

DR. M. ERNST

*Profesor Uniwersytetu Jana Kazimierza
we Lwowie*

ASTRONOMJA SFERYCZNA

Z 83 RYSUNKAMI



NAKŁAD GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA — KRAKÓW — LUBLIN — ŁÓDŹ
PARYŻ — POZNAŃ — WILNO — ŻAKOPANE

ASTRONOMJA SFERYCZNA

DR. M. ERNST

*Profesor Uniwersytetu Jana Kazimierza
we Lwowie*

ASTRONOMJA SFERYCZNA

Z 83 RYSUNKAMI



NAKŁAD GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA — KRAKÓW — LUBLIN — ŁÓDŹ
PARYŻ — POZNAŃ — WILNO — ZAKOPANE

1586
35

43603

II

Księg. Katolicka Katowice 6. I. 35

2. al

SPIS RZECZY.

	Str.
PRZEDMOWA	IX
ROZDZIAŁ I. WZORY MATEMATYCZNE ASTRONOMJI SFERYCZNEJ	
A. Trygonometria sferyczna	1
1. Podstawowe twierdzenia i określenia. 2. Zestawienie wzorów trygonometrii sferycznej. 3. Wzory różniczkowe trygonometrii sferycznej.	
B. Spółrzędne sferyczne	13
4. Wielkości, określające położenie punktu na powierzchni kuli. 5. Wielkości, określające położenie układu sferycznego względem innego takiegoż układu. 6. Zmiana współrzędnych sferycznych. 7. Wzory różnicowe i różniczkowe. 8. Wzory Fabritiusa. 9. Przykłady do ustępów 6, 7, 8. 10. Spółrzędne pozycyjne.	
C. Szeregi i całki	44
11. Wzór postaci $\tan \chi = \frac{p \sin \gamma}{1 + p \cos \gamma}$. 12. Wzór $q = \sqrt{1 + p^2 + 2p \cos \eta}$. 13. Obliczenie niektórych całek określonych.	
D. Interpolacja	56
14. Zadanie interpolacji. Wzór najogólniejszy. 15. Szereg Taylora. Wzór Lagrange'a. 16. Wzór interpolacyjny Newtona. 17. Kilka modyfikacyj wzoru Newtona. Interpolacja wstecz. Interpolacja na środek. 18. Różniczkowanie liczbowe. 19. Przykłady do ustępów 16, 17, 18.	
ROZDZIAŁ II. KSZTAŁT I ROZMIARY ZIEMI	78
20. Spółrzędne geograficzne. 21. Elementy sferoidy ziemskiej. 22. Szerokość geocentryczna. Promień ziemi w danym punkcie powierzchni. Przyspieszenie ciężkości. Długość wahadła sekundowego. 23. Przekroje sferoidy płaszczyznami. 24. Przekroje pionowe sferoidy ziemskiej. 25. Poziom. Widnokrag. Horyzont fizyczny. Depresja horyzontu fizycznego. 26. Wahaniaszerokości i długości geograficznej.	

ROZDZIAŁ III. RUCH DZIENNY NIEBA 113

27. Uwagi ogólne. 28. Układ poziomowy. Układ godzinny.
 29. Przejście z układu poziomowego na godzinny i odwrotnie.
 30. Kilka zastosowań wzorów (66) i (66'). 31. Przykłady do
 ustępów 29 i 30. 32. Związek, zachodzący między kątem go-
 dzinnym a długością geograficzną. Doba gwiazdowa. 33. Kulmi-
 nacje i największe dygresje. 34. Wschód i zachód gwiazd.
 35. Przejścia gwiazd przez pierwsze koło wierzchołkowe.
 36. Przykłady do ustępów 34 i 35.

ROZDZIAŁ IV. RUCH SŁOŃCA 157

37. Układ ekliptyczny. Układ równikowy. Czas gwia-
 zdowy. 38. Przejście z układu ekliptycznego na inne układy
 i odwrotnie, z innych układów na układ ekliptyczny. 39. Wiel-
 kości, określające położenie koła i punktu na niem. 40. Przykłady
 do ustępu 39. 41. Spółrzędne ekliptyczne i równikowe słońca.
 Kardynalne punkty ekliptyki. 42. Uwagi ogólne o rachubie
 czasu w związku z ruchem słońca. 43. Kulminacje i największe
 dygresje słońca; przejścia słońca przez pierwsze koło wierz-
 chołkowe. 44. Wschód i zachód słońca. Długość dnia i nocy
 45. Wpływ zmian spółrzędnych równikowych w ciągu doby na
 przebieg zjawisk ruchu dziennego. Przykłady.

ROZDZIAŁ V. REFRAKCJA ASTRONOMICZNA 207

46. Zjawisko refrakcji. 47. Cel i podstawy teorii refrakcji.
 48. Związek między pozorną odległością zenitalną gwiazdy a war-
 tością kąta padania promienia, ulegającego refrakcji atmosf-
 erycznej. 49. Równanie drogi światła w atmosferze. Równanie róż-
 niczkowe refrakcji. 50. Przybliżona wartość refrakcji. 51. Kilka
 uwag o współczynniku załamania światła. 52. Wprowadzenie
 nowych zmiennych do równania (85') i przekształcenie wyra-
 żenia refrakcji. 53. Związek, zachodzący między zmiennymi u i ω .
 54. Obliczenie wartości całek $\int_0^1 u^n d\omega$ i $\int_0^1 \omega^n d\omega$. 55. Oblicze-
 nie współczynników A_x szeregu (88). 56. Refrakcja w bliskości
 horyzontu. 57. Obliczenie całek I_1 i I_2 . 58. Refrakcja średnia.
 Definicja stałej α'' i jej wartość liczbowa. 59. Wartości liczb-
 owe współczynników A_x oraz całek I_1 i I_2 . 60. Refrakcja praw-
 dziwa. Przykład. 61. Tablice refrakcji. 62. Wpływ refrakcji
 na spółrzędne gwiazd w dowolnym układzie sferycznym.
 63. Wpływ refrakcji na kąt godzinny i azymut punktów wschodu
 i zachodu. 64. Wpływ refrakcji na wielkość depresji horyzontu
 fizycznego i promień widnokregu.

ROZDZIAŁ VI. PARALAKSA	Str. 294
----------------------------------	-------------

65. Ruch paralaktyczny. Określenie paralaksy. 66. Paralaksa dzienna. Spółrzędne topocentryczne i geocentryczne. 67. Zmiana wartości spółrzędnych gwiazdy z powodu paralaksy dziennej. Wzory ogólne. 68. Wpływ paralaksy dziennej na spółrzędne poziomowe. 69. Wpływ paralaksy dziennej na spółrzędne godzinne i równikowe. 70. Paralaksa miesięczna. 71. Paralaksa roczna. 72. Paralaksa wiekowa. 73. Niektóre zagadnienia, pokrewne paralaksie. 74. Przykłady obliczania paralaksy.

ROZDZIAŁ VII. ABERACJA	344
----------------------------------	-----

75. Czas aberacji. Rok światła. 76. Aberacja gwiazdowa. 77. Zmiana spółrzędnych sferycznych z powodu aberacji gwiazdowej. 78. Aberacja wiekowa. 79. Aberacja roczna. 80. Aberacja miesięczna. 81. Aberacja dzienna. 82. Aberacja planetarna. 83. Uwagi, dotyczące obliczania aberacji.

ROZDZIAŁ VIII. PRECESJA I NUTACJA	379
---	-----

84. Ekliptyka epoki t . 85. Równik prawdziwy i średni. 86. Wielkości, określające położenie ekliptyki i równika epoki t względem ekliptyki epoki t_0 . 87. Zmiana położenia równonocy i pochyłości ekliptyki. 88. Inna postać wzorów na ε , μ i χ . Precesja i nutacja. 89. Ogólniejsza postać szeregów, postępujących według potęg czasu. 90. Ogólna postać wzorów precesji. 91. Wartości liczbowe współczynników wzorów precesyjnych. Stała precesji. 92. Wartości liczbowe współczynników wyrazów perijodycznych. Stała nutacji. 93. Ruch średniego bieguna świata. 94. Ruch prawdziwego bieguna świata. 95. Średnie i prawdziwe spółrzędne gwiazd. Zmiana średnich spółrzędnych ekliptycznych. 96. Przykłady do ustępu 95. 97. Zmiana średnich spółrzędnych równikowych. 98. Przykłady do poprzedniego ustępu. 99. Zmiany, którym ulegają wskutek precesji elementy, określające położenie jakiegoś koła na niebie oraz danego punktu na tem kole. 100. Przykłady do poprzedniego ustępu. 101. Zmiany spółrzędnych, powodowane przez nutację. 102. Wpływ precesji i nutacji na kąt pozycyjny łuku, łączącego dwa punkty na niebie.

ROZDZIAŁ IX. RUCH WŁASNY GWIAZD	471
---	-----

103. Ruch własny, ruch paralaktyczny i ruch swoisty. 104. Ruch gwiazd w przestrzeni. Ruch kątowny i ruch w promieniu widzenia. 105. Składowe ruchu kątownego gwiazdy w dwóch spółrzędnych sferycznych i zmiany ich wartości. 106. Zmiana spółrzędnych gwiazdy wskutek jej ruchu własnego.

	Str.
ROZDZIAŁ X. ASTRONOMICZNA RACHUBA CZASU	485
107. Uwagi wstępne, 108. Okres obrotu ziemi dokoła osi.	
109. Doba stellarna i doba gwiazdowa. 110. Czas słoneczny prawdziwy i średni. 111. Doba prawdziwa i doba średnia.	
112. Rok gwiazdowy, zwrotnikowy i anomalistyczny. 113. Wartości liczbowe do ustępów 110—112. 114. Miesiąc gwiazdowy, zwrotnikowy, anomalistyczny, smoczy i synodyczny. 115. Okres juljański. 116. Noworoczna długość słońca. 117. Annus fictus. Rok astronomiczny Bessla. Południk normalny. Dzień zredukowany. 118. Wzór liczbowy na czas gwiazdowy. Związek między czasem gwiazdowym a czasem średnim słonecznym. 119. Związek między czasem słonecznym prawdziwym a średnim. Szczegóły, dotyczące równania czasu. 120. Poprawka południa. Środek dnia. Zmiany długości prawdziwej doby słonecznej. Czas średni wschodu i zachodu słońca.	
ROZDZIAŁ XI. REDUKCJA GWIAZD	546
121. Katalogi gwiazd. Mapy nieba. 122. Roczniki astronomiczne. Efemerydy. 123. Redukcja gwiazd. 124. Redukcja z miejsca średniego epoki t_0 na miejsce średnie lub prawdziwe epoki t . 125. Redukcja na miejsce pozorne. 126. Przykłady do ustępów 124 i 125.	
TABLICE:	
Tablica I. Zestawienie ważnych liczb oraz ich logarytmów	573
Tablica II. Spółczynniki wzoru interpolacyjnego Newtona	578
Tablica III. Zamiana godzin i minut na sekundy	579
Tablica IV. Zamiana godzin, minut i sekund na części doby, i odwrotnie	580
Tablica V. Zamiana stopni, minut i sekund łukowych na godziny, minuty i sekundy czasowe, i odwrotnie	581
Tablica VI a. Refrakcja średnia	582
Tablica VI b. Wartości czynnika x wzoru (112)	583
Tablica VI c. Wartości różnicy barometrycznej ΔB	587
Tablica VII. Wielkości precesyjne	588
Tablica VIII a. Wartości precesji rocznej P_α i P_δ według Newcomba dla epoki 1925.0	589
Tablica VIII b. Zmiany wartości P_α i P_δ na 100 lat	595
Tablica IX. Dzień okresu juljańskiego	595
Tablica X. Południk normalny	596
Tablica XI. Ułamki roku zwrotnikowego	597
Tablica XII a. Zamiana czasu średniego na gwiazdowy	598
Tablica XII b. Zamiana czasu gwiazdowego na średni	599
SPROSTOWANIA I UZUPEŁNIENIA	600
WYKAZ ALFABETYCZNY nazwisk, przedmiotów i skrótów	601

PRZEDMOWA.

Nazwa astronomji sferycznej pochodzi od sferycznego, t. j. kulistego kształtu *sklepienia niebieskiego*, na którem widzimy gwiazdy. Przedmiotem jej badań są zmiany położenia ciał niebieskich względem pewnych punktów i linii, które na sklepieniu tem wyznaczyć można. Jaka jest prawdziwa natura sklepienia niebieskiego, jest dla astronomji sferycznej sprawą obojętną, rola jego bowiem była taka sama wówczas, gdy je uważano za zjawisko materjalne, jak i obecnie, gdy wiemy, że jest zjawiskiem optycznem.

Astronomja dawniejsza była prawie wyłącznie astronomją sferyczną; dopiero głębsze wniknięcie w znaczenie zjawisk, zachodzących na sklepieniu niebieskiem, dało początek innym działom astronomji. To podstawowe znaczenie, które astronomja sferyczna miała w historii astronomji, zachowała ona i obecnie, stanowiąc podstawę studjów astronomicznych. Że zaś z drugiej strony na astronomji sferycznej opierają się wszystkie zastosowania praktyczne astronomji, więc jest ona ze wszystkich dziedzin astronomji najbardziej popularną w tem znaczeniu, iż przy różnych studjach specjalnych brana być musi w rachubę części i w zakresie obszerniejszym, niż np. mechanika niebios lub astrofizyka.

Pomimo to niema obecnie w języku polskim żadnego podręcznika astronomji sferycznej. Jedyna książka polska, poświęcona temu przedmiotowi, mianowicie *Astronomja sferyczna*, napisana przez prof. Wacława Łaskę (wydana we Lwowie w r. 1901), jest obecnie zupełnie wyczerpana. Był to zresztą podręcznik bardzo zwięzły, w którym astronomja sferyczna traktowana była jedynie jako nauka pomocnicza do studjum geodezji na politechnice lwowskiej. Prócz tego astronomji sferycznej

poświęconych jest kilka rozdziałów w *Astronomji teoretycznej* prof. M. P. Rudzkiego, ale nie obejmują one znacznej części zagadnień tej nauki.

Opracowując podręcznik astronomji sferycznej, liczyłem się z tem, że drugi podręcznik polski, poświęcony temu przedmiotowi, nieprędko zapewne wydany będzie; dlatego starałem się, aby zakres jego czynił zadość wymaganiom tych wszystkich, którym astronomja sferyczna z jakichkolwiek względów może być potrzebna. Przedewszystkiem więc korzystać z niego mają astronomowie i młodzież, studjująca astronomję na uniwersytetach i politechnikach, oraz nauczyciele, uczący kosmografji w szkole średniej. Dalej znajdą w nim potrzebne wiadomości ci, dla których astronomja sferyczna jest niezbędną nauką pomocniczą. Wreszcie, stanowiąc uzupełnienie podręcznych bibliotek matematyków, fizyków, inżynierów, geografów, geofizyków, marynarzy i t. p., służyć będzie im wyjaśnieniami w dziedzinie, której jest poświęcony. Opuszczony niestety być musiał w książce rozdział o zjawiskach zaćmieniowych, gdyż powiększyłby nadmiernie jej rozmiary. Mam nadzieję, że będzie on mógł być wydany później, jako oddzielna książka.

O metodzie wykładu i układzie książki nie widzę potrzeby się rozwodzić, pozostawiając ich ocenę kompetentnej krytyce. Pewne użyte sposoby oznaczeń, o ile nie zostały wyjaśnione, uważałem za same przez się zrozumiałe; wyjaśnienie stosowanych skrótów znajduje się w skorowidzu alfabetycznym na końcu książki. Również na końcu książki podanych jest kilka sprostowań dostrzeżonych omyłek i jedno uzupełnienie.

Kończąc, składam podziękowanie wszystkim tym, którzy przyczynili się do wydania książki. Dziękuję również panu A. Stach'emu, który był mi pomocny przy korekcie, oraz pannie H. Połońskiej za wykonanie rachunków kontrolnych, dotyczących tablic refrakcji.

M. Ernst.

Lwów, w listopadzie 1927 r.

ROZDZIAŁ I.

WZORY MATEMATYCZNE ASTRONOMJI SFERYCZNEJ.

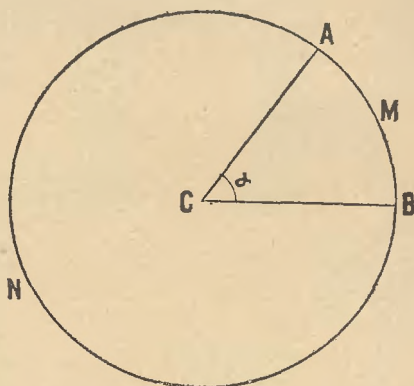
A. Trygonometria sferyczna.

1. Podstawowe twierdzenia i określenia. Płaszczyzna, przechodząca przez środek kuli, określa na jej powierzchni wielkie koło. Każde wielkie koło dzieli powierzchnię kuli na dwie równe części. Płaszczyzna, przechodząca przez środek kuli i dwa punkty na powierzchni kuli, określa na powierzchni kuli wielkie koło, przechodzące przez te dwa punkty. Dwa punkty na powierzchni kuli określają na niej tylko jedno wielkie koło, ponieważ tylko jedną płaszczyznę można poprowadzić przez te dwa punkty i środek kuli. Łuk wielkiego koła, zawarty między dwoma punktami na powierzchni kuli, albo też odpowiadający mu kąt środkowy, jest miarą wzajemnej odległości tych punktów.

Jeżeli $\sphericalangle ACB = \alpha$ (ryc. 1), to miarą odległości punktów A i B jest łuk $AMB = \alpha$, albo też łuk $ANB = 360^\circ - \alpha$, zależnie od tego, w którym z dwóch możliwych kierunków odległość tę w danem zagadnieniu liczymy. Prosta, poprowadzona przez środek jakiegoś koła prostopadłe do jego płaszczyzny, nazywa się *osią* tego koła. Koła, które mają oś wspólną, nazywają się kołami *równoległymi*. Prowadząc prostą przez środek kuli i szereg płaszczyzn do tej prostej prostopadłych, określimy przez nie szereg kół równoległych na powierzchni kuli. Z tych kół tylko jedno, określone przez płaszczyznę, która przechodzi przez środek kuli, jest kołem wielkiem, wszystkie inne są kołami ma-

łemi. Wspólna oś wszystkich tych kół przecina powierzchnię kuli w dwóch punktach, które nazywają się *biegunami* wielkiego koła, koło to zaś jest w stosunku do tych biegunów *kołem głównem*.

Płaszczyzny, przechodzące przez daną oś, określają na powierzchni kuli wielkie koła, przechodzące przez należące do tej osi bieguny; koła te mają część osi, zawartą między biegunami, za wspólną średnicę. Wynika stąd, że odległość dwóch biegunów kuli wynosi 180° , a odległość biegunów od należącego do nich koła głównego wynosi 90° .



Rycina 1.

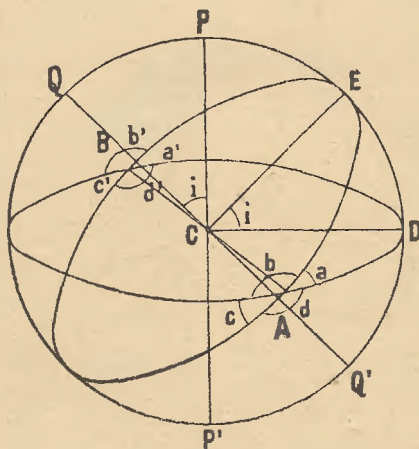
Oczywiście każda średnica kuli może być uważana za oś, a każdy punkt na powierzchni kuli może być uważany za biegun, wreszcie każde wielkie koło na powierzchni kuli może być uważane za koło główne; gdy dany jest jeden z trzech wymienionych elementów, określone są również dwa pozostałe.

Dwa przecinające się wielkie koła, np. ADB i AEB na ryc. 2, tworzą w punktach przecięcia się A i B kąty, których wierzchołkami są wspomniane punkty przecięcia się, a ramionami — łuki wielkich kół. Kąty takie, np. a , b , c , d lub a' , b' , c' , d' , nazywają się *kątami sferycznymi*.

Jeżeli płaszczyzny wielkich kół ADB i AEB tworzą ze sobą kąt $ECD = i$, to ten kąt i jest także miarą kątów sferycznych, utworzonych przez te płaszczyzny w punktach prze-

cięcia się ich z powierzchnią kuli. Jest zatem $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EBD = i$.

Gdy więc dwie płaszczyzny, przechodzące przez środek kuli, są do siebie prostopadłe, to i określone przez nie dwa wielkie koła są do siebie prostopadłe; kąty więc, utworzone w punktach ich przecięcia się, są kątami sferycznymi prostemi. Wynika stąd, że wielkie koła, przechodzące przez dany punkt na powierzchni kuli, są prostopadłe do głównego koła tego punktu, uważanego za biegun, i odwrotnie, koła wielkie, prosto-



Rycina 2.

padle do danego wielkiego koła, przechodzą wszystkie przez bieguny tego wielkiego koła.

