ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑ
ΛΩΝΙΤΟΥ ΕΙΣ ΤΑ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ
καὶ κυλίνδρου, καὶ τὰ ἄλλα, ὑπομνήματα.

EVTOCII ASCALONITAE IN AR-
CHIMEDIS LIBROS DE SPHAERA ET
cylindro, atq; alios quosdam, Commentaria, nunc primum &
Græce & Latine in lucem edita.

Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio,
ad quinquennium.

BASILEAE,
Ioannes Heruagius excudi fecit.
An. MDXLIIII.

MAGNIFICO DOMINO SEVERINO BONERO A BALITZ, IN CAMIENETZ AC OGRODZENETZ HÆREDI, CASTELLANO BYERENSI,

Burgrauio Zuppario, ac magno Procuratori Cracouiensi, &c. Domino & patrono suo obseruandissimo, Thomas Venatorius sese commendat.

Omnes, qui ad summos honestarum artium gradus usque ascendere student, ordinis cum primis rationem ut habeant, contendunt: quòd nimirū contempta ordinis ratione, omnia passim confundi sit necesse. Non minus autem in literarum studijs, quàm in alijs rebus uniuersis, ipsa parens rerum, ordinē esse uoluit, Natura. Vt enim à summo tecto domum ædificare qui cœperit, neglecta fundamenti ratione, frustra & oleum, quod autem, & operam insumit: sic qui ueræ philosophiæ campos spaciosissimos ingressi, unius duntaxat agri floribus contenti, pedes sistunt, nec ipsam segetem ac messem integrè legerint, aut saltem apis in morem degustauerint, doctos inter uerè quomodo recenseri possint, non equidē uideo. Sed ad hæc gradatim, suspensisque interim pedibus concedendum esse, iampridem à maioribus nostris accepimus. Neque temere sibi quisquam docendi prouinciā usurpet hac in parte, quòd periculo non caret doctor. Non rarò enim arrogantia comitatur doctorem, sæpe etiam sui complacētia, Græcis φιλαυτία uocata. Quæ duo, maxime ubi doctoris animum occuparint, ipsum statim non tam periculo uanæ gloriæ, quàm ludibrio uulgi exponere consueuerunt. Discipulus etsi abiectus uideatur mundo, ipsum tamē quia humilitas animi commēdat Deo, securè & extra periculum ambulat. Et quidem hæc omnia, ut ordinis decorum, siue ut Græci loquuntur, τὸ καλὸν καὶ τὸ πρέπον, à nostris studijs minime cupiam excludi, sed potius constantissimè seruandam esse nobis moderationem illam in decoro ordinis, quæ & ipsa à Græcis ob id uocatur εὐταξία. Et recte profectò hæc ita esse à doctis censentur. In elementis enim, ubi ordinis ratio sibi minus constare contigerit, sequi uidemus in aëre fulmina, in terra commotiones, in mari inundationes: denique contempto ordine, experimur in urbibus & familijs seditiones, in corporibus ægritudines: & ut uno uerbo comprehendam multa, in animabus nostris regnabunt peccata. Cum tanta sit in rerum omnium natura, illa ordinis obseruatio, in rectis studijs absoluendis cur ordinis ratio à nobis conturbaretur? Conturbaretur autē, si secus quàm à fundamentis ad summa contenderemus. Neque enim sacrum illum omniū disciplinarum circulū absoluerit unquā, qui minutas aliqui fastidiēs, summas tantum assequi conatur artes. Ad summa cōtemplanda, nisi per

gradus quoſdam, non admittitur animus. Senſiſſe hoc idem Plato uide-
tur, cum ueſtibulo Scholæ ſuæ inſcriberet, Ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Qua
uticꝫ ſententia ſignificare uoluit, inutiles eſſe ad percipiendas liberales diſci
plinas, qui nulla Muſices præſertim, & Geometriæ principia poſuiſſent.
nempe quòd hæ diſciplinæ, imagines rerũ, quæ humanis ſaltem ſtudijs
capi poſſunt, oculis mundi ſubijcere & poſſint & ualeant. Ipſa certè γεωμε-
τρία mentem noſtram, ſuo ordine quàm longiſſimè tandem à rebus cadu
cis abducit, ut iam non in terra infernè, ſed cœlo potius ſupernè, inhęrere
cupiat, ac rebus ipſis delectari, quæ ut ſummè bona ſunt, ita nullam un-
quam permutationem admittũt. Quid quod magna pars Sacræ ſcriptu
ræ obſcura nobis erit, niſi Geometrica proportione expendat ea pius le-
ctor. Templi Hieroſolymitani fabrica, nonne maxima cura & diligentia
traditur? quæ omnia, niſi Geometrica proportione ſeruata, imparati &
inculti uulgi cognitionem remorentur oportet. Præter alia, quanto ſtu-
dio præcipit diuinus ſermo, de conſtruendis columnis? adeò ut omnia
Geometrica ratione conſtarent, ſtylobaſtagmata, baſes quocꝫ, & ſpiræ:
ſcapus deinde, ac plinthus ipſa qualis eſſe deberent, cum ipſis cymacijs,
faſcijs, ſcotijs, ſtrijs, canaliculis, epiſtilijs, quæ omnia quàm longa &
lata, quàm alta & profunda eſſent, per Geometricas rationes ſpiritus di-
uinus ſapientiſſimè commonſtrauit: quæ res animum hominis non tan-
tum in admirationem, ſed etiam in cognitionem Opificis rerum, induce-
re equidem euidentiſſimè queant. Claruit in hiſce diſciplinis apud Syra-
cuſas olim Archimedes, qui neſcias an doctior, an patriæ ſalutis fuerit a-
mantior. Is quia ſcripſerat quædam, quæ acutiora cum eſſent, quàm ut ru
des ſtatim capere poſſent, Eutocius Aſcalonita, homo ſua tempeſtate ut
doctus, ita ingenio fœcũdus et fuit, & habitus eſt ab omnibus, ut iam nõ
immerito de eo dixerit quidam, εὔτεκνος ὅσιν ὄνομα αὐτοῦ. Verè enim eſt fœcũ
dus in omnibus illis explanãdis, in quibus obſcurior alioqui uideri pote
rat Archimedes. Eius ſcripta uiri, nunquam antehac in lucẽ edita, ſub tui
nominis potiſſimũ tutela publicare placuit: cũ quòd dignus tu quidem
es, cuius uirtuti hæc quocꝫ laus accedat, ut nominis tui fama, per ſe profe
ctò clariſſima, acceſſione tanti ſcriptoris longè reddatur clarior: tũ quòd
mei erga te, atcꝫ adeò erga familiã tuã uniuerſam, ſynceri palàm argumẽ-
tũ extaret amoris. Habes rationẽ huius facti mei. Soleo enim nõ infrequẽ
ter admirari, in magnis rebus obeundis prudentiã tuam, in periculis pro
pulſandis animi fortitudinẽ, fidem in promiſſis, induſtriã & ingenij acri
moniã in conſilijs, in conficiundis autẽ negocijs celeritatẽ. Quæ cum ue-
rè excellẽtes ſint in uno homine, uirtutes, niſi à doctiſsimo quopiã, pro
dignitate explicari nõ poſſunt: eas in præſentia attigiſſe ſaltẽ, mihi uiſum
eſt ſatis. Itaque uiue diu fœlix, æuo ſuperante Sibyllas, annisꝗ annoſum
Neſtora uince. Vale. ex Norimberga, ad Calend. Ianuarij. An-
no Salutis noſtræ MDXLIIII.

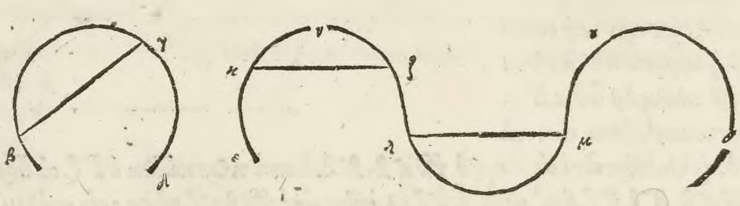
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ, ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Εἰς τὰ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀρχιμήδους οὐδένα τῶν πρὸ ἡμῶν ἀξίαν εὑρὼν σύνταξιν καταβεβλημένον. καὶ κατανοήσας μὴ δεῖ δυνάμειαν τῶν θεωρημάτων τούτων παροραθῆναι, ἐπιστάσεως γὰρ ἀκριβοῦς, ὡς ἴστε, καὶ εὐεπιβόλου δεῖται φαντασίας, ὠρέχθην κατ' ἐμὴν δύναμιν σαφῶς ἐκθέσθαι τὰ ἐν αὐτοῖς † θεωρήματα, προαχθεὶς μᾶλλον εἰς τοῦτο τῷ μηδένα πωκα θεῖναι εἰς ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, ἢ διὰ τὴν δυσκολίαν ὀκνήσας, καὶ ἅμα τὸ σωκρατικὸν λογισάμενος, ὡς τοῦ θεοῦ συλλαμβάνοντος πάνυ εἰκὸς καὶ ἐπὶ τέλους ἡμᾶς τῆς σπουδῆς ἐλθεῖν. ἐκ τριῶν δὲ διανοηθείς, ὡς εἴ τι καὶ πταιόμενος διὰ νεότητα φθέγξομαι τοῦτο ὑπὸ τῆς σῆς περί τε τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν ἐπιστημονικῆς θεωρίας, καὶ διαφερόντως περὶ τὰ μαθήματα ἐπανορθώσεως τεύξεται, ἀνέθηκά σοι κράτιστε φιλοσόφων ἀμμώνιε. πρέπον δ' ἂν σοι τῇ ἐμῇ σπουδῇ συνάρασθαι. καὶ εἰ μὲν ἀνεμιαῖον δόξῃ τὸ γράμμα, αὐτόθεν μὴ δὲ εἰς ἄλλον ἐλθεῖν συγχωρήσῃς. εἰ δὲ τοῦ σκοποῦ μὴ πάντῃ διαμαρτάνον, δήλωσον ἣν ἔχει περὶ αὐτοῦ γνώμην, ὡς εἴγε τῇ ὑμετέρᾳ κρίσει βεβαιωθῇ, πειράσομαι καὶ ἄλλο τυχὸν τῶν ἀρχιμηδείων συντάξεων ἑρμηνεῦσαι.

† δυσθεώρητα

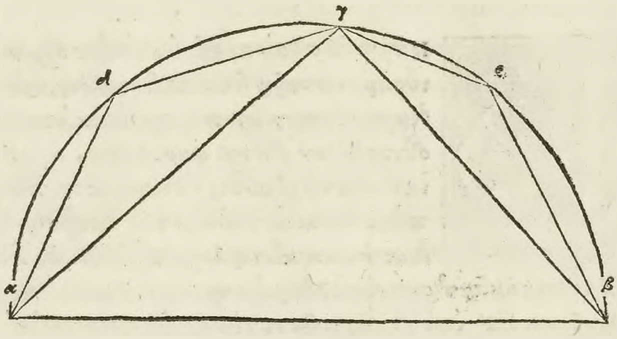
ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ.

Προειπὼν τὰ μέλλοντα ἐκτίθεσθαι ὑπ' αὐτοῦ θεωρήματα, τοῦ συνήθους πᾶσι γεωμέτραις ἐν τῇ ἐκθέσει τηρῶν τάς τε ὀνομασίας αἷς αὐτὸς κατ' ἐξουσίαν ἐχρήσατο, καὶ τοὺς ὅρους τῶν ὑποθέσεων, καὶ αὐτὰς τὰς ὑποθέσεις διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ συγγράμματος διασαφῆσαι βούλεται. καὶ φησὶν πρῶτον εἶναί τινας ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς, αἵ τινες τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν εὐθειῶν ἢ πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. σαφὲς δ' ἂν εἴη τὸ λεγόμενον, εἰ γνωσόμεθα τίνας καλεῖ τὰς ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς. ἰστέον οὖν ὅτι καμπύλας γραμμὰς καλεῖ οὐχ ἁπλῶς τὰς κυκλικάς, ἢ κωνικάς, ἢ ἄκλαστον ἐχούσας τὴν συνέχειαν, ἀλλὰ πᾶσαν ἐν ἐπιπέδῳ γραμμὴν παρὰ τὴν εὐθεῖαν, καμπύλην ὀνομάζει. μίαν δὲ γραμμὴν ἐν ἐπιπέδῳ τὴν ὁποσοῦν συναπτομένην, ὥστε κἂν ἐξ εὐθειῶν σύγκειται ✱ τῇ α β γ δ. ἀλλ' ἐπειδὴ ὡς καὶ ἀνωτέρω εἴρηται, καμπύλας γραμμὰς οὐ τὰς περιφερεῖς μόνον καλεῖ, ἀλλὰ καὶ τὰς ἐξ εὐθειῶν συγκειμένας, ἐκ δὲ τούτων κἂν ἡ ἐπιλογὴ τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλων, ἐνδεχόμενον ἂν εἴη λαβεῖν ἐπί τινος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης γραμμῆς δύο τυχόντα σημεῖα, ὥστε τὴν ἐπ' αὐτὰ ἐπιζευγνυμένην εὐθεῖαν, ἐπὶ μηδέτερα μὲν μέρη πίπτειν τῆς γραμμῆς, ἐπ' αὐτὴν ἐφαρμόζειν.

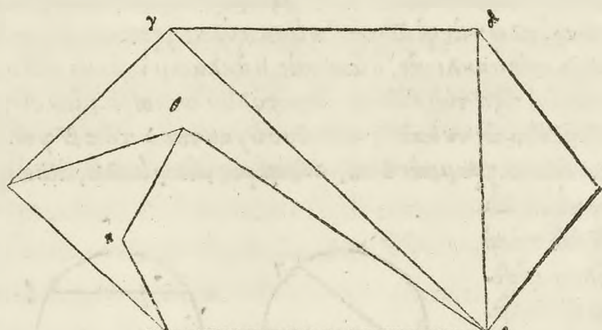


διό φησιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην καλεῖν γραμμήν, ἐν ᾗ αἱ διὰ δύο ὁποιωνοῦν σημείων ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πίπτουσιν τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς. ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μέρη οὐδὲ μία. ταῦτα δὲ αὐτὰ ἔξεστιν ἐπινοεῖν καὶ ἐπὶ ἐπιφανειῶν.

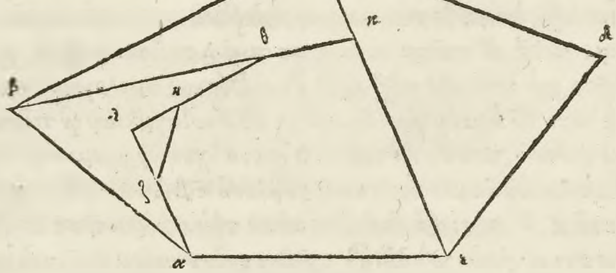
Εἶτα ἑξῆς ὀνομάζει τομέα στερεόν, καὶ ῥόμβον στερεόν, σαφῶς ἐμφανίζων τὴν ἔννοιαν τῶν ὀνομάτων. μετὰ δὲ ταῦτα αἰτήματα τινὰ λαμβάνειν ἀξιοῖ, χρησιμεύοντα αὐτῷ εἰς τὰς ἑξῆς ἀποδείξεις, καὶ ὄντα μὲν κατ' αὐτῆς τῆς αἰσθήσεως ὡμολογημένα, οὐδὲν δὲ ἧττον δυνατὰ καὶ ἀποδειχθῆναι ἔκ τε τῶν κοινῶν ἐννοιῶν, καὶ ἐκ τῶν δεδειγμένων ἐν τοῖς στοιχείοις. ἔστι δὲ πρῶτον αἰτημάτων τὸ τοιόνδε, πασῶν τῶν ταὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. ἔστω γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ εὐθεῖα μὲν τις πεπερασμένη ἡ α β, ἑτέρα δέ τις γραμμὴ ἡ α γ β. τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσα τὰ α, β. φησὶ δὴ δεδόσθαι αὐτῷ τὴν α β ἐλάττονα εἶναι τῆς α γ β. λέγω οὖν, ὅτι τοῦτο ἀληθὲς ᾐτήσατο. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς α γ β, τυχὸν σημεῖον τὸ γ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, γ β. φανερὸν δή, ὅτι αἱ α γ, γ β τῆς α β μείζους εἰσί. πάλιν δὴ εἰλήφθωσαν ἐπὶ ταῖς α γ β γραμμαῖς ἄλλα τυ-γωνίας σημεῖα τὰ δ, ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δγ, γε. ὁμοίως δὴ καὶ ἐνταῦθα δῆλον, ὅτι δύο μὲν αἱ αδ, δγ τῆς αγ μείζους εἰσί. δύο δὲ αἱ γε, εβ τῆς γβ. ὥστε αἱ αδ, δγ, γε, εβ πολλῷ μείζους εἰσὶ τῆς αβ. ὁμοίως δὴ κἂν ἄλλα σημεῖα λαβόντες μεταξὺ τῶν εἰλημμένων ἐπιζεύξωμεν ἐπὶ τὰ νῦν ληφθέντα, εὐθείας εὑρήσομεν αὐτὰς ἔτι μείζους τῆς αβ. καὶ τοῦτο συνεχῶς ποιοῦντες τὰς μᾶλλον συνεγγιζούσας τῇ αγβ γραμμῇ, εὐθείας ἔτι μείζους εὑρήσομεν. ὥστε ἐκ τούτου συμφανὲς ἐστιν, αὐτὴν τὴν γραμμὴν μείζονα εἶναι τῆς αβ, δυνατοῦ ὄντος καὶ ἐπὶ παντὸς αὐτῆς σημείου ἐπιζεύξαντας εὐθείας λαβεῖν ἐξ εὐθειῶν συγκειμένην τὴν οἱονεὶ αὐτὴν οὖσαν γραμμὴν, μείζονα δεικνυμένην διὰ τῶν αὐτῶν τῆς αβ. οὐ γὰρ ἄτοπον ἐν ταῖς τῶν ὁμολογουμένων ἀποδείξεσι καὶ τοιαύτας ἐννοίας προλαβεῖν.



Μετὰ δὴ τοῦτο φησὶν, λαμβάνειν καὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐκείνας ἀνίσους εἶναι, τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας οὔσας, κατὰ τὸν ἀνωτέρω εἰρημένον τρόπον. οὐ μόνον δὲ ἤρκεσεν εἰς τὸ ἀνίσους εἶναι τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν, ἢ ὅλην περιλαμβάνῃ. ἢ μέρος μὲν περιλαμβάνῃ, μέρος δὲ καὶ κοινὸν ἔχῃ, καὶ μείζονα εἶναι τὴν περιλαμβάνουσαν τῆς περιλαμβανομένης. νενοήσθωσαν γοῦν πρὸς τὸ καὶ τοῦτο κατάδηλον γενέσθαι, ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμαὶ αἱ αβγδεζ, καὶ αηθζ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ αζ. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ ἔτι περιλαμβανομένη ὅλη ἡ αηθζ ὑπὸ τῆς αβγδεζ γραμμῆς, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐταῖς, τῆς αζ εὐθείας. φημὶ δὴ ὅτι καὶ ἄνισοι εἰσὶν αἱ προκείμεναι γραμμαί. καὶ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα. ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ βθ, γζ, δζ. ἐπεὶ οὖν ἐὰν νοηθῇ ἐπιζευγνυμένη ἡ θα, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ αβθ, ἐντὸς συνισταμέναι εἰσὶ αἱ αη, ηθ. καὶ ἐλάττους εἰσὶ αἱ αη, ηθ τῶν αβ, βθ. κοινὴ προσκείσθω ἡ θζ. αἱ ἄρα αη, ηθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν αβ, βθ, θζ. ἀλλ' αἱ βθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν βγ, γζ. ἐντὸς γὰρ πάλιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ βγζ συνεστάμεναι εἰσί. πολλῷ ἄρα αἱ αβ, βγ, γζ τῶν αη, ηθ, θζ. μείζους εἰσίν. ἀλλὰ τῆς γζ μείζονες αἱ γδ, δζ. τῆς δὲ δζ, αἱ δε, εζ. ἔτι πολλῷ ἄρα αἱ αβγ, δεζ μείζους εἰσὶ τῶν αηθζ.



Σαφηνείας δὲ χάριν ὑποκείσθωσαν καὶ ἕτεραι γραμμαὶ ὁμοίως ταῖς προειρημέναις, ὡς αἱ αβγδε, αζηθκε. λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ περιλαμβάνουσα. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ αζ, ηθ, ἐπὶ τὸ λ. ἐπεὶ οὖν πάλιν δύο αἱ ζλ, λη μείζους εἰσὶ τῆς ζη, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αζ, ηθ. αἱ ἄρα αλ, λθ μείζους εἰσὶ τῶν αζ, ζη, ηθ. ἀλλ' αἱ αλ, λθ, ἐλάττους τῆς αβθ, πολλῷ ἄρα αἱ αβθ μείζους τῆς αζηθ.

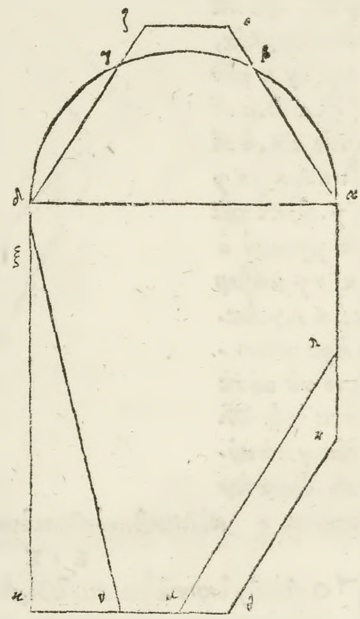


κοινὴ

κοινὴ προσκείσθω ἡ θκ. μείζους ἄρα αἱ αβ θκ τῶν αζη θκ. ἀλλ' αἱ βθκ ἐλάττους τῶν βγκ. πολλῷ ἄρα μείζους αἱ αβγκ τῆς αξηθκ. κοινὴ προσκείσθω ἡ κε. αἱ ἄρα αβγκε μείζους τῆς αζηθκε. ἀλλ' αἱ γκε ἐλάττους τῶν γδε, πολλῷ ἄρα αἱ αβγδε μείζους εἰσὶ τῶν αζηθκε.

Κἂν περιφέρειαι δὲ ὦσιν, ἤτοι αἱ περιλαμβάνουσαι, ἢ αἱ περιλαμβανόμεναι, ἢ καὶ ἀμφότεραι, τὸ αὐτὸ ἔνεστι νοεῖν. συνεχῶν γὰρ σημείων ἐπ' αὐτῶν λαμβανομένων, καὶ ἐπὶ αὐτὰ ἐπιζευγνυμένων εὐθειῶν, ληφθήσονται γραμμαὶ ἐξ εὐθειῶν συγκείμεναι, ἐφ' ὧν ἁρμόσῃ ἡ προειρημένη ἀπόδειξις τῆς ἐξ εὐθειῶν συγκειμένων, οἷον αὐτῶν γινομένων τῶν προτεθεισῶν, διὰ τὸ καὶ πᾶσαν γραμμὴν κατὰ συνέχειαν σημείων τὴν ὕπαρξιν ἔχουσαν † νοείσθω. ὅτι δὲ εἰκότως τὴν ἀνισότητα τῶν γραμμῶν οὐ μόνον τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι ἐχαρακτήρισεν, ἀλλὰ καὶ † ἔθηκεν τὸ καὶ δεῖν περιλαμβάνεσθαι τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδὲ τὸ ἀνίσους εἶναι τὰς γραμμάς, πάντη ἀληθὲς ὑπῆρχεν, ὡς ἔστι κατανοῆσαι ἐκ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν. ἡ γὰρ αβγδ γραμμή, καὶ ἡ αεζδ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι εἰσί, καὶ ἄδηλον ὁποτέρα αὐτῶν μείζων ἐστί. δυνατὸν γὰρ καὶ ἴσας εἶναι. δυνατὸν δὲ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἑτέραν νοεῖν, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσας ἀμφοτέρας, κατ' ἐναντίαν δὲ θέσιν ἀλλήλαις κειμένας, ὡς ὁποτέρα τῶν εἰρημένων τῇ αηθκδ. καὶ οὕτως γὰρ ἄδηλος, ἥτε ἰσότης καὶ ἀνισότης αὐτῶν. διὸ καλῶς πρόκειται, τοῦτο δεῖν ἢ ὅλην τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας περιλαμβάνεσθαι, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας. ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνεσθαι, τινὰ δὲ καὶ κοινὰ ἔχειν, ὡς ἐπὶ τῶν αηθκδ, καὶ αλμνξδ. ἐπὶ γὰρ τούτων τινὰ μὲν περιλαμβάνεται, τινὰ δὲ κοινά ἐστι, ὡς τὰ αλ, μν.

† νοεῖσθαι
† ἐπέθηκεν

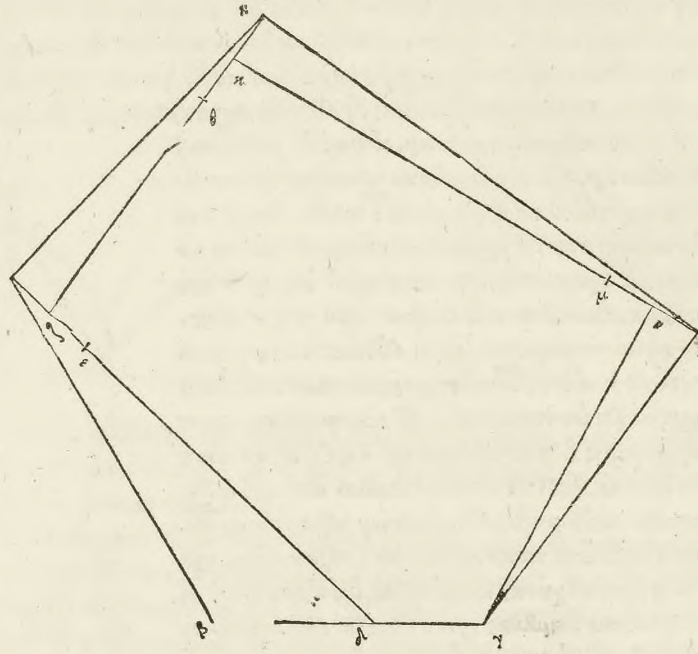


Δεόντως δὲ πάνυ κἀκεῖνο πρὸς κρίσιν τῆς ἀνισότητος παρελήφθη, τὸ δεῖν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τὰς γραμμάς. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδ' ἂν περιλαμβάνοιντο ὑπ' ἀλλήλων, οὐδὲ οὕτως ἄνισοι εἰσί, ἀλλ' ἐνίοτε ἴσαι. ἢ καὶ ἡ περιλαμβανομένη μείζων. ὅπερ ἵνα σαφῶς γένηται, νενοήσθωσαν ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβγ, ἀμβλεῖαν τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν περιέχουσαι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, αγ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ αδ τῆς αβ, κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε. καὶ τετμήσθω ἡ αε δίχα κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ αζγ τῆς αγ μείζους εἰσί, ἴση δὲ ἡ αζ τῇ ζε. καὶ αἱ εζγ ἄρα τῆς αγ μείζους εἰσί, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αβ, δε. αἱ ἄρα δζγ τῶν βαγ μείζους εἰσίν. ὥστε μιᾶς γραμμῆς νοουμένης τῆς βαγ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης. ἑτέρας δὲ τῆς δζγ περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἑτέρας, μὴ ἐχούσης δὲ τὰ αὐτὰ πέρατα, οὐ μόνον ὅτι οὐ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων ἐδείχθη.

Καὶ ἐπὶ γραμμῶν δὲ ἐκ πλειόνων εὐθειῶν συγκειμένων τὸ αὐτὸ ἔστι θεωρῆσαι. νενοήσθωσαν γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἐπεζευγμένη ἡ αδ. πάλιν δὴ κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε. καὶ ἡ εα δίχα τετμήσθω τῷ ζ. καὶ τῇ αδ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ αη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. καὶ κείσθω τῇ αη ἴση ἡ ζθ. καὶ πάλιν δίχα τετμήσθω ἡ θκ κατὰ τὸ

κ,

κ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ζη ἤχθω ἡ ηλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κλ. καὶ πάλιν τῇ ηλ ἴση ἡ ημ. καὶ δίχα τετμήσθω ἡ μλ τῷ ν. καὶ πάλιν πρὸς ὀρθὰς τῇ κδ ἤχθω ἡ λγ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ νγ. φανερὸν οὖν διὰ τὰ προδεδειγμένα, ὅτι μείζων ἡ μὲν δζ τῆς αβ, ἡ δὲ ζκ τῆς αη, ἡ δὲ κν τῆς ηλ, ἡ δὲ νγ τῆς λγ. ὥστε καὶ ὅλη ἡ γραμμὴ ἡ δζκνγ μείζων τῆς αβηλγ. καλῶς ἄρα προσετέθη τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τῶν ἀνίσων. τὰ αὐτὰ δὲ δυνατὸν ἐπινοοῦντα * αἱ λαμβανόμεναι ἐπιφάνειαι τὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδοις.

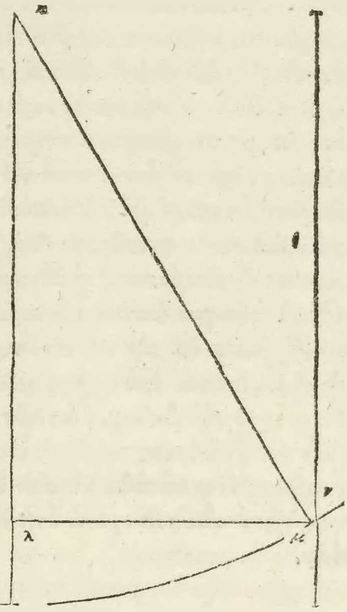


ΕΙΣ ΤΟ Β ΘΕΩΡΗΜΑ.

ΤΟ δὴ αγ ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ δ, δηλαδὴ ὡς τοῦ αβ, ἤτοι ἐπιμορίου ἢ ἐπιμέρους τυγχάνοντος τοῦ δ. εἰ δὲ εἴη τὸ αβ τοῦ δ, ἤτοι πολλαπλάσιον ἢ πολλαπλασιεπιμόριον, ἢ καὶ πολλαπλασιεπιμερές, ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ αβ, ἴσου τῷ δ τοῦ βγ, τὸ λοιπὸν τὸ γα ὑπερέξει τοῦ δ. ὥστε μηκέτι πολλαπλασιάζεσθαι αὐτό, ἀλλὰ αὐτόθεν δεῖν τῷ αγ ἴσον ἀποτίθεσθαι τὸ αθ, καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν ἁρμόζειν. καὶ συνθέντι τὸ ζη πρὸς ζε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς βγ. ὅτι γὰρ ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον. καὶ συνθέντι ὁ αὐτὸς λόγος ἀκολουθεῖ. δειχθήσεται οὕτως. ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ αβ, βγ, δε, εζ. τὸ δὲ αβ πρὸς τὸ βγ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ εζ. λέγω ὅτι καὶ συνθέντι τὸ αγ πρὸς τὸ γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ ζε. γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ γβ πρὸς τὸ βα, οὕτως τὸ ζε πρὸς τὸ ζθ. ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βγ, οὕτως τὸ θζ πρὸς τὸ ζε. μείζονα δὲ λόγον ἔχει τὸ αβ πρὸς τὸ βγ, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. καὶ τὸ ζθ ἄρα πρὸς ζε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ζθ τοῦ εδ, καὶ ὅλον τὸ θε τοῦ δζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θε πρὸς εζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. ἀλλ' ὡς τὸ θε πρὸς εζ, τὸ αγ πρὸς γβ. διὰ τὸ συνθέντι, καὶ τὸ αγ ἄρα πρὸς γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς εζ. ἀλλὰ δὴ τὸ αγ πρὸς γβ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. λέγω ὅτι καὶ διελόντι τὸ αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὸ βγ πρὸς γα, οὕτως τὸ ζε, καὶ τὸ θε μεῖζον τοῦ δζ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ εζ, ἔσται μεῖζον τὸ θζ τοῦ δε. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θζ πρὸς ζε, τουτέστι τὸ αβ πρὸς βγ, διὰ τὸ διελόντι μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. φανερὸν δὲ διὰ τῶν ὁμοίων, ὅτι κἂν τὸ αβ πρὸς τὸ βγ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ, καὶ συνθέντι, καὶ πάλιν διελόντι ὁ αὐτὸς λόγος ἔσται. ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ τοῦ ἀναστρέψαντος λόγος ἐμφανής ἐστιν. ἐχέτω γὰρ τὸ αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. λέγω ὅτι καὶ ἀναστρέψαντι τὸ γα πρὸς αβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς δε. ἐπεὶ γὰρ τὸ αγ πρὸς γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε, καὶ διελόντι τὸ αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ, ἀνα-

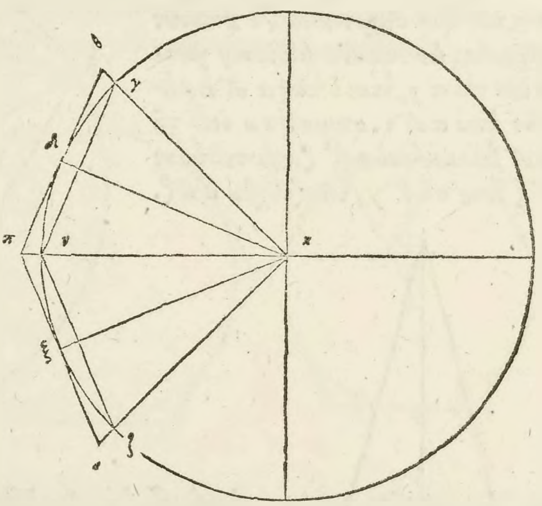
ἀνάπαλιν τὸ βγ πρὸς βα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ζε πρὸς εδ, καὶ συνθέντι τὸ γα πρὸς αβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς δε.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.



Καὶ ἀπὸ τοῦ κ, τῇ θ ἴση κατήχθω ἡ κμ, δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἐκβληθείσης τῆς κλ ὡς ἐπὶ τὸ χ, καὶ τεθείσης τῆς θ ἴσης τῇ κχ. καὶ κέντρῳ τῷ κ, διαστήματι δὲ τῷ κχ κύκλου γραφέντος ὡς τοῦ χμν. ἔστι γὰρ ἡ κμ ἴση τῇ κχ, τουτέστι τῇ θ.

Η ἄρα νγ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. τῆς γὰρ μιᾶς ὀρθῆς οὔσης τεταρτημορίου βεβηκίας, καὶ τῆς τομῆς κατὰ ἀρτίαν διαίρεσιν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γινομένης, δῆλον ὅτι καὶ ἡ τοῦ τεταρτημορίου περιφέρεια εἰς ἀρτιάκις ἀρτίους τὸν ἀριθμὸν ἴσας διαιρεθήσεται περιφερείας. ὥστε καὶ ἡ ὑποτείνουσα εὐθεῖα μίαν τῶν περιφερειῶν, πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. ὥστε καὶ ἡ οπ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου πλευρά. ἐὰν γὰρ τῇ ὑπὸ ξην γωνίᾳ ἴσην ποιήσαντες τὴν ὑπὸ πηδ, ἀπὸ τοῦ π ἐπὶ τὸ δ ἐπιζεύξωμεν καὶ προσεκβάλωμεν ἄχρι τῆς ηθ ἴσην τῇ ὑπὸ πηδ, ἔσται ἴση ἡ πθ τῇ πο, καὶ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ ἡ ξη ἴση ἐστὶ τῇ ηδ, κοινὴ δὲ ἡ ηπ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ βάσις ἄρα ἡ ξπ τῇ πδ ἴση ἐστί. καὶ ἡ ὑπὸ πξη ὀρθὴ οὖσα, τῇ ὑπὸ πδη. ὥστε ἐφάπτεται ἡ δπ. ἐπεὶ οὖν αἱ πρὸς τὸ δ ὀρθαί εἰσιν, εἰσὶν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ πηδ, δηθ ἴσαι, καὶ ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις κοινὴ ἡ δη, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ πδ τῇ θδ. ἀλλ᾽ ἡ ξπ τῇ πδ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ θπ ἄρα τῇ πο ἐστὶν ἴση, καὶ πάσαις ταῖς ὁμοίως ἐφαπτομέναις, ὥστε ἡ θπ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρὰ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου. ὅτι δὲ καὶ ὅμοιον τῷ ἐγγραφομένῳ αὐτόθεν δῆλον. ἴσης γὰρ οὔσης τῆς μὲν θη τῇ ηπ, τῆς δὲ γη τῇ ην, παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ οπ τῇ γν, διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ πθ τῇ νκ. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γνκ τῇ ὑπὸ οπθ ἴση ἐστί. καὶ διὰ τοῦτο ὅμοιον ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ.



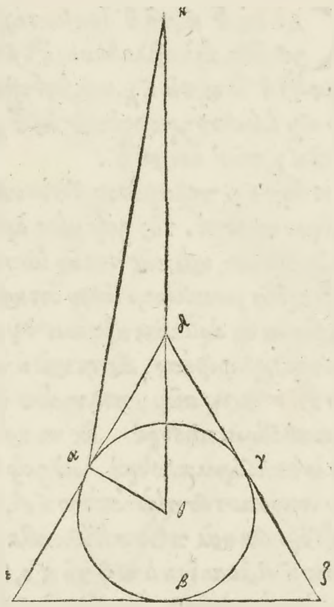
Η ἄρα μκ πρὸς κλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γη πρὸς ητ. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς πρὸς τῷ κ γωνίας τῆς ὑπὸ γητ, ἐὰν τῇ ὑπὸ γητ ἴσην συστησόμεθα τὴν ὑπὸ λκρ τοῦ ρ μεταξὺ τῶν λμ νοουμένου, τὸ λκρ τρίγωνον τῷ γητ ὅμοιον ἐστὶν, ὡς ἡ ρκ πρὸς κλ, οὕτως ἡ γη πρὸς ητ, ὥστε καὶ ἡ μκ πρὸς κλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γη πρὸς ητ.

ΕΙΣ ΤΟ ς

Διὰ δὴ τοῦτο ἔλασσον ἐστὶ τὸ περιγραφόμενον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸ ἐγγραφόμενον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ συναμφότερον πρὸς τὸν κύκλον, πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸν κύκλον. ὥστε τὸ περιγραφόμενον ἔλασσον ἐστὶ τοῦ συναμφοτέρου. καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ κύκλου, λοιπὰ τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἐστὶ τοῦ β χωρίου.

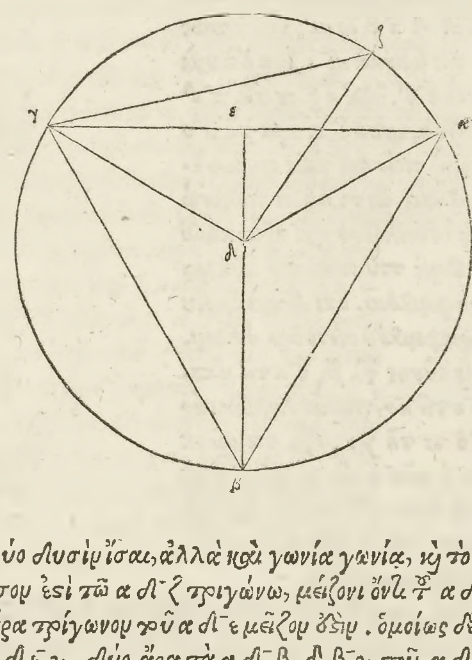
ΕΙΣ ΤΟ Η.

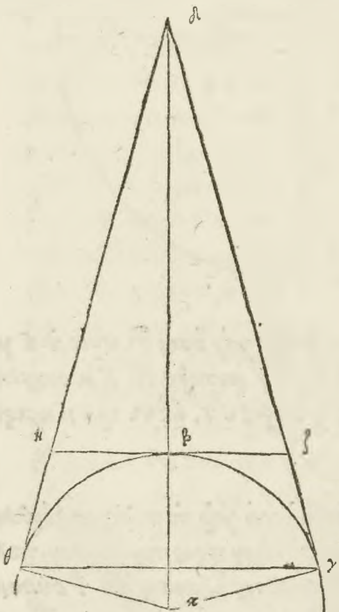
Αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ α, β, γ ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι εἰσὶν ἐπ' αὐτάς. νενοήσθω γὰρ χωρὶς ὁ κῶνος. καὶ ἔστω κορυφὴ μὲν αὐτοῦ τὸ κ, κέντρον δὲ τῆς βάσεως αὐτοῦ τὸ θ. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθω ἡ θα. ἀπὸ δὲ τοῦ κ, ἡ κα. λέγω ὅτι ἡ κα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν δε. ἐπεὶ γὰρ ἡ κθ κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα, ὥστε καὶ τὸ κθα τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ θα πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἡ δε. ἡ ἄρα δε τῷ κθα ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ὥστε καὶ πρὸς τὴν κα. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται καὶ ἐπὶ τὰ γ, β ἐπιζευγνύμεναι ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετοι ἔσεσθαι ἐπὶ τὰς δζ, εζ. ἐπιστῆσαι δὲ χρὴ, ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ πρὸ τούτου καλῶς προέκειτο, τὸ δεῖν πάντως τὴν ἐγγραφομένην πυραμίδα ἰσόπλευρον ἔχειν τὴν βάσιν. οὐ καλῶς γὰρ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰς τῆς βάσεως πλευρὰς ἴσαι ἠδύναντο εἶναι. ἐπὶ δὲ τοῦ προκειμένου οὐ προέθηκεν τὸ εἶναι ἰσόπλευρον τὴν βάσιν, ἀλλὰ τὸ δύνασθαι, κἂν ὁποία τις ᾖ, τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖν.



ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ αβδ, βδγ τρίγωνα, τοῦ αδγ τριγώνου. ἐπεὶ γὰρ στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ πρὸς τὸ δ, αἱ ὑπὸ αδβ, βδγ μείζους εἰσὶ τῆς ὑπὸ αδγ. καὶ ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἐπιζευξόμεν, ὡς τὴν δε κάθετον γινομένην ἐπὶ τὴν αγ, ἔσται ἡ ὑπὸ αδβ μείζων τῆς ὑπὸ αδε. συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ αδβ ἴση ἡ ὑπὸ αδζ. καὶ τεθείσης τῆς δζ ἴσης τῇ δγ, ἐπεζεύχθω ἡ αζ.





ἐπεὶ οὖν δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ γωνία γωνίᾳ, καὶ τὸ αβδ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αδζ τριγώνῳ, μείζονι ὄντι τοῦ αδε. καὶ τὸ αβδ ἄρα τρίγωνον τοῦ αδε μεῖζόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δβγ, τοῦ δεγ. δύο ἄρα τὰ αδβ, δβγ, τοῦ αδβ μείζονά ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΟ Ι.

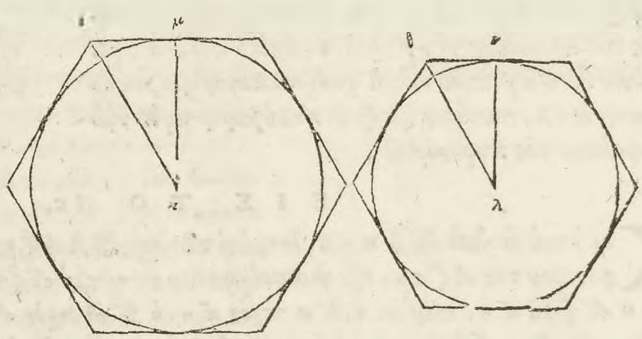
Ἤχθω γὰρ ἡ κζ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ παράλληλος οὖσα τῇ αγ, δίχα τμηθείσης τῆς αβγ περιφερείας κατὰ τὸ β. ὅτι γὰρ ἡ οὕτως ἀγομένη παράλληλός ἐστι τῇ αγ, δειχθήσεται ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ θ, ἐπιζευχθεισῶν τῶν θα, θδ, θγ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ δγ, καὶ κοινὴ ἡ δθ, δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ βάσις ἡ αθ βάσει τῇ θγ, καὶ γωνία ἄρα γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ κβδ, βδζ γωνίαι ὀρθαί.

θαι. ἀπὸ γὰρ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ θβ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δηβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ δζβ ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἡ ηδ τῇ δζ ἴση ἐστίν. ὥστε παράλληλός ἐστιν ἡ ζη τῇ αγ.

Περιγράφοντες δὴ πολύγωνα περὶ τὸ τμῆμα, ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν, καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων, λείψομεν τινὰ ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ θυ χωρίου. ἐπὶ μὲν τῶν ἐγγραφομένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅτι τὰ ἐγγραφόμενα τρίγωνα εἰς τμήματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ᾽ ἑαυτὰ τμημάτων. καὶ διὰ τοῦτο δυνατὸν ἦν, τέμνοντας τὰς περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντας εὐθείας, καταλείπειν τινὰ ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ δοθέντος χωρίου. ἐπὶ δὲ τῆς περιγραφῆς, οὐκέτι. τοῦτο δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει. ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ προκειμένῳ τοῦτό φησι, ὃ καὶ ἐστὶν αὐτὸ συλλογίσασθαι διὰ τοῦ ϛ θεωρήματος, δεικτέον ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ἀφαιρεῖ τρίγωνον, μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ περιλείμματος, οἷον ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ὅτι τὸ ηδζ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ περιλείμματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν αδ, δγ, καὶ τῆς αβγ περιφερείας. τῶν γὰρ αὐτῶν ἐπεζευγμένων, ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ δβζ, μείζων ἐστὶν ἡ δζ τῆς βζ. ἡ δὲ ζβ τῇ ζγ ἴση. ἐφάπτεται γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν. καὶ ἡ δζ ἄρα τῆς ζγ μείζων, ὥστε καὶ τὸ δβζ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ βζγ τριγώνου. ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν. πολλῷ ἄρα τοῦ βζγ περιλείμματος μεῖζόν ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ τὸ δβη τοῦ βηα μεῖζον. ὅλον ἄρα τὸ δηζ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ αδγ περιλείμματος.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΓ.

