quadratum h e. Circulus uero, cuius quæ ex centro est h e, ad circulum cuius quæ ex cẽtro est h d, eam habet proportionẽ, quã quadratum h e, ad quadratum h d. Circulus autem cuius quæ ex centro est h d, ad spacium k l m n, eam habet proportionem, quam quadratum h d, ad utraque simul ista, ad id quod continetur sub h d, h c, & tertiam partem quadrati d c. Spaciũ igitur k l m n x, ad spacium k l m n, eam habet quam contentum sub h e, h d, & tertia pars quadrati d e, ad contentum sub h d, h c, & tertiam partem quadrati c d. Diuidendo, & spacium x ad spacium k l m n, eam habet quam excessus contenti sub e h, h d, cum tertia parte quadrati e d, ad contentum sub d h, h c, & tertiam partem quadrati e d, ad contentum sub d h, h c: & tertiam partem quadrati d c. utraq; uero illa simul excedunt ista simul utraq;, eo quo contentum sub e h, h d, excedit contentum sub d h, h c. Excedunt autem eo quod sub d h, e c. Spacium igitur x ad spacium k l m n, eam habet quam contentum sub h d, c e, ad contentũ sub d h, h c, & tertiã partẽ quadrati c d. Per hæc aũt eadem ostẽdetur, quod spaciũ n ad spaciũ k l m, eam habet, quã cõtentum sub h c, b d, ad utraq; simul ista, ad contentũ sub c h, h b, & tertiam partem quadrati c b. Spacium ergo n, ad spacium k l m n, eam habet quam contentum sub h c, b d. itemq; quod sub b h, h c, & tertia pars quadrati c b, ad contentum sub h c, b d. Constat enim diuidendo, & conuersim. Hæc autem æquantur cõtento sub d h, h c, & tertiæ parti quadrati c d. Quoniam igitur spacium x, ad spacium k l m n, eam habet quam contentum sub h d, c e ad utraq; simul ista, ad contentum sub h d, h c, & tertiam partem quadrati c d. Spacium uero k l m n, ad spacium n, eam quam utraq; simul ista contentum sub d h, h c & tertia pars quadrati c d, ad contentum sub h c, d b. Habet igitur spacium x, ad spacium n, eam quam contentum sub h d, c e, ad contentum sub h c, d b. Contentum autem sub h d, c e, ad cõtentum sub h c, d b, eam habet quam h d ad h c, cum c e sit ipsi b d ęqualis. Constat itaq;, quod spacium x ad spacium n, eam habet quã h d ad h c. Similiter ostendetur, spacium n ad spacium m, eam habere proportionem quam habet h c ad h b, & m ad l, sicut b h ad h a. Lineæ uero e h, d h, c h, b h, a h, habent proportionem, quam numeri deinceps continenter sumpti.

SI in linea spirali quacũq; reuolutione descripta, duo pũcta sumanť, quæ non 29
sint eius termini, & ab istis ducanť lineæ rectæ ad initiũ lineæ spiralis, & cẽtro spiræ initio, interuallis uero ipsis lineis quæ ad initiũ spiræ à pũctis ductæ sint, circuli describantur: spacium comprehensum, ab ea maioris circuli circumferentia quæ media inter lineas rectas, & spiram inter easdem lineas comprehensam, & à linea extrà ducta capitur, eã habet proportionẽ ad spaciũ compræhẽsum à circũ

ferentia minoris circuli, & ab eadem ſpira & à linea recta, quæ earũ terminos iungit, quãq; ex centro circuli maioris cum tertijs duab. exceſſus eius quo ea quæ ex centro maioris circuli excedit eam quæ ex centro minoris ad eam quæ ex centro maioris, cum una eiuſdem exceſſus tertia parte. Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d in una reuolutione deſcripta. & ſumantur in ea duo puncta a c. Eſto punctũ h initium ſpiræ. & ab a & c ducãtur ad h lineę. & cẽtro h, interuallis h a, h c, circuli deſcribantur. Oſtendendum quod ſpacium x ad ſpacium p, eam habet proportionem, quam utraq; ſimul a h, et duæ tertiæ g a, ad utramq; ſimul, ad a h, & unam tertiã ipſius g a. nam ſpaciũ n p, ad fruſtũ g c h, oſtẽſum eſt eam habere proportionem, quam habet contentum ſub g h, h a, & tertia pars quadrati a g, ad quadratum h g. ipſum ergo x, ad n p eam habet, quam contentum ſub h a, a g, & duæ tertiæ quadrati a g ad utraq; ſimul, ad contentum ſub a h, h g, & tertiam partem quadrati g a. Et quoniam ſpacium n p, ad fruſtum n p x, eam habet quam utraq; ſimul, contentũ ſub h a, h g, & tertia pars quadrati g a, ad quadratum h g. Fruſtum aũt n p x, ad fruſtum n, eam habet quã quadratũ h g ad quadratũ h a. Spacium quoq; n p, ad ipſum n, eam habebit quam utraq; ſimul, contentum ſub h a, h g, & tertia pars quadrati g a, ad quadratum h a. Igitur n p ad p, eam habet quam utraq; ſimul, contentum ſub g h, h a, & tertia pars quadrati g a, ad utraq; ſimul, ad contentum ſub g a, h a, & tertiam partem quadrati g a. Quoniam ſpacium x ad n p eam habet, quam utraque ſimul, contentum ſub h a, a g, & duæ tertiæ quadrati g a, ad utraque ſimul, ad contentum ſub g h, h a, & tertiam partem quadrati g a. Spacium autem n p ad p, eam habet quam utraq; ſimul, contentum ſub g h, h a, & tertia pars quadrati g a, ad utraq; ſimul, ad contentum ſub g a, a h, & tertiam partem quadrati g a. Habebit quoq; x ad p, eam quam habent utraque ſimul, cõtentum ſub h a, g a, & duæ tertiæ quadrati g a, ad utraq; ſimul, ad contentum ſub h a, g a, & tertiã partem quadrati g a. Iſta uero utraq; ſimul, contentum ſub h a, g a, & duæ tertiæ quadrati g a, ad utraq; ſimul, ad contentum ſub h a, g a, & tertiam partem quadrati g a, eam habent quam utraque ſimul, ipſa h a, & duæ tertiæ ipſius g a, ad utraq; ſimul, ad ipſam h a, & tertiam partem ipſius g a. Conſtat igitur, ſpacium x ad ſpacium n, eam habere proportionẽ, quam utraq; ſimul, ipſa h a, & duæ tertiæ ipſius g a, ad ipſam h a, & tertiam ipſius g a, utraq; ſimul ſumpta.



FINIT ARCHIMEDIS TRACTATVS de Lineis ſpiralibus.

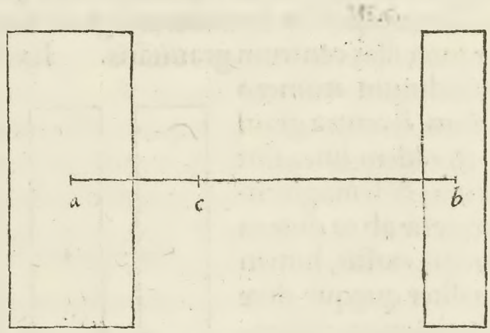
ARCHIMEDIS PLANORVM AEQVEPONDERANTIVM INVENTA, VEL CENTRA *grauitatis planorum.*

PETIMVS grauia æqualia, æquali diſtantia poſita, inter ſe æqualiter ponderare. Grauia item ęqualia, diſtantia inæquali ſuſpenſa, non æqualiter ponderare: ſed id quod in longiori diſtantia pendet, ad graue deferri. Item, ſi grauibus ſecundū quandam diſtantiam æqueponderantibus, alteri eorum adijciatur aliquod graue, tunc ea non æqualiter ponderare, ſed illud ad graue deferri, cui quod graue fuerit adiectum. Similiter etiam ſi ab altero eorum auferatur graue, tunc non æqualiter ponderare, ſed id à quo nil ſit ablatum, ad graue deferri. Figuris planis ſimilibus & æqualibus inter ſe coaptatis, centra quoq; grauitatis earum erunt inter ſe coaptata. Si uero figuræ ſimiles fuerint, non autem æquales, centra grauitatis earum erunt ſimiliter poſita. Dicimus puncta ſimiliter poſita eſſe ad ſimiles figuras, à quibus lineæ rectæ, ſecundum angulos æquales ductæ, ad latera inuicem correſpondentia æquales angulos efficiant. Item ſi magnitudines quædam in quibuſdam diſtantijs poſitæ æqualiter ponderent, & quæcunq; eis æquales in eiſdem diſtantijs poſitæ æqualiter ponderabunt. Cuiuſcunq; figuræ cuius circum limbus fuerit, in eandem partem connexus, centrum grauitatis intra figuram eſſe oportet. Suppoſitis his, ſequitur:

GRauia, quæ in diſtantijs æqualibus poſita æqualiter ponderent, æqualia eſ- 1
ſe. Si enim eſſent inæqualia, auferretur q; à maiori exceſſus, reliqua non æ-
qualiter ponderarent: cum ab altero æqueponderantiū aliquid fuerit ablatum.
Quare grauia in diſtantijs æqualibus æqueponderantia, æqualia eſſe neceſſe eſt.

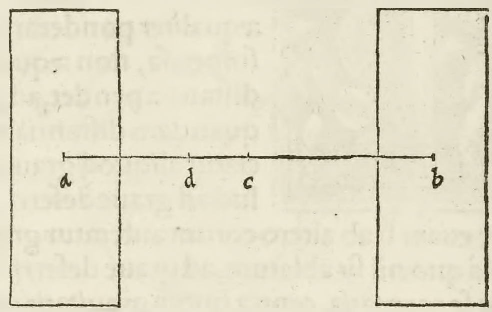
GRauia in diſtantijs æqualib. poſita, ſi fuerint inæqualia, non æquepondera 2
bunt, ſed maius eorū inclinabitur. Ablato enim exceſſu, æqueponderabūt:
cum æqualia in diſtantijs poſita æqualibus æqueponderent. Eo autem quod ab-
latum fuerit adiecto, iam in maius inclinabitur, cum alteri ęqueponderantium ſit
aliquid adiectum.

SI grauia inæqualia in diſtantijs inæqualibus ſuſpenſa, æqualiter ponderent: 3
maius in minori, minus in maiori diſtantia ſuſpendetur. Eſto grauia inæqua
lia a b, & ſit a maius, b minus: & æqueponderent ab a c, c b diſtātijs. Oſtendendum eſt, quod a c minor eſt c b. nam ſi non, ablato exceſſu quo a excedit b, cum iam ab altero ęqueponderantium ſit ablatum aliquid, inclinabitur ad b: quod non uerum eſt. nam a c ſi eſſet æqualis b c, æquepōderarent. nam æqualia in diſtantijs ęqualibus. Si autem a c maior eſſet b c, inclinaretur ad a. nam æqualia in diſtātijs inæqualib. nō æqueponderāt. Sed quod in maiori diſtātia eſt, inclinatur. ac iam propter hæc a c minorē eſſe b c neceſſe eſt. Manifeſtū aūt, quod grauia quæ in di-



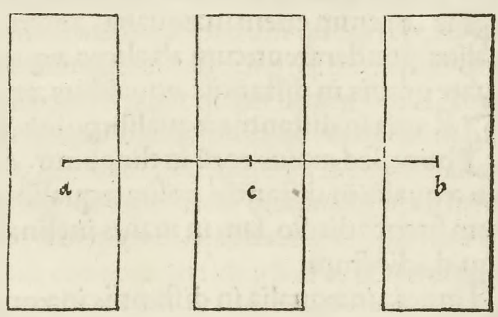
ſtantijs inæqualibus æqueponderãt, inæqualia ſunt. & eorũ maius eſt illud quod in minori diſtantia pendet.

4 SI duæ magnitudines æquales non idem centrum grauitatis habuerint, magnitudinis ex utraque compoſitæ cẽtrum grauitatis eſt medium lineæ rectæ, quæ dictarum magnitudinum centra grauitatis coniungit. Eſto itaq; ipſius a centrũ grauitatis ipſum a, et ipſius b ipſum b. Et ſit ducta linea a b, quæ diuidatur in duo æqualia in puncto c. Dico quod utrarumq; compoſitarum cẽtrum grauitatis eſt ipſum c. nam ſi non, eſto utrarumq; a b magnitudinum compoſitarum centrum grauitatis d, ſi eſſe poteſt. Quod autem eſt in linea a b, prædemonſtratum eſt. Quoniam igitur d eſt centrum grauitatis magnitudinis, compoſitæ ex a & b, apprehenſo d pũcto æqueponderabũt magnitudines

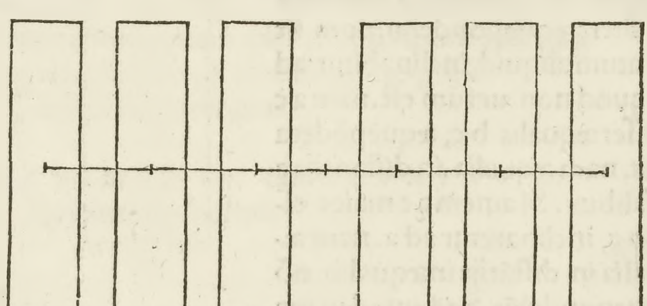


Igitur a b æqueponderabunt in a d, d b diſtantijs, quod eſſe non poteſt. nã æqualia in diſtantijs inæqualibus non æqueponderant. quare manifeſtum eſt, ipſum c centrum grauitatis eſſe magnitudinis ex ipſo a & ipſo b compoſitæ.

5 SI autem trium magnitudinum centra grauitatis in una linea fuerint poſita, & magnitudines æqualem inter ſe grauitatem habuerint, & lineæ rectæ inter cẽtra ductæ æquales extiterint: magnitudinis ex dictis magnitudinibus compoſitæ centrum grauitatis punctum illud erit, quod idem eſt mediæ magnitudinis centrum grauitatis. Eſto tres magnitudines a b c, centra uero grauitatis earum ſint a b c, pũcta in una recta linea poſita. Sint quoq; a b c ęquales: & lineæ a c, c b rectæ æquales. Dico centrum grauitatis magnitudinis illius, quæ ex omnibus illis magnitudinib. compoſita fuerit, eſt punctum c. Quoniam itaq; a b, magnitudines æqualẽ habent grauitatem, centrum grauitatis earum erit punctum c. Quoniam a c, c b, rectæ æquales ſunt: eſt etiam

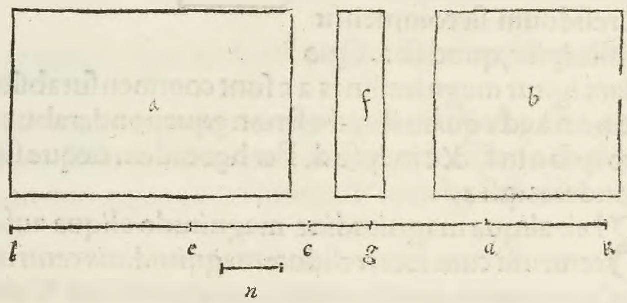


ipſius c centrum grauitatis c punctum. Conſtat quod magnitudinis quoq; ex omnibus illis compoſitæ centrum erit grauitatis punctum, quod eſt magnitudinis mediæ inter illas centrum grauitatis. Ex hoc manifeſtum eſt, quod quotcunq; magnitudinum numero imparium, ſi centra grauitatis, in eadem linea ſint conſtituta, & ſi magnitudines cęteræ ab ea quæ earum media exiſtit, hincinde æqualiter quęque duæ correſpondentes deſtiterint, habuerintq; grauitatem inter ſe æqualem, & lineæ rectæ inter earum cẽtra mediæ fuerint inter ſe æquales, eius magnitudinis quę ex illis omnibus compoſita



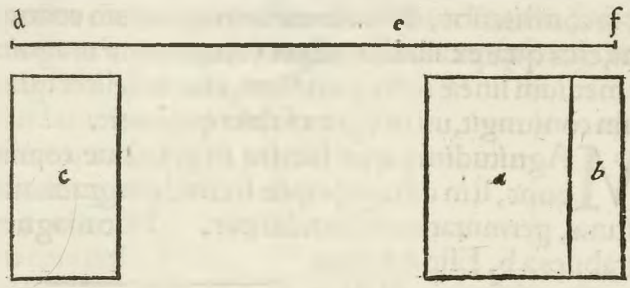
posita fuerit, centrum grauitatis erit punctum, quod magnitudinis mediæ centrũ grauitatis existit. Quod si pares numero fuerint magnitudines, & centra earum grauitatis in eadem linea recta posita fuerint, & earum mediæ grauitate æquali inter se constiterint, & lineæ rectæ inter earum centra mediæ inter se æquales fuerint, eius quæ ex illis omnibus componetur magnitudinis centrum grauitatis erit medium lineæ rectæ punctum, eius uidelicet quæ centra grauitatis magnitudinum coniungit, uti in figura subscripta patet.

Magnitudines quæ fuerint in grauitate commensurabiles, æqueponderabunt, si in distantijs quæ secundum grauitatum proportionem fuerint cõstitutæ, permutatim suspendantur. 6 Esto magnitudines in grauitate commensurabiles a b. Esto e d item quædam distantia, & sicut a ad b, ita d c ad c e. Ostendendum itaq;, quod magnitudinis ex utrisq; a & b compositę centrum grauitatis est c punctum. Quoniam itaq; est sicut a ad b, ita d c ad c e. ipsum uero a est ipsi b commẽsurabile. ipsa ergo d c est ipsi c e commensurabilis, recta scilicet rectæ. quare e c, c d erit quædam communis mensura quæ sit n, & ponatur ipsi e c æqualis utraq; istarum d g, d k. Ipsi aũt d c esto e l æqualis. Et quoniã d g æquatur c e, & d c æquatur e g. quare & l e æquatur ipsi e g. Igiť l g dupla est ipsius d c, & ipsa g k ipsius c e. Quare n utrãq; l g, g k mensurabit, cum earum medietates metiatur. Et quoniam est sicut a ad b, ita d c ad c e. Sicut autem d c ad c e, sic l g ad g k. nam utraq; utriusque dupla existit. Igitur sicut a ad b, sic l g ad g k. Quotuplex autem est l g ipsius n, eo sit numero multiplex ipsa a ipsius f. Erit ergo sicut l g ad n, sic a ad f. Est autem sicut k g ad l g, ita b ad a. ab æqua igitur est, sicut k g ad n, sic b ad f. æque multiplex est igitur k g ipsius n, sicut b ipsius f. Ostensum uero est, & ipsum a quoq; ipsius f multiplex esse. quare ipsũ f, erit ipsorum a & b communis mensura. Diuisa igitur l g in partes æquales ipsi n, & a in partes æquales ipsi f: partes ipsius l g, quæ ipsi n in magnitudine æquantur, tot erunt numero, quot sunt partes ipsius a, ipsi f in magnitudine æquales. Quare si unicuiq; partium l g apponatur, magnitudo æqualis ipsi f cẽtrum grauitatis habens in medio portionis, & omnis magnitudines æquantur ipsi a, & magnitudinis ex omnibus compositæ centrum grauitatis erit ipsum e. nam omnes numero pares sunt propterea, quod ipsa l e æquatur ipsi e g. Similiter autem ostendetur, & si unicuiq; portionum k g apponatur magnitudo æqualis ipsi f, centrum grauitatis habens in medio portionis, & omnis magnitudines æquales erunt ipsi b, & magnitudinis ex omnibus illis compositę centrum grauitatis erit ipsum d. Est igitur a quidem impositum ad ipsum e, & ipsum b ad ipsum d. Sunt itaque iam magnitudines inter se æquales in lineam rectam positę, quarum centra grauitatis æqualiter inter se distant compositę, & numero pares. Constat igitur, quod compositę ex omnibus magnitudinibus centrum grauitatis est diuisio in duo ęqua lineę rectæ, in qua centra magnitudinum mediarum sunt posita. Cũ igitur l e sit æqualis c d, & ipsa e c ipsi d k: tota igitur l c æquatur ipsi c k. Quare magnitudinis ex omnibus compositæ centrũ grauitatis est c punctum. Posito igitur ipso a ad ipsum e, & ipso b ad ipsum d, ęqueponderabũt secundum c punctum.

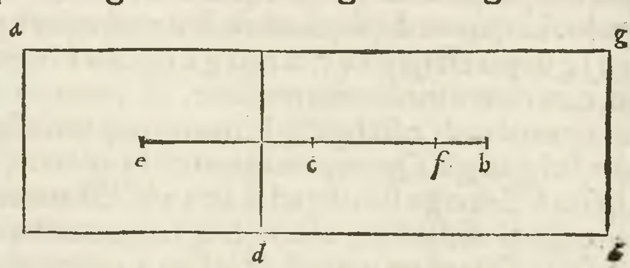


Si magnitudines incommensurabiles fuerint, similiter ęqueponderabunt, si in distantijs suspendantur, quę proportionem inter se magnitudinum mutuam 7 ha-

habuerint. Sunto a b c magnitudines incommensurabiles, distantię uero d e, e f. Habeat autem a b ad ipsum c eam proportionem, quam distantia e d ad e f. Dico quod magnitudinis compositæ ex a b c, centrum grauitatis est punctum e, nam si non, ęqueponderabit a b positum ad f, ipsi c posito ad ipsum d, uel maius est a b ipso c, ita ut ęqueponderet ipsi c, uel non. Esto maius, & auferatur ab ipso a b, minus excessu quo a b excedit c, ita ut æquepōderet: & residuum sit commensurabile ipsi c, quod sit a. Quoniam igitur magnitudines a c sunt commensurabiles, & minorem habet proportionem a ad c quàm d e ad e f, non ęqueponderabunt a & c in distantijs d e, e f, posito ipso a in f, & c in ipso d. Per hęc eadem neque sic maius existit, quàm ut ęqueponderet ipsi a.