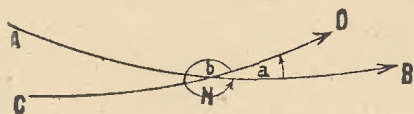
Osi dwóch kół przecinających się nachylone są do siebie pod tym samym kątem, co płaszczyzny tych kół, gdyż są do tych ostatnich prostopadłe. Więc np. na ryc. 2 $\sphericalangle PCQ = \sphericalangle ECD = i$. Osi PP' i QQ' są oczywiście także prostopadłe do prostej AB, a więc prostopadłą do niej jest również płaszczyzna PCQ; płaszczyzna ta określa na powierzchni kuli wielkie koło PQP'Q', którego biegunami są punkty A i B. To znaczy, że bieguny dwóch przecinających się wzajemnie kół leżą na kole głównym punktów przecięcia się tych kół.

Dwa wielkie koła na powierzchni kuli, np. ADB i AEB na ryc. 2, przecinają się w dwóch punktach A i B, tworząc

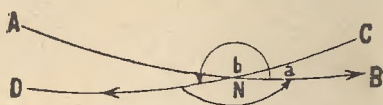
w tych punktach po 4 kąty. Z tych kątów kąty naprzemianległe są parami sobie równe, kąty zaś przyległe dopełniają się wzajemnie do 180° .

Gdy trzeba oznaczyć nachylenie dwóch przecinających się kół, zachodzi dwuznaczność co do tego, który z dwóch kątów przyległych uważać za kąt nachylenia. Aby uniknąć tej dwuznaczności, pewien kierunek na przecinających się kołach przyjmuje się za dodatni, i za kąt nachylenia tych kół przyjmuje się ten z kątów między kierunkami dodatnimi na tych kołach, który jest mniejszy bezwzględnie niż 180° .

Na ryc. 3a i 3b dodatnie kierunki na przecinających się kołach są wskazane przez strzałki. Na ryc. 3a kątem nachylenia koła CD względem AB jest $\angle BND = a$; na ryc. 3b tym kątem



Rycina 3a.



Rycina 3b.

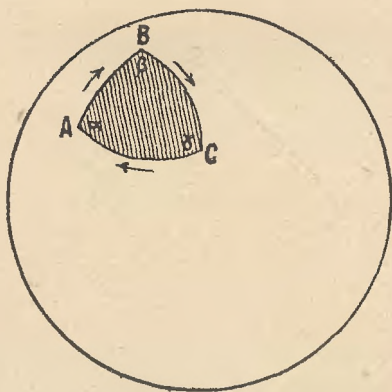
nachylenia jest $\angle BND = -b$. Odpowiednio kątem nachylenia koła AB względem CD jest na ryc. 3a $\angle DNB = -a$, a na ryc. 3b $\angle DNB = b$.

Gdy określamy kąt nachylenia dwóch kół, mierząc odległość biegunów tych kół, dla uniknięcia dwuznaczności należy ustalić, które bieguny mają być brane w rachubę. Nazwijmy mianowicie *biegunami jednoimiennymi* te bieguny, które przypadają po tej samej stronie względem kierunków dodatnich ich kół głównych, to nachylenie wzajemne dwóch kół, zgodnie z wyżej podanym określeniem, równa się odległości dwóch jednoimiennych biegunów tych kół, liczonej na wielkim kole, przechodzącym przez te bieguny.

Gdy na powierzchni kuli łączymy łukami wielkich kół trzy dane punkty, to powstają dwa trójkąty sferyczne, których powierzchnie razem zajmują całą powierzchnię kuli. Na ryc. 4 jednym z trójkątów sferycznych, powstałych przez połączenie łukami wielkich kół punktów A, B i C, jest ten, którego powierzchnia jest zaczerwniona, cała zaś powierzchnia biała sta-

nowi powierzchnię drugiego trójkąta, mającego te same wierzchołki. Boki obu tych trójkątów mają długość jednakową; co się zaś tyczy kątów, to gdy kąty zaczerzonego trójkąta mają wartości α , β i γ , to kąty przy tych samych wierzchołkach trójkąta białego mają wartości odpowiednio $360^\circ - \alpha$, $360^\circ - \beta$, $360^\circ - \gamma$.

Celem uniknięcia dwuznaczności co do dwóch możliwych trójkątów, mających wszystkie wierzchołki wspólne, określa się w trójkącie sferycznym pewien kierunek obiegu jako dodatni, i jako część wewnętrzną trójkąta przyjmuje się tę, która znaj-



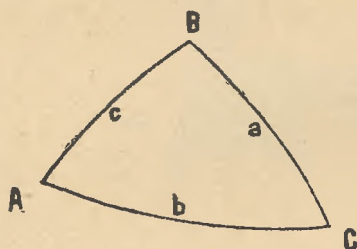
Rycina 4.

duje się po prawej stronie od dodatniego kierunku obiegu. Kątami wewnętrznymi trójkąta sferycznego są te kąty, które zawarte są między wewnętrznymi stronami boków, a powierzchnią trójkąta jest część powierzchni kuli, ograniczona wewnętrznymi stronami boków.

Jeżeli więc na rycinie 4 w trójkącie ABC dodatnim kierunkiem obiegu jest kierunek ABCA, to kąty wewnętrzne trójkąta ABC mają wartość α , β , γ , a powierzchnią jego jest zaczerzciona część powierzchni kuli. Gdyby zaś kierunek ACBA obiegu był dodatnim, to kąty wewnętrzne trójkąta ABC miałyby wartości $360^\circ - \alpha$, $360^\circ - \beta$, $360^\circ - \gamma$, a powierzchnią jego byłaby biała część powierzchni kuli.

2. Zestawienie wzorów trygonometrii sferycznej. Zadaniem trygonometrii sferycznej jest rozwiązywanie trójkątów sferycznych, t. j. wyszukiwanie związków, jakie zachodzą między kątami i bokami takich trójkątów. Kąty i boki są to *elementy* trójkąta sferycznego. Z tych sześciu elementów tylko trzy są od siebie niezależne; gdy więc trzy elementy trójkąta sferycznego są dane, to trzy pozostałe dadzą się jednoznacznie obliczyć.

Trygonometria sferyczna wchodzi w zakres matematyki elementarnej. W ustępie tym podane jest zestawienie wzorów trygonometrii sferycznej, często stosowanych w astronomii sferycznej.



Rycina 5.

Oznaczmy w trójkącie sferycznym ABC (ryc. 5) wartości kątów jego przez A, B, C , a boków przeciwległych odpowiednio przez a, b, c , to pomiędzy temi 6 elementami zachodzą związki następujące:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A, \\ \sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B, \\ \sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B, \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C, \\ \sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}\sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a, \\ \sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a, \\ \sin B \cos a &= \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b, \\ \sin B \cos c &= \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b, \\ \sin C \cos a &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c, \\ \sin C \cos b &= \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c.\end{aligned}\tag{5}$$

Gdy we wzorach (1) do (5) podstawimy $C=90^\circ$, to otrzymamy wzory, odnoszące się do trójkąta sferycznego prostokątnego. Ze wzoru (1) wypływają 2 następujące:

$$\begin{aligned}\sin a &= \sin c \sin A, \\ \sin b &= \sin c \sin B.\end{aligned}\tag{1'}$$

Ze wzorów (2) wypływa wzór

$$\cos c = \cos a \cos b.\tag{2'}$$

Wzory (3) sprowadzają się do dwóch następujących:

$$\begin{aligned}\cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B &= 0, \\ \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A &= 0,\end{aligned}\tag{3'}$$

które też można stosować w postaci

$$\begin{aligned}\tan a &= \tan c \cos B, \\ \tan b &= \tan c \cos A.\end{aligned}\tag{3''}$$

Ze wzorów (4) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\cos A &= \cos a \sin B, \\ \cos B &= \cos b \sin A,\end{aligned}\tag{4'}$$

oraz

$$\begin{aligned}\cotg A &= \cos c \tan B, \\ \cotg B &= \cos c \tan A.\end{aligned}\tag{4''}$$

Wreszcie ze wzorów (5) wypływają wzory

$$\begin{aligned}\cos c \sin A &= \cos a \cos B, \\ \cos c \sin B &= \cos b \cos A.\end{aligned}\tag{5'}$$

Wzory Delambre'a:

$$\begin{aligned}\cos \frac{A}{2} \sin \frac{b-c}{2} &= \sin \frac{a}{2} \sin \frac{B-C}{2}, \\ \sin \frac{A}{2} \sin \frac{b+c}{2} &= \sin \frac{a}{2} \cos \frac{B-C}{2}, \\ \cos \frac{A}{2} \cos \frac{b-c}{2} &= \cos \frac{a}{2} \sin \frac{B+C}{2}, \\ \sin \frac{A}{2} \cos \frac{b+c}{2} &= \cos \frac{a}{2} \cos \frac{B+C}{2}.\end{aligned}\tag{6}$$

Analogje Napiera:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tang} \frac{b-c}{2}}{\operatorname{tang} \frac{a}{2}} &= \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}}, \\ \frac{\operatorname{tang} \frac{b+c}{2}}{\operatorname{tang} \frac{a}{2}} &= \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}}, \\ \frac{\operatorname{tang} \frac{B-C}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{A}{2}} &= \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{b+c}{2}}, \\ \frac{\operatorname{tang} \frac{B+C}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{A}{2}} &= \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{b+c}{2}}.\end{aligned}\tag{7}$$

3. Wzory różniczkowe trygonometrii sferycznej. Jeżeli elementy trójkąta sferycznego ulegają zmianie, to zmiana jednego lub większej liczby tych elementów pociąga za sobą zmianę innych.

Niechaj E oznacza ogólnie jakiś element trójkąta sferycznego, zależny od jakiegoś innego elementu e , i niechaj przyrostowi Δe elementu e odpowiada przyrost ΔE elementu E . Ten przyrost ΔE można rozwinąć na szereg potęgowy według wzrastających całkowitych dodatnich potęg przyrostu Δe ; jest mianowicie

$$\Delta E = a_1 \Delta e + a_2 (\Delta e)^2 + \dots$$

Jeżeli wyrazy stopni wyższych, niż pierwszego, mają wartość tak małą, że można je pominąć, gdy chodzi o uzyskanie w obliczeniu pewnego określonego stopnia dokładności, to wzór powyższy redukuje się do następującego:

$$\Delta E = a_1 \Delta e.$$

Specjalnie uwzględnienie wyrazów wyższych stopni zazwyczaj wtedy bywa konieczne, gdy współczynniki a_2, a_3, \dots mają wartości duże.

Gdy dla osiągnięcia pożądaney dokładności obliczenia wystarczy uwzględnienie pierwszego wyrazu rozwinięcia, to pomiędzy przyrostami ΔE i Δe zachodzi prosta proporcjonalność, a współczynnik a_1 , jak wiadomo, ma wartość pierwszej pochodnej funkcji E względem e ; a zatem wartość przyrostu ΔE , odpowiadającą przyrostowi Δe , otrzymuje się przez proste różniczkowanie.

Jednakże i w tym przypadku czyni się założenie, że ΔE i Δe są wielkościami tego samego rzędu, które wymaga, ażeby pochodna $\frac{dE}{de}$ nie mogła wzrastać nieograniczenie.

Przez wzory różniczkowe trygonometrii sferycznej rozumiemy te wzory, w których wyraża się zależność pomiędzy pierwszymi potęgami przyrostów elementów trójkąta sferycznego w założeniu, że uwzględnienie wyższych potęg tych przyrostów nie wpłynęłoby na dokładność obliczenia. Wzory te mają

bardzo rozległe zastosowanie, wskutek czego wyprowadzimy najważniejsze z nich.

Z pierwszego wzoru grupy (2), mianowicie

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

otrzymujemy przez różniczkowanie:

$$\begin{aligned} -\sin a \, da &= (-\sin b \cos c + \cos b \sin c \cos A) \, db \\ &\quad + (-\cos b \sin c + \sin b \cos c \cos A) \, dc \\ &\quad - \sin b \sin c \sin A \, dA \end{aligned}$$

Że zaś według wzorów (3)

$$\begin{aligned} -\sin b \cos c + \cos b \sin c \cos A &= -\sin a \cos C, \\ -\cos b \sin c + \sin b \cos c \cos A &= -\sin a \cos B, \end{aligned}$$

a według (1)

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C,$$

więc podstawiając i upraszczając przez $-\sin a$, otrzymamy

$$\begin{aligned} da &= \cos C \, db + \cos B \, dc + \sin b \sin C \, dA, \\ db &= \cos A \, dc + \cos C \, da + \sin c \sin A \, dB, \\ dc &= \cos B \, da + \cos A \, db + \sin a \sin B \, dC. \end{aligned} \tag{8}$$

Drugie i trzecie z powyższych równań wynika z pierwszego przez cykliczną zamianę.

Ze wzorów (4) w sposób podobny wypływają następujące wzory różniczkowe:

$$\begin{aligned} dA &= -\cos c \, dB - \cos b \, dC + \sin B \sin c \, da, \\ dB &= -\cos a \, dC - \cos c \, dA + \sin C \sin a \, db, \\ dC &= -\cos b \, dA - \cos a \, dB + \sin A \sin b \, dc. \end{aligned} \tag{9}$$

Dosyć często używaną grupę wzorów różniczkowych otrzymamy, gdy zlogarytmujemy wzór

$$\sin A \sin b = \sin a \sin B,$$

t. j. napiszemy

$$\log \sin A + \log \sin b = \log \sin a + \log \sin B,$$

i ten ostatni wzór różniczkujemy. Stosując do wzoru tak otrzymanego cykliczną zamianę, znajdujemy:

$$\begin{aligned} \cotg A \, dA + \cotg b \, db &= \cotg a \, da + \cotg B \, dB, \\ \cotg B \, dB + \cotg c \, dc &= \cotg b \, db + \cotg C \, dC, \\ \cotg C \, dC + \cotg a \, da &= \cotg c \, dc + \cotg A \, dA. \end{aligned} \quad (10)$$

Gdy podzielimy wzór

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

przez

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A,$$

znajdziemy

$$\sin A \cotg B = \cotg b \sin c - \cos c \cos A.$$

Różniczkując powyższe równanie, otrzymamy

$$\begin{aligned} \cos A \cotg B \, dA - \frac{\sin A}{\sin^2 B} \cdot dB &= -\frac{\sin c}{\sin^2 b} \, db + \cos c \sin A \, dA + \\ &+ (\cotg b \cos c + \sin c \cos A) \, dc, \end{aligned}$$

a że jest

$$\begin{aligned} \cos A \cotg B - \cos c \sin A &= \\ &= \frac{1}{\sin B} (\cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c) = -\frac{\cos C}{\sin B}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cotg b \cos c + \sin c \cos A &= \\ &= \frac{1}{\sin b} (\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A) = \frac{\cos a}{\sin b} \end{aligned}$$

więc podstawiając te wartości, otrzymamy

$$-\frac{\cos C}{\sin B} dA = \frac{\sin A}{\sin^2 B} dB - \frac{\sin c}{\sin^2 b} db + \frac{\cos a}{\sin b} dc,$$

a gdy pomnożymy powyższe równanie przez $\sin B \sin b$, jest

$$-\sin b \cos C dA = \sin b \cdot \frac{\sin A}{\sin B} dB -$$

$$-\sin B \cdot \frac{\sin c}{\sin b} db + \sin B \cos a dc.$$

Podstawiając tu wypływające ze wzoru (1) wartości

$$\sin b \cdot \frac{\sin A}{\sin B} = \sin a,$$

$$\sin B \cdot \frac{\sin c}{\sin b} = \sin C,$$

znajdziemy wreszcie wraz z wzorami, utworzonymi przez cykliczną zamianę:

$$\begin{aligned} \sin a dB &= -\sin b \cos C dA + \sin C db - \sin B \cos a dc, \\ \sin b dC &= -\sin c \cos A dB + \sin A dc - \sin C \cos b da, \\ \sin c dA &= -\sin a \cos B dC + \sin B da - \sin A \cos c db, \\ \sin a dC &= -\sin c \cos B dA + \sin B dc - \sin C \cos a db, \\ \sin b dA &= -\sin a \cos C dB + \sin C da - \sin A \cos b dc, \\ \sin c dB &= -\sin b \cos A dC + \sin A db - \sin B \cos c da. \end{aligned} \quad (11)$$

Wzory powyższe można też pisać, jak następuje:

$$\begin{aligned} \sin A db &= \sin B \cos c da + \sin c dB + \sin b \cos A dC, \\ \sin B dc &= \sin C \cos a db + \sin a dC + \sin c \cos B dA, \end{aligned}$$

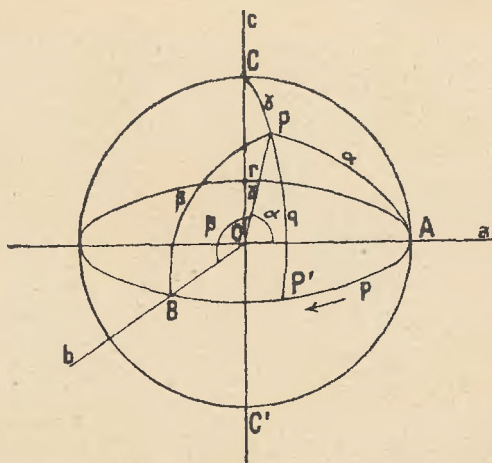
i t. d.

W związku z uwagami, zrobionemi na początku tego ustępu, wynika, że wzory (8) i (9) są dla małych przyrostów elementów zawsze ważne; wzory (10) mogą być stosowane tylko

wówczas, gdy wartości cotangensów, stanowiących współczynniki przyrostów, nie stają się zbyt wielkimi lub zbyt małymi; wreszcie wzory (11) nie mogą być stosowane wtedy, gdy kąty, których wstawy są współczynnikami przyrostów po lewej stronie wzorów, mają wartości, bliskie 0° lub 180° .

B. Spółrzędne sferyczne.

4. Wielkości, określające położenie punktu na powierzchni kuli. Niechaj punkt O będzie środkiem kuli o promieniu r (ryc. 6), a trzy proste, do siebie prostopadłe, Oa , Ob , i Oc , niech



Rycina 6.

będą osiami prostokątnego układu współrzędnych, którego początkiem jest punkt O .

Jeżeli A , B i C są punktami przecięcia się powierzchni kuli z temi trzema osiami, a P jest dowolnym punktem na powierzchni kuli, to gdy przez ten punkt i każdy z punktów A , B i C poprowadzimy wielkie koła, położenie punktu P na powierzchni kuli może być określone przez trzy odległości jego

od punktów A, B i C, mierzone na wspomnianych wielkich kołach. Oznaczmy te odległości

$$PA = \alpha, PB = \beta, PC = \gamma.$$

Wielkości α , β i γ są zarazem wartościami kątów, które tworzy promień kuli OP z dodatnimi kierunkami osi a, b i c; współrzędne prostokątne punktu P mają więc wartości następujące:

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \cos \beta, \quad c = r \cos \gamma.$$

Pomiędzy wartościami kątów α , β , γ , jak wiadomo, zachodzi związek

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Kąty te więc nie są od siebie niezależne i każdy z nich można wyrazić przez te same dwie wielkości, od siebie niezależne.

W tym celu przedłużmy łuk CP do przecięcia się z kołem AB w punkcie P' i niech będzie

$$AP' = p, \quad P'P = q,$$

a więc też

$$\gamma = 90^\circ - q, \quad P'B = 90^\circ - p.$$

Wobec tego, gdy do dwóch trójkątów sferycznych prostokątnych PAP' i PBP', w których PP' jest wspólną prostokątnią, zastosujemy wzór (2') i uwzględnimy wyżej podaną wartość γ , otrzymamy

$$\cos \alpha = \cos q \cos p,$$

$$\cos \beta = \cos q \sin p,$$

$$\cos \gamma = \sin q.$$

Widzimy, że kąty α , β i γ wyrazić można zapomocą dwóch niezależnych od siebie wielkości p i q . Wielkości p i q określają też położenie punktu P na powierzchni kuli i dlatego na-

zywają się *spółrzednemi sferycznemi* punktu P. Układ współrzednych, w którym współrzedne sferyczne określają położenie punktu, nazywa się *układem sferycznym*.

Układ sferyczny dany jest przez następujące elementy:
1) Biegun C lub C', określający wielkie koło AB, zwane *kołem głównem* układu sferycznego; bieguny te są zarazem biegunami układu sferycznego. 2) Półkoło CAC' między biegunami układu, zwane *początkowem*, którego punkt przecięcia się z kołem AB, t. j. punkt A, jest *początkiem* układu sferycznego.

Układ sferyczny oznaczają będziemy trzema literami tak, że pierwsza oznacza biegun układu, druga początek układu, a trzecia punkt na kole głównem, odległy od początku układu o 90° w kierunku rachuby współrzednej p . Tak np. CAB oznacza układ, którego biegunem jest C, początkiem A, a dla punktu B jest $p = +90^\circ$, $q = 0$.

Współrzedna q określa odległość danego punktu P od koła głównego układu, liczoną na kole, przechodzącym przez bieguny układu i ten punkt. Jednakże taki punkt, którego odległość od koła głównego wynosi q , istnieje na obu półkulach, przedzielonych kołem głównem. Celem uniknięcia dwuznaczności na jednej z półkul, stosownie do umowy, liczy się wartości q dodatnio, na drugiej zaś ujemnie. Przypuśćmy, że w układzie, przedstawionym na rycinie 6, współrzedna q ma wartości dodatnie na półkuli górnej, a ujemne na półkuli dolnej, to dla punktu P', leżącego na kole głównem, jest $q = 0^\circ$, dla bieguna C jest $q = +90^\circ$, a dla bieguna C' $q = -90^\circ$. Widzimy więc, że wszystkie możliwe wartości q zawarte są między 0° a $\pm 90^\circ$.