Νοείσθω δὴ εἰς τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, καὶ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. ὅπως μὲν οὖν ἐστιν εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι, ὅμοιον τῷ ἑτέρῳ ἐγγεγραμμένῳ, δῆλον. εἴρηται δὲ καὶ Πάππῳ εἰς τὸ ὑπόμνημα τῶν στοιχείων, περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον περιγράψαι ὅμοιον τῷ περὶ ἕτερον κύκλον περιγεγραμμένῳ, οὐκ ἔτι ὁμοίως ἔχομεν εἰρημένον, ὅπερ νῦν λεκτέον. τῷ γὰρ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, ὅμοιον εἰς τὸν α ἐγγεγράφθω, καὶ περὶ αὐτὸν τὸν α ὅμοιον τῷ εἰς αὐτόν, ὡς ἐν τῷ γ θεωρήματι. καὶ ἔσται ὅμοιον καὶ τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ὅνπερ καὶ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει. τὸ τοιοῦτον, ἐπὶ μὲν τῶν ἐγγεγραμμένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ἐπὶ δὲ τῶν περιγεγραμμένων οὐκέτι. δειχθήσεται δὲ οὕτως. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς τὰ περιγεγραμμένα καὶ ἐγγεγραμμένα εὐθύγραμα. καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἐπεζευγμέναι αἱ κε, κμ, λθ, λν. φανερὸν δὴ ὅτι αἱ κε, λθ ἐκ τῶν κέντρων * τῶν περὶ τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα κύκλων. καὶ πρὸς ἀλλήλας * δυνάμει ὥστε τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ κεμ, λθν ἡμίσειαι * τῶν ἐν τοῖς πολυγώνοις

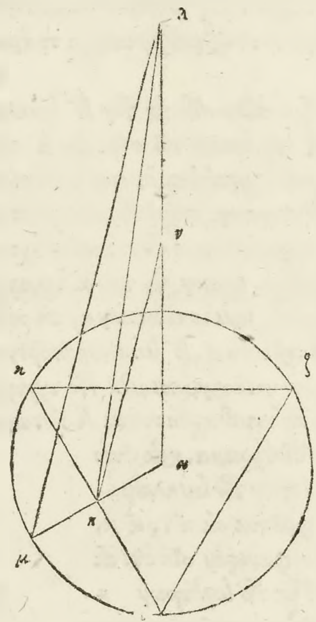


ὁμοίων ὄντων τῶν πολυγώνων, δῆλον ὅτι καὶ αὗται ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, ν ὀρθαί. ἰσογώνια ἄρα τὰ κεμ, λθν τρίγωνα. καὶ ἔσται ὡς ἡ κε πρὸς λθ, ἡ κμ πρὸς λν. ὥστε καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν, ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ κε πρὸς τὸ ἀπὸ θλ, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κμ πρὸς τὸ ἀπὸ λν, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα.

Τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον, τὸ περὶ τὸν β κύκλον, ὅνπερ τὸ κτδ τρίγωνον. ἐπεὶ γὰρ τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους εὐθύγραμμα πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει, τουτέστιν ἡ τδ πρὸς η δυνάμει, τουτέστιν ἡ τδ πρὸς ρζ μήκει, τουτέστιν ὡς τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ζρλ, ἴσον δὲ τὸ κτδ τῷ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένῳ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ κτδ πρὸς τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, οὕτως τὸ αὐτὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ζρλ τρίγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ πρίσμα πρὸς τὸν κύλινδρον, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον πρὸς τὸν β κύκλον, ὅπερ ἄτοπον, ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, οὕτως τὸ ἐγγεγραμ μένον εἰς τὸν β κύκλον πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλασσον τοῦ β κύκλου, πρὸς ὃ μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ πρὸς τὸν κύκλον. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸν κύκλον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΔ.

Η δὲ γ πρὸς τὴν δ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἀγομένη ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. νοείσθω γὰρ χωρὶς ἡ ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφή, καὶ εἰς τὸν α κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον τὸ ζθκ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ α, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου τὴν θκ, κάθετος ἤχθω ἡ αη. φανερὸν δὴ ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς αη διπλάσιόν ἐστι τοῦ πολυγώνου. νοείσθω δὴ καὶ τοῦ κώνου κορυφὴ τὸ λ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὸ η ἐπεζευγμένη ἡ λη κάθετος γίνεται, ἐπὶ τὴν θκ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι τοῦ η θεωρήματος. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον. ἔστι δὲ καὶ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, αἱ ἀπὸ τοῦ λ ἐφ᾽ ἑκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀγόμεναι κάθετοι, ἴσαι εἰσὶ τῇ λη. ἑκάστη γὰρ αὐτῶν δύναται τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς ἴσης τῇ αη. διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς λη, διπλάσιόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος. τὸ γὰρ ὑφ᾽ ἑκάστης πλευρᾶς, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς καθέτου ἐπ᾽ αὐτὴν ἀγομένης ἴσης τῇ λη, διπλάσιόν ἐστι τοῦ καθ᾽ ἑαυτὴν τριγώνου. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ αη πρὸς ηλ, τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος, κοινοῦ ὕψους τοῦ περιμέτρου τοῦ πολυγώνου λαμβανομένου. ἀχθείσης δὴ τῆς ην παρὰ τὴν μλ, ἔσται ὡς ἡ αμ πρὸς μλ, ἡ αη πρὸς ην. ἡ δὲ αη πρὸς ην μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν ηλ. μείζων γὰρ ἡ λη τῆς ην. καὶ ἡ αμ ἄρα πρὸς μλ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αη πρὸς ηλ, τουτέστιν ἤπερ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.



ΕΙΣ ΤΟ ΙϚ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αη, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βδ ζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς αδ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ αη, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν δζ τῇ αη. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ δζ τῇ αη, ἐστὶν ὡς ἡ βα πρὸς αη, ἡ βδ πρὸς δζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν βα, δζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων τῶν βδ, αη. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν βα, δζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν αδ, δζ. διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ β βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βδ, αη ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ αδ, δζ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ δα, αη, ὅπερ ἐστὶ τὸ ὑπὸ βα, αη, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδ, δζ. καὶ τῷ ὑπὸ αδ, δζ. καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ αδ, αη.

ΕΙΣ ΤΟ ΚΓ.

Τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. ὑπὸ τετράδος βούλεται μετρεῖσθαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου διὰ τὸ τοῦ κύκλου κινουμένου περὶ τὴν αγ διάμετρον. πάσας τὰς πλευρὰς ὑπὸ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν χρησίμου ἐσομένου αὐτῷ ἐν τοῖς ἑξῆς τοῦ τοιούτου, μὴ γὰρ ὑπὸ τετράδος μετρουμένων τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, κἂν ἀρτιόπλευρον ᾖ, οὐ πάσας δυνατὸν κατὰ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν, ὡς κατανοῆσαι ἔνεστιν ἐπὶ τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν. δύο γὰρ τὰς ἀπεναντίον αὐτοῦ παραλλήλους πλευρὰς κατὰ κυλινδρικῆς φέρεσθαι ἐπιφανείας συμβαίνει, ὅπερ ὡς εἴρηται οὐ χρήσιμον αὐτῷ πρὸς τὰ ἑξῆς.

ΕΙΣ

ΕΙΣ ΤΟ ΚΘ.

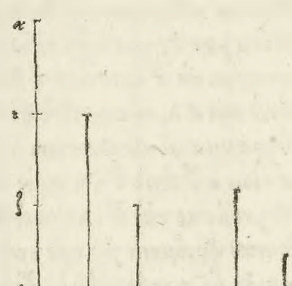
Η δὲ κ θ, ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ α β γ δ κύκλου. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ χ ἐπιζεύξωμεν ἐπὶ τὸ σημεῖον καθ᾽ ὃ ἐφάπτεται ἡ κ ξ τοῦ α β γ δ κύκλου νοούμενον τὸ μ. ὁμοίως δὲ καὶ τὴν χ κ, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ χ κ τῇ χ ζ. εἰσὶ δὲ καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ μ. ἴση γὰρ καὶ ἡ κ μ τῇ μ ζ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ζ χ τῇ χ θ ἴση. παράλληλος ἄρα ἡ χ μ τῇ κ θ. καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ὡς ἡ θ ζ πρὸς ζ χ, οὕτως ἡ κ θ πρὸς χ μ. διπλῆ δὲ ἡ θ ζ τῆς χ ζ. διπλῆ ἄρα καὶ ἡ κ θ τῆς χ μ ἐκ τοῦ κέντρου οὔσης τοῦ α β γ δ κύκλου.

ΕΙΣ ΤΟ Λ.

Ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ε λ πρὸς α κ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ η λ, γ η, ὀρθῶν γωνιῶν τῶν πρὸς τοῖς η, λ. καὶ παραλλήλου τῆς α κ τῇ λ ε. ἰσογώνιον γὰρ τὸ η λ ε τρίγωνον, τῷ γ η α τριγώνῳ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ η λ πρὸς λ ε, οὕτως ἡ γ η πρὸς η α. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ η λ πρὸς λ ε, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ περιγεγραμμένον κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ γ η πρὸς η α, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας πρὸς τὴν τοῦ α β γ δ κύκλου διάμετρον. ὡς ἄρα πᾶσαι, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ αὐτὸ κύκλου διάμετρον, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ α β γ δ κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν, οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν. ἐπεὶ καὶ ὡς ἡ μ ε πρὸς ε λ, οὕτως ἡ μ α πρὸς α κ. καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα, ὡς πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν ε λ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν α κ, ἀλλ᾽ ὡς πᾶσαι πρὸς τὴν πλευρὰν τὴν ε λ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς ε λ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὸ ἀπὸ ε λ, τῆς ε λ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὡς δὲ πᾶσαι πρὸς τὴν α κ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς α κ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α κ. κοινοῦ ὕψους πάλιν λαμβανομένης τῆς α κ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὸ ἀπὸ ε λ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ α κ. καὶ ὡς ἄρα αὐτὴ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὴν ε λ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν πρὸς τὴν α κ. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὴν ἐκ κέντρου τοῦ ν, οὕτως ἡ ε λ πρὸς α κ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ διάμετρος τοῦ μ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν, ἡ ε λ πρὸς α κ.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΒ.

Αἱ δὲ ι, θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν, τὴν η τῆς ι, καὶ τὴν ι τῆς θ, καὶ τὴν θ τῆς η. τὸ προκείμενόν ἐστι, δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν κατὰ ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν, ὅ ταὐτόν ἐστι τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν. ποιεῖται δὲ τοῦτο οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α β, γ κ ἄνισοι. καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς α β ἴσης τῇ γ κ, τῆς β δ, ἡ λοιπὴ ἡ α δ τετμήσθω τριχῇ κατὰ τὰ ε, ζ. καὶ τῇ μὲν ε β ἴση κείσθω ἡ η, τῇ δὲ β ζ ἴση ἡ θ. ἔσονται δὴ αἱ θ, ι, η ποιοῦσαι τὸ προκείμενον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ α β πρὸς τὴν γ κ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ α β πρὸς τὴν η. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ α β πρὸς τὴν η, οὕτως ἡ η πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν λ. καὶ ἐπεὶ ᾧ μέρει ἑαυτῆς ἡ α β ὑπερέχει τῆς η, τούτῳ καὶ ἡ η ἑαυτῆς ὑπερέχει τῆς λ. τὸ δὲ αὐτὸ μέρος τῆς α β μεῖζόν ἐστι τοῦ μέρους τῆς η. μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ α β τῆς η, ἤπερ ἡ η τῆς λ. τῷ δὲ αὐτῷ ὑπερέχει ἡ α β τῆς η, καὶ ἡ η τῆς θ. μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ η τῆς θ, ἤπερ ἡ η τῆς λ, ὥστε μείζων ἡ λ τῆς θ. ἐὰν δὴ πάλιν ποιήσωμεν ὡς τὴν η πρὸς τὴν λ, οὕτως τὴν λ πρὸς μ, πολλῷ μείζων ἔσται τῆς γ κ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ α β, η, λ, μ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἡ α β πρὸς τὴν μ, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ α β πρὸς η. ὥστε ἡ α β πρὸς τὴν γ κ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν η.



ΕΙΣ ΤΟ ΛΕ.

Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ εθ, καὶ τῶν εζ, γδ, κα δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ελ, κθ. ἐν γὰρ τῷ δευτέρῳ καὶ εἰκοστῷ θεωρήματι δέδεικται, ὅτι αἱ εζ, γδ, κα, πρὸς τὴν θκ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ λε πρὸς εθ. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τῷ δὲ ὑπὸ ελ, κθ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ θα. καὶ γὰρ τὸ ὑπὸ λθ, θκ, ἴσον ὄντος τῷ ἀπὸ θα. ὡς ἔστι δῆλον ἐπιζευγνυμένης τῆς αλ. καὶ διὰ τὸ ὁμοίου γινομένου τοῦ θακ τριγώνου τῷ θαλ. ἔστι γὰρ ὡς ἡ λθ πρὸς θα, ἡ αθ πρὸς θκ. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΖ.

Ἕξει δὴ καὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ αβγ κύκλῳ. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ δ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ θ, ε, λ ἴσαι ἔσονται, διὰ τὸ καὶ τὰς ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυμένας εὐθείας καθέτους εἶναι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας. καὶ αὐτὰς δὲ τὰς ἐφαπτομένας δίχα τέμνεσθαι πρὸς τῇ ἁφῇ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἐπεὶ γὰρ ἡ μζ κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας φέρεται κατὰ κολούρου ἐπιφανείας κινηθήσεται, ᾗ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗτος ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε ζμ, καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ζη καὶ τῆς μν. ὁμοίως δὴ καὶ τῇ ὑπὸ τῆς μα γενομένῃ κολούρου κώνου ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗτος ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς μα καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς αβ καὶ μν. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ζμ μείζων τῆς μα, ἡ δὲ ζη τῆς αβ. μείζων ἄρα καὶ ἡ μέση τῆς μέσης, ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἡ ἄρα ὑπὸ ζμ, νη μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ μα, νβ ἐπιφανείας.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΗ.

Ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ κζλ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς. ἀσαφέστερον δοκεῖ συνῆχθαι τὸ εἰρημένον. λέγοις δ' ἂν σαφῶς οὕτως. ἐπειδὴ ὁ ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν δύναται τὸ ὑπὸ μθ, ζη, τὸ δὲ ὑπὸ μθ, ζη, μεῖζον τοῦ ὑπὸ γδ, δξ. ἡ μὲν γὰρ μθ ἴση δέδεικται τῇ γδ. ἡ δὲ ζη μείζων τῆς δξ. ὁ ν ἄρα κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ γδ, δξ. τὸ δὲ ὑπὸ γδ, δξ, ἴσον τῷ ἀπὸ δα. ὁ ἄρα ν κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου, μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δα.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΘ.

Ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία πρὸς ἄλληλα ἐστὶν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εκ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αλ πλευρᾶς. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ δλκ, παραλλήλου οὔσης τῆς εκ τῇ αλ, ἔστιν ὡς ἡ εκ πρὸς αλ. ὡς δὲ ἡ εδ πρὸς δα, ἡ εζ πρὸς αγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς αλ, ἡ εζ πρὸς αγ. καὶ ἡμίσεια τῆς εζ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς αγ. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας τῶν πολυγώνων δειχθήσεται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν ἡ εκ πρὸς αλ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς αλ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς πάσας τὰς ἐπιζευγνυούσας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εκ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αλ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς εκ καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς αλ καὶ πασῶν. τὰ γὰρ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ τοῦ μὲν τῆς εκ πρὸς αλ λόγου διπλασίων ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς εκ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αλ. τῶν δὲ ἐπιζευγνυουσῶν τὰς τοῦ μείζονος, πρὸς τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς τοῦ ἐλάσσονος, διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ὑπὸ τῆς εκ, καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς αλ καὶ πασῶν. ὅμοια γὰρ καὶ ταῦτα, διὰ τὸ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχειν.

Καὶ ἔστιν ὡς ἡ εκ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὕτως ἡ αλ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν αλ κάθετον ἠγμένην. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζεύξωμεν εὐθεῖαν, ἔσται ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἐπ' ἀμφοτέρας τὰς εκ, αλ. καὶ ἔσται ὡς ἡ ελ πρὸς δα, τουτέστιν ἡ εκ πρὸς αλ, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν αλ κάθετον.

Ἐδείχθη δὲ ὡς ἡ εκ πρὸς αλ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν ν. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν.

ΕΙΣ ΤΟ Μ.

Ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιος ἐστὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ

ἐπιφανείᾳ

ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου, οὕτως ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐκ τῶν κέντρων. καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἄρα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

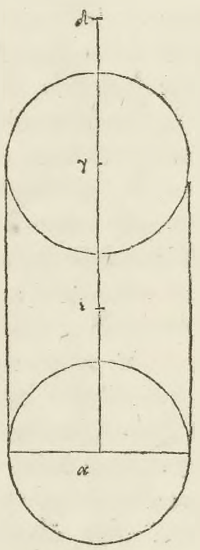
ΕΙΣ ΤΟ ΜΒ.

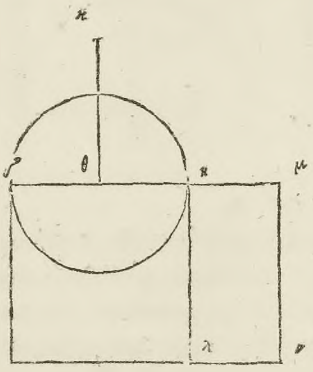
Τὸ ἄρα περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. εἰ γὰρ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ β πρὸς ζ, ἡ δὲ δ πρὸς ε μείζονα ἢ τριπλασίονα, τὸ ἄρα περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δ πρὸς ε. ἡ δὲ δ πρὸς ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον ἄρα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον.

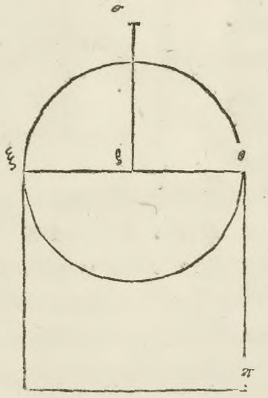
Εὐτοκίου ἀσκαλωνίτου ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον τῶν ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθείσης τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ
ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β. ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ καὶ κυλίνδρου.

Σαφῶς ἡμῖν τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων γεγραμμένων, ἀκόλουθος καὶ ἡ περὶ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐν τοῖς δευτέροις θεωρήμασι σπουδή. φησὶ δὲ πρῶτον ἐν τῷ α θεωρήματι. εἰλήφθω τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος. τοῦτο δὲ διχῶς δυνατόν ἐστιν εἰπεῖν. ἤτοι τῆς βάσεως τῆς αὐτῆς σωζομένης ἐν ἀμφοτέροις, ἢ τοῦ ὕψους. καὶ ἵνα σαφέστερον γένηται τὸ λεγόμενον, νενοήσθω κῶνος, ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ α κύκλος, ὕψος δὲ ἡ α γ. καὶ δέον ἔστω αὐτοῦ ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν. ὑποκείσθω δὲ πρότερον ὁ α γ κύλινδρος, καὶ προσεκβεβλήσθω τὸ α γ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, καὶ κείσθω τῆς α γ ἡμίσεια ἡ γ δ, ἡ ἄρα α δ ἡμιόλιά ἐστι τῆς α γ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν κύλινδρον, βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α δ εὐθεῖαν, ἡμιόλιος ἔσται τοῦ προτεθέντος τοῦ α γ. οἱ γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. Εἰ δὲ κῶνος εἴη ὁ α γ, τμηθείσης τῆς α γ δίχα ὡς κατὰ τὸ ε. ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α ε, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ α γ. ὁ γὰρ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α γ εὐθεῖαν, τοῦ μὲν α γ κώνου τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ α ε κυλίνδρου διπλάσιος. ὥστε δῆλον, ὅτι καὶ ὁ α ε κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τοῦ α γ κώνου. οὕτως μὲν οὖν τῆς αὐτῆς βάσεως σωζομένης, ἔν τε τῷ προτεθέντι,



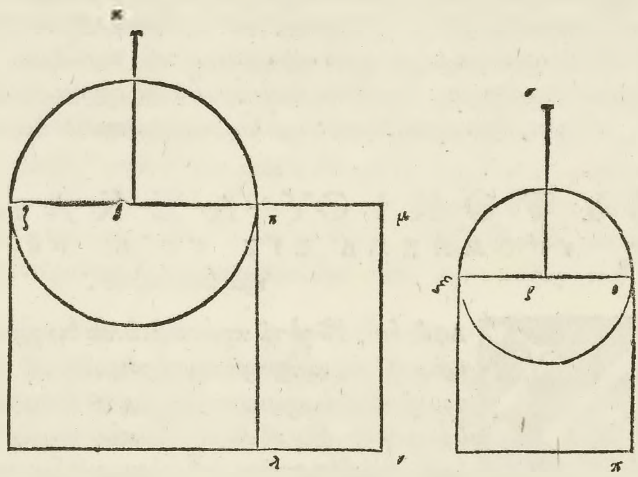


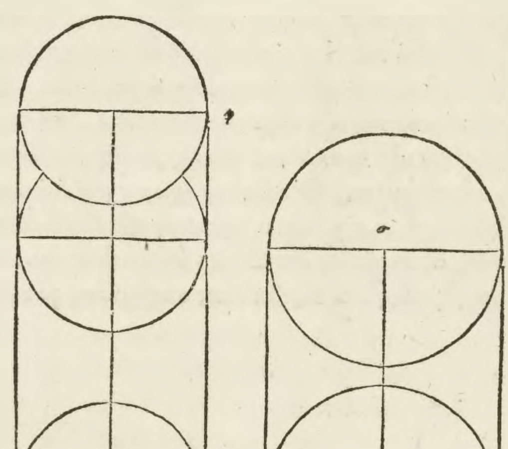


καὶ ἐν τῷ λαμβανομένῳ γενήσεται τὸ πρόβλημα. ἔνεστι δὲ καὶ τῆς βάσεως διαφόρου τυγχανούσης, τοῦ δὲ ἄξονος τοῦ αὐτοῦ μένοντος τὸ αὐτὸ ποιεῖν. ἔστω γὰρ πάλιν κῶνος ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ ζ η κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θ κ εὐθεῖα. οὗ δέον ἔστω ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν, ὕψος ἔχοντα ἴσον τῇ θ κ. ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ζ η διαμέτρου τοῦ κύκλου τετράγωνον τὸ ζ λ, καὶ προσεκβληθείσης τῆς ζ η, κείσθω αὐτῆς ἡμίσεια ἡ η μ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζ ν

παραλλη

παραλληλόγραμμον. τὸ ἄρα ζν ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ζλ, καὶ ἡ μζ τῆς ζη. συνεστάτω δὴ τῷ ζν παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ξπ. καὶ περὶ διάμετρον μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλος περιγεγράφθω. ἔσται δὴ ὁ ξο ἡμιόλιος τοῦ ζη. οἱ γὰρ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ κυλίνδρου οὗ βάσις μὲν ὁ ζη κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θκ. εἰ δὲ κῶνος εἴη, ὁμοίως τὰ αὐτὰ ποιήσαντες, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ζν παραλληλογράμμου ἴσον συστησάμενοι τετράγωνον, ὡς τὸ ξπ. καὶ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλον γράψαντες, νοήσωμεν ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρον ὕψος ἔχοντα τὴν θκ. ἕξομεν αὐτὸν ἡμιόλιον τοῦ προτεθέντος κώνου. ἐπεὶ γὰρ τὸ ζν παραλληλόγραμμον τοῦ ξπ τετραγώνου τριπλάσιον, τοῦ δὲ ζλ ἡμιόλιον, τὸ ζλ τοῦ ξπ ἔσται διπλάσιον. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὁ κύκλος τοῦ κύκλου διπλάσιος, καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὴν ζη κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θκ, τριπλάσιός ἐστι τοῦ περὶ τὴν αὐτὴν βάσιν, καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ κώνου. ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἡμιόλιός ἐστι τοῦ προκειμένου κώνου. εἰ δέοι μήτε τὸν ἄξονα τὸν αὐτὸν εἶναι, μήτε τὴν βάσιν, γενήσεται τὸ πρόβλημα πάλιν διχῶς. ἢ γὰρ τὴν βάσιν ἕξει ἴσην τῇ δοθείσῃ, ἢ τὸν ἄξονα ὁ πορίζόμενος κύλινδρος. ἔστω γὰρ πρότερον ἡ βάσις δεδομένη, ὡς ὁ ξο κύκλος. καὶ δέον ἔστω κύλινδρον εὑρεῖν ἡμιόλιον τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἀπὸ βάσεως τῆς ξο, εἰλήφθω ὡς προείρηται τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος, βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ προτεθέντι ὁ φυ. καὶ γεγονέτω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ξο, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τυ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ φυ πρὸς τὴν ρσ. ἔσται ἄρα ὁ κύλινδρος ὁ ἀπὸ τῆς ξο, βάσεως ὕψος ἔχων τὴν ρσ, ἴσος τῷ φυ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπίταγμα. εἰ δὲ μὴ ἡ βάσις ἡ δεδομένη, ἀλλὰ ὁ ἄξων τῷ αὐτῷ λόγῳ πορισθέντος τοῦ φυ, γενήσεται τὰ τῆς προτάσεως.





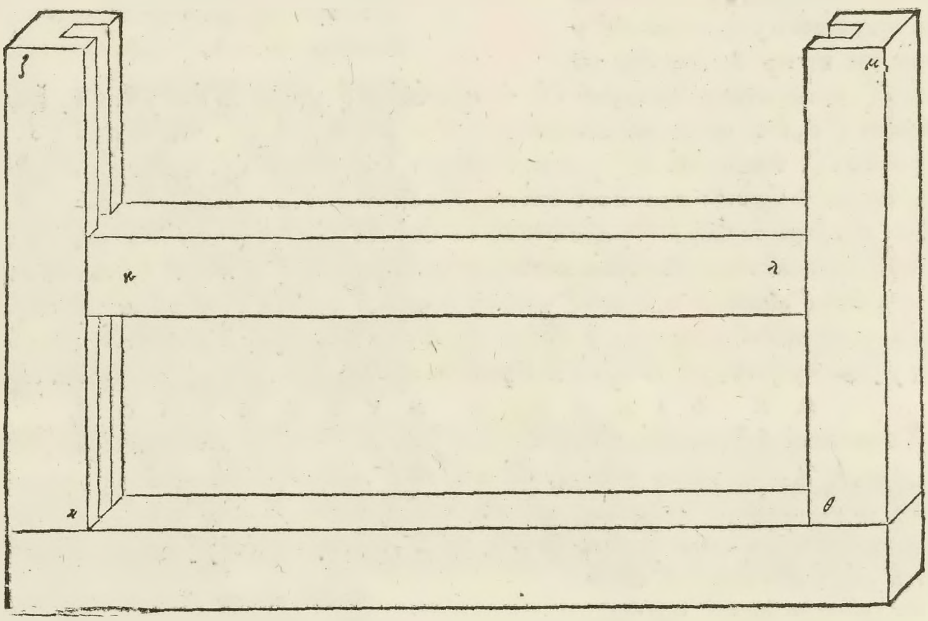
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Α.

Τούτου ληφθέντος, ἐπεὶ διὰ ἀναλύσεως αὐτοῦ προέβη τὰ τοῦ προβλήματος, ληξάσης τῆς ἀναλύσεως εἰς τὸ δεῖν δύο δοθεισῶν δύο μέσας ἀνάλογον προσευρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, φησὶν ἐν τῇ συνθέσει εὑρήσθωσαν. τὴν δὲ εὕρεσιν τούτων ἐπ' αὐτοῦ μὲν γεγραμμένην, οὐδὲ ὅλως εὑρίσκομεν. πολλῶν δὲ κλεινῶν ἀνδρῶν γραφαῖς ἐντυχήκαμεν, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπαγγελλομέναις, ὧν τὴν εὐδόξου τοῦ Κνιδίου παρῃτησάμεθα γράφειν. ἐπειδή φησι μὲν ἐν προοιμίοις διὰ καμπύλων γραμμῶν αὐτὴν ηὑρηκέναι. ἐν δὲ τῇ ἀποδείξει πρὸς τὸ μὴ κεχρῆσθαι καμπύλαις γραμμαῖς, ἀλλὰ καὶ διῃρημένην ἀναλογίαν εὑρὼν, ὡς συνεχεῖ χρῆται, ὅπερ ἦν ἄτοπον ὑπονοῆσαι, τί λέγω περὶ Εὐδόξου,

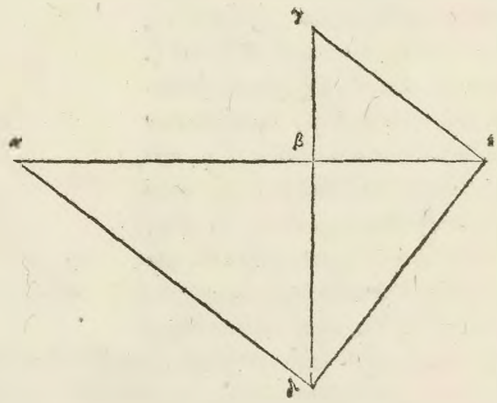
δόξου, ἀλλὰ περὶ τῶν καὶ μετρίως περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων. ἵνα δὲ ἡ τῶν εἰς ἡμᾶς ἐληλυθότων ἀνδρῶν ἔννοια ἐμφανὴς γένηται, ὁ ἑκάστου τῆς εὑρέσεως τρόπος καὶ ἐνταῦθα γραφήσεται.

ΩΣ ΠΛΑΤΩΝ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α β γ, πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ δ, ε, καὶ κατεσκευάσθω ὀρθὴ γωνία ἡ ὑπὸ ζ η θ. καὶ ἐν ἑνὶ σκέλει οἷον τῷ ζ η. κινείσθω κανὼν ὁ κ λ ἐν σωλῆνί τινι ὄντι ἐν τῷ ζ η, οὕτως ὥς τε παράλληλον αὐτὸν διαμένειν τῷ η θ. ἔσται δὲ τοῦτο, ἐὰν καὶ ἕτερον κανόνιον νοηθῇ συμφυὲς τῷ θ η. παράλληλον δὲ τῷ ζ η, ὡς τὸ θ μ. σωληνισθεισῶν γὰρ τῶν ἄνωθεν ἐπιφανειῶν τῶν ζ η, θ μ σωλῆσι πελεκινοειδέσι, καὶ τυλῶν συμφυῶν γενομένων τῷ κ λ, εἰς τοὺς εἰρημένους σωλῆνας, ἔσται ἡ κίνησις τοῦ κ λ παράλληλος ἀεὶ τῷ η θ. τούτων οὖν κατεσκευασμένων, κείσθω τὸ ἓν σκέλος τῆς γωνίας

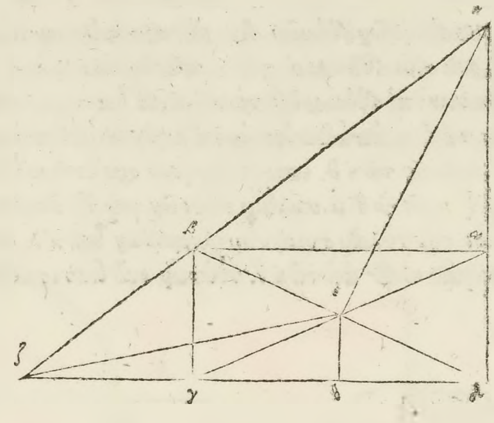


τυχὸν τὸ η θ, ψαῦον τοῦ γ, καὶ μεταφερέσθω ἥ τε γωνία καὶ ὁ κ λ κανὼν ἐπὶ τοσοῦτον, ἄχρις ἂν οὗ τὸ μὲν η σημεῖον ἐπὶ τῆς β δ εὐθείας ᾖ, τοῦ η θ σκέλους ψαύοντος τοῦ γ. ὁ δὲ κ λ κανὼν κατὰ μὲν τὸ κ ψαύῃ τῆς β ε εὐθείας, κατὰ δὲ τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ α. ὥστε εἶναι ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τὴν μὲν ὀρθὴν γωνίαν θέσιν ἔχουσαν, ὡς τὴν ὑπὸ γ δ ε. τὸν δὲ κ λ κανόνα θέσιν ἔχειν, οἵαν ἔχει ἡ ε α. τούτων γὰρ γενομένων ἔσται τὸ προκείμενον. ὀρθῶν γὰρ οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς δ, ε, ἔστιν ὡς ἡ γ β πρὸς β δ, ἡ δ β πρὸς β ε, καὶ ἡ ε β πρὸς β α.



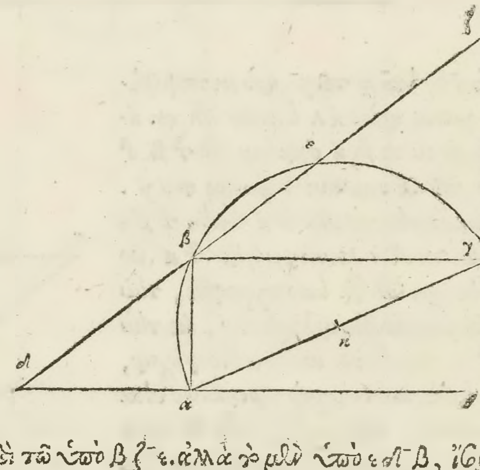
ΩΣ ΗΡΩΝ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ, καὶ ἐν τοῖς βελοποιικοῖς.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α β, β γ. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. κείσθωσαν ὥς τε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ β δ παραλλληλόγραμμον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γ, βδ. φανερὸν δὴ, ὅτι ἴσαι εἰσὶ καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὁ γὰρ περὶ μίαν αὐτῶν γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν περάτων τῆς ἑτέρας, διὰ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ δγ, δα ἐπὶ τὰ ζ, η, καὶ νοείσθω κανόνιον ὡς τὸ ζβη, κινούμενον περί τινα τύλον, μένοντα πρὸς τῷ β, καὶ κινείσθω ἕως ἀποτέμνει ἴσας τὰς ἀπὸ τοῦ ε, τουτέστι τὰς εη, εζ. καὶ νοείσθω ἀποτεμνόμενον, καὶ θέσιν ἔχον τὴν ζβη, ἴσων ὡς εἴρηται γινομένων τῶν εη, εζ. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν γδ κάθετος ἡ εθ, δίχα δὴ τέμνει, δῆλον ὅτι τὴν γδ. ἐπεὶ οὖν δίχα τέμνεται ἡ γδ κατὰ τὸ θ, καὶ πρόσκειται ἡ γζ, τὸ ὑπὸ δζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γθ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ θζ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εθ. τὸ ἄρα ὑπὸ δζγ μετὰ τῶν ἀπὸ γθ, θε, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ζθ, θε. καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ γθ, θε, ἴσον τὸ ἀπὸ γε. τοῖς δὲ ἀπὸ ζθ, θε, ἴσον τὸ ἀπὸ εζ. τὸ ἄρα ὑπὸ δζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον τῷ ἀπὸ εζ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ δηα μετὰ τοῦ ἀπὸ αε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εη. καί ἐστιν ἴση ἡ μὲν αε τῇ εγ, ἡ δὲ ηε τῇ εζ. καὶ τὸ ὑπὸ δζγ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δηα. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι. ἔστιν ἄρα ὡς ζδ πρὸς δη, οὕτως ἡ αη πρὸς γζ. ἀλλ' ὡς ἡ ζδ πρὸς δη, οὕτως ἡ ζγ πρὸς γβ, καὶ ἡ βα πρὸς αη. τριγώνου γὰρ τοῦ ζδη παρὰ μίαν μὲν τὴν δη, ἦκται ἡ γβ. παρὰ δὲ τὴν δζ ἡ αβ. ὡς ἄρα ἡ βα πρὸς αη, οὕτως ἡ αη πρὸς γζ, καὶ ἡ γζ πρὸς γβ. τῶν ἄρα αβ, βγ, μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αη, γζ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.



ΩΣ ΦΙΛΩΝ Ο ΒΥΖΑΝΤΙΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, κείσθωσαν, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς αγ, γεγράφθω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ αβεγ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν, τῇ μὲν βα, ἡ αδ, τῇ δὲ βγ ἡ γζ. καὶ παρακείσθω κανὼν κινούμενος πρὸς τὸ β, τέμνων τὰς αδ, γζ. καὶ κεκινήσθω περὶ τὸ β, ἄχρις ἂν ἡ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ δ ἴση γένηται τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ ζ, τουτέστι τῇ μεταξὺ τῆς τε περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῆς γζ. νενοήσθω οὖν ἔχον τὸ κανόνιον θέσιν, οἵαν ἔχει ἡ δβεζ, ἴσης οὔσης ὡς εἴρηται τῆς δβ τῇ εζ. λέγω ὅτι αἱ αδ, γζ μέσαι ἀνάλογόν εἰσι τῶν αβ, βγ. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ δα, ζγ, καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ θ. φανερὸν δὴ ὅτι παραλλήλων οὐσῶν τῶν βα, ζθ, ἡ πρὸς τὸ θ γωνία ὀρθή ἐστι. καὶ ὁ αεγ κύκλος ἀναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δβ τῇ εζ, καὶ τὸ ὑπὸ εδβ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βζε. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ εδβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θδα. ἑκάτερον γὰρ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ δ. τὸ δὲ ὑπὸ βζε ἴσον τῷ ὑπὸ θζγ. ἑκάτερον γὰρ ὁμοίως ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ ζ. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ θδα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θζγ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς θζ, οὕτως ἡ γζ πρὸς δα. ἀλλ' ὡς ἡ θδ πρὸς θζ, οὕτως ἥ τε βγ πρὸς γζ, καὶ ἡ δα πρὸς αβ. τριγώνου γὰρ τοῦ δθζ, παρὰ μὲν τὴν δθ, ἦκται ἡ βγ, παρὰ δὲ τὴν θζ ἡ βα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ πρὸς ζγ, ἡ γζ πρὸς δα, ἡ δα πρὸς αβ, ὅπερ προέκειτο δεῖξαι.

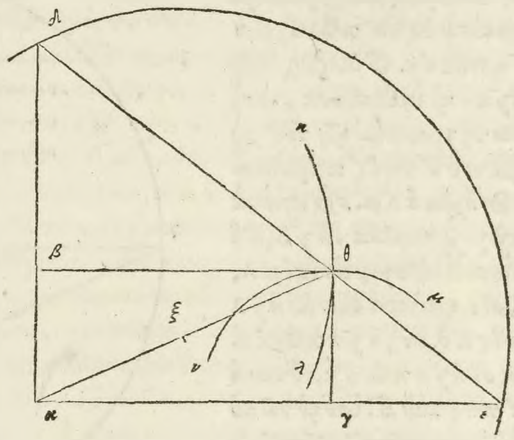


Ἴσον

Ἰστέον δέ, ὅτι ἡ τοιαύτη κατασκευὴ σχεδὸν ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Ἥρωνος κατασκευῇ, καὶ αἱ προσεκβαλλόμεναι πλευραὶ αἱ θα, θγ. καὶ ὁ περὶ τὸ β κινούμενος κανών. ταύτῃ δὲ μόνον διαφέρει, ὅτι ἐκεῖ μὲν μέχρι τοσούτου ἐκινοῦμεν περὶ τὸ β τὸν κανόνα, ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς αγ, τουτέστι τοῦ κ ἴσαι ὑπ' αὐτοῦ ἀποτέμνονται πρὸς ταῖς θδ, θζ προσπιπτούσαις, ὡς αἱ κδ, κζ, ἐνταῦθα δὲ ἄχρις ἂν ἡ δβ ἴση γένηται τῇ εζ. ἐφ' ἑκατέρας δὲ κατασκευῆς τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ. τὸ δὲ νῦν εἰρημένον πρὸς χρῆσιν εὐθετώτερον. τὰς γὰρ δβ, εζ ἴσας τηρεῖν ἐνδέχεται διῃρημένου τοῦ δζ κανόνος εἰς ἴσα καὶ συνεχῆ. πολὺ γὰρ εὐκολώτερον τοῦ καρκίνῳ διαπειράζειν τὰς ἀπὸ τοῦ κ ἴσας πρὸς τὰ δ, ζ.

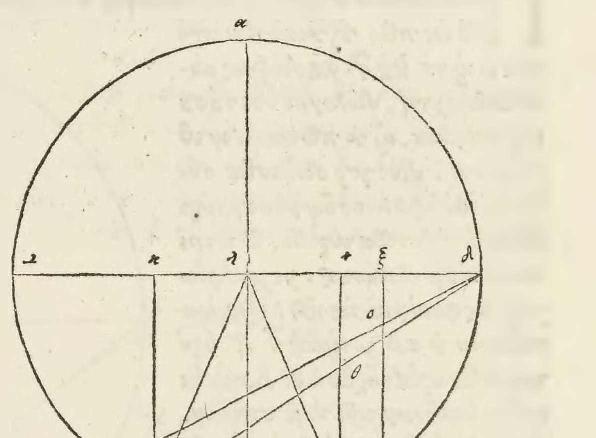
ΩΣ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν αἱ αβ, αγ, ὀρθὴν περιέχουσαι γωνίαν τὴν πρὸς τῷ α, κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ αγ, κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ κθλ. καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ αβ κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ μθν. καὶ τεμνέτω τὴν κθλ κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, θβ, θγ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ αγ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ θα. τετμήσθω δίχα ἡ θα τῷ ξ, καὶ κέντρῳ τῷ ξ γεγράφθω κύκλος τέμνων τὰς αβ, αγ ἐκβληθείσας κατὰ τὰ δ, ε. ὥστε μέντοι τὰ δ, ε ἐπ' εὐθείας εἶναι τῷ θ, ὅπερ ἂν γένοιτο κανονίου κινουμένου περὶ τὸ θ, τέμνοντος τὰς α , αε. καὶ παραγομένου ἐπὶ τοσοῦτον ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὰ δ, ε ἴσαι γένωνται. τούτου γὰρ γενομένου ἔσται τὸ ζητούμενον. ἡ γὰρ αὐτὴ κατασκευή ἐστι τῇ τε ὑπὸ Ἥρωνος καὶ Φίλωνος γεγραμμένῃ. καὶ δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ ἁρμόσει.



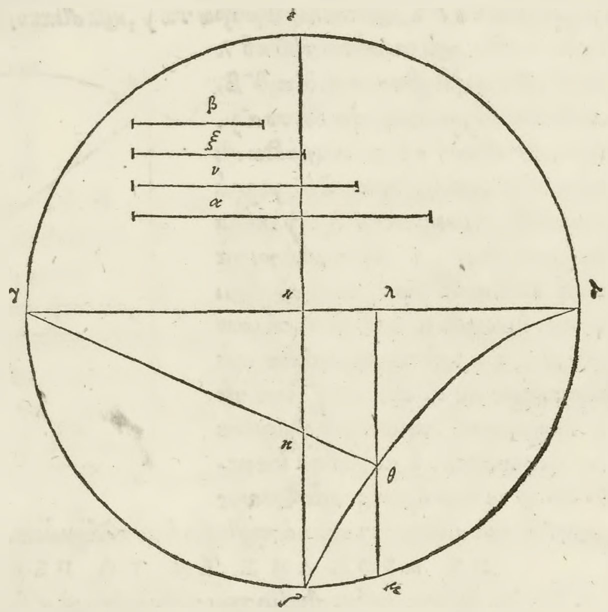
ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

Ἐν κύκλῳ ἤχθωσαν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς αἱ αβ, γδ, καὶ δύο περιφέρειαι ἴσαι ἀπειλήφθωσαν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ β αἱ εβ, βζ. καὶ διὰ τοῦ ζ παράλληλος τῇ αβ ἤχθω ἡ ζη. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε. λέγω ὅτι τῶν γη, ηθ δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσι αἱ ζη, ηδ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ ε τῇ αβ παράλληλος ἡ εκ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν εκ τῇ ζη, ἡ δὲ κγ τῇ ηδ. ἔσται γὰρ τοῦτο δῆλον ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὰ ε, ζ ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. ἴσαι γὰρ γίνονται αἱ ὑπὸ γλε, ζλδ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς κ, η. καὶ πάντα ἄρα πᾶσι διὰ τὴν λε τῇ λζ ἴσην εἶναι, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ γκ τῇ ηδ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ δκ πρὸς κε, ἡ δη πρὸς ηθ, ἀλλ' ὡς ἡ δκ πρὸς κε, ἡ εκ πρὸς κγ. μέση γὰρ ἀνάλογον ἡ εκ τῶν δκ, κγ. ὡς ἄρα ἡ δκ πρὸς κε, καὶ ἡ εκ πρὸς κγ, οὕτως ἡ δη πρὸς ηθ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ μὲν δκ τῇ γη, ἡ δὲ κε τῇ ζη. ἡ δὲ κγ τῇ ηδ. ὡς ἄρα ἡ γη πρὸς ηζ, ἡ ζη πρὸς ηδ, καὶ ἡ δη πρὸς ηθ. ἐὰν δὴ παρ' ἑκάτερα τοῦ β ληφθῶσι περιφέρειαι ἴσαι μβ, βν. καὶ διὰ μὲν τοῦ ν παράλληλος ἀχθῇ τῇ αβ ἡ νξ. ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ δμ. ἔσονται πάλιν τῶν γξ, ξο μέσαι ἀνάλογον αἱ νξ, ξδ. πλειόνων οὖν οὕτως καὶ συνεχῶν παραλλήλων ἐκβληθεισῶν μετα



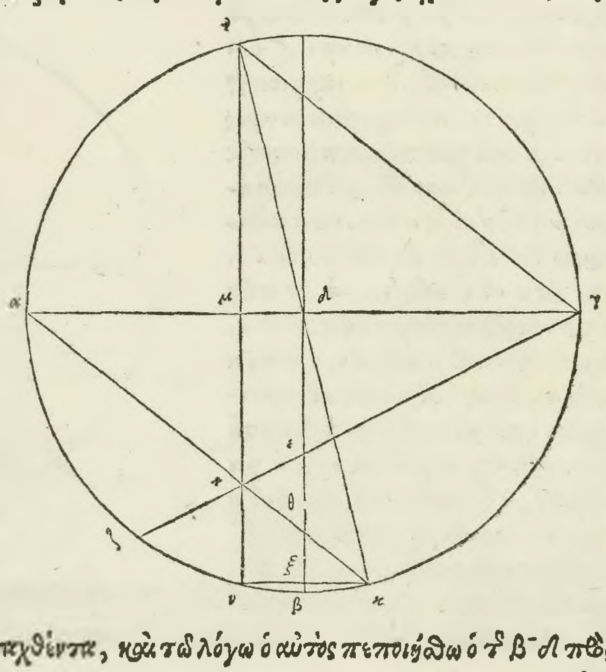
ξὺ τῶν β, δ. καὶ ταῖς ἀπολαμβανομέναις ὑπ' αὐτῶν περιφερείαις πρὸς τῷ β, ἴσων τιθεμένων ἀπὸ τοῦ β ὡς ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐπὶ τεταγμένα σημεῖα ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν ἀπὸ τοῦ δ, ὡς τῶν ὁμοίως ταῖς δε, δμ, τμηθήσονται αἱ παράλληλοι αἱ μεταξὺ τῶν β, δ κατά τινα σημεῖα, ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὰ ο, θ. ἐφ' ἃ κανόνος παραθέσει ἐπιζεύξαντες εὐθείας, ἕξομεν καταγεγραμμένην ἐν τῷ κύκλῳ τινὰ γραμμήν. ἐφ' ἧς ἐὰν ληφθῇ τυχὸν σημεῖον, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ λβ. καὶ ἡ ἀχθεῖσα, καὶ ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ δ. μέσαι ἀνάλογον ἔσονται τῆς τε ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ γ σημείῳ, καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐν τῇ γραμμῇ σημείου ἐπὶ τὴν γδ διάμετρον.