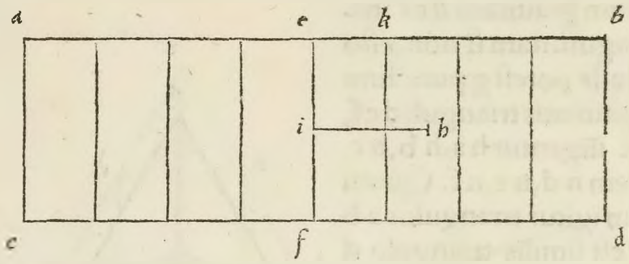


8 SI ab aliqua magnitudine magnitudo aliqua auferatur, quæ non habeat idem centrum cum tota, residuæ magnitudinis centrum grauitatis existit in linea recta, quæ centra grauitatis totius magnitudinis & ablatæ coniungat, & in ea illius parte in qua linea ipsa à centro totius magnitudinis educitur extra, atq; in eo puncto quo ipsa sic terminatur, ut ipsa iam educta ad eam quæ iungit centra prędicta eam habeat proportionem, quam magnitudinis ablatæ grauitas ad grauitatem residuæ. Esto magnitudinis alicuius centrum grauitatis c, ipsa uero sit a b. & auferatur ab ipsa a b magnitudo a d, cuius centrum grauitatis sit e. ducta uero e c, & extra ducta intercipiatur c f, quæ eam proportionē habeat ad e c, quam habet grauitas magnitudinis a d ad grauitatem magnitudinis d g. Ostēdendum quod magnitudinis d g centrum grauitatis est f punctum. Nam si non, esto si fieri potest, h punctum. Quoniam igitur a d magnitudinis centrum grauitatis est e, ipsius uero d g est punctum h, magnitudinis ex utraque compositæ centrum grauitatis erit in linea e h, ita diuisa ut partes mutuam inter se magnitudinum proportionē habeant. Quare non erit c punctum secundum proportionalem sectionem, ei quæ dicta est. quare c non est centrum grauitatis eius magnitudinis, quæ ex a d, d g cōposita est: hoc est ipsius a b. positum uero fuerat, ipsum c esse dictum centrum. nō erit igitur h punctum centrum grauitatis d g magnitudinis.

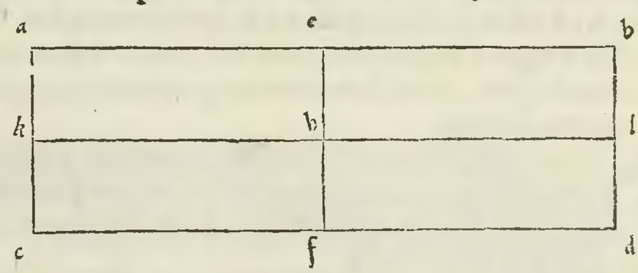


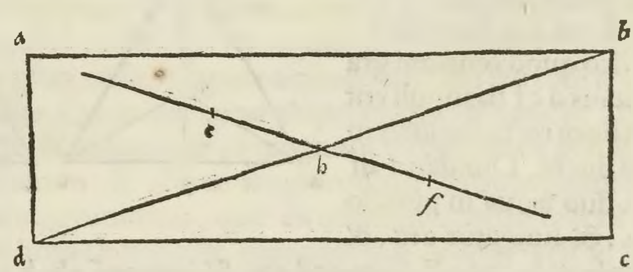
9 CVius libet figuræ æquedistantiū laterum cētrum grauitatis est in linea recta, quæ coniungit latera opposita ipsius figuræ æquedistantium laterum, diuisæ in duo æqua, quæ latera in diuisione figuræ secta fuerint. Esto figura æquedistantium laterum a b c d, in diuisione uero in duo æqua ipsius a b c d, esto e f. Dico a b c d centrum grauitatis esse in linea e f. nam si non, esto si esse potest punctum h, & ducatur h i æquedistans ipsi a b. Linea uero e b continuæ in duo æqua diuisa erit, tandem quædam intercepta minor h i. Et diuidatur utraq; e b, e a in lineas æquales e k, & à punctis diuisionum æquedistantes ipsi e f. Diuidetur itaq; tota figura in figuras æquedistantium laterum æquales, & similes ipsi k f. Figuris itaq; æquedistantium laterum similibus, & æqualibus ipsi k f, inuicem coaptatis;

tis, & centra quoq; grauitatis earum erunt inuicem coaptata. Erunt iam magnitudines quædam æquedistantiũ laterũ æquales ipsi k f, numero pares, & centrũ grauitatis earũ in eadem linea posita, & media æqualia, & omnia quæ utrinq; ipsis medijs assistunt, & ipsa æqualia sunt. & lineæ inter centra mediæ sunt æquales. Magnitudinis ergo ex omnibus compositæ centrũ grauitatis est in linea recta, quæ iungit centra grauitatis spaciorum eorũ quæ in medio sunt. nõ est autem. nam h est extra figuras medias. Constat ergo, centrum grauitatis figuræ a b c d æquedistantium laterum esse, in e f linea recta.



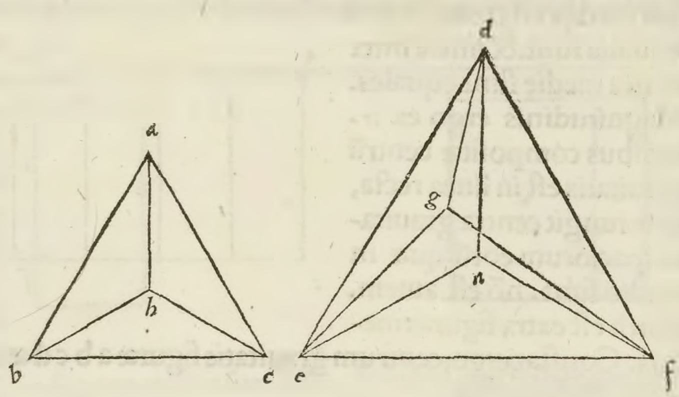
CVIuslibet figuræ æquedistantium laterum centrum grauitatis est punctum, in quo diametri coincidunt. Esto figura æquedistantium laterum a b c d, & in ipsa sit linea e f, diuidens in duo æqua a b c d lineas. & item k, l diuidens a c, b d. Est iam figuræ a b c d æquedistantium laterum centrum grauitatis in linea e f. Ostensum namq; est hoc, et eadem ratione est in linea k l. Igitur punctum h est cẽtrum grauitatis. in puncto autem h diametri figuræ æquedistantium laterum cõcurrent, ut prius demonstratum fuit. Contingit autem & aliter hoc idem demonstrare. Esto figura æquedistantium laterum a b c d. eius diametros d b. trianguli ergo a b d, b d c erũt inter se similes & æquales. quare ipsis coaptatis, & eorum centra grauitatis inter se coincident. Esto iam trianguli a b d, centrum grauitatis e pũctum, & † ducatur e h, & protrahatur donec assumatur h f æqualis e h. Coaptato itaq; a b d triãgulo ad triangulum b d c, & latere a b ad latus d c. accommodato uero latere a d ad latus b c, coaptabitur quoq; e h linea recta ad h f rectam, & e punctum in f cadet, sed et in centrum grauitatis trianguli b d c. Quoniam igitur trianguli a b d centrum grauitatis est e punctum, trianguli uero b d c est f, manifestum est, quod magnitudinis ex utrisq; compositæ centrum grauitatis est punctum medium lineæ e f rectæ, quod quidem est h punctum. 10





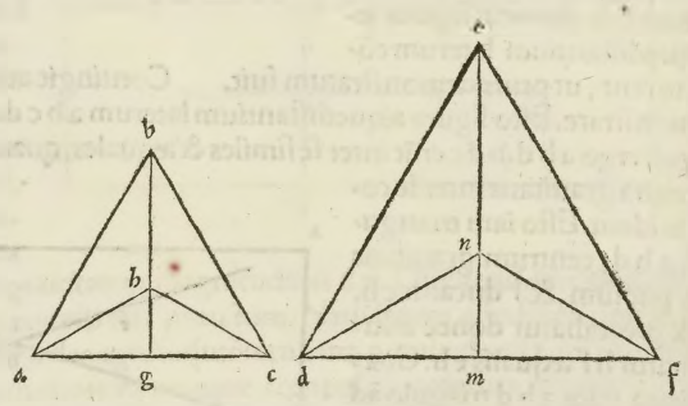
† Intellige diametrum b d diuisam esse per mediũ in h puncto.

SI duo trianguli fuerint inter se similes, & duo in ipsis puncta similiter ad triangulos se habentia in positione, & punctũ unum eius in quo est, triãguli sit centrum grauitatis: reliquum quoq; punctum eius in quo est, trianguli centrum grauitatis existet. Puncta uero dicimus similiter se habere in positione ad similes figuras, à quib. lineæ rectæ ab angulis æqualibus eductæ, ad latera inter se correspõdentia angulos æquales efficiant. Esto duo trianguli a b c, d e f. & esto sicut a c ad 11 d f, ſic a b ad d e, & b c ad e f. & ſint in dictis triangulis puncta ſimiliter poſita, quæ ſint h, n, ſimiliter ſe in poſitione habentia ad triangulos a b c, d e f. & ſit h centrum grauitatis a b c trianguli. Dico quod n eſt centrum grauitatis d e f trianguli. nam ſi non, eſto ſi eſſe poteſt g punctum grauitatis trianguli d e f, & iūgantur h a, h b, h c. item n d, n e, n f. Quoniam igitur triangulus a b c eſt ſimilis triangulo d e f, & centra grauitatis ſunt h g puncta: ſimilium uero figurarum centra grauitatis ſimiliter



poſita ſunt, ita ut æquales angulos efficiant ad latera eiuſdem rationis unūquodque ad unumquodq;. Angulus igitur g d e, erit æqualis angulo h a b. Sed angulus h a b eſt æqualis angulo e d n: quia puncta h n, ſimiliter poſita ſunt. Angulus igitur e d g erit æqualis angulo e d n, maior ſcilicet minori: quod eſſe non poteſt. Non eſt igitur g punctus centrum grauitatis trianguli d e f. quare punctum n erit centrum dictum.

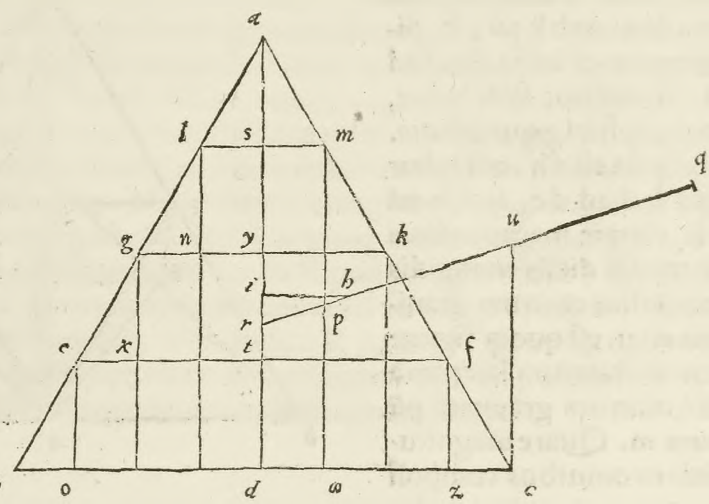
12 SI duo trianguli fuerint ſimiles, & centrum grauitatis alterius eorum fuerit in linea recta, quæ ab uno angulo eius ad mediam baſem ducatur: alterius quoq; trianguli erit centrum grauitatis in linea ſimiliter in eo ducta. Sunto trianguli duo a b c, d e f. & eſto ſicut a c ad d f, ita a b ad d e, & b c ad f e. et a c diuiſa in duo ęqua in puncto g, iungatur b g. Et eſto centrum grauitatis triāguli a b c, in linea b g, quod ſit h. Dico quod centrum grauitatis d e f trianguli erit in linea recta, ſimiliter in eo ducta. Diuidatur df in duo æqua in puncto m. & iungatur e m, &



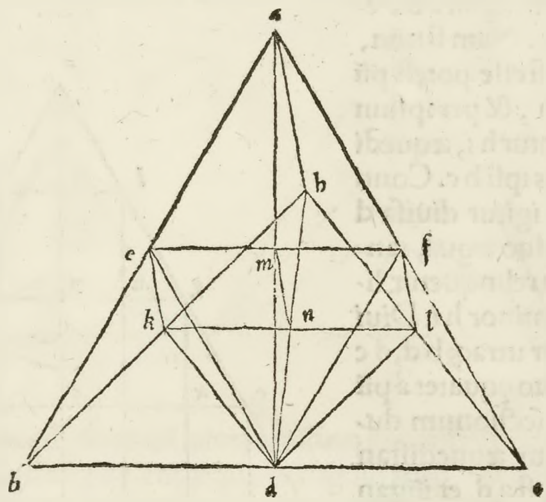
fiat ſicut b g ad b h, ſic m e ad e n: & iungant̃ a h, h c, d n, n f. Cum igitur ipſius c a dimidia eſt a g, & ipſius d f dimidia eſt d m: eſt ſicut b a ad e d, ita a g ad d m. & latera circa æquales angulos exiſtentia, ſunt proportionalia. Angulus igitur a g b eſt æqualis angulo d m e. & eſt ſicut a g ad d m, ſic b g ad e m. Eſt autē & ſicut b g ad b h, ſic m e ad e n: & per æquam ergo, ſicut a b ad d e, ſic b h ad e n. Et circa angulos æquales latera proportionalia conſiſtunt. Erit igitur angulus b a h, æqualis angulo e d n. Quare angulus h a c reliquus erit ęqualis angulo e f n. et angulus h c g, æqualis angulo n f m. Oſtenſum eſt autem, quod angulus a b h eſt æqualis angulo d e m. quare & angulus h b c reliquus, erit æqualis angulo n e f. Et omnino eadem ratione puncta h n, ad latera proportionalia ſimiliter poſita ſunt, & angulos æquales faciunt. Cum igitur h n puncta ſimiliter poſita ſint, & h eſt centrum grauitatis trianguli a b c, erit n quoq; centrum grauitatis trianguli d e f.

Cuiuſ-

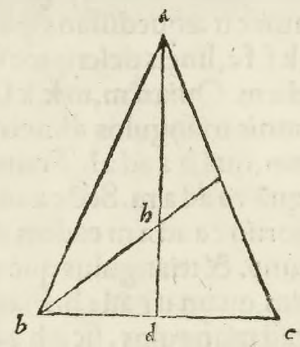
CVjuſcunq; trianguli centrum grauitatis exiſtit in linea recta, quæ ab angu- 13
lo ad dimidiam baſem ducta fuerit. Eſto triangulus a b c, & in ipſo a d ducta ad dimidiam baſem. Eſt itaq; oſtendendum, quod in linea a d centrum grauitatis triãguli a b c exiſtit. Nam ſi non, eſto ſi eſſe poteſt pũctũ h, & per ipſum ducatur h i, æquediſtans ipſi b c. Continuè igitur diuiſa d c in duo æqua, tandem relinquetur linea minor h i. Diuidatur utraq; b d, d c in duo ęqua: et à pũctis ſectionum ducantur æquediſtantes ipſi a d, et iũgantur e f, g k, l m. Erũt iam ipſæ æquediſtãtes ipſi b c. Iam figuræ æquediſtantium laterum m n, centrum grauitatis eſt in ſ y. Ipſius aũt k x in y t, & ipſius f o, in t d. Magnitudinis ergo ex omnibus compoſitæ centrum grauitatis eſt in linea ſ d recta, quod ſit r. Et iungatur h r, & educatur & protrahatur, & ducatur c u æquediſtans ipſi a d. triangulus autem a d c, ad omnis triangulos a m, m k, k f, f c, lineis deſcriptos ſimiles ipſi a d c, eam habet proportionẽ, quam habet c a ad a m. Quia a m, m k, k f, f c æquales ſunt. Quoniam autem & triãgulus a d b, ad omnis triangulos à lineis a l, l g, g e, e b deſcriptos, ſimiles ſibi, eã habet proportionem, quã b a ad a l. Triangulus igitur a b c, ad omnis dictos triangulos, eam habet, quã c a ad a m. Sed c a ad a m maiorem proportionem habet, q̃ u r ad r h. nam proportio c a ad a m eadem eſt ei quam habet tota u r ad r p. quia trianguli ſimiles exiſtunt. & triangulus quoq; a b c, ad dictos triangulos maiorem habet proportionem, quàm u r ad r h. Fiat igitur, ut ſicut figuræ æquediſtantium laterum ſe habent ad triangulos, ſic q h ad h r. Quoniam igitur aliqua magnitudo exiſtit a b c, cuius centrum grauitatis eſt h: & aufertur ab ea magnitudo cõpoſita ex m n, k x, f o figuris æquediſtantium laterum: & ablatæ magnitudinis centrum grauitatis eſt r punctum. reliquæ igitur magnitudinis, quæ ex triangulis circumrelictis cõponitur, cẽtrum grauitatis in linea r h habetur, quæ educta & protracta eſt ad h r: eamq; habet proportionem ad illam, quam magnitudo ablata ad reliquam. Punctum ergo q centrum eſt grauitatis magnitudinis compoſitæ ex omnibus circum relictis, quod eſſe non poteſt. nam linea recta à puncto q æquediſtãter ipſi a d ducta in plano, in eadem ipſius parte: hoc eſt in altera ipſius parte, centra omnia habentur. Manifeſtum eſt igitur propoſitum. Aliter idem. Eſto triangulus a b c, & ducatur a d linea ad dimidiam baſem. Dico itaq;, quod in linea a d centrũ grauitatis trianguli a b c habetur. Nam ſi non, eſto h, ſi eſſe poteſt: & iungantur h a, h b, h c, & e d, d f, f e, ad medias b a, a c. Ducantur ipſi a h æquediſtantes e k, f l: & iungantur k l, l d, d k. item m n æquediſtans ipſi a h. Quoniam itaq; triangulus a b c ſimilis eſt triangulo d f c, cum b a ſit æquediſtans ipſi f d, & trianguli a b c cẽtrum grauitatis eſt punctum: & f d c trianguli quoq; centrum grauitatis eſt punctum l. nam h l puncta ſunt ſimiliter poſita in utroq; triangulo, cum ad latera eiuſdem rationis æquos angulos efficiant. conſtat enim iſtud. Eadem autem ratione



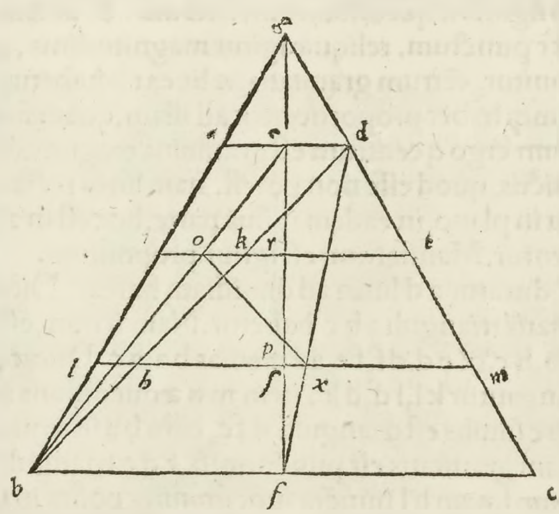
& trianguli e b d centrum grauitatis est k punctum. quare magnitudinis ex ambabus b e d, d f c triãgulis compositæ centrum grauitatis habetur in medio lineæ k l. cum triãguli e b d, f d c, sint æquales. Et ipsius k l, medium est n: cum sit sicut b e ad e a, ita b k ad h k. Sicut autem c f ad f a, sic c l ad l h. Si autẽ hoc sic se habet, erit b c ipsi k l æquedistans. Et iuncta est d h. erit igitur sicut b d ad d c, sic k n ad n l. Quare magnitudinis ex utrisque dictis triangulis compositæ centrum grauitatis est n. est quoque figuræ æquedistantium laterum a e d f, centrum grauitatis pũctum m. Quare magnitudinis ex omnibus compositæ centrum grauitatis habetur in linea m n. Est autem trianguli a b c centrum grauitatis h punctum. Igitur m n protracta per punctum h transibit, quod esse non potest. Centrum igitur grauitatis trianguli a b c, non extra lineam a d usquam habetur. in ea igitur necesse est ipsum haberi. Quare constat propositum.



14 Cuiuscunque trianguli cẽtrum grauitatis est punctum, in quo lineæ rectæ ab angulis ad dimidias bases ductę concurrũt. Esto triangulus a b c, & ducatur a d linea ad mediam b c, & linea b e ad mediã a c. Si iam centrum grauitatis trianguli a b c habetur in utraque a d b e, sicut demonstratum fuit, erit utique punctum h centrum grauitatis trianguli a b c.



15 Cuiuscunque mensalis figuræ, quæ duo latera habeat æquedistantia inter se, centrum grauitatis habetur in linea recta, quæ iungit laterum æquedistantium sectorum in duo æqua puncta diuisionis, atque in eo ipsius dictæ lineæ loco, ubi ipsa sic diuisa sit, ut pars eius terminata ad minus laterum ęquedistantium in duo æqua sectorum ad reliquam partem eam habeat proportionẽ, quam habet utraque simul, duplũ maioris æquedistantium cum minore, ad duplum minoris cum maiore. Esto mensalis figura a b c d, quæ habeat a d, b c æquedistantes. & e f iungat puncta diuisionis ipsarũ a d, b c, quæ in duo æqua diuisæ sunt. Quod itaque in linea e f, sit centrum grauitatis mensæ, manifestum est. nam si protrahantur c d g, f e g, b a g, constat eas in idem punctum concurrere:

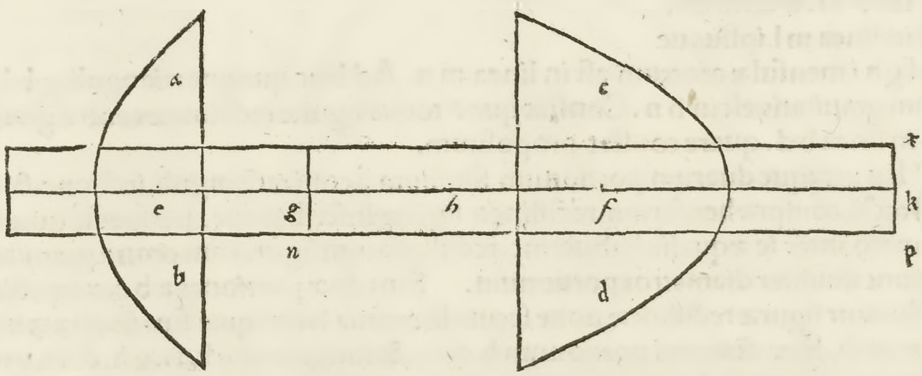


curere: eritq; trianguli b g c centrũ grauitatis in ipsa g f, & similiter trianguli a g d cẽtrum grauitatis in ipsa e g. & reliquæ igitur mensæ a b c d, erit in ipsa e f. Ducta uero b d diuidatur in tria æqualia in punctis k h: & per ea puncta ducãtur æque distantes ipsi b c lineæ l h m, n k t. & iungantur d f, b e, o x. Erit igitur centrum grauitatis triãguli d b c, in linea h m, cum h b sit tertia pars b d, & per h ducta est h m æquedistans ipsi basi. Est autem centrũ grauitatis trianguli d b c, in linea d f. Quare x erit centrum grauitatis dicti trianguli. Eadem autem ratione erit o punctum centrum grauitatis trianguli a b d. Magnitudinis ergo ex utrisq; triangulis a b d, b d c compositæ, centrum grauitatis erit in linea recta o x. Quæ quidem magnitudo mensalis cum sit, erit eius centrũ grauitatis in linea e f. Quare mensalis a b c d, centrũ grauitatis erit punctũ p. Habet autem triangulus b d c ad triãgulum a b d eam proportionẽ, quam o p ad p x. Sed sicut triangulus b d c ad triangulũ a b d, sic b c ad ipsam a d. Est autẽ sicut o p ad p x, ita R p ad p s. Igitur sicut b c ad ipsam a d, sic R p ad ipsam p s. Quare sicut duæ b c, cum a d ad duas a d, cum b c: sic duæ R p cum p s, ad duas p s cum R p. Verum duæ R p cum p s, est utraq; simul e R, R p, hoc est p e: duæ uero p s cum p R utraque simul, est p s f, hoc est p f. Ostensa ergo sunt ea quæ proposita fuerant.