Współrzedna p oznacza długość łuku, zawartego pomiędzy początkiem układu A a punktem P', w którym koło CPC' przecina się z kołem głównem; łuk ten jest zarazem miarą kąta, odpowiadającego mu przy biegunach, np. ACP. Ale po obu stronach półkola CAC' istnieje koło w odległości p . Celem uniknięcia dwuznaczności jeden z kierunków, według umowy, przyjmuje się za dodatni kierunek rachuby, a zatem kierunek przeciwny za ujemny. Np. na ryc. 6 kierunek, obrany jako dodatni, oznaczony jest strzałką. Przy takiej umowie współrzedna p może przyjmować wszystkie wartości od 0° do 360° .

Każdej parze wartości p i q , określonych w sposób po-

wyższy, odpowiada na powierzchni kuli zawsze jeden i tylko jeden punkt; i odwrotnie, każdy punkt na powierzchni kuli określony jest jednoznacznie przez odpowiadające mu dwie współrzędne p i q .

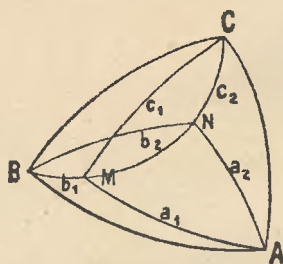
Wprowadzając w wyżej podanych wyrażeniach współrzędnych prostokątnych punktu P wartości na $\cos \alpha$, $\cos \beta$ i $\cos \gamma$, wyrażone przez współrzędne sferyczne, otrzymamy:

$$a = r \cos q \cos p,$$

$$b = r \cos q \sin p,$$

$$c = r \sin q.$$

Wielkości r , p i q określają punkt w przestrzeni podobnie,



Rycina 7.

jak współrzędne prostokątne a , b i c ; nazywają się one *współrzędnymi biegunowymi* punktu P.

5. Wielkości, określające położenie układu sferycznego względem innego takiegoż układu. Dodatkowo kierunki osi układu prostokątnego (abc), mającego początek w środku kuli, określają na powierzchni kuli trójkąt sferyczny ABC (ryc. 7), którego wierzchołki są punktami przecięcia się dodatnich kierunków osi z powierzchnią kuli. Wszystkie kąty w tym trójkącie są proste, a każdy z boków jest ćwiartką koła.

Weźmy pod uwagę dwa punkty M i N na powierzchni kuli; oznaczmy odległości punktu M od wierzchołków A, B, C, przez a_1 , b_1 , c_1 , a przez a_2 , b_2 , c_2 odległości punktu N od tychże wierzchołków. Odległości te są oczywiście równe kątom, jakie

tworzą promienie kuli, przechodzące przez punkty M i N z osiami układu prostokątnego (a b c). Jest zatem

$$\cos^2 a_1 + \cos^2 b_1 + \cos^2 c_1 = 1,$$

$$\cos^2 a_2 + \cos^2 b_2 + \cos^2 c_2 = 1,$$

$$\cos MN = \cos a_1 \cos a_2 + \cos b_1 \cos b_2 + \cos c_1 \cos c_2.$$

Osi drugiego układu prostokątnego (xyz), mającego początek w środku kuli, określają podobnie jak osi układu (abc) na powierzchni kuli trójkąt XYZ. Wzajemne położenie trójkątów XYZ i ABC określone jest przez łuki wielkich kół, łączące ich wierzchołki. Długości tych łuków dla każdej pary wierzchołków odczytuje się z następującej tabelki:

XYZ \ ABC	A	B	C
	α_1	β_1	γ_1
X	α_1	β_1	γ_1
Y	α_2	β_2	γ_2
Z	α_3	β_3	γ_3

Pomiędzy temi wartościami zachodzą związki, podobne do tych, jakie podaliśmy wyżej dla kątów a , b , c , mianowicie:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1,$$

$$\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1,$$

$$\cos^2 \alpha_3 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \gamma_3 = 1;$$

oraz także

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1,$$

$$\cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3 = 1,$$

$$\cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3 = 1.$$

A dalej, ponieważ $\cos AB = 0$, $\cos AC = 0$ i $\cos BC = 0$, i również $\cos XY = 0$, $\cos XZ = 0$ i $\cos YZ = 0$, otrzymuje się najprzód

$$\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 = 0,$$

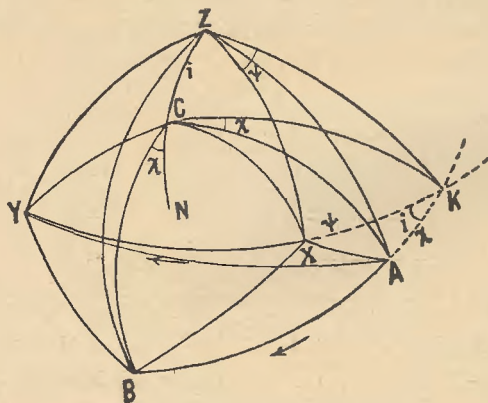
$$\cos \alpha_1 \cos \gamma_1 + \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 + \cos \alpha_3 \cos \gamma_3 = 0,$$

$$\cos \beta_1 \cos \gamma_1 + \cos \beta_2 \cos \gamma_2 + \cos \beta_3 \cos \gamma_3 = 0;$$

a następnie też

$$\begin{aligned}\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 &= 0, \\ \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 &= 0, \\ \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 &= 0.\end{aligned}$$

Istnienie sześciu niezależnych od siebie związków między 9 wielkościami $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ i t. d. oznacza, że wszystkie one wyrażone być mogą przez 3 wielkości, od siebie niezależne.



Rycina 8.

Aby wyrazić wszystkie dostawy $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2$ i t. d. za pomocą trzech wielkości, od siebie niezależnych, przyjmujemy, że w trójkątach ABC i XYZ (ryc. 8) dodatnim kierunkiem rachuby na kołach AB i XY jest ten, który wskazują strzałki. Gdy przedłużymy AB i XY do przecięcia się w punkcie K, to kąt $AKX = i$ jest kątem nachylenia koła XY względem AB. A ponieważ C i Z są jednoimiennymi biegunami kół AB i XY, więc jest też $CZ = i$. Punkt K jest biegunem koła, przechodzącego przez bieguny C i Z, a więc kąty KCZ i KZC są proste.

Oznaczmy

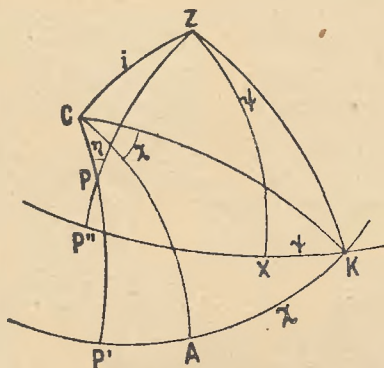
$$\begin{aligned}\cap KA &= \sphericalangle KCA = \chi, \\ \cap KX &= \sphericalangle KZX = \psi.\end{aligned}$$

Łącząc wierzchołki A, B, C łukami wielkich kół z wierzchołkami X, Y, Z, otrzymujemy 9 następujących trójkątów sferycznych, mających jako wspólny wierzchołek punkt K:

\sphericalangle XAK, \sphericalangle YAK, \sphericalangle ZAK, \sphericalangle XBK, \sphericalangle YBK, \sphericalangle ZBK, \sphericalangle XCK, \sphericalangle YCK, \sphericalangle ZCK,

z których w sposób, nie wymagający wyjaśnienia, wynikają następujące wartości dostaw kątów tabelki:

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha_1 &= \cos \psi \cos \chi + \sin \psi \sin \chi \cos i, \\
 \cos \alpha_2 &= -\sin \psi \cos \chi + \cos \psi \sin \chi \cos i, \\
 \cos \alpha_3 &= -\sin \chi \sin i, \\
 \cos \beta_1 &= -\cos \psi \sin \chi + \sin \psi \cos \chi \cos i, \\
 \cos \beta_2 &= \sin \psi \sin \chi + \cos \psi \cos \chi \cos i, \\
 \cos \beta_3 &= -\cos \chi \sin i, \\
 \cos \gamma_1 &= \sin \psi \sin i, \\
 \cos \gamma_2 &= \cos \psi \sin i, \\
 \cos \gamma_3 &= \cos i.
 \end{aligned} \tag{12}$$



Rycina 9.

W istocie więc 3 wielkości ψ , χ , i w zupełności określają położenie trójkąta XYZ względem trójkąta ABC i odwrotnie. Oczywiście przez te same trzy wielkości określone być może wzajemne położenie dwóch układów sferycznych CAB i ZXY, stosownie do przyjętego oznaczenia (ust. 4).

6. Zmiana współrzędnych sferycznych. Niechaj p i q (ryc. 9) będą współrzędnymi sferycznymi punktu P w układzie CAB.

W układzie ZXY spółrzednymi punktu P niech będą p' i q' . Spółrzedne prostokątne punktu P w układach (abc) i (xyz) mają wartości następujące:

$$\begin{aligned} a &= r \cos q \cos p, & b &= r \cos q \sin p, & c &= r \sin q, \\ x &= r \cos q' \cos p', & y &= r \cos q' \sin p', & z &= r \sin q'; \end{aligned} \quad (a)$$

Wzory przejścia z układu (abc) na układ (xyz) są

$$\begin{aligned} x &= a \cos \alpha_1 + b \cos \beta_1 + c \cos \gamma_1, \\ y &= a \cos \alpha_2 + b \cos \beta_2 + c \cos \gamma_2, \\ z &= a \cos \alpha_3 + b \cos \beta_3 + c \cos \gamma_3. \end{aligned}$$

Podstawiając w tych wzorach wartości a, b, c i x, y, z według wzorów (a), otrzymamy następujące związki między spółrzednymi p, q z jednej, a spółrzednymi p', q' z drugiej strony:

$$\begin{aligned} \cos q' \cos p' &= \cos q \cos p (\cos \psi \cos \chi + \sin \psi \sin \chi \cos i) + \\ &\quad + \cos q \sin p (-\cos \psi \sin \chi + \sin \psi \cos \chi \cos i) + \\ &\quad + \sin q \sin \psi \sin i, \\ \cos q' \sin p' &= \cos q \cos p (-\sin \psi \cos \chi + \cos \psi \sin \chi \cos i) + \\ &\quad + \cos q \sin p (\sin \psi \sin \chi + \cos \psi \cos \chi \cos i) + \\ &\quad + \sin q \cos \psi \sin i, \\ \sin q' &= -\cos q \cos p \sin \chi \sin i - \cos q \sin p \cos \chi \sin i + \\ &\quad + \sin q \cos i, \end{aligned}$$

które po uproszczeniu otrzymują postać następującą:

$$\begin{aligned} \cos q' \cos p' &= \cos q \{ \cos \psi \cos (\chi + p) + \sin \psi \sin (\chi + p) \cos i \} + \\ &\quad + \sin q \sin \psi \sin i, \\ \cos q' \sin p' &= \cos q \{ -\sin \psi \cos (\chi + p) + \cos \psi \sin (\chi + p) \cos i \} + \\ &\quad + \sin q \cos \psi \sin i, \\ \sin q' &= -\cos q \sin (\chi + p) \sin i + \sin q \cos i. \end{aligned}$$

Mnożąc pierwsze z tych równań przez $\cos \psi$, drugie przez $\sin \psi$ i odejmując drugie równanie od pierwszego, otrzymamy:

$$\cos q' \cos (\psi + p') = \cos q \cos (\chi + p).$$

Mnożąc zaś pierwsze równanie przez $\sin \psi$, drugie przez $\cos \psi$ i dodając, znajdujemy

$$\cos q' \sin(\psi + p') = \cos q \sin(\chi + p) \cos i + \sin q \sin i.$$

Zestawiając powyższe wyniki, otrzymuje się następujące wzory przejścia z układu sferycznego CAB na układ sferyczny ZXY:

$$\begin{aligned} \sin q' &= \sin q \cos i - \cos q \sin i \sin(\chi + p), \\ \cos q' \cos(\psi + p') &= \cos q \cos(\chi + p), \\ \cos q' \sin(\psi + p') &= \sin q \sin i + \cos q \cos i \sin(\chi + p). \end{aligned} \quad (13)$$

W sposób zupełnie podobny wychodząc ze wzorów

$$\begin{aligned} a &= x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3, \\ b &= x \cos \beta_1 + y \cos \beta_2 + z \cos \beta_3, \\ c &= x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3, \end{aligned}$$

otrzymuje się wzory przejścia z układu ZXY na układ CAB, które od wzorów (13) różnią się formalnie tylko tem, że ponieważ kąt nachylenia koła AB względem XY jest $-i$, więc wyrazy, w których jednym z czynników jest $\sin i$, mają znak przeciwny, niż we wzorach (13). Jest więc

$$\begin{aligned} \sin q &= \sin q' \cos i + \cos q' \sin i \sin(\psi + p'), \\ \cos q \cos(\chi + p) &= \cos q' \cos(\psi + p'), \\ \cos q \sin(\chi + p) &= -\sin q' \sin i + \cos q' \cos i \sin(\psi + p'). \end{aligned} \quad (13')$$

Zauważyć należy, że ponieważ zawsze jest $\cos q \geq 0$, więc drugi i trzeci wzór grup (13) i (13') określają wartości kątów $\psi + p'$ oraz $\chi + p$ także ze względu na ćwiartkę koła; przez uwzględnienie wartości kątów ψ i χ , które uważamy za znane, otrzymuje się też wartości spólrzędnych p' lub p . Co do spólrzędnej q lub q' , to o znaku jej rozstrzyga znak wartości $\sin q$ lub $\sin q'$.

Wzory (13) i (13') można też wyprowadzić znacznie prościej bezpośrednio z trójkąta sferycznego, którego wierzchołkami

są bieguny obu układów C i Z oraz punkt P, którego współrzędne obliczamy. Jest mianowicie na ryc. 9

$$\begin{aligned} P'P &= q, \quad P''P = q', \\ \cap AP' &= \sphericalangle ACP' = p, \quad \cap XP'' = \sphericalangle XZP'' = p', \end{aligned}$$

a więc w trójkącie CZP boki i kąty mają następujące wartości:

$$\begin{aligned} \cap CZ &= i, \quad \cap CP = 90^\circ - q, \quad \cap ZP = 90^\circ - q', \\ \sphericalangle PZC &= 90^\circ - \psi - p', \quad \sphericalangle PCZ = 90^\circ + \chi + p. \end{aligned}$$

Stosując do tego trójkąta wzory (1), (2) i (3), otrzymuje się wprost wzory (13) i (13').

7. Wzory różnicowe i różniczkowe. Gdy wielkości, określające położenie układu ZXY względem układu CAB, ulegają małym zmianom i takimże zmianom ulegają współrzędne p , q , to odpowiadać im będą w ogólności także małe zmiany współrzędnych p' , q' .

Ponieważ kąty ψ , χ , p i p' występują we wzorach (13) tylko w postaci sum $\chi + p$ i $\psi + p'$, więc niechaj odpowiadają sobie następujące przyrosty:

$$\begin{aligned} \Delta q &= \alpha, \quad \Delta(\chi + p) = \beta, \quad \Delta i = \gamma; \\ \Delta q' &= \alpha', \quad \Delta(\psi + p') = \beta'. \end{aligned} \tag{b}$$

Wobec tego zgodnie z wzorami (13) jest

$$\begin{aligned} \sin(q' + \alpha') &= \sin(q + \alpha) \cos(i + \gamma) - \\ &\quad - \cos(q + \alpha) \sin(i + \gamma) \sin(\chi + p + \beta), \\ \sin(\psi + p' + \beta') \cos(q' + \alpha') &= \sin(q + \alpha) \sin(i + \gamma) + \\ &\quad + \cos(q + \alpha) \cos(i + \gamma) \sin(\chi + p + \beta), \\ \cos(\psi + p' + \beta') \cos(q' + \alpha') &= \cos(q + \alpha) \cos(\chi + p + \beta). \end{aligned} \tag{c}$$

Przyrosty α' , β' można przedstawić w postaci szeregów, postępujących według całkowitych dodatnich potęg przyrostów α , β , γ . Uproszczenie rachunku przez zastosowanie tych szeregów zamiast wzorów ścisłych (13) uzyskuje się tylko w tych

przypadkach, gdy wyrazy wyższych stopni, niż drugi, są tak małe, że można ich w rachunku nie uwzględniać. Dlatego też w szeregach, które wyprowadzimy, wyrazy wyższych stopni są pominięte.

Z pierwszego wzoru (c) otrzymujemy, rozwijając po obu stronach i ograniczając się do wyrazów pierwszego i drugiego stopnia, następujące wyrażenia:

$$\begin{aligned} \alpha' \cos q' - \frac{1}{2} \alpha'^2 \sin q' &= \alpha [\cos q \cos i + \sin q \sin i \sin (\chi + p)] - \\ &- \beta \cos q \sin i \cos (\chi + p) - \gamma [\sin q \sin i + \cos q \cos i \sin (\chi + p)] + \\ &+ \frac{1}{2} \beta^2 \cos q \sin i \sin (\chi + p) - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \gamma^2) [\sin q \cos i - \\ &- \cos q \sin i \sin (\chi + p)] + \alpha \beta \sin q \sin i \cos (\chi + p) - \\ &- \beta \gamma \cos q \cos i \cos (\chi + p) - \alpha \gamma [\cos q \sin i - \\ &- \sin q \cos i \sin (\chi + p)]. \end{aligned}$$

Gdy w trójkącie CZP (ryc. 9) oznaczymy przez η kąt przy P, to według wzorów znanych otrzymujemy następujące związki dla η :

$$\begin{aligned} \cos \eta &= \sin (\psi + p') \sin (\chi + p) + \cos (\psi + p') \cos (\chi + p) \cos i, \\ \cos q' \sin \eta &= \cos (\chi + p) \sin i, \\ \cos q' \cos \eta &= \cos q \cos i + \sin q \sin i \sin (\chi + p). \end{aligned} \quad (d)$$

$$\begin{aligned} \cos q \cos \eta &= \cos q' \cos i - \sin q' \sin i \sin (\psi + p'), \\ \sin \eta \sin (\psi + p') + \cos \eta \cos (\psi + p') \sin q' &= \cos (\chi + p) \sin q. \end{aligned} \quad (d')$$

Uwzględniając wzory powyższe oraz wzory (13), znajdziemy:

$$\begin{aligned} \alpha' \cos q' - \frac{1}{2} \alpha'^2 \sin q' &= \alpha \cos q' \cos \eta - \beta \cos q' \cos (\psi + p') \sin i - \\ &- \gamma \cos q' \sin (\psi + p') - \frac{1}{2} \beta^2 \sin i [\sin q' \sin i - \\ &- \cos q' \cos i \sin (\psi + p')] - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \gamma^2) \sin q' + \\ &+ \alpha \beta \sin i [\sin \eta \sin (\psi + p') + \cos \eta \cos (\psi + p') \sin q'] - \\ &- \beta \gamma \cos q' \cos (\psi + p') \cos i - \\ &- \alpha \gamma [\cos q \sin i - \sin q \cos i \sin (\chi + p)] \end{aligned} \quad (e)$$

Gdybyśmy w tych rozwinięciach pominęli wyrazy drugiego stopnia, to byłoby

$$\alpha'_0 = \alpha \cos \eta - \beta \cos (\psi + p') \sin i - \gamma \sin (\psi + p'), \quad (f)$$

i α_0' jest przybliżoną wartością na α' , nie uwzględniającą wyrazów wyższych, niż pierwszego stopnia. Ale kwadraty $\alpha_0'^2$ i α'^2 różnią się tylko o wyrazy wyższego stopnia, niż drugi, i gdy według założenia wyrazy te pomijamy, to jest $\alpha'^2 = \alpha_0'^2$.