Τούτων προκατεσκευασμένων, ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν αἱ α, β. καὶ ἔστω κύκλος ἐν ᾧ δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γδ, εζ. καὶ γεγράφθω ἐν αὐτῷ ἡ διὰ τῶν συνεχῶν σημείων γραμμὴ ὡς προείρηται, ἡ δθζ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, ἡ γη πρὸς ηκ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γκ, καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ θ τῇ εζ παράλληλος ἤχθω ἡ λμ. διὰ ἄρα τὰ προγεγραμμένα τῶν γλ, λθ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ μλ, λδ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ γλ πρὸς λθ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηκ. ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηκ, οὕτως ἡ α πρὸς τὴν β. ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ταῖς γλ, λμ, λδ, λθ παρεμβάλωμεν μέσας τῶν α, β ὡς τὰς ν, ξ, ἔσονται εἰλημμέναι τῶν α, β μέσαι ἀνάλογον αἱ ν, ξ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.



ΩΣ ΠΑΠΠΟΣ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ.

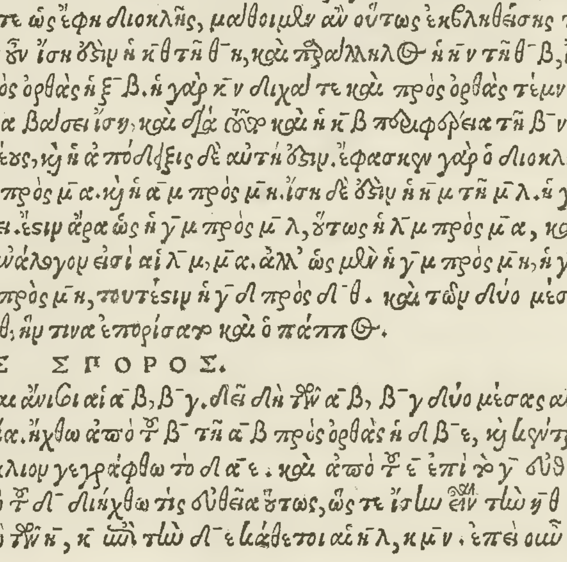
Προέθετο μὲν ὁ Πάππος κύβον εὑρεῖν πρὸς τὸν δοθέντα κύβον, λόγον ἔχοντα δεδομένον. καὶ ὡς πρὸς τὴν τοιαύτην πρότασιν καὶ τὰ ἀπὸ τῆς ἀποδείξεως αὐτῷ προέρχεται. δῆλον δὲ ὅτι τούτου εὑρισκομένου, καὶ τὸ προκείμενον εὑρίσκεται. δύο γὰρ δοθεισῶν εὐθειῶν, ἐὰν ὀφειλουσῶν μέσων εὑρεθῆναι, ἡ δευτέρα εὑρεθῇ, καὶ ἡ τρίτη αὐτόθεν δοθήσεται. γεγράφθω γάρ, ὥς φησιν αὐτὸς κατὰ λέξιν, ἡμικύκλιον τὸ αβγ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δβ, καὶ κινείσθω κανόνιον περὶ τὸ α σημεῖον. ὥστε τὸ μὲν ἓν πέρας αὐτοῦ περικεῖσθαι τυλίῳ τινὶ κατὰ τὸ α σημεῖον. τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ὡς περὶ κέντρον τὸ τυλάριον κινείσθω μεταξὺ τῶν β, γ. τούτων δὲ κατεσκευασμένων ἐπιτετάχθω δύο κύβους εὑρεῖν, λόγον ἔχοντας πρὸς ἀλλήλους τὸν ἐπιταχθέντα, καὶ τῷ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς βδ πρὸς δε.



δε. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ. παραγέσθω δὴ τὸ κανόνιον μεταξὺ τῶν β, γ, ἕως οὗ τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτοῦ μέρος μεταξὺ τῶν ζε, εβ εὐθειῶν, ἴσον γένηται τῷ μεταξὺ τῆς βε εὐθείας, καὶ τῆς βκγ περιφερείας. τοῦτο γὰρ πειράζοντες, καὶ μετάγοντες τὸ κανόνιον, ῥᾳδίως ποιήσομεν. γεγονέτω δὴ καὶ ἐχέτω θέσιν τὴν ακ, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ηθ, θκ. λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον, λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα, τουτέστι τὸν τῆς βδ πρὸς δε. νενοήσθω γὰρ ὁ κύκλος ἀναπεπληρωμένος, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ λ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λη. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ βδ τῇ λη, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν κθ τῇ ηθ, τὴν δὲ κδ τῇ δλ. ἐπεζεύχθω δὴ ἥτε αλ καὶ ἡ λγ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αλγ, ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ, καὶ κάθετος ἡ λμ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ μα, τουτέστιν ἡ γμ πρὸς μα, οὕτως τὸ ἀπὸ αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη. κοινὸς προσκείσθω ὁ τῆς αμ πρὸς μη λόγος. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ τῆς γμ πρὸς μα, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη, τουτέστιν ὁ τῆς γμ πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη. καὶ ὁ τῆς γμ ἄρα πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, οὕτως ἡ γδ πρὸς δε. ὡς δὲ ἡ αμ πρὸς μη, ἡ αδ πρὸς δθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ βδ πρὸς δε, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον. τῶν ἄρα ὀφειλουσῶν εὑρεθῆναι δύο μέσων ἀνάλογον τῶν βδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν βδ πρὸς δθ, τὴν θδ πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔσται καὶ ἡ τρίτη εὑρημένη. προσέχειν δὲ χρὴ ὡς καὶ ἡ τοιαύτη κατασκευὴ ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ διοκλέους εἰρημένῃ, τούτῳ μόνον διαφέρουσα τῷ ἐκεῖνον μὲν γραμμήν τινα καταγράφειν διὰ συνεχῶν σημείων μεταξὺ τῶν α, β. ἐφ' ἧς ἐλαμβάνετο τὸ η, ἐκβαλλομένης τῆς γε, καὶ τεμνούσης τὴν εἰρημένην γραμμήν. ἐνταῦθα δὲ τὸ η πορίζεται, διὰ τοῦ ακ κανόνος κινουμένου περὶ τὸ α. ὅτι γὰρ τὸ η τὸ αὐτό ἐστι, εἴτε ὡς ἐνταῦθα διὰ τοῦ κανόνος ληφθῇ, εἴτε ὡς ἔφη διοκλῆς, μάθοιμεν ἂν οὕτως ἐκβληθείσης τῆς μη κατὰ τὸ ν, ἐπεζεύχθω ἡ κν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ κθ τῇ θη, καὶ παράλληλος ἡ ην τῇ θβ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ κξ τῇ ξν, καὶ κοινὴ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξβ. ἡ γὰρ κν δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου, καὶ βάσις ἄρα βάσει ἴση, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ κβ περιφέρεια τῇ βν. τὸ ἄρα η ἐστὶ τὸ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ διοκλέους, καὶ ἡ ἀπόδειξις δὲ αὐτή ἐστιν. ἔφασκεν γὰρ ὁ διοκλῆς, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γμ πρὸς μν, οὕτως ἡ μν πρὸς μα. καὶ ἡ αμ πρὸς μη. ἴση δέ ἐστιν ἡ ημ τῇ μλ. ἡ γὰρ διάμετρος πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γμ πρὸς μλ, οὕτως ἡ λμ πρὸς μα, καὶ ἡ αμ πρὸς μη. τῶν ἄρα γμ, μη μέσαι ἀνάλογον εἰσὶ αἱ λμ, μα. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, ἡ γδ πρὸς δε. ὡς δὲ ἡ γμ πρὸς μλ, ἡ αμ πρὸς μη, τουτέστιν ἡ γδ πρὸς δθ. καὶ τῶν δύο μέσων ἄρα τῶν γδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ, ἥν τινα ἐπορίσατο καὶ ὁ πάππος.

ΩΣ ΣΠΟΡΟΣ.

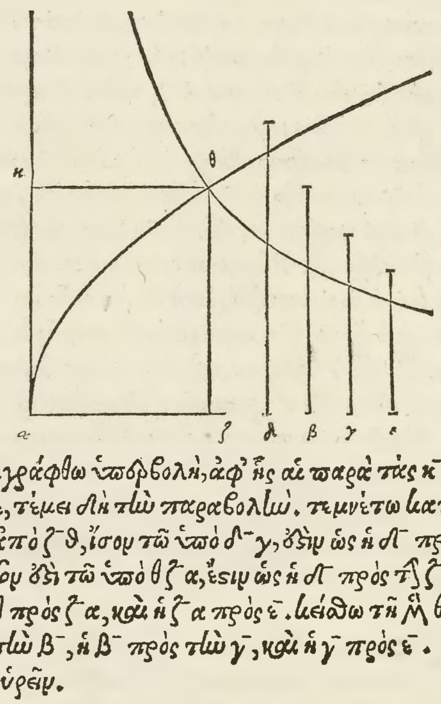
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, βγ. δεῖ δὴ τῶν αβ, βγ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ δβε, καὶ κέντρῳ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ δαε. καὶ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα διήχθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ διήχθω τις εὐθεῖα οὕτως, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ηθ τῇ θκ. τοῦτο γὰρ δυνατόν. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν η, κ ἐπὶ τὴν δε κάθετοι αἱ ηλ, κμν. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ κθ πρὸς θη, ἡ μβ πρὸς βλ. ἴση δὲ ἡ κθ τῇ θη, ἴση ἄρα καὶ ἡ μβ τῇ βλ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ με τῇ λδ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ δμ τῇ λε ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ λε πρὸς εμ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ κμ πρὸς ηλ. ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εμ, ἡ ηλ πρὸς νμ. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ δμ πρὸς μκ, ἡ κμ πρὸς με. ὡς ἄρα ἡ δμ πρὸς με, οὕτως τὸ ἀπὸ δμ πρὸς τὸ ἀπὸ μκ, τουτέστι τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. ἴση γὰρ ἡ δβ



τῇ βα. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ λε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ κμ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εβ, ἡ κλ πρὸς γβ. καὶ ὡς ἄρα ἡ κμ πρὸς θβ, ἡ κλ πρὸς γβ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ κμ πρὸς κλ, ἡ θβ πρὸς γβ. ἀλλ' ὡς ἡ κμ πρὸς κλ, ἡ μδ πρὸς δλ, τουτέστιν ἡ δμ πρὸς με, τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, ἡ βθ πρὸς βγ. εἰλήφθω τῶν θβ, βγ μέση ἀνάλογον ἡ ξ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, ἡ θβ πρὸς βγ, ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς βθ. ἡ δὲ θβ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θβ πρὸς ξ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ βθ πρὸς ξ. ἀλλ' ὡς ἡ θβ πρὸς ξ, ἡ ξ πρὸς βγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ θβ πρὸς ξ. καὶ ἡ ξ πρὸς βγ. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ αὐτὴ ἡ αὐτή ἐστι, τῇ τε ὑπὸ Πάππου καὶ Διοκλέους γραμμῇ.

ΩΣ ΜΕΝΕΧΜΟΣ.

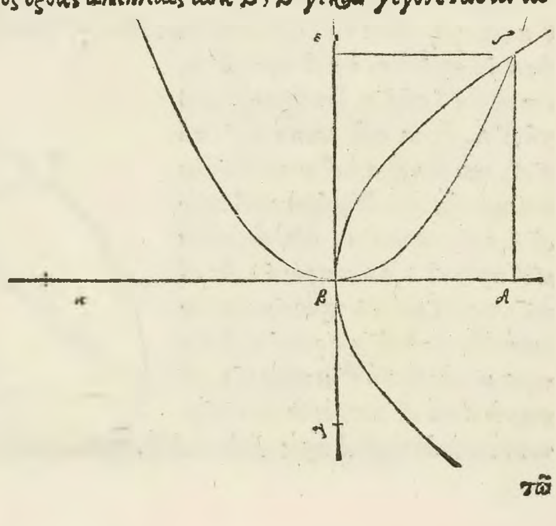
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ δ, ε. δεῖ δὴ τῶν δ, ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγονέτω καὶ ἔστωσαν αἱ β, γ. καὶ ἐκκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ αη, πεπερασμένη κατὰ τὸ α. καὶ πρὸς τῷ α τῇ γ ἴση κείσθω ἡ αζ. καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ζθ. καὶ τῇ β ἴση κείσθω ἡ ζθ. ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ δ, β, γ. τὸ ὑπὸ τῶν δ, γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β. τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς δ καὶ τῆς γ, τουτέστι τῆς αζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ζθ. ἐπὶ παραβολῆς ἄρα τῆς θ, διὰ τοῦ α γεγραμμένης, ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ θκ, ακ. καὶ ἐπεὶ δοθὲν τὸ ὑπὸ β, γ. ἴσον γάρ ἐστι τῷ ὑπὸ δ, ε. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ κθζ. ἐπὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ. δοθὲν ἄρα τὸ θ, ὥστε καὶ τὸ ζ. συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ δ, ε. ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ αη πεπερασμένη κατὰ τὸ α, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ α παραβολή. ἧς ἄξων μὲν ἡ αη, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ δ. αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν αη ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν δ παρακείμενα χωρία, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ α σημείῳ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ αθ.



καὶ ὀρθὴ ἡ ακ, καὶ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ γεγράφθω ὑπερβολή, ἀφ' ἧς αἱ παρὰ τὰς κα, αζ ἀχθεῖσαι ποιήσουσι τὸ χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ δ, ε, τέμνει δὴ τὴν παραβολήν. τεμνέτω κατὰ τὸ θ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ θκ, θζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ζθ, ἴσον τῷ ὑπὸ δ, γ, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ δ, ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θζα, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζα πρὸς τὴν ε. ἀλλ' ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα, καὶ ἡ ζα πρὸς ε. κείσθω τῇ μὲν θζ ἴση ἡ β, τῇ δὲ αζ ἴση ἡ γ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ πρὸς τὴν β, ἡ β πρὸς τὴν γ, καὶ ἡ γ πρὸς ε. αἱ δ, β, γ, ε ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ αβ, βγ. καὶ γεγονέτωσαν αὐτῶν μέσαι αἱ δβ, βε. ὥστε εἶναι, ὡς τὴν γβ πρὸς βδ, οὕτως τὴν βδ πρὸς βε, καὶ τὴν βε πρὸς βα. καὶ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ δζ, εζ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ δβ πρὸς βε. τὸ ἄρα ὑπὸ γβε, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ, τουτέστι τῆς εζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βε. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εζ, τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν βε. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς βε, ἡ βε πρὸς βδ. τὸ ἄρα ὑπὸ αβδ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βδ, ἴσον ἐστὶ



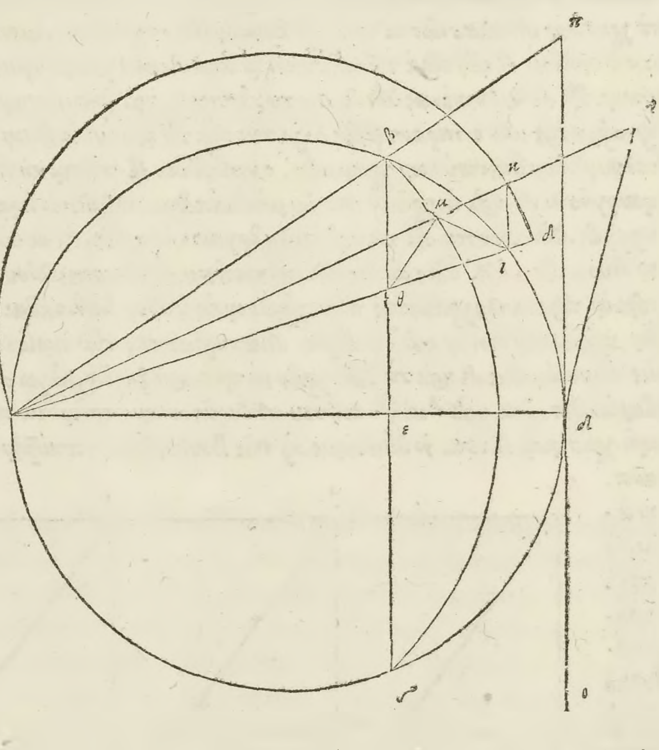
τῷ

τῷ ἀπὸ εβ, τουτέστι τῇ δζ. τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν βδ. ἅπτεται δὲ καὶ ἑτέρας δοθείσης τῆς περὶ τὴν βζ. δοθὲν ἄρα τὸ ζ, καὶ κάθετοι αἱ ζδ, ζε. καὶ δοθέντα τὰ δ, ε. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ αβ, βγ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ ἄπειρον ἀπὸ τοῦ β, βδ, βε. καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν βε παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν βε, δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν βγ. πάλιν γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν δβ παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν αβ. τέμνουσι δὴ ἀλλήλας αἱ παραβολαί. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ζδ, ζε. ἐπεὶ οὖν ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζε, τουτέστιν ἡ δβ, τὸ ἄρα ὑπὸ γβε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ βδ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γβ πρὸς βδ, ἡ δβ πρὸς βε. πάλιν ἐπεὶ ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζδ, τουτέστιν ἡ εβ, τὸ ἄρα ὑπὸ δβα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εβ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δβ πρὸς βε, ἡ βε πρὸς βα. ἀλλ᾽ ὡς ἡ δβ πρὸς βε, οὕτως ἡ γβ πρὸς βδ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γβ πρὸς βδ, ἡ βδ πρὸς βε, καὶ ἡ εβ πρὸς βα. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ. γραφέντος δὲ ὑπ᾽ αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ ὑπόμνημα τῶν ἥρωνος καμαρικῶν.

Η ΑΡΧΙΤΟΥ ΕΥΡΕΣΙΣ, ΩΣ ΕΥΔΗΜΟΣ ἱστορεῖ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αδ, γ. δεῖ δὴ τῶν αδ, γ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγράφθω περὶ τὴν μείζονα τὴν αδ κύκλος, ὁ αβδζ. καὶ τῇ γ ἴση ἐνηρμόσθω ἡ αβ. καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ἀπὸ τοῦ δ, ἐφαπτομένῃ τοῦ κύκλου κατὰ τὸ π. παρὰ δὲ τὴν πδο ἤχθω ἡ βεζ. καὶ νενοήσθω ἡμικυλίνδριον ὀρθὸν ἐπὶ τοῦ αβδ ἡμικυκλίου. ἐπὶ δὲ τῆς αδ ἡμικύκλιον ὀρθὸν, ἐν τῷ τοῦ ἡμικυλινδρίου παραλληλογράμμῳ κείμενον. τοῦτο δὴ τὸ ἡμικύκλιον περιαγόμενον ὡς ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ β, μένοντος τοῦ α πέρατος τῆς διαμέτρου, τεμεῖ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐν τῇ περιαγωγῇ, καὶ γράψει ἐν αὐτῇ γραμμήν τινα. πάλιν δὲ ἐὰν τῆς αδ



μενούσης τὸ απδ τρίγωνον περιενεχθῇ τὴν ἐναντίαν τῷ ἡμικυκλίῳ κίνησιν, κωνικὴν ποιήσει ἐπιφάνειαν τῇ απ εὐθείᾳ, ἣ δὴ περιαγομένη συμβαλεῖ τῇ κυλινδρικῇ γραμμῇ κατά τι σημεῖον. ἅμα δὲ καὶ τὸ β περιγράψει ἡμικύκλιον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. ἐχέτω δὴ θέσιν κατὰ τὸν τόπον τῆς συμπτώσεως τῶν γραμμῶν τὸ κινούμενον ἡμικύκλιον, ὡς τὴν τοῦ δκα. τὸ δὲ

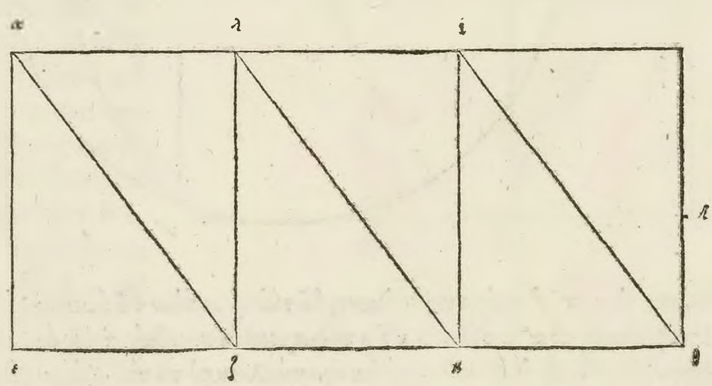
αὐτὸ

αὐτῇ περιαγόμενον τρίγωνον τὴν τοῦ δλα. τὸ δὲ τῆς εἰρημένης συμπτώσεως σημεῖον ἔστω τὸ κ. ἔστω δὲ καὶ τὸ διὰ τοῦ β γραφόμενον ἡμικύκλιον τὸ βμζ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ καὶ τοῦ βδζα κύκλου ἔστω ἡ βζ. καὶ ἀπὸ τοῦ κ ἐπὶ τὸ τοῦ βδα ἡμικυκλίου ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω. πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, διὰ τὸ ὀρθὸν ἑστάναι τὸν κύλινδρον. πιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ κι. καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ι ἐπὶ τὸ α ἐπιζευχθεῖσα συμβαλέτω τῇ βζ κατὰ τὸ θ. ἡ δὲ αλ τῷ βμζ ἡμικυκλίῳ κατὰ τὸ μ. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ κδ, μι, μθ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν δκα, βμζ ἡμικυκλίων ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ μθ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ. ὥστε καὶ πρὸς τὴν βζ ὀρθή ἐστιν ἡ μθ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θβ, θζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θα, θι, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ μθ. ὅμοιον ἐστὶ ἄρα τὸ αμι τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν μιθ, μαθ. καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ιμα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δκα ὀρθή. παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ κδ, μι. καὶ ἔσται ἀνάλογον ὡς ἡ δα πρὸς ακ, τουτέστιν ἡ κα πρὸς αι, οὕτως ἡ ια πρὸς αμ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. τέσσαρες ἄρα αἱ δα, ακ, αι, αμ ἑξῆς ἀνάλογον εἰσί. καὶ ἔστιν ἡ αμ ἴση τῇ γ. ἐπεὶ καὶ τῇ αβ. δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν αδ, γ, δύο μέσαι ἀνάλογον ηὕρηνται αἱ ακ, αι.

ΩΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΣ.

Βασιλεῖ Πτολεμαίῳ ἐρατοσθένης χαίρειν.

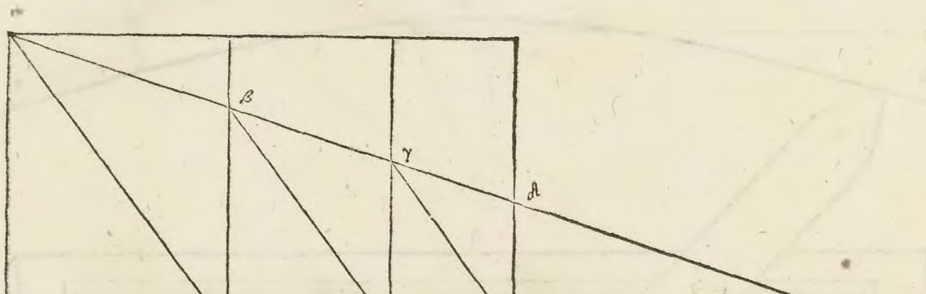
Τῶν ἀρχαίων τινὰ τραγῳδοποιῶν φασιν, εἰσαγαγεῖν τὸν μίνω τῷ γλαύκῳ κατασκευάζοντα τάφον. πυθόμενον δὲ ὅτι πανταχοῦ ἑκατόμπεδος εἴη, εἰπεῖν, μικρόν γ' ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου, διπλάσιον ἔστω. τοῦ δὲ κύβου μὴ σφαλῇς, διπλασιάζων ἕκαστον κῶλον ἐν πάχει τάφου, ἐδόκει διημαρτηκέναι. τῶν γὰρ πλευρῶν διπλασιασθεισῶν, τὸ μὲν ἐπίπεδον γίνεται τετραπλάσιον, τὸ δὲ στερεὸν ὀκταπλάσιον. ἐζητεῖτο δὴ καὶ παρὰ τοῖς γεωμέτραις, τίνα ἄν τις τρόπον τὸ δοθὲν στερεὸν διαμένον ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι διπλασιάσειεν. καὶ ἐκαλεῖτο τὸ τοιοῦτον πρόβλημα, κύβου διπλασιασμός. ὑποθέμενοι γὰρ κύβον, ἐζήτουν τοῦτον διπλασιάσαι. πάντων δὲ διαπορούντων ἐπὶ πολὺν χρόνον, πρῶτος ἱπποκράτης ὁ χῖος ἐπενόησεν, ὅτι ἐὰν εὑρεθῇ δύο εὐθειῶν γραμμῶν, ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος ἐστὶ διπλασία, δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, διπλασιασθήσεται ὁ κύβος, ὥστε τὸ ἀπόρημα αὐτοῦ εἰς ἕτερον οὐκ ἔλασσον ἀπόρημα κατέστρεφεν. μετὰ χρόνον δέ τινά φασιν δηλίους ἐπιβαλλομένους κατὰ χρησμὸν διπλασιάσαι τινὰ τῶν βωμῶν ἐπιταχθέντας, ἐμπεσεῖν εἰς τὸ αὐτὸ ἀπόρημα. διαπεμψαμένοις δὲ τοὺς παρὰ τῷ πλάτωνι ἐν ἀκαδημίᾳ γεωμέτρας, ἀξιοῦν αὐτοῖς εὑρεῖν τὸ ζητούμενον. τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοῖς, καὶ ζητούντων, δύο δοθεισῶν δύο μέσας λαβεῖν, ἀρχύτας μὲν ὁ ταραντῖνος λέγεται διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὑρηκέναι, εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν. συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι. χειρουργῆσαι δὲ, καὶ εἰς χρείαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι, πλὴν ἐπὶ βραχύ τι τοῦ μεναίχμου, καὶ ταῦτα δυσχερῶς. ἐπινενόηται δέ τις ὑφ' ἡμῶν ὀργανικὴ ῥᾳδία, δι' ἧς εὑρήσομεν, δύο τῶν δοθεισῶν οὐ μόνον δύο μέσας, ἀλλ' ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ. τούτου δὲ εὑρισκομένου δυνησόμεθα καθόλου τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλογράμμοις περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστάναι, ἢ ἐξ ἑτέρου εἰς ἕτερον σχηματίζειν, καὶ ὅμοιον ποιεῖν καὶ ἐπαύξειν διατηροῦντας τὴν ὁμοιότητα. ὥστε καὶ βωμοὺς, καὶ ναούς. δυνησόμεθα δὲ καὶ τὰ τῶν ὑγρῶν μέτρα, καὶ ξηρῶν, λέγω δὲ οἷον μετρητὴν μεδίμνων εἰς κύβον καθιστάναι, καὶ διὰ τῆς τούτου πλευρᾶς ἀναμετρεῖν τὰ τούτων δεκτικὰ ἀγγεῖα πόσον χωρεῖ. χρήσιμον δὲ ἔσται τὸ ἐπινόημα, καὶ τοῖς βουλομένοις ἐπαύξειν καταπαλτικὰ καὶ λιθόβολα ὄργανα. δεῖ γὰρ ἀνάλογον ἅπαντα αὐξηθῆναι, καὶ τὰ πάχη καὶ τὰ μεγέθη, καὶ τὰς κατατρήσεις, καὶ τὰς χοινικίδας, καὶ τὰ ἐμβαλλόμενα νεῦρα, εἰ μέλλει καὶ ἡ βουλὴ ἀνάλογον ἐπαυξηθῆναι. ταῦτα δὲ οὐ δυνατὰ γενέσθαι ἄνευ τῆς τῶν μέσων εὑρέ-



σεως.

σεως. τὴν δὲ ἀπόδειξιν καὶ τὴν κατασκευὴν τοῦ λεχθέντος ὀργάνου ὑπογέγραφά σοι. δεδόσθωσαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ αε, δθ. καὶ κείσθω ἐπί τινος εὐθείας τῆς εθ πρὸς ὀρθὰς ἡ αε, καὶ ἐπὶ τῆς εθ τρία συνεστάτω παραλληλόγραμμα ἐφεξῆς, τὰ αζ, ζι, ιθ. καὶ ἤχθωσαν διάμετροι ἐν αὐτοῖς, αἱ αζ, λη, ιθ. ἔσονται δὴ αὗται παράλληλοι. μένοντος δὴ τοῦ μέσου παραλληλογράμμου τοῦ ζι συνωσθήτω, τὸ μὲν αζ ἐπάνω τοῦ μέσου, τὸ δὲ ιθ ὑποκάτω, καθάπερ ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἕως οὗ γένηται τὰ α β γ δ κατ' εὐθεῖαν. καὶ διήχθω διὰ τῶν α, β, γ, δ σημείων εὐθεῖα. καὶ συμπιπτέτω τῇ εθ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ κ. ἔσται δὴ ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε, ζβ παραλλήλοις, ἡ εκ πρὸς κζ. ἐν δὲ ταῖς αζ, βη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη. ὡς ἄρα ἡ ακ πρὸς κβ, ἡ εκ πρὸς κζ, καὶ ἡ κζ πρὸς κη. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ βκ πρὸς κγ, ἐν μὲν ταῖς βζ, γη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη. ἐν δὲ ταῖς βη, γθ παραλλήλοις ἡ ηκ πρὸς κθ. ὡς ἄρα ἡ βκ πρὸς κγ, ἡ ζκ πρὸς κη, καὶ ἡ ηκ πρὸς κθ. ἀλλ' ὡς ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ εκ πρὸς κζ. καὶ ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ ζκ πρὸς κη, καὶ ἡ ηκ πρὸς κθ. ἀλλ' ὡς ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ αε πρὸς βζ. ὡς δὲ ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ βζ πρὸς γη. ὡς δὲ ἡ ηκ πρὸς κθ, ἡ γη πρὸς δθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς βζ, ἡ βζ πρὸς γη, καὶ ἡ γη πρὸς δθ. ηὕρηνται ἄρα τῶν αε, δθ δύο μέσαι, ἥτε βζ καὶ ἡ γη.

Ταῦτα οὖν ἐπὶ τῶν γεωμετρουμένων ἐπιφανειῶν ἀποδέδεικται. ἵνα δὲ καὶ ὀργανικῶς δυνώμεθα τὰς δύο μέσας λαμβάνειν, διαπήγνυται πλινθίον ξύλινον, ἢ ἐλεφάντινον, ἢ χαλκοῦν ἔχον τρεῖς πινακίσκους ἴσους ὡς λεπτοτάτους. ὧν ὁ μὲν μέσος ἐνήρμοσται, οἱ δὲ δύο ἐπωστοί εἰσιν ἐν χολέδραις, τοῖς δὲ μεγέθεσι καὶ ταῖς συμμετρίαις ὡς ἕκαστοι ἑαυτοὺς πείθουσι. τὰ μὲν γὰρ τῆς ἀποδείξεως ὡσαύτως συντελεῖται. πρὸς δὲ τὸ ἀκριβέστερον λαμβάνεσθαι τὰς γραμμὰς φιλοτεχνητέον, ἵνα ἐν τῷ συνάγεσθαι τοὺς πινακίσκους παράλληλα διαμένῃ πάντα καὶ ἄσχαστα, καὶ ὁμαλῶς συναπτόμενα ἀλλήλοις. ἐν δὲ τῷ ἀναθήματι, τὸ μὲν ὀργανικὸν χαλκοῦν ἐστι, καὶ καθήρμοσται ὑπ' αὐτὴν τὴν στεφάνην τῆς στήλης προσμεμολυβδοχημένον, ὑπ' αὐτοῦ δὲ ἡ ἀπόδειξις συντομώτερον φραζομένη καὶ τὸ σχῆμα, μετ' αὐτὸ δὲ ἐπίγραμμα. ὑπογεγράφθω οὖν σοι καὶ ταῦτα, ἵνα ἔχεις καὶ ὡς ἐν τῷ ἀναθήματι. τῶν δὲ δύο σχημάτων τὸ δεύτερον γέγραπται ἐν τῇ στήλῃ.



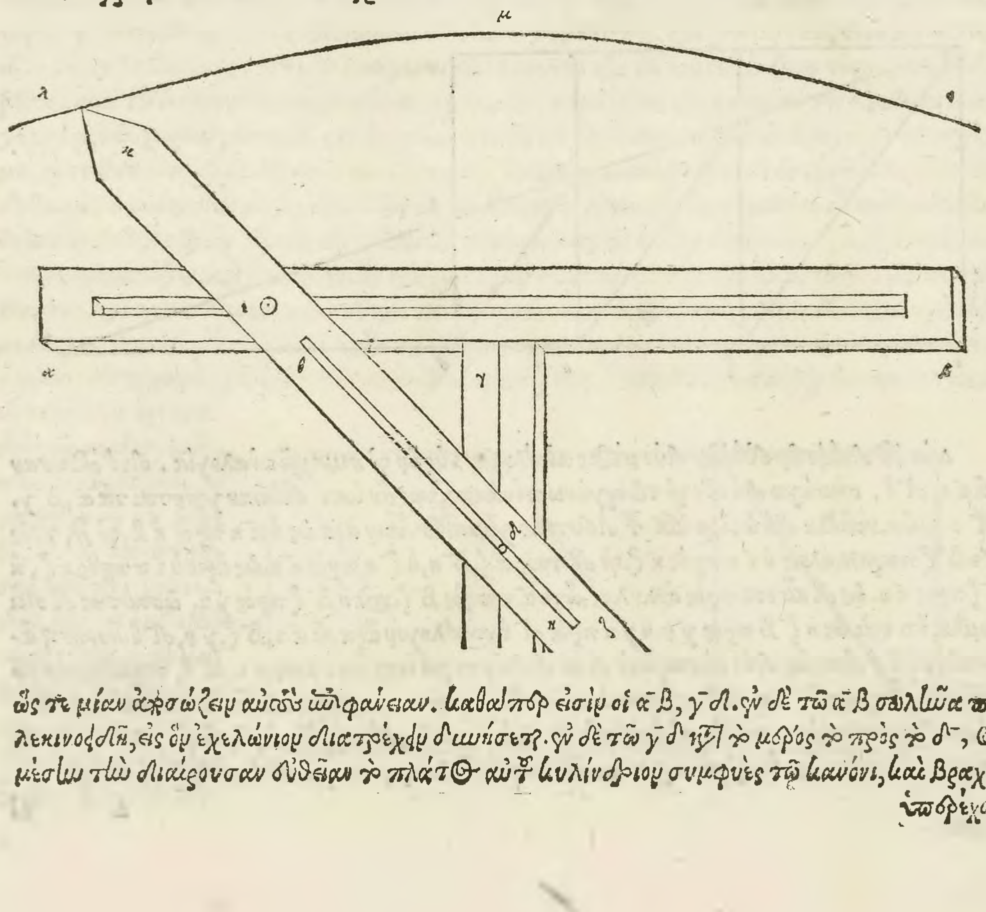
Δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. δεδόσθωσαν αἱ αε, δθ. συνάγω δὴ τοὺς ἐν τῷ ὀργάνῳ πίνακας, ἕως ἂν κατ' εὐθεῖαν γένηται τὰ α, β, γ, δ σημεῖα. νοείσθω δὴ ὡς ἔχει ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε, βζ παραλλήλοις ἡ εκ πρὸς κζ. ἐν δὲ ταῖς αζ, βη, ἡ ζκ πρὸς κη. ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ κζ πρὸς κη. ὡς δὲ αὗται πρὸς ἀλλήλας, ἥτε αε πρὸς βζ καὶ ἡ βζ πρὸς γη. ὡσαύτως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς ἡ ζβ πρὸς γη, ἡ γη πρὸς δθ. ἀνάλογον ἄρα αἱ αε, βζ, γη, δθ. ηὕρηνται ἄρα δύο τῶν δοθεισῶν δύο μέσαι. ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι μὴ ἴσαι ὦσι ταῖς αε, δθ, ποιήσαντες αὐταῖς ἀνάλογον τὰς αε, δθ, τούτων ληψόμεθα τὰς μέσας, καὶ ἐπανοίσομεν ἐπ' ἐκείνας, καὶ ἐσόμεθα πεποιηκότες τὸ ἐπιταχθέν. ἐὰν δὲ πλείους μέσας ἐπιταχθῇ εὑρεῖν, ἀεὶ ἑνὶ πλείους πινακίσκους κατασκευασόμεθα ἐν τῷ ὀργανίῳ τῶν ληφθησομένων μέσων, ἡ δὲ ἀπόδειξις ἡ αὐτή.

Εἰ κύβου ἐξ ὀλίγου διπλάσιον ὠγαθὲ τεύχειν
    φράζεαι, τὴν στερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν.
Εὖ μεταμορφῶσαι, τόδε τοι πάρα κἂν σύγε μάνδρην
    Ἢ † σεῖρον, ἢ κοίλου φρέατος εὐρὺ κύτος.
Τῇ δ' ἀναμετρήσαιο μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
    Συνδρομάδας δισσῶν ἐντὸς ἕλῃς κανόνων.
Μὴ δὲ σύγ' ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων,
    Μὴ δὲ μενεχμείους κωνοτομεῖν τριάδας
Δίζηαι. μὴ δ' εἴ τι θεουδέος εὐδόξοιο,
    Κάμπυλον ἐν γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται.
Τοῖσδε γὰρ ἐν πινάκεσσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις,
    Ῥεῖα κεν ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος.
Εὐαίων πτολεμαῖε πατὴρ ὅτι παιδὶ συνηβῶν
    Πάνθ' ὅσα καὶ μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα.
Αὐτὸς ἐδωρήσω τὸ δ' ἐς ὕστερον οὐράνιε ζεῦ.
    Καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.
Καὶ τὰ μὲν ὡς τελέοιτο, λέγοι δέ τις ἄνθεμα λεύσσων
    Τοῦ κυρηναίου τοῦτ' ἐρατοσθένεος.

† σωρὸν

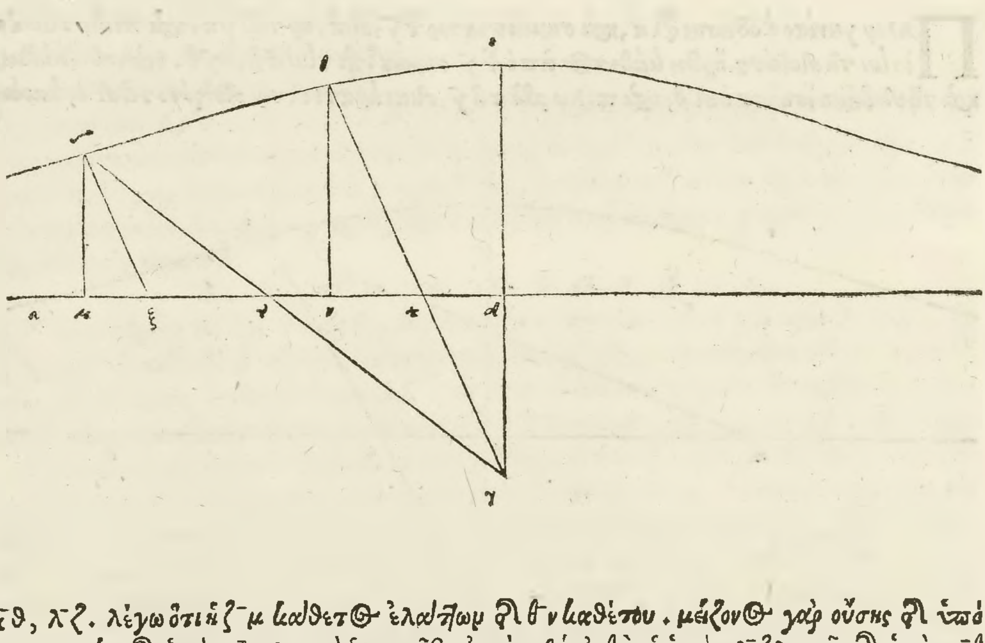
ΩΣ ΝΙΚΟΜΗΔΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΚΟΓχοειδῶν γραμμῶν.

Γράφει δὲ καὶ νικομήδης ἐν τῷ ἐπιγεγραμμένῳ πρὸς αὐτοῦ περὶ κογχοειδῶν συγγράμματι ὀργάνου κατασκευὴν τὴν αὐτὴν ἀποπληροῦντος. ἐφ' ὃ καὶ μεγάλα μὲν σεμνυνόμενος φαίνεται ὁ ἀνὴρ, πολλὰ δὲ τοῖς ἐρατοσθένους ἐπεγγελῶν εὑρήμασιν, ὡς ἀμηχάνοις τε ἅμα καὶ γεωμετρικῆς ἕξεως ἐστερημένοις, ὅτι ἐὰν ἐλλείποις. τῶν κρίνω περὶ τὸ πρόβλημα πεπονηκότων ἕν τε πρὸς ἐρατοσθένη συγκρίσεως ἕνεκα, καὶ αὐτὸν τοῖς ἤδη γεγραμμένοις, συνάπτομεν δυνάμει γράφοντα οὕτως. Νοεῖν χρὴ κανόνας δύο πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις συμβεβλημένους οὕτως,



ὥστε μίαν ἀποσώζειν αὐτῶν ἐπιφάνειαν. καθάπερ εἰσὶν οἱ αβ, γδ. ἐν δὲ τῷ αβ σωλῆνα πελεκινοειδῆ, εἰς ὃν χελώνιον διατρέχειν δυνήσεται. ἐν δὲ τῷ γδ κατὰ τὸ μέρος τὸ πρὸς τὸ δ, καὶ μέσην τὴν διαιροῦσαν εὐθεῖαν τὸ πλάτος αὐτοῦ κυλίνδριον συμφυὲς τῷ κανόνι, καὶ βραχὺ ὑπερέχον τῆς ἄνωθεν ἐπιφανείας αὐτοῦ τοῦ κανόνος. ἄλλον δὲ κανόνα ὡς τὸν ε ζ μετὰ βραχύ τι διάστημα τοῦ πρὸς τὸ ζ πέρατος ἀνατομὴν ἔχοντα, ὡς τὴν η θ, δυναμένην περιβαίνειν τῷ πρὸς τῷ δ κυλινδρίῳ. πρὸς δὲ τῷ ε ὀπὴν στρογγύλην, ἥ τις ἐγκλεισθήσεται εἰς τὸν ἀξόνιον, συμφυὲς τῷ διατρέχοντι χελωναρίῳ ἐν τῷ πελεκινοειδεῖ σωλῆνι, τῷ ὄντι ἐν τῷ α β κανόνι. ἐναρμοσθέντος τοίνυν τοῦ ε ζ κανόνος, κατὰ μὲν τὴν η θ ἀνατομὴν, ἐν τῷ πρὸς τὸ ζ κυλινδρίῳ, κατὰ δὲ τὴν ε ὀπὴν ἐν τῷ ἀξονίῳ τῷ συμφυεῖ τῷ χελωναρίῳ, ἐάν τις ἐπιλαβόμενος τοῦ κ ἄκρου τοῦ κανόνος κινῇ αὐτὸν ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ α μέρη, ἔπειτα πρὸς τὸ β, τὸ μὲν ε σημεῖον ἀεὶ ἐπὶ τοῦ α β κανόνος ἐνεχθήσεται. ἡ δὲ η θ ἀνατομὴ ἐπὶ τῷ πρὸς τὸ δ κυλινδρίῳ κινηθήσεται, ἀεὶ τῆς μέσης τοῦ ε ζ κανόνος εὐθείας ἐν τῇ κινήσει διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ πρὸς τῷ δ κυλίνδρῳ νοουμένης. τῆς δὲ ε κ ὑπεροχῆς τοῦ κανόνος ἀεὶ τῆς αὐτῆς μενούσης. ἐὰν τοίνυν πρὸς τὸ κ ἐπινοήσωμεν τι γραφεῖον ἐφαπτόμενον τοῦ ἐδάφους, γραφήσεται τις γραμμὴ, οἵα ἐστὶν ἡ α μ ν, ἥν τινα καλεῖ νικομήδης κογχοειδῆ πρώτην γραμμὴν, καὶ διάστημα μὲν τῆς γραμμῆς τὸ ε κ μέγεθος τοῦ κανόνος, πόλον δὲ τὸ δ.

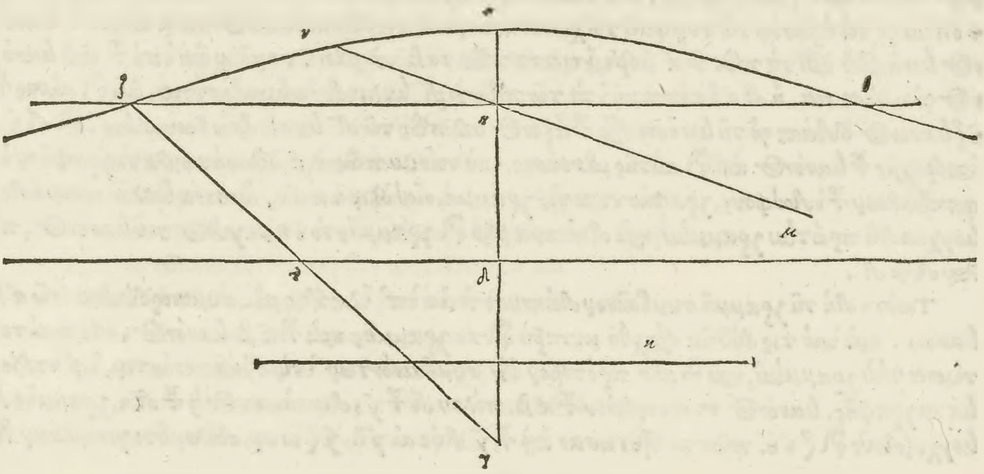
Ταύτῃ δὴ τῇ γραμμῇ συμβαῖνον δείκνυσι τὸ ἀεὶ ἐπ' ἔλαττον μὲν συμπορεύεσθαι τῷ α β κανόνι. καὶ ἐάν τις εὐθεῖα διαχθῇ μεταξὺ τῆς τε γραμμῆς καὶ τοῦ α β κανόνος, ὅτι πάντως τέμνει τὴν γραμμὴν, καὶ τὸ μὲν πρότερον τῶν συμβαινόντων ἐστὶν εὐκατανόητον, ἐφ' ἑτέρας καταγραφῆς, κανόνος τε νοουμένου τοῦ α β. πόλου δὲ τοῦ γ, διαστήματος δὲ τοῦ δ ε, γραμμῆς δὲ κογχοειδοῦς τῆς ζ ε η. προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ γ δύο αἱ γ θ, γ ζ ἴσων, δῆλον ὅτι γινομένων τῶν



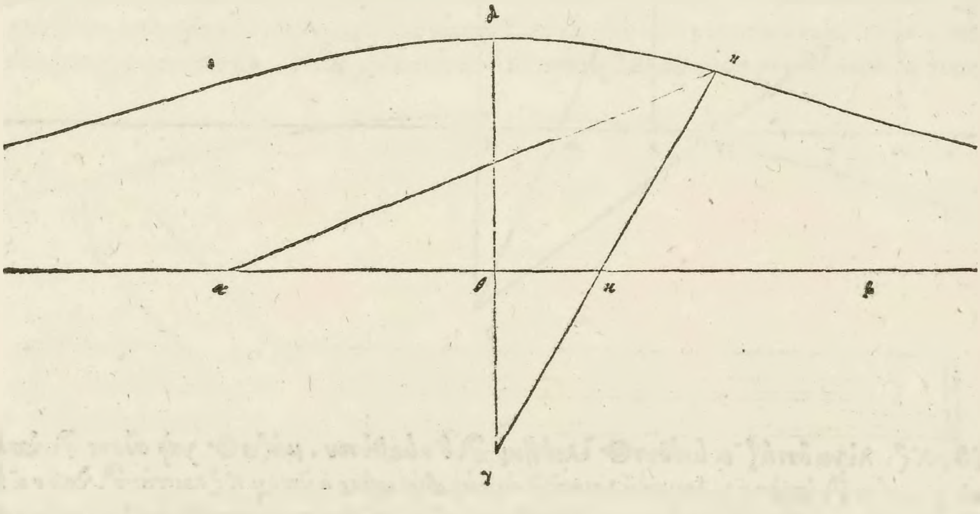
κ θ, λ ζ. λέγω ὅτι ἡ ζ μ κάθετος ἐλάττων τῆς θ ν καθέτου. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς ὑπὸ μ λ γ γωνίας τῆς ὑπὸ ν κ γ, λοιπὴ ἡ λοιποῦ ὅπου εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ μ λ ζ λοιπῆς τῆς ὑπὸ ν κ θ ἐστὶν ἐλάττων, καὶ διὰ τοῦτο ὀρθῶν οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς μ, ν, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τὸ ζ τῆς πρὸς τῷ θ. καὶ ἐὰν τῇ πρὸς τὸ θ ἴσην συστησόμεθα τὴν ὑπὸ μ ζ ξ, ἡ κ θ, τουτέστιν ἡ λ ζ πρὸς θ ν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἡ ξ ζ πρὸς ζ μ. ὥστε ἡ ζ λ πρὸς τὴν θ ν ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν ζ μ. καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἡ θ ν τῆς ζ μ.