FINIT PRIMVS ARCHIMEDIS LIBER de Aequeponderantibus.

ARCHIMEDIS DE HIS QVAE AEQVEPONDERANT LIBER *secundus*.

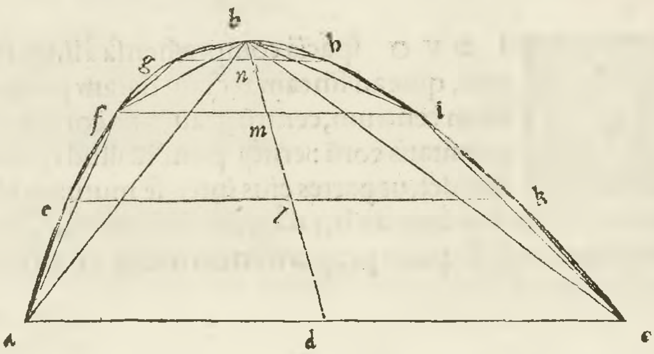
SI DVO spacia compræhensa à linea recta & sectione coni rectãguli, quæ ad lineam rectam datam possimus applicare, non habeãt idem centrum, centrũ grauitatis eorum erit in linea quę iungit cẽtra grauitatis eorũ: eritq; punctũ illud quod dictam lineam rectam sic diuidet, ut partes eius inter se mutuam habeant proportionem spaciorum. Esto duo spacia a b, c d, qualia dictum est. Cẽtra autem grauitatis eorum sint puncta e, f. & quam proportionem habet a b ad c d, eam habeat f h ad h e. O-



stendendum est, quod magnitudinis ex utrisque a b, c d spacijs compositæ, centrũ uitatis est punctum h. Sit autem ipsi e h harum utraque æqualis f g, f k. ipsi autem f h, hoc est g e, sit e l æqualis. erit igitur & l h ipsi k h æqualis. Et est sicut l g ad g k, sic a b ad c d. nam utraque utriusque dupla est. Protendatur autem in parte pũcti a linea æquedistans ipsi l g, ita ut fiat spacium m n ipsi lineæ l g utrinque adiectũ, æquale ipsi a b. erit iam ipsius m n centrum grauitatis punctum e. Compleatur itaque n x. Habebit igitur m n ad n x eam proportionem, quam l g ad g k. habet autem & a b ad c d eam, quam l g ad g k. Igitur sicut a b ad c d, sic m n ad n x. & permutatim. At uero a b æquatur ipsi m n, ergo c d æquatur ipsi n x. Et centrum grauitatis eius est f punctum. Et quoniam l h est æqualis ipsi h k, & tota l k latera opposita diuidit in duo æqua totius p m, centrum grauitatis erit punctum h. Sed m p est æquale utrique simul m n, n x. Quare & compositi ex utrisque a b, c d centrũ grauitatis erit h punctum.

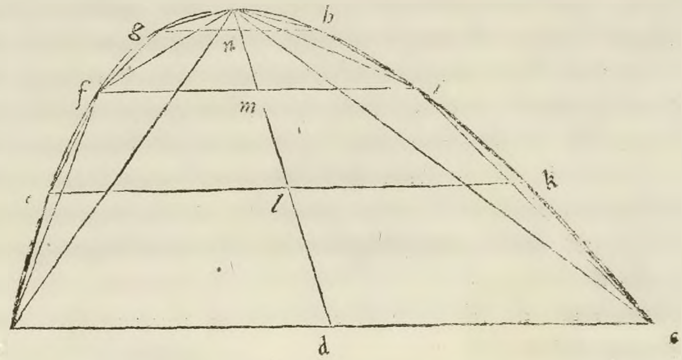
Si intra portionem à recta & coni rectanguli sectione comprǽhensam triangulus inscribatur, qui basem habeat cum portione eãdem, & altitudinem ipsi æqualem, & item in residuis portionibus trianguli inscribantur easdem cum portionibus bases & altitudines æquales habentes, atque item & hoc idem in residuis portionibus fiat: & huiusmodi triangulorum inscriptio continuetur figura, quæ hoc modo in sectione describitur, perspectè inscribi dicatur. Manifestum est autem, quod figuræ hoc modo inscriptæ lineæ quæ iungent angulos eos qui uertici portionis proximi existunt & eos qui deinceps sequentur æquedistabunt basi ipsius portionis, & in duo æqua diuidentur à diametro portionis, & diametrum ipsæ diuident in proportiones à numeris ab unitate continenter imparibus dictas, ea parte quæ ipsi uertici coniuncta erit pro uno computata. hoc autem in ordinibus est ostendendum.

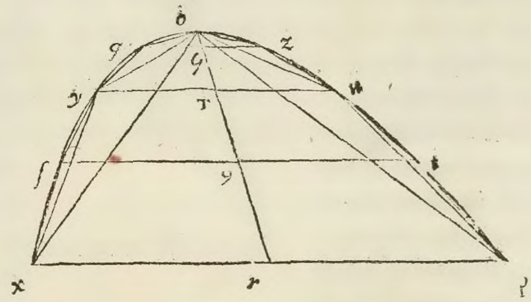
2 SI autem in portione quæ à recta & rectanguli coni sectione comprǽhẽditur, rectilinea figura inscribatur, perspectè centrum grauitatis figuræ inscriptæ erit in diametro portionis. Esto a b c portio qualis dicitur, & inscribatur ei perspectè figura rectilinea a e f g b h i k c. Ostendẽdum est, centrum grauitatis rectilineæ figuræ esse in b d. Quoniã enim mẽsulæ a e k c centrũ grauitatis est in l d, mensulæ uero e f i k centrum est in linea m l. ipsius uero f g h i mensulæ centrum est in linea m n. Ad hæc quoque trianguli g b h centrum grauitatis est in b n. Constat quod totius figuræ rectilineæ centrũ grauitatis est in linea b d. quare constat propositum.



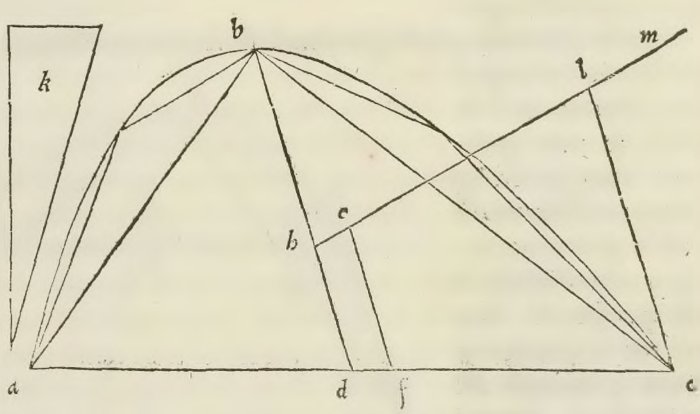
3 SI in utraque duarum portionum similium à coni rectanguli sectione, & linea recta comprǽhensarum rectilineæ figuræ inscribantur, perspectè quæ latera numero inter se æqualia habuerint, rectilinearum figurarum centra grauitatis secabunt similiter diametros portionum. Sint duæ portiones a b c, x o p, & eis inscribantur figuræ rectilineæ notæ secundũ omnia latera quæ sint in utraque numero æquali. Sint diametri portionum b d, o r. & iungantur e k, f i, g h. & s t, y u, q z. Quoniam igitur & b d diuiditur à lineis æquedistãtibus in proportiones à numeris imparibus, continenter ab uno dispositis nominatas: & p o similiter, & diuisiones earum sunt numero æquales inter se: constat quod partes diametrorum eisdem

dem proportionibus habebuntur, & lineæ æquedistantes easdem proportiones seruabunt, & mensularum ipsius quidem a e k c, & ipsius x s t p, centra grauitatis erunt in d l, 9 r lineis rectis similiter posita, cum eandē habeāt proportionem a c, e k, quam p x ad s t. Rursus autem & mensularum e f i k, s y u t, centra grauitatis diuident similiter lineas l m, 9 T. Sūt autem & triangulorum g b h, q o z centra grauitatis in lineis b n, o ς similiter posita. Habent autem eandem proportionem mensulæ & trianguli. Cōstat igitur, quod totius figuræ rectilineæ in portione a b c inscriptæ, centrum grauitatis similiter diuidit b d diametrum, sicut figurę in x o p portione inscriptæ centrum grauitatis in o r. quod demonstrari oportuit.





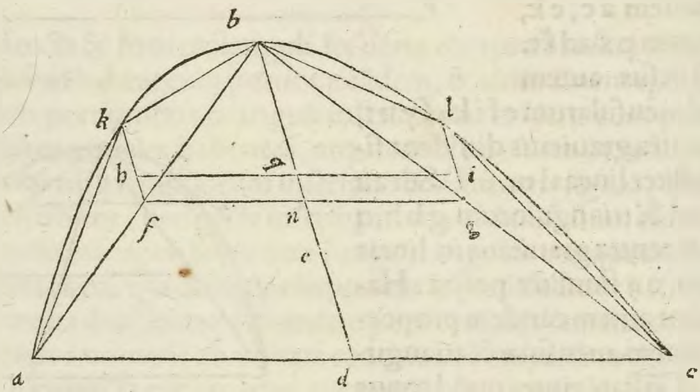
CViuscunque portionis à linea recta & sectione rectanguli coni compræhensæ, centrum grauitatis in diametro portionis existit. Esto portio, ut dicitur, a b c: eius diametros, b d. Ostendendum est, dictæ portionis cētrum grauitatis esse in b d. Nam si non, esto ipsum e, & per ipsum ducatur e f, ipsi b d æquedistans, & inscribatur portioni triangulus a b c eandem basim habens, & altitudinem cū portione eandem. & quam habet c f ad d f, hanc habeat triangulus a b c, ad spacium k. Inscribatur iā in portione rectilinea figura perspectè, ita ut quæ relinquētur portiōes, sint minores ipso k. figuræ inscriptæ centrum grauitatis est in b d. Sit h, & iungatur h e, et producatur, & ducatur c l æquedistans ipsi b d. Constat autem, quod maiorē proportionem habet inscripta portioni figura ad eas quæ relictæ sunt portiones, quàm a b c triangulus ad spacium k, qui eam habet quam c f ad d f. Figura igitur inscripta, ad portiones relictas maiorem habet proportionem, quàm c f ad f d, hoc est e l ad e h. Habeat itaque m e ad e h, eā proportionem, quam rectilinea figura ad portiones. Quoniam igitur e est centrū 4



totius

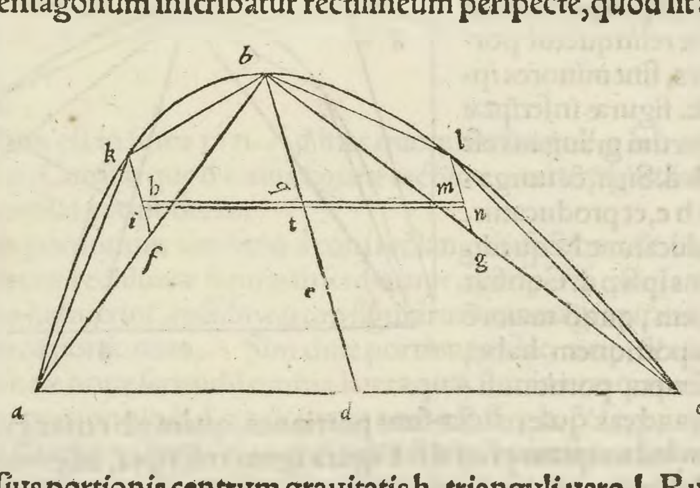
totius portionis: figuræ uero inscriptæ portioni centrum est h: constat quod magnitudinis compositæ ex reliquis portionibus, centrum grauitatis est in parte h e producta, quæ eam ad h e proportionẽ habet, quam figura inscripta ad reliquas portiones. Quare erit magnitudinis ex reliquis portionibus compositæ centrum grauitatis punctum m: quod est inconueniens. nam ei quæ per m punctum ducitur lineæ æquedistanter ipsi b d, in eandem partem erunt omnis reliquæ portiones. Manifestum est igitur, quod in diametro b d centrum existit grauitatis.

5 SI in portione à recta linea & sectione rectanguli coni cõtenta, figura rectilinea inscribatur perspectè totius portionis centrum grauitatis erit uertici portionis propinquius, quàm centrũ figuræ rectilineæ inscriptæ portioni. Esto a b c portio qualis dicitur, cuius diametros b d, & inscribatur eidem triãgulus primum perspectè, & notè a b c, et diuidatur b d in puncto e, ita ut b e sit dupla e d. erit igitur trianguli a b c centrum grauitatis punctum e. Diuidatur iã in duo æqua utraq; a b, b c, in punctis f g: & per f g ducãtur f k, l g, ęquedistantes ipsi b d. Est igitur



portionis a k b centrum grauitatis in linea f k. portionis uero b c l, centrum grauitatis in g l linea. Sint autem ea h i, & iungantur h i: & quoniam h f g est figura laterum æquedistantium, & g i est æqualis ipsi f h: est igitur f g æqualis h i. Quare magnitudinis ex utrisque compositæ ex a k b, & b l c portionibus, centrum grauitatis est in media h i: cum portiones quidem sint æquales, hoc est punctum q. quoniam autem trianguli a b c centrum grauitatis est e, magnitudinis uero ex utrisq; a k b, b l c compositæ centrum est q: constat quod portionis totius a b c centrum grauitatis est in linea q e: id est inter puncta q e. quare centrum grauitatis totius portionis erit uertici ipsius portionis propinquius, quàm centrum trianguli in ipsa perspectè inscripti.

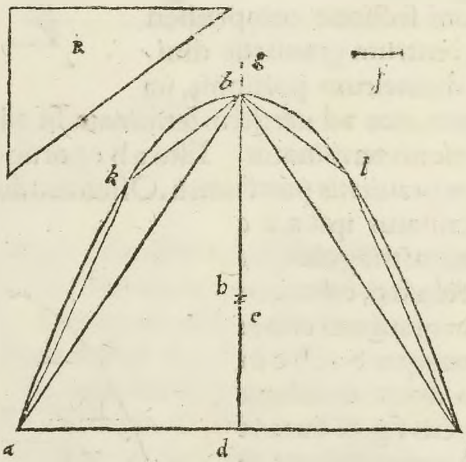
Rursus portioni pentagonum inscribatur rectilineum perspectè, quod sit a k b l c. Et esto totius portionis diametros b d, utriusque uero portionis utraque k f, l g diametros. Et quoniã in a k b portione inscripta est rectilinea figura perspectè, siue notè, totius portionis cẽtrum grauitatis est propinquius uertici ipsius portiõis, quàm cẽtrum rectilineæ inscriptæ.



Esto itaque ipsius portionis centrum grauitatis h, trianguli uero i. Rursus esto portionis b l c centrum grauitatis m, trianguli uero n. Est autem magnitu dinis

dinis ex utrisque a k b, b l c portionibus compositæ, centrum grauitatis q: magnitudinis autem ex utrisque a k b, b l c triangulis compositæ, centrum est T. Rursus quoniam trianguli a b c centrum grauitatis est e, compositæ autem ex utrisque a k b, b l c portionibus, centrum est q: constat quod totius a b c portionis cētrum grauitatis est in linea q e, sic diuisa, ut quā proportionem habet a b c triangulus ad utrasq; simul a k b, b l c portiones, eam habeat eius pars terminata ad q, ad partem minorem. Pentagoni autem a k b l c centrum grauitatis est in linea recta e t, sic diuisa, ut quam proportionem habet a b c triangulus ad a k b, b l c triangulos, eam habeat eius lineæ pars terminata ad t ad reliquam. quoniam igitur maiorem habet proportionem a b c triangulus ad a k b, b l c triangulos, quàm ad portiones, manifestū est portionis a b c centrum grauitatis esse uertici b propinquius, quàm centrū figuræ rectilineæ inscriptæ. & in omnibus figuris rectilineis inscriptis portionibus notæ eadem ratio habetur.

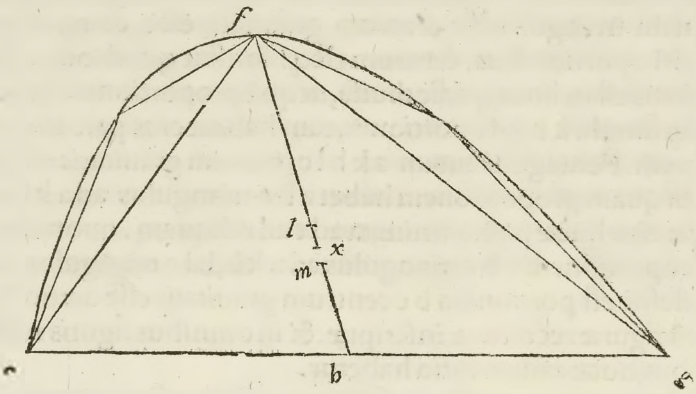
Portione à linea recta & sectione rectanguli coni compræhensa data, potest 6
ipsi portioni figura rectilinea perspectè ita inscribi, ut linea quæ inter centrum grauitatis portionis & centrum figuræ inscriptæ capitur, sit quacunque linea recta data minor. Detur portio a b c, qualis dicitur, cuius cētrum grauitatis sit h, & inscribatur ipsi perspectè triāgulus a b c, & sit data linea f: & quā habet proportionem b h ad f, eam habeat triangulus a b c ad spacium R, inscribatur etiam ipsi portioni a b c perspectè rectilinea figura a k b l c, ita ut portiones residuę sint minores spacio R: & esto figuræ inscriptæ centrum grauitatis e. Dico iam lineam h e minorem esse linea f data. Nam si non, uel æqualis, uel maior erit. Quoniā itaque a k b l c figura rectilinea ad residuas portiones maiorem proportionem habet, quàm a b c triangulus ad R, hoc est quàm h b ad f: habet autem h b ad f nō minorem proportionem, quàm ad h e, cū nō sit minor f: multo magis ergo figura a k b l c rectilinea ad reliquas portiones maiorem proportionem habebit, quàm b h ad h e. Quare si faciamus, ut sicuti a k b l c figura inscripta ad residuas portiones habet, sic alia quæcunq; linea ad h e: cum iam portionis a b c centrum grauitatis sit h, protracta e h, & assumpta aliqua recta eam ad e h proportionem habēte, quam figura a k b l c rectilinea ad residuas portiones, erit ipsa maior h b: habeat igitur g h ad h e talem proportionem. erit igitur g centrum grauitatis magnitudinis ex portionibus residuis compositæ: quod quidem esse non potest. nam est, quæ per g ducta ęquedistanter ipsi a c in eandem partem portioni. Constat igitur, lineam h e minorem esse linea f. quod fuerat demonstrandum.

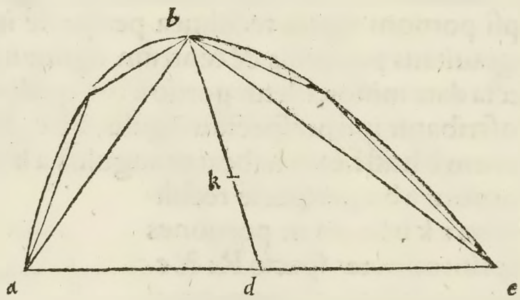


Duarum portionum similium, quæ linea recta & coni rectanguli sectione 7
compræhenduntur, centra grauitatis in eandem proportionem diametros earum diuidunt. Sint duæ portiones, quales dicitur a b c, e f g, quarum diametri b d, f h: & esto portionis a b c, centrum grauitatis k punctum: ipsius uero e f g, sit centrum grauitatis l. Ostendendum quod in eandem proportionem diuidunt ipsas diametros centra k l. Nam si non, esto sicut k b ad k d, sic f m ad h m, & inscribatur ipsi e f g portioni figura rectilinea notæ, ita ut linea inter centrum portionis, & centrum figuræ inscriptæ capta, sit minor l m. & esto fi-

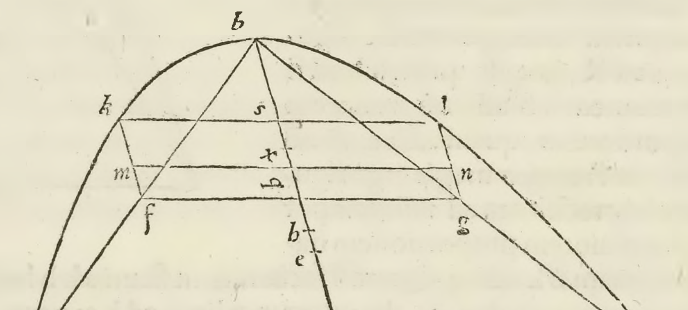
f gura

guræ inscriptæ centrum grauitatis x punctum. Inscribatur quoq; ipsi a b c portioni figura rectilinea similis figuræ ipsi e f g portioni inscriptæ, hoc est similiter notæ, cuius centrum grauitatis uertici portionis erit propinquius, quàm centrum portionis: quod quidem esse nõ test. Constat igitur, b k ad k d eam, quam f i ad i h, habere proportionem.