Można więc α' ze wzoru (e) obliczyć, przyjmując w nim

$$\begin{aligned} \alpha'^2 = \alpha_0'^2 = & \alpha^2 \cos^2 \eta + \beta^2 \cos^2 (\psi + p') \sin^2 i + \gamma^2 \sin^2 (\psi + p') - \\ & - 2 \alpha \beta \cos \eta \cos (\psi + p') \sin i + 2 \beta \gamma \sin (\psi + p') \cos (\psi + p') \sin i - \\ & - 2 \alpha \gamma \cos \eta \sin (\psi + p'). \end{aligned}$$

Podstawiając tę wartość, przenosząc $\frac{1}{2} \alpha'^2 \sin q'$ na drugą stronę i dzieląc po obu stronach przez $\cos q'$, otrzymamy poszukiwany wzór:

$$\begin{aligned} \alpha' = & \alpha \cos \eta - \beta \cos (\psi + p') \sin i - \gamma \sin (\psi + p') - \frac{1}{2} \alpha^2 \tan g q' \sin^2 \eta + \\ & + \frac{1}{2} \beta^2 \sin^2 i \sin (\psi + p') [\cot g i - \tan g q' \sin (\psi + p')] - \\ & - \frac{1}{2} \gamma^2 \tan g q' \cos^2 (\psi + p') + \alpha \beta \frac{\sin \eta}{\cos q'} \sin (\psi + p') \sin i - \\ & - \beta \gamma \cos (\psi + p') \sin i [\cot g i - \tan g q' \sin (\psi + p')] - \\ & - \alpha \gamma \left[\frac{\cos q}{\cos q'} \sin i - \frac{\sin q}{\cos q'} \sin (\chi + p) \cos i + \cos \eta \sin (\psi + p') \tan g q' \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Podobnie rozwijając trzeci wzór (e) według potęg przyrównań, mieć będziemy

$$\begin{aligned} & \alpha' \sin q' \cos (\psi + p') + \beta' \cos q' \sin (\psi + p') + \\ & + \frac{1}{2} (\alpha'^2 + \beta'^2) \cos (\psi + p') \cos q' - \alpha' \beta' \sin q' \sin (\psi + p') = \\ & \alpha \sin q \cos (\chi + p) + \beta \cos q \sin (\chi + p) + \\ & + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \cos (\chi + p) \cos q - \alpha \beta \sin q \sin (\chi + p). \end{aligned} \quad (g)$$

Przybliżone wartości na α' i β' otrzymamy, opuszczając wyrazy drugiego stopnia. Gdy oznaczymy je przez α_0' i β_0' , to jest

$$\begin{aligned} \alpha_0' \sin q' \cos (\psi + p') + \beta_0' \cos q' \sin (\psi + p') = \\ = \alpha \sin q \cos (\chi + p) + \beta \cos q \sin (\chi + p). \end{aligned} \quad (h)$$

Po podstawieniu wartości α_0' według (f), uwzględnieniu

wzorów (13) i (d) oraz podzieleniu przez $\sin(\psi + p')$ wzór (h) otrzymuje postać

$$\beta_0' \cos q' = \alpha \sin \eta + \beta \cos q \cos \eta + \gamma \sin q' \cos(\psi + p'). \quad (h')$$

Gdy więc we wzorze (g) podstawimy wartość α' według wzoru (14), a w wyrazach drugiego stopnia podstawimy na miejsce α' i β' przybliżone ich wartości, określone przez wzory (f) i (h'), to otrzymamy z pożądanym stopniem dokładności

$$\begin{aligned} \beta' \cos q' \sin(\psi + p') = & \\ = -\alpha' \sin q' \cos(\psi + p') + \alpha \sin q \cos(\chi + p) + & \\ + \beta \cos q \sin(\chi + p) - \frac{1}{2}(\alpha_0'^2 + \beta_0'^2) \cos q' \cos(\psi + p') + & \\ + \alpha_0' \beta_0' \sin q' \sin(\psi + p') + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \cos q \cos(\chi + p) - & \\ - \alpha \beta \sin q \sin(\chi + p). & \end{aligned} \quad (15)$$

Jeżeli przyrosty we wzorach (14) i (15) wyrażone są w sekundach łukowych, to należy wyrazy drugiego stopnia po prawej stronie wzorów pomnożyć jeszcze przez $\sin 1''$.

Gdy wyrazy drugiego stopnia pominięte być mogą bez uszczerbku dla dokładności, to wzory (14) i (15) przechodzą w następujące wzory różniczkowe, które od wzorów (f) i (h') różnią się tylko innym oznaczeniem przyrostów:

$$\begin{aligned} dq' = \cos \eta dq - \cos q \sin \eta d(\chi + p) - & \\ - \sin(\psi + p') d\zeta, & \\ \cos q' d(\psi + p') = \sin \eta dq + \cos q \cos \eta d(\chi + p) + & \\ + \sin q' \cos(\psi + p') d\zeta. & \end{aligned} \quad (16)$$

Gdyby chodziło o znalezienie przyrostów α i β , odpowiadających przyrostom α' , β' , i γ , to należałoby we wzorach (14) i (15) zmienić znaki na przeciwne w tych wyrazach, w których występują czynniki $\sin i$ lub $d i$, i pisać po prawej stronie α' , β' , $\chi + p$, $\psi + p'$, q' i q zamiast α , β , $\psi + p'$, $\chi + p$, q i q' . Wzory różniczkowe w tym przypadku są następujące:

$$\begin{aligned} dq = \cos \eta dq' + \cos q' \sin \eta d(\psi + p') + \sin(\chi + p) d\zeta, & \\ \cos q d(\chi + p) = -\sin \eta dq' + \cos q' \cos \eta d(\psi + p') - & \\ - \sin q \cos(\chi + p) d\zeta. & \end{aligned} \quad (16')$$

Co do stosowalności powyższych wzorów różniczkowych, to odnoszą się do nich te same uwagi, które uczyniliśmy w ustępie 3. Specjalnie wzory te prowadzą do wyników błędnych, gdy q' względnie q mają wartości, bliskie $\pm 90^\circ$. Wtedy należy stosować wzory różnicowe (14) i (15), lub gdy te jeszcze są za mało dekladne, wzory ściśle (13) lub (13').

8. Wzory Fabritiusa. Uciekania się do wzorów różnicowych lub ścisłych można uniknąć nawet przy małych wartościach $\cos q$ lub $\cos q'$ przez zastosowanie wzorów, podanych przez Fabritiusa.

Niedokładność, która powstaje przy stosowaniu wzorów (16) i (16'), gdy $\cos q$ względnie $\cos q'$ są małymi ułamkami, wynika oczywiście z zastosowania spółrzędnych sferycznych. Gdy mianowicie punkt P (ryc. 9) leży w bliskości bieguna Z lub też bieguna przeciwnego, spółrzędna p' podlega bardzo znacznym zmianom, nawet gdy przesunięcia tego punktu w kierunku bieguna są nieznaczne; na samych zaś biegunach spółrzędna p' jest zupełnie nieokreślona. Spółrzędne prostokątne punktu P nie nastroczają tych niedogodności, i na tym fakcie opierają się wzory Fabritiusa. Oznaczmy

$$x' = \cos q' \cos(\psi + p'), \quad y' = \cos q' \sin(\psi + p'), \quad z' = \sin q'.$$

x', y', z' są to spółrzędne prostokątne punktu (x', y', z') w układzie, którego płaszczyzna $x' y'$ schodzi się z płaszczyzną $x y$, ale oś x' przechodzi przez punkt K.

Gdy kąty q' i $\psi + p'$ zmieniają się o dq' i $d(\psi + p')$, to zmianom tym odpowiadają następujące zmiany spółrzędnych prostokątnych:

$$\begin{aligned} dx' &= -\sin q' \cos(\psi + p') dq' - \cos q' \sin(\psi + p') d(\psi + p'), \\ dy' &= -\sin q' \sin(\psi + p') dq' + \cos q' \cos(\psi + p') d(\psi + p'), \quad (i) \\ dz' &= \cos q' dq'. \end{aligned}$$

Zmiany te, wobec braku czynników powiększających, są tego samego rzędu, co przyrosty dq' i $d(\psi + p')$. Pisząc $dx' = \Delta x'$, $dy' = \Delta y'$, $dz' = \Delta z'$, popelniamy w obliczeniu przyrostów $\Delta x'$

i t. d. błąd drugiego stopnia względem przyrostów dq' i $d(\psi + p')$, który uważamy za znikomy.

Ze wzorów (i) wypływa:

$$\begin{aligned}\Delta x' \cos(\psi + p') + \Delta y' \sin(\psi + p') &= -\sin q' dq', \\ -\Delta x' \sin(\psi + p') + \Delta y' \cos(\psi + p') &= \cos q' d(\psi + p'), \\ \Delta z' &= \cos q' dq'.\end{aligned}\quad (j)$$

Z drugiej strony jest

$$x' + \Delta x' = \cos(q' + \Delta q') \cos[(\psi + p') + \Delta(\psi + p')].$$

i t. d. czyli

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \cos(q' + \Delta q') \cos[(\psi + p') + \Delta(\psi + p')] - \cos q' \cos(\psi + p'), \\ \Delta y' &= \cos(q' + \Delta q') \sin[(\psi + p') + \Delta(\psi + p')] - \cos q' \sin(\psi + p'), \\ \Delta z' &= \sin(q' + \Delta q') - \sin q';\end{aligned}$$

a stąd wynika w sposób łatwo zrozumiały:

$$\begin{aligned}\Delta x' \cos(\psi + p') + \Delta y' \sin(\psi + p') &= \cos(q' + \Delta q') \cos \Delta(\psi + p') - \cos q', \\ -\Delta x' \sin(\psi + p') + \Delta y' \cos(\psi + p') &= \cos(q' + \Delta q') \sin \Delta(\psi + p') \\ \Delta z' &= \sin(q' + \Delta q') - \sin q'.\end{aligned}\quad (j')$$

Gdy przyrównamy do siebie prawe strony wzorów (j) i (j'), to otrzymamy:

$$\begin{aligned}\cos(q' + \Delta q') \cos \Delta(\psi + p') - \cos q' &= -\sin q' dq', \\ \cos(q' + \Delta q') \sin \Delta(\psi + p') &= \cos q' d(\psi + p'), \\ \sin(q' + \Delta q') - \sin q' &= \cos q' dq';\end{aligned}\quad (k)$$

i z dwóch pierwszych wzorów (k) wynika

$$\operatorname{tang} \Delta(\psi + p') = \frac{\cos q' d(\psi + p')}{\cos q' - \sin q' dq'}. \quad (17)$$

Dalej, mnożąc pierwszy ze wzorów (k) przez $\cos \frac{1}{2} \Delta(\psi + p')$, a drugi przez $\sin \frac{1}{2} \Delta(\psi + p')$ i dodając, otrzymamy

$$\begin{aligned}\cos(q' + \Delta q') \cos \frac{1}{2} \Delta(\psi + p') &= (\cos q' - \sin q' dq') \cos \frac{1}{2} \Delta(\psi + p') + \\ &+ \cos q' d(\psi + p') \sin \frac{1}{2} \Delta(\psi + p').\end{aligned}$$

Równanie powyższe dzielimy przez $\cos \frac{1}{2} \Delta(\psi + p')$ i pod nim piszemy trzeci ze wzorów (k), to jest

$$\begin{aligned} \cos(q' + \Delta q') - \cos q' &= -\sin q' dq' + \\ &+ \cos q' d(\psi + p') \tan \frac{1}{2} \Delta(\psi + p'), \\ \sin(q' + \Delta q') - \sin q' &= \cos q' dq'. \end{aligned}$$

Pierwszy z tych wzorów mnożymy przez $-\sin q'$, drugi przez $\cos q'$ i dodajemy, to wynika

$$\sin \Delta q' = dq' - \sin q' \cos q' d(\psi + p') \tan \frac{1}{2} \Delta(\psi + p'). \quad (18)$$

Wzory (17) i (18) są to poszukiwane wzory *Fabritiusa*. We wzorze (17), który służy do obliczenia $\Delta(\psi + p')$, występują po prawej stronie wartości dq' oraz $\cos q' d(\psi + p')$, które należy obliczyć uprzednio zapomocą wzorów (16). Gdy $\Delta(\psi + p')$ zostało obliczone zapomocą wzoru (17), to zapomocą wzoru (18) może być obliczone $\Delta q'$.

Wzorowi (17) nadaje się zazwyczaj jeszcze postać nieco uproszczoną. Ponieważ nawet dla znacznych wartości q przyjmując można

$$\frac{\cos q' d(\psi + p')}{\cos q' - \sin q' dq'} = \frac{d(\psi + p')}{1 - \tan q' dq'} = d(\psi + p') (1 + \tan q' dq'),$$

więc, wyrażając przyrosty w sekundach łukowych, otrzymujemy wprost

$$\Delta(\psi + p') = d(\psi + p') + d(\psi + p') dq' \tan q' \sin 1''. \quad (17')$$

i w tym wzorze $d(\psi + p')$ jest wartością, wypływającą z drugiego wzoru (16), bez względu na wartość $\cos q'$.

Podobnie jest

$$\Delta q' = dq' - \frac{1}{2} \Delta(\psi + p') \sin q' \cos q' d(\psi + p') \sin 1'',$$

a gdy na miejsce $\Delta(\psi + p')$ podstawimy wartość ze wzoru (17'), jest też

$$\Delta q' = dq' - \frac{1}{2} \{d(\psi + p')\}^2 \sin q' \cos q' \sin 1''. \quad (18')$$

9. Przykłady do ustępów 6, 7, 8. We wszystkich przykładach, o ile nie będzie wymieniona inna dokładność, obliczać będziemy z dokładnością do $0'' \cdot 1$, co wymaga stosowania 6-miejscowych logarytmów. Liczby, stojące przy nazwach wielkości, oznaczają ich logarytmy.

Przykład 1. Dane są elementy, określające położenie układu sferycznego ZXY względem układu CAB, mianowicie

$$\psi = 10^{\circ} 23' 15'', \quad \chi = 215^{\circ} 35' 10'', \quad i = 26^{\circ} 59' 52'',$$

oraz spólrzędne punktu P w układzie CAB

$$p = 280^{\circ} 14' 02'', \quad q = 76^{\circ} 31' 42''.$$

Znaleźć spólrzędne tegoż punktu w układzie ZXY.

Stosujemy wzory (13) i dla udogodnienia rachunku logarytmicznego wprowadzamy wielkości pomocnicze, określone w sposób następujący:

$$\begin{aligned} m \cos M &= \sin q, \\ m \sin M &= \cos q \sin (\chi + p). \end{aligned} \quad (19)$$

Kąt M wyznaczamy zakładając, że $m > 0$. Wtedy wzory (13) otrzymują postać

$$\begin{aligned} \sin q' &= m \cos (M + i), \\ \cos q' \cos (\psi + p') &= \cos q \cos (\chi + p), \\ \cos q' \sin (\psi + p') &= m \sin (M + i). \end{aligned} \quad (20)$$

Aby mieć pewność, że przy obliczeniu nie popełniono błędu, należy zawsze, gdy to jest możliwe, korzystać ze *wzorów kontrolnych*. Gdy wzorów kontrolnych nie ma, zaleca się powtórzenie rachunku całkiem niezależnie od pierwszego rachunku.

W danym przypadku nie trudno znaleźć dogodne wzory kontrolne. W tym celu mnożymy drugi ze wzorów (13) przez $\sin (\chi + p)$, a trzeci przez $\cos (\chi + p)$ i odejmujemy drugi od trzeciego; otrzymujemy w ten sposób

$$\begin{aligned} \cos q' \sin [(\psi + p') - (\chi + p)] &= \sin q \sin i \cos (\chi + p) + \\ &+ \cos q \sin (\chi + p) \cos (\chi + p) (\cos i - 1), \end{aligned}$$

albo uwzględniając wzory (19) i pisząc

$$\cos i - 1 = -2 \sin^2 \frac{i}{2}, \quad \sin i = 2 \sin \frac{i}{2} \cos \frac{i}{2},$$

znajdujemy

$$\begin{aligned} \cos q' \sin [(\psi + p') - (\chi + p)] &= 2m \cos M \sin \frac{i}{2} \cos \frac{i}{2} \cos (\chi + p) - \\ &- 2m \sin M \sin^2 \frac{i}{2} \cos (\chi + p) \end{aligned}$$

lub wreszcie

$$\cos q' \sin [(\psi + p') - (\chi + p)] = 2m \cos \left(M + \frac{i}{2} \right) \sin \frac{i}{2} \cos (\chi + p). \quad (21)$$

Dalej, odejmując w pierwszym ze wzorów (13) po obu stronach $\sin q$, otrzymamy

$$\sin q' - \sin q = \sin q (\cos i - 1) - \cos q \sin (\chi + p) \sin i,$$

albo

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{q' - q}{2} \sin \frac{q' + q}{2} &= \\ &= -2m \cos M \sin^2 \frac{i}{2} - 2m \sin M \sin \frac{i}{2} \cos \frac{i}{2} = \\ &= -2m \sin \left(M + \frac{i}{2} \right) \cdot \sin \frac{i}{2}, \end{aligned}$$

stąd zaś wypływa

$$\sin \frac{q' - q}{2} = m \sin \left(M + \frac{i}{2} \right) \sin \frac{i}{2} \sec \frac{q + q'}{2} \dots\dots\dots (21')$$

Wzory (21) i (21') służą do kontroli wykonanego obliczenia wartości q' i p' .

Rachunek wykonywa się w sposób następujący:

$\chi = 215^{\circ} 35' 10''$	$m \cos (M+i) = \sin q'$	9.899167
$p = 280^{\circ} 14' 2''$	$q' =$	<u>52^{\circ} 26' 54''.7</u>
$\chi + p = 135^{\circ} 49' 12''$	$\cos q$	9.367289
$m \cos M$	$\cos (\chi + p)$	9.855612 <i>n</i>
$\cos q$	$\cos q' \cos (\psi + p')$	9.222901 <i>n</i>
$\sin (\chi + p)$	$\sin (M+i)$	9.774140
$m \sin M$	m	9.993853
$\text{tang } M$	$\cos q' \sin (\psi + p')$	9.767993
$M =$	$\text{tang } (\psi + p')$	0.545092 <i>n</i>
$\sin M$	$\psi + p' =$	105^{\circ} 54' 35''.1
$m.$	$\psi =$	10^{\circ} 23' 15''
$M+i =$	$p' =$	<u>95^{\circ} 31' 20''.1</u>
$\cos (M+i)$	$\cos q'$	9.784955

<i>Kontrola:</i>	$(\psi + p') - (\chi + p) = -$	29^{\circ} 54' 36''.9
	$q - q' =$	24^{\circ} 4' 47''.3
	$q + q' =$	128^{\circ} 58' 36''.7
	$\frac{q - q'}{2} =$	12^{\circ} 2' 23''.7
	$\frac{q + q'}{2} =$	64^{\circ} 29' 18''.3
	$\frac{i}{2} =$	13^{\circ} 29' 56''
	$M + \frac{i}{2} =$	22^{\circ} 58' 37''.2
	$\cos q'$	9.784955
	$\sin [(\psi + p') - (\chi + p)]$	9.697790 <i>n</i>
	Π	<u>9.482745 <i>n</i></u>
	2	0.301030
	m	9.993853
	$\cos \left(M + \frac{i}{2} \right)$	9.964100
	$\sin \frac{i}{2}$	9.368150
	$\cos (\chi + p)$	9.855612 <i>n</i>
	Π	<u>9.482745 <i>n</i></u>

$\sin \frac{q - q'}{2}$	<u>9.319300</u>
$\left\{ \begin{array}{l} m \\ \sin \left(M + \frac{i}{2} \right) \\ \sin \frac{i}{2} \\ \sec \frac{q + q'}{2} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 9.993853 \\ 9.591467 \\ 9.368150 \\ 0.365831 \end{array}$
Π	<u>9.319301</u>

Przykład 2. Niechaj wielkości χ , ψ , i oraz spółrzedne p i q otrzymają następujące przyrosty:

$$\begin{aligned} \Delta \chi &= +5' 10'', & \Delta \chi &= +3' 15'', & \Delta i &= -4' 8'', \\ \Delta p &= +7' 2'', & \Delta q &= -3' 18'', \end{aligned}$$

znaleść przyrosty $\Delta p'$ i $\Delta q'$.