Τὸ δὲ δεύτερον ἦν τὸ τὴν διαγομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τοῦ τε α β καὶ τῆς γραμμῆς τέμνειν τὴν γραμμὴν, ὅπερ τοῦτο δὲ οὕτω γίνεται γνώριμον. ἡ γὰρ διαγομένη, ἤτοι παράλληλός ἐστι τῇ α β ἢ οὔ. ἔστω πρότερον παράλληλος ὡς ἡ ζ η θ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἡ δ ε πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν κ. καὶ κέντρῳ τῷ γ, διαστήματι δὲ τῇ κ περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν ζ η κατὰ τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἡ λ ζ πρὸς ζ γ. ἀλλ' ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἦν ἡ δ ε πρὸς τὴν κ, τουτέστι τὴν γ ζ. ἴση ἄρα ἡ δ ε τῇ λ ζ ἀδύνατον, δεῖ γὰρ εἶναι τὸ ζ πρὸς τῇ γραμμῇ. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ἡ διαγομένη παράλληλος.

καὶ ἔστω ὡς ἡ μη ν. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ η παράλληλος τῇ αβ, ἡ ζη. ἡ ἄρα ζη συμπεσεῖται τῇ γραμμῇ, ὥστε πολλῷ μᾶλλον ἡ μν. τούτων δὲ ὄντων τῶν παρακολουθημάτων διὰ τοῦ ὀργάνου τὸ χρήσιμον εἰς τὸ προκείμενον δείκνυται οὕτως.



Πάλιν γωνίας δοθείσης τῆς α, καὶ σημείου ἐκτὸς τοῦ γ, διάγειν τὴν γη, καὶ ποιεῖν τὴν κη ἴσην τῇ δοθείσῃ. ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ γ σημείου ἐπὶ τὴν αβ, ἡ γθ. καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ δοθείσῃ ἴση ἔστω ἡ δθ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ δοθέντι τῷ δθ, κανόνι

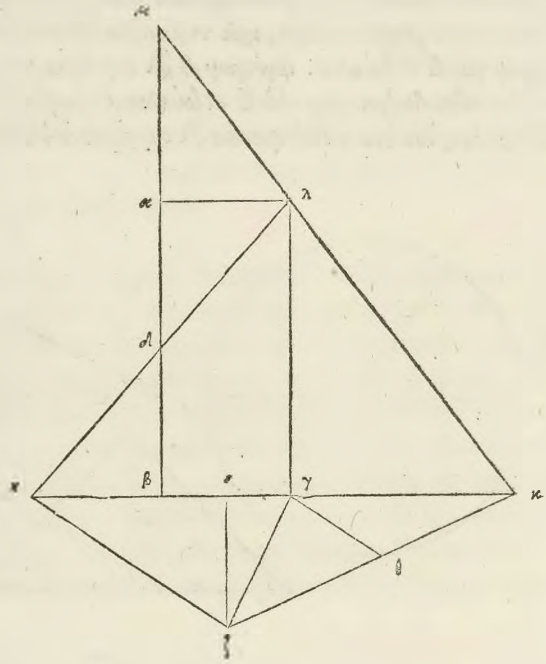


δὲ τῷ αβ, γεγράφθω κογχοειδὴς γραμμὴ πρώτη ἡ εδζ. συμβάλλει ἄρα τῇ αη, διὰ τὸ προδειχθέν, συμβαλλέτω κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γη. ἴση ἄρα ἡ κη τῇ δοθείσῃ.

Τούτων δειχθέντων, δεδόσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γλ, λα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς εὑρεῖν. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ αβγλ παραλληλόγραμμον, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, τοῖς δ, ε σημείοις, καὶ ἐπιζευχθεῖσα μὲν ἡ δλ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ γβ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ η. τῇ δὲ βγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εζ, καὶ προσβεβλήσθω ἡ γζ ἴση οὖσα τῇ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. καὶ αὐτῇ παράλληλος ἡ γθ. καὶ γωνίας οὔσης τῆς ὑπὸ τῶν κγθ, ἀπὸ δοθέντος τοῦ ζ, διήχθω ἡ ζθκ, ποιοῦσα ἴσην τὴν θκ τῇ αδ, ἢ τῇ γζ. τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν, ἐδείχθη διὰ τῆς κογχοειδοῦς. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κλ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ αβ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ μ, λέγω ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ φλ πρὸς κγ, ἡ κγ πρὸς μα,

καὶ

καὶ ἡ μα πρὸς τὴν αλ. ἐπεὶ ἡ βγ τέτμηται δίχα τῷ ε. καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ κγ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εκ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εζ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τῶν ἀπὸ γε εζ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ γζ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ κε εζ, τουτέστι τῷ ἀπὸ κζ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ μα πρὸς αβ, ἡ μλ πρὸς λκ. ὡς δὲ ἡ μλ πρὸς λκ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ μα πρὸς αβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ἔστι τῆς μὲν αβ ἡμίσεια ἡ αδ, τῆς δὲ βγ διπλῆ ἡ γη. ἐπεὶ καὶ ἡ λγ τῆς αδ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ μα πρὸς αδ, οὕτως ἡ ηγ πρὸς γκ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ηγ πρὸς γκ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θκ, διὰ τὰς παραλλήλους τὰς ηζ, γθ. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ μδ πρὸς δα, ἡ ζκ πρὸς κθ. ἴση δὲ ὑπόκειται καὶ ἡ αδ τῇ θκ, ἐπεὶ καὶ τῇ γζ ἴση ἐστὶν ἡ αδ. ἴση ἄρα καὶ ἡ μδ τῇ ζκ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ μδ, τὸ ἀπὸ ζκ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ μδ, ἴσον τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ δα. τῷ δὲ ἀπὸ ζκ, ἴσον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ.

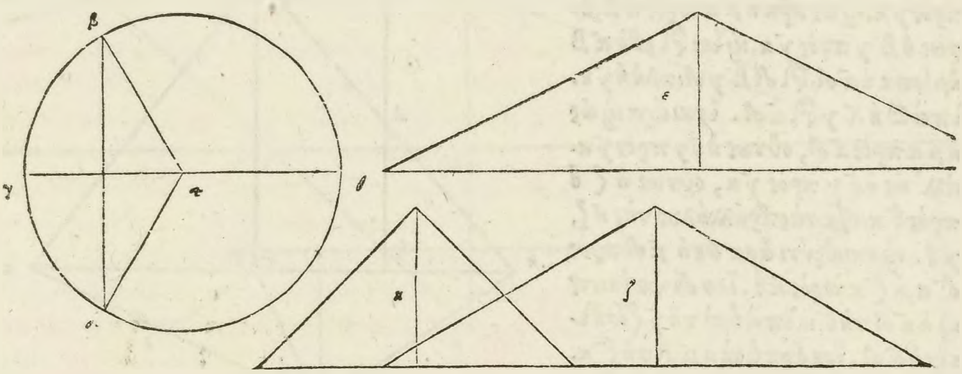


ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ λδ, τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ, ὧν τὸ ἀπὸ αδ ἴσον τῷ ἀπὸ γζ. ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ αδ τῇ γζ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ βμα τῷ ὑπὸ βκγ, ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βκ, ἡ κγ πρὸς αμ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ βμ πρὸς βκ, ἡ γλ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γλ πρὸς γκ, οὕτως ἡ γκ πρὸς αμ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς αλ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ γκ πρὸς αμ, καὶ ἡ αμ πρὸς αλ.

ΕΙΣ ΤΟ Β. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Καὶ συνθέντι, ὡς ἡ δθ πρὸς θγ, ἡ γα πρὸς αε. τουτέστι τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ὡς γὰρ ἐπὶ αὐτῆς τῆς ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς. ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ γβα, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ βε, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς αβ, ἡ βα πρὸς αε, καὶ ἡ γβ πρὸς βε. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως ἡ γα πρὸς αε. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς αε, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δείκνυται, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς γε, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ βε. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ἐστὶ πάλιν, ὡς ἡ μὲν αγ πρὸς γβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γε. τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. καὶ ὡς ἄρα ἡ αγ πρὸς γε, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. εἶτα ἐφεξῆς δεικνύναι πειρώμενος τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας, ἴσον τὸν βνζ κῶνον. ἐκθέμενος κῶνον τὸν ν, βάσιν μὲν ἔχοντα ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βαζ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. φησὶν ὅτι ὁ ν κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ζαβθ στερεῷ τομεῖ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἰστέον δὲ ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ οὐ τὸν τοιοῦτον τομέα ἀπεδείκνυεν ἴσον ὄντα τῷ οὕτως λαμβανομένῳ, ἀλλὰ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἐλάττονος ἡμισφαιρίου, ὅν τινα καὶ κυρίως ἐν τοῖς ὅροις τομέα στερεὸν καλεῖν ἐφαίνετο. ἔφασκεν γάρ, τομέα δὲ στερεὸν καλέω. ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνει τὰν κορυφὰν ἔχων ποτὶ τῷ κέντρῳ τᾶς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ κώνου ἐπιφανείας τᾶς ἐντὸς τοῦ κώνου. τὸ δὲ νῦν προκείμενον σχῆμα περιέχεται μὲν ὑπὸ κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς κορυφὴν ἐχούσης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀλλ᾽ οὐ τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης τοῦ κώνου. ὅτι δὲ οὖν τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἴσον γίνεται τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ σφαιρικῇ τῇ περιεχούσῃ τὸ τμῆμα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, δειχθήσεται οὕτως διὰ τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ δεδειγμένων.

Νενοήσθω χωρὶς σφαῖρα, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τῷ περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλῳ. κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ α. καὶ νενοείσθω κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ α σημεῖον. ἐκκείσθω δὲ κῶνος ὁ ε, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὁ ἄρα κῶ-



νος ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. τετραπλάσιος γάρ ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτό, ὅπερ ἡ σφαῖρα ἐδείχθη τετραπλασία. ἐκκείσθωσαν δὲ καὶ ἄλλοι δύο κῶνοι οἱ ζ η, ὧν ὁ μὲν ζ βάσιν ἐχέτω ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν β γ δ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὁ δὲ η βάσιν μὲν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν β θ δ τμήματος, ὕψος δὲ τὸ αὐτό. ὁ ζ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τομεῖ, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ α, ἐπιφάνεια δὲ σφαιρικὴ ἡ κατὰ τὴν β γ δ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ ε κώνου βάσις ταῖς τῶν ζ, η κώνων βάσεσι, καί εἰσιν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα τοῖς ζ, η κώνοις. ἀλλ' ὁ ζ ἴσος ἐδείχθη τῷ κατὰ τὴν β γ δ στερεῷ τομεῖ, κορυφὴν ἔχοντι τὸ α. λοιπὸς ἄρα ὁ η κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ λοιπῷ τμήματι, βάσιν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κατὰ τὴν β θ δ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου.

Εἶτα πάλιν φησίν, ἴσος ἄρα ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ὁ β θ ζ α τομεύς, τῷ β θ ζ κ σχήματι. ἐπεὶ γὰρ συνήχθη ὁ ν κῶνος, ἴσος ὢν κώνῳ οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θ κ. ὁ δὲ κῶνος οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ ε κ, ἴσος τῷ τε εἰρημένῳ κώνῳ, καὶ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ε θ. πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ε θ. λοιπὸν τὸ β θ ζ κ σχῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θ κ. τουτέστι τῷ ν κώνῳ, τουτέστι τῷ β α θ ζ τομεῖ.

Ἐπαγαγὼν δὴ τὸ ἐκ τῶν συναχθέντων πόρισμα ἐπὶ τέλει τοῦ θεωρήματος, ἑξῆς δι' ἑτέρας ἀποδείξεως συνάγει τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ θεωρήματος, τουτέστιν ὅτι τὸ β α ζ τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ β κ ζ κώνῳ. καὶ προϊὼν φησὶν ὡς ἄρα ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. καὶ ὅλη ἡ κ δ πρὸς δ θ ἐστὶν ὡς ἡ δ θ πρὸς δ γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ κ θ πρὸς θ δ, ἡ θ γ πρὸς γ δ. καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κ δ πρὸς δ θ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. τουτέστιν ἡ κ θ πρὸς θ α. ἦν γὰρ ὡς ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. ἴση δὲ ἡ θ γ τῇ θ α. καὶ μετ' ὀλίγον, ὡς ἄρα ἡ κ θ πρὸς δ θ, οὕτως ἡ α ε πρὸς ε γ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κ δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν κ θ δ, οὕτως τὸ ἀπὸ α γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν α ε γ. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ κ δ, α γ. καὶ ἔστω ὡς ἡ κ θ πρὸς θ δ, οὕτως ἡ α ε πρὸς ε γ. λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ κ δ, πρὸς τὸ ὑπὸ κ θ δ, οὕτως τὸ ἀπὸ α γ πρὸς

τὸ ὑπὸ

τὸ ὑπὸ αεγ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ κδ πρὸς δθ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, ὡς τὸ ἀπὸ αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. ἀλλ' ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, κοινοῦ ὕψους τῆς θδ λαμβανομένης. ὡς δὲ ἡ αε πρὸς εγ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, κοινοῦ πάλιν ὕψους λαμβανομένης τῆς εγ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ἀπὸ θδ πρὸς τὸ ἀπὸ δκ, οὕτως τὸ εγ πρὸς τὸ ἀπὸ γα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ αγ. καὶ ἀνάπαλιν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

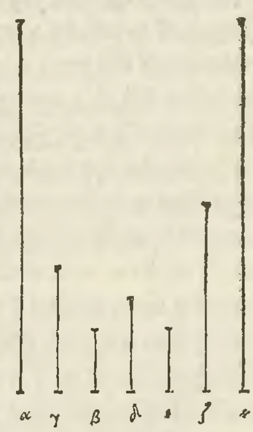
Ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλοις τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γβ. ὡς γὰρ ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ αδβ κάθετος ἦκται, καὶ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἡ δγ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ βγ πρὸς δγ, ἡ βδ πρὸς δα. καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ βγ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ, οὕτως ἡ πρώτη ἡ βγ πρὸς τρίτην τὴν γα. καὶ ὡς ἄρα ἡ βγ πρὸς γα, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα. δοθεὶς δὲ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ γ σημεῖον. ἐπεὶ γὰρ ἡ σφαῖρα ὑπόκειται δεδομένη, δέδοται ἄρα καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς ἡ δγ. καὶ δέδοται ὁ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ. ἐὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον διαιρεθῇ, δέδοται ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ὥστε δοθεῖσά ἐστιν ἡ αγ, καὶ δοθὲν τὸ α. ἀπὸ γὰρ τῆς κοινῆς τομῆς ἐστι θέσει δεδομένων γραμμῶν, δέδοται, ἄρα καὶ τὸ γ.

ΕΙΣ ΤΟ Δ.

Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ κβ πρὸς βρ, καὶ ἡ δχ πρὸς χβ. ἐν γὰρ τῷ πρὸ τούτου συνήγετο οὕτως. ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κδ, δχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς βχ. ἐναλλὰξ, ὡς ἡ κδ, τουτέστιν ἡ κβ πρὸς βρ, ἡ δχ πρὸς χβ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λχ πρὸς χδ, οὕτως συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς χβ. διελόντι καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ δχ πρὸς χβ, ἡ κβ πρὸς βρ. ὡς ἄρα ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρλ πρὸς ὅλην κλ, ἐστὶν ὡς ἡ κλ πρὸς λδ. ὡς γὰρ ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ρλ πρὸς λκ, ἡ κλ πρὸς λδ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ ρλ πρὸς τὸ ἀπὸ λκ, οὕτως τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. ἀνάλογον γάρ εἰσιν, ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. κείσθω τῇ κβ ἴση ἡ βζ. ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ ρ πεσεῖται, δῆλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ χδ πρὸς χβ, οὕτως ἡ κβ πρὸς βρ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς βχ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ. ἐκτὸς ἄρα τοῦ ρ πίπτει τὸ ζ.

Ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς δλ πρὸς λχ δοθείς, καὶ τῆς ρλ πρὸς λχ, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ ὡς συναμφότερος ἡ κβ, χ πρὸς βχ, τουτέστιν ἡ ζχ πρὸς χβ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ. ἀναστρέψαντι ὡς ἡ χζ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ χλ πρὸς λδ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ βζ πρὸς ζχ, ἡ λδ πρὸς λχ. δέδοται δὲ ὁ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος. ἐπειδὴ ἡ μὲν ζβ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς δεδομένης σφαίρας. ἡ δὲ βχ τῶν β, χ περάτων αὐτῆς δεδομένων, καθ' ὑπόθεσιν τετμημένης τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ διὰ τῆς αγ ἐπιπέδου. καὶ τῆς δβ πρὸς ὀρθὰς οὔσης τῇ αγ δέδοται. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὅλη ἡ χζ. καὶ ὁ τῆς χζ πρὸς ζβ. ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν ἐπειδὴ δέδοται ὁ λόγος τῶν τμημάτων, καὶ ὁ τοῦ λαγ κώνου πρὸς αργ κῶνον λόγος ἐστὶ δοθείς. ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς χρ. πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη, καὶ ὅλης ἄρα τῆς ρλ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρας τῶν ρλ, λδ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. τὰ γὰρ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ρλ πρὸς λδ, καὶ ἡ λδ πρὸς λχ. Ὅτι μὲν ἡ σύνθεσις τῶν Περὶ συνθέσεως
λόγων λαμβάνεται τῆς λδ μέσης λαμβανομένης, ὡς κἂν τῇ στοιχειώσει ἐλαμβάνετο φανερόν. λόγων.
ἐπεὶ δὲ τὸ λεγόμενον ἀδιαρθρώτως, καὶ οὐχ οὕτως ὥστε τὴν ἔννοιαν ἀναπληρῶσαι λέλεκται,

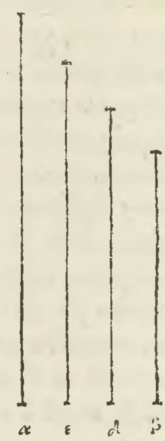
κται, ὡς ἔστιν εὑρεῖν ἐν τυγχάνοντας πάππῳ τε καὶ θέωνι καὶ ἀρκαδίῳ, ἐν πολλοῖς συντάγμασιν οὐκ ἀποδεικτικῆς, ἀλλ᾽ ἐπαγωγῇ τὸ λεγόμενον παριστῶσιν, οὐδένα τόπον πρὸς βραχὺ διατρίψαντας τῷ λόγῳ, τὸ σαφέστερον παραστῆσαι. φημὶ τοίνυν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν μέσος τις ὅρος ληφθῇ, ὁ τῶν ἐξ ἀρχῆς ληφθέντων ἀριθμῶν λόγος, σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν μέσον, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ μέσος πρὸς τὸν τρίτον, ὑπομνηστέον δὴ πρότερον πῶς ἐλέγετο λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι. ὡς γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ᾽ ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσιν τινά, πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ διδόμενος λόγος, ὥς φασιν ἄλλοι τε καὶ νικόμαχος ἐν τῷ πρώτῳ τῷ περὶ μουσικῆς, καὶ ἡρώνας ἐν τῷ ὑπομνήματι τῷ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν εἰσαγωγήν. τουτέστιν δὲ εἰπεῖν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ λόγου, καὶ ποιοῦντος τὸν ἡγούμενον. καὶ κυριώτερον μὲν ἐπὶ τῶν πολλαπλασίων ἡ πηλικότης ἂν λαμβάνοιτο. ἐπὶ δὲ τῶν ἐπιμορίων, ἢ ἐπιμερῶν, οὐκ ἔτι τὴν πηλικότητα δυνατὸν λαμβάνεσθαι, ἀδιαιρέτου μενούσης τῆς μονάδος, ὡς τὸ ἐπ᾽ ἐκείνων διαιρετέον τὴν μονάδα. εἰ καὶ μὴ κατὰ τὸ προσῆκον τῇ ἀριθμητικῇ, ἀλλὰ τῇ λογιστικῇ τυγχάνει. διαιρεῖται δὲ ἡ μονὰς κατὰ τὸ μέρος, ἢ τὰ μέρη ἀφ᾽ ὧν ὠνόμασται ὁ λόγος, ὥστε εἶναι ὡς ἐν σαφεστέρῳ τῷ λέγειν, τοῦ μὲν ἡμιολίου λόγου πηλικότητα πρὸς τῇ μονάδι, καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος. τοῦ δὲ ἐπιτρίτου πρὸς τῇ μονάδι τὸ τρίτον, ὥστε καθὰ καὶ ἀνωτέρω εἴρηται τὴν πηλικότητα τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον, πολλαπλασιαζομένην ποιεῖν τὸν ἡγούμενον. τοῦ γὰρ ἐννέα πρὸς τὰ ἓξ ἡμιολίου πηλικότης, ὅ ἐστι μονὰς καὶ τὸ ἥμισυ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸν ς̄ ποιεῖ τὸν θ̄, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων δὲ τὸ αὐτὸ ἔξεστι κατανοεῖν. τούτων δὴ προσαφηνισθέντων ἐπανακτέον ἐπὶ τὸ προτεθέν. Εστωσαν γὰρ οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ ᾱ, β̄. μέσος δὲ αὐτῶν εἰλήφθω τις ὁ γ̄. δεικτέον δή, ὅτι ὁ τοῦ ᾱ πρὸς τὸν β̄ λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ὁ ᾱ πρὸς τὸν γ̄, καὶ ὁ γ̄ πρὸς τὸν β̄. εἰλήφθω γὰρ τοῦ μὲν ᾱγ λόγου πηλικότης ὁ δ̄, τοῦ δὲ γ̄β ὁ ε̄. ὁ ἄρα ε̄ τὸν δ̄ πολλαπλασιάσας, τὸν ζ̄ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ ζ̄ πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ ᾱ πρὸς τὸν β̄ λόγου, τουτέστιν ὅτι ὁ ζ̄ τὸν β̄ πολλαπλασιάσας τὸν ᾱ ποιεῖ. ὁ γὰρ β̄ τὸν ζ̄ πολλαπλασιάσας, τὸν η̄ ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ β̄ τὸν μὲν ζ̄ πολλαπλασιάσας τὸν η̄ πεποίηκεν, τὸν δὲ ε̄ πολλαπλασιάσας τὸν γ̄. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ζ̄ πρὸς τὸν ε̄, ὁ η̄ πρὸς τὸν γ̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ δ̄ τὸν μὲν ε̄ πολλαπλασιάσας τὸν ζ̄ πεποίηκεν, τὸν δὲ γ̄ πολλαπλασιάσας τὸν ᾱ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε̄ πρὸς τὸν γ̄, ὁ ζ̄ πρὸς τὸν ᾱ. ἐναλλάξ, ὡς ὁ ε̄ πρὸς τὸν ζ̄, ὁ γ̄ πρὸς τὸν ᾱ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ὁ ζ̄ πρὸς τὸν ε̄, οὕτως ὁ ᾱ πρὸς τὸν γ̄. ἀλλ᾽ ὡς ὁ ζ̄ πρὸς τὸν ε̄, ἐδείχθη ὁ η̄ πρὸς τὸν γ̄. καὶ ὡς ἄρα η̄ πρὸς τὸν γ̄, ὁ ᾱ πρὸς τὸν γ̄. ἴσος ἄρα ὁ ᾱ τῷ η̄. ἀλλ᾽ ὁ β̄ τὸν ζ̄ πολλαπλασιάσας, τὸν η̄ πεποίηκεν. καὶ ὁ β̄ ἄρα τὸν ζ̄ πολλαπλασιάσας τὸν ᾱ ποιεῖ. ὁ ζ̄ ἄρα πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ ᾱ πρὸς τὸν β̄ λόγου. καὶ ἔστιν ὁ ζ̄ τοῦ δ̄ ἐπὶ τὸν ε̄ πολλαπλασιασθέντος, τουτέστι τῆς πηλικότητος τοῦ ᾱγ λόγου ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ γ̄β λόγου. ὁ ἄρα τοῦ ᾱ πρὸς τὸν β̄ λόγος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ ᾱ πρὸς τὸν γ̄, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β̄, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Ινα δὲ καὶ ἐπὶ ὑποδείγματος φανερὸν γένηται τὸ εἰρημένον, παρεμπιπτέτω τοῦ ῑβ, καὶ τοῦ β̄, μέσος τις ἀριθμὸς ὁ δ̄. λέγω ὁ τοῦ ῑβ πρὸς τὸν β̄ λόγος, τουτέστιν ὁ ἑξαπλάσιος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ τριπλασίου τοῦ ῑβ πρὸς τὰ δ̄, καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ δ πρὸς τὰ β̄. ἐὰν γὰρ τὰς πηλικότητας τῶν λόγων πολλαπλασιάσωμεν ἐπ᾽ ἀλλήλας, τουτέστι τὸν γ̄ ἐπὶ τὸν β̄, γίνεται ὁ ς̄ πηλικότης ὢν τοῦ ῑβ πρὸς τὰ β̄ λόγου. καὶ ἔστιν ἑξαπλάσιος, ὅνπερ καὶ προέκειτο ὑποδεῖξαι. εἰ δὲ καὶ ὁ μέσος παρεμπίπτων μὴ ὑπάρχῃ τοῦ μὲν μείζονος ἐλάττων, τοῦ δὲ ἐλάττονος μείζων, ἀλλ᾽ ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ ἀμφοτέρων μείζων, ἢ ἀμφοτέρων ἐλάττων. καὶ οὕτως ἡ σύνθεσις, ἡ προειρημένη ἀκολουθήσει, τοῦ θ̄ καὶ τοῦ ς̄ μέσος τις παρεμπιπτέτω ἀμφοτέρων μείζων ὁ ῑβ. λέγω ὅτι ἔκ τε τοῦ ὑπ᾽ ἐπιτρίτου τοῦ θ̄ πρὸς τὸν ῑβ λόγου,

καὶ τοῦ

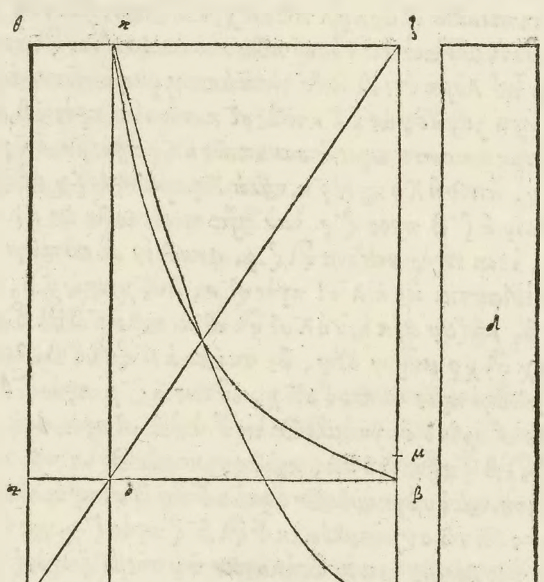
καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὸν ς, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος τοῦ θ πρὸς τὰ ς. ἡ γὰρ πηλικότης τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου ἐστὶ τρία τέταρτα, τουτέστιν ἥμισυ καὶ τέταρτον. ἡ δὲ πηλικότης τοῦ ιβ πρὸς τὸν ς ἐστὶν ὁ β. ἐὰν οὖν πολλαπλασιάσωμεν τὸν β ἐπὶ τὸ ἥμισυ καὶ τέταρτον, γίνεται μονὰς α καὶ ἥμισυ, ἥ τις πηλικότης ἐστὶ τοῦ ἡμιολίου λόγου, ὃν ἔχει καὶ ὁ θ πρὸς τὸν ς. ὁμοίως δὲ κἂν τοῦ θ καὶ τοῦ ς μέσος ἐμπέσῃ ὁ δ, ἐκ τοῦ θ πρὸς δ διπλασιεπιτετάρτου, καὶ τοῦ δ πρὸς ς ὑφημιολίου, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος λόγος. πάλιν γὰρ τὴν πηλικότητα τοῦ διπλασιεπιτετάρτου, τὰ β δ ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ ὑφημιολίου, τουτέστι τὰ δύο τρίτα, πολλαπλασιάσαντες ἕξομεν τὸ α ἥμισυ, πηλικότητα τοῦ ἡμιολίου ὡς εἴρηται λόγου, καὶ ἐπὶ πάντων ὁμοίως ὁ αὐτὸς ἁρμόσει λόγος. συμφανὲς δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων, ὡς ἐὰν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν, κἂν μὲν εἷς μέσος, πλείους δὲ παρεμπίπτωσιν ὅροι, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ πάντων τῶν λόγων, ὧν ἔχουσιν οἱ κατὰ τὸ ἑξῆς κείμενοι, ἀρχόμενοι ἀπὸ πρώτου, καὶ λήγοντες εἰς τὸν ἔσχατον τῇ κατὰ τὸ συνεχόμενους τάξει. δύο γὰρ ὅρων τῶν α, β παρεμπιπτέτωσαν πλείους ἑνὸς οἱ γ, δ. λέγω ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β. ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται. ὁ δὲ τοῦ α πρὸς τὸν δ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ. ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δειχθήσεται.



Ἔτι ἐν τῷ ῥητῷ φησίν, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ρλ πρὸς λδ, ἐδείχθη τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ δλ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ἐδείχθη γάρ, ὡς ἡ κλ πρὸς λδ, ἡ βδ πρὸς δχ, διὰ τοῦ συνθέντι. ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. πεποιήσθω δὲ ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζθ. τὸ θ σημεῖον ὅπως ποτὲ μὲν ἐὰν τεθῇ ὅσον πρὸς τὴν ἀκολουθίαν τῆς ἀποδείξεως, κατ' οὐδὲν ἐμποδὼν γίνεται τῷ λόγῳ. ὅτι δὲ καθὰ ἐν τῇ καταγραφῇ κεῖται ἀεὶ μεταξὺ τῶν β, ρ πίπτει οὕτω δι' ἀλλήλων. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ λκ πρὸς δκ, τουτέστι πρὸς κβ, οὕτως ἡ κρ πρὸς ρβ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἡ λρ πρὸς ρκ, ἡ κρ πρὸς ρβ. μείζονα δὲ λόγον ἔχει ἡ λρ πρὸς ρχ, ἤπερ ἡ λρ πρὸς ρκ. καὶ ἡ λρ ἄρα πρὸς ρχ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κρ πρὸς βρ. τουτέστιν ἡ ζβ πρὸς ζρ. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτως τὴν βζ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς ζρ. φανερὸν δὲ αὐτόθεν ὅτι ἡ ζθ τῆς θβ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ λδ τῆς δκ, καὶ ἡ κβ τῆς βρ. ὥστε καὶ ἡ λδ τῆς βρ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ λχ τῆς χρ μείζων ἐστίν, ὥστε καὶ ἡ θζ τῆς θβ. λοιπὸν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βδ, τουτέστι τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, οὕτως ἡ ζχ πρὸς ζθ. ἐπεὶ γὰρ τῷ τῆς βζ πρὸς θζ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ τῆς βζ πρὸς ζχ. ὁ αὐτὸς δὲ τῷ τῆς βζ πρὸς ζθ ἐστί, καὶ ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς ζχ πρὸς ζθ λόγου. καὶ ὁ συγκείμενος ἄρα ἐκ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς χζ πρὸς ζθ. ἐὰν οὖν τὸν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς λόγοις κοινὸν ἀφέλωμεν τὸν τῆς βζ πρὸς ζχ, λοιπὸς ὁ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς ἀπὸ δχ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς χζ πρὸς ζθ. καὶ δεῖ δοθεῖσαν τὴν δζ τέμνειν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὴν χζ πρὸς δοθεῖσαν, τουτέστι τὴν ζθ, οὕτως τὸ δοθέν, τουτέστι τὸ ἀπὸ βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. τοῦτο δὲ οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς βζ, καὶ τοῦ μείζονα τὴν βζ τῆς ζθ. ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν οὐκ ἔχει διορισμόν, καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὴν χζ πρὸς ζθ. ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεται, καὶ συντεθήσεται. ἐπὶ τέλει μὲν τὸ προ ρηθὲν ἐπηγγείλατο δεῖξαι, ἐν οὐδενὶ δὲ τῶν ἀντιγράφων εὑρεῖν. ἔνεστι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, ὅθεν καὶ Διονυσόδωρον μὲν εὑρίσκομεν μὴ τῶν αὐτῶν ἐπιτυχόντα, ἀδυνατήσαντα δὲ ἐπιβάλλειν τῷ καταλειφθέντι λήμματι, ἐφ' ἑτέραν ὁδὸν τοῦ ὅλου προβλήματος ἐλθεῖν, ἥν τινα ἑξῆς γράψομεν. Διοκλῆς μέντοι καὶ αὐτὸ ἐν τῷ περὶ πυρείων αὐτῷ συγγεγραμμένῳ βιβλίῳ, ἐπηγγέλθαι νομίζων τὸν Ἀρχιμήδην, μὴ πεποιηκέναι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, αὐτὸς ἀναπληροῦν ἐπεχείρησε. καὶ τὸ ἐπιχείρημα ἑξῆς γράψομεν. ἔστι γὰρ καὶ αὐτὸ οὐδένα μὲν ἔχον πρὸς τὰ παραλελειμμένα λόγον. ὁμοίως δὲ τῷ Διονυσοδώρῳ δι' ἑτέρας ἀποδείξεως κατασκευάζων τὸ πρόβλημα, ἔν τινι μέντοι παλαιῷ βιβλίῳ. οὐδὲ γὰρ τῆς εἰς πολλὰ ζητήσεως ἀπέστημεν, ἐνετύχομεν θεωρήμασι γεγραμμένοις, οὐκ ὀλίγην τὴν ἐκ τῶν πταισμάτων ἔχουσιν ἀσάφειαν περί τε τὰς καταγραφὰς πολυτρόπως ἡμαρτημένοις. τῶν μέντοι ζητουμένων εἶχον τὴν ὑπόστασιν, ἐν μέρει δὲ τὴν Ἀρχιμήδει φίλην Δωρίδα γλῶσσαν ἀπέσωζον, καὶ τοῖς συνήθεσι τῶν ἀρχαίων τῶν πραγμάτων ὀνόμασιν ἐγέγραπτο, τῆς μὲν παραβολῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ὀνομαζομένης, τῆς δ' ὑπερβολῆς ἀμβλυγωνίου κώνου τομῆς. ὡς ἐξ αὐτῶν διανοεῖσθαι, μὴ ἄρα καὶ αὐτὸς εἴη τὰ ἐν τῷ τέλει ἐπηγγελμένα γράφεσθαι. ὅθεν σπουδαιότερον ἐντυγχάνοντες, αὐτὸ μὲν τὸ ῥητὸν ὡς γέγραπται διὰ πλῆθος, ὡς εἴρηται, τῶν πταισμάτων δυσχερὲς εὑρόντες, τὰς ἐννοίας κατὰ μικρὸν ἀποσυλήσαντες κοινοτέρᾳ καὶ σαφεστέρᾳ κατὰ τὸ δυνατὸν λέξει γράφομεν. καθόλου δὲ πρῶτον τὸ θεώρημα γραφήσεται, ἵνα τὸ λεγόμενον ὑπ' αὐτοῦ σαφηνισθῇ περὶ τῶν † διορισμένων. εἶτα καὶ τοῖς ἀναλελυμένοις ἐν τῷ προβλήματι προσαρμοσθήσεται.

† διορισμῶν

Εὐθείας δοθείσης τῆς αβ, καὶ ἑτέρας τῆς αγ, καὶ χωρίου τοῦ δ, προκείσθω λαβεῖν ἐπὶ τῆς αβ σημεῖον ὡς τὸ ε. ὥστε εἶναι ὡς τὴν αε πρὸς αγ, οὕτω τὸ δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. γεγονέτω, καὶ κείσθω ἡ αγ πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε διήχθω ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ γ τῇ αβ παράλληλος ἡ γη, διὰ δὲ τοῦ β τῇ αγ παράλληλος ἡ ζηβ, συμπίπτουσα ἑκατέρᾳ τῶν γε, γη. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ηθ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε ὁποτέρᾳ τῶν γθ, ηζ παράλληλος ἤχθω ἡ κελ. καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γημ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. ὡς δὲ ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηζ. ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηζ, οὕτως τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γηζ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γηζ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ κζ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ δ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ γημ, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γημ, οὕτως ἡ γη πρὸς ημ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γη πρὸς ημ, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. ἀλλ' ὡς ἡ γη πρὸς ημ, τῆς ηζ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ὑπὸ μηζ.

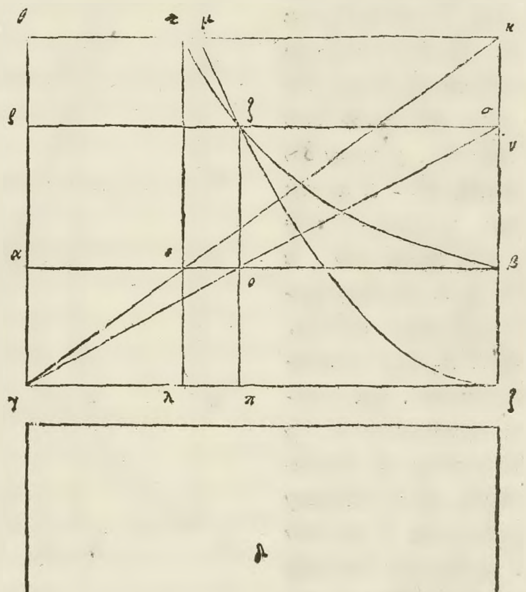


ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ὑπὸ μηζ, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ μηζ τῷ ἀπὸ ζκ. ἐὰν ἄρα περὶ ἄξονα τὴν ζη, γραφῇ διὰ τοῦ η παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ημ, ἥξει διὰ τοῦ κ. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ δεδομένην εἶναι τὴν ημ τῷ μεγέθει, περιέχουσαν μετὰ τῆς ηγ δεδομένης δοθὲν τὸ δ. τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης παραβολῆς. γεγράφθω οὖν, ὡς εἴρηται. καὶ ἔστω ὡς ἡ ηκ. πάλιν ἐπειδὴ τὸ θλ χωρίον

ἴσον

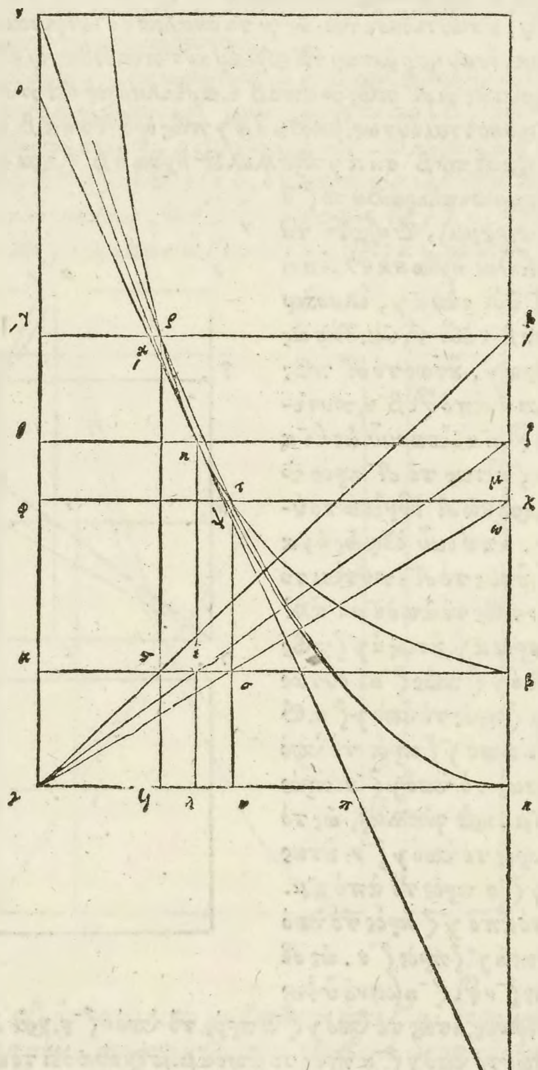
ἴσον ἐστὶ τῷ γ β, τουτέστι τὸ ὑπὸ θ κ λ τῷ ὑπὸ α β η. ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θ γ, γ η γραφῇ, ὑπερβολὴ ἥξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ καὶ ἑκατέραν τῶν θ γ, γ η, ἔτι μὴν καὶ τὸ β τῇ θέσει δεδόσθαι. γεγράφθω ὡς εἴρηται, καὶ ἔστω ὡς ἡ κ β. τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἥπτετο δὲ καὶ θέσει δεδομένης παραβολῆς. δέδοται ἄρα τὸ κ, καὶ ἔστιν ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἡ κ ε, ἐπὶ θέσει δεδομένην τὴν α β. δέδοται ἄρα τὸ ε. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ε α πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν α γ, οὕτως δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ ε β. δύο ἄρα στερεῶν ὧν βάσεις τὸ ἀπὸ ε β, καὶ τὸ δ. ὕψη δὲ αἱ ε α, α γ, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε ἴσα ἐστὶ τὰ στερεά. τὸ ἄρα ἀπὸ ε β ἐπὶ τὴν ε α, ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι τῷ δ, ἐπὶ δοθεῖσαν τὴν γ α. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α μέγιστον ἐστὶ πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς β α. ὅταν ἡ διπλασία ἡ β ε τῆς ε α, ὡς δειχθήσεται. δεῖ ἄρα τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ α β, ἄλλη δέ τις δοθεῖσα ἡ α γ, τὸ δὲ δοθὲν χωρίον τὸ δ. καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὴν α β, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ἓν τμῆμα πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν α γ, οὕτως τὸ δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος. εἰλήφθω τῆς α β τρίτον μέρος ἡ α ε, τὸ ἄρα δ ἐπὶ τὴν α γ, ἤτοι μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α, ἢ ἴσον, ἢ ἔλασσον. εἰ μὲν οὖν μεῖζον ἐστὶν, οὐ συντεθήσεται, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. εἰ δὲ ἴσον ἐστὶ τὸ ε σημεῖον ποιήσει τὸ πρόβλημα. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ β ε. εἰ δὲ ἔλασσον ἐστὶ τὸ δ ἐπὶ τὴν α γ, τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α, συντεθήσεται οὕτως. κείσθω ἡ α γ πρὸς ὀρθὰς τῇ α β, καὶ διὰ τοῦ γ τῇ α β παράλληλος ἤχθω ἡ γ ζ. διὰ δὲ τοῦ β τῇ α γ παράλληλος ἤχθω ἡ β ζ, καὶ συμπιπτέτω τῇ γ ε ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ η. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζ θ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε τῇ ζ η παράλληλος ἤχθω ἡ κ ε λ. ἐπεὶ οὖν τὸ δ ἐπὶ τὴν α γ, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α. ἔστιν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ἀπὸ τῆς β ε, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς η κ. ἔστω οὖν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γ ζ ν. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γ ζ ν πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. ἀλλ' ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ ζ πρὸς ζ η. ὡς δὲ ἡ γ ζ πρὸς ζ η, οὕτως τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ η. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ η, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ ν πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ ν, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ ν, οὕτως ἡ γ ζ πρὸς ζ ν. ὡς δὲ ἡ γ ζ πρὸς ζ ν τῆς ζ η κοινοῦ ὕψους



λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ὑπὸ ν ζ η. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ὑπὸ ν ζ η, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ η μ τῷ ὑπὸ η ζ ν. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ ζ περὶ ἄξονα τὴν ζ η γράψωμεν παραβολὴν, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ζ ν, ἥξει διὰ τοῦ μ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ μ ξ ζ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ θ λ τῷ α ζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θ κ λ τῷ ὑπὸ α β ζ. ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θ γ, γ ζ γράψωμεν ὑπερβολὴν, ἥξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ βκ, τέμνουσα τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ ξ. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ ξοπ. καὶ διὰ τοῦ ξ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ ρξσ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ βκζ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θγ, γζ. καὶ παράλληλοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ρξπ, ταῖς αβζ. ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ρξπ τῷ ὑπὸ αβζ, ὥστε καὶ τὸ ρο τῷ οζ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ σ ἐπιζευχθῇ, ἥξει διὰ τοῦ ο. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γοσ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως ἡ οβ πρὸς βσ, τουτέστιν ἡ γζ πρὸς ζσ. ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζσ, τῆς ζν κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ὑπὸ σζν. καὶ ὡς ἄρα ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ὑπὸ σζν. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ γζν, τὸ δ χωρίον. τῷ δὲ ὑπὸ σζν, ἴσον τὸ ἀπὸ σξ, τουτέστι τὸ ἀπὸ βο, διὰ τὴν παραβολήν. ὡς ἄρα ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βο. εἴληπται ἄρα τὸ ο σημεῖον, ποιοῦν τὸ πρόβλημα.