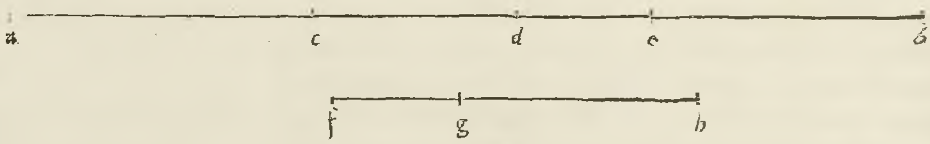


8 CVIuscunq; portionis à recta linea & rectanguli coni sectione compræhensæ, centrum grauitatis diuidit diametrum portionis, ita ut pars eius ad uerticem terminata, sit ad partem eam sesquialtera, quæ ad basim portionis terminatur. Esto a b c portio qualis dicitur: eius diametros esto b d, cẽtrum grauitatis punctum h. Ostendendum est, quod b h ad h d est sesquialtera. Inscribatur ipsi a b c portioni triãgulus perspectè a b c, cuius centrum grauitatis esto e: & utraque b a, b c in duo æqua diuidatur punctis f g, & ducantũ k f, l g ęquedistanter b d. Erũt igĩt k f l g diametri portionũ a k b, b l c. Sit itaque portionis a k b centrũ grauitatis m: ipsius uero b l c punctum n. Et iungantur f g, m n, k l. magnitudinis ergo ex utraque portione compositæ centrum grauitatis est q. Et quoniam est sicut b h ad h d, sic k m ad m f, & componendo, & permutatim sicut b d ad k f, ita h d ad m f. Sed b d ad k f, quadrupla est. hoc enim in fine ostenditur, ubi est signũ ✐: igitur h d est quadrupla m f. Quare residua b h, ad residuam k m quadrupla est: hoc est ipsius f q. reliquarum ergo utraque simul, hoc est b f, q h tripla est ad f q. esto b f tripla f x: & q h ergo erit tripla x q. Et quoniam b d est quadrupla ipsius b f, hoc enim demonstratum est: & b f est tripla f x: igitur b x est tertia pars ipsius b d. Est autem & e d pars tertia ipsius b d, cum punctum e sit centrum grauitatis trianguli a b c: & reliqua igitur x e erit tertia pars b d. Quoniam uero totius portionis centrum grauitatis est h punctum: magnitudinis autem ex utrisq; a k b, b l c portionibus compositæ cẽtrum grauitatis est punctum q: trianguli a b c centrum est e: est quoque sicut triãguli



guli a b c ad residuas portiones, sic q h ad h e. Triplus uero est triangulus a b c ad residuas portiones, cum tota portio sit ad triangulum a b c sesquitertia: igitur q h est ad h e tripla. Ostensum autem est q h triplam esse q x. Igitur x e quincupla est ipsius e h: hoc est d e ad h e. nam illæ sunt æquales. quare d h sexcupla est ipsius h e, & est b d tripla ipsius d e. igitur b h ipsius h d sesquialteram esse necesse est.

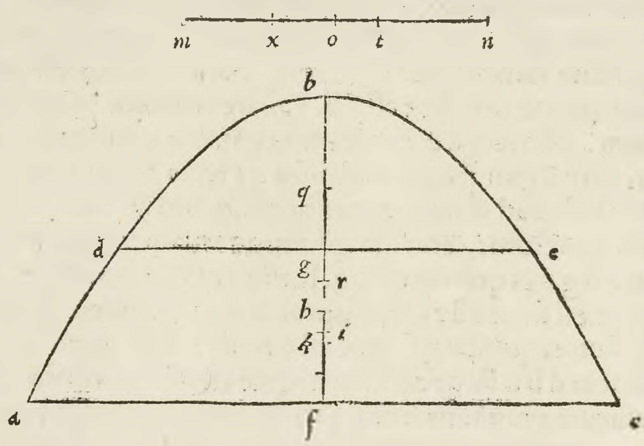
SI quatuor lineæ fuerint in proportionalitate cõtinua proportionales, & quam 9
proportionem habuerit minima earum ad excessum quo maxima minimam superat, eam habeat quædam linea sumpta ad tres quintas eius excessus quo maxima proportionalium tertiam superat: quam uero habuerit linea sumpta æqualis simul istis, duplæ maximæ proportionalium, & quadruplæ secundæ, & sextuplæ tertiæ, & triplæ quartæ, ad lineam sumptam istis simul æqualem, quincuplæ maximæ, & item decuplæ secundę & tertiæ, & quincuplæ quartæ, eam habeat linea quædam sumpta ad excessum quo maxima proportionalium excedit tertiam: lineæ sumptæ utręq; simul erũt duæ quintæ illius lineæ quæ maxima est proportionalium linearum. Sint quatuor lineæ proportionales a b, b c, b d, b e: & quam proportionem habet b e ad e a, eam habeat f g ad tres quintas ipsius a d. Quam uero habet linea æqualis istis simul duplæ a b, quadruplæ b c, sexcuplæ b d, triplæ b e, ad lineam æqualem simul istis, quincuplæ a b, decuplę c b, & b d, &



quincuplæ b e, eam habeat proportionem g h ad ipsam a d. Ostendendum est, quod f h est duæ quintæ ipsius a b. Quoniam enim a b, b c, d b, b e sunt proportionales: erunt etiam a c, c d, d e in eadem proportione. et utraque simul a b, b c ad ipsam b d, eam habet proportionem, quam a d ad d e: & similiter utraque simul c b, b d ad e b, & omnes ad omnes. Eam ergo habet proportionem a d linea ad d e, quam linea æqualis istis simul, dupla a b, tripla c b, & b d, ad lineam æqualem istis simul, duplæ b d, & e b. Quam autem proportionem habet linea æqualis istis simul, duplæ a b, & quadruplæ b c, & quadruplæ b d, & duplæ b e, ad lineam istis simul æqualem, duplæ d b, & ipsi b e, eam habebit d a ad aliquam minorem ipsa d e. Sit illa d o, & utræque ad primas eandem habebunt proportionem: habebit itaque o a ad ipsam a d, eam quam linea æqualis istis simul duplæ a b, quadruplæ b c, sexcuplæ d b, & triplæ b e, ad compositam ex dupla utriusque simul a b, b e, & quadruplæ utriusque simul c b, b d. Habet autem & a d linea ad g h, eam quam quincupla utriusq; simul a b, b e cum decupla utriusque simul c b, b d, ad compositam ex dupla a b, & quadrupla c b, & sexta b d, & tertia e b. Dissimiliter autem proportionibus ordinatis: id est in proportionalitate perturbata. per æquam ergo eam habet proportionem a o ad g h, quam composita ex quincupla utriusque simul a b, b e, & decupla c b, b d, ad compositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. Verum composita ex quincupla utriusq; simul a b, b e, & decupla utriusq; simul c b, b d, ad cõpositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, eam habet proportionem quam quinq; ad duo. Igitur o a ad g h eam habet proportionem, quam quinq; ad duo. Rursus quoniam o a ad d a eam habet proportionẽ, quam e b, cum dupla b d ad æqualem lineæ compositæ ex dupla utriusque simul, a b,b e,cum quadrupla utriusq; simul c b,b d. Est autem & sicut d a ad d e, sic cō-posita ex dupla a b,tripla b c, & ipsa b d, ad æqualem ipsi e b, cũ dupla b d: dissimiliter igitur proportionibus ordinatis & sectis, id est perturbata proportionalitate per æquam sicut o d ad d e,sic dupla a b,cum tripla b c,& ipsa b d, ad compositam ex dupla utriusq; simul a b,b e, & quadrupla utriusq; simul c b,b d.quare & sicut o e ad e d,sic c b cum tripla b d,& dupla e b,ad duplam utriusque simul a b,b e,& quadruplam utriusq; simul c b,b d. Est autem & sicut d e ad e b,sic a c ad c b,& c d ad d b. quare secundum compositionem tripla c d, ad triplam d b,sicut dupla d e ad duplam e b.& ideo composita ex a c,& tripla c d,& dupla d e,ad compositam ex c b,& tripla d b,& dupla e b. Dissimiliter rursus proportionibus ordinatis,id est,in perturbata proportionalitate per æquam, eandem habebit proportionem o e ad e b,quam a c cum tripla c d , & dupla d e , ad duplam utriusq; simul a b, b e, cum quadrupla utriusq; simul c b,b d. Tota igitur o b ad e b , eam habet proportionem,quam tripla a b,cum sexcupla c b: & tripla d b , ad duplam utriusq; simul a b,b e,cum quarta utriusq; simul c b, b d . Et quia e d , d c, c a in eadem sunt proportione,& utraque simul, unaquæq; c b,b d,d b,b c,c b,b a , erit sicut e d ad d a, sic utraque simul e b ,b d ad utramq; simul d b,b c , cum composita ex c b,b a. Igitur componendo sicut e a ad d a , sic utraque simul e b,b d, cum utraq; simul a b,b c, & utraq; simul c b, b d : quæ est utraque simul e b, b a, cum dupla utriusq; simul d b,b c,ad utramq; simul b d,d a,cum dupla b c.Quare & dupla ad duplam eandem habebunt proportionem:hoc est,sicut e a ad d a,sic dupla utriusq; simul e b, b a,cum quarta utriusque simul c b, b d , ad duplam utriusque simul a b,b d,cum quadrupla b c. quare & sicut e a ad tres quintas d a , sic composita ex dupla utriusque simul e b,b a,& quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b,b d , & quadrupla c b . Verum sicut e a ad tres quintas a d,sic e b ad f g. Sicut igitur e b ad f g,sic dupla utriusq; simul a b,b e,cum quadrupla utriusq; simul d b, b c,ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d , cum quadrupla c b . Ostensum est autem , sicut o b ad e b , sic tripla utriusque simul a b,b d cum sexcupla c b, ad duplam utriusq; simul a b, b e,cum quarta utriusq; simul c b,b d. per æquam igitur sicut o b ad f g, sic composita ex tripla utriusq; simul a b,b d, & sexcupla c b , ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b,b d,& quadrupla c b . Verum composita ex tripla utriusque simul a b, b d, & sexcupla c b,ad compositam ex dupla utriusq; simul a b,b d, & quadrupla c b,proportionem habet quam tria ad duo.& ad tres quintas eiusdem,proportionem habet quam quinq; ad duo. Ostensum est autem, quod o a ad g h proportionem habet,quam quinq; ad duo. Tota igitur a b ad totam f h proportionẽ habet, quam quinq; ad duo . Quod si hoc uerum est, necesse quoq; est f h duas quintas ipsius a b esse. Quod fuerat demonstrandum.

10 CUiuslibet frusti à sectione rectanguli coni ablati, centrum grauitatis est in linea recta,quæ frusti existit diametros: qua in quinq; partes ęquas diuisa,cẽtrum in quinta eius media existit , atq; in eo eius puncto quo ipsa quinta sic diuiditur,ut portio eius propinquior minori basi frusti ad reliquam eius portionem eam habeat proportionem,quam habet solidum,cuius basis sit quadratum lineæ illius quę frusti basis maior extiterit. Altitudo uero istis utrisq; simul ęqualis, lineę quæ dupla sit minoris basis frusti,& basi maiori eiusdem,ad solidum quod basim habeat quadratum basis minoris frusti,altitudinem uero istis utrisq; simul æqualem,lineæ quæ dupla sit maioris basis,& basi minori. Sint in sectione rectanguli coni duæ lineæ rectæ a c,d e: diametros a b c portionis esto b f. Constat quòd a c,d e sunt æquedistantes ei lineæ,quæ per punctum b ducta,contingit ipsam sectionem: & diuisa e f in quinque partes æquas,esto quinta media h k. & h i ad i k eam habeat proportionem,quam solidum,quod basim habeat quadratum a f,altitudinem

titudinem uero æqualem istis utrisque simul, duplæ d g, & ipsi a f, ad solidum cuius basis existat quadratum f g, altitudo uero æqualis istis utrisque simul duplæ a f, & ipsi d g. Ostendendum est, quod frusti a d c e, centrũ grauitatis est punctum i. Esto itaque m n æqualis ipsi f b, & n o æqualis b g: & sumatur ipsarum m n, n o media proportionalis m x, & quarta proportionalis n t. & sit sicut t m ad t n, ita f h ad quandam ab ipso i, quocunque proueniat in frusto punctum. Nihil enim refert siue inter f g, siue inter b g pũcta proueniat: quæ sit i r. Et quoniã in rectanguli coni sectione diametros portionis est f b, ipsa f b uel est principalis ipsius sectionis, uel ei diametro æquedistat. lineæ uero a f, d g in eam intentæ, sunt ductæ, cum sint æquedistantes ei lineæ quæ à puncto b ducta sectionem contingit. Si autem hoc fuerit, erit sicut a f ad d g potentia, sic f b ad b g longitudine: hoc est m n ad n x potentia. Sicut ergo a f ad d g potentia, sic m n ad n x potentia. Quare & longitudine sunt in eadem proportione. Sicut ergo cubus lineæ a f, ad cubum lineæ d g, sic cubus ipsius m n ad cubum n x. Verum sicut cubus a f ad cubum d g, sic portio b a c ad portionem d b e. Sicut autem cubus m n ad cubum n x, sic m n ad n t. Quare & diuidendo erit, sicut frusti a d, c e ad portionem d b e, sic m t ad t n: hoc est tres quintæ f g ad i r. Et quoniam solidum basim habens quadratũ a f, altitudinẽ uero compositam ex dupla d g, & ex a f ad cubum a f, eam habet proportionem quam dupla d g, cum a f ad a f. Quare & sicut dupla n x, cum n m ad n m. Est autem sicut cubus a f ad cubum d g, sic m n ad n t. Sicut autem cubus d g ad solidum, basim habens quadratum d g, altitudinem uero compositam ex dupla a f, cum d g: sic d g ad compositam ex dupla a f & d g. Quare & sicut t n ad compositam ex dupla o n et t n. Sunt igitur quatuor magnitudines: solidum, quod basim habet quadratum a f, altitudinem uero compositam ex dupla d g & a f: & cubus a f, & cubus d g: & solidum basim habens quadratum d g, altitudinem uero compositam ex dupla a f, & d g. quæ quatuor magnitudinibus sunt proportionales, duabus simul sumptis compositæ ex dupla n x & m n, & alij magnitudini ipsi m n, & alij deinceps n t, & postremò compositæ ex dupla n o & t n. Per æquam igitur fiet, sicut solidum basim habẽs quadratũ a f, & altitudinem compositam ex dupla d g, & a f, ad solidum quod basim habeat quadratum d g, altitudinem uero compositam ex dupla a f: & d g eam habeat proportionem, quam composita ex dupla n x, & m n, ad compositam ex dupla n o, & n t. Verum sicut solidum dictum, ad solidum dictum, sic h i ad i k. Sicut ergo h i ad i k, sic composita ad compositam. Quare & componendo antecedentibus sequentia, erit igitur sicut f g ad i k, sic quincupla utriusque simul m n, n t, & decupla utriusque simul n x, n o, ad duplam n o & t n. Et sicut f g ad f k, quæ est duæ quintæ illius: sic quintupla utriusque simul m n, n t, & decupla utriusque simul n x, n o, ad duplam utriusque simul m n, n t, & quadruplam utriusque simul n x, x o. Erit igitur sicut f g ad f i, sic quincupla utriusque simul m n: n t, et decupla utriusque simul x n, n o, ad cõpositã ex



f 3 dupla

dupla m n, & quadrupla n x, & sexcupla o n, & tripla n t. Quoniā igitur sunt quatuor lineæ rectæ consequenter proportionales, m n, n x, o n, n t: & est sicut n t ad t m, sic quædam sumpta, hoc est r i, ad tres quintas f g, hoc est m o. Sicut autem cō posita ex dupla m n, & quadrupla n x, & sexcupla o n, et tripla n t, ad compositam ex quincupla utriusque simul m n, n t, & decupla utriusq; simul x n, n o, sic altera quædam sumpta, hoc est i f ad f g, hoc est ad m o: erit per ea quæ prædicta sunt r f, duæ quintæ m n, hoc est f b. Quare centrum grauitatis portionis a b c erit r punctum. Esto iam d b e portionis centrum grauitatis q punctum. Frusti itaque a d c e, centrū grauitatis erit in linea q r recta, terminans lineam ab r eductam, quæ eādem habet ad illam proportionem, quam frustum ad residuam portionem. Est autem punctum i, centrum ipsum: quoniam ipsius f b tres quintæ est ipsa b r: ipsius uero b g tres quintæ est b q. Reliquæ ergo, hoc est g f, tres quintæ est q r. Quoniā igitur est sicut a d e c frustum ad b d e portionem, sic m t ad n t. Sicut autem m t ad n t, sic tres quintæ g f, quæ est q r, ad r i. Erit igitur & sicut frustum a d c e, ad portionem d b e, sic q r ad lineam quæ est inter centrum grauitatis a b c portionis, & centrum grauitatis frusti. Sed cētrum grauitatis a b c portionis, est r punctum, et centrum grauitatis portionis d b e est q. Constat igitur, frusti a d e c, punctum i esse centrum grauitatis.

FINIVNT INVENTA ARCHIMEDIS DE HIS quæ æquali pondere aptantur.

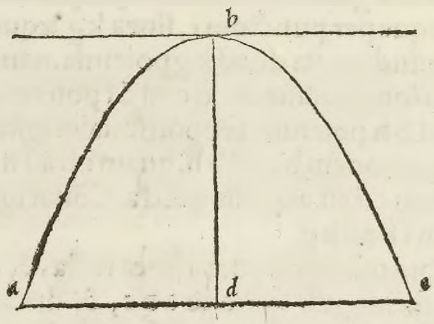
ARCHIMEDIS QVADRATVRA PARABOLAE, ID EST PORTIONIS CONtentæ à linea recta & sectione rectanguli coni.

ARCHIMEDES DOSItheo rectè agere.

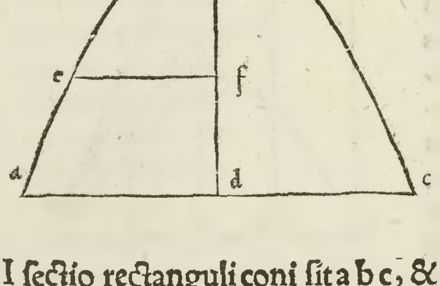
CVM audissem Cononem mortuum esse, qui nobis adhuc in amicitia residebat: teq; hominem Cononis antea admodum familiarem extitisse, & in Geometria maximè uersatum, eius quidem uita priuati desiderio, & dolore maximo affecti sumus, cum esset homo, cum mei amantissimus, tū in speculationibus ingenio admirali, ac propè diuino. Tibi uero, ueluti antea Cononi scribere consueueramus sępissimè, præconati sumus inter cætera Geometricæ facultatis theoremata, hoc unum conscriptum mittere: quod cum antea tentatum esset à nullo, nuper à nobis inspectum, & depræhensum est: primò quidem Mechanica ratione perquisitū, postea uero Geometrica quoq; demonstratum. Eorum enim qui antehac Geometriæ operam dederunt, nōnulli id inuestigare, & memoriæ mandare studuerūt, circulo dato, uel circuli portione quacunq;, spacium rectilineum æquale illi posse inueniri. Itē spacium à coni totius rectanguli sectione compræhensum, & linea recta, ad quadrati formam & mensuram reducere conati sunt, sumentes non facilè concessibilia fundamenta ipsis, sanè cum hæc ipsa à quàmplurimis non inuenta sint. Illud etiā diuul-

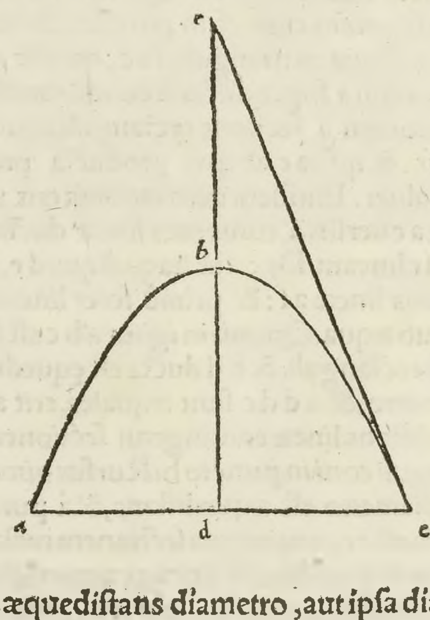
diuulgatum, portionem à rectanguli coni sectione contentam ueterũ neminem ingressum quadrare comperimus, quod nuper à nobis inuentum est. Hoc enim demonstratur, portionem omnem à recta linea & coni rectanguli sectione compræhensam, trianguli illius esse sesquitertiam, qui quidem triangulus basim habeat & altitudinem cum portione eandem. Hoc fundamento ad eius demonstrationem sumpto, spaciorum inæqualium excessus quibus minus à maiore superatur, sibi ipsis totiens coaceruari posse, ut quodcunq; spacium propositum quod sit finitum superent. Superiores quoque Geometræ hoc fundamento usi sunt: & circulos habere inter se proportionem diametrorum duplicatam, hoc demonstrauerunt, illo fundamento muniti. Item sphæras inter se proportionem suarum diametrorum habere triplicatam. Amplius, omnem pyramidem tertiam esse partem eius prismatis, quod eandem pyramidi basim & altitudinem æqualem habuerit. Item, omnem conum tertiam esse partem eius cylindri, qui basim cono eandem, & æqualem habuerit altitudinem. Similiter eodem fundamento prouecti, illa scripserunt, cum id accidat, eorum quæ prędicta sunt theorematum unumquodq; nihil minus sibi fidei comparare, quàm ea quæcunque sine eo fundamento sunt demonstrata. Nuper autem his quæ à nobis exposita sunt, in similem huius fundamenti fidem adductis, describentes igitur eius demonstrationes mittimus: primum quidem quo pacto per Mechanicas rationes inspecta fuerunt, deinde Geometricis argumentis demonstrata. Præmittuntur autem initio ea Conica elementa, quibus ad eorum demonstrationes maximè indigemus. Vale.

SI coni rectãguli sectio sit, in qua a b c, et linea b d recta sit, aut æquedistans diametro, aut ipsa diametros, & a c sit æquedistans lineæ contingenti in puncto b sectionẽ rectanguli coni: æqualis erit a d ipsi d c. Quod si à d est ipsi d c æqualis, æquedistantes erunt a c, & contingens sectionem coni in puncto b. 1



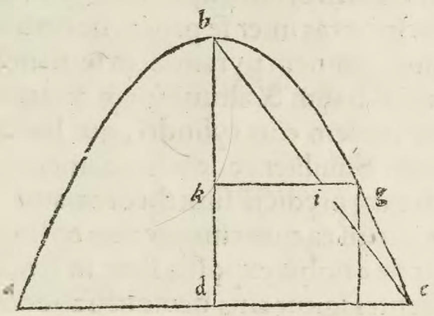
SI coni rectanguli sectio sit a b c, sitq; b d æquedistans diametro, aut ipsa diametros: linea uero a d c æquedistans lineæ coni sectionem in puncto b contingenti: & linea e c sectionem coni in puncto c cõtingat: erunt b d, & b e æquales. 2

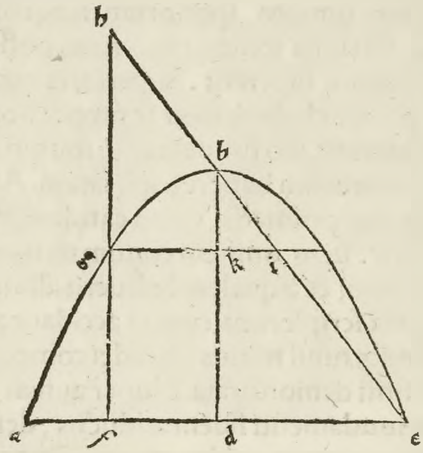




SI sectio rectanguli coni sit a b c, & b d, æquedistans diametro, aut ipsa diametros: & ducantur quædam æquedistantes illi, quæ in puncto b contingit sectionem 3 ctionem, quæ ſint a d, e f. Erit ſicut b d ad b f longitudine, ita a d linea ad e f potentia. Hæc autem demonſtrata ſunt in Conicis elementis.