Stosujemy wzory (14) i (15) i wyznaczamy najprzód spółczynniki wzoru (14) rachunkiem czteromiejscowym; $\cos \eta$ obliczamy według pierwszego wzoru (d).

$$\begin{aligned} 1 \quad & \left\{ \begin{array}{ll} \sin(\psi + p') & 9.9830 \\ \sin(\chi + p) & 9.8432 \end{array} \right. \\ & \Pi_1 \quad 9.8262 \\ 2 \quad & \left\{ \begin{array}{ll} \cos(\psi + p') & 9.4379 \, n \\ \cos(\chi + p) & 9.8556 \, n \end{array} \right. \\ & \cos i \quad 9.9499 \\ & \Pi_2 \quad 9.2434 \\ & \Pi_1 = \quad 0.6702 \\ & \Pi_2 = \quad 0.1751 \\ & \cos \eta = \quad 0.8453 \\ & (\alpha) = \cos \eta \quad \underline{9.9270} \\ & \cos(\psi + p') \quad 9.4379 \, n \\ & \quad - \sin i \quad 9.6520 \, n \\ (\beta) &= - \sin i \cos(\psi + p') \quad \underline{9.0949} \\ (\gamma) &= - \sin(\psi + p') \quad \underline{9.9830 \, n} \end{aligned}$$

$\cos(\chi + p) \quad 9.8556 \, n$ $\sin i \quad 9.6570$ $\sec q' \quad 0.2150$ $\sin \eta \quad 9.7276 \, n$		$\left\{ \begin{array}{l} -\cos(\psi + p') \quad 9.4379 \\ \sin i \quad 9.6570 \\ \cotg i - \Pi_4 \quad 9.8525 \\ \sin 1'' \quad 4.6856 \\ (\beta \gamma) = \Pi_8 \quad \underline{3.6330} \end{array} \right.$	
$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \quad 9.6990 \\ \tan g q' \quad 0.1142 \\ \sin^2 \eta \quad 9.4552 \\ \sin 1'' \quad 4.6856 \\ (\alpha^2) = \Pi_3 \quad \underline{3.9540} \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} \cos q \quad 9.3673 \\ \sec q' \quad 0.2150 \\ \sin i \quad 9.6570 \\ \Pi_9 \quad 9.2393 \end{array} \right.$	
$\left\{ \begin{array}{l} \cotg i = 1.963 \\ \tan g q' \quad 0.1142 \\ \sin(\psi + p') \quad 9.9830 \\ \Pi_4 \quad 0.0972 \\ \Pi_4 = 1.251 \\ \cotg i - \Pi_4 = 0.712 \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} \sin q \quad 9.9879 \\ \sec q' \quad 0.2150 \\ \sin(\chi + p) \quad 9.8432 \\ \cos i \quad 9.9499 \\ \Pi_{10} \quad 9.9960 \end{array} \right.$	
$\left\{ \begin{array}{l} \cotg i - \Pi_4 \quad 9.8525 \\ \frac{1}{2} \quad 9.6990 \\ \sin^2 i \quad 9.3140 \\ \sin(\psi + p') \quad 9.9830 \\ \sin 1'' \quad 4.6856 \\ (\beta^2) = \Pi_5 \quad \underline{3.5341} \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} \cos \eta \quad 9.9270 \\ \sin(\psi + p') \quad 9.9830 \\ \tan g q' \quad 0.1142 \\ \Pi_{11} \quad 0.0242 \end{array} \right.$	
		$\Pi_{11} = 1.057$ $\Pi_9 = 0.174$ $\Pi_{10} = 0.991$ $\Pi_9 - \Pi_{10} + \Pi_{11} = 0.240$	
$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \quad 9.6990 \, n \\ \tan g q' \quad 0.1142 \\ \cos^2(\psi + p') \quad 8.8758 \\ \sin 1'' \quad 4.6856 \\ (\gamma^2) = \Pi_6 \quad \underline{3.3746} \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} 0.240 \quad 9.3802 \\ -\sin 1'' \quad 4.6856 \, n \\ (\alpha \gamma) = \Pi_{12} \quad \underline{4.0658 \, n} \end{array} \right.$	
$\left\{ \begin{array}{l} \sin \eta \quad 9.7276 \, n \\ \sec q' \quad 0.2150 \\ \sin(\psi + p') \quad 9.9830 \\ \sin i \quad 9.6570 \\ \sin 1'' \quad 4.6856 \\ (\alpha \beta) = \Pi_7 \quad \underline{4.2682 \, n} \end{array} \right.$			

Obliczenie wyrazów 1-go stopnia.

α	2.2967 <i>n</i>	β	2.8645	γ	2.3945 <i>n</i>
(α)	9.9270	(β)	9.0949	(γ)	9.9830 <i>n</i>
$(\alpha)\alpha$	2.2237 <i>n</i>	$(\beta)\beta$	1.9594	$(\gamma)\gamma$	2.3775
Num = —	<u>167."4</u>	Num =	<u>91."1</u>	Num =	<u>238."5</u>

Obliczenie wyrazów 2-go stopnia.

α^2	4.5934	β^2	5.7290	γ^2	4.7890
(α^2)	3.9540	(β^2)	3.5341	(γ^2)	3.3746
$(\alpha^2)\alpha^2$	8.5474	$(\beta^2)\beta$	9.2631	$(\gamma^2)\gamma$	8.1636
Num =	<u>0."04</u>	Num =	<u>0."18</u>	Num =	<u>0."01</u>
$\alpha\beta$	5.1612 <i>n</i>	$\beta\gamma$	5.2590 <i>n</i>	$\alpha\gamma$	4.6912
$(\alpha\beta)$	4.2682 <i>n</i>	$(\beta\gamma)$	3.6330	$(\alpha\gamma)$	4.0658 <i>n</i>
$(\alpha\beta) \cdot \alpha\beta$	9.4294	$(\beta\gamma) \cdot \beta\gamma$	8.8920 <i>n</i>	$(\alpha\gamma) \cdot \alpha\gamma$	8.7570 <i>n</i>
Num =	<u>0."27</u>	Num = —	<u>0."08</u>	Num = —	<u>0."06</u>

Suma wyrazów 1-go stopnia jest

$$\alpha'_0 = -167''.4 + 91''.1 + 238''.5 = 2' 42''.2.$$

Wyrazy 2-go stopnia są bardzo małe i suma ich wynosi $+0''.4$. Jest zatem

$$\alpha' = \Delta q' = +2' 42''.6.$$

Aby obliczyć β' , znajdujemy najprzód wartość β'_0 według wzoru (h'). Spółczynniki po prawej stronie tego wzoru są:

$(\alpha) = \sin \eta$	9.7276 <i>n</i>	$\cos q$	9.3673	$\sin q'$	9.8992
		$\cos \eta$	9.9270	$\cos(\psi + p')$	9.4379 <i>n</i>
		(β)	<u>9.2943</u>	(γ)	<u>9.3371 <i>n</i></u>

Teraz obliczamy wartości kolejnych wyrazów wzoru (h').

α	2.2967 <i>n</i>	β	2.8645	γ	2.3945 <i>n</i>
(α)	9.7276 <i>n</i>	(β)	9.2943	(γ)	9.3371 <i>n</i>
$(\alpha)\alpha$	2.0243	$(\beta)\beta$	2.1588	$(\gamma)\gamma$	1.7316
Num =	<u>105."76</u>	Num =	<u>144."15</u>	Num =	<u>53."90</u>

Suma ich wynosi

$$\beta_0' \cos q' = 105.''76 + 144.''15 + 53.''90 = 303.''81.$$

Stąd otrzymuje się wreszcie

$$\beta_0' = 303.''81 \sec q' = 498''.4 = 8'18''.4.$$

Obliczamy teraz kolejne wyrazy wzoru (15). Oznaczmy jeszcze

$$\kappa = \sec q' \operatorname{cosec} (\psi + p'),$$

to celem otrzymania β' , każdy z wyrazów 1-go stopnia pomnożony być musi przez κ , a każdy z wyrazów 2-go stopnia przez $\kappa \sin 1''$.

1 {	$\cos q' \quad 9.7850$ $\sin (\psi + p') \quad 9.9830$ $\Pi_1 \quad 9.7680$ $\kappa \quad 0.2320$ $\sin 1'' \quad 4.6856$ $\kappa \sin 1'' \quad 4.9176$	4 {	$\alpha_0' \quad 2.2100$ $\beta_0' \quad 2.6967$ $\sin q' \quad 9.8992$ $\sin (\psi + p') \quad 9.9830$ $\kappa \sin 1'' \quad 4.9176$ $\Pi_4 \quad 9.7065$ $\text{Num} = 0.''51$
2 {	$-\frac{1}{2} \quad 9.6990 \, n$ $\alpha_0'^2 + \beta_0'^2 \quad 5.4373$ $\cos q' \quad 9.7850$ $\cos (\psi + p') \quad 9.4379 \, n$ $\kappa \sin 1' \quad 4.9176$ $\Pi_2 \quad 0.2768$ $\text{Num} = 0.''19$	5 {	$\alpha \quad 2.2967 \, n$ $\sin q \quad 9.9879$ $\cos (\chi + p) \quad 9.8556 \, n$ $\kappa \quad 0.2320$ $\Pi_5 \quad 2.3722$ $\text{Num} = 235.''6$
3 {	$-\alpha' \quad 2.2106 \, n$ $\sin q' \quad 9.8992$ $\cos (\psi + p') \quad 9.4379 \, n$ $\kappa \quad 0.2320$ $\Pi_3 \quad 1.7797$ $\text{Num} = 60.''2$	6 {	$\frac{1}{3} \quad 9.6990$ $\alpha^2 + \beta^2 \quad 5.7597$ $\cos q \quad 9.3673$ $\cos (\chi + p) \quad 9.8556 \, n$ $\kappa \sin 1'' \quad 4.9176$ $\Pi_6 \quad 9.5992 \, n$ $\text{Num} = 0.''40$ <div style="text-align: right;">3^*</div>

$$\begin{array}{lcl}
 7 \left\{ \begin{array}{ll} \beta & 2.8645 \\ \cos q & 9.3673 \\ \sin (\chi + p) & 9.8432 \\ \alpha & 0.2320 \\ \Pi_7 & 2.3070 \\ \text{Num} = & 202.''8 \end{array} \right. & & 8 \left\{ \begin{array}{ll} -\alpha & 2.2967 \\ \beta & 2.8645 \\ \sin q & 9.9879 \\ \sin (\chi + p) & 9.8432 \\ \alpha \sin 1'' & 4.9176 \\ \Pi_8 & 9.9099 \\ \text{Num} = & 0.''81 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Widzimy, że wyrazy drugiego stopnia pominięte być nie mogą, dają one w sumie $+ 1'' \cdot 1$. Otrzymujemy

$$\beta' = \Delta \psi + \Delta p' = 499.''5 = 8'19.''5$$

$$\Delta p' = 8'19.''5 - 3'15''.0 = 5'4''.5.$$

Zastosowanie wzorów różnicowych (14) i (15) zamiast wzorów ścisłych (13) lub (13') tylko wtedy jest połączone z korzyścią, gdy chodzi o obliczenie większej liczby przyrostów $\Delta q'$ i $\Delta p'$ przy danych wartościach elementów ψ, χ, i , oraz spółrzędnych p, q , gdyż współczynniki wyrazów wzorów różnicowych raz tylko obliczone być muszą. Gdy przyrosty są małe, a q lub q' nie są bliskie $[90^\circ]$, to dostateczną dokładność uzyskuje się przez zastosowanie wzorów różniczkowych (16) i (16').

Przykład 3. Niechaj będą dane

$$\chi = 25^\circ 28', \quad \psi = 200^\circ 15', \quad i = 13^\circ 18'$$

$$q = 77^\circ 11', \quad p = 242^\circ 46'.$$

Na podstawie powyższych danych oblicza się, jak w przykładzie 1-szym, wartości spółrzędnych w nowym układzie

$$q' = 89^\circ 22' 23.''6, \quad p' = 288^\circ 26' 43.''7.$$

Niechaj dalej dane będą przyrosty

$$\Delta \chi = -2'13'', \quad \Delta \psi = 1'14'', \quad \Delta i = 3'52'',$$

$$\Delta q = -4'28'', \quad \Delta p = 1'35''.$$

Znaleźć odpowiadające powyższym przyrostom przyrosty $\Delta q'$ i $\Delta p'$.

Ponieważ w tym przykładzie q' mało się różni od 90° więc zastosujemy do obliczenia poszukiwanych przyrostów wzory *Fabritiusa* (17') i (18'). Celem ich zastosowania należy przede wszystkim obliczyć wartości dq' i $d(\psi + p')$ według wzorów różniczkowych (16). Jest

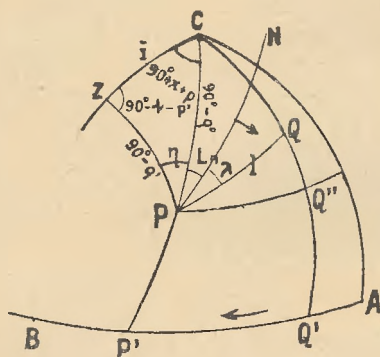
$$\psi + p' = 128^\circ 41' 43''.7, \quad \chi + p = 268^\circ 14', \quad \Delta(\chi + p) = -0' 38'',$$

a więc rachunek dalszy jest następujący:

$1 \left\{ \begin{array}{ll} \sin(\psi + p') & 9.8924 \\ \sin(\chi + p) & 9.9998 \, n \\ \Pi_1 & 9.8922 \, n \end{array} \right.$	$5 \left\{ \begin{array}{ll} dq & 2.4281 \, n \\ \sin \eta & 9.8118 \, n \\ \Pi_5 & 2.2399 \end{array} \right.$
$2 \left\{ \begin{array}{ll} \cos(\psi + p') & 9.7960 \, n \\ \cos(\chi + p) & 8.4890 \, n \\ \cos i & 9.9882 \\ \Pi_2 & 8.2732 \\ \Pi_1 = - & 0.7802 \\ \Pi_2 = & 0.0188 \\ \cos \eta = - & 0.7614 \\ \sin i & 9.3618 \\ \cos(\chi + p) & 8.4890 \, n \\ \sec q & 1.9610 \\ \sin \eta & 8.8118 \, n \end{array} \right.$	$6 \left\{ \begin{array}{ll} d(\chi + p) & 1.5798 \, n \\ \cos q & 9.3460 \\ \cos \eta & 9.8816 \, n \\ \Pi_6 & 0.8074 \\ \Pi_6 = & 6''.4 \\ di & 2.3655 \\ \sin q' & 0.0000 \end{array} \right.$
$3 \left\{ \begin{array}{ll} dq & 2.4281 \, n \\ \cos \eta & 9.8816 \, n \\ \Pi_3 & 2.3097 \\ \Pi_3 = & 204''.0 \end{array} \right.$	$7 \left\{ \begin{array}{ll} \cos(\psi + p') & 9.7960 \, n \\ \Pi_7 & 2.2615 \, n \\ \Pi_7 = - & 145''.0 \\ \cos q' d(\psi + p') = & 35''.2 \\ \cos q' d(\psi + p') & 1.546543 \\ \cos q' & 8.038981 \\ d(\psi + p') & 3.507562 \end{array} \right.$
$4 \left\{ \begin{array}{ll} d(\chi + p) & 1.5798 \, n \\ -\cos(\psi + p') & 9.7960 \\ \sin i & 9.3618 \\ \Pi_4 & 0.7376 \, n \\ \Pi_4 = - & 5''.5 \\ di & 2.3655 \\ -\sin(\psi + p') & 9.8924 \, n \\ -\sin(\chi + p') di & 2.2579 \, n \\ -\sin(\chi + p') di = - & 181''.2 \\ dq' = & 17''.3 \end{array} \right.$	$\begin{array}{ll} d(\psi + p') = & 3217''.8 \\ & = 53' 37''.8 \end{array}$

Teraz stosujemy wzory Fabritiusa.

wzór (17')		wzór (18')	
$d(\psi + p')$	3.5076	$\frac{1}{2}$	9.6990
dq'	1.2380	$-[d((\psi + p'))^2]$	7.0152 <i>n</i>
$\tan q'$	1.9610	$\sin q' \cos q'$	8.0390
$\sin 1''$	4.6856	$\sin 1''$	4.6856
Π	1.3922	Π	9.4388 <i>n</i>
$\Pi =$	24.''7	$\Pi = -$	0.''3
$d(\psi + p') =$	53' 37.'' 8	$d q' =$	17.''3
$\Delta(\psi + p') =$	54' 2.'' 5	$\Delta q' =$	17.''0
$\Delta \psi =$	1' 14''		
$\Delta p' =$	52' 48.'' 5		



Rycina 10.

10. Spółrzędne pozycyjne. Prócz spółrzędnych sferycznych często stosowane są do oznaczenia położenia punktu na niebie t. zw. *spółrzędne pozycyjne*.

Niechaj będzie dany na powierzchni kuli (ryc. 10) punkt P, określony przez spółrzędne sferyczne w układzie sferycznym CAB, mianowicie $AP' = p_0$, $P'P = q_0$. Prócz tego niech będzie dany jeszcze drugi punkt Q. Jeżeli PN jest wielkiem kołem, przechodzącym przez punkt P, i położenie tego wielkiego koła uważamy za znane, to można położenie punktu Q określić zapomocą odległości $PQ = l$, liczonej na wielkiem kole, przechodzącym

przez punkty P i Q, oraz przez kąt $NPQ = \lambda$, który nazywa się *kątem pozycyjnym* koła PQ względem koła PN.

Odległość l i kąt pozycyjny λ stanowią współrzędne pozycyjne punktu Q ze względu na punkt P i koło PN. Kąt λ liczy się zazwyczaj dodatnio od koła PN w kierunku wskazówki zegara.

Najczęściej kołem, od którego liczy się kąty pozycyjne, jest koło, przechodzące przez punkt P i biegun C układu sferycznego, względem którego określone są współrzędne p_0 i q_0 punktu P. Jeżeli L_n jest kątem pozycyjnym koła PN, a L kątem pozycyjnym punktu Q względem koła PC, to jest $L = L_n + \lambda$. Gdy znane są współrzędne pozycyjne l i L punktu Q, to można znaleźć też jego współrzędne sferyczne p i q .

Poprowadźmy (ryc. 10) przez punkt Q i biegun C wielkie koło, które przecina się z kołem głównym AB układu sferycznego CAB w punkcie Q', oraz przez punkt P koło, równoległe do koła AB; koło to niechaj przecina się z kołem QC w punkcie Q''. Jeżeli kąty p wzrastają w kierunku, wskazanym przez strzałkę, to jest

$$\angle PCQ = p_0 - p, \quad \angle Q'Q = q - q_0$$

i z trójkąta sferycznego PCQ wypływa:

$$\begin{aligned} \cos q \sin(p_0 - p) &= \sin l \sin L \\ \cos q \cos(p_0 - p) &= \cos l \cos q_0 - \sin l \sin q_0 \cos L \\ \sin q &= \cos l \sin q_0 + \sin l \cos q_0 \cos L \end{aligned} \quad (22)$$

Gdyby chodziło o zadanie odwrotne, t. j. o wyznaczenie współrzędnych pozycyjnych l i L na podstawie znanych współrzędnych sferycznych p i q , to z tego samego trójkąta wypływają wzory:

$$\begin{aligned} \sin l \sin L &= \cos q \sin(p_0 - p) \\ \sin l \cos L &= \sin q \cos q_0 - \cos q \sin q_0 \cos(p_0 - p) \\ \cos l &= \sin q \sin q_0 + \cos q \cos q_0 \cos(p_0 - p) \end{aligned} \quad (23)$$

Wzory (22) i (23) w zupełności rozwiązują zadanie przejścia ze współrzędnych pozycyjnych na sferyczne i odwrotnie. Co

do postaci ich, to widzimy, że są one podobne do wzorów (13) i (13'), można je zatem uczynić dogodnymi do rachunku logarytmicznego przez wprowadzenie wielkości pomocniczych, a więc podobnymi do wzorów (19) i (20); kontrolę rachunku umożliwią wówczas wzory, analogiczne do wzorów (21) i (21').

Jednakże w praktyce zastosowanie współrzędnych pozycyjnych ogranicza się do tych przypadków, gdy odległość $PQ = l$ jest mała, mianowicie tak mała, że z dostateczną dokładnością przyjąć można

$$\sin l = l'' \sin 1'', \quad \cos l = 1.$$

Wtedy oczywiście też p i q mało się różnią od p_0 i q_0 i jest także z dostateczną dokładnością

$$\begin{aligned} \cos(p_0 - p) &= 1, & \sin(p_0 - p) &= (p_0 - p)'' \sin 1'', \\ \cos(q_0 - q) &= 1, & \sin(q_0 - q) &= (q_0 - q)'' \sin 1'', \end{aligned}$$

oraz też

$$\cos \frac{p_0 + p}{2} = \cos p_0, \quad \cos \frac{q_0 + q}{2} = \cos q_0.$$

Gdy założenia powyższe są spełnione, wzory (22) i (23) znacznie się upraszczają. Pierwszy wzór (22) można napisać w postaci

$$\cos q (p_0 - p) = l \sin L \quad (1)$$

Trzeci zaś ze wzorów przyjmuje postać

$$\sin q_0 - \sin q = -l \cos q_0 \cos L \sin 1'',$$

albo

$$2 \cos \frac{q_0 + q}{2} \sin \frac{q_0 - q}{2} = -l \cos q_0 \cos L \sin 1''. \quad (1')$$

Gdy jeszcze we wzorze (1) zastąpimy q przez q_0 , co na dokładność nie wpływa, a we wzorze (1') położymy

$$\cos \frac{q_0 + q}{2} = \cos q_0, \quad 2 \sin \frac{q_0 - q}{2} = (q_0 - q) \sin 1'',$$

to wzory (22) sprowadzają się do następującej postaci uproszczonej:

$$\begin{aligned} p - p_0 &= -l \sin L \sec q_0, \\ q - q_0 &= l \cos L. \end{aligned} \quad (22')$$

Podobnie zamiast wzorów (23) stosować można wzory uproszczone

$$\begin{aligned} l \sin L &= -(p - p_0) \cos q_0, \\ l \cos L &= q - q_0. \end{aligned} \quad (23')$$

Wzory (23') określają także ćwiartkę, w której przypada kąt L , gdyż l według określenia ma zawsze wartość dodatnią.