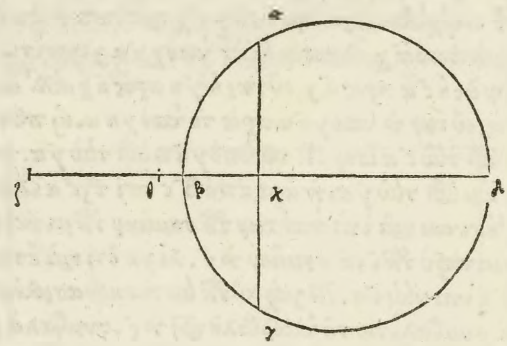
Ὅτι διπλασίας οὔσης τῆς βε τῆς εα, τὸ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς βα, δειχθήσεται οὕτως. ἔστω γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει πάλιν δοθεῖσα εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, ἡ αγ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ διὰ τοῦ β παραλλήλῳ, ἠγμένῃ τῇ αγ κατὰ τὸ ζ. καὶ διὰ τῶν γ ζ παράλληλοι τῇ αβ ἤχθωσαν αἱ θζ, γη. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ γα ἐπὶ τὸ θ. καὶ ταύτῃ παράλληλος διὰ τοῦ ε ἤχθω ἡ κελ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ ὑπὸ γημ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. τὸ ἄρα ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γημ ἐπὶ τὴν αγ, διὰ τὸ δύο στερεῶν ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσι. λέγω οὖν, ὅτι τὸ ὑπὸ γημ ἐπὶ τὴν αγ, μέγιστόν ἐστι πάντων ὁμοίως ἐπὶ τῆς βα λαμβανομένων. γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ η περὶ ἄξονα τὴν ζη παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ημ. ἥξει δὴ διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. καὶ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ θγ παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, διὰ τὸ ἕβδομον καὶ εἰκοστὸν θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τοῦ Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὸ ν. καὶ διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς νγη, γεγράφθω ὑπερβολή. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει εἴρηται. ἐρχέσθω οὖν ὡς ἡ βκ. καὶ ἐκβληθείσῃ τῇ ζη ἴση κείσθω ἡ ηξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ξκ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ο. φανερὸν ἄρα ὅτι ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς



διὰ

διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τετάρτου καὶ τριακοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν ἡ β ε τῆς ε α, οὕτως γὰρ ὑπόκειται, τουτέστιν ἡ ζ κ τῆς κ θ. καὶ ἔστιν ὅμοιον τὸ ο θ κ τρίγωνον τῷ ξ ζ κ τριγώνῳ. διπλασία ἐστὶ καὶ ἡ ξ κ τῆς κ ο. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ξ κ τῆς κ π διπλῆ, διὰ τὸ καὶ τὴν ξ ζ τῆς ξ η. καὶ παράλληλον εἶναι τὴν π η τῇ κ ζ. ἴση ἄρα ἡ ο κ τῇ κ π, ἡ ἄρα ο κ π ψαύουσα τῆς παραβολῆς, καὶ μεταξὺ οὖσα τῶν ἀσυμπτώτων δίχα τέμνεται. ἐφάπτεται ἄρα τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τρίτου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐφήπτετο δὲ καὶ τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ αὐτὸ κ. ἡ ἄρα παραβολὴ τῆς ὑπερβολῆς ἐφάπτεται κατὰ τὸ κ. νενοήσθω οὖν καὶ ἡ ὑπερβολὴ προσεκβαλλομένη ὡς ἐπὶ τὸ ρ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς α β τυχὸν σημεῖον τὸ σ, καὶ διὰ τοῦ σ τῇ κ λ παράλληλος ἤχθω ἡ τ σ υ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ τ, καὶ διὰ τοῦ τ τῇ γ η παράλληλος ἤχθω ἡ φ τ χ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὴν ὑπερβολὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, ἴσον ἐστὶ τὸ φ υ τῷ γ β, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ γ σ. ἴσον γὰρ τὸ φ σ τῷ σ η, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ χ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἥξει διὰ τοῦ σ. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γ σ χ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ψ χ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ χ η μ διὰ τὴν παραβολὴν, τὸ ἀπὸ τ χ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ χ η μ. γεγονέτω οὖν τῷ ἀπὸ τ χ ἴσον τὸ ὑπὸ χ η ω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ σ α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η χ. ἀλλ' ὡς ἡ γ η πρὸς η χ, τῆς η ω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ω πρὸς τὸ ὑπὸ χ η ω. καὶ πρὸς τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ ἀπὸ χ τ, τουτέστι τὸ ἀπὸ β σ ἐπὶ τὴν σ α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ η ω ἐπὶ τὴν γ α. τὸ δὲ ὑπὸ γ η ω, ἐπὶ τὴν γ α ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ γ η μ ἐπὶ τὴν γ α, τὸ ἄρα ἀπὸ β σ ἐπὶ τῆς σ α ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τῆς ε α. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ λαμβανομένων τῶν ε, β. ἀλλὰ δὴ εἰλήφθω μεταξὺ τῶν ε, α σημεῖον τὸ ϛ. λέγω ὅτι καὶ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ β ϛ ἐπὶ τὴν ϛ α. τῶν γὰρ αὐτῶν κατεσκευασμένων ἤχθω διὰ τοῦ ϛ τῇ κ λ παράλληλος ἡ γ ϛ ρ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ ρ. συμβαλεῖ γὰρ αὐτῇ διὰ τὸ παράλληλος εἶναι τῇ ἀσυμπτώτῳ, καὶ διὰ τοῦ ρ παράλληλος ἀχθεῖσα τῇ α β ἡ α ρ β. συμβαλλέτω τῇ η ζ ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν ὑπερβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ γ ϙ καὶ τῷ α η, ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἥξει διὰ τοῦ ϛ. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γ ϛ β. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν παραβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ α β τῷ ὑπὸ β η μ, τὸ ἄρα ἀπὸ ρ β ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ β η μ. γεγονέτω τὸ ἀπὸ ρ β ἴσον τῷ ὑπὸ β η ω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ϛ α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η β. ἀλλ' ὡς ἡ γ η πρὸς η β, τῆς η ω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ω πρὸς τὸ ὑπὸ β η ω. τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ρ β, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ β ϛ. τὸ ἄρα ἀπὸ β ϛ ἐπὶ τὴν ϛ α, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ η ω ἐπὶ τὴν γ α. καὶ μεῖζον τὸ ὑπὸ γ η μ τοῦ ὑπὸ γ η ω. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α, τοῦ ἀπὸ β ϛ ἐπὶ τὴν ϛ α. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ τῶν ε, α λαμβανομένων. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν ε, β λαμβανομένων. πάντων ἄρα τῶν ἐπὶ τῆς α β ὁμοίως λαμβανομένων, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α, ὅταν ᾖ διπλασία ἡ β ε τῆς ε α. ἐπιστῆσαι δὲ χρὴ καὶ τοῖς ἀκολουθοῦσι κατὰ τὴν εἰρημένην καταγραφήν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ ἀπὸ β σ ἐπὶ τὴν σ α, καὶ τὸ ἀπὸ β ϛ ἐπὶ τὴν ϛ α ἔλασσον τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τῆς ε α. δυνατόν ἐστι καὶ τοῦ δοθέντος χωρίου ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἐλάσσονος ὄντος τοῦ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τῆς ε α κατὰ δύο σημεῖα τῆς α β τεμνομένης ποιεῖν τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα. τοῦτο δὲ γίνεται, εἰ νοήσαιμεν περὶ διάμετρον τὴν χ η γραφομένην παραβολήν. ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν η ω. ἡ γὰρ τοιαύτη παραβολή, πάντως ἔρχεται διὰ τοῦ τ. καὶ ἐπειδὴ ἀνάγκη αὐτὴν συμπίπτειν τῇ γ ν παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ, δῆλον ὅτι τέμνει τὴν ὑπερβολήν, καὶ κατ' ἄλλο σημεῖον ἀνώτερον τοῦ κ, ὡς ἐνταῦθα κατὰ τὸ ρ. καὶ ἀπὸ τοῦ ρ ἐπὶ τὴν α β κάθετος ἀγομένη, ὡς ἐνταῦθα ἡ ρ ϛ τέμνει τὴν α β κατὰ τὸ ϛ. ὥστε τὸ ϛ σημεῖον ποιεῖν τὸ πρόβλημα, καὶ ἴσον γίνεσθαι τὸ ἀπὸ β σ ἐπὶ τὴν σ α, τῷ ἀπὸ β ϛ ἐπὶ τὴν ϛ α, ὡς ἐστὶ διὰ τῶν προειρημένων ἀποδείξεων ἐμφανές. ὥστε δυνατοῦ ὄντος ἐπὶ τῆς β α δύο σημεῖα λαμβάνειν, ποιοῦντα τὸ ζητούμενον, ἔξεστιν ὁπότερον τις βούλοιτο λαμβάνειν, ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β. ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, α. εἰ μὲν γὰρ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β ὡς εἴρηται τῆς διὰ τῶν κ, τ σημείων γραφομένης παραβολῆς κατὰ δύο σημεῖα τεμνούσης τὴν ὑπερβολὴν τὸ μὲν ἐγγύτερον τοῦ η, τουτέστι τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς εὑρήσει τὸ μεταξὺ τῶν ε, β, ὡς ἐνταῦθα τὸ τ εὑρίσκει τὸ σ. τὸ δὲ ἀπώτερον τὸ μεταξὺ τῶν ε, α ὡς ἐνταῦθα τὸ ρ εὑρίσκει τὸ ϛ.

Καθόλου μὲν οὖν οὕτως ἀναλέλυται καὶ συντέθειται τὸ πρόβλημα. ἵνα δὲ καὶ τοῖς Ἀρχιμήδειοις ῥήμασιν ἐφαρμοσθῇ, νενοήσθω ὡς ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, διάμετρος μὲν τῆς σφαίρας ἡ δβ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ βζ, καὶ ἡ δεδομένη ἡ ζθ. κατηντήσαμεν ἄρα φησὶν εἰς τὸ τὴν δζ τεμεῖν κατὰ τὸ χ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς τὴν δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δχ. τοῦτο δὲ ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. εἰ γὰρ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μεῖζον ἐτύγχανεν τοῦ ἀπὸ τῆς δβ ἐπὶ τὴν βζ, ἀδύνατον ἦν τὸ πρόβλημα ὡς δέδεικται. εἰ δὲ ἴσον τὸ β σημεῖον ἐποίει τὸ πρόβλημα, καὶ οὕτως δὲ οὐδὲν ἦν πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς ἀρχιμήδους πρόθεσιν. ἡ γὰρ σφαῖρα οὐκ ἐτέμνετο εἰς τὸν δοθέντα λόγον. ἁπλῶς γὰρ λεγόμενον εἶχον πρὸς διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς ζβ, καὶ τοῦ μείζονα εἶναι τὴν βζ τῆς ζθ, οὐκ ἔχει διορισμόν. τὸ γὰρ ἀπὸ δβ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν ζθ τὴν δοθεῖσαν ἔλαττόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς δβ ἐπὶ τῆς βζ. διὰ τὸ τὴν βζ τῆς ζθ μείζονα εἶναι, οὗπερ ὑπάρχοντος ἐδείξαμεν δυνατὸν, καὶ ὅπως πρόκειται τὸ πρόβλημα. κατανοεῖν δὲ χρὴ καὶ τοῖς ὑπ᾽ ἀρχιμήδους λεγομένοις συμφώνως ἔχουσιν τοῖς ὑφ᾽ ἡμῶν ἀναλελυμένοις. πρότερον μὲν γὰρ μετὰ τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ καθόλου τὸ εἰς ὃ κατήντησεν λέγων, φησί. δοθεῖσαν τὴν δζ τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ χζ πρὸς δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δχ. εἶτα εἰπὼν ὡς καθόλου μὲν τὸ λεγόμενον ἔχει διορισμόν.



προστεθέντων δὲ τῶν ὑπ᾽ αὐτοῦ εὑρεθέντων προβλημάτων, τοῦ τε εἶναι διπλασίαν τὴν δβ τῆς βζ. καὶ μείζονα τὴν βζ. τῆς ζθ. μὴ ἔχειν διορισμὸν μερικώτερον, ἐπαναλαμβάνει τὸ πρόβλημα. καὶ φησὶν, ὅτι καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, οὐκ ἔτι ὡς πρότερον τὴν δζ εἰπὼν, ἀλλὰ τὴν δβ δεῖν τεμεῖν διὰ τὸ ὡς ἀνωτέρω ἡμεῖς ἀπεδείξαμεν εἰδέναι αὐτὸν, ὡς δύο σημεῖά ἐστι τὰ λαμβανόμενα ἐπὶ τῆς δζ, καὶ ποιοῦντα τὸ πρόβλημα, ἓν μὲν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β. ἕτερον δὲ τὸ μεταξὺ τῶν β, ζ. ὧν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β ἦν τὸ πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς πρόθεσιν χρήσιμον.

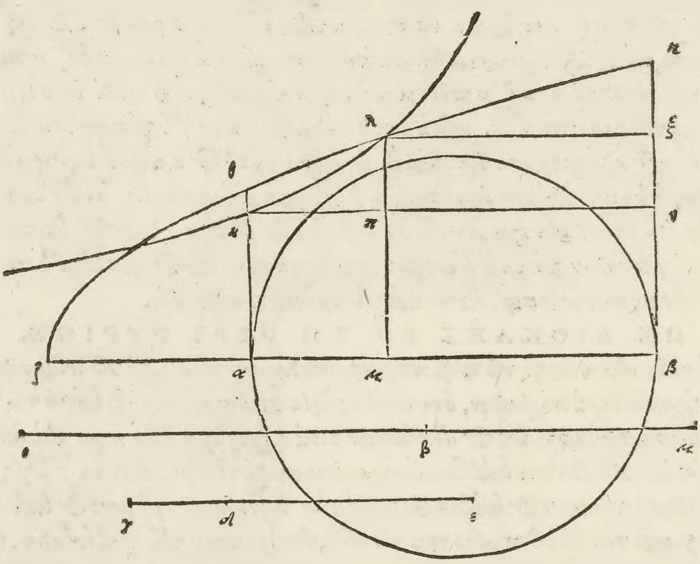
Ταῦτα μὲν οὖν ἀκόλουθα τοῖς ἀρχιμήδους ῥήμασι, κατὰ τὸ δυνατὸν σαφῶς ἀπεγράμεθα. ἐπεὶ δὲ ὡς προείρηται καὶ διονυσόδωρος οὐδαμῶς τοῖς ἐπὶ τέλει γραφομένοις παρ᾽ ἀρχιμήδους ἐπηγγελμένοις ἐντυχὼν, ἀτονήσας δὲ ὥσπερ προσευρεῖν τὰ μὴ ἐκτεθέντα, ἐφ᾽ ἑτέραν ὁδὸν βαδίζων τοῦ ὅλου προβλήματος, οὐκ ἄχαριν εὑρέσεως συνέγραψε τὸ πρῶτον ἀναγκαῖον, ᾠήθημεν δεῖν καὶ αὐτὸν τούτοις ἐπισυνάψαι διορθωσάμενοι κατὰ δύναμιν. καὶ γὰρ αὐτὸς ἐκ πολλῆς ἀμελετησίας τῶν ἀνθρώπων τὰ πολλὰ τῶν ἀποδείξεων τῷ πλήθει τῶν πταισμάτων ἠφανισμένην ἔχων ἐν πᾶσιν οἷς ἡμεῖς ἐντετύχαμεν ἀντιγράφοις ἐφωρᾶτο.

ΩΣ ΔΙΟΝΥΣΟΔΩΡΟΣ.

Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς διάμετρος ἡ αβ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε. δεῖ δὴ τεμεῖν τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὴν αβ, ὥστε τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ α, πρὸς τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε. ἐκβεβλήσθω ἡ βα ἐπὶ τὸ ζ. καὶ κείσθω τῆς αβ ἡμίσεια ἡ αζ. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ γε πρὸς εδ, ἐχέτω ἡ ζα πρὸς αη, καὶ ἔστω ἡ αη πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ. καὶ τῶν ζα, αη μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ αθ. μείζων ἄρα ἡ αθ τῆς αη. καὶ περὶ ἄξονα τὴν ζβ διὰ τοῦ ζ γεγράφθω παραβολὴ, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν αη. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ θ. ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ζαη ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ αθ. γεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ζθκ. καὶ διὰ τοῦ β ἀνήχθω παρὰ

τὴν

τὴν αθ ἡ βκ, καὶ τεμνέτω τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ κ, καὶ διὰ τοῦ η. περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ζβ. γεγράφθω ὑπερβολή. τεμεῖ δὴ τὴν παραβολὴν μεταξὺ τῶν θ, κ, τεμνέτω κατὰ τὸ λ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν α αβ κάθετος ἤχθω ἡ λμ. καὶ διὰ τῶν η, λ τῇ αβ παράλλη-



λοι ἤχθωσαν αἱ ην, λξ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ηλ, ἀσύμπτωτοι δὲ αβ, κ, καὶ παράλληλοι ταῖς αην, αἱ μλξ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ αην τῷ ὑπὸ μλξ, διὰ τὸ η θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἀλλ' ἡ μὲν ην τῇ αβ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ λξ τῇ μβ, τὸ ἄρα ὑπὸ λμβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ηαβ. καὶ διὰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λμ πρὸς ηα, οὕτως ἡ αβ πρὸς βμ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ ηα, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν παραβολὴν τὸ ἀπὸ λμ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ζμ, αη, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζμ πρὸς μλ, ἡ μλ πρὸς αη. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης. ὡς ἄρα ἡ ζμ πρὸς αη, οὕτως τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ ηα. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ αη, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ, οὕτως ἡ ζμ πρὸς αη. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ. καὶ ὡς ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, οὕτως ἡ ζμ πρὸς αβ. ὁ ἄρα κῶνος βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν αη, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ. ὧν γὰρ κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι. ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν ζα, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν αη, ἐστὶν ὡς ἡ ζα πρὸς αη, τουτέστιν ἡ γε πρὸς εδ. ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. καὶ ὁ κῶνος ὁ ἄρα βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν ζα, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἐστὶν ὡς ἡ γε πρὸς εδ. ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν ζα, ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μέν ἐστι τὸ β, ὕψος δὲ ἡ βμ. ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα πρὸς τὸ εἰρημένον τμῆμα λόγον ἔχει, ὃν ἡ γε πρὸς εδ. καὶ διελόντι τὸ τμῆμα, οὗ κορυφὴ τὸ α, ὕψος δὲ ἡ αμ πρὸς τὸ

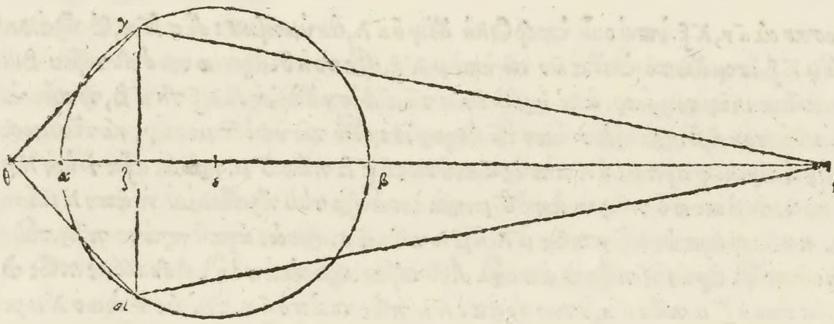
τμῆ

τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β, ὕψος δὲ ἡ βμ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε. τὸ ἄρα διὰ τῆς λμ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον ὀρθὸν πρὸς τὴν αβ, τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὅτι δὲ ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ β, ὕψος δὲ ἡ βμ, δειχθήσεται οὕτως. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ ζμ πρὸς μα, οὕτως ἡ ομ πρὸς μβ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ τὴν ομ, ἴσος ἐστὶ τμήματι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ζμ πρὸς μα, οὕτως ἡ ομ πρὸς μβ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ζμ πρὸς μο, οὕτως ἡ αμ πρὸς μβ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ αμ πρὸς μβ, οὕτως τὸ ἀπὸ πμ πρὸς τὸ ἀπὸ μβ. καὶ οὕτως ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ πμ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ. ὡς ἄρα ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ πμ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ, οὕτως ἡ μζ πρὸς μο. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ πμ, ὕψος δὲ τὴν μο. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν, ὥστε καὶ τῷ τμήματι ἴσος ἐστί.

ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

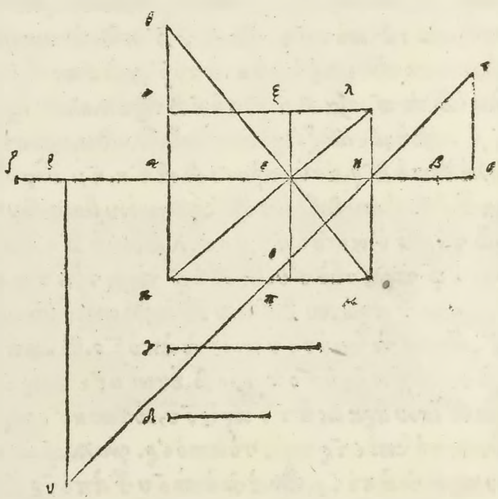
Γράφει δὲ καὶ ὁ Διοκλῆς ἐν τῷ περὶ πυρίων, προλέγων τάδε. ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι πᾶν τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν τινὰ λόγον ἔχουσαν πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς τοῦ τμήματος κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετος πρὸς τὴν τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετον. οἷον ἐὰν ἡ σφαῖρα ἡ αβγ, καὶ τμηθῇ ἐπιπέδῳ τινὶ τῷ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλῳ. καὶ διαμέτρου οὔσης τῆς αβ, κέντρου δὲ τοῦ ε. ποιήσωμεν ὡς συναμφότερον τὴν εα, αζ πρὸς ζα, οὕτως τὴν ηζ πρὸς ζβ. ἔτι τε ὡς συναμφότερον τὴν εβ, βζ πρὸς ζβ, οὕτως τὴν θζ πρὸς ζα, ἀποδέδει-



κται ὅτι τὸ μὲν γβδ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζη. τὸ δὲ γαδ τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ θζ. προτεθέντος οὖν αὐτῷ τοῦ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα, κατασκευάσας τὰ εἰρημένα φησί. λόγος ἄρα δοθεὶς καὶ τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζθ, πρὸς τὸν κῶνον οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ ζη. καὶ γὰρ τοῦτο ἀποδέδεικται, οἱ κῶνοι οἱ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντες, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. λόγος ἄρα τῆς θζ πρὸς ζη δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θζ πρὸς ζα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβζ πρὸς τὴν ζβ. διελόντι ὡς ἡ θα πρὸς αζ, οὕτως ἡ εβ πρὸς ζβ. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ὡς ἡ ηβ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ αὐτὴ εὐθεῖα πρὸς τὴν ζα. γέγονεν οὖν πρόβλημα τοιοῦτον. θέσει οὔσης εὐθείας τῆς αβ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β, καὶ δοθείσης τῆς εβ, τεμεῖν τὴν αβ κατὰ τὸ ζ, καὶ προσθεῖναι τὰς θα, βη. ὥστε λόγον εἶναι τῆς θζ πρὸς ζη δοθέντα, ἔτι τε εἶναι ὡς μὲν τὴν θα πρὸς αζ, οὕτως τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ζβ. ὡς δὲ τὴν ηβ πρὸς βζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν πρὸς ζα. τοῦτο δὲ ἑξῆς δέδεικται. ὁ γὰρ Ἀρχιμήδης μακρότερον αὐτὸ δείξας, καὶ οὕτως εἰς πρόβλημα ἕτερον ἀπάγει, ὃ οὐκ ἀποδείκνυσιν ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Θέσει

θέσει δεδομένης εὐθείας τῆς αβ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β, καὶ λόγου τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ, τεμεῖν τὴν αβ κατὰ τὸ ε, καὶ προσθεῖναι τὰς ζα, ηβ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὴν ζε πρὸς τὴν εη. ἔτι τε εἶναι ὡς τὴν ζα πρὸς αε, οὕτως δοθεῖσαν τινὰ εὐθεῖαν πρὸς τὴν βε. ὡς δὲ τὴν ηβ πρὸς βε, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν εα. γεγονέτω, καὶ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ θακ, λβμ. καὶ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴση κείσθω ἑκατέρα τῶν ακ, βμ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ κε, με, ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ λ, θ. ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ κμ. διὰ τοῦ λ παράλληλος ἤχθω τῇ αβ ἡ λν. διὰ δὲ τοῦ ε τῇ νκ ἡ ξεοπ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ζα πρὸς αε, οὕτως ἡ μβ πρὸς βε. ὑπόκειται γάρ. ὡς δὲ ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. ὡς ἄρα ἡ ζα πρὸς αε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε. ἴση ἄρα ἡ ζα τῇ θα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ βη τῇ βλ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θαε πρὸς συναμφότερον τὴν μβε, οὕτως συναμφότερος ἡ καε πρὸς συναμφότερον τὴν λβε. ἑκατέρου γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς αε πρὸς εβ. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς λβε, καὶ συναμφοτέρου τῆς θαε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε. κείσθω τῇ κα ἴση ἑκατέρα τῶν αρ, βϛ. ἐπεὶ οὖν συναμφότερος μὲν ἡ θαε ἴση ἐστὶ τῇ ζε, συναμφότερος δὲ ἡ λβε ἴση τῇ εη, συναμφότερος δὲ ἡ καε ἴση τῇ ρε, συναμφότερος δὲ ἡ μβε ἴση τῇ ϛε. καὶ ἐδείχθη τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θαε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λβε, ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε, τὸ ἄρα ὑπὸ ζεη ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ρεϛ. διὰ δὴ τοῦτο ὅταν τὸ ρ μεταξὺ τῶν α, ζ πίπτῃ, τό τε ϛ ἐξωτέρω τοῦ η πεσεῖται, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη. ὡς δὲ ἡ ζε πρὸς εη, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη. τὸ δὲ ὑπὸ ζεη ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ρεϛ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρεϛ πρὸς τὸ ἀπὸ εη. κείσθω τῇ βε ἴση ἡ εο, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βο ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ ἀπὸ τῶν ϛ, ρ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ϛτ, ρυ, συμβαλλέτωσαν αὐτῇ κατὰ τ, υ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου τοῦ β, πρὸς θέσει δεδομένην τὴν αβ, ἦκται ἡ τυ, δεδομένην ποιοῦσαν γωνίαν τὴν ὑπὸ εβο ἡμίσειαν ὀρθῆς, δέδοται ἡ τυ τῇ θέσει. καὶ ἀπὸ δεδομένων τῶν ϛ, ρ θέσει ἠγμέναι αἱ ϛτ, ρυ τέμνουσιν αὐτὴν κατὰ τὰ τ, υ. δοθέντα ἄρα ἐστὶ τὰ τ, υ. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ τυ τῇ θέσει, καὶ τῷ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν τῶν εοβ, ϛτβ τριγώνων ὁμοιότητα ἐστὶν ὡς ἡ τβ πρὸς βο, οὕτως ἡ ϛβ πρὸς βε. καὶ συνθέντι ἐστὶν, ὡς ἡ το πρὸς οβ, οὕτως ἡ ϛε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς ἡ βο πρὸς ου, οὕτως ἡ βε πρὸς ερ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως ἡ ϛυ πρὸς ερ. ἀλλ' ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ου. ὡς δὲ ἡ ϛε πρὸς ερ, οὕτως τὸ ὑπὸ ϛερ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ου, οὕτως τὸ ὑπὸ ϛερ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ὑπὸ ϛερ, οὕτως τὸ ἀπὸ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. τὸ δὲ ἀπὸ ου τοῦ ἀπὸ ερ διπλάσιον. ἐπειδὴ καὶ τὸ ἀπὸ οβ τοῦ ἀπὸ βε. καὶ τὸ ὑπὸ τ ο υ ἄρα τοῦ ὑπὸ ϛερ ἐστὶ διπλάσιον. τὸ δὲ ὑπὸ ϛερ πρὸς τὸ ἀπὸ εη ἐδείχθη λόγον ἔχειν ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. καὶ τὸ ὑπὸ τ ο υ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ εη λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ. τὸ δὲ ἀπὸ εη ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ξο. ἑκατέρα γὰρ τῶν εη, ξο ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ λβε, τὸ ἄρα ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, καὶ δέδοται ὁ τῆς διπλασίας τῆς γ πρὸς τὴν δ λόγος. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο λόγος. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς τὴν δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως τὴν τυ πρὸς ἄλλην τινὰ ὡς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τυ γράψωμεν ἔλλειψιν ὥστε τὰς καταγομένας ἐν τῇ ὑπὸ ξοβ γίνεται, τουτέστιν ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν φ ἐλλείποντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τυφ, ἥξει διὰ τοῦ ξ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ



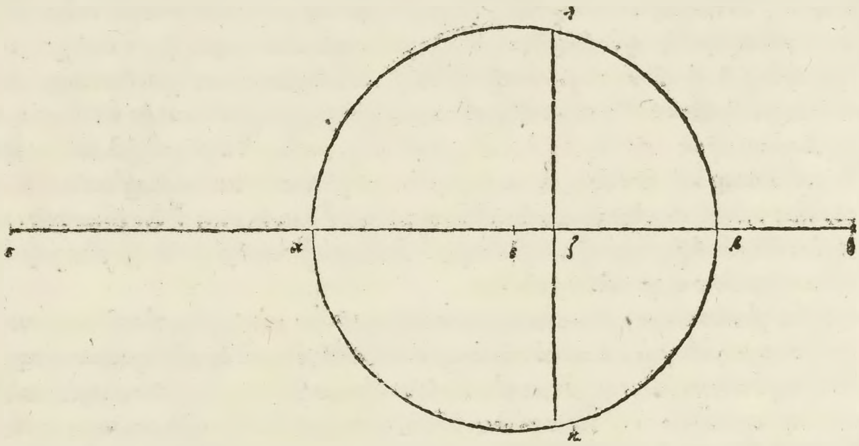
εἰκοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ υξτ. τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. καὶ ἐπεὶ διαγώνιός ἐστιν ἡ λκ τοῦ νμ παραλληλογράμμου, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξω τῷ ὑπὸ αβμ. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θκμ γράψωμεν ὑπερβολήν, ἥξει διὰ τοῦ ξ. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη διὰ τὸ καὶ τὸ β σημεῖον τῇ θέσει δεδόσθαι, καὶ ἑκατέραν τῶν αβ, βμ (καὶ διὰ τοῦτο τὰς θκμ ἀσυμπτώτους) γεγράφθω. καὶ ἔστω ὡς ἡ ξβ, τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἅπτεται δὲ καὶ θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. δέδοται ἄρα τὸ ξ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἡ ξε. δέδοται ἄρα τὸ ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. καὶ δέδοται ἡ αε, δέδοται ἄρα καὶ ἡ αζ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δέδοται καὶ ἡ ηβ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ὡς γὰρ ἐπὶ αὐτῆς καταγραφῆς, ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἣν δεῖ τεμεῖν ἡ αβ. ἡ δὲ δοθεῖσα ἑτέρα ἡ ακ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς γ πρὸς τὴν δ. ἤχθω τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ βμ ἴση οὖσα τῇ ακ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κμ. καὶ τῇ μὲν κα ἴση κείσθω ἡ αρ, καὶ ἡ βς. ἀπὸ τῶν ρ, ς πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ρυ, ςτ. καὶ πρὸς τῷ β σημείῳ συνεστάτω ἡμίσεια ὀρθῆς ἡ ὑπὸ αβο, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ βο ἐφ' ἑκάτερα τεμνέτω τὰς ςτ, ρυ κατὰ τὰ τ, υ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως ἡ τυ πρὸς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τυ γεγράφθω ἔλλειψις, ὥστε τὰς καταγομένας ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρακείμενα παρὰ τὴν φ, ἐλλείποντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τυφ. διὰ δὲ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ακ, κμ, γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ βξ, τέμνουσα τὴν ἔλλειψιν κατὰ τὸ ξ, καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ ξε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ π. διὰ δὲ τοῦ ξ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ λξν. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ κα, μβ ἐπὶ τὰ λ, θ. καὶ ἡ με ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ κν κατὰ τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ βξ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θκ, κμ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξπ τῷ ὑπὸ αβμ, διὰ τὸ η θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ διὰ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ κελ. κείσθω οὖν τῇ μὲν θα ἴση ἡ αζ, τῇ δὲ λβ ἴση ἡ βη. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ φ πρὸς τὴν τυ. ὡς δὲ ἡ φ πρὸς τὴν τυ, οὕτως τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο, διὰ τὸ κ θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ὡς ἄρα ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ τβ πρὸς βο, οὕτως ἡ σβ πρὸς βε. καὶ συνθέντι ὡς ἡ το πρὸς οβ, οὕτως ἡ σε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς ἡ βο πρὸς ου, οὕτως ἡ βε πρὸς ερ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως ἡ ςε πρὸς ερ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ου, οὕτως τὸ ὑπὸ ς ε ρ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ὑπὸ ς ε ρ, οὕτως τὸ ἀπὸ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ου τοῦ ἀπὸ ερ διπλάσιον, διὰ τὸ καὶ τὸ ἀπὸ βο τοῦ ἀπὸ βε. ἴση γάρ ἐστιν ἡ βε τῇ εο, ἡμισείας ὀρθῆς οὔσης ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς β, ο. καὶ τὸ ὑπὸ τ ο υ ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ς ε ρ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρες πρὸς τὸ ἀπὸ ξο. ἴση δὲ ἡ ξο τῇ εη, διὰ τὸ ἑκατέραν αὐτῶν ἴσην εἶναι συναμφοτέρῳ τῇ λβε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θαε πρὸς συναμφότερον τὴν μβε, οὕτως συναμφότερος ἡ καε πρὸς συναμφότερον τὴν λβε. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς αε πρὸς εβ. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θαε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λβε, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε. ἀλλὰ συναμφοτέρῳ μὲν τῇ θαε ἴση ἐστὶν ἡ ζε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ λβε, ἴση ἡ εη. συναμφοτέρῳ τῇ καε ἴση ἡ ρε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ μβε, ἴση ἡ ες. τὸ ἄρα ὑπὸ ζεη ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ρες. ἀλλ' ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρες πρὸς τὸ ἀπὸ εη. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη, καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε. ἴση δὲ ἡ θα τῇ ζα. ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὡς ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε. εὐθείας ἄρα δοθείσης τῆς αβ, καὶ ἑτέρας τῆς ακ, καὶ λόγου τοῦ τῆς γ πρὸς τὴν δ, εἴληπται ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν σημεῖον τὸ ε, καὶ προσετέθησαν εὐθεῖαι αἱ ζα, ηβ, καὶ γέγονε τῷ δοθέντι λόγῳ ἡ ζε πρὸς εη. ἔτι τε ἐστὶν ὡς ἡ δοθεῖσα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. ὡς δὲ αὐτὴ ἡ δοθεῖσα ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

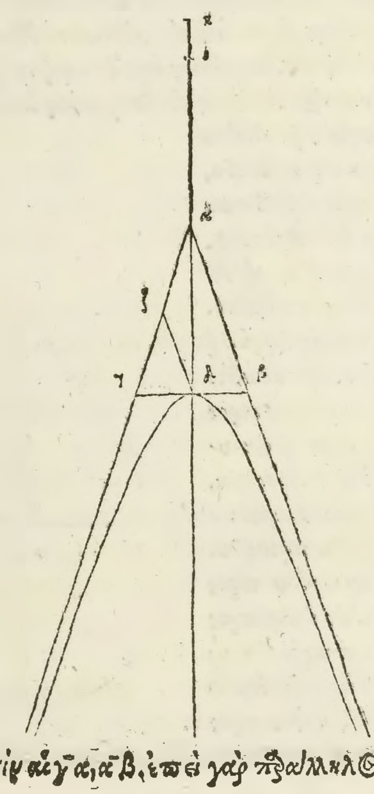
Τούτων δεδειγμένων δυνατόν ἐστι τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν οὕτως. ἔστω γὰρ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν δεῖ ἔχειν τὰ τμή-

ματα

ματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα, ὁ τῆς γ πρὸς τὴν δ, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἔστω τὸ ε, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ σημεῖον τὸ ζ, καὶ προσκείσθωσαν αἱ ηα, θβ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὴν ηζ πρὸς τὴν ζθ. ἔτι τε εἶναι, ὡς μὲν τὴν ηα πρὸς αζ, οὕτως δοθεῖσαν τὴν εβ πρὸς βζ. ὡς δὲ τὴν θβ πρὸς βζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν τὴν εα πρὸς αζ. τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν ποιεῖν προδέδεικται. καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ κλζ. καὶ διὰ τῆς κλ ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν αβ τεμνέτω τὴν σφαῖραν. λέγω ὅτι τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἀλ-



λα λόγον ἔχει τὸν τῆς γ πρὸς τὴν δ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ηα πρὸς αζ, οὕτως ἡ εβ πρὸς βζ. καὶ συνθέντι, ὡς ἄρα ἡ ηζ πρὸς ζα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, βζ πρὸς βζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ, ὕψος δὲ τὴν ζη, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν ζα. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θβ πρὸς βζ, οὕτως ἡ εα πρὸς αζ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ θζ πρὸς βζ, οὕτως συναμφότερος ἡ εα, αζ πρὸς αζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ζθ ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν βζ. ἐπεὶ οὖν οἱ εἰρημένοι κῶνοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη, τουτέστιν ὡς ἡ θζ πρὸς ζη, τουτέστιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, καὶ τὰ τμήματα ἄρα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν δοθέντα, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Ὡς δὲ δεῖ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου περὶ τὰς δοθείσας ἀσυμπτώτους γράψαι ὑπερβολὴν, δείξομεν οὕτως. ἐπειδὴ οὐκ αὐτόθεν κεῖται ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γα, αβ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τὸ α, καὶ δεδόσθω σημεῖόν τι τὸ δ. καὶ προσκείσθω διὰ τοῦ δ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς γα, αβ γράψαι ὑπερβολήν. ἐπεζεύχθω ἡ αδ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ε. καὶ κείσθω τῇ δα ἴση ἡ αε, καὶ διὰ τοῦ δ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ δζ. καὶ κείσθω τῇ αζ ἴση ἡ ζγ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ β, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ δεη, καὶ ἐκβληθείσης τῆς αδ γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ δ ὑπερβολὴ, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν εη ὑπερβάλλοντα, ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ δεη. λέγω ὅτι τῆς γεγραμμένης ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτοι εἰσὶν αἱ γα, αβ. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ δζ τῇ βα, καὶ ἴση ἡ γζ τῇ ζα, ἴση ἄρα καὶ ἡ γδ τῇ δβ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς γβ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς γδ. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ γβ ἴσον τῷ ὑπὸ δεη. ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ γδ, δβ, τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ δεη εἴδους. αἱ ἄρα γα, αβ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων.

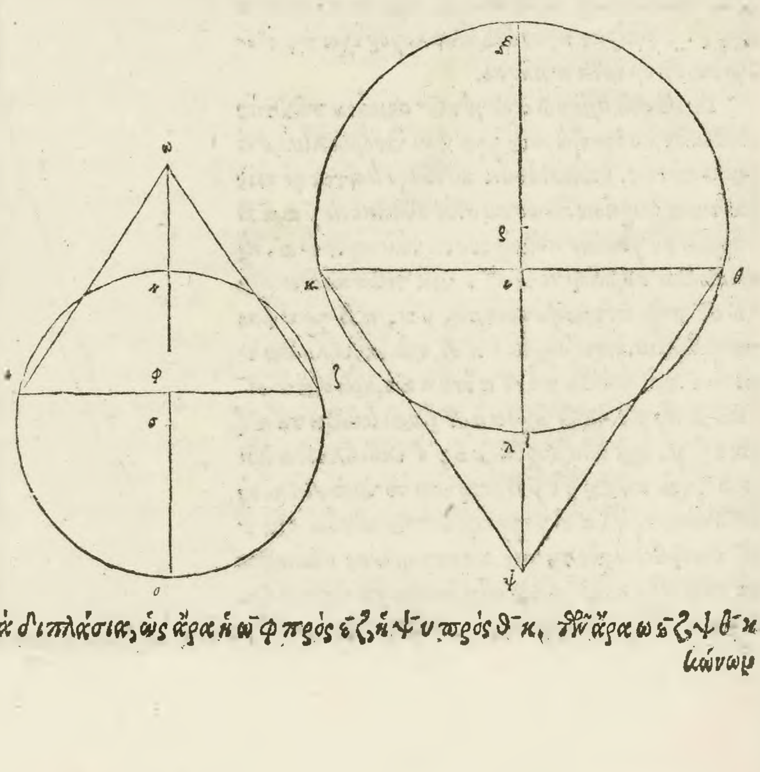
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Δ.

ΕΝ δὲ τῇ συνθέσει προσεκβάλλων τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας τὴν δβ, καὶ ἀποθέμενος τῇ ἡμίσειαν αὐτῆς ἴσην τῇ ζβ. καὶ τεμὼν αὐτὴν εἰς τὸν δοθέντα λόγον κατὰ τὸ θ, καὶ ἔτι τῆς δβ λαβὼν τὸ χ οὕτως, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὰ αὐτὰ κατασκευάζων τοῖς πρότερον φησί, ὅτι γεγονέτω ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. καὶ τίθησι τὸ ρ μεταξὺ τῶν θ, ζ. ὅτι δὲ τοῦτο οὕτως ἔχει δεικτέον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς χβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ κβ πρὸς ρβ, ἡ δχ πρὸς βχ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ. τουτέστιν ἡ ζβ τῆς βρ, ὥστε τὸ ρ ἐντὸς τοῦ ζ πεσεῖται. ὅτι δὲ καὶ ἐκτὸς τοῦ θ, δειχθήσεται ὁμοίως τοῖς ἐν τῇ ἀναλύσει προελθούσης πάσης τῆς συνθέσεως τοῦ θεωρήματος. συνάγεται γὰρ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ρχ πρὸς χλ, ἡ ζθ πρὸς θβ, ὥστε καὶ συνθέντι. καὶ διὰ τοῦτο γὰρ ἀκόλουθος τοῖς ἄνω εἰρημένοις καὶ ἐνταῦθα ἡ λέξις.

Καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ. τεταραγμένην ἀναλογίαν ἐν τοῖς στοιχείοις ἐμάθομεν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, ὅταν ᾖ ὡς μὲν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον. ὡς δὲ ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι ἐν τοῖς πρώτοις, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον. κἀνταῦθα οὖν δέδεικται ὡς μὲν ἡγούμενον ἡ ρλ πρὸς ἑπόμενον τὴν λδ, οὕτως ἡγούμενον ἡ χζ πρὸς ἑπόμενον τὴν ζθ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ δλ πρὸς ἄλλο τι τὴν δχ, οὕτως ἄλλο τι ἡ βζ πρὸς ἡγούμενον τὴν χζ. ἕπεται ἄρα καὶ δι' ἴσου ὡς δέδεικται ἐν τῷ πέμπτῳ τῶν στοιχείων, ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

ΚΑὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ εζη τμῆμα τῷ θκλ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ εζω κῶνος τῷ ψθκ κώνῳ. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ καταγραφαὶ καὶ ἐπεζευγμέναι αἱ εκ, ηζ, εο, οζ, θλ, λκ, θξ, ξκ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ εζη, θκλ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ εηζ, θλκ γωνίαι, ὥστε καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς φ, υ. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ηφζ τρίγωνον τῷ λυκ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, οὕτως ἡ λυ πρὸς υκ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσογωνίων ὄντων τῶν φζο, υκξ τριγώνων. ἔστιν ὡς ἡ ζφ πρὸς φο, ἡ κυ πρὸς υξ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ηφ πρὸς φο, ἡ λυ πρὸς υξ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ηο πρὸς οφ, ἡ λξ πρὸς ξυ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, ὡς ἡ σο πρὸς οφ, ἡ ρξ πρὸς ξυ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ σοφ πρὸς φο, τουτέστιν ἡ ωφ πρὸς φη, οὕτως συναμφότερος ἡ ρξυ πρὸς ξυ. τουτέστιν ἡ ψυ πρὸς υλ. ἀλλ' ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, ἡ λυ πρὸς υκ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς φζ, ἡ ψυ πρὸς υκ. καὶ τῶν ἑπομένων τὰ διπλάσια, ὡς ἄρα ἡ ωφ πρὸς εζ, ἡ ψυ πρὸς θκ. τῶν ἄρα ωεζ, ψθκ



κώνων

κώνων ἀνάλογόν εἰσιν οἱ ἄξονες καὶ διάμετροι τῶν βάσεων. ὅμοιοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λόγος δὲ τοῦ ω φ πρὸς τὴν ε ζ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν δεδομένα, εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων, ὥστε δέδοται ἡ ε ζ καὶ ἡ η φ, καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα τῆς ε ζ ἡ ε φ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ η φ ο. ἐὰν δὲ δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν παραβληθῇ πλάτος ποιεῖ δοθεῖσαν, δοθεῖσα ἄρα ἡ φ ο, ἀλλὰ καὶ ἡ φ η. καὶ ὅλη ἄρα ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας δοθεῖσά ἐστι, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡμίσεια αὐτῆς δέδοται ἡ ς ο, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ο φ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς ς ο πρὸς ο φ λόγος. καὶ συνθέντι ὡς συναμφοτέρου τῆς ς ο φ πρὸς τὴν ο φ λόγος δοθείς ἐστι, τουτέστι τῆς ω φ πρὸς φ η. καὶ δέδοται ἄρα καὶ ἡ ω φ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ε ζ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς ω φ πρὸς ε ζ λόγος. τὰ αὐτὰ δὲ ἂν ῥηθείη καὶ ἐπὶ τοῦ α β γ τμήματος. καὶ συναχθήσεται ὁ τῆς χ τ πρὸς α β λόγος δοθείς, καὶ διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν α β, δοθεῖσά ἐστι καὶ ἡ χ τ.

Ὅτι δ' ἂν τὰ τμήματα δεδομένα ᾖ, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν δοθήσονται, πρόδηλον μέν. ἵνα δὲ καὶ τοῦτο ἀκολούθως τῇ στοιχειώσει τῶν δεδομένων δοκῇ συνάγεσθαι, λεχθήσεται. ἐπειδὴ δέδοται τὰ τμήματα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει, δέδοται καὶ ἡ ε ζ. καὶ ἡ ἐν τῷ τμήματι γωνία, ὥστε καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς, καὶ ἐὰν νοήσωμεν ἐπιζευγνυμένην τὴν ε η δεδομένης τῆς πρὸς τῷ φ ὀρθῆς. δεδομένη ἔσται καὶ ἡ λοιπή. καὶ τὸ ε η φ τρίγωνον τῷ εἴδει. ὥστε καὶ ὁ τῆς ε φ πρὸς φ η λόγος δοθεὶς ἔσται. καὶ δέδοται ἡ ε φ ἡμίσεια οὖσα τῆς ε ζ, δέδοται ἄρα καὶ ἡ φ η. ἔνεστι δὲ καὶ ἄλλως λέγειν. ἐπειδὴ δέδοται ἡ ε ζ τῇ θέσει, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ φ, διχοτομία γάρ ἐστι τῆς ε ζ, πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ φ η τῇ θέσει. δέδοται δὲ καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ τμήματος τῇ θέσει, δέδοται ἄρα τὸ η. ἦν δὲ καὶ τὸ φ δεδομένον. δέδοται ἄρα καὶ ἡ φ η. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ψ υ πρὸς χ τ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς β α πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, οὕτως ἡ κ θ πρὸς δ. ἐπεὶ γὰρ γέγονεν ὡς ἡ ψ υ πρὸς θ κ, ἡ χ τ πρὸς δ. ἐναλλὰξ ἡ ψ υ πρὸς χ τ ἡ κ θ πρὸς δ. ἀλλ' ὡς ἡ ψ υ πρὸς χ τ, τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν κώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὡς δὲ αἱ βάσεις πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ β α πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, ἡ θ κ πρὸς τὴν δ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ α β πρὸς θ κ, ἡ ς πρὸς δ. ἐπειδὴ τῷ λόγῳ τοῦ ἀπὸ τῆς β α πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ τῆς β α πρὸς ς, καὶ ὁ τῆς κ θ πρὸς δ. καὶ ὁ τῆς β α ἄρα πρὸς ς, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς κ θ πρὸς δ. ὥστε ἐναλλὰξ ἐστὶν ὡς ἡ β α πρὸς θ κ, ἡ ς πρὸς δ.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Ε.