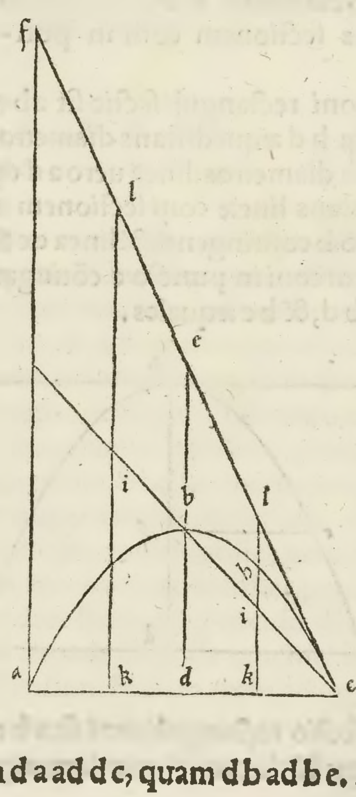
4 Eſto portio comprǽhenſa à coni rectanguli ſectione, & linea recta a b c, & linea b d. à medio a c ducatur æquediſtans diametro, aut ipſa diametros: & ſit b c linea iūcta, et protracta. ſi iam ducatur alia quædam æquediſtās ipſi b d, quæ ſit f h, diuidens lineas rectas c b, a c: ducatur item alia æquediſtans ipſi a c, ſecans lineam b d,





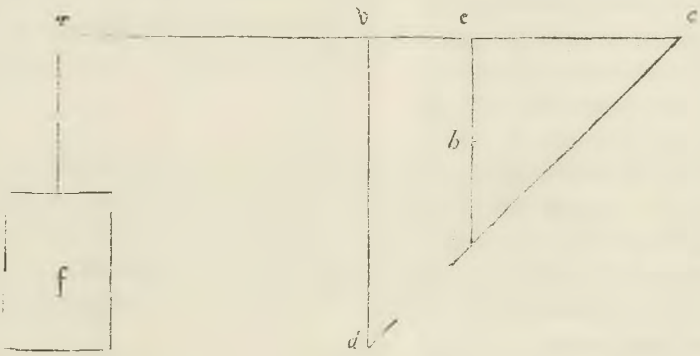
quæ ſit k g: eandem habebit proportionem f h ad h g, quam d a ad d f. Ducta eſt namque per punctum i, linea k g æquediſtans ipſi a c. Eſt igitur ſicut b d ad b k longitudine, ita d c ad k g potentia. nam hoc demōſtratum eſt. Erit igitur ſicut b c ad b i longitudine, ita d c ad d f potentia. Aequales ſunt enim d f, k g. & ideo ſicut b c ad b h potentia: proportionales igitur ſunt b c, b h, b i lineæ. Quare eam habet proportionem b c ad b h, quam c h ad h i. Eſt igitur, ſicut c d ad d f, ita f h ad h g. Verum c d eſt æqualis ipſi d a. Cōſtat igitur, d a eam ad d f habere proportionem, quam f h ad h g.

5 Eſto portio cōtenta à linea recta, & coni rectanguli ſectione a b c, & ducatur à puncto a, linea a f, æquediſtans diametro. à puncto c ducatur contingens ſectionem coni, cōcurrens cum a f, in puncto f. Si iam ducatur aliqua in triangulo f a c, quæ ſit æquediſtās ipſi a f: ipſa ducta ſecundū eandē proportionem à ſectione rectanguli coni ſecabitur, & ipſa a c ab ipſa producta proportionaliter. Eiuſdem uero rationis erit pars lineæ a c uerſus a, cuius pars lineæ ductæ uerſus a c lineam. Ducatur itaꝗ aliqua d e, æquediſtans lineæ a f: & primò ſecet lineam a c in duo æqua. Quoniam igitur a b c eſt ſectio coni rectanguli, & b d ducta eſt ęquediſtans diametro, & a d d c ſunt æquales, erit a c æquediſtans lineæ contingenti ſectionem rectanguli coni in puncto b. Rurſus quoniam d e diametro eſt æquediſtans, & à puncto c ducta eſt c e contingens ſectionem rectanguli coni in puncto c, & linea a c æquediſtans lineæ contingenti ſectionem coni, erit e b æqualis b d, Quare eandem habet proportionem d a ad d c, quam d b ad b e. Siquidem



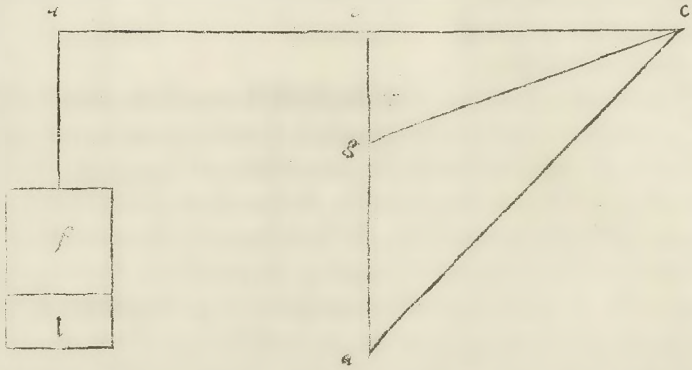
dē igitur linea ducta, per æqualia diuidat lineā a c, ostensum est. Sin nō per æqua diuidat, ducat̄ alia quędā k l, æquedistans ipsi a f. Ostendendū quod eandē habet proportionē a k ad k c, quam k h ad h l. Cū igitur b d, sit æqualis ipsi b e, æqualis erit & i l ipsi k i. Eandē ergo proportionē habet k i ad i l, quā d c ad d a. Habet aūt & k i ad i h, eam quā d a ad d k. nam hoc est prius ostēsum in præmissa. Quare eā habet k h ad h l, quam a k ad k c proportionem. Demōstratū est igitur propositū.

INtelligatur autem hoc primum, quod est in inspectione propositum, sitq; con 6
spectum ad horizontem erectum, & lineæ a b: deinde pars quidem uersus d intelligatur infrà, pars autem uersus aliud suprà. Triangulus autem b d c sit rectangulus, habēs rectum angulum ad c, & b c latus ęquale dimidio libræ: ut sit linea a b lineæ b c æqualis. Suspendatur autē triangulus ex punctis b c, item suspendatur aliud spacium f ex altera parte libræ in puncto a. & spacium f suspensum in puncto a, æqueponderet ipsi triangulo b c d, sic



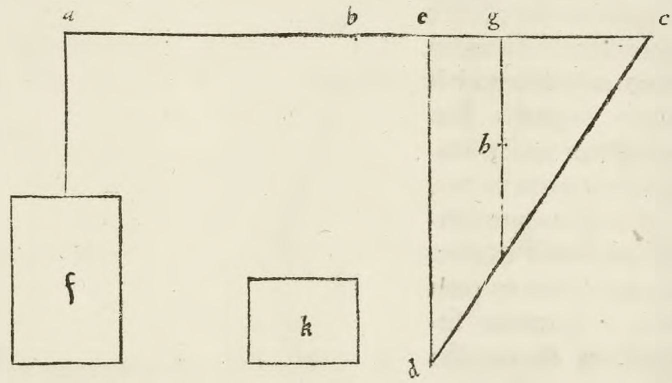
posito ut nunc est collocatum. Dico tunc f spacium trianguli b c d tertiam partem esse. Quoniam igitur suppositum est, libram æqueponderare, a c linea ipsi libræ assimilatur. Terminantur autem lineæ ad angulos rectos ex ipsa a c ductæ in plano, erecto super horizontē: & erūt perpendiculares super horizōtem. Diuidatur iam linea b c in puncto e, ita ut c e dupla sit ipsius e b: & ducatur k e æquedistans ipsi d b, & hæc in duo æqua diuidatur in puncto h. trianguli itaq; b a c centrum grauitatis est punctum h. nam hoc est ostensum in Mechanicis. Si igitur trianguli b d c suspensio, quæ est ad b c, soluatur, & ipse suspendatur ad punctum e, manet triangulus ut nunc se habet. Vnumquodq; enim suspensorū ex quo puncto constitutum manet, ita ut secundum lineam perpendicularem sit punctum suspensibilis, & centrum grauitatis suspensi. nam hoc quoque ostensum est. Quoniam igitur triangulus b d c eandem habet constitutionem ad libram, æqueponderabit similiter ipsi spacium f. Quoniam autem æqueponderāt f spacium suspensum in puncto a, & triangulus b d c in puncto e, constat quod mutuam inter se habent proportionem longitudinū: & est sicut a b ad b e, ita triangulus b d c ad spaciū f. sed a b tripla est ipsius b e. igitur triangulus b d c spacij f triplus existit. Manifestū quoq; est, quod si triangulus b d c spacij f triplus extiterit, ambo similiter cōstituta æqueponderabunt.

ESto itē libra linea a c, medium aūt eius sit b, & suspēdadatur secūdum b triangulus c d g: triangulus uero c d g sit triangulus ambligoni- 7

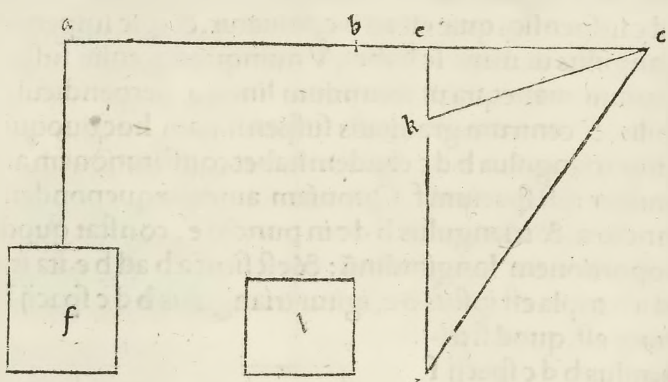


us, qui baſim habeat lineã d g, altitudinẽ uero ęqualem dimidiæ libræ, & ſuſpendatᷣ d c g triãgulus ex b c pũctis. ſpaciũ uero f ſuſpenſum ad a, æqueponderãs eſto ipſi c d g triangulo, ſic ſe habenti uti nunc poſitũ eſt. Similiter oſtẽdetur ſpacium f eſſe tertiam partem trianguli c d g. ſuſpendatur autem & quoddam aliud ſpaciũ ex a, quod ſit tertia pars trianguli b c g. triangulus itaqꝫ b d c æqueponderabit ſpacio f l. Cum itaqꝫ b c g triangulus æqueponderet ipſi l, & b c d ipſi f l, & trianguli b c d tertia pars eſt f l, manifeſtum eſt triangulum c d g ſpacij f triplum haberi.

8 ESto libra a c, medium eius b: & ſuſpendatur ſecundũ b triangulus c d e rectangulus, qui rectũ angulum habeat ad e, & ſuſpendatur ex libra ſecundum c e, & ſpacium f ſuſpendatur ex a, & æqueponderato ipſi c d e triangulo, ſic ſe habente ſicut nũc poſitum eſt. Quam autem proportionem habet a b ad b e, eam habeat c d e triãgulus ad ſpacium k. Dico iam, f ſpacium triangulo c d e minus eſſe, ſpacio autem k maius. Sumatur itaqꝫ triãguli c d e centrũ grauitatis quod ſit h, et ducatur h g ęquedistans d e. Quoniam igitur triangulus c d e æqueponderat ſpacio f, eandem proportionem habet ſpacium c d e ad ſpacium f, quam a b ad b g. Quare f minus eſt c d e. & quoniam c d e triangulus ad ſpacium f, eam proportionem habet, quam b a ad b g: ad k uero eam quam b a ad b e: conſtat triãgulum c d e maiorem proportionẽ habere ad k, quàm ad f. quare f ſpacium ipſo k maius exiſtit.

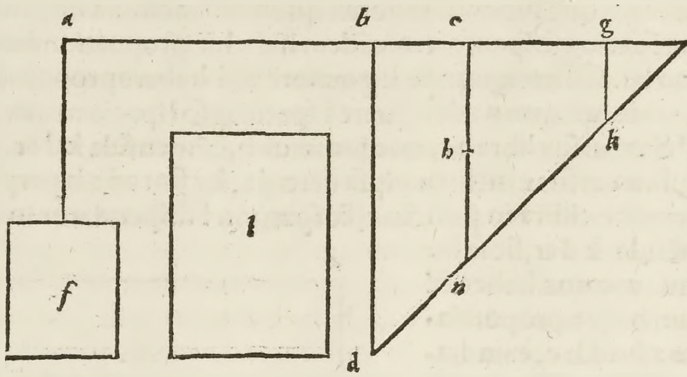


9 ESto item libra a c, & medium eius b, & c d k triangulus amblígonius, qui baſim habeat d k, altitudinem uero e c, & ſuſpendatur ex libra in punctis c e. Spaciũ uero f ſuſpendatur, & æqueponderato d e k triangulo, ſic ſe habẽti ſicuti nũc iacet. Quam aũt proportionem habet a b ad b e, eam habeat c d k triangulus ad ſpacium l. Dico iam ſpacium f, ipſo l maius eſſe, et ipſo d c k minus. Hoc ſimiliter præmiſſo, demonſtrabitur.

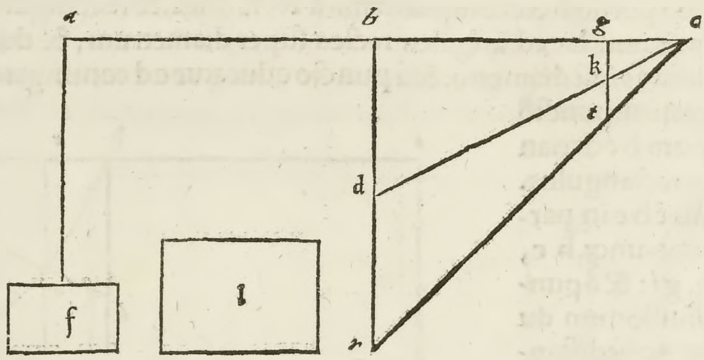


10 ESto item a b c libra, eius medium b, menſula uero b d g k habeat angulos ad puncta b g rectos, latus uero k d inclinatum in c: & quam habet proportionẽ b a ad b g, eam habeat b d k g menſula ad l ſpacium. Suſpenſa autem ſic menſula b d k g ex libra in b g punctis, ſuſpenſum quoqꝫ ſit f ſpacium in a, & æqueponderato ipſi b d k g menſulæ, ſic ſe habenti ſicut nunc iacet: dico iam f ſpacium ipſo l minus eſſe. Diuidatur itaqꝫ b g, in puncto e, ita ut quam proportionem habet dupla d b, & ipſa k g ad duplam ipſius k g, & ipſam b d, eam habeat e g ad b e: & ducta per punctum e, linea e n æquediſtans ipſi b d, diuidatur in duo æqua in pũcto h. iam menſulæ b d k g centrum grauitatis eſt h, nam hoc oſtenſum eſt in Mechanicis.

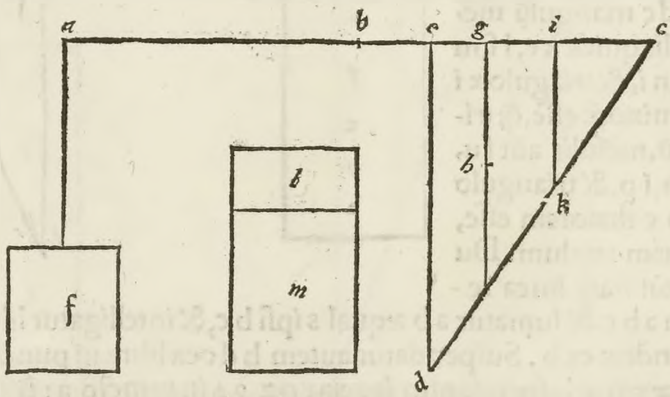
chanicis. Si igitur b d k g in e ſuſpendatur, à punctis autem b g ſoluatur, manet eandem habens conſiſtentiam, per eandē quæ in ſuperioribus rationem, & æqueponderabit ſpacio f. Quoniam igitur mēſula b d k g in e ſuſpēſa ęqueponderat ſpacio f in a ſuſpenſo, erit ſicut b a ad b e, ita menſula b d k g ad ſpacium f. Maiorem igitur proportiōem habet menſula b d k g ad ſpacium f, quàm ad ſpacium l, cum a b habeat ad b e maiorem proportionem, quàm ad b g. Quare ſequitur f ſpacium eſſe ipſo l ſpacio minus.



Esto item a b c libra, & medium eius b, & b d t r menſula ſit quæ habeat latera 11
k d, t r uerſus c inclinata: latera uero d r, k t ſuper b c perpendicularia, & d r cadat in b. Quam autem proportionem habet a b ad b g, eam habeat k d t r menſula ad l ſpaciū: mēſula uero k d r t ſuſpendatur ex libra in punctis b g, & ſpacium f in puncto a, et æqueponderato ſpacium f mēſulæ k d t r, ſic ſe habenti uti nūc iacet. Similiter iam ſuperiorib. oſtendetur, ſpacium f ſpacio l minus eſſe.

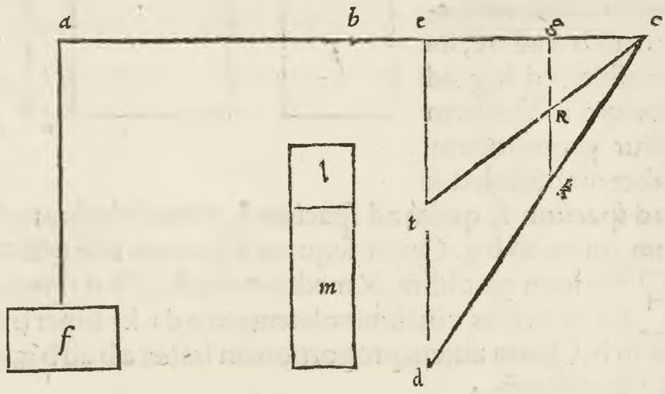


Esto item libra a b c, medium eius b, & menſula d e k g ſit, quæ angulos ad 12
e g puncta rectos habeat: lineas uero k d, e g uerſus c inclinatas. et quam proportionem habet a b ad b g, eam habeat d e k g menſula ad m. Quā autem habet a b ad b e, eam habeat d e k g menſula ad l. menſula uero d e k g ſuſpenſa ſit in libra ex punctis e g: ſpaciū uero f ſuſpendatur ex a, æqueponderans ipſi menſulæ, ſic ſe habenti uti nunc iacet. Dico iam ſpacium f ipſo l maius eſſe, ipſo uero m minus. Sumam enim centrum grauitatis menſulæ d e k g, quod ſit h. Sumetur autem ſimiliter ſuperioribus: & ducatur h i ęque

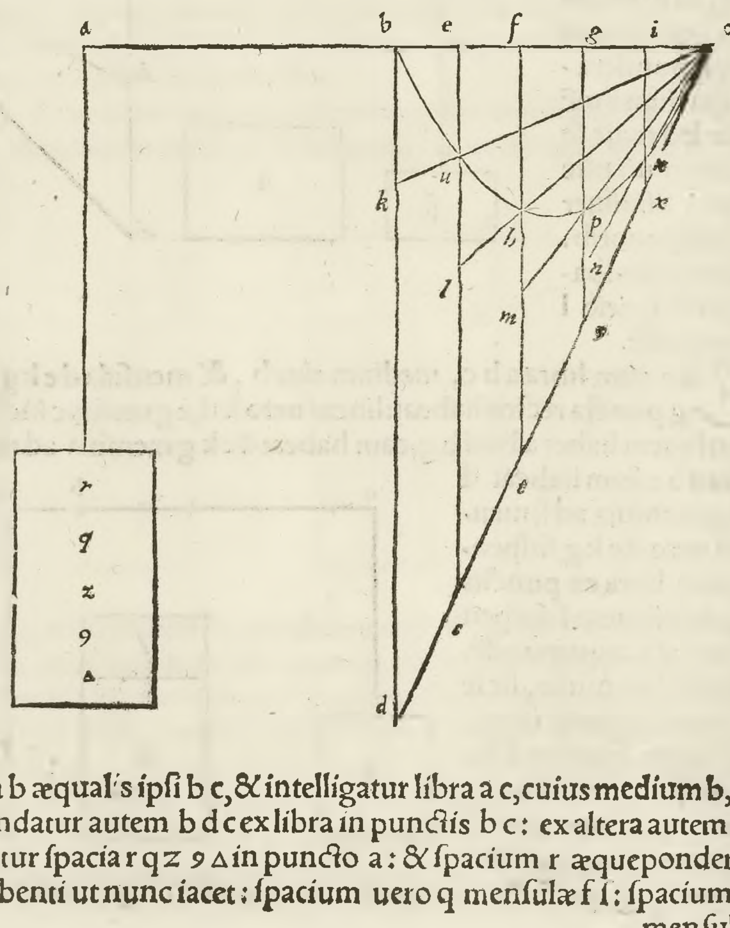


distans ipsi d e. Si igitur mensula ex libra suspendatur in puncto i, & soluatur à punctis e g, manet eandem habens consistentiam, & æqueponderabit ipsi f spacio eadem qua superius ratione: quoniam mensula suspensa in puncto i, ęquepõderat spacio f suspenso in a. eãdem habebit proportionẽ mensula ad spaciũ f, quã a b ad b i. Cõstat igitur d e k g maiorẽ ad l habere proportionem, quàm ad f: ad m uero minorẽ, quàm ad f. Quare f spaciũ ipso l spacio maius est, ipso uero m minus.

13 Esto rursus libra a c, medium eius b, & mensula k d t r, ita ut latera eius k d, t r sint uersus c inclinata: ipsa uero d t, k r sint ad a b perpendicularia. Suspensa autem sit ex libra in puncto e, & spacium f suspendatur in a, & æquepõderato ipsi mẽsulæ k d t r, sic se habenti, ut nunc habet. & quam habet proportionem a b ad b e, eam habeat d t k r, ad spacium l. Quã uero habet a b ad b g, eam habeat mensula ad spacium m. Similiter, ut suprà proximè ostẽdetur, f spaciũ ipso l spacio esse maius, ipso m uero minus.