Wzory (22') i (23') wskazują, że uproszczenia przez nas wprowadzone mają to samo znaczenie, co założenie, że mały trójkąt PQQ'' , prostokątny przy Q'' , może być uważany za płaski i prostolinijny; w tem bowiem założeniu jest

$$PQ'' = l \sin L, \quad Q''Q = l \cos L,$$

i oczywiście, gdy l wyrażamy w miarach katowych, to w tych samych miarach wyrażone też będą boki trójkąta PQ'' i $Q''Q$. Co do tego ostatniego boku, to należy zauważyć, że ponieważ jest on łukiem wielkiego koła, więc jest wprost $Q''Q = q - q_0$ i zatem, zgodnie z drugim wzorem (22'),

$$q - q_0 = l \cos L;$$

łuk PQ'' natomiast jest łukiem małego koła, równoległego do koła AB , któremu na tem ostatniem odpowiada łuk $P'Q' = p_0 - p$. Długości łuków PQ'' i $P'Q'$ mają się do siebie tak, jak promienie kół, do których należą. Z ryc. 11 widzimy, że gdy $P'P = q_0$, to $P_0P = P_0'P' \cos q_0$, a więc też

$$\frac{PQ''}{P'Q'} = \frac{P_0'P' \cos q_0}{P_0'P'}$$

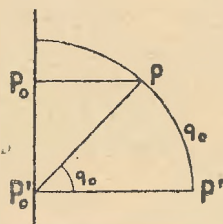
czyli

$$PQ'' = P'Q' \cos q_0 = (p_0 - p) \cos q_0.$$

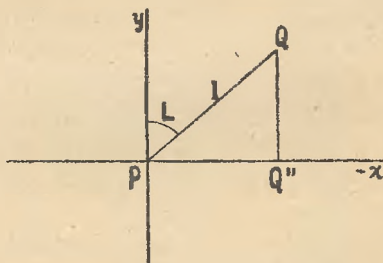
Jest więc także, zgodnie z (22'),

$$p - p_0 = PQ'' \sec q_0 = l \sin L \sec q_0.$$

Gdy trójkąt PQQ'' uważamy za płaski, to płaszczyzna, w której on przypada, jest styczna do powierzchni kuli w punkcie P. Obierzmy w tej płaszczyźnie układ współrzędnych prostokątnych, którego początkiem jest punkt P; osią x -ów niech będzie styczna do małego koła PQ'' na ryc. 10, a osią y -ów styczna do koła PC na tejże ryc., i niechaj kierunki dodatnie na tych ośiach odpowiadają kierunkowi wzrostu kątów p i q .



Rycina 11.



Rycina 12.

Spółrzędne prostokątne punktu P, określone przez odległość $PQ = l$ i kąt pozycyjny $\angle yPQ = L$ (ryc. 12) w tym układzie są:

$$-x = l \sin L, \quad y = l \cos L,$$

albo też, gdy weźmiemy pod uwagę wzory (23'),

$$x = (p - p_0) \cos q_0, \quad y = q - q_0 \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Gdy znane są współrzędne pozycyjne punktu P w odniesieniu do jakiegoś danego układu sferycznego, to można też znaleźć współrzędne pozycyjne tegoż punktu w odniesieniu do każdego innego układu sferycznego, jeżeli jego położenie względem układu pierwotnego jest określone.

Niechaj będą współrzędne punktów P i Q, jak poprzednio, w układzie sferycznym CAB odpowiednio p_0, q_0 i p, q , a w innym układzie sferycznym ZXY odpowiednio p'_0, q'_0 i p', q' . Kąt

pozycyjny punktu Q w odniesieniu do koła ZP niech będzie L' , odległość $PQ = l$ przez zmianę układu zmianie oczywiście nie ulega.

Ponieważ wzory (23') są ogólne, więc jest też

$$\begin{aligned} l \sin L' &= -(p' - p'_0) \cos q'_0, \\ l \cos L' &= q' - q'_0. \end{aligned}$$

Gdy kąt pozycyjny Koła CP względem koła ZP (ryc. 10), t. j. kąt ZPC, oznaczmy przez η , to oczywiście jest $L' = L + \eta$, a zatem

$$\begin{aligned} l \sin L' &= l \sin L \cos \eta + l \cos L \sin \eta = \\ &= (p_0 - p) \cos q_0 \cos \eta + (q - q_0) \sin \eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l \cos L' &= l \cos L \cos \eta - l \sin L \sin \eta = \\ &= (q - q_0) \cos \eta - (p_0 - p) \cos q_0 \sin \eta, \end{aligned}$$

stąd zaś wypływają wzory

$$\begin{aligned} p' - p'_0 &= \{ (p - p_0) \cos q_0 \cos \eta - (q - q_0) \sin \eta \} \sec q'_0, \\ q' - q'_0 &= (p - p_0) \cos q_0 \sin \eta + (q - q_0) \cos \eta. \end{aligned} \quad (25)$$

Wartości q'_0 i η wypływają z trójkąta PCZ przez zastosowanie wyprowadzonych poprzednio wzorów trygonometrii sferycznej, mianowicie

$$\begin{aligned} \cos q'_0 \sin \eta &= \cos (\chi + p_0) \sin i, \\ \cos q'_0 \cos \eta &= \cos q_0 \cos i + \sin q_0 \sin i \sin (\chi + p_0), \\ \sin q'_0 &= \sin q_0 \cos i - \cos q_0 \sin i \sin (\chi + p_0). \end{aligned}$$

Przez wprowadzenie kątów pomocniczych można wzorom tym nadać postać, dogodną do logarytmicznego rachunku.

C. Szeregi i całki.

$$11. \text{ Wzór postaci } \operatorname{tang} \chi = \frac{p \sin \gamma}{1 + p \cos \gamma}.$$

Bardzo często w astronomji sferycznej zachodzi potrzeba obliczenia wartości kąta χ , określonego przez wzór postaci ogólnej

$$\operatorname{tang} \chi = \frac{\pm p \sin \gamma}{1 \pm p \cos \gamma}.$$

Wszystkie poszczególne przypadki dadzą się sprowadzić do postaci

$$\operatorname{tang} \chi = \frac{p \sin \gamma}{1 + p \cos \gamma}$$

gdzie $p > 0$. Jest mianowicie:

$$\text{gdy } \gamma = -\eta, \quad \frac{p \sin(-\eta)}{1 + p \cos(-\eta)} = \frac{-p \sin \eta}{1 + p \cos \eta},$$

$$\text{gdy } \gamma = 180^\circ - \eta, \quad \frac{p \sin(180^\circ - \eta)}{1 + p \cos(180^\circ - \eta)} = \frac{+p \sin \eta}{1 - p \cos \eta}, \quad (I)$$

$$\text{gdy } \gamma = 180^\circ + \eta, \quad \frac{p \sin(180^\circ + \eta)}{1 + p \cos(180^\circ + \eta)} = \frac{-p \sin \eta}{1 - p \cos \eta}.$$

Gdy $p < 1$, to można rozwinąć χ na szereg według wstaw wielokrotności kąta γ . Połóżmy

$$\begin{aligned} p \sin \gamma &= q \sin \chi, \\ 1 + p \cos \gamma &= q \cos \chi. \end{aligned} \quad (m)$$

Mnożąc pierwsze z powyższych równań przez $i = \sqrt{-1}$ i dodając do drugiego, otrzymamy

$$1 + p(\cos \gamma + i \sin \gamma) = q(\cos \chi + i \sin \chi).$$

Że zaś jest

$$\cos x + i \sin x = e^{xi},$$

gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych, więc

$$1 + pe^{\gamma i} = qe^{\chi i},$$

oraz, gdy przez $\log n$ oznaczać będziemy logarytmy naturalne w odróżnieniu od stosowanego dla logarytmów zwykłych oznaczenia \log

$$\log n (1 + pe^{\gamma i}) = \log n q + \chi i \quad (n)$$

Lewą część tego równania rozwinać można według wzoru Taylora na następujący szereg potęgowy:

$$\log n (1 + pe^{\gamma i}) = pe^{\gamma i} - \frac{p^2}{2} e^{2\gamma i} + \frac{p^3}{3} e^{3\gamma i} - \dots$$

który możemy też pisać

$$\begin{aligned} \log n (1 + pe^{\gamma i}) &= p (\cos \gamma + i \sin \gamma) - \frac{p^2}{2} (\cos 2\gamma + i \sin 2\gamma) + \\ &+ \frac{p^3}{3} (\cos 3\gamma + i \sin 3\gamma) - \dots \quad (n) \end{aligned}$$

Oczywiście prawe strony równań (n) i (n) są sobie równe i prócz tego zachodzi równość oddzielnie części rzeczywistych i urojonych. Z przyrównania do siebie części rzeczywistych i urojonych wynikają wzory następujące:

$$\log n q = p \cos \gamma - \frac{p^2}{2} \cos 2\gamma + \frac{p^3}{3} \cos 3\gamma - \frac{p^4}{4} \cos 4\gamma + \dots \quad (26)$$

$$\chi = p \sin \gamma - \frac{p^2}{2} \sin 2\gamma + \frac{p^3}{3} \sin 3\gamma - \frac{p^4}{4} \sin 4\gamma + \dots \quad (26')$$

Wzór (26') jest poszukiwanem rozwinięciem kąta χ . Stosownie do wzorów (I) zachodzą więc następujące 4 przypadki:

$$1. \quad \operatorname{tang} \chi = \frac{p \sin \gamma}{1 + p \sin \gamma}, \quad \chi = p \sin \gamma - \frac{p^2}{2} \sin 2\gamma + \frac{p^3}{3} \sin 3\gamma - \\ - \frac{p^4}{4} \sin 4\gamma + \dots,$$

$$2. \quad \operatorname{tang} \chi = \frac{-p \sin \gamma}{1 + p \cos \gamma}, \quad \chi = -p \sin \gamma + \frac{p^2}{2} \sin 2\gamma - \frac{p^3}{3} \sin 3\gamma + \\ + \frac{p^4}{4} \sin 4\gamma - \dots,$$

$$3. \quad \operatorname{tang} \chi = \frac{p \sin \gamma}{1 - p \cos \gamma}, \quad \chi = p \sin \gamma + \frac{p^2}{2} \sin 2\gamma + \frac{p^3}{3} \sin 3\gamma + \\ + \frac{p^4}{4} \sin 4\gamma + \dots,$$

$$4. \quad \operatorname{tang} \chi = \frac{-p \sin \gamma}{1 - p \cos \gamma}, \quad \chi = -p \sin \gamma - \frac{p^2}{2} \sin 2\gamma - \frac{p^3}{3} \sin 3\gamma - \\ - \frac{p^4}{4} \sin 4\gamma - \dots \quad (26'')$$

Wzór (26') może też być zastosowany w przypadku, gdy jest

$$\operatorname{tang} \gamma' = m \operatorname{tang} \gamma$$

i należy różnicę $\gamma' - \gamma$ rozwinąć na szereg według wstaw wielokrotności kąta γ . Wyprowadźmy poszukiwane rozwinięcie. Możemy napisać

$$\operatorname{tang} (\gamma' - \gamma) = \frac{\operatorname{tang} \gamma' - \operatorname{tang} \gamma}{1 + \operatorname{tang} \gamma' \operatorname{tang} \gamma} = \frac{(m-1) \operatorname{tang} \gamma}{1 + m \operatorname{tang}^2 \gamma} = \\ = \frac{(m-1) \sin \gamma \cos \gamma}{\cos^2 \gamma + m \sin^2 \gamma},$$

a że jest

$$\cos^2 \gamma + m \sin^2 \gamma = \\ = \frac{1}{2} \cos^2 \gamma (m+1 - m+1) + \frac{1}{2} \sin^2 \gamma (m+1 + m-1) = \\ = \frac{1}{2} (m-1) (\sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) + \frac{1}{2} (m+1) (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) = \\ = \frac{1}{2} (m+1) - \frac{1}{2} (m-1) \cos 2\gamma,$$

więc

$$\operatorname{tang}(\gamma' - \gamma) = \frac{(m-1) \sin 2\gamma}{(m+1) - (m-1) \cos 2\gamma} = \frac{\frac{m-1}{m+1} \sin 2\gamma}{1 - \frac{m-1}{m+1} \cos 2\gamma}.$$

Stosując zatem trzeci ze wzorów (26''), otrzymamy

$$\gamma' = \gamma + \frac{m-1}{m+1} \sin 2\gamma + \frac{1}{2} \left(\frac{m-1}{m+1} \right)^2 \sin 4\gamma + \frac{1}{3} \left(\frac{m-1}{m+1} \right)^3 \sin 6\gamma + \dots \quad (27)$$

Przykład rachunku z pomocą powyższego wzoru znajduje się niżej w ustępie 25.

12. Wzór $q = \sqrt{1 + p^2 + 2p \cos \eta}.$

Do tej postaci sprowadzają się wyrażenia

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{1 + p^2 \pm 2p \cos \eta}, \\ q &= \sqrt{1 + p^2 \pm 2p \sin \eta}, \end{aligned} \quad (o)$$

gdy $p > 0$. Jest mianowicie:

$$\text{gdy } \gamma = 180^\circ - \eta, \sqrt{1 + p^2 + 2p \cos(180^\circ - \eta)} = \sqrt{1 + p^2 - 2p \cos \eta},$$

$$\text{gdy } \gamma = 90^\circ - \eta, \sqrt{1 + p^2 + 2p \cos(90^\circ - \eta)} = \sqrt{1 + p^2 + 2p \sin \eta}$$

$$\text{gdy } \gamma = 90^\circ + \eta, \sqrt{1 + p^2 + 2p \cos(90^\circ + \eta)} = \sqrt{1 + p^2 - 2p \sin \eta}.$$

Z drugiej strony q ma tutaj to samo znaczenie, co we wzorach (m), a więc wzór (26) jest rozwinięciem $\log n q$ według dostaw wielokrotności kąta γ . Gdyby chodziło o rozwinięcie logarytmu zwykłego, t. j. $\log q$, to należy jeszcze tylko poszczególne wyrazy szeregu (26) pomnożyć przez moduł zwykłych logarytmów M . Jak wiadomo, jest

$$M = 0.434294481903251 \dots$$

Biorąc pod uwagę wszystkie możliwe przypadki (o), znajdujemy:

$$\begin{aligned} \log \sqrt{1+p^2+2p \cos \gamma} &= \\ &= M \left\{ p \cos \gamma - \frac{p^2}{2} \cos 2\gamma + \frac{p^3}{3} \cos 3\gamma - \frac{p^4}{4} \cos 4\gamma + \dots \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sqrt{1+p^2-2p \cos \gamma} &= \\ &= M \left\{ -p \cos \gamma - \frac{p^2}{2} \cos 2\gamma - \frac{p^3}{3} \cos 3\gamma - \frac{p^4}{4} \cos 4\gamma - \dots \right\} \quad (26'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sqrt{1+p^2+2p \sin \gamma} &= \\ &= M \left\{ p \sin \gamma + \frac{p^2}{2} \cos 2\gamma - \frac{p^3}{3} \sin 3\gamma - \frac{p^4}{4} \cos 4\gamma + \dots \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sqrt{1+p^2-2p \sin \gamma} &= \\ &= M \left\{ -p \sin \gamma + \frac{p^2}{2} \cos 2\gamma + \frac{p^3}{3} \sin 3\gamma - \frac{p^4}{4} \cos 4\gamma - \dots \right\}. \end{aligned}$$

Do postaci $q = \sqrt{1+p^2+2p \cos \gamma}$ można sprowadzić przez stosowne przekształcenia wiele innych wyrażeń i wtedy rozwinięcie (26) zawsze znajduje zastosowanie. Weźmy pod uwagę tylko jeden przykład, który później będzie potrzebny; mianowicie znajdziemy rozwinięcie na $\log r$, gdy

$$r = \sqrt{1+m \cos \gamma}.$$

Jeżeli $m \leq 1$, to położmy $m = \sin \alpha$. Podstawiając znajdujemy

$$\begin{aligned} \sqrt{1+m \cos \gamma} &= \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \gamma} = \\ &= \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \tan \frac{\alpha}{2} \cos \gamma}, \end{aligned}$$

a zatem

$$\log n r = \log n \cos \frac{\alpha}{2} + \log n \left(\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \tan \frac{\alpha}{2} \cos \gamma} \right)$$

i rozwinięcie wyrażenia $\log \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \tan \frac{\alpha}{2} \cos \gamma}$ otrzymujemy, kładąc we wzorze (26) $p = \tan \frac{\alpha}{2}$.

13. Obliczenie niektórych całek określonych.

a) *Całka*
$$\int_0^{\infty} x^n (1 - e^{-x})^m e^{-x} dx.$$

Ponieważ jest

$$(1 - e^{-x})^m = 1 - me^{-x} + \binom{m}{2} e^{-2x} - \binom{m}{3} e^{-3x} + \dots + (-1)^m e^{-mx},$$

więc zastępując wyrażenie pod znakiem całki przez powyższy wielomian, rozbijamy całkę daną na sumę całek postaci ogólnej

$$A_{n,p} = \int_0^{\infty} x^n e^{-px} dx = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{\infty} (px)^n e^{-px} d(px),$$

albo też, gdy zamiast (px) pisać będziemy x , całka ogólna otrzyma postać

$$A_{n,p} = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx.$$

Całka

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \Gamma(n+1)$$

jest to znana całka Eulera. Jak wiadomo, jest

$$\Gamma(0) = 1, \quad \Gamma(1) = 1,$$

a gdy $n > 1$, jest ogólnie $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n!$

Jest zatem też

$$A_{n,p} = \frac{n!}{p^{n+1}} = \int_0^{\infty} x^n e^{-px} dx, \quad (28)$$

oraz

$$\int_0^{\infty} x^n (1 - e^{-x})^m e^{-x} dx = n! \left\{ 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \binom{m}{1} + \frac{1}{3^{n+1}} \binom{m}{2} - \dots \dots \dots \right. \\ \left. + (-1)^m \cdot \frac{1}{(m+1)^{n+1}} \right\}. \quad (29)$$

W przypadku specjalnym, gdy $n=0$, całka ta sprowadza się do postaci

$$\int_0^{\infty} (1 - e^{-x})^m e^{-x} dx.$$

Wtedy kładąc

$$1 - e^{-x} = y, \text{ a więc } e^{-x} \cdot dx = dy,$$

i wprowadzając dla zmiennej y nowe granice 0 i 1, odpowiadające granicom 0 i ∞ zmiennej x , znajdziemy

$$\int_0^{\infty} (1 - e^{-x})^m e^{-x} dx = \int_0^1 y^m dy = \left[\frac{y^{m+1}}{m+1} \right]_0^1 = \frac{1}{m+1}. \quad (30)$$

b) Całka $k = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$

Celem znalezienia tej całki, napiszmy

$$k = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$$

i pomnóżmy przez siebie te dwa wzory; otrzymamy

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = k^2.$$

Ponieważ porządek, w którym wykonywamy całkowanie, na wynik nie wpływa, więc całkujemy najprzód ze względu na y , uważając x za stałą. Celem scałkowania wprowadzamy nową zmienną u , określoną jak następuje:

$$y = xu, \quad dy = x du.$$

Ponieważ dla tej nowej zmiennej granice całkowania są te same, co dla zmiennej y , więc jest

$$k^2 = \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} x e^{-(1+u^2)x^2} dx.$$

Wartość drugiej z całek powyższego wyrażenia znajdujemy z łatwością. Ponieważ

$$\int t e^{-at^2} dt = -\frac{1}{2a} e^{-at^2},$$

$$\text{więc } \int_0^{\infty} x e^{-(1+u^2)x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1+u^2} e^{-(1+u^2)x^2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+u^2};$$

podstawiając tę wartość w wyrażeniu na k^2 , znajdziemy

$$k^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \left[\text{arctang } u \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Jest zatem

$$k = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad (31)$$

oraz

$$2k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (31')$$

c) *Całka*

$$e^{a^2} \int_a^{\infty} e^{-x^2} dx = \psi(a).$$

W specjalnym przypadku, gdy $a=0$, całka powyższa sprowadza się do wzoru (31), t. j. $\psi(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$. W przypadku ogólnym wartość funkcji $\psi(a)$ otrzymuje się z szeregów, którym można nadawać rozmaitą postać. Rozwijając na przykład na szereg potęgowy funkcję e^{-x^2} , otrzymujemy

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots,$$

że zaś

$$\int_a^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_a^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

więc podstawiając na miejsce e^{-x^2} w pierwszym wyrazie po prawej stronie szereg powyższy i całkując w granicach wskazanych, a na miejsce drugiego wyrazu podstawiając wartość jego według wzoru (31), znajdujemy

$$\psi(a) = e^{a^2} \int_a^{\infty} e^{-x^2} dx = e^{a^2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \left(a - \frac{a^3}{1! 3} + \frac{a^5}{2! 5} - \frac{a^7}{3! 7} + \dots \right) \right\} \quad (32)$$

Szereg (32) jednakże tylko dla niewielkich wartości argumentu a jest zbieżny. Gdy a ma wartość znaczniejszą, należy się uciekać do innych sposobów obliczenia. Nie podajemy tych metod, które podane są na przykład w książce Chauveneta «Manual of Spherical and Practical Astronomy» wyd. 5-te t. I, str. 154—157.