Ἐπειδὴ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ α β, θ κ, ς, δ, ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, ἡ θ κ πρὸς δ. καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην. ἐναλλὰξ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἀλλ' ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην.

ΕΙΣ ΤΟ ς.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ κ λ μ τῷ α β γ τμήματι, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ρ λ πρὸς ρ ν, ἡ β π πρὸς π θ, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ μ ν, γ θ. ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ πρὸς τοῖς β λ γωνίαι. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, γ ὀρθαί, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ, καὶ ἰσογώνιά ἐστι τὰ τρίγωνα. καὶ ἔστιν ὡς ἡ θ β πρὸς θ γ, οὕτως ἡ λ ν πρὸς μ ν. ἀλλ' ὡς ἡ θ γ πρὸς θ π, ἡ μ ν πρὸς ν ρ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν γ θ π, μ ν ρ τριγώνων. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ β θ πρὸς θ π, ἡ λ ν πρὸς ν ρ. ὥστε καὶ διελόντι, ὡς ἡ β π πρὸς π θ, οὕτως ἡ λ ρ πρὸς ρ ν. λόγος δὲ τῆς ε ζ πρὸς β γ δοθείς, δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν, δεδομέναι εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων. ὥστε ἐπεὶ δέδοται ἡ α γ, δέδοται καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ γ π. δέδοται δὲ καὶ ἡ β π, καὶ ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσιν. δέδοται ἄρα καὶ ἡ β γ διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ἡ ε ζ δοθεῖσά ἐστιν. ὥστε καὶ ὁ τῆς β γ πρὸς ε ζ λόγος δοθείς ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ ς.

Ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κ μ, α γ τμήματα κύκλων. ἐὰν γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει ἐπιζευχθῶσιν αἱ γ θ, μ ν. ἐπεὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς γ, μ. καὶ κάθετοι αἱ γ π, μ ρ. μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη ἡ β π, πρὸς τὴν τρίτην τὴν π θ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τῆς πβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τῆς βγ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ λρ πρὸς ρν, οὕτως τὸ ἀπὸ λρ πρὸς τὸ ἀπὸ ρμ. καί ἐστιν ὡς ἡ βπ πρὸς πθ, ἡ ρλ πρὸς ρν. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βπ πρὸς τὸ ἀπὸ πγ, οὕτως τὸ ἀπὸ λρ πρὸς τὸ ἀπὸ ρμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πβ πρὸς π λρ, πρὸς ρμ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι. ἰσογώνια ἄρα τὰ τρίγωνα. ἴσαι ἄρα πρὸς τοῖς β, λ γωνίαι, καὶ αἱ διπλασίους αὐτῶν αἱ ἐν τοῖς τμήμασιν. ὅμοια ἄρα εἰσὶ τὰ τμήματα.

ΕΙΣ ΤΟ Ζ.

Λόγος ἄρα δεδομένος συναμφοτέρου τῆς εδζ πρὸς δζ. ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ εδ, δζ πρὸς δζ λόγον ἔχει δεδομένον. ἐὰν μέγεθος πρός τι μόριον ἑαυτοῦ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἕξει δεδομένον, ὥστε συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς εδ λόγον ἔχει δεδομένον. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν εδ, δζ πρὸς συναμφότερον τὴν εδζ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσι δεδομένον. δέδοται ἄρα ὁ τῆς εδ πρὸς δζ λόγος. καὶ δέδοται ἡ εδ. δέδοται γὰρ ἡ διάμετρος. δέδοται ἄρα καὶ ἡ δζ. λοιπὴ ἄρα ἡ ζβ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ δζβ, τουτέστι τὸ ἀπὸ αζ. τουτέστιν ἡ αζ, δοθεῖσα ἔσται. καὶ ὅλη ἄρα ἡ αγ. καὶ ἄλλως δὲ λέγοις ἄν, ὅτι ἡ αγ δοθεῖσά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ δέδοται ἡ διάμετρος ἡ δβ τῇ θέσει. δέδοται δὲ καὶ τὸ ζ ὡς ἥτηται, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ ζ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ αγ, δέδοται ἡ αγ τῇ θέσει. ἀλλὰ καὶ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια. δοθέντα ἄρα τὰ α, γ. καὶ αὐτὴ ἡ αζγ δοθεῖσά ἐστι.

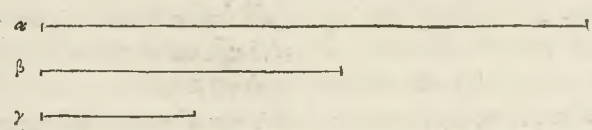
Καὶ ἐπεὶ συναμφότερος μὲν ἡ εδζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ. ἐπεὶ γὰρ ἡ εδ μείζων ἢ ἡμίσεια ἐστὶ τῆς δζ, συναμφότερος ἄρα ἡ εδζ τῆς δζ μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλια. συναμφότερος δὲ ἡ εδ, δβ τῆς δβ ἡμιόλια, μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ εδζ πρὸς δζ, ἤπερ ἡ εδβ πρὸς δβ. ἢ καὶ ἄλλως, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ δβ τῆς δζ, ἄλλη δέ τις ἡ εδ, ἡ εδ ἄρα μείζονα λόγον ἔχει πρὸς θζ, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δβ συνθέντι συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ, ἡ σύνθεσις τοῦ θεωρήματος σαφὴς διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων.

ΕΙΣ ΤΟ Η.

Ἡ θζ πρὸς ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ. τουτέστιν ἡ βζ πρὸς ζδ. ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετος ἦκται ἡ αζ, τῶν πρὸς τῇ καθέτῳ τριγώνων ὁμοίων ὄντων, ἔστιν ὡς ἡ ζβ πρὸς βα, ἡ αβ πρὸς βδ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. ὡς ἄρα ἡ ζβ πρὸς βδ, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βδ. ἀλλ' ὡς ἡ βδ πρὸς δζ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ βα. πρὸς τὸ ἀπὸ δα, οὕτως ἡ βζ πρὸς δζ. συναχθείη δ' ἂν τὸ αὐτὸ καὶ ἄλλως οὕτως. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ βζ πρὸς ζδ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζβδ πρὸς τὸ ὑπὸ βδζ, τῆς βδ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ δβζ ἴσον τὸ ἀπὸ βα. τῷ δὲ ὑπὸ βδζ ἴσον τὸ ἀπὸ δα. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ δα, οὕτως ἡ βζ πρὸς δζ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ θζ πρὸς ζκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἡ θβ πρὸς βκ. καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι δύο μεγέθη ἄνισα, καὶ προστεθῇ αὐτοῖς ἴσα, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ συντεθὲν πρὸς τὸ συντεθέν. ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, γδ. καὶ προσκείσθωσαν αὐταῖς ἴσαι αἱ βε, δζ. λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς γδ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αε πρὸς γζ. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ αβ τῆς γδ, ἡ αβ ἄρα πρὸς βε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γδ πρὸς τὴν βε, τουτέστι πρὸς δζ. ὥστε καὶ συνθέντι ἡ αε πρὸς εβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γζ πρὸς τὴν δζ, διὰ τὰ προδεδειγμένα.

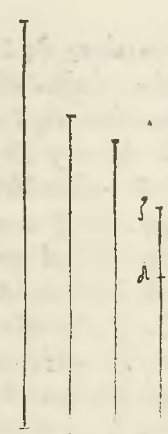
Ἔλαττον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θζκ τοῦ ἀπὸ ζκ, ἐὰν γὰρ ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι συνεχεῖς, ὡς αἱ α, β, γ, ὥς τε γ, ὥστε τὴν α πρὸς τὴν β ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν β πρὸς τὴν γ. τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν α, γ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς β. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν, ὡς τὴν α πρὸς τὴν β, οὕτως τὴν β πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς γ, ἤπερ δεῖ ἐλαττῶσαι τὸν τῆς β πρὸς γ λόγον, καὶ ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς α καὶ τῆς μείζονος τῆς γ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς β, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν α, γ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς β.

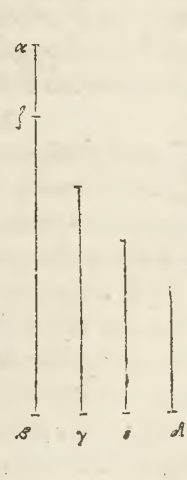


Τὸ ἄρα ὑπὸ θζ, η πρὸς τὸ ἀπὸ ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. ὡς γὰρ ἡ θζ πρὸς ζη, οὕτως τὸ ὑπὸ θζ, η πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. τὸ δὲ ὑπὸ θζ, η τοῦ ἀπὸ ζη ἔλασσον. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εδ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βζ, δ τοῦ ὑπὸ τῶν βε, δ. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ βδ, ε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εδ. τὸ δὲ ὑπὸ βζ, δ μετὰ τοῦ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ. καὶ δῆλον ὅτι ὅσῳ τῆς διχοτομίας ἐφέστηκεν τὸ ζ μεῖζον, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ἴσων. μετὰ γὰρ μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν, ἴσον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων, ὥστε εὐθεῖα ἐὰν εἰς ἄνισα τέμνηται κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἔγγιον τῆς διχοτομίας, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ἀπωτέρων τμημάτων.

Ἡ βζ ἄρα πρὸς βε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δζ. καθόλου γὰρ ἐὰν τέσσαρες ὅροι ὦσιν οἱ α, β, γ, δ, ε. καὶ ᾖ τὸ ὑπὸ τῶν α δ, ε, ἔλασσον τοῦ ὑπὸ β, γ, ὁ α πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δ, ε. ἔστω γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν β, γ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν α ζ, ε. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ γ πρὸς τὸν ζ, ε. ὁ δὲ γ πρὸς τὸν ζ, ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν ε δ. καὶ ὁ α ε πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δ, ε.

Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θβ πρὸς βκ, τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. ἐπεὶ γὰρ τῷ ὑπὸ θβ, κ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ βν, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν ὡς ἡ θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ θβ πρὸς βκ. οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, τουτέστι τὸ ἀπὸ βν πρὸς τὸ ἀπὸ βκ, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. συνθέντι ὡς ἡ θν πρὸς νβ, ἡ κν πρὸς κβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ θν πρὸς νκ, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, οὕτως τὸ ἀπὸ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ, οὕτως ἐδείχθη ἡ θβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς βκ, οὕτως τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. τὸ δὲ ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. πάλιν γὰρ δύο ἀνίσας ταῖς θζ, ζκ πρόσκειται ἡ νζ, καὶ διὰ τὸ ἀνωτέρω εἰρημένον ἡ θζ πρὸς ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θν πρὸς νκ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. τὸ ἄρα ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βε, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζκ. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς κζ πρὸς ζκ. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι εὐθεῖαι, ὡς αἱ αβ, γ, δ. ὥστε τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν γ πρὸς τὴν δ. λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. εἰλήφθω γὰρ τῶν γ, δ μέση ἀνάλογον ἡ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ, ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ λόγος διπλάσιόν ἐστι τοῦ τῆς αβ πρὸς γ. ὁ δὲ τῆς γ πρὸς τὴν δ διπλάσιών ἐστι τοῦ τῆς γ πρὸς ε, καὶ ἡ αβ ἄρα πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ πρὸς ε. γεγονέτω οὖν ὡς ἡ ε πρὸς τὴν γ, ἡ γ πρὸς βζ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ βζ, γ, ε, δ, ἡ βζ ἄρα πρὸς δ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βζ πρὸς γ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς ε. ἔχει δὲ καὶ ἡ γ πρὸς δ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς γ πρὸς ε, ἡ ἄρα βζ πρὸς δ ἡ-

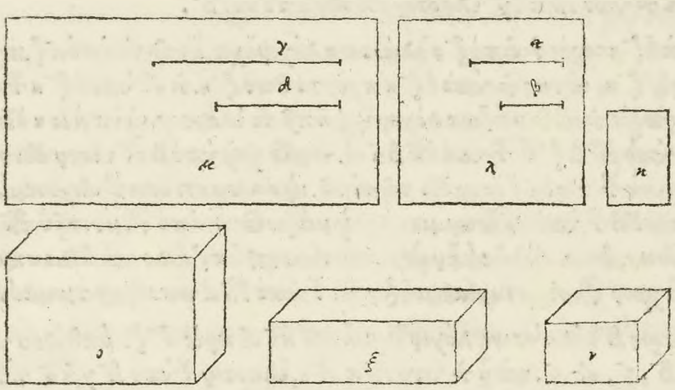




μιόλιον

ΛΗΜΜΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΞΗΣ.

Ἔστωσαν τέσσαρες ὅροι οἱ α, γ, δ, β. λέγω ὅτι ὁ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν α, β πρὸς τὸ ἀπὸ γ μετὰ τοῦ τῆς β πρὸς δ λόγου, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ. ἔστω γὰρ τῷ μὲν ὑπὸ α β ἴσος ὁ κ, τῷ δὲ ἀπὸ γ ἴσος ὁ λ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ β πρὸς δ, οὕτως ὁ λ πρὸς μ. ὁ ἄρα τοῦ κ πρὸς μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ κ πρὸς λ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ λ πρὸς μ, τουτέστι τοῦ β πρὸς δ. ὁ δὴ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν ποιείτω. ὁ δὲ λ τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν ξ ποιείτω, τὸν δὲ δ πολλα-



πλασιάσας, τὸν ο. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν α β ὁ κ ἐστιν, ὁ δὲ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν πεποίηκεν, ὁ ἄρα ν ἐστιν ὁ ὑπὸ α β ἐπὶ τὸν β. πάλιν ἐπεὶ ὁ ἀπὸ γ ὁ λ ἐστιν, ὁ δὲ λ τὸν δ πολλαπλασιάσας τὸν ο πεποίηκεν, ὁ ο ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τῆς γ ἐπὶ τὸν δ, ὥστε ὁ τοῦ ὑπὸ α β ἐπὶ τῆς β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ν πρὸς ο. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ὁ τῆς κ πρὸς μ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ν πρὸς ο. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερος τῶν κ, λ τὸν β πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τὸν ν, ξ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κ πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ ν πρὸς ξ. πάλιν ἐπεὶ ὁ λ ἑκάτερον τῶν β, δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν ξ, ο πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ ξ πρὸς ο. ἀλλ' ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ λ πρὸς τὸν μ. καὶ ὡς ἄρα ὁ λ πρὸς μ, ὁ ξ πρὸς ο. οἱ ἄρα κ, λ, μ τοῖς ν, ξ, ο ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι, καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κ πρὸς μ, οὕτως ὁ ν πρὸς ο. καὶ ὁ τῆς κ πρὸς μ λόγος, ὁ αὐτὸς τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῆς ὑπὸ α β πρὸς τὸν ἀπὸ γ, καὶ τῆς ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ. ὁ δὲ τῆς ν πρὸς ο λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τῆς β πρὸς τῆς ἀπὸ γ ἐπὶ τῆς δ. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τῆς ὑπὸ α β πρὸς τῆς ἀπὸ γ, καὶ τῆς ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ δ β ἐπὶ τῆς β πρὸς, τὸν ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ.

Φανερὸν δὲ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ α β ἐπὶ τῆς β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τὸν α. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως τὸ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, τῆς β κοινοῦ ὕψους λαμβανομένου. ἐὰν δὲ τέσσαρες ὅροι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. ὁ ἄρα ὑπὸ α β ἐπὶ τῆς β, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τῆς α.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ Η.

Εἴρηται ἐν τοῖς προλαβοῦσιν, ὡς ἐὰν δύο μεγέθεων ληφθῇ τὸ μέσον, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ πρῶτον πρὸς τὸ μέσον, καὶ τὸ μέσον πρὸς τὸ τρίτον. ὁμοίως δὲ κἂν πλείονα μέσα ληφθῇ, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λόγων ὧν ἔχουσιν πάντα κατὰ τὸ ἑξῆς πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη. καὶ ἐνταῦθα οὖν φησὶ, ὅτι ὁ τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ β α δ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον, καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον. καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα. δηλαδὴ τοῦ δ α β τμήματος, καὶ τοῦ β γ δ μέσων λαμβανομένων τῶν εἰρημένων κωνικῶν. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸν β α δ κῶνον, ὁ τῆς κ θ ἐστὶ πρὸς θ γ, διὰ τὸ πόρισμα τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου. ἔλεγε γὰρ τὸ τμῆμα πρὸς τὸν ἐν αὐτῷ κῶνον.

τοῦ κώνου τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὁ δὲ τοῦ βαδ κώνου πρὸς τὸν βγδ κῶνον, ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θγ. ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. ὁ δὲ τοῦ βγδ κώνου πρὸς τὸ βγδ τμῆμα, ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θζ, διὰ τὸ ἀνάπαλιν τοῦ εἰρημένου πορίσματος, ὥστε ὁ τοῦ βαδ τμήματος πρὸς τὸ βγδ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ τῆς ηθ πρὸς θγ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θζ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ τῆς ηθ πρὸς θγ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ ὁ τοῦ ὑπὸ ηθα ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. τὰ γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ηθα πρὸς τὸ ἀπὸ γθ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θζ, ὁ τοῦ ὑπὸ ηθα ἐστὶν ἐπὶ τὴν θα, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι λήμματι. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ηθα ἐπὶ τὴν θα, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη. καὶ τοῦτο γὰρ συναποδέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. ἐπεὶ οὖν δεῖ δεῖξαι, ὅτι τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου, δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ βαδ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ βγδ. τουτέστι τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βγ, οὕτως ἡ αθ πρὸς θγ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς προλαβοῦσι θεωρήμασι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα, ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. ἀλλὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ λόγου διπλάσιος ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ τῆς θη κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. χρὴ ἄρα δειχθῆναι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν ζθ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. τουτέστιν ὅτι μείζων ἡ ζθ τῆς θη. ἔστι δὲ τοῦτο φανερόν. ἀνίσοις γὰρ ταῖς αθ, θγ ἴσαι πρόσκεινται αἱ ζα, γη.

Ταῦτα εἰπὼν αὐτὸς μὲν οὐκ ἐπήγαγεν τὴν σύνθεσιν, ἡμεῖς δὲ αὐτὴν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἡ ζθ τῆς θη μείζων ἐστί, τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. ὥστε τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη, τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ λόγος διπλάσιός ἐστι τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. ὁ δὲ τῶν ἐπιφανειῶν ὃν ἔχει ἡ αθ πρὸς θγ, τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἑξῆς δὲ ἀναλύων τὸ ἕτερον μέρος τοῦ θεωρήματος ἐπάγει. φημὶ δὴ ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸν ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου ἡμιόλιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον. τοῦ γὰρ τῆς αβ πρὸς βγ διπλάσιος μὲν ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ βγ τετράγωνον. τριπλάσιος δὲ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον, ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς αβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον. ὡς γὰρ ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ αθ πρὸς θβ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγ, αβθ τριγώνων. ἐὰν δὲ ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνάλογον καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ τὰ ὅμοια, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον εἰσίν, ὥστε ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον, ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αβ τετράγωνον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, ἀλλ' ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. φημὶ οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ ἀπὸ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον, τουτέστιν ὁ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ. καὶ ὁ διὰ αθ πρὸς θβ. ὁ γὰρ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ διπλασίων τοῦ διὰ αθ πρὸς θβ. προσλαβὼν τὸν διὰ αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αθ κύβῳ πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. ἑκάτερος γὰρ τοῦ αὐτοῦ ἐστι τριπλάσιος. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστι πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς αθ πρὸς θβ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς θβ πρὸς θγ, τῆς βθ μέσης ἀνάλογον ὑπαρχούσης. ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς βθ πρὸς θγ. ἀλλ' ὁ τῆς βθ πρὸς θγ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τῆς βθ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, μετὰ τοῦ ἀπὸ θβ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, καὶ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τοῦ ἀπὸ βθ μέσου λαμβανομένου. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη, τῆς θη κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. φημὶ δὴ ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστι. δεικτέον ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη, τουτέστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ. ἐὰν γὰρ ὦσι τέσσαρες ὅροι ὡς ἐνταῦθα, τὸ ἀπὸ γθ καὶ τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ ἡ θη καὶ θζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἔλασσον ᾖ τοῦ ὑπὸ τῶν μέσων, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. εὐλόγως ἄρα ἔχρην δεῖξαι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσον τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη. τουτέστιν τῷ δεῖξαι ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, ἡ γθ πρὸς θβ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ γθ πρὸς θβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ. τουτέστιν ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ εγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εκ. καὶ ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ βλ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἴση δέ ἐστιν ἡ θζ συναμφοτέρῳ τῇ θα κε. ἡ γὰρ αζ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστί. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ηθ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς ηθ τῆς γθ. ἀπὸ δὲ τῆς κε τῆς ελ ἴσης τῇ βθ δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ γη πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν αθ κλ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἐπεὶ γὰρ δεῖ δειχθῆναι, ὅτι ἡ ηθ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θα κε πρὸς θβ. τουτέστι πρὸς λε, καὶ διελόντι ἡ ηγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θα κλ πρὸς λε, τουτέστι πρὸς βθ. ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἀλλ' ὡς ἡ γθ πρὸς θβ. οὕτως ἡ θβ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ λε πρὸς αθ. ὅτι ἄρα ἡ ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κλ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ λε πρὸς αθ. καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ γη, τουτέστιν ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ θα πρὸς θα, διελόντι ἡ κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ αὐτὴ ἡ κλ πρὸς θα. τουτέστιν ὅτι ἐλάσσων ἡ λε τῆς θα ἐστίν. ἑξῆς δὲ ἡμεῖς τὴν σύνθεσιν προσθήσομεν, ἐπεὶ ἡ λε τῆς αθ ἐλάσσων, ἡ ἄρα κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κλ πρὸς αθ. συνθέντι ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ πρὸς αθ. ἡ δὲ λε τῇ βθ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα ηγ πρὸς βθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ πρὸς αθ. ἐναλλὰξ, ἡ ἄρα ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν κλ αθ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βθ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ γθ πρὸς θβ. ἐναλλὰξ ἡ ηγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ πρὸς θβ. συνθέντι ἡ ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ μετὰ τῆς θβ, τουτέστι συναμφότερος ἡ αθ κε πρὸς βθ. ἴση δὲ ἡ κε τῇ αζ. ἡ ἄρα ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ζθ πρὸς θβ. ἐναλλὰξ ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ γθ πρὸς θβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἡ ἄρα ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ διὰ τὰ πρότερον εἰρημένα, τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη, τουτέστι τὸ ἀπὸ

αθ ἐπὶ

α θ ἐπὶ τὴν θ κ, πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β, ἐπὶ τὴν θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ, τοῦ ἀπὸ β θ μέσου λαμβανομένου, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, καὶ τοῦ ἀπὸ β θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ β θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς β θ πρὸς θ γ, τουτέστι τῷ τῆς α θ πρὸς β θ. τὸ ἄρα ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, μετὰ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ β. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, καὶ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ β, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς α θ κύβου, πρὸς τὸν ἀπὸ θ β κύβον. τουτέστι τοῦ ἀπὸ α β κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ β γ κύβον. τὸ ἄρα ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ θ ζ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ α β κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ β γ κύβον. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ λόγος, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῶν τμημάτων λόγῳ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς α β κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς β γ κύβου λόγον, ἡμιόλιος ἐδείχθη τοῦ τῶν ἐπιφανειῶν λόγου. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Δῆλον δὲ ὅτι ἡ β α τῆς μὲν α κ ἐλάσσων ἐστί, ἢ διπλασία δυνάμει. τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων, ἢ διπλασία. ἐπιζευχθείσης γὰρ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀμβλείας γινομένης ὑπὸ τῆς β α, τὸ ἀπὸ τῆς α β μεῖζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν ἴσων ὄντων. ὥστε τοῦ ἑνὸς αὐτῶν, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου μεῖζον ἐστιν, ἢ διπλάσιον. πάλιν δὲ τοῦ ἀπὸ α β ἴσου ὄντος τοῖς ἀπὸ α κ, κ β. καὶ μείζονος ὄντος τοῦ ἀπὸ α κ τοῦ ἀπὸ κ β, τὸ ἀπὸ α β τοῦ ἀπὸ α κ ἔλασσον ἐστὶν ἢ διπλάσιον. καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ σχήματος, ἐφ' οὗ σημεῖον θ. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ σχήματι τἀναντία τούτοις εἰκότως λεχθήσεται.

Ἔσω τῇ ε λ ἴση ἡ ε ν. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θ ζ, κῶνος ἔσω κορυφὴν ἔχων τὸ ν σημεῖον. ἴσος δὴ καὶ οὗτος ἐστὶ τῷ κατὰ τὴν θ ε ζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θ ζ, ὕψος δὲ τὴν δ ε, τοῦ μὲν κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, καὶ ὕψος ἴσον, τριπλάσιος ἐστί, τοῦ δὲ ἡμισφαιρίου ἡμιόλιος. τὸ ἡμισφαίριον διπλάσιον ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου. ἔστι δὲ καὶ ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θ ζ κύκλον. ὕψος δὲ τὴν λ ν, διπλάσιος τοῦ αὐτοῦ κώνου. καὶ τὸ ἡμισφαίριον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζ θ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν λ ν.

Τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν α ρ γ μεῖζον ἐστὶ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν α κ γ, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. εἴρηται γὰρ ἀνωτέρω, ὅτι ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄνισα, κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ποιούντων τὴν ἐγγυτέραν τῆς διχοτομίας τομὴν μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν τμημάτων ποιούντων τὴν ἀπωτέρω. τοῦτο δὲ ἐστὶν εἰπεῖν. διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. ὅσῳ γὰρ ἐλάσσων ἐστί, τοσούτῳ πλέον ἀφέστηκεν ἡ τομὴ τῆς διχοτομίας.

Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς α ρ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν α κ, γ ξ. ἥμισυ γὰρ ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς α β. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ β γ διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον ἦχθαι τὴν β κ, καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοια εἶναι· τῷ ὅλῳ γὰρ τὸ ὑπὸ γ α κ ἴσον τῷ ἀπὸ α β, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῆς ἡμισείας τῆς γ α, καὶ α κ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γ ξ α κ ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ α β, τουτέστι τῷ ἀπὸ α ρ.

Μεῖζον οὖν ἐστὶ καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ α κ, γ ξ, τῷ ἀπὸ α ρ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ α ρ γ τοῦ ὑπὸ α κ γ. ἐὰν δὲ ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα, καὶ ἐκεῖνο μεῖζον, ὃ καὶ ἐξ ἀρχῆς μεῖζον, τῷ ὑπὸ α ρ γ προστεθέντος τοῦ ἀπὸ α ρ, τῷ δὲ ὑπὸ α κ γ τοῦ ὑπὸ α κ γ ξ, μεῖζον γίνεται τὸ ὑπὸ α ρ γ μετὰ τοῦ ἀπὸ α ρ, τοῦ ὑπὸ α κ γ, μετὰ τοῦ ὑπὸ α κ γ ξ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ α ρ γ, μετὰ τοῦ ἀπὸ α ρ ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ γ α ρ, διὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. τὸ δὲ ὑπὸ α κ γ μετὰ τοῦ ὑπὸ α κ γ ξ ἴσον τῷ ὑπὸ α κ κ ξ, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου, ὥστε τὸ ὑπὸ γ α ρ μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ α κ ξ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ξ κ α ἴσον ἐστὶ τὰ ὑπὸ τῶν μ κ γ. ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ξ γ πρὸς γ κ, ἡ μ α πρὸς α κ. ὥστε καὶ συνθέντι ὡς ἡ ξ κ πρὸς κ γ, οὕτως ἡ μ κ πρὸς κ α. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ξ κ α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ μ κ γ. ἀλλὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ξ κ α μεῖζον ἦν τὸ ὑπὸ γ α ρ. καὶ τὸ ὑπὸ γ α ρ ἄρα μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ μ κ γ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ α γ πρὸς γ κ, ἤπερ ἡ μ κ πρὸς α ρ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες εὐθεῖαι εἰσὶν αἱ γκ, κμ, γα, αρ. καὶ τὸ ὑπὸ πρώτης τῆς γα καὶ τετάρτης τῆς αρ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ δευτέρας τῆς μκ, καὶ τρίτης τῆς κγ. ἡ πρώτη ἡ γα πρὸς δευτέραν τὴν μκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τρίτη ἡ κγ πρὸς τετάρτην τὴν αρ. καὶ ἐναλλὰξ ἡ γα πρὸς κγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς γκ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. τῆς ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς βγ, διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον εἶναι τῆς βγ, γίνεται ὡς ἡ αγ πρὸς γβ, ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ὅμοιον γὰρ τὸ αβκ τῷ αβγ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἡ δὲ αγ πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. καὶ τὸ ἀπὸ αβ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίσυ τὸ ἡμίσυ τοῦ ἀπὸ αβ. ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ αρ, πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡμίσεια τῆς μκ πρὸς τὴν αρ. τουτέστιν ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἀλλὰ τῷ ἀπὸ αρ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ζλ. ἐπειδὴ ἡ μὲν αβ τῇ εζ ὑπόκειται ἴση, ἡ δὲ εζ τῇ ζλ δυνάμει διπλῆ. ἴση γὰρ ἡ ελ τῇ λζ. τῆς δὲ αρ διπλασία ἡ νλ. ἐπεὶ καὶ τῆς λζ. ὥστε τὸ ἀπὸ ζλ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν θζ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς νλ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον, τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν ὡς τὸν περὶ διάμετρον τῆς ζθ κύκλον πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, οὕτως τὴν κμ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς λν. καὶ ἔσται ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ἐλάσσονα εὐθεῖαν, ἴσος μὲν τῷ μβδ διὰ τὸ ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐλάττων δὲ τοῦ νθζ διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντας πρὸς ἀλλήλους εἶναι ὡς τὰ ὕψη. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν εζθ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν αβδ περιφέρειαν.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟμνημα εἰς τὸ δεύτερον τῶν Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθείσης ὑπὸ τοῦ Μιλησίου μηχανικοῦ Ἰσιδώρου ἡμετέρου διδασκάλου.

Εὐτοκίου πινυτοῦ γλυκερὸς πόνος, ὅν ποτ' ἐκεῖνος
γράψεν τοῖς φθονεροῖς πολλάκι μεμψάμενος.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ

ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΝ.

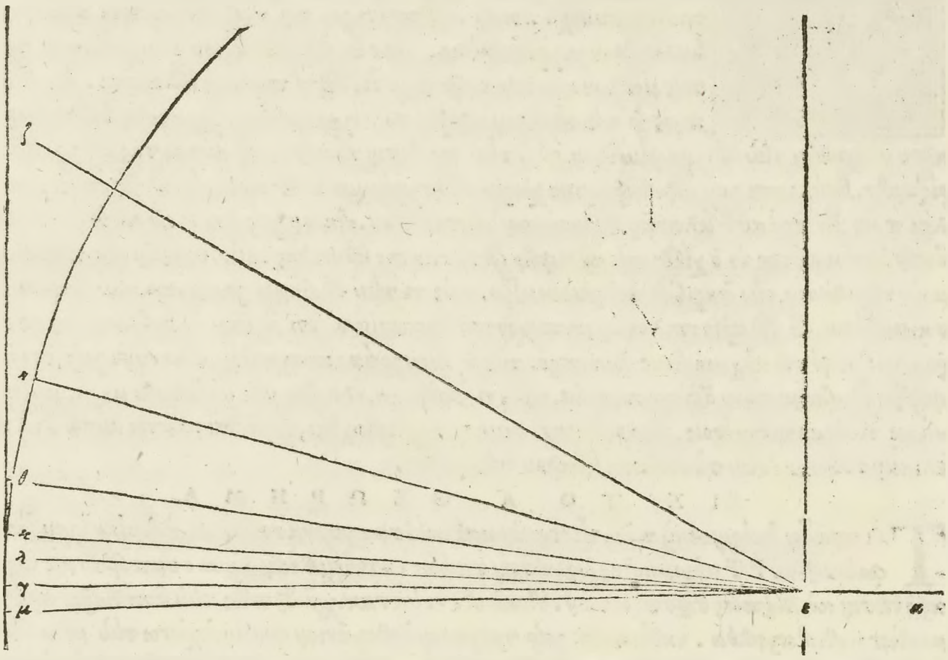
Ἐχόμενον ἂν εἴη τὸν ἐμὸν πληροῦντι σκοπὸν τοῖς σαφεστέροις, καὶ βραχυτέρας ἐπιστάσεως δεομένοις, τῶν ὑπὸ ἀρχιμήδους γεγραμμένων ἐντυγχάνοντι, καὶ τὰ ὁποσοῦν ἐν αὐτοῖς ἐπεξεργασίας δεόμενα, τὸν δυνατὸν τρόπον συνεχῆ ποιεῖν τοῖς πρότερον ὑφ' ἡμῶν ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις, ἔχης ὡς ἀληθῶς ἀξίου τυγχάνοντος τοῦ καὶ τοῖς μείζοσι καὶ πλείονος φροντίδος δεομένοις ἐπιστῆναι. εἴη δ' ἂν ὡς πρὸς τὸ προκείμενον ἐφεξῆς τὸ γεγραμμένον ἀρχιμήδει βιβλίον κύκλου μέτρησιν τὴν ἐπιγραφὴν ἔχον, ἐν ᾧ τὴν πρόθεσιν τἀνδρὸς, ἐξ αὐτῆς τῆς ἐπιγραφῆς γνωρίζομεν. βούλεται γὰρ ἐπιδεῖξαι τίνι χωρίῳ εὐθυγράμμῳ ἴσος ἂν εἴη κύκλος, πρᾶγμα πάλαι πρὸς τῶν πρὸ αὐτοῦ κλεινῶν φιλοσόφων ἐζητημένον. δῆλον γὰρ ὅτι τί ἂν εἴη τὸ ζητούμενον, ὅπερ ἱπποκράτης τε ὁ χῖος καὶ ἀντιφῶν ζητήσαντες ἐπιμελῶς ἐκείνους ἡμῖν τοὺς παραλογισμοὺς εὑρήκασιν, οὓς ἀκριβῶς εἰδέναι νομίζω τούς τε τὴν εὐδήμου γεωμετρικὴν ἱστορίαν ἐπεσκεμμένους, καὶ τῶν ἀριστοτελικῶν μετασχόντας κηρίων. ἀλλ' ἔστι μὲν τοῦτο τὸ βιβλίον, ὥς φησιν ἡρακλείδης ἐν τῷ ἀρχιμήδους βίῳ, πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον. δείκνυσι γὰρ, ὅτι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει, ἔλαττον μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μεῖζον δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. τοῦτο οὖν φησι σύνεγγυς δεδεῖχθαι, εὑρῆσθαι μέντοι αὐτῷ διά τινων ἑλίκων εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ κύκλου περιφερείᾳ.

ΕΙΣ ΤΟ Α ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ πρῶτον θεώρημα καὶ τοῖς ἐπὶ ποσὸν μαθημάτων γυμνασαμένοις, οὐδεμίαν ἔχον ζήτησιν φαίνεται, αὐτοῦ τοῦ ἀρχιμήδους ῥημάτων σαφῶς ἐκτεθειμένων, καὶ τὸ συμπέρασμα πρὸς τὴν πρότασιν ἀνελλιπῶς ἀποσωζόντων. δοκεῖ δέ τι κατακεχρῆσθαι πρὸς τὴν ἀπόδειξιν πράγματι μηδέπω δεδειγμένῳ. ἐκθέμενος γὰρ τρίγωνον ὀρθογώνιον φησίν, ἐχέτω τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τὴν δὲ λοιπὴν τῇ περιφερείᾳ, ἀλλὰ τῇ περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν λαβεῖν, οὐδὲ πρὸς αὐτοῦ ἤδη δεδειγμένον ἐστίν, ἀλλ' οὐδὲ ὑπ' ἄλλου παραδεδομένον. συνορᾶν δὲ ὅμως χρή, ὡς οὐδὲν ἔξω τῶν προσηκόντων ὑπ' ἀρχιμήδους γράφεται. ἐὰν γὰρ τὸ μέγεθος τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, παντί που δῆλον. οἶμαι καὶ τοῦτο τῶν ἐφ' ἓν διαστάτων. ἔστι δὲ καὶ εὐθεῖα τοῦ αὐτοῦ εἴδους. κἂν εἰ μηδέπω οὖν ἐφάνη, δυνατὸν περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν πορίσασθαι, ἀλλ' ὅμως ἐστίν τινὰ τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην αὐτῇ πρὸς οὐδενὸς ἐστὶ ζητούμενον. τὸ τοίνυν καὶ πρὸς ἀρχιμήδους προτεθὲν τοιοῦτον ἐστίν. ὅτι τρίγωνον τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον ὡς προείρηται τὰς πλευρὰς, ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ, ὥστε τὸ προτεθὲν ἐκθέμενος οὐδεμίαν ἂν καταχρήσεως κρίνοιτο. θαύματος δ' ἂν μᾶλλον καὶ τούτοις δόξειεν τοῖς οὕτως ὑπερμεγέθεσι τῶν ζητημάτων σαφῆ καὶ ῥᾳδίαν τὴν εὕρεσιν ἐπιτιθείς. ὡς δὲ εἴρηται, οὐδὲ μιᾶς ζητήσεως τῷ πρώτῳ θεωρήματι. τὸ γὰρ π ο ρ τρίγωνον, ὅτι μεῖζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ α ζ ο μ σχήματος. καὶ ὅτι ἁπλῶς περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, δυνατὸν εὐθύγραμμον περιγράψαι, ὥστε τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τῶν τοῦ κύκλου περιφερειῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ περιγραφομένου εὐθυγράμμου, ἐλάττονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου, σαφῶς εἴρηται ἐν τοῖς εἰς τὸ πρῶτον τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις ἡμῖν.

ΕΙΣ ΤΟ Γ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐν τούτῳ τῷ θεωρήματι συνεχῶς ἐπιταττόμεθα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρεῖν. τοῦτο δὲ ἀκριβῶς μὲν εὑρεῖν ἐπὶ ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου ἀδύνατον. ἀριθμὸν μὲν γὰρ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενον ποιεῖ τινὰ τετράγωνον ἀριθμόν. ὃς δὲ καὶ μόριον ἐφ' ἑαυτὰ γινόμενα, οὐκέτι ἀριθμὸν ποιεῖ πλήρη, ἀλλὰ καὶ μόριον. ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δύναμιν πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν, εἴρηται μὲν ἥρωνι ἐν τοῖς μετρικοῖς. εἴρηται δὲ πάππῳ καὶ θέωνι καὶ ἑτέροις πλείοσιν, ἐξηγουμένοις τὴν μεγάλην σύνταξιν τοῦ κλαυδίου πτολεμαίου, ὥστε οὐδὲν ἡμᾶς χρὴ περὶ τούτου ζητεῖν, ἐξὸν τοῖς φιλομαθέσιν ἐξ ἐκείνων ἀναλέγεσθαι, καὶ ἡ ὑπὸ γε̄ζ τρίτου ὀρθῆς. ἐὰν γὰρ τὴν τοῦ ἑξαγώνου περιφέρειαν διχοτομήσαντες, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς πρὸς τῷ βήτα ἀπολαβόντες ἐπιζεύξωμεν τὴν ε̄ζ. καὶ ἡ ὑπὸ γε̄ζ τρίτου ὀρθῆς. ἡ γὰρ πρὸς τὸ γ̄ ἀπολειφθεῖσα περιφέρεια ἡμίσεια οὖσα τῆς τοῦ ἑξαγώνου δωδέκατόν ἐστι τοῦ κύκλου, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γε̄ζ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ οὖσα, δωδέκατόν ἐστι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, τρίτον ἄρα ὀρθῆς. ἡ ε̄ζ ἄρα πρὸς ζ̄γ λόγον ἔχει, ὃν τ̄ς πρὸς ρ̄ν̄γ. ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ ε̄ζ τῆς ζ̄γ, δῆλον ἐντεῦθεν. ἐὰν γὰρ προσεκβαλόντες τὴν ζ̄γ ἐπὶ τὸ μ̄. καὶ ἴσην αὐτῇ ἀποθέμενοι ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τοῦ ε̄. συσταθήσεται ἡ πρὸς τῷ μ̄ γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ



ε̄ γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ̄ διμοίρου ἰσοπλεύρου, ἄρα τριγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ γε̄ζ, καὶ διὰ τὸ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοπλεύρου ἴσην οὖσαν τῇ ε̄ζ δίχα τέμνεσθαι κατὰ τὸ γ̄, διπλῆ ἐστιν ἡ ε̄ζ τῆς γ̄ζ. ἡ δὲ ε̄γ πρὸς γ̄ζ λόγον ἔχει, ὃν σ̄ξ̄ε πρὸς ρ̄ν̄γ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ε̄ζ ὑπόκειται τ̄ς. ἐὰν αὐτὰ ἐφ' ἑαυτὰ πολυπλασιάσωμεν γενήσεται $\overset{\theta}{\mathrm{M}}$,γχ̄λς. ἡ δὲ γ̄ζ ἐστι ρ̄ν̄γ. ὥστε τὸ ἀπ' αὐτῆς ἔσται $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γῡθ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ε̄ζ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ε̄γ, γ̄ζ. ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀπὸ ε̄ζ ὄντος $\overset{\theta}{\mathrm{M}}$,γχ̄λς, ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γ̄ζ ὑπάρχον $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γῡθ, καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ ε̄ $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ σκ̄ζ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ σ̄ξ̄ε. καὶ ἔτι μόριον ἐλάχιστον καὶ ἀνεπαίσθητον. λείπεται γὰρ ἡ τῶν σ̄ξ̄ε δύναμις τοῦ ἀκριβοῦς μονάσιν β̄. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ ε̄ζ τ̄ς	ἡ ζ̄γ ρ̄ν̄γ	λοιπὸν τὸ ἀπὸ ε̄γ $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ σκ̄ζ
ἐπὶ τ̄ς	ἐπὶ ρ̄ν̄γ	τὰ δὲ σ̄ξ̄ε ἐφ' ἑαυτὰ $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ σκ̄ε
$\overset{\theta}{\mathrm{M}}$,αω	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$,ετ	ἐπεὶ δ' ἐλλείπει ἄρα $\overset{\theta}{\mathrm{M}}$ β̄
,αωλ̄ς	,ζχν	$\overset{\delta}{\mathrm{M}}$ M ,β ,α εἰς τὸ ἀκριβές
ὁμοῦ $\overset{\theta}{\mathrm{M}}$,γχ̄λς	υνθ	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$,β ,γχτ
	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γῡθ	,ατκε.

Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζε̄γ δίχα τῇ ε̄η. ἔστιν ἄρα ἡ ζ̄ε πρὸς ε̄γ, ἡ ζ̄η πρὸς η̄γ, διὰ τὸ τρίτον θεώρημα τοῦ ἕκτου βιβλίου τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ ζ̄ε, ε̄γ πρὸς ε̄γ, ἡ ζ̄γ πρὸς γ̄η. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ζ̄ε, ε̄γ πρὸς ζ̄η, ἡ ε̄γ πρὸς γ̄η. συναμφότερος δὲ ἡ ε̄ζ, ε̄γ μείζων ἐστὶν ἤπερ φ̄ο̄α. ἡ μὲν γὰρ ζ̄ε ὑπόκειται τ̄ς. ἡ δὲ ε̄γ σ̄ξ̄ε, καὶ ἔτι μορίου τινός. ὥστε μεῖζον εἰσὶ τῶν φ̄ο̄α. ἡ δὲ ζ̄γ ἐστι ρ̄ν̄γ. συναμφότερος ἄρα ἡ ζ̄ε, ε̄γ πρὸς ζ̄γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ φ̄ο̄α πρὸς ρ̄ν̄γ. ὥστε καὶ ἡ ε̄γ πρὸς η̄γ μείζονα λόγον ἔχει,

ἤπερ

ἢ ὑπὸ φοα πρὸς ρνγ, ἡ ηε ἄρα πρὸς ηγ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{\lambda\delta}{M}$ θυν πρὸς $\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ. συνάχθήσεται δὲ ὥσπερ οὕτως. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ εγ πρὸς γη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. εἴ τις ὑποθοῖτο τὴν μὲν εγ, φοα. τὴν δὲ γη, ρνγ, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ $\overset{\lambda\beta}{M}$ ͵ςμα. τὸ δὲ ἀπὸ γη $\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ. συναμφότερα δὲ ἴσα ὄντα τῷ ἀπὸ εη, ἔσται $\overset{\lambda\delta}{M}$ θυν. τούτων πλευρὰ τετραγωνικὴ φϙα η ἔγγιστα. ἐλλείπει γὰρ ὁ ἀπὸ τῆς φϙα ἴσον τετράγωνον εἰς τὸ ἀκριβὲς $\overset{\circ}{M}$ κα. ϛʹ ιε ἔγγιστα. ἡ ἄρα εη πρὸς ηγ, δυνάμει μὲν λόγον ἔχει ὃν $\overset{\lambda\delta}{M}$ ͵θυν πρὸς $\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ. μήκει δὲ ὃν φϙα η ἴσον ἔγγιστα πρὸς ρνγ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ φοα	ἡ ηγ, ρνγ	φϙα η
ἐπὶ φοα	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ φϙα η
$\overset{\kappa\epsilon}{M}$ $\overset{\gamma}{M}$ ͵εφ	$\overset{\alpha}{M}$ ͵ετ	$\overset{\kappa\epsilon}{M}$ $\overset{\delta}{M}$ ͵εφξβ ∠
$\overset{\gamma}{M}$ ͵ε δʹλο	͵ε ͵β φ, ͵ε ν.	$\overset{\epsilon}{M}$ ηρ για δʹ
φοα	τ ρν θ	φϙα η
$\overset{\lambda\beta}{M}$ ͵ςμα	ὁμοῦ $\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ	ξβ ζια δʹ η ξ δʹ
	ὁμοῦ $\overset{\lambda\delta}{M}$	η υκη ζ δʹ ξ δʹ
Ἐκ τούτων συνάγεται		Ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
τὸ ἀπὸ εη		$\overset{\circ}{M}$ κα ϛʹ ιε ἔγγιστα
$\overset{\lambda\delta}{M}$ ͵θυν		

Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ηεγ τῇ θε, διὰ τὰ αὐτὰ ἡ εγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αρξβ ἴδον πρὸς ρνγ. γίνεται γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας, ὡς ἡ ηε πρὸς εγ, ἡ ηθ πρὸς θγ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς εγ, ἡ ηγ πρὸς γθ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ, ἡ εγ πρὸς γθ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν εγ, φοα, καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ εη φϙα. καὶ ἔτι μορίου τινός. μείζονες ἄρα εἰσὶν, ἤπερ ͵αρξβ η. καὶ ἔστιν ἡ ηγ, ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αρξβ η πρὸς ρνγ.