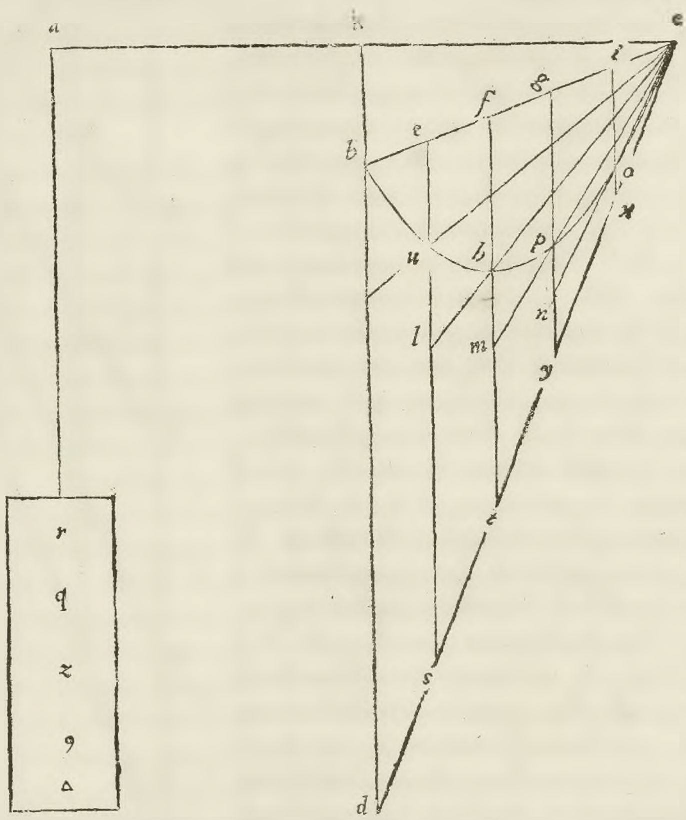


14 Esto portio b o c compræhensa à recta linea, & rectanguli coni sectione. Esto primum b c ad angulos rectos super diametrum, & ducatur à puncto b æquedistans ipsi diametro: & à puncto c ducatur c d contingens sectionem rectanguli coni in puncto c. erit iam b c d triangulus rectangulus. Diuidatũ b c in partes quotcunq;, b e, e f, f g, g i: & à punctis diuisionum ducantur æquedistantes diametro e s, f t, g y, i x. à punctis autem, quibus ipsę secant sectionem coni, educãtur & iungantũ ad c. Dico iã, b d c triangulũ mẽsulis quidẽ k e, l f, m g, n i, & triãgulo x i c minorẽ esse, quàm triplũ. mẽsulis aũt f u, g h, i p, & triangulo i o c maiorem esse, quàm triplum. Ducatur itaq; linea recta a b c, & sumatur a b æqualis ipsi b c, & intelligatur libra a c, cuius medium b, et pendeat ex b. Suspendatur autem b d c ex libra in punctis b c: ex altera autem libræ parte suspendantur spacia r q z 9 Δ in puncto a: & spacium r æqueponderet mensulæ d e, sic se habenti ut nunc iacet: spacium uero q mensulæ f l: spacium z



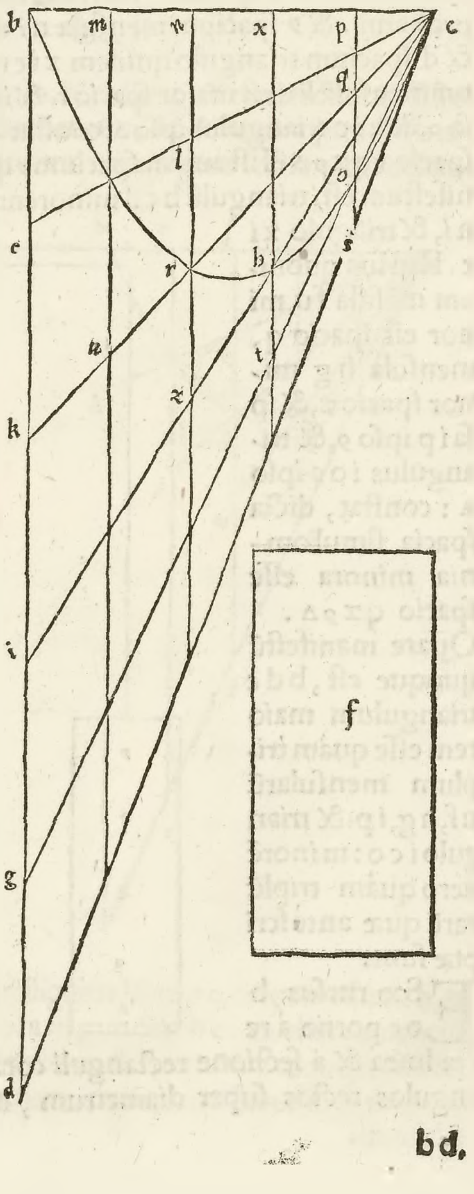
mensulæ

mensulæ t g: ipsum 9 mensulæ x i: ipsum uero ∆ triangulo c i x: æqueponderabit iam totũ toti. Quare triangulus b d c, triplus erit spacio r q z 9 ∆. Et quoniã est portio b c o, quæ compræhenditur à recta & sectione rectanguli coni, & à puncto b, ducta est b d æquedistans diametro: & à puncto c ducta c d, contingens sectionẽ coni in puncto c: ducta quoq; alia æquedistãs diametro s e, eandem habebit proportionem b c ad b e, quam s e ad e u. Quare b a ad b e, eam habet quam mensula d e ad k e. Similiter ostenditur, a b ad b f eam habere proportionem, quam s f mensula ad l f, ad b g autem eam quam t g ad m g. ad lineam uero b i, eam quam y i ad n i. Quoniam igitur mensula d e habet angulos ad puncta b e rectos, latera uero uersus c inclinata: æqueponderat autem ipsi quoddam spacium r, suspensum ex libra in puncto a, mensula sic manẽte uti nunc posita est: & est sicut b a ad b e, sic mẽsula d e ad spacium k e. [sicut autem b a ad b f, ita mensula d e ad spacium q. Spacium igitur q spacio r maius est. nam hoc ostẽsum est.] quare spacium k e maius est spacio r. nam hoc ostensum est. Rursus mensula f s, quæ angulos ad f e puncta rectos habet, & latus s t inclinatum uersus c, & æqueponderat ei spacium q ex libra suspensum in puncto a, mensula sic manente uti nunc iacet: & est sicut b a ad b e, sic f s mensula ad f u. Sicut autem a b ad b f, ita f s mensula ad l f. Quare q spacium mensula l f minus existit, ipsa uero f u maius. Hoc enim ostẽsum est. Eadem ratione & z spacium, mensula quidem m g minus: ipsa uero h g maius esse probatur. & 9 spacium mensula n i minus, ipsa uero p i maius. Similiter autem & d spacium triangulo quidem x i c minus, ipso uero c i o maius. Quoniam igitur mensula k e est maior spacio r, & ipsa l f maior ipso q, & m g ipso r: & n i ipso 9, & x i c triangulus ipso ∆: constat quod omnia simul dicta spacia maiora sunt spacio r q z 9 ∆. Est autem spacium r q z 9 ∆ tertia pars trianguli b c d. Quare manifestum est, triangulũ b c d minorem esse quàm triplum mensularum k e, l f, m g, n i, & triãgulo x i c. Rursus quoniam mẽsula f u minor est spacio q, mensula h g minor spacio z, & ipsa i p ipso 9, & triangulus i o c ipso ∆: constat, dicta spacia simul omnia minora esse spacio q z 9 ∆. Quare manifestũ quoque est, b d c triangulum maiorem esse quàm triplum mensularũ u f, h g, i p, & triangulo i c o: minorẽ uero quàm triplũ earũ quæ antè scriptæ sunt.



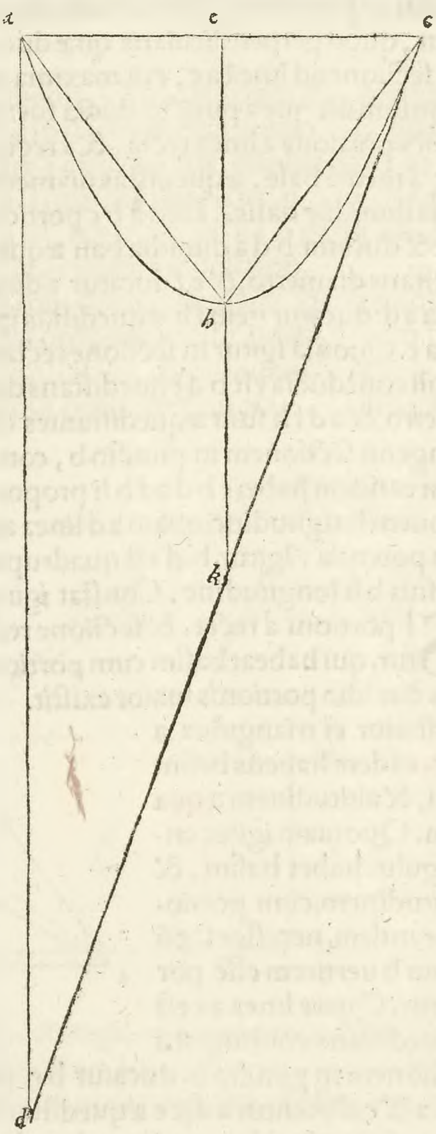
Esto rursus b o c portio à recta linea & à sectione rectanguli coni compræhensa, & b c linea non sit ad angulos rectos super diametrum, necesse iam est lineam à puncto b ductam,

ctam, æquedistantem diametro uersus portionem facere angulum obtusum in parte uersus b, aut uersus c, & intra sectionis portionem, aut extra. Esto itaque quod faciat angulum extra obtusum uersus b, & ducatur b d æquedistans diametro à puncto b: & à puncto c ducatur c d contingens sectionem in puncto c, & diuidatur b c in partes æquas quotcunq; b e, e f, f g, g i, i c. à punctis uero e f g i ducantur e s, f t, g y, i x diametro æquedistantes, & à punctis quibus ipsæ secant sectionem coni iungantur lineæ ad c, & extrahantur. Dico iam & nunc triangulum b d c esse mensulis ȝ u, l f, m g, n i, & triangulo c i x esse minorem quàm triplum: mensulis uero f u, g h, i p, & triangulo c o i maiorem esse quàm triplum. Extrahatur d b in alteram partem, & à puncto c ducatur ad ipsam c k perpendicularis: & protendatur, donec sumatur a k æqualis ipsi c k. Intelligatur rursus libra a c, cuius medium k, & pendeat libra ex k puncto: & c k d triangulus suspẽdatur ex media libra in pũctis k c, sic se habens ut nũc iacet. Ex altera parte libræ suspẽdantur in puncto a, spacia r q z 9 Δ: & r quidẽ mensulæ d e æqueponderet, sic manenti uti nunc posita est: & spacium q mensulæ f s, spacium z mensulæ t g: & ipsũ 9 ipsi y i. & ipsum Δ ipsi c i x triangulo, æqueponderabit quoq; totum toti. Quare triangulus d b c triplus existit spatio r q z 9 Δ. similiter superiori proximo ostendetur, mẽsulam e z spacio r esse maiorem, & mensulam l f maiorem spacio q, & f u minorem: & mensulam m g maiorem spacio z, ipsam uero g h minorem. & n i maiorem spacio 9, & ipsam p i minorẽ. & x i c triangulum spacio Δ maiorem, ipsum c i o minorem eodem. Quare constat propositum.



16 Esto item portio b o c cõtenta à linea recta, & à sectione rectanguli coni. et ducatur per b linea b d æquedistãs diametro, & à puncto c ducatur contingẽs sectionem coni in puncto c, quæ sit c d. Esto trianguli b c d tertia pars spacium f. Dico iam, portionem b o c ęqualem esse spacio f. Nam si nõ, erit uel maior, uel minor. Esto primum si fieri potest maior, & sit ut excessus quo portio b o c superat spacium f, sibijpsi totiẽs coaceruetur, donec compositum ex ipso excedat triangulum b c d. Potest itaq; sumi spacium quoddã minus illo excessu, quod spacium sit pars trianguli b c d. sit ergo b e c triangulus dicto excessu minor, & pars trianguli b c d. Erit quoq; linea b e pars lineæ b d. Diuidatur itaq; b d in partes, & sint diuisionum puncta g i k: & à punctis g i k, ad lineam c e rectam ducãtur lineæ rectæ, quæ secabũt sectionem coni, cum linea c d contingat eam in pũcto c. & per puncta quibus rectæ secant sectionem coni, ducãtur lineæ rectæ m u, n r, x h, p s æquedistantes diametro. erunt eædem æquedistantes quoque ipsi

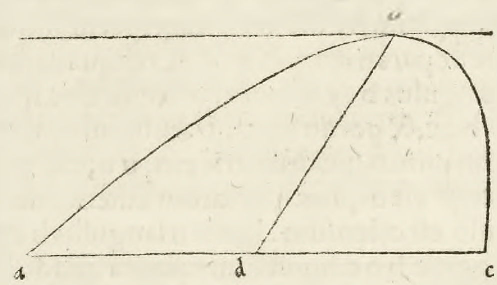
b d. Quoniã igitur triangulus b e c est minor excessu, quo portio b o c excedit spacium f. Constat utraq; simul, spacium f, et triangulum b e c, minora esse portione: & triãgulo b c e æquales sunt mensulæ illæ per quas sectio coni permeat, quę sunt m e, u l, h r, h o cum triangulo c o s. nam mensula m e est communis: m l autem est æqualis u l, & l x æqualis ipsi h r, & q x æqualis ipsi h o, & triangulus c q p æqualis triangulo c o s. Spacium igitur f minus est mensulis m l, x r, p h, cũ triangulo p o c: & est triangulus b c d triplus spacij f. Quare b c d minor est, quàm triplus mensularum m l, r x, h p cum triangulo p o c, quod quidem esse non potest. nam ostensus est maior esse, quàm triplus. non est igitur portio maior spacio f. Dico item eam neq; esse minorem illo. Esto enim, si esse potest, minor. Rursus excessus quo spacium f superat portionem b o c, ipse sibijpsi totiẽs coaceruetur, donec superet triangulum b c d. Potest itaq; spaciũ aliquod sumi quod sit minus excessu, quodque sit pars trianguli b c d, & reliqua eadem disponantur ut prius. Quoniam igit̃ triangulus b c e minor est excessu quo spacium f superat portionem b o c, triangulus b e c, & portio b o c, utraq; simul sunt minora spacio f. Est autem & ipsum f spacium minus quadrilateris e m, u n, z x, p t, & triangulo c p s. nam b c d triangulus spacij f est triplus: spaciorum autem prædictorum minor, quàm triplus, ut in prę misso est ostensum. Igitur triangulus b c e, & portio b o c, simul sunt minora quadrilateris e m, u n, z x, p t, & triangulo c p s. Quare portione inde ablata, quę communis est, triangulus b c e minor erit ipsis spacijs comprænhensis, quod esse non potest. nam ostensum est, triangulum b c e mensulis e m, u l, h r, h o, & triangulo c o s esse æqualem, quæ simul sunt maiora dictis spacijs compræhẽsis. Non est igitur portio b o c minor spacio f: & ostensum est eo maiorem esse nõ posse. Portio ergo spacio erit æqualis.



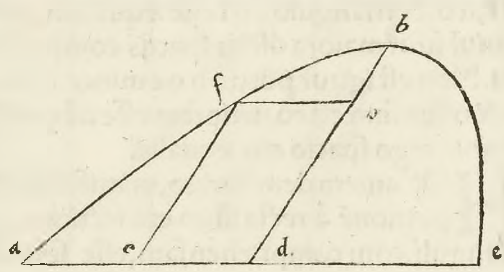
HOc autem demõstrato, manifestũ est, portionẽ à recta linea et à sectione rectanguli coni compræhensam, esse sesquitertiam triangulo, qui habeat basim cũ portione eandem, & altitudinem eidem æqualem. Esto portio comprehensa à linea recta, & sectione rectanguli coni: uertex eius esto punctum h, & inscribatur ei triangulus b h c, qui basim habeat cum portione eandem, & altitudinem æqualem. Quoniam igitur punctum h est uertex portionis, linea recta à puncto h ducta æquedistans diametro in duo æqua diuidit lineam b c, & b c est æquedistans lineæ cõtingenti portionem in puncto h. Ducatur autem e h diametro æquedistans: ducatur item à puncto b æquedistans diametro quæ sit b d, & à puncto c ducatur contingens sectionem in puncto c, quæ sit c d. Quoniam igitur e h k linea est diametro æquedistans, & c d contingens sectionem in puncto c, & linea b e c est æquedistans lineæ contingenti sectionem in pũ 17 cto h, erit triangulus b c d quadruplus triangulo b h c. Cum igitur triãgulus b c d sit quadruplus triangulo b h c, & triplus portioni, manifestum est portionẽ b h c triangulo b h c sesquitertiam esse.

Earum portionum quæ continentur à curua, & à recta linea, basim uoco ipsam rectam: altitudinem uero maximam perpendicularem, quę à curua linea ad basim portionis aptata sit: uerticem autem, punctum illud à quo perpendicularis maxima ad basim ducitur.

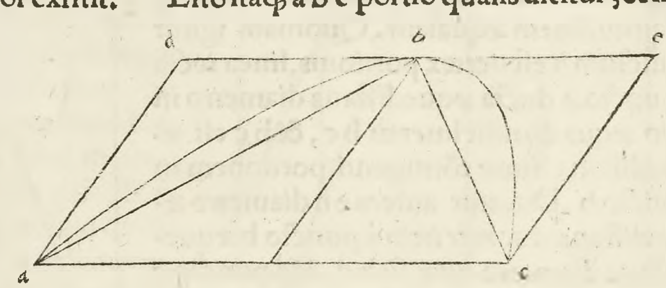
18 SI in portione quæ compræhensa sit à linea recta, & à coni rectanguli sectione, à media basi ducatur recta diametro æquedistans, punctum illud in quo dicta æquedistans diametro secat coni sectionem, est uertex sectionis. Esto a b c portio compræhensa à linea recta, & à sectione rectanguli coni, & à medio a c ducat̃ d b diametro æquedistans. Quoniã igitur in rectanguli coni sectione ducta est b d diametro æquedistans, erit a d æqualis ipsi d c. Constat a c ęque distãtem esse lineæ contingenti sectionem in puncto b. Manifestum est igitur, quod perpendicularis quæ ducet̃ à sectione ad lineã a c, erit maxima omnium illa quę à puncto ducta fuerit. Punctum igitur b portionis uertex existit.



19 IN portione à linea recta, & à rectanguli coni cõpræhensa sectione linea ducta à media base, æquedistãs diametro, est sesquitertia lineæ ductæ similiter à dimidia dimidiæ basis. Esto a b c portio contenta à recta, & à sectione coni rectanguli: & ducatur b d à dimidia basi æquedistans diametro, & e f ducatur à dimidia a d: ducatur item f h æquedistãs ipsi a c. Quoniã igitur in sectione rectanguli coni ducta est b d ęquedistans diametro, & a d f h sunt æquedistantes cõtingenti sectionem in puncto b, constat eandem habere b d ad b h proportionem longitudine, quam a d linea ad f h potentia. Igitur b d est quadrupla ipsius b h longitudine. Constat igitur b d ipsius e f esse sesquitertiã longitudine.



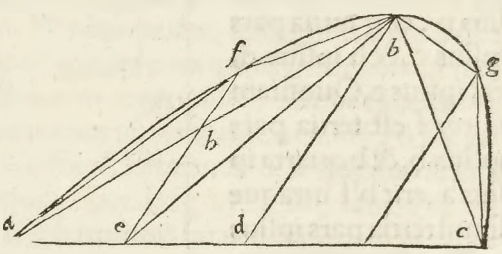
20 SI portioni à recta, & sectione rectanguli coni contentæ triangulus inscribatur, qui habeat basim cum portione eandem, & altitudinem eandem, triangulus dimidio portionis maior existit. Esto itaq; a b c portio qualis dicitur, & inscribatur ei triangulus a b c, eãdem habens basim toti, & altitudinem æqualem. Quoniam igitur triangulus habet basim, & altitudinem cum portione eandem, necesse est pũctum b uerticem esse portionis. Quare linea a c est æquedistans contingenti sectionem in puncto b. ducatur b e, per punctum b æquedistans ipsi a c. & à punctis a & c, ducantur a d, c e æquedistantes diametro. cadent iam ipsæ extra portionem. Quoniam igitur triangulus a b c est dimidium figuræ a d e c æquedistantium



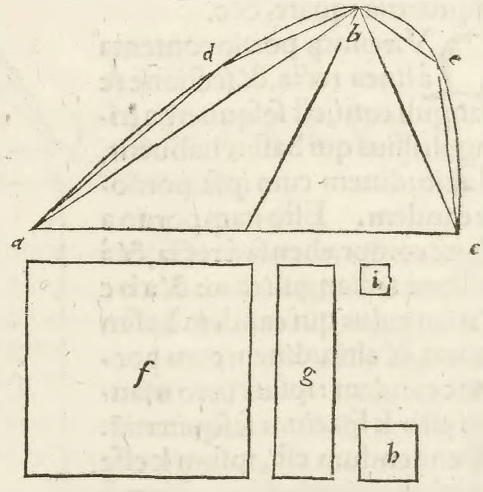
um

um laterum, constat ipsum plus quàm dimidium esse portionis. Hoc demonstrato manifestum est, posse figuram multorum angulorũ inscribi portioni, ita ut portiones residuæ sint quocunq; spacio dato minores. nã continuè plus dimidio ablato ex hoc constabit, quod diminuentes hoc modo tandem faciemus portiones residuas quocunq; spacio proposito minores.