W praktyce rachunkowej nie zachodzi potrzeba obliczania wartości funkcji $\psi(a)$, gdyż istnieją dla niej tablice, obliczone z dokładnością, wystarczającą dla wszystkich potrzeb praktycznych. Pierwszą tablicę funkcji $\psi(a)$ obliczył K r a m p i ogłosił w pracy swej p. t. «Analyse de réfractions etc.» (Strasbourg 1799). Bessel w dziele swem p. t. «Fundamenta astronomiae» podaje wartości funkcji $\psi(a)$ dla wartości a od 0 do 10 na 7 miejsc dziesiętnych. Tablicę funkcji $\psi(a)$ na 10 miejsc dziesiętnych zamieścił Oppolzer w swem dziele «Lehrbuch der Bahnbestimmung etc.» t. II, str. 587. Najobszerniejsze tablice tej funkcji ogłosił R a d a u (Annales de l' Obs. de Paris. — Mémoires, tome XVIII).

d) *Całka.*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m e^{-nx}}{(a^2 + x)^p \sqrt{a^2 + x}} dx = A_{m, p}^{(n)}.$$

Aby znaleźć wartość tej całki, utwórzmy różniczkę

$$\begin{aligned}
 d \{ (a^2 + x)^{-p + \frac{1}{2}} x^{m-1} e^{-nx} \} &= \\
 &= (-p + \frac{1}{2}) (a^2 + x)^{-p - \frac{1}{2}} x^{m-1} e^{-nx} dx + \\
 &\quad + (a^2 + x)^{-p + \frac{1}{2}} \{ (m-1) x^{m-2} e^{-nx} - n x^{m-1} e^{-nx} \} dx = \\
 &= (a^2 + x)^{-p - \frac{1}{2}} e^{-nx} \{ (-p + \frac{1}{2}) x^{m-1} + \\
 &\quad + (a^2 + x) [(m-1) x^{m-2} - n x^{m-1}] \} dx = \\
 &= (a^2 + x)^{-p - \frac{1}{2}} e^{-nx} \{ (-p + \frac{1}{2}) x^{m-1} + a^2 (m-1) x^{m-2} - \\
 &\quad - n a^2 x^{m-1} + (m-1) x^{m-1} - n x^m \} dx = \\
 &= \frac{e^{-nx}}{(a^2 + x)^p \sqrt{a^2 + x}} \{ -n x^m + (m - p - n a^2 - \frac{1}{2}) x^{m-1} + \\
 &\quad + a^2 (m-1) x^{m-2} \} dx. \tag{p}
 \end{aligned}$$

Całkując na obu stronach od 0 do ∞ i uwzględniając, że wartość całki po lewej stronie dla $x=0$ jest zerem, gdy $m > 1$, znajdziemy dla $m \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 n \int_0^\infty \frac{x^m e^{-nx}}{(a^2 + x)^p \sqrt{a^2 + x}} dx &= (m - p - n a^2 - \frac{1}{2}) \int_0^\infty \frac{x^{m-1} e^{-nx}}{(a^2 + x)^p \sqrt{a^2 + x}} dx + \\
 &\quad + a^2 (m-1) \int_0^\infty \frac{x^{m-2} e^{-nx}}{(a^2 + x)^p \sqrt{a^2 + x}} dx,
 \end{aligned}$$

albo też, stosując oznaczenie, użyte w tytule:

$$n A_{m,p}^{(n)} = (m - p - n a^2 - \frac{1}{2}) A_{m-1,p}^{(n)} + a^2 (m-1) A_{m-2,p}^{(n)}. \tag{33}$$

Wzór ten pozwala obliczyć $A_{m,p}^{(n)}$, gdy znane są wartości $A_{m-1,p}^{(n)}$ i $A_{m-2,p}^{(n)}$. Gdyby więc znane były wartości całek $A_{0,p}^{(n)}$ i $A_{1,p}^{(n)}$, to możnaby też obliczyć całki $A_{m,p}^{(n)}$ dla $m = 2, 3, 4, 5$ i t. d.

Znajdźmy zatem przedewszystkiem wartość całki

$$A_{o, p}^{(n)} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-nx}}{(a^2 + x)^p \sqrt{a^2 + x}} dx.$$

Wprowadzamy nową zmienną t , określoną w sposób następujący:

$$a^2 + x = \frac{t^2}{n},$$

$$x = \frac{t^2}{n} - a^2, \quad dx = \frac{2}{n} t dt;$$

jak łatwo sprawdzić, jest

$$x = 0, \quad \text{gdy } t = a\sqrt{n},$$

$$x = \infty, \quad \text{gdy } t = \infty.$$

Podstawiając więc t zamiast x i stosując odpowiednie granice, otrzymujemy:

$$A_{o, p}^{(n)} = 2 \int_{a\sqrt{n}}^{\infty} \frac{e^{-t^2 + a^2 n} n^{p-\frac{1}{2}}}{t^{2p}} dt = 2 n^{p-\frac{1}{2}} e^{a^2 n} \int_{a\sqrt{n}}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{2p}} dt.$$

Oznaczmy jeszcze

$$B_p(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{2p}} dt, \quad (34)$$

to jest

$$A_{o, p}^{(n)} = 2 n^{p-\frac{1}{2}} e^{a^2 n} B_p(a\sqrt{n}). \quad (35)$$

Całkę $A_{1, p}^{(n)}$ znajdujemy, kładąc w równaniu (p) $m=1$. Całka na lewej stronie w granicach od 0 do ∞ ma w tym przypadku wartość $-\frac{1}{a^{2p-1}}$, a więc jest

$$-\frac{1}{a^{2p-1}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-nx}}{(a^2+x)^p \sqrt{a^2+x}} [-nx + (\frac{1}{2} - p - na^2)] dx,$$

czyli

$$n A_{1,p}^{(n)} = \frac{1}{a^{2p-1}} + (\frac{1}{2} - na^2 - p) A_{0,p}^{(n)}. \quad (36)$$

Widzimy, że obliczenie całki $A_{1,p}^{(n)}$ również sprowadza się do znalezienia całki B_p , określonej przez wzór (34). Celem obliczenia wartości tej całki tworzymy

$$d(t^{-2p+1} e^{-t^2}) = \{(-2p+1)t^{-2p} e^{-t^2} - 2t^{-2p+2} e^{-t^2}\} dt.$$

Całkując na obu stronach powyższego równania w granicach od α do ∞ , znajdujemy:

$$-\alpha^{-2p+1} e^{-\alpha^2} = (-2p+1) B_p(\alpha) - 2 B_{p-1}(\alpha),$$

a stąd

$$(-2p+1) B_p(\alpha) = 2 B_{p-1}(\alpha) - \alpha^{-2p+1} e^{-\alpha^2}. \quad (37)$$

Wzór ten, jak widzimy, pozwala obliczyć $B_p(\alpha)$, gdy znane jest $B_{p-1}(\alpha)$ i zatem ostatecznie obliczenie całki $B_p(\alpha)$ da się wykonać, gdy znaną jest wartość $B_0(\alpha)$. Ale widzimy, że dla $p=0$ jest według wzoru (34)

$$B_0(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} e^{-t^2} dt = e^{-\alpha^2} \psi(\alpha),$$

a więc według wzoru (37) otrzymujemy

$$B_1(\alpha) = \alpha^{-1} e^{-\alpha^2} - 2 e^{-\alpha^2} \psi(\alpha),$$

czyli

$$\alpha B_1(\alpha) = e^{-\alpha^2} [1 - 2\alpha \psi(\alpha)]. \quad (38)$$

Mając $B_1(\alpha)$, znajdujemy z pomocą wzoru (37) $B_2(\alpha)$, $B_3(\alpha)$ i t. d.

Skoro więc jesteśmy w stanie obliczyć wartość funkcji $B_p(\alpha)$, stosując przytem tablice wartości funkcji $\psi(\alpha)$, to wzory (35), 36) i (33) pozwalają obliczyć wartość całki $A_{m, p}^{(2)}$.

D. Interpolacja.

14. Zadanie interpolacji. Wzór najogólniejszy. W obliczeniach astronomicznych bardzo często zachodzi potrzeba znalezienia wartości $f(m)$ jakiejś funkcji $f(x)$ na podstawie poszczególnych wartości tej funkcji $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ i t. d. Jeżeli wartości argumentu m przypadają w granicach pomiędzy największą i najmniejszą z wartości a , b , c , ..., dla których wartości funkcji $f(x)$ są dane, to wartość $f(m)$ otrzymuje się przez *interpolację*.

Zadanie interpolacji ogólnie określa się w sposób następujący. Niechaj będą dane wartości funkcji $f(x)$ dla wartości argumentu $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ i dla tych samych argumentów wartości odpowiednio $m_1, m_2, m_3, \dots m_n$ kolejnych pochodnych funkcji $f(x)$, mianowicie

$$\begin{array}{ccccccc} f(a_1), & f(a_2), & f(a_3) & \dots & f(a_n) \\ f'(a_1), & f'(a_2), & f'(a_3) & \dots & f'(a_n) \\ f''(a_1), & f''(a_2), & f''(a_3) & \dots & f''(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(m_1)}(a_1), & f^{(m_2)}(a_2), & f^{(m_3)}(a_3) & \dots & f^{(m_n)}(a_n). \end{array} \quad (9)$$

Na podstawie tych danych należy znaleźć $f(x)$.

Zakładamy, że funkcja $f(x)$ da się rozwinąć na szereg potęgowy i że funkcja $F(x)$ jest funkcją całkowitą najniższego stopnia z tych, które spełniają warunek, że dla n wartości argumentu x , t. j. $a_1, a_2, \dots a_n$, jest

$$\begin{array}{ll} F(ax) & = f(ax) \\ F'(ax) & = f'(ax) \\ F''(ax) & = f''(ax) & x = 1, 2, 3, \dots n. \\ \dots & \dots \\ F^{(m_x)}(a_x) & = f^{(m_x)}(a_x). \end{array}$$

Wartości $F(x)$ w ten sposób określonej funkcji przyjmujemy za przybliżone wartości funkcji $f(x)$.

Otóż zadanie interpolacji polega na znalezieniu tej funkcji $F(x)$ oraz na wyznaczeniu błędu, który popelniamy, gdy zamiast $f(x)$ przyjmujemy $F(x)$. Wielkość dopuszczalnego błędu, a więc też postać funkcji $F(x)$, zależy od natury zagadnienia.

Dla znalezienia funkcji $F(x)$ mamy n wartości samej funkcji $f(x)$ oraz $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ wartości jej pochodnych. Oznaczmy

$$n + m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = p,$$

to p wyraża ogólną liczbę warunków, którym musi czynić za-
dość funkcja $F(x)$. Gdy więc $F(x)$ jest wielomianem $(p - 1)$ -go
stopnia, to liczba współczynników wynosi p , a więc tyleż, co liczba
warunków, które mają być spełnione. Warunki te zatem w sposób
jednoznaczny określają współczynniki wielomianu, a więc i samą
funkcję $F(x)$.

Położmy

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{p-1} x^{p-1} \quad (r)$$

i utwórzmy

$$\begin{aligned} F'(x) &= A_1 + 2 A_2 x + \dots + (p-1) A_{p-1} x^{p-2}, \\ F''(x) &= 2 A_2 + \dots + (p-1)(p-2) A_{p-1} x^{p-3}, \\ &\quad \text{i t. d.} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} F(a_x) &= A_0 + A_1 a_x + A_2 a_x^2 + \dots + A_{p-1} a_x^{p-1}, \\ F'(a_x) &= A_1 + 2 A_2 a_x + \dots + (p-1) A_{p-1} a_x^{p-2}, \\ &\quad \text{i t. d.} \end{aligned}$$

Ponieważ lewe strony tych wyrażeń według założenia są
wiadome, więc widzimy, że każdy z warunków daje jedno rów-
nanie między p niewiadomymi współczynnikami A_0, A_1, \dots, A_{p-1} ;
a ponieważ warunków tych jest też p , więc wyznaczenie współ-
czynników A sprowadza się do rozwiązania układu p równań
z p niewiadomymi. Gdy już współczynniki zostały wyznaczone, to
wartość funkcji $F(x)$ dla jakiegokolwiek wartości argumentu wy-
plywa ze wzoru (r).

15. Szereg Taylora. Wzór Lagrange'a. Weźmy pod uwagę kilka specjalnych przypadków.

1. Połóżmy

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = \dots = a_n = a, \\ m_1 &= m_2 = \dots = m_n = m. \end{aligned}$$

Tabela danych wartości (q) sprowadzi się w tym przypadku do następujących $m+1$ wartości

$$f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(m)}(a). \quad (s)$$

Funkcja całkowita $F(x)$ jest wielomianem m -go stopnia, mianowicie:

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_m x^m. \quad (t)$$

Do wyznaczenia współczynników funkcji $F(x)$ służą dane wartości tej funkcji oraz m jej kolejnych pochodnych dla $x=a$. Przez te same wartości, jak wiemy, wyznacza się też współczynniki szeregu Taylora

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots$$

Wynika stąd, że funkcja całkowita m -go stopnia $F(x)$ ma postać następującą:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x-a)^m. \end{aligned}$$

Do tego wyniku doszlibyśmy też oczywiście, gdybyśmy współczynniki A wyrażenia (t) wyznaczyli, rozwiązując układ równań warunkowych

$$F(a) = f(a), \quad F'(a) = f'(a), \dots, \quad F^{(m)}(a) = f^{(m)}(a).$$

2. Połóżmy

$$m_1 = m_2 = m_3 = \dots = m_n = 0.$$

Tabela wartości (q) w tem założeniu sprowadza się do n wartości samej funkcji $f(x)$ dla n wartości argumentu, mianowicie:

$$f(a_1), \quad f(a_2), \quad f(a_3), \dots, \quad f(a_n) \quad (u)$$

Funkcja $F(x)$ jest więc wielomianem stopnia $(n-1)$ -go i do wyznaczenia jego współczynników służą równania:

$$\begin{aligned} f(a_1) &= A_0 + A_1 a_1 + A_2 a_1^2 + \dots + A_{n-1} a_1^{n-1} \\ f(a_2) &= A_0 + A_1 a_2 + A_2 a_2^2 + \dots + A_{n-1} a_2^{n-1} \\ &\vdots \\ f(a_n) &= A_0 + A_1 a_n + A_2 a_n^2 + \dots + A_{n-1} a_n^{n-1}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie tych równań i podstawienie otrzymanych wartości współczynników A_k w wyrażeniu funkcji $F(x)$ daje wzór następujący:

$$F(x) = X_1 f(a_1) + X_2 f(a_2) + \dots + X_n f(a_n), \quad (39)$$

gdzie ogólnie jest

$$X_i = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\dots(x-a_n)}{(a_1-a_1)(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_{i-1})(a_1-a_{i+1})\dots(a_1-a_n)} \quad (39')$$

Wyrażenie (39) znane jest pod nazwą wzoru interpolacyjnego Lagrange'a. Wzór ten, jak widzimy, pozwala znaleźć przybliżoną wartość funkcji $f(x)$ dla dowolnej wartości x , gdy znany jest szereg jej wartości $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$.

Wzór (39) składa się z tylu wyrazów, ile jest danych wartości funkcji $f(x)$; gdy więc takich danych wartości przybywa, wzrasta też liczba wyrazów wzoru Lagrange'a. Ale zmienia się przytem także postać współczynników wyrazów. Aby uniknąć wynikającej stąd niedogodności, kładziemy

$$F(x) = B_0 + B_1(x - a_1) + B_2(x - a_1)(x - a_2) + \dots + B_{n-1}(x - a_1) \dots (x - a_{n-1}). \quad (v)$$

i zatem jest dla dowolnej liczby danych poszczególnych wartości $f(x)$

$$B_0 + B_1(x - a_1) + \dots + B_{n-1}(x - a_1) \dots (x - a_{n-1}) = \\ = X_1 f(a_1) + X_2 f(a_2) + \dots + X_n f(a_n).$$

Otrzymujemy stąd

$$n=1: B_0 = f(a_1),$$

$$n=2: B_0 + B_1(x - a_1) = f(a_1) \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} + f(a_2) \cdot \frac{x - a_1}{a_2 - a_1},$$

$$n=3: B_0 + B_1(x - a_1) + B_2(x - a_1)(x - a_2) =$$

$$= f(a_1) \cdot \frac{(x - a_2)(x - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + f(a_2) \cdot \frac{(x - a_1)(x - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} + \\ + f(a_3) \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)} \quad \text{i t. d.}$$

a dalej:

$$f(a_1) = B_0$$

$$f(a_2) = B_0 + B_1(a_2 - a_1)$$

$$f(a_3) = B_0 + B_1(a_3 - a_1) + B_2(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \quad (\text{w})$$

.....

$$f(a_n) = B_0 + B_1(a_n - a_1) + B_2(a_n - a_1)(a_n - a_2) + \dots + \\ + B_{n-1}(a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}).$$

Skoro znane jest B_0 , to z drugiego równania (w) wypływa B_1 , z trzeciego B_2 i t. d. Oznaczmy ogólnie

$$f(x) = f_0(x),$$

to jest też

$$B_0 = f_0(a_1),$$

i z drugiego równania (w) wypływa

$$B_1 = \frac{f_0(a_2) - f_0(a_1)}{a_2 - a_1},$$

lub gdy oznaczymy

$$f_1(x) = \frac{f_0(x) - f_0(a_1)}{x - a_1},$$

to jest też

$$B_1 = f_1(a_2).$$

Podobnie wypływa z trzeciego równania (w)

$$B_2 = \frac{f_0(a_3) - f_0(a_1)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)} - \frac{f_1(a_2)}{a_3 - a_2} = \frac{f_1(a_3) - f_1(a_2)}{a_3 - a_2}.$$

Gdy więc znowu oznaczmy

$$f_2(x) = \frac{f_1(x) - f_1(a_2)}{x - a_2},$$

to jest

$$B_2 = f_2(a_3).$$

Postępując dalej w ten sam sposób i kładąc ogólnie

$$f_{n-1}(x) = \frac{f_{n-2}(x) - f_{n-2}(a_{n-1})}{x - a_{n-1}}, \quad (40)$$

otrzymamy też ogólnie

$$B_{n-1} = f_{n-1}(a_n), \quad (41)$$

a wzór interpolacyjny (39) otrzyma, zgodnie ze wzorem (v), postać następującą:

$$F(x) = f_0(a_1) + (x - a_1)f_1(a_2) + (x - a_1)(x - a_2)f_2(a_3) + \dots \\ + (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n-1})f_{n-1}(a_n) \quad (42)$$

Widzimy, że liczba wyrazów w tym wzorze zależy od liczby danych wartości funkcji $f(x)$, ale wyrazy przybywające nie wpływają na wartość wyrazów poprzednich.

16. Wzór interpolacyjny Newtona. Weźmy pod uwagę teraz następujący przypadek specjalny:

3. Załóżmy, że wartości argumentów

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

idą po sobie kolejno w jednakowych odstępach. Gdy zatem h oznacza stałą liczbę, to można wyrazić

$$a_1 = a, \quad a_2 = a + h, \quad a_3 = a + 2h, \dots, \quad a_n = a + (n-1)h. \quad (x)$$

Przy tem założeniu funkcja $f_x(a_{x+1})$, określona ogólnie przez wzór (40), ma dla $x=0, 1, 2, \dots$ postać następującą:

$$f_0(a_1) = f(a),$$

$$f_1(a_2) = \frac{f_0(a_2) - f_0(a_1)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

$$\begin{aligned} f_2(a_3) &= \frac{f_1(a_3) - f_1(a_2)}{h} = \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right\} = \\ &= \frac{1}{1.2h^2} \{ f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(a_4) &= \frac{f_2(a_4) - f_2(a_3)}{h} = \frac{1}{h} \left\{ \frac{f_1(a_4) - f_1(a_2)}{2h} - \frac{f_1(a_3) - f_1(a_2)}{h} \right\} = \\ &= \frac{1}{1.2h^2} \{ f_1(a_4) - 2f_1(a_3) + f_1(a_2) \} = \\ &= \frac{1}{1.2h^2} \left\{ \frac{f(a+3h) - f(a)}{3h} - \frac{f(a+2h) - f(a)}{h} + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right\} = \\ &= \frac{1}{1.2.3h^3} \{ f(a+3h) - f(a) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) \} \quad (y) \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} f_{n-1}(a_n) &= \frac{1}{(n-1)!h^{n-1}} \left\{ f[a+(n-1)h] - \binom{n-1}{1} f[a+(n-2)h] + \right. \\ &\quad \left. + \binom{n-1}{2} f[a+(n-3)h] - \dots \pm f(a) \right\} \end{aligned}$$

Podstawiając we wzorze (42) wartości a_x według wzorów (x), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(a) + (x-a)f_1(a+h) + (x-a)(x-a-h)f_2(a+2h) + \\ &\quad + (x-a)(x-a-h)(x-a-2h)f_3(a+3h) + \dots \\ &\quad + (x-a)\dots [x-a-(n-2)h]f_{n-1}[a+(n-1)h], \quad (43) \end{aligned}$$

gdzie ogólnie jest

$$f_x(a + \kappa h) = \frac{1}{\kappa! h^\kappa} \left\{ f(a + \kappa h) - \binom{\kappa}{1} f[a + (\kappa - 1)h] + \right. \\ \left. + \binom{\kappa}{2} f[a + (\kappa - 2)h] + \dots \pm f(a) \right\} \quad (44)$$

Wzór (43) w połączeniu ze wzorem (44) jest to wzór interpolacyjny Newtona przy równych odstępach argumentu. Zazwyczaj jednakże bywa on stosowany w innej postaci.

Niech mianowicie będzie

$$f(a), \quad f(a + h), \quad f(a + 2h), \quad \dots$$

szereg wartości funkcji $f(x)$ dla wartości argumentu $a, a + h, a + 2h$, i t. d., i oznaczmy

$$\begin{aligned} f(a + h) - f(a) &= \Delta f(a), \\ f(a + 2h) - f(a + h) &= \Delta f(a + h), \\ f(a + 3h) - f(a + 2h) &= \Delta f(a + 2h), \\ &\dots \end{aligned}$$

czyli ogólnie

$$f(x + h) - f(x) = \Delta f(x).$$

Wyrażenia postaci $\Delta f(x)$ nazywają się *różnicami pierwszego rzędu*, lub też *pierwszemi różnicami* funkcji $f(x)$.