Ἡ θε ἄρα πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃ ͵αξβ η πρὸς ρνγ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ εγ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχουσα, ἤπερ ͵αρξβ η πρὸς ρνγ. εἴ τις ὑποθοῖτο αὐτὰς οὕτως ἔχειν, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ $\overset{\rho\lambda\epsilon}{M}$ φλ δὲ ∠, ξ δʹʹ. τὸ δὲ ἀπὸ γθ $\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ. τὸ ἄρα ἀπὸ εθ ἴσον ὂν τοῖς ἀπὸ εγ, γθ, ἔσται $\overset{\rho\lambda\zeta}{M}$ ͵γλμγ ∠ ξ δʹ, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵αροβ. λείπεται γὰρ τοῦ ἀκριβοῦς δυνάμεως τὸ ἀπ' αὐτῆς $\overset{\circ}{M}$ ξϛ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ ͵αρξβ η	ἡ θγ ρνγ	͵αροβ η
ἐπὶ ͵αρξβ η	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ ͵αροβ η
$\overset{\rho}{M}$ $\overset{\iota}{M}$ $\overset{\varsigma}{M}$ βρκε	μα ͵ετ	$\overset{\rho}{M}$ $\overset{\iota}{M}$ $\overset{\iota}{M}$ βρμϛ ∠
$\overset{\iota}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$ ͵ςριβ ∠	͵ε ͵β φρν	$\overset{\iota}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$ ζ σκα ∠
$\overset{\varsigma}{M}$ ͵ς γχξκζ ∠	τ ρν θ	$\overset{\iota}{M}$ ζ δʹ ηρμη ∠ δʹ
βςρκ δʹ δʹ	ὁμοῦ $\overset{\beta}{M}$ ͵γυθ	βσρμ δʹ δʹ
ρμε δʹ ξ δʹ		ρμϛ ∠ ξ δʹ
ὁμοῦ $\overset{\rho\lambda\epsilon}{M}$ φλ δʹ ∠ ξ δʹ	ὁμοῦ $\overset{\lambda}{M}$ ͵γλζ ∠ ξ δʹ	
τὸ ἀπὸ εθ ἴσον τοῖς		Ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
ἀπὸ εγ γθ ἐστὶ $\overset{\rho\lambda\zeta}{M}$ ͵γλμγ ∠ ξ δʹ.		$\overset{\circ}{M}$ λϛ.

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θεγ τῇ εκ, ἡ εγ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ͵βτλδ δʹ πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς ὑπὸ θεγ γωνίας ἐστὶν ὡς ἡ θε πρὸς εγ, ἡ θκ πρὸς γκ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ θε, εγ πρὸς εγ, ἡ θγ πρὸς γκ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ θε, εγ πρὸς θγ, ἡ εγ πρὸς γκ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ θε ͵αροβ η, καὶ ἔτι μορίου τινός. συναμφότερος ἄρα ἡ θε, εγ μείζων ἐστὶ ͵βτλδ δʹ. καὶ ὑπόκειται ἡ θγ ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ θε, εγ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βτλδ δʹ πρὸς ρνγ.

Ἡ εκ ἄρα πρὸς τὴν γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵βτλθ δʹ πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ ἐπεὶ ὑπόκειται

ἡ μὲν

ἡ μὲν εγ ͵βτλδ δ'. ἡ δὲ γκ, ρνγ. ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ $\overset{\varphi\upsilon\delta}{\text{Μ}}$ ͵ψκγ ιϛ'. τὸ δὲ ἀπὸ γκ $\overset{\beta}{\text{Μ}}$ ͵γυθ. τὸ τοῖς δ' ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ κε. ἔσται ἄρα $\overset{\varphi\upsilon\varsigma}{\text{Μ}}$ ͵βρλβ ιϛ'. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ἔγγιστα ͵βτλθ δ'. λείπει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{\text{ο}}{\text{Μ}}$ μα ∠. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ ͵βτλδ δ'	κγ κ ρνγ	͵βτλθ δ'
ἐπὶ ͵βτλδ δ'	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ ͵βτλθ δ'
$\overset{\nu}{\text{Μ}}$ $\overset{\xi}{\text{Μ}}$ $\overset{\varsigma}{\text{Μ}}$ ηφ	$\overset{\alpha}{\text{Μ}}$ ετ	$\overset{\nu}{\text{Μ}}$ $\overset{\xi}{\text{Μ}}$ $\overset{\varsigma}{\text{Μ}}$ $\overset{\alpha}{\text{Μ}}$ ηφ
$\overset{\xi}{\text{Μ}}$ $\overset{\theta}{\text{Μ}}$ θασοε	ε ͵βφρν	$\overset{\xi}{\text{Μ}}$ $\overset{\theta}{\text{Μ}}$ θ ͵βψοε
$\overset{\varsigma}{\text{Μ}}$ θλρκζ ∠	τρνθ	$\overset{\varsigma}{\text{Μ}}$ θλϛοζ ∠
ηασρκισα	ὁμοῦ $\overset{\beta}{\text{Μ}}$ ͵γυθ	$\overset{\alpha}{\text{Μ}}$ η ͵βψϛοπα β δ'
φπγ ∠ ις		φπδ ∠ δ' ις.
ὁμοῦ $\overset{\varphi\upsilon\delta}{\text{Μ}}$ ηψκγ ις'		ὁμοῦ $\overset{\varphi\upsilon\varsigma}{\text{Μ}}$ ͵βϙ ∠ ις'
ἐκ τούτων συνάγεται τὸ		ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
ἀπὸ εκ $\overset{\varphi\upsilon\varsigma}{\text{Μ}}$ ͵βρλβ ις.		$\overset{\text{ο}}{\text{Μ}}$ μα ∠

Ἐπεὶ δίχα ἡ ὑπὸ κεγ τῇ ελ, ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὰ ͵δχογ ∠ πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας ἐστίν, ὡς ἡ κε πρὸς εγ, ἡ κλ πρὸς λγ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς εγ, ἡ κγ πρὸς γλ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς κγ, ἡ εγ πρὸς λγ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν κε ͵βτλθ δ', καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ εγ ͵βτλδ δ', καὶ ἔτι μορίου. συναμφότερος ἄρα ἡ κε, εγ μείζων ͵δχογ ∠'. καὶ ἔστιν ἡ κγ, ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ εκ, εγ πρὸς κγ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ ∠ πρὸς ρνγ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς κγ, οὕτως ἡ εγ πρὸς γλ. καὶ ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ ∠ πρὸς ρνγ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτου οὖσα ὀρθῆς, δωδέκατον μέρος ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ηεγ, εἰκοστὸτέταρτον ἂν εἴη. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ θεγ, ὥστε μη ἐστί. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἐστὶν ἡ ὑπὸ κεγ. ϙϛ ἄρα ἐστί, ἧς ἡμίσεια οὖσα ἡ ὑπὸ λεγ, ρϙβ ἐστί. κείσθω οὖν φησὶ ἴση αὐτῇ ἡ ὑπὸ γεμ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ζγ ἐπὶ τὸ μ. ἡ ἄρα ὑπὸ λεμ διπλασία οὖσα τῆς ὑπὸ λεγ ϙϛ ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ὥστε καὶ ἡ λμ πλευρά ἐστι τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϙϛ. ἐπεὶ οὖν ἡ εγ πρὸς τὴν γλ δέδεικται μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ͵δχογ ∠ πρὸς ρνγ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν εγ διπλῆ ἡ αγ, τῆς δὲ λγ ἡ λμ, καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς λμ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ ∠ πρὸς ρνγ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λμ πρὸς αγ ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ρνγ πρὸς ͵δχογ ∠. καὶ ἐπεὶ ἡ λμ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ πλευρὰς ἔχοντος ϙϛ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου ἐστὶ $\overset{\alpha}{\text{Μ}}$ ͵δχπη. ὁ γὰρ ϙϛ ἐπὶ τὸν ρνγ πολυπλασιαζόμενος τοῦτον ποιεῖ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν αγ διάμετρον ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ $\overset{\alpha}{\text{Μ}}$ ͵δχπη πρὸς ͵δχογ ∠. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει $\overset{\text{ο}}{\text{Μ}}$ χξζ ∠'. ταῦτα δὲ ἐλάττονα ἐστὶ τοῦ ἑβδόμου τῆς διαμέτρου μιᾶς μονάδος ἑβδόμῳ μέρει. τὰ γὰρ ἑπταπλάσια τῶν χξζ ∠, ἅπερ ἐστὶ ͵δχοβ ∠', ἐλάττονα ἐστὶ τῆς διαμέτρου $\overset{\text{ο}}{\text{Μ}}$ α. ἐπεὶ οὖν τὸ πολύγωνον ἔλαττόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον, καὶ ἔτι ἑβδόμῳ ὑπερέχον. ἡ δὲ περίμετρος τοῦ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ πολυγώνου. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἔλασσον ἢ ἑβδόμῳ μέρει.

ΕΙΣ ΤΟ Δ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἑξῆς δὲ κατασκευάζων τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ θεωρήματος φησί. ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὴν αγ, καὶ τρίτου ὀρθῆς ἡ ὑπὸ βαγ. τοῦτο δὲ ἔσται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ γ τῇ τοῦ ἑξαγώνου ἴσην ἀπολαβόντες τὴν γβ ἐπιζεύξωμεν τὴν αβ. ἡ γὰρ ἐπὶ τῆς τοῦ ἑξαγώνου περιφερείας βεβηκυῖα γωνία πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ διμοίρου ἐστὶν ὀρθῆς, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ τρίτου. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αβγ, τρίτου δὲ ἡ ὑπὸ βαγ, διμοίρου ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ. ἐὰν ἄρα προσεκβάλλοντες τὴν γβ ἐπὶ τὸ β, καὶ ἴσην αὐτῇ ἀπολαβόντες ἀπὸ τοῦ α ἐπιζεύξωμεν, ἰσόπλευρον ἔσται τὸ τρίγωνον, καὶ διὰ τὸ τὴν αβ κάθετον διχοτομεῖν τὴν βάσιν, διπλῆ ἐστιν ἡ αγ τῆς γβ. ἐὰν οὖν πάλιν λάβωμεν τὴν αγ, ͵αφξ ἔσται ἡ γβ, ψπ. καὶ τὸ μὲν ἀπὸ αγ ἔσται $\overset{\sigma\mu\gamma}{\text{Μ}}$ ͵γχ. τὸ δὲ ἀπὸ γβ $\overset{\xi}{\text{Μ}}$ ηυ. καὶ ἐὰν ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γβ ἀπὸ τοῦ αγ, λοιπὸν καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ αβ $\overset{\rho\pi\beta}{\text{Μ}}$ ͵ερ, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵ατνα ἔγγιστα, περιττεύει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς

κριβοῦς Μ α. διό φησιν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἡ α β πρὸς β γ, ἤπερ ‚ατνα πρὸς ψπ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ α γ ‚αφξ
ἐπὶ ‚αφξ
$\overset{\rho}{\underset{\nu}{M}}$ $\overset{\upsilon}{\underset{\kappa\epsilon}{M}}$ $\overset{\varsigma}{\underset{\gamma}{M}}$
$\underset{\varsigma}{M}$ $\underset{\gamma}{M}$ M
$\underset{\varsigma}{M}$ $\underset{\gamma}{M}$ ‚γχ
ὁμοῦ M ‚γχ.
ἂν ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ β γ ἀπὸ τοῦ α γ, καταλείπονται
$\overset{\rho\pi\beta}{M}$ ‚εϲ.

ἡ γ β ψϖ
ἐπὶ ψπ
$\overset{\theta}{\underset{\epsilon}{M}}$ $\overset{\epsilon}{M}$ ϛ
$\underset{\epsilon}{M}$ ϛ ϛυ
ξ
ὁμοῦ M ‚ηυ

‚ατνα
ἐπὶ ‚ατνα
$\overset{\rho}{\underset{\lambda}{M}}$ $\overset{\lambda}{\underset{\theta}{M}}$ $\overset{\epsilon}{\underset{\alpha}{M}}$ ‚α
$\underset{\epsilon}{M}$ $\underset{\alpha}{M}$ M ‚ετ
M M ‚ε ‚βφν
‚ατνα
ὁμοῦ $\overset{\rho\pi\beta}{M}$ ‚εϲα
περιττεύει τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{o}{M}$ α.

Τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ β α γ τῇ α ζ η. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ β α η τῇ ὑπὸ η γ β. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ η α γ. καὶ ἡ ὑπὸ η γ β ἄρα τῇ ὑπὸ η α γ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ α η γ ὀρθή. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ η ζ γ λοιπῇ τῇ ὑπὸ α γ η ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ α η γ τρίγωνον τῷ γ η ζ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α η πρὸς η γ, ἡ γ η πρὸς η ζ. καὶ ἡ α γ πρὸς γ ζ. τῶν γὰρ ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι. ἀλλ' ὡς ἡ α γ πρὸς γ ζ, συναμφότερος ἡ γ α β πρὸς γ β, καὶ ἡ α η πρὸς η γ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ β α γ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς α ζ, ἐστὶν ὡς ἡ β α πρὸς α γ, ἡ β ζ πρὸς ζ γ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ β α, α γ πρὸς α γ, ἡ β γ πρὸς γ ζ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς συναμφότερος ἡ β α, α γ πρὸς β γ, ἡ α γ πρὸς γ ζ. καὶ ἔστιν ἡ M α β ἐλάσσων, ἢ ‚ατνα. ἡ δὲ α γ ‚αφξ, ἡ δὲ β γ, ψπ, συναμφότερος ἄρα ἡ α β, β γ πρὸς β γ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ‚βϡια πρὸς ψπ, καὶ ἡ α γ ἄρα πρὸς γ ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ‚βϡια πρὸς ψπ. ὡς δὲ ἡ α γ πρὸς γ ζ, ἡ α η πρὸς η γ, καὶ ἡ α η ἄρα πρὸς η γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ‚βϡια πρὸς ψπ. διὰ οὖν ταῦτα, ἔσται τὸ M ἀπὸ α η $\overset{\omega\mu\varsigma}{M}$ ‚γϡκα. τὸ δὲ ἀπὸ η γ $\overset{\xi}{M}$ ‚ηυ. καὶ ἔστιν αὐτοῖς ἴσον τὸ ἀπὸ α γ. καὶ αὖ τὸ ἄρα ἔσται $\overset{\vartheta}{M}$ ‚βτκα. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ‚γιγ < δ' ἔγγιστα. ὑπερέχει γὰρ τὸ ἀπὸ αὐτοῦ ἀκριβοῦς δυνάμεως $\overset{o}{M}$ τξηις. διὰ ταῦτα οὖν φησίν, ὅτι ἡ α γ πρὸς γ η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ‚γιγ < δ' πρὸς ψπ, οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ α η ‚βϡια
ἐπὶ ‚βϡια
$\overset{\upsilon}{\underset{\rho\pi}{M}}$ $\overset{\rho\pi}{\underset{\pi\alpha}{M}}$ $\overset{\beta}{M}$ ‚β
$\underset{\beta}{M}$ M θ λ
M ‚θρι
‚βϡια
ὁμοῦ $\overset{\omega\mu\varsigma}{M}$ ‚γϡκα

τὰ ἀπὸ τῶν α η, η γ $\overset{\mu}{\underset{\mu}{\vartheta}}$ ‚βτκα

ἡ η γ ψπ
ἐπὶ ψϖ
$\overset{\mu\theta}{\underset{\epsilon}{M}}$ $\overset{\epsilon}{M}$ ϛ
M ϛ ϛυ
ὁμοῦ $\overset{\xi}{M}$ ‚ηυ

‚γιγ < δ'
ἐπὶ ‚γιγ < δ'
$\overset{\lambda}{M}$ $\overset{\gamma}{M}$ ‚θαφψν
$\overset{\gamma}{M}$ ρλε β <
‚θλθα < < δ'
‚αφϛ < δ' ις'
ψνγ δ' ις'
ὁμοῦ $\overset{\lambda\eta}{M}$ ‚βχϖθις'
ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{o}{M}$ τξηις'

Δίχα ἡ ὑπὸ γ α η τῇ α θ. διὰ οὖν τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας πρὸς τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, καὶ ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν. καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλὰξ, ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ η α γ πρὸς η γ, η α θ πρὸς θ γ. καὶ ὑπόκειται ἡ M α η ἐλάσσων ἢ ‚βλια. ἡ δὲ α γ ἐλάσσων ἤπερ ‚γιγ < δ'. συναμφότερος ἄρα ἡ η α, α γ ἐλάσσων ἐστίν, ἢ ‚ελκδ < δ'. ἡ δὲ η γ ἐστὶ ψπ. συναμφότερος ἄρα ἡ ρ α α γ, πρὸς η γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ‚ελκδ < δ' πρὸς ψπ. ὥστε καὶ ἡ α θ πρὸς θ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ‚ελκδ < δ' πρὸς ψπ. ὥστε ἡ α θ πρὸς θ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ υνε < δ' πρὸς ξ. ἑκάτερα γὰρ ἑκατέρας ἐστὶ μέρος ιγ. καὶ τὰ τούτων τετραπλάσια, η α θ πρὸς θ γ. ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ‚αωκγ πρὸς σμ. διὰ τοῦτο γάρ φησιν, ὅτι ἑκάτερα ἑκατέρας ἐστὶ δ' ιγ. καὶ ἐπεὶ ἡ α θ ἐστὶν ‚αωκγ. τὸ ἄρα ἀπ' αὐτοῦ ἐστὶ $\overset{\tau\lambda\beta}{M}$ ‚γλκθ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ θ γ σμ. καὶ τὸ ἀπ' αὐτοῦ $\overset{\epsilon}{M}$ ‚ζχ. καὶ ἔστι τοῖς ἀπὸ α θ, θ γ ἴσον τὸ ἀπὸ α γ. ἔσται ἄρα $\overset{\tau\lambda\eta}{M}$ ‚λκθ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ‚αωλη θ' ια. τὸ γὰρ ἀπὸ αὐτοῦ ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{o}{M}$ τκα ἐγγύς. ὥστε ἡ α γ πρὸς θ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ‚αωλη θ' ια πρὸς σμ, οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ α θ ‚αωκγ   ἡ θ γ σμ   ‚αωλη θ' ια

Θ   ἐπὶ

ὑπὸ ,αωκγ
$\overset{\rho}{M}$ $\overset{\pi}{M}$ $\overset{\beta}{M}$,γ
$\overset{\pi}{M}$ $\overset{\xi\delta}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$,ςρυ
$\overset{\beta}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$,ςυξ
,γ βυξθ
ὁμοῦ $\overset{\tau\lambda\beta}{M}$,γτκθ.
τούτοις ἴσον τὸ ἀπὸ αγ
$\overset{\tau\lambda\eta}{M}$ λκθ ἐστί

ὑπὸ ϲμ
$\overset{\delta}{M}$,η
,ηαχ
ὁμοῦ $\overset{\varepsilon}{M}$,ζχ

ὑπὸ ,αωλη θ' ια'
$\overset{\rho}{M}$ $\overset{\pi}{M}$ $\overset{\gamma}{M}$,ηρια θ' ∠ ια'
$\overset{\pi}{M}$ $\overset{\xi\delta}{M}$ $\overset{\lambda\beta}{M}$,ας υ πη $\overset{\theta}{M}$ οβ η.
$\overset{\gamma}{M}$ $\overset{\beta}{M}$,δλϲμγ γ θ β ια
,ηςυϲμξδ η θ η ια
ρια θ' πη η γγ γ θ η θ πα ςθ'
ςιδοβηα.
η αι ηςθρκα
β α
ὁμοῦ $\overset{\tau\lambda\eta}{M}$,αϲναγοερεγγυϲ.
ὑπερέχει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{o}{M}$.
τκα ἐγγύς

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θαγ γωνία τῇ κα. πάλιν οὖν διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας καὶ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων καὶ τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν, καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλὰξ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ θα αγ πρὸς γθ, ἡ ακ πρὸς κγ. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ θα, αγ ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ ,γχξα θ' ια'. ἐπειδὴ ἡ μὲν θα ὑπόκειται ,αωκγ. ἡ δὲ αγ ,αωλη θ' ια'. ἔστι δὲ καὶ ἡ θγ ϲμ. συναμφότερος ἄρα ἡ θα, αγ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,γχξα θ' ια' πρὸς ϲμ, ὥστε καὶ ἡ ακ πρὸς κγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,γχξα θ' ια' πρὸς ϲμ. καὶ ὑπὸ τῶν μ ,γχξα θ' ια' τοῦ ια καὶ μ' ἐστὶ ,αζ. τῶν δὲ ϲμ, ξς. ἡ ακ ἄρα πρὸς κγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,αζ πρὸς ξς. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ ακ $\overset{\rho\alpha}{M}$,δμθ. τὸ δὲ ἀπὸ κγ ,δτνς, οἷς ἴσον ὂν τὸ ἀπὸ αγ ἐστὶ $\overset{\rho\alpha}{M}$,ηυε. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ,αθς'' ἔγγιστα. ἡ αγ ἄρα πρὸς γκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,αθς'' πρὸς ξς. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ ακ ,αζ
ὑπὸ ,αζ
$\overset{\rho}{M}$,ζ
,ζμθ
ὁμοῦ $\overset{\rho\alpha}{M}$,δμθ. ὁμοῦ ,δτνς.
Τούτοις ἴσον τὸ ἀπὸ αγ ἐστὶ $\overset{\rho\alpha}{M}$,ηυε

ἡ κγ ξς
ὑπὸ ξς
,γχτξ
τξλς

αθς'
ὑπὸ ,αθς'
$\overset{\rho}{M}$,θρξς ∠ ς'
θπαας
ρξς ζ ς αγλς'
ὁμοῦ $\overset{\rho\alpha}{M}$,ηυιζ γ' λς'.
ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{o}{M}$ ιβ γ' λς.

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ καγ γωνία τῇ αλ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ κα, αγ πρὸς κγ, ἡ αλ πρὸς λγ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ακ ἐλάσσων, ἢ ,αζ. ἡ δὲ αγ ἐλάσσων ἢ ,αθς'. ἡ δὲ κγ, ξς. συναμφότερος ἄρα ἡ κα, αγ πρὸς κγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,βις ς' πρὸς ξς. καὶ ἡ αλ ἄρα πρὸς λγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,βις ς' πρὸς ξς. καὶ ἐπεὶ ἡ αλ ὑπόκειται ,βιςς'. καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς $\overset{\upsilon\varsigma}{M}$,δλκηλς'. ἡ δὲ λγ, ξς. καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς ,δτνς. ἴσον δὲ αὐτοῖς ἐστὶ τὸ ἀπὸ αγ. ἔσται ἄρα $\overset{\upsilon\varsigma}{M}$,θϲπ δ λς'. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ἐστὶ ,βιζδ' ἔγγιστα. ὑπερέχει τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{o}{M}$ ιγ ς' κ'. ὥστε ἡ αγ πρὸς γλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,βιζδ' πρὸς ξς. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αλ ,βιςς'
ὑπὸ ,βιςς'
$\overset{\upsilon}{M}$ $\overset{\beta}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$,βτλργ'
$\overset{\beta}{M}$ ρξα ∠ ς'
$\overset{\alpha}{M}$,βξλςα
τλγ γ' α ∠ ς' αλ' ς
ὁμοῦ $\overset{\upsilon\varsigma}{M}$,δλκηλς'
τούτοις ἴσον τὸ ἀπὸ αγ ἐστὶ
$\overset{\upsilon\varsigma}{M}$,θϲπ δ λς.

ἡ λγ ξς
ὑπὸ ξς
,γχτξ
τξλς
ὁμοῦ ,δτνς

,βιζδ'
ὑπὸ ,βιζδ'
$\overset{\upsilon}{M}$ $\overset{\beta}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$,δφ
$\overset{\beta}{M}$ ροβ ∠
$\overset{\alpha}{M}$,δομβ α ∠ δ'
φβ ∠ α ∠ δ' ις'
θϲϥζ ∠ ις'
περιττεύει τοῦ ἀκριβοῦς
$\overset{o}{M}$ ιγ ∠ κ'

Ἐπεὶ οὖν ἡ αγ πρὸς γλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,βιζδ' πρὸς ξς. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ξς πρὸς ξς πρὸς ,βιζδ'. καὶ ἐπεὶ ἡ γβ περιφέρεια ἕκτον ἐστὶ τοῦ κύκλου. ἡ κγ ἄρα ιβ' μέρος ἐστὶν, ἡ δὲ θγ, κδ. ἡ δὲ κγ, μη. ἡ δὲ λγ, ϥς'. ὥστε ἡ λγ εὐθεῖα πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ϥς' πλευρὰς ἔχοντος, καὶ ἐστὶν ἡ λγ, ξς. ἡ ἄρα τοῦ πολυγώνου περίμετρος πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,ςτλς πρὸς ,βιζδ'. ταῦτα δὲ ἐστὶ τριπλάσια. καὶ ἔτι ὑπερέχει ,ςπδ

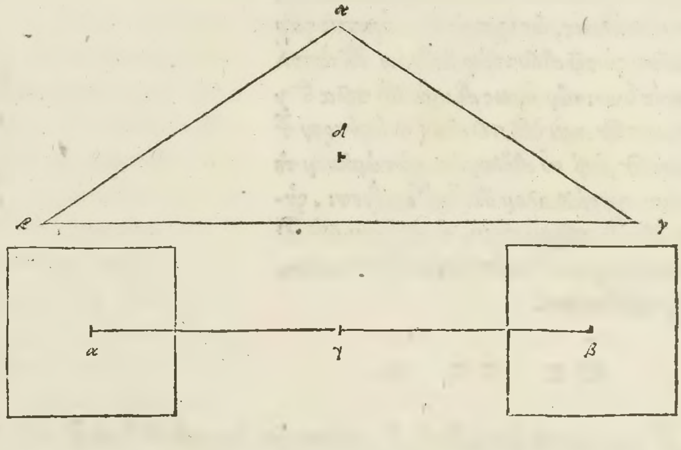
δδ, ἅπερ ἐλάττονα ἐστὶ δέκα ἑβδομηκοστομόνων, ὅ ἐστι μ, κζ < ς' ἔγγιστα. τὰ δὲ δεκαπλάσια τούτων ς ο̄ ζ. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια μείζων ἐστὶ ἢ τριπλάσια, καὶ δέκα ἑβδομηκοστόμονα. ὡς μὲν οὖν ἐνεχώρει οἱ παρ' αὐτοῦ εἰρημένοι ἀριθμοί, μετρίως ἐσαφηνίσαμεν. ἰστέον δὲ ὅτι καὶ ἀπολλώνιος ὁ περγαῖος ἐν τῷ ὠκυτοκίῳ ἀπέδειξεν αὐτὸ δι' ἀριθμῶν ἑτέρων ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγαγών. τοῦτο δὲ ἀκριβέστερον μὲν εἶναι δοκεῖ, οὐ χρήσιμον δὲ πρὸς τὸν ἀρχιμήδους σκοπόν. ἔφαμεν γὰρ αὐτὸν σκοπὸν ἔχειν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὸ σύνεγγυς εὑρεῖν, διὰ τὰς ἐν τῷ βίῳ χρείας, ὥστε οὐδὲ πόρος ὁ νικαεὺς εὔκαιρον εὑρεθήσεται, μέμψιν ἐπάγων ἀρχιμήδει, ὡς μὴ ἀκριβῶς εὑρόντι ποία εὐθεῖα ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἐξ ὧν αὐτὸς ἐν τοῖς κηρίοις φησί, τὸν ἑαυτοῦ διδάσκαλον φίλωνα λέγων, τὸν ἀπὸ γαδάρων εἰς ἀκριβεστέρους ἀριθμοὺς ἀγαγεῖν τῶν ὑπ' ἀρχιμήδους εἰρημένων, τοῦ τε ζ̄ φημὶ καὶ τῶν ι θ'. ἅπαντες γὰρ ἐφεξῆς φαίνονται, τὸν σκοπὸν αὐτοῦ ἠγνοηκότες. κέχρηνται δὲ καὶ τοῖς τῶν μυριάδων πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, οἷς οὐκ εὔκολον παρακολουθεῖν, τῷ μὴ διὰ τῶν μάγνου λογιστικῶν ἠγμένον. εἰ δέ τις ὅλως ἐβούλετο εἰς ἔλαττον αὐτὸ καταγαγεῖν, ἔχρην τοῖς ἐν τῇ μαθηματικῇ συντάξει τοῦ κλαυδίου πτολεμαίου εἰρημένοις ἀκολουθοῦντα, διὰ τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν καὶ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν τοῦτο ποιεῖν. καὶ πεποιήκειν ἂν ἐγὼ τοῦτο, εἰ μὴ ὅπερ πολλάκις εἶπον ἐγίνωσκον, ὡς οὔτε ἀκριβῶς δυνατὸν διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων εὑρεῖν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ ἴσην εὐθεῖαν. καὶ εἴ τις τὸ σύνεγγυς καὶ παρὰ μικρὸν προσέχοι, ἀρκεῖ τὰ ὑπ' ἀρχιμήδους ἐνταῦθα εἰρημένα.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙΜΗδους τῆς κύκλου μέτρησιν ἐκδόσεως παραναγνωσθείσης τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

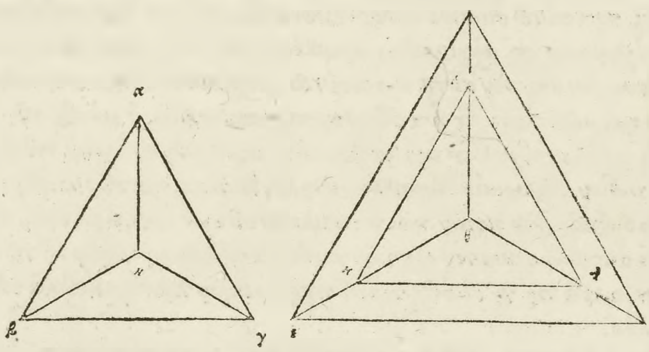
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Α ΤΩΝ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ.

ΤΗΝ ῥοπήν, ὦ γνησιώτατε πέτρε, κοινὸν εἶναι γένος βαρύτητος καὶ κουφότητος, ἀριστοτέλης τε λέγει, καὶ πτολεμαῖος τούτῳ ἀκολουθῶν. ὁ δέ γε παρὰ πλάτωνι τίμαιος πᾶσαν ῥοπὴν ἀπὸ βαρύτητος λέγει γίνεσθαι. τὴν γὰρ κουφότητα στέρησιν νομίζει, ὧν ἔξεστι τὰς δόξας τοῖς φιλομαθέσιν ἀναλέγεσθαι, ἔκ τε τοῦ περὶ ῥοπῶν βιβλίου τοῦ πτολεμαίου συγγεγραμμένου, καὶ ἐκ τῶν ἀριστοτέλους φυσικῶν πραγματειῶν, καὶ ἐκ τοῦ πλάτωνος τιμαίου, καὶ τῶν ταῦτα ὑπομνηματισάντων. ὁ δὲ ἀρχιμήδης ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ κέντρον ῥοπῆς ἐπιπέδου σχήματος νομίζει, ἀφ' οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δύο δὲ ἢ πλειόνων ἐπιπέδων κέντρον ῥοπῆς, ἤτοι βάρους, ἀφ' οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς παράλληλος ἐστὶ τῷ ὁρίζοντι. οἷον ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ, καὶ ἐν τῷ μέσῳ αὐτοῦ σημεῖόν τι τὸ δ, ἀφ' οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δῆλον οὖν ὅτι ἰσορροπήσει τὰ α β γ μέρη ἑαυτοῖς, καὶ οὐδὲ ἕτερον τοῦ ἑτέρου μᾶλλον ῥέψει ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. ὁμοίως δὲ καὶ ζυγοῦ ὄντος τοῦ α, β, καὶ ἀπηρτημένων ἐξ αὐτοῦ τῶν α, β μεγεθῶν, ἐὰν ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἀπὸ τοῦ γ ἰσορροποῦντα ἔχῃ τὰ α, β μέρη, παράλληλος μένει τῷ ὁρίζοντι, καὶ ἔσται κέντρον τῆς ἀρτήσεως τῶν α, β μεγεθῶν τὸ γ.

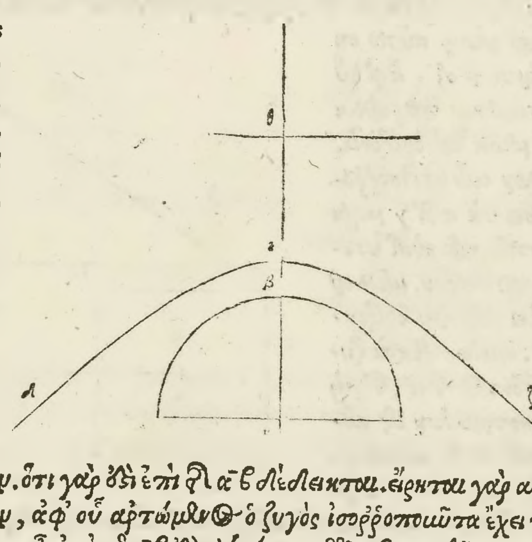


Καλῶς δὲ δοκεῖ ὁ Γεμῖνος εἰπεῖν περὶ τοῦ Ἀρχιμήδους, ὅτι τὰ ἀξιώματα αἰτήματα λέγει. τὰ γὰρ ἴσα βάρη ἀπὸ ἴσων μήκων ἰσοῤῥοπεῖν ἀξίωμα ἐστί, καὶ τὰ ἑξῆς. καὶ ἔστι ταῦτα σαφῆ τοῖς μετρίως αὐτὰ ἐπεσκεμμένοις. τῶν δὲ ἴσων καὶ ὁμοίων φησὶν ἐπιπέδων σχημάτων ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλληλα, καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπ' ἄλληλα. πάντα γὰρ τὰ μέρη αὐτῶν πᾶσιν ἐφαρμόζει. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δὲ, τὰ κέντρα τῶν βαρέων, ὁμοίως ἔσται κείμενα. νοείσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης καταγραφῆς τὰ αβγ, δεζ τρίγωνα ἄνισα καὶ ὅμοια, κέντρον δὲ βάρους τοῦ μὲν αβγ τὸ η, τοῦ δὲ δεζ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, ηγ, βη, δθ, θε, θζ. λέγω ὅτι εἰς ἴσα διαιροῦσι τὰς γωνίας αἱ ἀπὸ τῶν ηθ σημείων ἐπιζευχθεῖσαι. γινέσθω γὰρ ὡς ἡ εζ πρὸς βγ, οὕτως ἡ εθ πρὸς καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, καὶ ἡ ζθ πρὸς θλ. καὶ ἡ δθ πρὸς θμ. μκ, κλ, λμ. ἔσται δὴ ὅμοιον τὸ κλμ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ εθ πρὸς



θκ, ἡ θζ πρὸς θλ, παράλληλος ἐστὶν ἡ εζ τῇ κλ. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ μκ τῇ δε, καὶ ἡ λμ τῇ δζ. ὅμοιον ἄρα τὸ δεζ τρίγωνον τῷ κλμ τριγώνῳ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ δε πρὸς μκ, ἡ εζ πρὸς κλ, καὶ ἡ δζ πρὸς μλ. ὑπόκειται δὲ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγ, δεζ τριγώνων, ὡς ἡ δε πρὸς αβ, ἡ βγ πρὸς εζ, καὶ ἡ δζ πρὸς αγ. ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ αβγ ταῖς μκλ. ὥστε ἐφαρμόζει ἑκάστη ἐπὶ ἑκάστην. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον ἐστὶν τὸ αβγ τρίγωνον τῷ κμλ τριγώνῳ. ὥστε καὶ ἐφαρμόσει τὸ κέντρον τοῦ αβγ ἐπὶ τὸ τοῦ μκλ. τοῦ δὲ η ἐπὶ τὸ θ ἐφαρμόζοντος, καὶ τῶν αβγ ἐπὶ τὰ μκλ, ἐφαρμόσουσιν καὶ αἱ αη, βη, γη, ἐπὶ τὰς μθ, κθ, λθ, καὶ ἴσας ποιήσουσιν γωνίας πρὸς τοῖς μκλ ταῖς ἐν τῷ αβγ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ἐν τῷ δεζ. αἱ αὐταὶ γὰρ εἰσὶν εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ θ ἐπί τε τὰ μκλ, καὶ ἐπὶ τὰ δεζ ἐπιζευγνύμεναι.

Παντὸς σχήματος οὗ ἡ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλη ἐστί, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς εἶναι δεῖ τοῦ σχήματος. τίνας καλεῖ τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας γραμμὰς, εἴρηται ἡμῖν σαφῶς ἐν τοῖς προοιμίοις τοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἐπειδὴ δὲ τὸ σχῆμα τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἔχον τὴν περίμετρον, πάντα τὰ μέρη τοῦ ἐπιπέδου ἐντὸς ἔχει καὶ τὰς γωνίας, δῆλον ὅτι καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς ἔχει τοῦ σχήματος. ἐπὶ γὰρ τινῶν σχημάτων τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καὶ ἐπὶ τῆς περιμέτρου. ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ αβ ἡμικυκλίου κέντρον τοῦ σχήματος ἐστὶ τὸ γ, ἐπὶ δὲ τῆς δεζ ὑπερβολῆς τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτουσιν ἀλλήλαις, ὡς ἔχει τὸ θ. εἴρηται γὰρ ταῦτα ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν. ὅμως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ αβγ σχήματος, καὶ ἐπὶ τοῦ δεζ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, ἀφ' οὗ δῆλον ὅτι ἀρτώμενον τὸ σχῆμα παράλληλον ἐστὶ τῷ ὁρίζοντι, ἐντός ἐστι τῆς περιμέτρου. εἰ γὰρ ἔσται ἐπὶ τῆς περιμέτρου, ἢ ἐκτὸς ῥέψει ἐπὶ θάτερα, οὐχ ὑπόκειται.



ΕΙΣ ΤΟ Β.

Κέντρον τοῦ βάρεος τὸ δ ἀδύνατον. ὅτι γὰρ ἐστὶν ἐπὶ τῆς αβ δέδεικται. εἴρηται γὰρ αὐτόθι, ὅτι δύο μεγεθῶν κέντρον ἐστὶν, ἀφ' οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἰσοῤῥοποῦντα ἔχει τὰ μέρη, παράλληλος μένων τῷ ὁρίζοντι. ὥστε ὃν ἐπὶ τῆς αβ ἐστὶ τὸ κέντρον τῶν αβ μεγεθῶν.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Ητοι μεῖζόν ἐστι τὸ α β τοῦ γ, ὥστε ἰσοῤῥοπεῖν, ἢ οὔ. τοῦτο τὸ ῥητὸν δεῖ ἀκούειν, οὐχ ὡς μείζονος ὑπάρχοντος πάντως τοῦ α β μεγέθους τοῦ γ, ἀλλὰ μείζονος ὑποκειμένου, ἢ ἐπὶ τὴν ἰσοῤῥοπίαν. δυνατὸν γάρ ἐστι καὶ ἔλαττον μέγεθος τοῦ μείζονος μείζονα ἔχειν τὴν ῥοπὴν διὰ τὸ μῆκος τοῦ ζυγοῦ, μεῖζον ὂν πάνυ καὶ ἄνισον ποιοῦν τὸν λόγον. ὥστε καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ α β ἔλασσον τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ μεῖζόν ἐστι τὸ α β τοῦ γ, ὥστε ἰσοῤῥοπεῖν, ὥστε λοιπὸν τὸ α σύμμετρον εἶναι τῷ γ. δεῖ φησὶν ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ α β μέγεθός τι τὸ β, ὃ ποιεῖ λοιπὸν τὸ α, τῷ γ σύμμετρον, καὶ μεῖζον τὸ α τοῦ γ ἢ ἐπὶ τὴν ἰσοῤῥοπίαν. τοῦτο δὲ δυνατὸν ποιεῖν, διὰ τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ δεκάτου τῆς στοιχειώσεως εὐκλείδου εἰρημένων, καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τῶν θεοδοσίου σφαιρικῶν.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΙ.

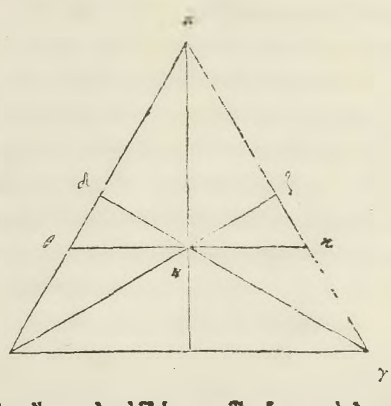
Καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε ζ η κ, λ μ. παράλληλοι δὴ αὗται παρὰ τὴν β γ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ β ο τῇ ψ γ, καὶ ἡ δ β τῇ δ γ. ἔσται ὡς ἡ δ β πρὸς ο β, ἡ δ γ πρὸς ψ γ. καὶ διελόντι ὡς ἡ δ ο πρὸς ο β, ἡ δ ψ πρὸς ψ γ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ δ ο πρὸς ο β, ἡ α ε πρὸς ε β. ἡ γὰρ ε ο παρά τῇ α δ ἐστιν. ὡς δὲ ἡ δ ψ πρὸς ψ γ, ἡ α ζ πρὸς ζ γ. καὶ ὡς ἄρα ἡ α ε πρὸς ε β, ἡ α ζ πρὸς ζ γ. παράλληλος ἐστὶν ἄρα ἡ ε ζ τῇ β γ. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαί. τὸ δὴ α δ γ ποτὶ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν α μ, μ κ, κ ζ, ζ γ ἀναγεγραμμένα, ὅμοια τῷ α δ γ, τὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ γ α πρὸς α μ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς εὐθείας. ἐπεὶ γὰρ ὅμοια ἐστὶ τὰ α δ γ α ς μ τρίγωνα, πρὸς ἄλληλα, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α γ πρὸς α μ. ἐπεὶ δὲ νῦν ὑπόκειται, ἡ α γ τῆς α μ τετραπλασίων τὸ α δ γ τρίγωνον πρὸς τὸ α ς μ λόγον ἔχει, ὃν ις πρὸς ἕν. πρὸς δὲ πάντα τὰ τρίγωνα, τὰ ἀπὸ α μ, μ κ, κ ζ λόγον ἔχει ὃν ις πρὸς τέσσαρα. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ α β γ τρίγωνον πρὸς τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν α μ, μ κ, κ ζ, ζ γ, ὅμοια τῷ α δ γ, οὕτως αὐτὰ τρίγωνα πρὸς τὸ α ς μ, τουτέστιν ἡ γ α πρὸς α μ. ὅμοια γάρ εἰσι καὶ ἐπὶ ἴσων βάσεων, καὶ διὰ τοῦ τοῖσα, καὶ εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. ἀλλὰ ἁ γ α πρὸς α μ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁ φ ρ πρὸς ρ θ. ὁ γὰρ τῆς α γ πρὸς α μ λόγος ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ τῆς φ ρ πρὸς ρ π. εἰ γὰρ νοήσειας ἐκβεβλημένας τὰς ρ φ, γ δ, καὶ συμπιπτούσας διὰ τὰς παραλλήλους, ἔσται ὡς ἡ φ ρ πρὸς ρ π, ἡ γ δ πρὸς δ ω. ἀλλ᾽ ὡς ἡ γ δ πρὸς δ ω, ἡ γ α πρὸς α μ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ α πρὸς α μ, ἡ φ ρ πρὸς ρ π. ἡ δὲ φ ρ πρὸς ρ π μείζονα ἔχει λόγον, ἤπερ ἡ φ ρ πρὸς ρ θ. καὶ ἡ γ α ἄρα πρὸς α μ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ φ ρ πρὸς ρ θ. ὅπερ ἀδύνατον. τὰς γὰρ διὰ τοῦ χ εὐθείας παρὰ τὴν δ α ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσεται πάντα τὰ κέντρα. τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος, καὶ ῥέψει δῆλον ὅτι ἐπ᾽ ἐκείνῳ πάντα τὰ μεγέθη, καὶ οὐκ ἰσοῤῥοπήσει, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ὑπόκειται γὰρ κέντρον τῶν μὲν παραλληλογράμμων τὸ ρ, τῶν δὲ τριγώνων τὸ χ.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ ΙΑ.

Ὁμοίως γὰρ ἐν τῇ κείμενα τὰ θ κ, λ ε τοῖς τριγώνοις. αἵ τε γὰρ α θ ε, κ ζ α παράλληλοι οὖσαι ὁμοίως διαιροῦσι τὰς γωνίας, καὶ αἱ θ λ γ, θ κ β αἱ αὐταί εἰσι, ἐν πᾶσι τοῖς τριγώνοις, καὶ λοιπαὶ αἱ κ δ, δ λ.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΓ.

Ἐὰν γὰρ ἐκβάλλῃς τὰς γ δ η, ζ ε η, β α η, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἔρχονται. ἐκβληθεισῶν γὰρ τῶν β α η, ζ ε η, καὶ συμπιπτουσῶν ἀλλήλαις ἐπὶ τὸ η. καὶ ἡ β δ ἐκβαλλομένη ἐν τῷ αὐτῷ πεσεῖται. ἔστι δὲ ὡς ἡ β η πρὸς η α, ἡ ζ η πρὸς η ε, καὶ ἡ β ζ πρὸς α ε, καὶ ἡ ζ γ πρὸς ε δ. καὶ δηλαδὴ ἡ δ η πρὸς δ ς. ἔσται δὴ τοῦ μὲν β δ γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τὰς θ μ. ἐπειδὴ ἡ τῆς τρίτον μέρος ἁ β θ τὰς β δ. ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν αἱ α ε, β ζ, γ δ. κέντρον ἄρα ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ α β γ τριγώνου τὸ η. καὶ φανερὸν ὅτι πάντα τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ ὅτι αἱ ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν ἐπιζευγνύμεναι διὰ τοῦ η ἔρχονται. ἵνα μὴ τοῦ αὐτοῦ πλείονα κέντρα ᾖ. ἐπεὶ δὲ ἴσαι αἱ α δ, β δ, β ε, ε γ, γ ζ, ζ α, ἴσα ἔσται καὶ τὰ τρίγωνα ὧν κορυφὴ τὸ η σημεῖον,



μέσον, βάσις δὲ αἱ εἰρημέναι εὐθεῖαι. ὥστε διπλάσιόν ἐστι τὸ αηβ τρίγωνον, τοῦ ηβε τριγώνου, ὥστε καὶ ἡ αη τῆς ηε. ἐὰν δὲ διὰ τοῦ η παρὰ τὴν βγ ἀγάγωμεν τὴν θκ διπλασία ἐστὶν ἡ αθ τῆς θβ, ὥστε καθόλου ἐὰν μία πλευρὰ τριγώνου τμηθῇ, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ μέρος διπλάσιον εἶναι τοῦ πρὸς τῇ βάσει, καὶ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου παράλληλος ἀχθῇ τῇ βάσει ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ τριγώνου.

ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ βιβλίον τέλος.

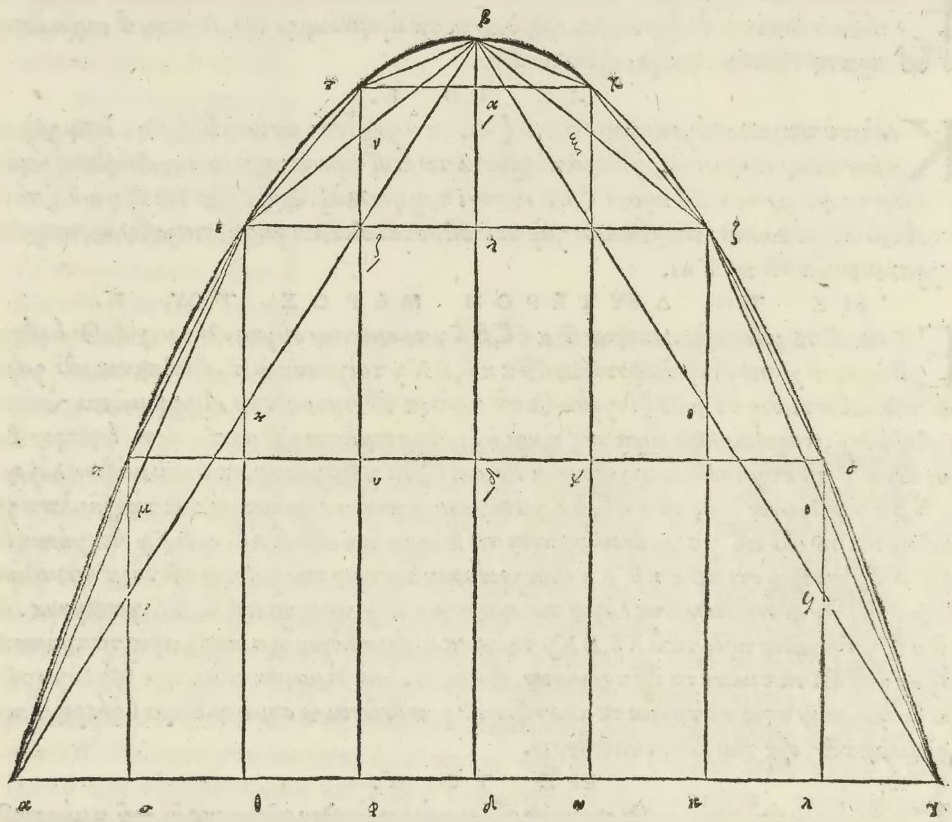
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Β ΤΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ ΑΡΧΙμήδους.

ΑΚΡΙΒΩΣ ἐπεξελθόντες τῷ πρώτῳ, καὶ σαφηνίσαντες τὰ ἐν αὐτῷ δυσθεώρητα, ἀναγκαῖον ἡγούμεθα καὶ τὰ ἐν τῷ δευτέρῳ δυσχερῶς εἰρημένα μετρίως ἐκθέσθαι. φησὶ τοίνυν ἐν τῇ προτάσει τοῦ πρώτου θεωρήματος, ὑποκείσθω τὰ αβ, γδ χωρία περιεχόμενα ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν παραβαλεῖν. τοῦτο δὲ αὐτόθεν μὲν διὰ τῶν ἐνταῦθα δεδειγμένων οὐκ ἔστιν εὑρεῖν. ἐπεὶ δὲ δέδεικται αὐτῷ, ὡς ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου εἶπεν, ὅτι τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. τῷ δὲ ἐπιτρίτῳ τοῦ τριγώνου ἐπιπέδῳ εὐθυγράμμῳ ὄντι, δυνάμεθα ἴσον παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν. φανερὸν ὅτι καὶ τοῖς τοιούτοις σχήμασι, τὰ δὲ ἐν τῇ κατασκευῇ εἰρημένα ἅπαντα δῆλά ἐστι διὰ τοῦ τετάρτου θεωρήματος τοῦ πρώτου τούτων τῶν βιβλίων.

ΕΙΣ ΤΟ Β.

ΤΟῦ δευτέρου θεωρήματος περιλέγει τινὰ, δηλοῦντα πῶς δυνατὸν ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ σχῆμα γνωρίμως ἐγγράφεσθαι, καὶ φησὶ ταῦτα δεικτέον ἐν ταῖς τάξεσιν. ἐπειδὴ οὖν ἀσαφές ἐστι τὸ λεγόμενον, ἀναγκαῖον εἰπεῖν βραχέα περὶ αὐτοῦ ἐκ τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν εὑρεθέντα. ἔστω σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ παραβολῆς τῆς αβγ, καὶ εὐθείας τῆς αγ, οὗ διάμετρος ἔστω ἡ βδ. φανερὸν δὴ ὅτι κορυφή ἐστι τοῦ τμήματος τὸ β σημεῖον. κορυφὰς γὰρ ἐκάλει τῶν γραμμῶν ὁ ἀπολλώνιος τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῶν διαμέτρων. ἐὰν δὴ ἐπιζεύξωμεν τὰς αβ, βγ, ἔσται τὸ ἀπὸ αβγ τρίγωνον τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον τὴν ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὴν αβ κάθετον ἀγομένην. οὕτως γὰρ πάντως ἄξων ἐστὶν ἡ βδ. ἐὰν δὴ λαβόντες τὰς κορυφὰς τῶν αβ, βγ τμημάτων τὰς ε, ζ δι' αὐτῶν παραλλήλους ἀγάγωμεν τῇ βδ, ὡς τὰς εη, ζο ἔσονται αὗται διάμετροι τῶν αβ, βγ τμημάτων. δέδεικται γὰρ ἐπὶ τῆς παραβολῆς, ὅτι πᾶσαι αἱ παρὰ τὴν διάμετρον ἀγόμεναι διάμετροί εἰσι τῆς τομῆς, ἔσονται δὴ τὰ ε, ζ κορυφαὶ τῶν τμημάτων, καὶ αἱ διὰ τῶν ε, ζ ἐφαπτόμεναι παράλληλοι ταῖς αβ, βγ. ἔσται δὴ καὶ ἡ ελζ παρὰ τὴν αβγ. ἐπειδὴ αἱ εθ, ζκ παράλληλοι εἰσὶ καὶ ἴσαι, διάμετροι οὖσαι τῶν ἴσων τμημάτων, καὶ ἐφαρμόζουσαι ἀλλήλαις ὡς ἐν τῷ ς τῶν κωνικῶν δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἡ εθη παράλληλός ἐστι τῇ βδ, ἔστιν ὡς ἡ βη πρὸς ηα, ἡ δθ πρὸς θα. ἴση δὲ ἡ ηβ τῇ αη. δίχα γὰρ αὐτὴν τέμνει ἡ εη διάμετρος παράλληλον οὖσαν τῇ ἐφαπτομένῃ. ἴση ἄρα καὶ ἡ δθ τῇ θα, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ δκ τῇ κγ ἴση ἐστί. ἴση δὲ ὅλη ἡ αδ τῇ δγ, ἴση ἄρα καὶ ἡ δθ τῇ δκ. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ελ τῇ λζ. ὥστε ἀληθῶς λέγει ὅτι ἡ τὰς κορυφὰς τῶν τμημάτων ἐπιζευγνύουσα παράλληλος ἔσται τῇ βάσει τοῦ τμήματος, καὶ δίχα διαιρεθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ τμήματος διαμέτρου. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αε, εβ, βζ, ζγ. καὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ μ, ν, ξ, ο σημεῖα. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν μ, ν, ξ, ο παρὰ τὴν βδ, αἱ πμρς, τνυφ, χξψω, ςοϙλ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ απ, πε, ετ, τβ, βχ, χζ, ζς, ςγ. καὶ αἱ τ α χ, καὶ π β γ δ ε ς. φανερὸν δὴ ἐκ τῶν προδεδειγμένων, ὅτι ἡ τχ καὶ ἡ εζ καὶ ἡ πς παράλληλοί εἰσι τῇ αγ. καὶ ὅτι ἴση ἡ τ α τῇ α χ. καὶ ἡ π δ τῇ δ ς. λέγω οὖν ὅτι τέμνουσι τὴν βδ εἰς τοὺς ἑξῆς περισσοὺς ἀριθμούς, τουτέστιν οἷόν ἐστιν ἑνὸς ἡ β α, τοιούτων τριῶν

τριῶν ἡ αλ, καὶ ἡ λδ πέντε, καὶ ἡ δδ ἑπτά. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αη τῇ ηβ, καὶ παράλληλος ἡ εθ τῇ βδ, ἴση ἄρα καὶ ἡ αθ τῇ θδ, ἡ αδ ἄρα τῆς δθ διπλῆ ἐστιν. ὥστε καὶ τῆς ελ, τὸ



ἀπὸ τῆς αδ ἄρα τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ελ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ ελ, οὕτως δέδεικται ἡ βδ πρὸς βλ. τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ δβ τῆς βλ. τριπλῆ ἄρα ἡ δλ τῆς λβ. οἵων ἄρα ἐστὶν ἑνὸς ἡ λβ, τοιούτων τριῶν ἐστιν ἡ λδ. διὰ τὰ αὐτὰ δή. καὶ οἵων ἄρα ἡ λβ τεσσάρων, ἡ λδ δώδεκα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ εν τῇ νβ, καὶ ἡ εζ τῇ ζλ, καὶ ἡ θφ τῇ φδ, διπλασία ἐστὶν ἡ ελ τῆς λζ, τουτέστι τῆς τα. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ελ τοῦ ἀπὸ τα, τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ λβ τῆς βα. ὥστε τριπλασία ἡ λα τῆς αβ. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ λβ τεσσάρων, τοιούτων ἡ μὲν βα ἑνός, ἡ δὲ αλ τριῶν, ἡ δὲ λδ δώδεκα. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αμ τῇ με, καὶ ἡ αρ τῇ ρη, καὶ ἡ ας τῇ σθ, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ας, σθ, θφ, φδ. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ αδ τεσσάρων, τοιούτων ἡ σδ τριῶν, τουτέστιν ἡ πδ. οἵων ἄρα τὸ ἀπὸ αδ δεκαέξ, τοιούτων τὸ ἀπὸ πδ ἐννέα. καὶ οἵων ἄρα ἡ δβ δεκαέξ, ἡ βδ ἐννέα, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ λδ ἑπτά. ἐπεὶ οὖν δέδεικται οἵων ἡ βδ δεκαέξ, τοιούτων ἡ μὲν βα ἑνός, ἡ δὲ αλ τριῶν, ἡ δὲ λδ ἑπτά. καὶ λοιπὴ ἡ δδ ἐστὶ πέντε. τέμνεται ἄρα ἡ βδ ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους, ἑνὸς λεγομένου τοῦ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος. δῆλον οὖν ἐστιν ἐκ τῆς καταγραφῆς, ὅτι αἱ καταγόμεναι ὑπὸ τῆς διαμέτρου εἰς τοὺς ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀριθμούς,* οἷον γάρ ἐστιν ἑνὸς ἡ τα, τοιούτων ἐστὶ δύο ἡ ελ, τριῶν δὲ ἡ πδ, τεσσάρων δὲ ἡ αδ. παράλληλοι γὰρ οὖσαι πᾶσαι εἰς ἴσα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὠνόμασθη δὲ ὑπὸ ἀρχιμήδους τὸ απετβχζσγ σχῆμα γνωρίμως ἐγγραφόμενον.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Τὰ ὅμοια τμήματα τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἀπολλώνιος ὡρίσατο ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῶν κωνικῶν, ἐν οἷς ἀχθεισῶν ἐν ἑκάστῳ παραλλήλων τῇ βάσει, ἴσων τὸ πλῆθος αἱ παράλληλοι, καὶ αἱ βάσεις πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας ἀπὸ τῶν διαμέτρων ταῖς κορυφαῖς ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις εἰσί, καὶ αἱ ἀποτεμνόμεναι πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας. καὶ ὅτι αἱ παραβολαὶ πᾶσαι ὅμοιαι εἰσί, τὸ δὲ γνώριμον ἐγγραφόμενον σχῆμα εἴρηται ἐν τῷ προλαβόντι λήμματι, τὸ δὲ ὅμοιον διαιρεῖσθαι

τὰς

τὰς διαμέτρους ἐστίν, ἵνα τὰ τμήματα αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, τὰ λοιπὰ τοῦ θεωρήματος σαφῆ ἐστιν ἐκ τοῦ προειρημένου σχήματος.

ΕΙΣ ΤΟ Δ.

Ἐγγεγράφθω εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμῆμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ κ. τοῦτο δὲ φανερόν ἐστιν ἐκ τῶν εἰρημένων ἐν τῷ δεκάτῳ τῆς στοιχειώσεως, καὶ τῷ πρώτῳ τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ θ ζ η ι. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ κ ζ, λ η. ἴσων γὰρ εἰσὶ τμημάτων διάμετροι, καὶ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ β δ ἄξονος, καὶ ὁμοίως διῄρηνται ὑπὸ τῶν θ, ι κέντρων. ἔστιν ὡς ἡ κ θ πρὸς θ ζ, ἡ λ ι πρὸς ι η, καὶ ἐναλλάξ. καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ θ ζ τῇ ι η, ἔστι δὲ καὶ παράλληλος. παράλληλοι γὰρ εἰσὶ πᾶσαι αἱ διάμετροι τῆς παραβολῆς, παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ θ ζ η ι.

ΕΙΣ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ Ε.

Ἔστω δὲ τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τμημάτων συγκειμένου μεγέθους κέντρον βάρους τὸ χ, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τριγώνων τὸ τ. δέδεικται μὲν γὰρ ἐν τῷ προλαβόντι, ὅτι ἡ θ ι ἐπιζευγνύουσα τὰ κέντρα τῶν τμημάτων, διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς β δ κατὰ τὸ χ, παράλληλος οὖσα τῇ ζ η, καὶ ἡ ι ν διχοτομεῖται κατὰ τὸ τ. ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ τὸ τ τοῦ συγκειμένου μεγέθους ἐκ τῶν α κ β, β λ γ τριγώνων. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ β α γ τρίγωνον πρὸς τὰ α κ β, β λ γ τρίγωνα, ἤπερ πρὸς τὰ τμήματα, καὶ τὰ ἑξῆς. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τοῦ μὲν α β γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους τὸ ε, τῶν δὲ α β κ, β λ γ τριγώνων κέντρον τὸ τ, φανερὸν ὅτι τοῦ α κ β λ γ εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς τ ε τμηθείσης κατὰ τὸ ρ κατὰ τὸν ἀντιπεπονθότα λόγον τοῦ ὃν ἔχει τὸ α β γ πρὸς τὰ α κ β, β λ γ τρίγωνα. ἐπεὶ τὸ α β γ τρίγωνον πρὸς τὰ κ λ β, β λ γ τρίγωνα μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὰ τμήματα. μείζονα γὰρ ἐστὶ τὰ τμήματα τῶν τριγώνων. δῆλον ὅτι ἐὰν τέμωμεν τὴν ε τ ἐν τῷ λόγῳ τῷ ὃν ἔχει τὸ τρίγωνον πρὸς τὰ τμήματα ἀνωτέρω τοῦ ρ πεσεῖται τὸ σημεῖον, ὃ ἔσται κέντρον τοῦ παντὸς τμήματος, διὰ τὴν ἀντιπεπόνθησιν.

ΕΙΣ ΤΟ Ϛ.

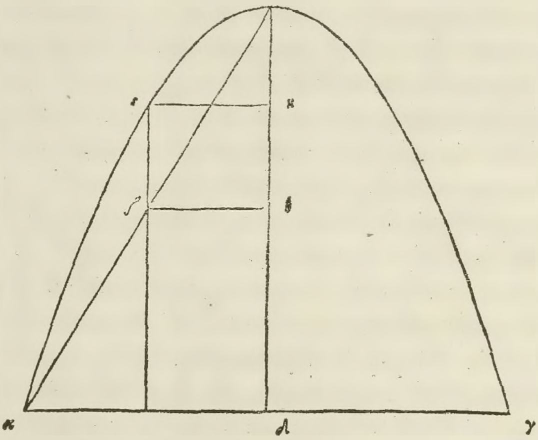
Τὸ κέντρον τοῦ τμήματος πάντως ἐν ἐστὶ, καὶ ἐγγύτερον τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἤπερ τὰ τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων. τοῦ γὰρ α β γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν εἰ τύχοι τὸ ε τῆς β δ τμηθείσης οὕτως, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν ε β τῆς ε δ. φανερὸν ὅτι πάντα τὰ κέντρα τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων μεταξὺ πεσοῦνται τῶν θ ε σημείων. καὶ ὅσῳ δ' ἂν πολυπλευρώτερον ᾖ, τὸ γνωρίμως ἐγγραφόμενον, τοσούτῳ μᾶλλον συνεγγίζει τῷ θ. φανερὸν οὖν ὅτι τὴν μεταξὺ τῶν κέντρων τοῦ γνωρίμως ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου, καὶ τοῦ τμήματος μείζονα μὲν εἶναι τῆς ε θ ἀδύνατον, ἐλάσσονα δὲ δυνατὸν οὐ μόνον τῆς θ ε, ἀλλὰ καὶ πάσης τῆς δοθείσης.

ΕΙΣ ΤΟ Ζ.

Ἐγγεγράφθω γὰρ εἰς τὸ α β γ τμῆμα τὸ ἐν τῷ δ ε ζ τμήματι, ὅμοιον εὐθύγραμμον, τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως. ὁμοίως γὰρ γνωρίμως ἐγγράφεται, ὅταν αἱ τομαὶ τῆς α β γ παραβολῆς ἴσαι γίνωνται τῆς ε ζ, ὥστε τὰς πλευρὰς τοῦ ἐν τῷ α β τμήματι ἐγγεγραμμένου γνωρίμως ἰσοπληθεῖς εἶναι ταῖς ἐν τῷ ε ζ η ἐγγεγραμμένου εὐθυγράμμου. ἐπεὶ γὰρ δὴ κορυφαί εἰσι τὰ β ζ σημεῖα τῶν ὁμοίων τμημάτων, ὅμοια ἐστὶ τὰ οὕτως γνωρίμως ἐγγραφόμενα.

ΕΙΣ ΤΟ Η.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ β θ πρὸς θ δ, οὕτως ἡ κ μ πρὸς μ ζ. ὅμοια γὰρ ὄντα τὰ τμήματα ἕξει κέντρα εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τέμνοντα τὰς διαμέτρους. καὶ συνθέντι ὡς ἡ β δ πρὸς δ θ, ἡ κ ζ πρὸς ζ μ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ β δ πρὸς κ ζ, οὕτως ἡ δ θ πρὸς μ ζ. τετραπλασία δὲ ἡ β δ τῆς κ ζ. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει δείκνυται οὕτως σημεῖον θ. ἑξῆς δὲ αὐτὸ ἡμεῖς δείξομεν. ἔστω παραβολὴ ἡ α β γ, ἧς διάμετρος ἡ β δ. καὶ ἤχθω τεταγμένως ἡ α δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α β, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ α β κατὰ τὸ ζ, καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ β δ παράλληλος ἤχθω ἡ ε ζ. διάμετρος ἄρα ἐστὶ τοῦ α β τμήματος. καὶ ἀπὸ τῶν ε, ζ παρατεταγμένως ἤχθωσαν αἱ ε η, ζ θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ α ζ τῇ β ζ, διπλῆ ἐστὶν ἡ α β τῆς ζ β, καὶ ἡ δ β τῆς β θ, καὶ ἡ α δ τῆς ζ θ, τουτέστι τῆς ε η. ὥστε τὸ ἀπὸ α δ τοῦ ἀπὸ ε η ἐστὶ τετραπλάσιον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ δ β τῆς β η ἐστὶ τετραπλασία μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ β δ τῆς



μὲν βθ διπλῆ, ἡ βθ τῆς βη ἐστι διπλῆ, καὶ ἡ θη τῇ ηβ ἴση, τουτέστι τῇ εζ. διὰ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ εηζθ. τετραπλασία ἄρα ἡ βδ τῆς ζε.

Καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἐστὶν ἡ βδ τῆς βσ. καὶ γὰρ τοῦτο δείκνυται. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ λήμματι ἡ βδ ἑκατέρας τῶν βη, εζ τετραπλασία, ὥστε ἡ βη τῇ εζ ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐνταῦθα ἡ βσ τῇ ηζ ἴση, καὶ ἡ βδ ἑκατέρας αὐτῶν τετραπλασία. ἡ βξ ἄρα τῆς βδ τρίτον μέρος. ἐπεὶ γὰρ τετραπλασίων ἡ βδ τῆς βσ. οἵων ἄρα ἡ βδ τεσσάρων, ἡ βσ ἑνός. καὶ οἵων ἄρα ἡ βδ δώδεκα, τοιούτων ἡ βσ τριῶν. τριπλῆ δὲ ἡ βσ τῆς σξ, οἵων ἄρα ἡ βσ τριῶν, ἡ ξσ ἑνός, καὶ ὅλη ἡ βξ τεσσάρων. τούτων δὲ ἦν ἡ βδ δώδεκα. ἡ βξ ἄρα τῆς βδ τρίτον μέρος ἐστί. τριπλοῦν δὲ τὸ αβγ τρίγωνον τῶν τμημάτων. δέδεικται γὰρ ὑπ᾽ αὐτοῦ ἐν τῷ περὶ τῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ὅτι πᾶν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ αβγ τμῆμα τοῦ αβγ τριγώνου ἐπίτριτόν ἐστι, καὶ διελόντι τὸ αβγ τρίγωνον τῶν αηβ, βλγ τμημάτων τριπλάσιόν ἐστι, καὶ ἐντὶ τὰς εδ τριπλασία. ἡμιόλια ἄρα ἐντὶ ἁ βθ τὰς θδ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἐπεὶ γὰρ τριπλῆ ἐστὶν ἡ βδ τῆς δε. οἵων ἄρα ἡ βδ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ εδ πέντε· οἵων δὲ ἡ δε πέντε, τοιούτου ἡ θε ἑνός, καὶ ὅλη ἡ θε, δε ἕξ. ἑξαπλασία ἡ δθ τῆς θε. οἵων ἄρα ἡ βδ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ δθ ἕξ. καὶ λοιπὴ ἡ θβ ἐννέα, ὥστε ἡμιολία ἐστὶν ἡ βθ τῆς θδ.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Το ἔνατον θεώρημα πάνυ ὂν ἀσαφὲς ἐκθησόμεθα παραφράζοντες σαφῶς κατὰ τὸ δυνατόν. ἐπεὶ γὰρ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αβ, βγ, δβ, βε, καὶ διελόντι, καὶ ἐναλλὰξ αἱ αγ, γδ, δε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί. ἐπεὶ οὖν αἱ αβ, βγ, βδ, δε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ αἱ αγ, γδ, δε, ἐστὶν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον, καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον. ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ αγ, γδ, τουτέστιν ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως συναμφότερος ἡ αβ, γβ πρὸς δβ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ αβ, γβ πρὸς δβ, οὕτως ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ πρὸς τὴν β τῆς βδ. διότι τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ, γ πρὸς τὴν β τῆς δβ. πάλιν ἐπειδὴ αἱ γβ, βδ, βε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καὶ αἱ αγ, γδ, δε. ἔστι διὰ τὰ πρότερον εἰρημένα, ὡς ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως συναμφότερος ἡ γβ, βδ πρὸς βε. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ αδ πρὸς δε, ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ πρὸς τὴν β τῆς βδ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως τὰ ἡγούμενα πρὸς τὰ ἑπόμενα. ἔστι δὲ ἡγούμενα μὲν ἡ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ, καὶ συναμφότερος ἡ γβ, βδ, τουτέστι δύο αἱ αβ, καὶ τρεῖς αἱ γβ, καὶ μία ἡ βδ. ἑπόμενα δὲ ἡ β τῆς βδ, καὶ ἡ βε μόνη. ἔστιν οὖν ὡς ἡ αδ πρὸς δε, ἡ συγκειμένη εὐθεῖα, ἔκ τε τῆς β τῆς αβ, καὶ γ τῆς γβ, καὶ τῆς δβ μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς βδ, καὶ μόνης τῆς εβ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β τῆς αβ, καὶ τῆς δ τῆς γβ, καὶ τῆς δ τῆς δβ, καὶ τῆς β τῆς βε, τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς β τῆς αβ καὶ γ τῆς γβ, καὶ τῆς βδ μόνης. ἔξωθεν δὲ ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β τῆς βδ, καὶ μόνης τῆς εβ. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς δβ, καὶ τῆς εβ μόνης, ἤπερ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς αβ, καὶ τῆς γ τῆς γβ, καὶ μόνης τῆς δβ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς διπλῆς τῆς β̄δ, καὶ μόνης τῆς ε̄β. ἀλλ' ὡς ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς ᾱβ, καὶ γ̄ τῆς γ̄β, καὶ τῆς β̄δ μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ τῆς β̄δ, καὶ μόνης τῆς ε̄β, οὕτως ἐδείχθη ἡ ᾱδ πρὸς δ̄ε. καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ̄β, β̄δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β̄ τῆς β̄δ, καὶ μόνης τῆς ε̄β μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ᾱδ πρὸς δ̄ε. ἐὰν ἄρα θελήσωμεν ποιῆσαι τὸν αὐτὸν τῆς ᾱδ πρὸς ἄλλην τινὰ, ἐλάσσων ἔσται ἐκείνη τῆς δ̄ε. ἔστω ἡ δ̄ο. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ᾱδ πρὸς δ̄ο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ̄β, β̄δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ τῆς β̄δ, καὶ μόνης τῆς ε̄β. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ο̄δ πρὸς δ̄α, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς β̄δ, καὶ μόνης τῆς ε̄β, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ̄β, β̄δ, καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ο̄α πρὸς ᾱδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς ᾱβ, καὶ δ̄ τῆς γ̄β, καὶ ϛ̄ τῆς β̄δ, καὶ γ̄ τῆς β̄ε, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ̄β, β̄δ. ἥ τε γὰρ β̄δ ἑξάκις παρελήφθη, τετράκις μὲν ἐν τοῖς προτέροις, δὶς δὲ ἐν τοῖς δευτέροις, καὶ ἡ β̄ε τρεῖς ἐλήφθη, δὶς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις, ἅπαξ δὲ ἐν τοῖς δευτέροις. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ᾱδ πρὸς η̄θ τὸν αὐτὸν ἔχουσα τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ ῑ συναμφοτέρου τῆς γ̄β, β̄δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ τῆς ᾱβ, καὶ δ̄ τῆς γ̄β, καὶ ϛ̄ τῆς β̄δ, καὶ γ̄ τῆς β̄ε. καὶ ἔστι τεταραγμένη ἀναλογία. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ο̄α πρὸς η̄θ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ ῑ τῆς γ̄β, β̄δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ δ̄ τῆς γ̄β, β̄δ. τὸ γὰρ τῆς γεγραμμένης ἀναλογίας οὕτως ἔσται δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ ο̄α, πρὸς ἑπόμενον τὴν ᾱδ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς ᾱβ, καὶ δ̄ τῆς γ̄β, καὶ ϛ̄ τῆς β̄δ, καὶ γ̄ τῆς β̄ε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τοῦ β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ̄β, δ̄β. ὥστε ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον ἡ ᾱδ πρὸς ἄλλο τι τὴν η̄θ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν, ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ ῑ συναμφοτέρου τῆς γ̄β, β̄δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β̄ τῆς ᾱβ, καὶ δ̄ τῆς γ̄β, καὶ ϛ̄ τῆς β̄δ, καὶ γ̄ τῆς β̄ε. ἐπεὶ ἡ ε̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε πρὸς τὴν β̄ τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἔχει δὲ καὶ ἡ ῑ συναμφοτέρου τῆς γ̄β, β̄δ πρὸς τὴν δ̄ τῆς αὐτῆς λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐπειδὴ καὶ τὰ πέντε πρὸς δύο, καὶ τὰ δέκα πρὸς τέσσαρα λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ τῆς ε̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ ῑ συναμφοτέρου τῆς γ̄β, β̄δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ δ̄ τῆς γ̄β, β̄δ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ὡς δὲ καὶ ἡ ᾱο πρὸς η̄θ λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. πάλιν ἐπεὶ ἐδείχθη ἐν τοῖς ἀνωτέρω, ὅτι ἡ ο̄δ πρὸς δ̄α τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ε̄β μετὰ τῆς β̄ τῆς β̄δ πρὸς τὴν ἴσην τῇ συγκειμένῃ ἐκ τε τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, μετὰ τὴν δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ̄β, β̄δ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἡ ᾱδ πρὸς ἄλλο τι τὴν δ̄ε, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς ᾱβ, καὶ γ̄ τῆς γ̄β, καὶ μόνης τῆς δ̄β πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς ε̄β, καὶ τῆς β̄ τῆς β̄δ. ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστι τεταραγμένης οὔσης τῆς ἀναλογίας, δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ἡ ο̄δ πρὸς δ̄ε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς ᾱβ, καὶ τῆς γ̄ τῆς γ̄β, καὶ μόνης τῆς β̄δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ δ̄ τῆς γ̄β, β̄δ. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ ε̄δ πρὸς δ̄ο, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β̄ τῆς ᾱβ, καὶ γ̄ τῆς γ̄β, καὶ μόνης τῆς β̄δ. καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ δ̄ε πρὸς ε̄ο, τὸ ἡγούμενον φημὶ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβε, μετὰ τῆς δ̄ τῆς γβ̄δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς γ̄β μόνης, καὶ γ̄ τῆς β̄δ, καὶ τῆς β̄ τῆς ε̄β. ἐν μὲν γὰρ τῷ ἡγουμένῳ ἡ β̄ τῆς ᾱβ, καὶ τῆς β̄ε. ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ β τῆς ᾱβ μόνης, ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ β̄ τῆς ε̄β. πάλιν ἐν μὲν τῷ ἡγουμένῳ ἡ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ, ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ γ τῆς γ̄β, καὶ ἡ β̄δ μόνη. ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ γ̄β μόνη, καὶ ἡ γ̄ τῆς β̄δ. καλῶς οὖν ἐλέχθη, ὅτι ἐστὶν ἀναστρέψαντι ὡς ἡ δ̄ε πρὸς ε̄ο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ᾱβ, β̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς γ̄β, καὶ τῆς γ̄ τῆς δ̄β, καὶ τῆς β̄ τῆς ε̄β. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ὁ ε̄ πρὸς ε̄δ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γ̄β, μετὰ τῆς γ̄ τῆς β̄δ, καὶ β̄ τῆς ε̄β, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ̄δ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δ̄β πρὸς ἄλλο τι τὴν ε̄β, ἡ ᾱβ πρὸς β̄γ. καὶ διελόντι ὡς ἡ

δ̄ε

δε πρὸς εβ, ἡ αγ πρὸς γβ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔστιν ὡς ἡ γδ πρὸς δβ, οὕτως ἡ δε πρὸς εβ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ τῆς γδ πρὸς τὴν γ τῆς δβ, οὕτως ἡ β τῆς δε πρὸς τὴν β τῆς εβ. τὰ γὰρ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δε πρὸς εβ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ τῆς γ τῆς γδ, καὶ ἡ β τῆς δε πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς γβ, καὶ τῆς γ τῆς βδ, καὶ τῆς β τῆς εβ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ οε πρὸς ἑπόμενον τὴν δε, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γβ, καὶ τῆς γ τῆς βδ, καὶ β τῆς βε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβδ. ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον ἡ δε πρὸς ἄλλο τι τὴν εβ, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ ἡ γ τῆς γδ, καὶ β τῆς δε πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τῆς γβ, καὶ γ τῆς δβ, καὶ β τῆς βε. δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ οε πρὸς εβ, ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς αγ, καὶ γ τῆς γδ, καὶ ἡ β τῆς δε πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβε, μετὰ τῆς δ συναμφοτέρου τῆς γβδ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ οβ πρὸς βε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ γ τῆς γδ, καὶ β τῆς εδ, καὶ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβδ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβδ. ἀλλὰ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ γ τῆς γδ, καὶ β τῆς δε, καὶ β συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γβδ. ἴση ἐστὶ τῇ συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς γ τῆς αβ, καὶ ϛ τῆς γβ, καὶ γ τῆς δβ. ἥ τε γὰρ αβ δὶς παρελήφθη αὐτόθεν, καὶ προσλαβοῦσα τὴν αγ, καὶ ἐκ τῆς δ τῆς γβ μίαν, ποιεῖ τρίτον τὴν αβ. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς δ τῆς γβ μίαν, γίνεται γ. προσλαβοῦσα δὲ τὴν γ τῆς γδ, καὶ γ τῆς δβ, ποιεῖ τὴν ϛ τῶν γβ. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς δβ, γ, μένει μόνη ἡ δβ. προσλαβοῦσα δὲ τήν τε β τῶν δε, καὶ τὴν β τῶν εβ, ποιεῖ τὴν γ τῆς βδ. καλῶς οὖν λέγει, ὅτι ἡ οβ πρὸς εβ τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γ τῆς αβ, καὶ ϛ τῆς γβ, καὶ γ τῆς δβ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν αβε, καὶ δ συναμφοτέρου τῶν γβδ. πάλιν ἐπεὶ αἱ εδ, δγ, γα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ διὰ τὸ ἀνάπαλιν τῆς ὑποθέσεως συναμφότερος ἑκάστη τῶν εβ, βδ, δβ, βγ, βα. ἔσται ὡς ἡ εδ πρὸς τὴν μέσην καὶ τὴν ἑπομένην τὰς δγ, γα, τουτέστι τὴν δα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, βδ πρὸς συναμφότερον τὴν δβ, βγ, μετὰ συναμφοτέρου τῶν γβ, βα. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς εα πρὸς αδ, οὕτως συναμφότερος ἡ εβδ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς δβγ, καὶ μετὰ συναμφοτέρου τῆς γβα, πρὸς συναμφότερον τὴν δβγ, μετὰ συναμφοτέρου τῶν γβα. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ εβδ μετὰ τῆς δβγ, καὶ τῶν γβα, ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ εβα, καὶ δὶς συναμφοτέρῳ τῇ δβγ. ἅπαξ γὰρ αἱ ἄκραι παραλαμβάνονται, καὶ δὶς αἱ μέσαι, συναμφότερος δὲ ἡ δβγ μετὰ τῆς γβα, ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ αβδ, καὶ δὶς τῇ γβ, διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ εα πρὸς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῶν εβα, καὶ β συναφοτέρου τῶν δβγ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε συναμφοτέρου τῶν δβα, καὶ τῶν β τῶν γβ. ὥστε καὶ ἡ διπλασία πρὸς τὴν διπλασίαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ὡς ἄρα ἡ εα πρὸς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῆς εβα, μετὰ τῶν δ συναμφοτέρου τῶν γβδ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ τῶν δ τῶν γβ. ὥστε καὶ ὡς ἡ εα πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῶν αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν αβε, καὶ δ συναμφοτέρου τῶν γβδ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῶν συγκειμένης ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν αβδ, καὶ τῶν δ τῶν γβ. ἀλλ' ὡς ἡ αε πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῶν αδ, οὕτως ἐλήφθη ἡ βε πρὸς ζη. καὶ ὡς ἄρα ἡ εβ πρὸς ζη, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῶν αβε, καὶ τῶν δ συναμφοτέρου τῶν γβδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ δ τῆς γβ. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὡς ἡγούμενον ἡ οβ πρὸς ἑπόμενον τὴν βε, οὕτως ἡγούμενον ἡ γ συναμφοτέρου τῶν αβδ, καὶ μετὰ τῆς ϛ τῆς γβ, πρὸς τὴν β συναμφοτέρου τῆς αβε, καὶ δ συναμφοτέρου τῶν γβδ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ εβ πρὸς ἄλλο τι τὴν ζη, οὕτως ἡγούμενον ἡ β συναμφοτέρου τῶν αβε, καὶ ἡ δ συναμφοτέρου τῶν γβδ πρὸς τὰ τρία πέμπτα τοῦ ἑπομένου, τουτέστι τῶν συγκειμένης ἐκ τῶν β συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ τῶν δ τῶν γβ. τεταγμένης οὖν οὔσης τῆς ἀναλογίας δι' ἴσου ἐστίν, ὡς οβ πρὸς ζη, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς γ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ ϛ τῆς γβ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῶν β συναμφοτέρου τῶν αβδ, καὶ δ τῆς γβ. ἡ δὲ συγκειμένη ἐκ τῆς γ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ ϛ τῆς γβ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ δ τῆς γβ, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. τὰ δὲ ἑξαπλάσια τῶν αὐτῶν τῶν τετραπλασίων ἡμιόλια ἐστί. τὰ δὲ τρία πέμπτα τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς διο. ἐπειδὴ δὲ τὰ ἡγούμενα τῶν ἑπομένων ἡμιόλια, καὶ λόγον ἔχει πρὸς αὐτά, ὃν τρία πρὸς δύο, ἔχει ἄρα καὶ ὃν τεσσαράκοντα πέντε πρὸς τριάκοντα. ἑκάτερον γὰρ ἑκατέρου ἐστὶ πεντεκαιδεκαπλάσιον. καὶ ἐστὶ τὰ τρία πέμπτα τῶν τριάκοντα δεκαοκτώ. ἔχει ἄρα τεσσαράκοντα πέντε πρὸς δεκαοκτὼ λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. τὰ γὰρ πέντε καὶ τὰ δύο ἀμφοτέρων ἐστὶν ἔνατα. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ἡ μὲν οα πρὸς ηθ λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε πρὸς δύο, ἡ δὲ οβ πρὸς ζη τὸν αὐτὸν λόγον, δύο πεμπτημόρια ἐστὶν ὅλη ἡ ζθ ὅλης τῆς αβ.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Φανερὸν δή, ὅτι καὶ τοῦ αδεγ τόμου διάμετρός ἐστιν ἡ ζη. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἡ ζβ διάμετρος τοῦ τμήματος, καὶ αἱ αγ, δε διχοτομούμεναι ὑπ' αὐτῆς, κατὰ τὸ ζ, η, παράλληλοι εἰσὶν τῇ κατὰ τὸ β ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς. καὶ δῆλον ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ὁμοίως αὐταῖς ἀγόμεναι παράλληλοι, εἴτε μεταξὺ αὐτῶν, εἴτε καὶ μεταξὺ τῆς δε, καὶ τῆς β κορυφῆς δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς βζ. καὶ διὰ τοῦτο φησὶ διάμετρον εἶναι τοῦ τόμου τὴν ζη. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ἀπὸ ζβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον, οὕτως τὸ ἀπὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ δβε τμῆμα. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὑπ' αὐτοῦ, ὅτι τὸ αβγ τμῆμα τοῦ αβγ τριγώνου ἐστὶν ἐπίτριτον, καὶ τὸ δεβ τμῆμα τοῦ δεβ τριγώνου, ἐστὶν ὡς τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ αβγ τρίγωνον, οὕτως τὸ δεβ τμῆμα πρὸς τὸ δεβ τρίγωνον. καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὥστε καὶ τὰ ἥμισυ αὐτῶν, ὡς τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ δεβ τμῆμα, οὕτως τὸ αζβ τρίγωνον πρὸς τὸ δηβ τρίγωνον. ὥστε καὶ ἐὰν ἀναγράψωμεν τὰ παραλληλόγραμμα διπλάσια τῶν τριγώνων, ἔσται ἰσογώνια διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς δη αζ. ὥστε καὶ λόγον ἕξει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς αζ πρὸς δη, καὶ τῆς βζ πρὸς βη. ὁ αὐτὸς γὰρ λόγος ἐστὶ τῶν τετραγώνων καὶ τῶν τμημάτων. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς αζ πρὸς δη, καὶ τοῦ τῆς ζβ πρὸς βη. ὁ γὰρ τῆς ζβ πρὸς βη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον, καὶ τοῦ τῆς αζ πρὸς δη. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ αζ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν, ὡς δέδεικται ἐν τοῖς σχολίοις τοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς δη, καὶ τῆς αζ, πρὸς τὸν ἀπὸ αζ κύβον, λόγον ἔχει ὃν ἡ β τῆς δη μετὰ τῆς αζ πρὸς ζα. ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν βάσεων ὄντα πρὸς ἄλληλα, ἐστὶν ὡς τὰ ὕψη. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δη πρὸς αζ, ἡ ξν πρὸς νμ. καὶ ὡς ἡ β τῆς δη πρὸς αζ, ἡ β τῆς ξν πρὸς νμ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ β τῆς νξ μετὰ τῆς νμ πρὸς νμ, ἡ β τῆς δη μετὰ τῆς αζ πρὸς αζ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον, οὕτως ὅ τε ἀπὸ μν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ νξ κύβον, καὶ ἡ μν πρὸς ντ, τέσσαρες εἰσὶν ἀνάλογον. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. ὥστε ὁ ἀπὸ δη κύβος πρὸς τὸ στερεόν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην εὐθεῖαν ἔκ τε τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δη, οὕτως ἡ δη πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δη. πάλιν γὰρ πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς τὰ ὕψη. ὡς δὲ ἡ δη πρὸς τὴν β τῆς αζ μετὰ τῆς δη, οὕτως ἡ τν πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς ον, καὶ τῆς τν. ἔστι γὰρ ὡς ἡ αζ πρὸς δη, ἡ μν πρὸς νξ, καὶ ἡ ον πρὸς ντ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ δη πρὸς αζ, ἡ τν πρὸς νο. καὶ ὡς ἡ δη μετὰ τῆς β τῆς αζ πρὸς δη, οὕτως ἡ τν μετὰ τῆς β τῆς νο πρὸς νο. γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθη ἑξῆς ἀλλήλων κείμενα. πρῶτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς δη, καὶ τῆς αζ. δεύτερον ὁ ἀπὸ τῆς αζ κύβος. καὶ τρίτον ὁ ἀπὸ τῆς δη κύβος. καὶ τέταρτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς δη τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δη. καὶ ἄλλαι τινὲς εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμεναι, ἥ τε συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς νξ, καὶ μόνης τῆς μν, καὶ δευτέρα ἡ μν, καὶ τρίτη ἡ ντ, καὶ τετάρτη ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς ον, καὶ τῆς ντ. δι' ἴσου ἄρα γενήσεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς διπλῆς τῆς δη, καὶ τῆς αζ μόνης, πρὸς τὸ στερεόν, τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον, ὕψος τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς αζ, καὶ μόνης τῆς δη, οὕτως συγκειμένης ἐκ τῆς β τῆς ξν, καὶ μόνης τῆς μν, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς νο, καὶ μόνης τῆς ντ. ἀλλ' ὡς τὰ

εἰρημένα

εἰρημένα στερεὰ πρὸς ἄλληλα, οὕτως ἐδείχθη ἡ θι πρὸς ικ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θι πρὸς ικ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς ξν, καὶ μόνης τῆς μν, πρὸς τὴν β τῆς ον, καὶ μόνης τῆς ντ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ θκ πρὸς κι, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ συναμφοτέρου τῆς μντ, ἐπὶ τῆς β συναμφοτέρου τῆς ξνο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς ον, καὶ μόνης τῆς ντ, ἐπὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ε. ὡς ἡ ηζ πρὸς ηι, οὕτως ἡ ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξνο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς νο, καὶ μόνης τῆς ντ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ζκ πρὸς ζη, οὕτως αὐτῆς δύο πέμπτα. ἑκατέρα γὰρ τῶν ηθ ζκ δύο πεμπτημόριά ἐστι τῆς ηζ. ἐπεὶ δὲ τὸ μέσον πεμπτημόριον ἡ θκ ὑπόκειται, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξνο, πρὸς τὴν β συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς ξνο. καὶ γὰρ τὰ β τῶν ε, καὶ τὰ δ τῶν ι δύο πεμπτημόριά ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ ζη πρὸς ικ, οὕτως ἡ ε τῆς μντ, καὶ ι τῆς ξνο, πρὸς τὴν β τῆς νο, καὶ μόνην τὴν ντ. πάλιν δὲ ἐδείχθη ὡς ἡ ζκ πρὸς ζη, ἡ ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι τῆς ξνο, πρὸς τὴν β τῆς μντ, καὶ δ τῆς ξνο. ἔσται ὡς ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, ὡς ἡ ζη πρὸς ζι, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξνο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς ον, καὶ μόνης τῆς ντ, καὶ τῆς β συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ δ τῆς ξνο, ἥ ἐστιν ἴση τῇ συγκειμένῃ ἐκ τῆς β τῆς μν, καὶ δ τῆς νξ, καὶ ϛ τῆς νο, καὶ γ τῆς ντ. οὕτως γὰρ εἴληπται καὶ ἀνωτέρω. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ μν, νξ, ον, ντ, καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ντ πρὸς τμ, οὕτως εἰλημμένη τις ἡ ρι πρὸς τὴν ζθ, τουτέστι πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ηζ, τουτέστι τῆς μο, καὶ δεδειγμέναι εἰσὶν αἱ ἐν τῷ ῥητῷ ἀναλογίαι. ἔσται διὰ τὸ προειρημένον ἡ ρζ δύο πέμπτα τῆς μν, τουτέστι τῆς ζβ. τρία ἄρα πέμπτα ἐστὶν ἡ βρ τῆς βζ. ἡ βρ ἄρα πρὸς ρζ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο, ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ τοῦ αβγ τμήματος τὸ ρ σημεῖον. ἐὰν δὴ λάβωμεν τὸ τοῦ δβε τμήματος τὸ χ, τρία πέμπτα ἔσται ἡ βχ τῆς βη. γέγονεν ὡς ὅλη ἡ ζβ πρὸς ὅλην τὴν βρ, οὕτως ἀφαιρεθεῖσα ἡ βη πρὸς ἀφαιρεθεῖσαν τὴν βχ. ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν πρὸς ἑκατέραν λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ζη πρὸς λοιπὴν τὴν χρ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται ὡς ὁ αδεγ τομεὺς πρὸς τὸ δβε τμῆμα, οὕτως ἡ μτ πρὸς ντ. ὡς δὲ ἡ μτ πρὸς τν, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τῆς ηζ, τουτέστιν ἡ ζθ, ἤτοι ἡ χρ πρὸς ρι. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸ τμῆμα, ἡ χρ πρὸς ρι. καὶ ἀντιπεπόνθασιν, καὶ ἐστὶ τὸ ρ κέντρον τοῦ ὅλου τμήματος, τοῦ ἄρα τόμου κέντρον ἐστὶ τὸ ι.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β τῶν ἰσορροπικῶν ἀρχιμήδους.