SI in portione à recta, & à sectione rectanguli coni contenta, triangulus inscribatur, eandem basim cum portione, & eandem altitudinẽ habens: item in portionibus residuis alij trianguli inscribantur, eandem & basim & altitudinem cum portionibus habentes: utriusq; trianguli in residuis portionibus inscripti, octuplus est triangulus ille qui in tota portione descriptus existit. Esto a b c portio qualis dicitur, & diuidatur a c puncto d, & ducatur b d diametro æquedistans. punctum ergo b erit uertex portionis, & triangulus a b c eandem basim habet cum portione, et altitudinẽ eandem. Diuidatur item in duo ęqua a d puncto e, & ducatur e f ęquedistãs diametro: diuidatur autem a b puncto h. pũctum igitur f, erit uertex portionis a f b: & triangulus a f b, eandem & basim & altitudinem cum portione a f b habebit. Ostendendum est, triangulum a b c, octuplum esse trianguli a f b. Est itaq; b d sesquitertia lineæ f e, & dupla ipsius e h. Quare e h, dupla est ipsius h f. Quare a e h triãgulus, duplus est a f h: & ideo æqualis triangulo a f b: & triangulus a b d quadruplus est triangulo a h e. igitur & trianguli a f b. Quare totus triangulus a b c, erit trianguli a f b octuplus. Similiter ostendetur octuplus esse triangulo in b g c portione descripti. 21



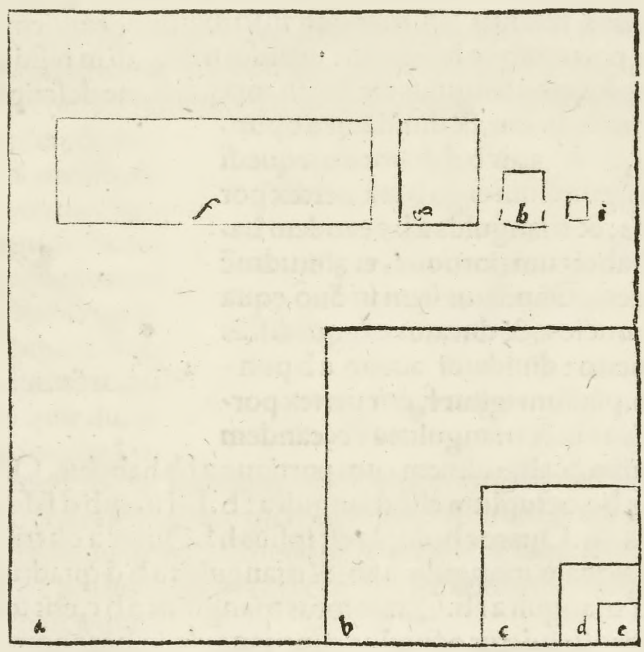
SI sit portio à recta & à sectione rectanguli coni compręhensa, & spacia quotcũque ponantur consequenter in quadrupla proportione: sit autem horum spaciorum maximum æquale triangulo, qui basim habeat, & altitudinem cum portione eandem: spacia hæc simul omnia sunt ipsa portione minora. Esto itaq; portio a b e c, à recta & sectione rectanguli coni compræhensa. Sunto itẽ spacia quotcunq; numero continenter posita, f g h i: & sit præcedens quadruplũ sequentis. Esto autem eorum maximũ f, & esto f æquale triangulo habenti basim, & altitudinem cum portione eandem. Dico a d b e c portionem, spacijs f g h i, simul omnib. esse maiorem. Esto totius quidem portionis uertex b, & residuarum portionum uertices d, e. Quoniam igitur triangulus a b c, est octuplus utriusq; trianguli a b d, b e c: Constat quod utriusq; simul quadruplus existit. Et quoniam a b c triangulus æqualis est spacio f, eadem ratione & trianguli a d b, b e c sunt simul æquales spacio g. Similiter ostendetur, triangulos deinceps reliquis portionibus inscriptos, eãdem basim & altitudinem cum portionibus habẽtes, æquales esse spacio h, & triangulos portionibus deinde residuis inscriptos æquales esse spacio i. Spa- 22



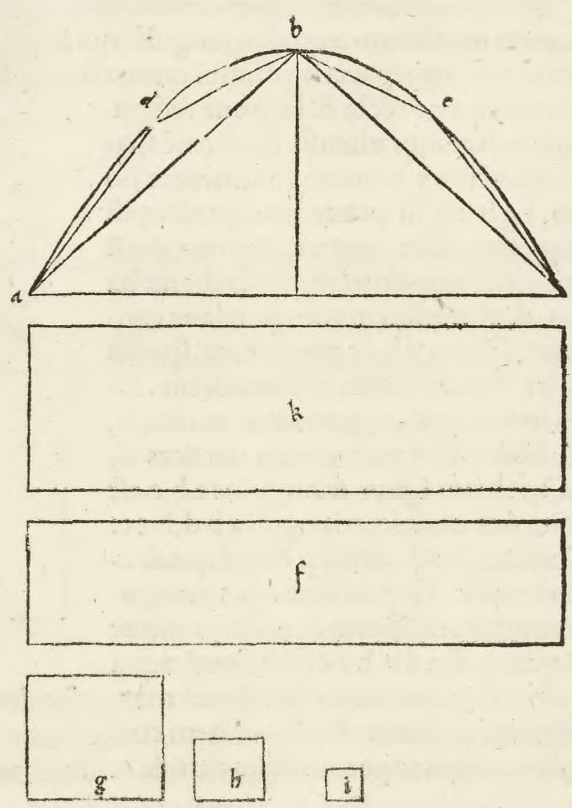
u cia

cia igitur proposita simul omnia, sunt æqualia figuræ cuidam multorum angulorum portioni inscriptæ. Quare ipsa portione constat esse minora.

23 SI magnitudines quotcunq; consequenter in proportione quadrupla disponãtur, hæ magnitudines simul omnes cum tertia parte minimæ illarum, sunt sesquitertiæ magnitudini illarum maximæ. Sunto itaq; quotcunq; magnitudines continenter positæ, unaquæq; præcedens, quadrupla proximæ sequentis a b c d e: & sit earum maxima a. Sit autẽ f tertia pars ipsius b, et g tertia pars ipsius c, & h ipsius d, et i ipsius e. Quoniam igitur f est tertia pars ipsius b, & b quarta ipsius a, erit b f utraque simul tertia pars ipsius a. & eadem ratiõe c g, tertia ipsius b, et h d ipsius c, & i e ipsius d: & iam simul omnia b c d e f g h i, tertia pars cõpositæ ex omnibus simul a b c d e. Sunt autem f g h tertia pars ipsarum b c d. Quare & residuũ b c d e i, erit residui, hoc est ipsius a tertia pars. Constat igitur ea simul omnia a b c d e, cũ ipso i tertia ipsius e, esse ipsius a sesquitertia: quare, &c.



24 QVæcunq; portio contenta à linea recta, & sectione rectanguli coni, est sesquitertia trianguli illius qui basim habuerit, & altitudinem cum ipsa portione eandem. Esto itaq; portio a d b e c compræhensa à recta, & à sectione rectanguli coni: & a b c sit triangulus qui eandem basim habeat, & altitudinem cum portione eandem: ipsius uero trianguli esto k spacium sesquitertiũ. Ostendendum est, ipsum k esse æquale portioni a d b e c. Nam si non, erit aut maius, aut minus eadẽ. Esto prius, si esse potest, portio a d b e c maior ipso k spacio: inscribam iam triangulos a d b, & b e c, uti supradictum fuit. Et



item

item in residuis portionibus inscribam alios triangulos eandem basim, & altitudinem cum portionibus eandem habentes: & similiter in residuis portionibus inscribam duos triangulos, basim & altitudinem cum portionibus eandem habentes, donec residuæ portiones sint tandem minores excessu, quo portio a d b e c excedit spacium k. Quare figura multiangula ipsi portioni inscripta, maior erit spacio k, quod esse non potest. Cum sint quædam spacia in proportione quadrupla disposita, quorum primum est triãgulus a b c, quadruplus triãgulis a d b, & b e c: deinde ipsi trianguli sunt quadrupli triangulis, qui in portionibus sequentibus sunt descripti, & reliqui identidem. Quare constat omnia simul triangulorũ spacia minus quàm sesquitertia esse triangulo a b c, maximi eorum: & positum est, k spacium esse sesquitertiũ eidẽ maximo. Non erit igitur portio a d b e c maior k spacio. Esto item si esse potest, minor eodem. Ponatur autem triangulus a b c æqualis spacio f, & sit g quarta pars ipsius f, et sit h quarta pars ipsius g: & cõtinuæ semper ponantur consequenter ita, donec ultimum sumptum sit minus excessu quo spacium k excedit portionem, & sit ipsum minus i spacium. sunt iam f g h i spacia simul cum tertia parte ipsius i, sesquitertia ipsius f. Est autem & k spacium sesquitertium ipsius f. quare spacium k erit æquale spacijs f g h i simul, cum tertia parte i. Cum igitur spacium k excedit spacia f g h i minori quantitate quàm sit i, portionem uero excedit maiori quàm sit idem i, colligitur spacia f g h i simul maiora esse portione: quod esse non potest. Ostensum namq; est, quod si sint spacia quotcunq; in quadrupla proportione consequenter posita, & maximum eorum æquale fuerit triangulo portioni inscripto, spacia illa simul omnia esse minora portione. Non est igitur a d b e c portio minor spacio k. Ostensum quoq; est, eam non posse ipso esse maiorem. Quare eidem æqualem esse necesse est. At uero spaciũ k sesquitertium existit trianguli a b c, portio igitur a d b e c, eiusdem trianguli a b c sequitertia existet.

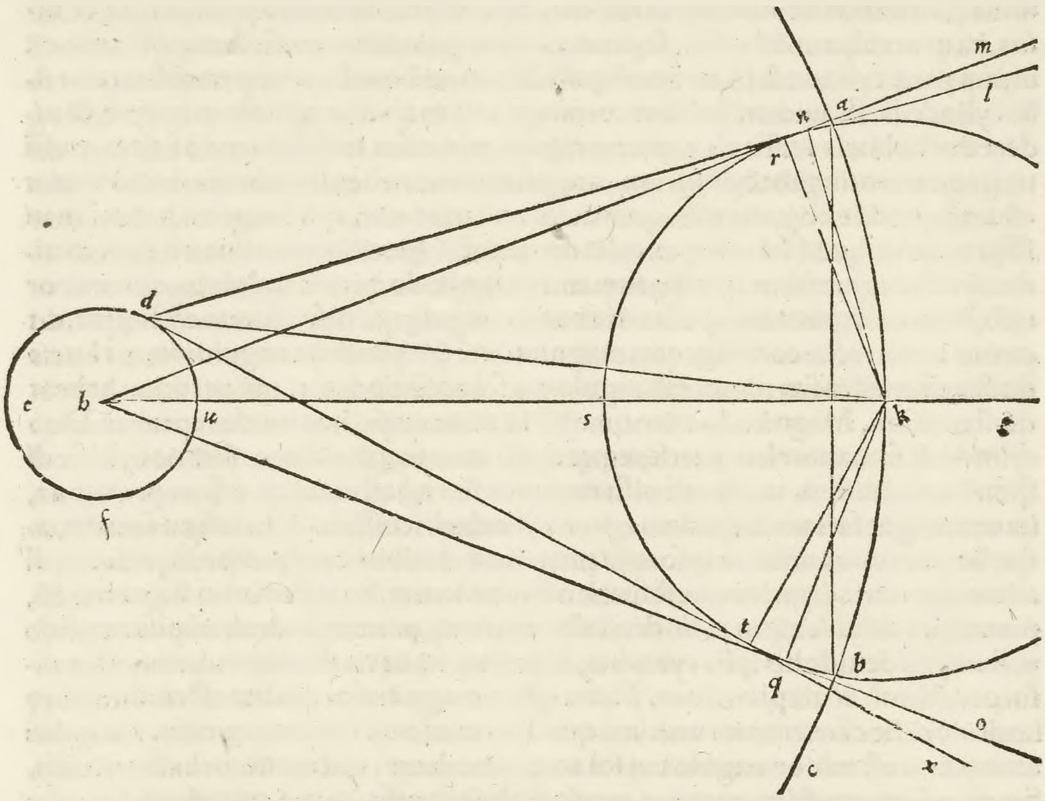
FINIVNT ARCHIMEDIS INVENTA DE QVADRATURA Parabolæ, hoc est portionis contentæ à linea recta, & sectione rectanguli coni.

ARCHIMEDIS TRACTATVS
DE ARENAE NVMERO.

EXISTIMANT quidam, rex Gelon, arenam esse multitudine infinitam. Ego autem dico, non eam solum quæ circa Syracusas, & circa reliquã Siciliam existit, uerumetiã illam quę in uniuersa habitabili simul et inhabitabili regione ubiq; cõtinetur, certo quodam numero comprehensam esse. Nonnulli uero infinitam eam minime opinantur: nullum autem tantum excogitari posse numerũ credũt, quẽ illius multitudo nõ superet. Igitur qui hac opinione ducuntur, si eiusmodi cumulum arenæ concepissent, qualis esset si uniuersę terræ tumor repleto mari, & omnibus canalibus usque ad cuiusq; altissimi montis uerticem arena collectus haberetur, huius quoq; tanti alter præterea multiplex excogitaretur, eos minimè dubiũ est sensuros fore, huiusmodi cumuli multitudinem nullo prorsus numero posse contineri. Ego autem hoc declarare experiar demonstrationibus Geometricis, quib. te assensurũ minimè dubitarim, quod ex illis qui à nobis expressi, & in his quæ ad Zeuxippū scripsimus, expositi sunt numeri, nō nulli excellunt non solum arenę magnitudinem quæ fuerit tumori terræ ęqualis, quæ quidem terra uti diximus ubiq; repleta fuisset: uerum quæ toti mundo par haberetur. Non autem te fugit, quod mundus à quàm plurimis Astrologis appelletur sphæra, cuius centrum est centrum terræ: quæ uero ex centro linea æqua est lineæ rectæ quæ à centro solis ad centrum terræ sit ducta. Hæc itaq; quæ apud Astrologos conscripta inueniuntur, refutās & cōmutans Aristarchus Samius suppositionibus quibusdam, scripta quædam tradidit, in quibus id perspicitur, ex his quæ illic supposita sunt, euenire mundum, dicto nuper mundo esse multiplicem. Nam apud eum supponitur stellas, quæ non errant, & solem immobilē permanere, terram uero circa solem ferri in circuli circumferētia, qui est in medio cursu situs. Sphæram uero stellarum fixarum circa idem centrum cum sole sitam esse: ea uero magnitudine haberi, ut circulus circa quem positum est terram ferri, eam habeat proportionem ad stellarum fixarum distātiam, quam habet centrum sphęræ ad circumferentiam. Hoc utiq; constat, esse non posse. Nam cum sphæræ centrum nullam habeat magnitudinem, non utiq; ullam habere posse ad superficiē sphæræ proportionem, est opinandum. Ostendendum est autem, Aristarchum hoc intellexisse & sensisse. Quoniam itaq; opinantur terram ueluti circa centrum mundi constitutam, quam proportionem habet terra ad mundum à nobis dictū, eam habere sphæram in qua circulus existit, in cuius circumferentia supponitur, terram ferri ad sphæram stellarum fixarum. Nam demonstrationes eorum quæ apparent, id quod sic suppositum est accōmodat, & maxime apparet magnitudo sphęræ, in qua ponit terram moueri, æqualiter supponi ei qui à nobis dicitur mūdus. Dicimus utiq;, si fieret sphera ex arena, quæ tanta esset quantam Aristarchus sphæram stellarum fixarum supponit esse, etiā sic quasdam haberi, & ostendi posse ex his quæ in principijs habentur numerorum denominationibus, quæ hanc ipsam arenam multitudine superarent, quæ magnitudinem dictæ sphæræ haberet æqualem his quæ dicam suppositis. Primum quidem ambitum terræ esse ueluti ter mille milia stadiorum, uel etiam maiorem, cum tu quoq; illis assentias, qui experientia ostenderunt eum esse trecentorum milium stadiorum. Ego autem exuberans, & ponens terræ magnitudinē decuplā eius quam superiores posuerūt, & opinati sunt, ambitum eius pono esse ter mille milia stadiorum. Post hoc, diametrum terræ maiorem esse diametro lunæ, & diametrum solis maiorem esse diametro terræ, similiter eadem sumens quæ plurimi superiorum Astrologorum posuerunt. Post hoc, diametrum solis esse tricesies diametrum lunæ, & magis. & à prioribus astrologis, ab Eudoxo quidem uti nonuplum, Plidia uero uti duodecuplum: ab Aristarcho, qui demōstrare conatus est diametrum solis diametro lunæ maiorem esse, quàm octo et decies ipsam: minorem uero quàm uigesies eandem. Ego autem & hunc excedens, ut suppositum cum ostensum fuerit sit minime ambiguum, suppono diametrum lunæ ueluti trigesies tantum quantum nunc ponitur, uel etiam maiorem. Ad hæc quoq; diametrum solis maiorem esse latere figuræ mille angulorum, inscriptæ maximo circulo mundi. Hoc autem suppono, cū Aristarchus dicat solem uideri esse uigesimāseptimam partē circuli zodiaci. Ipse enim hoc modo perscrutatus, conatus est instrumentis depræhendere angulum cui sol aptatur, qui uerticem habeat in oculo. Simile uero non facile est sumere, cum neq; uisus, neq; manus, neq; instrumenta, per quæ experiri oportet, satis habeant fidei ad declarandum id quod certum est. De his autem in pręsentiarū non expedit disceptare: alioquin cum hæc sæpe suum errorem declarent. Sufficit autem mihi ad propositum demonstrandum, angulum sumere, qui maior sit angulo illo cui sol accommodatur, qui uerticem habeat in uisu. Et item alterum sumere angulum, qui non sit minor eo cui sol accommodatur, quiq; uerticem habeat in

eam

eam partem in quam uisus. Posita igitur longa regula super planum erectum, in loco unde sol oriri debet, & sol aspici possit, deinde cylindro per tornum facto, & longo posito super canonem erecte illico post ortum solis, deinde procedente ipso uersus horizontem & possit contra solem inspicere, uertatur canon in solem, et uisus constitutus sit in extremo regulæ, & cylindrus in medio positus solis & uisus, ita ut occultetur sol uisui, separans autem cylindrum à uisu donec incipiat ex utraq; parte cylindri solis extremū quid & minimū lymbi inspicere: cōstituatur illic cylindrus. Siquidem similiter contingit uisum ab uno puncto inspicere, & uidere ductis lineis rectis ab extremo regulæ, ubi uisus in inspiciendo fuerat constitutus quæ contingant cylindrum, angulus, compræhensus à lineis ductis maior est uno quodā ex his angulis, quibus sol accōmodatur, qui uerticem habeat in uisu propterea, quod sol utriq; ex cylindro uidet. Quoniā uero uisus nō à pūcto uidet, sed à magnitudine quadā, sumatur magnitudo quædā uolubilis non minor uisu, & hac magnitudine posita in extremo regulę ubi uisus fuerat cōstitutus, ducantur lineæ rectæ contingentes magnitudinē & cylindrū: angulus itaq; à lineis ductis cōpræhensus minor est angulo cui sol accōmodatur, qui uerticem habeat uersus uisum. Magnitudo uero quæ nō sit minor uisu, hoc modo reperitur. Duo cylinduli sumantur leues, tersi, æquè crassi inter se, unus albus, alter non: & sic disponātur ad uisum, ut albus à uisu remotior sit: nō albus iuxta uisum proximus, ita ut attingat faciem. Siquidem igitur cylinduli leuissimi & tersissimi fuerint, aspectu proximus uisui ab ipso uisu præteritur, & albus conspicitur: siquidem ipsi admodum tersi, et qui iuxta est fuerit omnino leuior. sin autem non supra modū, partesq; quædā uidebūtur cylinduli albi, ex utraq; parte cylinduli ad uisum admoti. Sumptis deinde his ipsis cylindris, & positis, ita ut crassitudine alterius alter uisui occultetur, & ampliori loco. Tanta igitur magnitudo, quanta est crassitudo cylindrulorū hoc facientium maximè quodam modo est non minor uisu. Angulus autem non est minor angulo cui sol accommodatur, qui uerticem habet in uisu, Sic ergo sumatur, & remoto per regulam ab ipso uisu, ita ut à cylindro sol occultetur totus, & ducantur lineæ rectæ ab extremo regulæ, ubi uisus est constitutus, cōtingentes cylindrum, angulus ab ipsis ductis compræhensus non est minor angulo cui sol accommodatur, qui uerticem habet in uisu. Istis angulis sic sumptis, dimetiatur angulus rectus, & fiat puncto & aculeo, ut angulo recto in centum & sexagintaquatuor partes diuiso, unus angulus qui sit minor quàm una pars illarum: & ipse angulus minor factus sit recto angulo diuiso in ducentas partes, maior una illarum partium. Constat igitur, quod angulus cui sol accommodatur, qui uerticem habet in uisu minor est, quàm una pars recti diuisi in centum quatuor & sexaginta partes: minor autē angulo solis dicto est maior, quàm una pars anguli recti diuisi in ducentas partes. Constat item quod angulus cui sol accōmodatur, qui uerticem habet in uisu, minor est quàm una pars anguli recti diuisi in centum quatuor & sexaginta partes, maior autem quàm una pars recti diuisi in ducentas partes. Istis autem sic concessis, ex quibus sequitur solis diametrū latere figuræ maiorem esse, quæ figura mille angulis constet, atq; inscripta sit circulo qui in mundo maximus habetur. Intelligatur planum per centrum terræ eductum, & per centrum uisus minimo solis, uel ferè illico cum sol super horizontem steterit. Diuidat autem planum eductum mundum secūdum circulum a b c, terram uero secundum d e f, & solem secundum s g circulum. sit autem centrum terræ h, & solis centrum k, & centrum uisus d. Et ducantur lineæ rectæ contingentes circulū s g à puncto d, quæ sint d l, d x, & contingant in punctis n & t. & à puncto h ducantur h m, h o cōtingentes eundem in pūctis q & r. Circulum uero a b c diuidant lineæ h m, h o, in punctis a & b. Est itaq; o k maior quàm d k, cum sol ponatur super horizontem esse. Quare angulus contentus lineis d l, d x, maior exiſtet angulo contento lineis h n,h o. Angulus autem contentus lineis d l,d x,maior eſt quàm ducenteſima pars anguli recti, minor uero quàm una pars anguli recti diuiſi in centum quatuor & ſexaginta partes, Huic autem angulo æqualis eſt an-



gulus cui ſol accommodatur,qui uerticem habet in uiſu. Quare angulus contentus lineis h m,h o, minor eſt quàm una pars anguli recti,diuiſi in centum quatuor & ſexaginta partes: linea uero a b recta, minor eſt quàm linea quæ ſubtẽditur uni portioni circumferentiæ circuli a b n,diuiſę in ſexcentas ſex & quinquaginta partes. ambitus uero dictæ figuræ multorum angulorum,ad ſemidiametrum circuli a b c, minorem habet proportionem, quàm quatuor & quadraginta ad ſeptem: propterea quod cuiuſcunque figuræ multorum angulorum circulo inſcriptæ,ambitus habet ad ſemidiametrum proportionem minorem, quàm quatuor & quadraginta ad ſeptem. Noſti enim à nobis demonſtratum eſſe,cuiuſcunq; circuli circumferentiam maiorem eſſe,quàm triplam ſeſquioctauam diametri: minorem uero,quàm triplam ſeſquiſeptimam eiuſdem. Minorem uero habet proportionem b h ad h k, quàm undecim ad mille centum octo & quadraginta. Quare linea b a minor eſt, quàm centeſima pars lineæ h k. Ipſi uero b a æquatur diametros circuli e g. quoniam eius dimidia u a eſt æqualis k r, cum h k ſit æqualis ipſi h a,cum ſint perpendiculares ductæ ab eiſdem angulis iunctæ. Cõſtat igitur, diametrum circuli a b c minorem eſſe quàm centeſimam partẽ lineæ h k. & e h y angulus minor eſt diametro circuli a b g,cum d e f circulus ſit minor circulo e g. Minores igitur utræq; erunt h y,k ſ lineæ, q̃ centeſima pars lineæ h k. Quare h k ad y ſ minorem habet proportionem, quàm centum ad nouem & nonaginta. Et quoniam linea h k y minor eſt quàm h r,& linea ſ y minor linea d c: minorem igitur proportionem habebit h r ad d e, quàm centum ad nouem & nonaginta. Cũ uero h k r, d k t trianguli ſint rectanguli,latera k r,k t æqualia erũt: lineæ uero h r, d t inæquales: & angulus maior contentus lineis d t,d k,ad angulum contentum lineis

lineis h r,h k, maiorem habet proportionem, quàm h k ad d k: minorem uero, q̃ h r ad d t. Si enim sint duo trianguli rectanguli, & altera duorum laterum cõtinẽtia angulum rectum sint æqualia, altera uero inęqualia, maior angulus ex his qui eruntapud latera inæqualia, ad minorem habet maiorem proportionem, quàm maior linea subtensa angulo recto ad minorem subtentũ: & habet minorẽ, quàm maior linea earum quæ circa angulos rectos sunt ad minorem. Quare angulus cõtentus lineis d l,d x, ad angulum contentum lineis h n,h m, minorẽ habet proportionem, quàm h r ad d t: quæ minorem habet proportionem, quàm centũ ad nouem & nonaginta. Quare angulus contentus d l,d x lineis, ad angulum contentũ lineis h m,h o, minorẽ proportionem habet quàm centum ad nouem & nonaginta. Et quoniam angulus contentus lineis d l,d x, est maior quàm ducentesima pars recti, erit & angulus contentus lineis h m,h o maior quàm nouem & nonaginta partes anguli recti diuisi in uigintimilia partiũ. Quare maior est quàm una pars anguli recti diuisi in ducentas partes & tertia. Igitur b a maior est, quàm subtenta uni portioni circumferentiæ circuli a b c, diuisæ in partes quadringẽtas duodecim: ipsi uero a b æqualis est solis diametros. Constat igitur, diametrum solis maiorem esse latere figuræ, quæ sit mille angulis constituta.

Istis suppositis demonstrãtur & ista, uidelicet diametrum mundi minorem esse diametro terræ, quàm decies milies. Item diametrũ mundi minorem esse, quàm decies miles decem milia centies stadiorum. Quoniam igitur suppositum est, diametrum solis minorem esse diametro lunæ, quàm tricesies, & diametrũ terræ maiorem esse diametro lunæ: constat diametrũ solis minorem esse diametro terræ, q̃ tricesies. Rursus autem, quoniam ostensum est, diametrum solis maiorem esse latere figuræ quæ mille angulis constet, maximo mundi circulo inscriptæ: constat ambitum dictę mille angulorum figuræ diametrum solis minus quàm milies cõtinere. Solis autem diametros diametrum terræ minus quàm tricesies continet. Quare ambitus figuræ mille angulorum, diametrum terræ minus quàm tricesies milies continebit. Diametro uero mundi maior est quàm triplus. Nam ostensum est, diametrum cuiuscunq; circuli minorem esse tertia parte ambitus cuiuscunq; figuræ multorum angulorum circulo inscriptæ, quæ plus quàm sex lateribus constet: cum hexagono inscripto in circulo, diametros circuli est tertia pars ambitus ipsius hexagoni, erit ut diametros mundi diametrũ terræ contineat minus decies milies. Quod aũt diametros mundi minor sit decies milies decem milibus centies stadiorum, hinc cõstat. Quoniam enim supponitur, ambitum terræ maiorem esse quàm trecentorum decem milium stadiorum, & ambitus terræ maior est diametro quàm tripla, propterea quod cuiuscunq; circuli circumferentia est plus quàm tripla diametro, constat diametrũ terræ minorem esse quàm centies decẽ milia stadiorum. Quoniam autem diametros mundi diametrum terræ minus continet, quàm decies milies: constat diametrum mundi minorem esse quàm decies decem milia centies stadiorum. Circa distantiam igitur magnitudinũ hæc suppono. Verum de arena ista ponantur. Si fuerit aliqua magnitudo ex arena composita, quę non sit papauere maior, eius arenæ numerũ nõ maiorem decem milib. esse: & diametrum papaueris esse non minorem quadragesima parte digiti. Suppono autẽ hoc cõsiderans hoc modo: posita in regula tersa & leui fuerũt papauera in eadem linea recta constituta, aptata inter se, & trigintaquinq; papauera plus loci occupabant quàm digiti lõgitudo existat. Minorem itaq; diametrũ papaueris ponens statuo, ut sit pars quadragesima digiti, & nõ minor: uolens etiã per hęc nõ ambiguè, indubitatissimè demonstrare propositũ. Hæc aũt sunt quæ suppono. At uero utile esse arbitror, denominationes numerorũ enumerare, ut in his qui cõpositi sunt à me in libro quẽ ad Zeuxippũ scripsi, nõ curẽt qui hic legẽt, propterea quod nil hic præter ea quæ in eo libro dicta sunt, additũ habetur. Cõtingit aũt nomina nu

 merorum

merorum à nobis tradita in decẽ milib. collecta, & suprà decem milia perfectè, et satis intelligimus numerũ miliũ decem referentes eũ in reliquos superiores. Sunto itaque qui à nobis dicti sunt numeri in milies decem milia primi nominati. horum itaq; qui primi dicũtur decies milies decem milia, uocetur unitas eorum qui secundi sunt, & numerorum secundorum unitates, & unitatum decem, & centeni & milleni & decies milies erunt unitatum, quæ dicuntur decies milies decẽ milia: & itẽ decies milies decem milia secũdorum numerorũ, uocetur unitas tertiorũ numerorum, et numerentur tertiorum numerorum unitates, & unitatum deceni & centeni, & milleni, & decies milleni, erunt decies milies decem milium unitatũ dictarum. Eodem autem modo & tertiorum numerorum decies milies decẽ milia uocentur unitates quartorum numerorum: & decies milies decem milia quartorum numerorũ similiter uocenẽ unitates quintorũ numerorũ: et hoc modo procedentes numeri huiusmodi nomina habentes, erunt decies milies denorum milium decies milies decem milia. Sufficiũt quidem, & ex tantis hi numeri cognoscũtur. Licet autẽ & in plus producere. Sunto igiẽ hi qui nuper dicti sunt numeri primæ periodi uocati. Vltimus aũt numerus periodi unitas uocetur secundæ periodi primorum numerorum, & rursus decies milies decem milia secundę periodi secundorũ numerorũ: similiter et horũ ultimus unitas uocetur secũdę periodi tertiorum numerorum: & sic semper numeri procedentes nomina habeãt secũdæ periodi, erunt decies milies decem milia denorum milium decem milia decies milies. Rursus ultimus secũdæ periodi numerus decies milies decem milia uocetur unitas tertiæ periodi primorum numerorum decies milies decem milium. Et hoc modo procedentib. erũt decies milies denorũ milium decies milies dena milia decies milies decem milia. Istis hoc modo denominatis, erũt numeri ab unitate proportionales effecti. qui uero iuxta unitatẽ ad decẽ procedũt, hi octo primi cũ unitate primorũ decies milies decẽ miliũ uocatorũ erũt primi. Octo autem qui post eos sequũtur, numeri uocentur secundorũ, & alij eodẽ modo istis erunt synonymorũ uocati: & erũt distantiæ octoni decies milies denũ miliũ. Octauus enim numerus est milies dena milia, q secũdi octoni erit primus: quoniã decuplus est eius qui eũ præcedit, decies milies decẽ milia erit secundorũ numerorũ. hic aũt est unitas tertiarũ myriadũ. Constat igiẽ plures esse octoni, ut dictũ est. Cõfert aũt et hoc cognoscere, si sint numeri ab unitate proportionales, & quidã ex eadẽ proportionalitate sese multiplicauerint, q producẽ, erit ex eadẽ proportionalitate, tantũ distãs à maiore multiplicantiũ, quantũ minor multiplicantiũ ab unitate discesserit secundũ proportionalitatis rationẽ, & productus idẽ ab unitate in ordine proportionis distabit uno minus ex numero illo qui sit collectus ex duobus numeris, dictos multiplicãtes in ordine proportionis denominãtibus. Esto itaq; quotcũq; numeri ab unitate proportionales a b c d e f g h i k l: sit a unitas, & d multiplicet h, & proueniat q. Sumaẽ aũt in ea proportionalitate ex eo ordine unus, qui tãtos in ea proportione inter se & h habeat, quãti sunt inter d & unitatem, & hic sit l. Ostendendũ est, quod q est ęqualis ipsi l. Cum igiẽ sint proportionales, & totidẽ d distat ab unitate sicut l ab ipso h, eandẽ proportionẽ habet d ad unitatẽ, quã l ad ipsum h. Verũ d est multiplex unitatis secundũ seipsum d. igitur l erit multiplex ipsius h secundũ ipsum d. Quare l est æqualis ipsi q. Cõstat igiẽ, productũ esse ex eius proportionalitatis ordine unũ, & à maiore multiplicantiũ tãtis distabit, quãtis minor ab unitate discedit. Constat quoq; eum in ordine proportionis tantis ab unitate distare uno minus, quãtus est numerus ex numeris ordinis multiplicãtium collectus. nã a b c d e f g h tanti sunt, quantis h distat ab unitate. sed i k l uno paucio res, quàm quibus d distat ab unitate. Cum h ergo tanti erunt.

Istis ita dispositis, quibusdã suppositis, quibusdã demõstratis, id quod propositũ est demonstrabitur. Quoniã itaq; supponitur, diametrũ papaueris nõ esse mi

norem

norem quadrageſima parte digiti, conſtat ſphæram quæ diametrum digito æqua lem habeat, maiorem eſſe regione quã occupat papauer, ſexageſies quater milies. nam ipſa eſt ſecundum dictum numerum multiplex eius ſphęræ, quæ habeat dia metrum quadrageſimam partem digiti. Nam oſtẽſum eſt, quod ſphæra habet ad ſph æram proportionem diametro ſuæ ad diametrum alterius triplicatam. Quoniam aũt ſuppoſitũ eſt, numerũ arenæ ad magnitudinem papaueris nõ maiorem eſſe decem milibus, conſtat ſi arenæ ſphæra multiplicetur ad magnitudinem ſphęræ quæ diametrum digito æqualem habeat, nõ maior erit arenæ numerus quàm decies milies ipſe ſexageſies quater mille. Hic enim numerus eſt unitates ſex ſecundorum numerorum, & primorum myriades quatuor milia. Minor eſt igitur, quàm decem myriades ſecundorũ numerorũ. Sphęra uero quæ centum digitorũ diametrũ habuerit, ſphæræ quæ diametrum digitalem habuerit, multiplex eſt ad hæc centum myriadibus, quia habet ad aliam ſphæram proportionem ſuæ diametri ad diametrũ illius triplicatam. Si igitur ex arena fiat ſphæra, quæ habeat dia metrũ centum digitorũ, cõſtat quod minor erit arenæ numerus, ꝙ numerus ex decẽ unitatib. ſecũdorũ numerorũ, in centũ myriades ductis collectus. Quoniã aũt numerus decem unitatũ ſecundorũ numerorũ decimus eſt in ordine proportionis ab unitate, in decuplis quoq; centũ eſt proportionalis, centũ uero myriadũ numerus ſeptimus eſt ab unitate in eodẽ proportionis ordine, cõſtat quod factus inde ſextus erit ex eodẽ proportionis ordine ſextusdecimus ab unitate. Nam oſtenſum eſt, productũ uno paucioribus ab unitate diſtare, quàm ſint illi qui ex utroq; multiplicantiũ numero collecto notãtur. Ipſorũ uero ſexdecim octo primi ſimul cũ unitate primorũ uocati ſunt, reliqui uero poſt iſtos octo ſecundorũ, & eorũ ultimus eſt mille myriades ſecundorũ numerũ. Cõſtat igitur multitudinem arenæ, quæ habeat magnitudinẽ æqualẽ ſphæræ, cuius ſit diametros centũ digitorũ, minorẽ eſſe quàm mille myriades ſecundorũ numerorũ. Rurſus ſphæra quæ diame trum decem miliũ digitorũ habuerit, multiplex eſt ſphæræ habentis diametrum centum digitorũ myriadib. centũ. Si igitur fiat ſphæra ex arena tantã habens magnitudinẽ, quantã habet ſphæra cuius diametros eſt decem miliũ digitorũ, cõſtat numerũ arenæ inde prouenientem eſſe minorem quàm mille myridas ſecundorũ numerorũ multiplicatæ in centum myriades: quoniam mille myriades ſecundorum numerorum eſt ſextusdecimus ab unitate numerus in ordine proportionis, & centũ myriades eſt ſeptimus ab unitate in eodem eiuſdẽ proportionis ordine. Conſtat igitur, quod numerus inde factus erit uigeſimusſecundus ab unitate in eodem proportionis eiuſdem ordine. Iſtorum uero duorũ et uigintiprimi octo cũ unitate primorũ uocati ſunt: octo ſecũdi poſt illos ſecundorũ, reliqui uero ſex tertiorum uocabuntur, & eorũ ultimus eſt decem myriades tertiorũ numerorũ. Conſtat igitur arenæ multitudinẽ habentis magnitudinẽ æqualem ſphæræ, cuius diametros eſt decem milium digitorũ, minorẽ eſſe quàm decem myriades tertiorum numerorum. & quoniã ſphæra, cuius diametros æqualis ſtadio, eſt minor ſphæra, quæ habeat diametrum decem milium digitorũ: conſtat arenæ multitudinem habentis magnitudinem æqualem ſphęræ cuius diametros eſt æqualis ſtadio, minorem eſſe quàm decem myriades tertiorũ numerorũ. Rurſus ſphęra quæ diame trum habet centum ſtadiorum, multiplex eſt ſphæræ habentis diametrum unius ſtadij centum myriadibus. Si igitur fiat ſphæra ex arena, quæ tantam habeat magnitudinẽ quantã habeat ſphæra cuius diametros eſt centum ſtadiorum: conſtat eius arenæ numerum minorem eſſe numero qui fit multiplicatis decem myriadibus tertiorum numerorum per centũ myriadas. Et quoniam tertiorum numerorum decem myriades uigeſimus ſecundus eſt ab unitate in uno proportionis ordine, centum uero myriades ſeptimus eſt ex eodem eiuſdem proportionis ordine: conſtat collectum inde numerum fore uigeſimumoctauum ab unitate in eodem

eiuſdem

eiusdem proportionis ordine. Horũ aũt uigintiocto numerorum primi octo cum unitate primorum uocati sunt, secundi octo post illos secundorum, tertij octo tertiorum, & reliqui quatuor quartorum uocabuntur, & eorum ultimus est mille unitates quartorum numerorum. Manifestum est igitur, arenæ multitudinem, cuius magnitudo fuerit æqualis, sphæræ habenti diametrum centum stadiorum, minorē esse quàm mille unitates quartorũ numerorum. Rursus sphæra habens diametrum decem milium stadiorum, multiplex est sphęræ habentis diametrũ centũ stadiorum centum myriadibus. Si igitur fiat ex arena sphæra, habens tantam magnitudinem, quantam habet sphæra cuius diametros est decem milium stadiorũ, constat huius arenæ multitudinem fore minorem numero producto ex mille unitatibus quartorum numerorum per centum myriadas multiplicatis. Quoniam enim quartorum numerorum mille unitas est uigesimusoctauus ab unitate in eodem eiusdem proportionis ordine: constat productum inde numerũ fore in eodem eius proportionis ordine tricesimũquartum: horum uero quatuor & triginta numerorum primi octo cum unitate primorum uocati sunt, secundi octo post illos secundorum, tertij octo tertiorum, & quarti octo quartorum, & reliqui duo erunt quintorum: quorum ultimus erit decem unitates quintorum numerorum. Constat igitur arenæ multitudinem habentis magnitudinem æqualem sphæræ, cuius diametros est decem milium stadiorum, minorem fore, quàm decem unitates quintorum numerorum. Rursus sphæra quæ habeat diametrum centum myriadibus stadiorum æqualem, multiplex est sphæræ habentis diametrum decē milium stadiorum. Si igitur fiat ex arena sphæra, habens tantam magnitudinē, quãtam habet sphæra cuius diametros est centum myriadum stadiorum, constat numerũ arenæ istius minorem fore eo numero, qui producitur ex decem unitatibus quintorum numerorum, per centum myriadas multiplicatis. nam quia decem unitates quintorum numerorum est tricesimusquartus proportionalis ab unitate, & centum myriades est septimus ab unitate in eodem eiusdem proportionis ordine, constat numerũ inde productũ, ex eodem eiusdem proportionis fore quadragesimum ab unitate: horum uero quadraginta primi octo cum unitate primorũ uocati sunt, secundi post illos octo secundorum, tertij octo tertiorum, quarti octo quartorum, & quinti octo quintorum numerorum, & eorum ultimus est mille unitates quintorum numerorum. Constat igitur multitudinem arenæ, cuius magnitudo fuerit æqualis sphęræ habenti diametrum centum myriadas stadiorum, minorē esse quàm mille unitates quintorum numerorum. Sphæra uero quæ diametrum habeat decies mille myriadas stadiorum, multiplex est sphæræ, cuius diametros est centum myriades stadiorum centum myriadibus. Si aũt fiat sphæra ex arena, tantam habens magnitudinem, quãtam habet sphæra cuius diametros est decies mille myriades stadiorum, manifestum est, quod eius arenæ multitudo minor erit numero qui producetur ex mille unitatib. quintorum numerorum, multiplicatis per centum myriadas. Nam cum mille unitates quintorum numerorum sit quadragesimus ab unitate proportionalis, & centum myriades sit septimus ab unitate in eodem eiusdem proportionis ordine, manifestũ est, numerũ inde productum fore quadragesimũsextum ab unitate proportionalem: horũ sex & quadraginta numerorum, octo primi cum unitate primorum uocati sunt, octo secũdi post illos secundorũ, octo post secundos tertiorum, octo post tertios quartorum, octo post quartos quintorum, reliqui post quintos sextorum sunt uocati, & eorũ ultimus est decem myriades sextorum numerorum. Constat igitur arenæ multitudinem, quæ magnitudinem habeat æqualem sphæræ, diametrum habenti decem milium myriadum stadiorum, minorē esse ꝙ decem myriades sextorũ numerorũ. Sphæra uero, quæ diametrũ habeat stadiorũ centũ myriadas myriadũ, multiplex est sphæræ habenti diametrũ decē miliũ myriadũ stadiorũ centũ myriadibus. Si igi-

igitur fiat sphæra ex arena, quæ magnitudinem habeat tantam, quantam habet sphæra cuius diametros est centum myriades myriadum stadiorum: constat huius arenæ numerum minorē fore numero producto ex decē myriadib. sextorū numerorum, per cētum myriadas multiplicatis. Nam quoniā decē myriades sextorum numerorum, quadragesimus sextus est ab unitate proportionalis, & centū myriades septimus in eodem eiusdem proportionis ordine ab unitate, constat numerum inde productum fore quinquagesimum secundum, ab unitate in eodem eiusdem proportionis ordine. Horum aūt duorum & quinquaginta octo, primi cum unitate primorum uocati sunt, octo secundi post primos secundorum, octo deinde tertij tertiorum, octo quarti quartorum, octo quinti quintorum, octo sexti sextorum. reliqui uero quatuor, septimorum uocabuntur: quorum ultimus est mille unitates septimorum numerorum. Constat igitur arenę dictæ multitudinē, quæ habeat magnitudinem æqualem sphæræ habenti diametrum centum myriadas myriadum stadiorum, minorē esse ꝙ mille unitates septimorū numerorum. Cum itaq; ostensum sit, diametrum mundi minorem esse centum myriadib. myriadum, constat multitudinē arenæ habentis magnitudinem æqualem mundo, minorem esse mille unitatibus septimorum numerorum. quod quidem propositum fuerat. Quemadmodum autem probatum est, arenæ multitudinē, quæ fuerit æqualis mūdi, illi qui à plurimis Astrologis positus est, minorē esse mille unitatibus septimorū numerorum: similiter ostēdetur, multitudinē arenę magnitudinē habentis æqualem sphæræ tātæ, quantā Aristarchus supponit esse sphærā stellarum fixarum, esse minorem ꝙ mille myriades octauorū numerorū. Quoniā enim supponit, terrā habere proportionē illā ad mūdū à nobis dictū, quā habet dictus mūdus ad sphærā stellarū fixarū, quā Aristarchus supponit: & diametri sphęrarū eādem habent inter se proportionē: & ostensum est diametrū mundi minorē esse diametro terræ, ꝙ decies milies: constat diametrū sphęræ stellarū fixarum minorē esse, ꝙ decies milies diametrū mūdi. Quoniā uero sphæræ habēt inter se proportionem diametrorum suarū triplicatā, manifestum est sphæram stellarum fixarū quā Aristarchus ponit, minorē esse ꝙ decies milies decē milia mundos. Ostēsum uero est multitudinē arenę, habētis magnitudinē æqualem mūdo, minorē esse, ꝙ mille unitates septimorū numerorum. Manifestum est igit̄, quod si fiat sphæra ex arena, tantā habens magnitudinē, quantā habere ponit Aristarchus sphęrā stellarum fixarū, huius arenæ numerus minor erit eo numero qui producitur ex mille unitatib. septimorum numerorū, multiplicatis per decē milia decies milies myriadas. Nam quoniam mille unitates septimorum numerorū est quinquagesimus secundus ab unitate proportionalis, & decem milia decies milies myriades est tertiusdecimus ab unitate proportionalis in eodē eiusdem proportionis ordine sumptus, constat productum inde numerum fore sexagesimūquartū ab unitate, proportionalem ex eodem eiusdem proportionis ordine: iste uero est octauorū octauus, & quinq; myriades octauorū numerorū. Cōstat itaq; quod multitudo arenę magnitudinē habentis æqualem sphæræ stellarum fixarū, quam Aristarchus ponit, minor est ꝙ mille myriades octauorū numerorū. Hæc aūt rex Gelon, ꝙ plurimis quidē qui in disciplinis uersati non sunt, non admodū creditū iri arbitror: illis uero qui disciplinis imbuti sunt, & circa distātias & magnitudines terræ, & solis, & lunæ, totiusq; mundi sanam institutionē acceperunt, credibilia prorsus propter demonstrationem uidebuntur. Quare nonnullos existimarim ad hæc inspicienda nullo pacto posse accommodari.

FINIT ARCHIMEDIS RATIO
de Arenæ dimensione.