Podobnie oznaczać będziemy

$$\begin{aligned} \Delta f(a + h) - \Delta f(a) &= \Delta^2 f(a) \\ \Delta f(a + 2h) - \Delta f(a + h) &= \Delta^2 f(a + h) \\ \Delta f(a + 3h) - \Delta f(a + 2h) &= \Delta^2 f(a + 2h) \\ &\dots \end{aligned}$$

i ogólnie

$$\Delta f(x + h) - \Delta f(x) = \Delta^2 f(x).$$

Wyrażenia postaci $\Delta^2 f(x)$ są to *różnice drugiego rzędu* czyli *drugie różnice* funkcji $f(x)$. Ogólnie różnicami n -go rzędu są więc wyrażenia postaci

$$\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x).$$

Różnice wszystkich rzędów otrzymuje się z wartości funkcji $f(x)$ przez odejmowanie wartości danej od bezpośrednio pod nią stojącej według następującego schematu:

$$\begin{array}{cccccccc}
 f(a) & & & & & & & \\
 & \Delta f(a) & & & & & & \\
 f(a+h) & & \Delta^2 f(a) & & & & & \\
 & \Delta f(a+h) & & \Delta^3 f(a) & & & & \\
 f(a+2h) & & \Delta^2 f(a+h) & & \Delta^4 f(a) & & & \\
 & \Delta f(a+2h) & & \Delta^3 f(a+h) & & \Delta^5 f(a) & & \\
 f(a+3h) & & \Delta^2 f(a+2h) & & \Delta^4 f(a+h) & & & \\
 & \Delta f(a+3h) & & \Delta^3 f(a+2h) & & \dots & & \\
 f(a+4h) & & \Delta^2 f(a+3h) & & \dots & & & \\
 & \Delta f(a+4h) & & \dots & & & & \\
 f(a+5h) & & \dots & & & & & \\
 \dots & & \dots & & & & & \\
 \dots & & \dots & & & & &
 \end{array}$$

Otóż łatwo wykazać, że wyrażenie, zawarte w klamrze $\{ \}$ we wzorze (44), jest κ -tą różnicą funkcji $f(x)$ dla $x=a$; to znaczy, że jest

$$f_{\kappa}(a + \kappa h) = \frac{1}{\kappa! h^{\kappa}} \Delta^{\kappa} f(a).$$

Jest bowiem dla $\kappa=1, 2, 3$, gdy uwzględnimy wzory (y),

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = h f_1(x+h),$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = \\ &= 2! h^2 f_2(x+2h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 f(x) &= \Delta^2 f(x+h) - \Delta^2 f(x) = \Delta f(x+2h) - 2\Delta f(x+h) + \Delta f(x) = \\ &= f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x) = \\ &= 3! h^3 f_3(x+3h), \end{aligned}$$

czyli

$$f_1(x+h) = \frac{1}{h} \Delta f(x),$$

$$f_2(x+2h) = \frac{1}{2!h^2} \Delta^2 f(x),$$

$$f_3(x+3h) = \frac{1}{3!h^3} \Delta^3 f(x).$$

Gdy więc wzory te są ważne dla $\kappa=1, 2, 3$, to ważne są one też dla $\kappa=4, 5$ i t. d., i jest zatem też ogólnie

$$f_\kappa(x+\kappa h) = \frac{1}{\kappa!h^\kappa} \Delta^\kappa f(x). \quad (45)$$

Wobec tego wzór (43) otrzymuje postać następującą:

$$\begin{aligned} F(x) = & f(a) + \frac{x-a}{h} \Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2!h^2} \Delta^2 f(a) + \dots \\ & + \frac{(x-a)(x-a-h) \dots [x-a-(n-2)h]}{(n-1)!h^{n-1}} \Delta^{n-1} f(a) \end{aligned} \quad (46)$$

Dla funkcji $f(x)$, dającej się przedstawić w sposób podobny, mogą być utworzone jeszcze dalsze różnice, wskutek czego przybędą nowe wyrazy; gdy jednakże dla pewnego $p > n$ jest $\Delta^p f(x) = 0$, to można przyjąć $F(x) = f(x)$ oraz pisać

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + \frac{x-a}{h} \Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2!h^2} \Delta^2 f(a) + \\ & + \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{3!h^3} \Delta^3 f(a) + \dots, \end{aligned}$$

poprzestając na tych wyrazach, które przy żądanej dokładności rachunków pominięte być nie mogą.

Kładąc jeszcze

$$x = a + mh,$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} f(a+mh) = & f(a) + \frac{m}{1} \Delta f(a) + \frac{m(m-1)}{2!} \Delta^2 f(a) + \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \Delta^3 f(a) + \dots \end{aligned} \quad (47)$$

Wzorowi (47) można nadać np. taką postać, ażeby występowały w nim te różnice rzędu parzystego, które stoją w tym samym wierszu, co $f(a)$, t. j. $\Delta^2 f(a-h)$, $\Delta^4 f(a-2h)$, $\Delta^6 f(a-3h)$, Do utworzenia tych różnic potrzebne są odpowiednio po 1, 2, 3, ... wartości funkcji $f(x)$ dla argumentów mniejszych i większych niż a . Różnice rzędu nieparzystego można obrać dowolnie, t. j. albo te, które stoją w tym wierszu, co $\Delta f(a-h)$, lub też w tym wierszu, co $\Delta f(a)$. Gdy mają we wzorze występować różnice wiersza niższego niż $f(a)$, jest wówczas:

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(a) &= \Delta^2 f(a-h) + \Delta^3 f(a-h), \\ \Delta^3 f(a) &= \Delta^3 f(a-h) + \Delta^4 f(a-2h) + \Delta^5 f(a-2h), \\ \Delta^4 f(a) &= \Delta^4 f(a-h) + \Delta^5 f(a-h) = \\ &= \Delta^4 f(a-2h) + 2\Delta^5 f(a-2h) + \Delta^6 f(a-3h) + \Delta^7 f(a-3h) \\ &\text{i t. d.}\end{aligned}$$

Podstawiając we wzorze (47) powyższe wartości, znajdujemy:

$$\begin{aligned}f(a+mh) &= f(a) + \frac{m}{1} \Delta f(a) + \frac{m(m-1)}{2!} \Delta^2 f(a-h) + \\ &+ \left[\binom{m}{2} + \binom{m}{3} \right] \Delta^3 f(a-h) + \left[\binom{m}{3} + \binom{m}{4} \right] \Delta^4 f(a-2h) + \\ &+ \left[\binom{m}{3} + 2\binom{m}{4} + \binom{m}{5} \right] \Delta^5 f(a-2h) + \dots\end{aligned}$$

i po łatwych redukcjach

$$\begin{aligned}f(a+mh) &= f(a) + \binom{m}{1} \Delta f(a) + \binom{m}{2} \Delta^2 f(a-h) + \\ &+ \binom{m}{2} \frac{m+1}{3} \Delta^3 f(a-h) + \binom{m}{3} \frac{m+1}{4} \Delta^4 f(a-2h) + \\ &+ \binom{m}{3} \frac{(m+1)(m+2)}{4 \cdot 5} \Delta^5 f(a-2h) + \dots \quad (47')\end{aligned}$$

Gdy zaś we wzorze interpolacyjnym występować mają różnice nieparzystego rzędu, które stoją w wierszu wyższym, niż $f(a)$, jest wtedy:

$$\begin{aligned}
\Delta f(a) &= \Delta f(a-h) + \Delta^2 f(a-h), \\
\Delta^2 f(a) &= \Delta^2 f(a-h) + \Delta^3 f(a-2h) + \Delta^4 f(a-2h), \\
\Delta^3 f(a) &= \Delta^3 f(a-2h) + 2\Delta^4 f(a-2h) + \Delta^5 f(a-3h) + \Delta^6 f(a-3h), \\
\Delta^4 f(a) &= \Delta^4 f(a-2h) + 2\Delta^5 f(a-3h) + 3\Delta^6 f(a-3h) + \\
&\quad + \Delta^7 f(a-4h) + \Delta^8 f(a-4h), \\
&\text{i t. d.}
\end{aligned}$$

Po podstawieniu powyższych wartości poszczególnych różnic we wzorze (47) i redukcji otrzymuje się wzór następujący:

$$\begin{aligned}
f(a+mh) &= f(a) + m\Delta f(a-h) + \binom{m}{1} \frac{m+1}{2} \Delta^2 f(a-h) + \\
&+ \binom{m}{2} \frac{m+1}{3} \Delta^3 f(a-2h) + \binom{m}{2} \frac{(m+1)(m+2)}{3 \cdot 4} \Delta^4 f(a-2h) + \dots \quad (47'')
\end{aligned}$$

Przedział h zawsze uważamy za wartość dodatnią; jeżeli więc $m > 0$, to $a+mh > a$, i znajdowanie wartości $f(a+mh)$ stanowi *interpolację wprzód*; gdy zaś $m < 0$, to $a+mh < a$, i mamy w tym przypadku *interpolację wstecz*. Pisząc w tem ostatniem założeniu we wzorze (47'') — m zamiast m , otrzymamy

$$\begin{aligned}
f(a-mh) &= f(a) - \binom{m}{1} \Delta f(a-h) + \binom{m}{2} \Delta^2 f(a-h) - \\
&- \binom{m}{2} \frac{m+1}{3} \Delta^3 f(a-2h) + \binom{m}{3} \frac{m+1}{4} \Delta^4 f(a-2h) - \dots \quad (47''')
\end{aligned}$$

Czy w danym przypadku korzystniejsze jest stosowanie interpolacji wprzód czy wstecz, zależy to od bezwzględnej wartości m ; im wartość bezwzględna jest mniejsza, tem wzór interpolacyjny jest szybciej zbieżny.

Gdy $m = \frac{1}{2}$, otrzymujemy ze wzorów (47) wartość funkcji dla środka przedziału. Taka *interpolacja na środek* znajduje bardzo często zastosowanie, na przykład wtedy, gdy obliczając tablice jakiejś funkcji, chcemy przedział argumentu zmniejszyć do połowy.

Wzór (47') dla $m = \frac{1}{2}$ otrzymuje postać następującą:

$$\begin{aligned}
 1. \quad f(a + \tfrac{1}{2}h) = & f(a) + \tfrac{1}{2} \Delta f(a) - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2!} \cdot \Delta^2 f(a - h) - \\
 & - \frac{(\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{3}{2}}{3!} \Delta^3 f(a - h) + \frac{(\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{3}{2})^2}{4!} \Delta^4 f(a - 2h) + \\
 & + \frac{(\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{3}{2})^2 \cdot \frac{5}{2}}{5!} \Delta^5 f(a - 2h) - \dots
 \end{aligned}$$

Gdy zaś we wzorze (47'') położymy $m = \frac{1}{2}$ i pisać będziemy w nim wszędzie $a + h$ zamiast a , to otrzymamy

$$\begin{aligned}
 2. \quad f(a + \tfrac{1}{2}h) = & f(a + h) - \tfrac{1}{2} \Delta f(a) - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2!} \Delta^2 f(a) + \\
 & + \frac{(\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{3}{2}}{3!} \Delta^3 f(a - h) + \frac{(\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{3}{2})^2}{4!} \Delta^4 f(a - h) - \\
 & - \frac{(\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{3}{2})^2 \cdot \frac{5}{2}}{5!} \Delta^5 f(a - 2h) - \dots
 \end{aligned}$$

Tworząc średnią arytmetyczną z powyższych dwóch wzorów 1. i 2., widzimy, że różnice nieparzystych rzędów w średniej się znoszą, wskutek czego wypływa wzór następujący:

$$\begin{aligned}
 f(a + \tfrac{1}{2}h) = & \frac{f(a) + f(a + h)}{2} - \frac{\frac{1}{8} \{ \Delta^2 f(a - h) + \Delta^2 f(a) \}}{2} + \\
 & + \frac{\frac{3}{128} \{ \Delta^4 f(a - 2h) + \Delta^4 f(a - h) \}}{2} - \frac{\frac{5}{1024} \{ \Delta^6 f(a - 3h) + \Delta^6 f(a - 2h) \}}{2} + \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{48}$$

Jest to wzór nadzwyczaj dogodny, ponieważ występują w nim, prócz średniej arytmetycznej wartości funkcji $f(a)$ i $f(a + h)$, jeszcze tylko średnie arytmetyczne różnic rzędu parzystego, stojących w tych samych wierszach, co $f(a)$ i $f(a + h)$.

18. Różniczkowanie liczbowe. Gdy dany jest szereg wartości liczbowych jakiejś funkcji dla wartości argumentu, postępujących w równych odstępach, to, pomimo że sama postać funkcji może być nieznana, można dla tych samych wartości

argumentu, dla których dane są wartości funkcji, znaleźć też wartości liczbowe pochodnych tej funkcji. Na tem polega *różniczkowanie liczbowe*, które w wielu zagadnieniach astronomicznych znajduje zastosowanie.

Gdy dla jakiejś funkcji $f(x)$ oraz jej pochodnych $f'(x)$, $f''(x)$ i t. d. znane są wartości dla $x=a$, to według wzoru Taylora jest

$$f(a+mh) = f(a) + \frac{mh}{1!} f'(a) + \frac{m^2 h^2}{2!} f''(a) + \frac{m^3 h^3}{3!} f'''(a) + \dots,$$

a według wzoru interpolacyjnego Newtona (47)

$$\begin{aligned} f(a+mh) = f(a) + \binom{m}{1} \Delta f(a) + \binom{m}{2} \Delta^2 f(a) + \binom{m}{3} \Delta^3 f(a) + \\ + \binom{m}{4} \Delta^4 f(a) + \dots \end{aligned}$$

Z porównania tych dwóch wzorów wynika:

$$\begin{aligned} \frac{mh}{1!} f'(a) + \frac{m^2 h^2}{2!} f''(a) + \frac{m^3 h^3}{3!} f'''(a) + \dots = \binom{m}{1} \Delta f(a) + \\ + \binom{m}{2} \Delta^2 f(a) + \binom{m}{3} \Delta^3 f(a) + \dots = m \left[\Delta f(a) - \frac{1}{2} \Delta^2 f(a) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \Delta^3 f(a) - \frac{1}{4} \Delta^4 f(a) + \frac{1}{5} \Delta^5 f(a) - \dots \right] + \\ + m^2 \left[\frac{1}{2!} \Delta^2 f(a) - \frac{3}{3!} \Delta^3 f(a) + \frac{11}{4!} \Delta^4 f(a) - \frac{50}{5!} \Delta^5 f(a) + \dots \right] + \\ + m^3 \left[\frac{1}{3!} \Delta^3 f(a) - \frac{6}{4!} \Delta^4 f(a) + \frac{35}{5!} \Delta^5 f(a) - \dots \right] + \\ + m^4 \left[\frac{1}{4!} \Delta^4 f(a) - \frac{10}{5!} \Delta^5 f(a) + \dots \right] + m^5 \left[\frac{1}{5!} \Delta^5 f(a) - \dots \right] + \dots; \end{aligned}$$

Gdy przyrównamy do siebie współczynniki tych samych potęg m po obu stronach powyższego równania, to po uproszczeniu otrzymamy:

$$f'(a) = \frac{1}{h} \left[\Delta f(a) - \frac{1}{2} \Delta^2 f(a) + \frac{1}{3} \Delta^3 f(a) - \frac{1}{4} \Delta^4 f(a) + \dots \right],$$

$$f''(a) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 f(a) - \Delta^3 f(a) + \frac{11}{12} \Delta^4 f(a) - \frac{5}{6} \Delta^5 f(a) + \dots \right],$$

$$f'''(a) = \frac{1}{h^3} \left[\Delta^3 f(a) - \frac{3}{2} \Delta^4 f(a) + \frac{7}{4} \Delta^5 f(a) - \dots \right], \quad (49)$$

$$f^{(IV)}(a) = \frac{1}{h^4} \left[\Delta^4 f(a) - 2 \Delta^5 f(a) + \dots \right],$$

$$f^{(V)}(a) = \frac{1}{h^5} \left[\Delta^5 f(a) - \dots \right],$$

i t. d.

W sposób podobny każdy ze wzorów (47) prowadzi do systemu wzorów na pochodne $f^{(x)}(a)$, które różnią się między sobą pod względem różnic, jakie w nich występują. Wzór (47') daje:

$$f'(a) = \frac{1}{h} \left[\Delta f(a) - \frac{1}{2} \Delta^2 f(a-h) - \frac{1}{6} \Delta^3 f(a-h) + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \Delta^4 f(a-2h) + \frac{1}{30} \Delta^5 f(a-2h) - \dots \right],$$

$$f''(a) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 f(a-h) - \frac{1}{12} \Delta^4 f(a-2h) - \dots \right],$$

$$f'''(a) = \frac{1}{h^3} \left[\Delta^3 f(a-h) - \frac{1}{2} \Delta^4 f(a-2h) - \frac{1}{4} \Delta^5 f(a-2h) + \dots \right],$$

$$f^{(IV)}(a) = \frac{1}{h^4} \left[\Delta^4 f(a-2h) - \dots \right], \quad (49')$$

$$f^{(V)}(a) = \frac{1}{h^5} \left[\Delta^5 f(a-2h) + \dots \right],$$

.....

A gdy wyjdziemy od wzoru (47''), znajdziemy:

$$f'(a) = \frac{1}{h} \left[\Delta f(a-h) + \frac{1}{2} \Delta^2 f(a-h) - \frac{1}{6} \Delta^3 f(a-2h) - \right. \\ \left. - \frac{1}{12} \Delta^4 f(a-2h) + \dots \right],$$

$$f''(a) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 f(a-h) - \frac{1}{12} \Delta^4 f(a-2h) - \dots \right],$$

$$f'''(a) = \frac{1}{h^3} \left[\Delta^3 f(a-2h) + \frac{1}{2} \Delta^4 f(a-2h) - \dots \right], \quad (49'')$$

$$f^{(IV)}(a) = \frac{1}{h^4} \left[\Delta^4 f(a-2h) - \dots \right],$$

$$f^{(V)}(a) = \frac{1}{h^5} \left[\Delta^5 f(a-3h) + \dots \right],$$

.....

Ze wzoru (47''') nie otrzymuje się nowych wzorów na pochodne, gdyż występują w nim te same różnice, co we wzorze (47'').

W systemach wzorów (49') i (49''), jak widzimy, wzory na pochodne rzędów parzystych są identyczne. W wyrażeniach pochodnych rzędów nieparzystych występują te same różnice rzędów parzystych, lecz ze znakami przeciwnymi. Otrzymamy więc bardzo dogodne wzory na te pochodne, tworząc średnie arytmetyczne wartości, określonych przez wzory (49') i (49''). Nowy w ten sposób utworzony system wzorów jest następujący:

$$f'(a) = \frac{1}{h} \left[\frac{\Delta f(a-h) + \Delta f(a)}{2} - \frac{1}{6} \frac{\Delta^3 f(a-2h) + \Delta^3 f(a-h)}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{30} \frac{\Delta^5 f(a-3h) + \Delta^5 f(a-2h)}{2} - \dots \right],$$

$$f''(a) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 f(a-h) - \frac{1}{12} \Delta^4 f(a-2h) - \dots \right], \quad (49''')$$

$$f'''(a) = \frac{1}{h^3} \left[\frac{\Delta^3 f(a-2h) + \Delta^3 f(a-h)}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta^5 f(a-3h) + \Delta^5 f(a-2h)}{2} + \dots \right],$$

$$f^{(IV)}(a) = \frac{1}{h^4} \left[\Delta^4 f(a-2h) - \dots \right],$$

$$f^{(V)}(a) = \frac{1}{h^5} \left[\frac{\Delta^5 f(a-3h) + \Delta^5 f(a-2h)}{2} - \dots \right],$$

.....

W tych ostatnich wzorach wszystkie wartości pochodnych wyrażone są przez różnice, stojące w schemacie różnic w dwóch sąsiednich wierszach, pomiędzy którymi znajduje się wartość funkcji $f(a)$.

19. Przykłady do ustępów 16, 17 i 18. Oznaczmy

$$f(a+x) = \delta(x), \quad f(a-x) = \delta(-x), \quad f(a) = \delta(0)$$

i niechaj będą dane:

$$\begin{aligned} \delta(-2) &= 20^\circ 31' 3.'' 5, & \delta(-\tfrac{1}{2}) &= 24^\circ 59' 22.'' 3, & \delta(1) &= 26^\circ 55' 28.'' 0, \\ \delta(-\tfrac{3}{2}) &= 22^\circ 15' 44.'' 1, & \delta(0) &= 25^\circ 56' 7.'' 0, & \delta(\tfrac{3}{2}) &= 26^\circ 57' 15.'' 9, \\ \delta(-1) &= 23^\circ 45' 34.'' 1, & \delta(\tfrac{1}{2}) &= 26^\circ 34' 59.'' 8, & \delta(2) &= 26^\circ 40' 25.'' 6. \end{aligned}$$

Znaleźć

$$f(a+0.34) = \delta(0.34).$$

Mamy tu 9 danych wartości funkcji $\delta(x)$ dla wartości argumentu, wzrastających w stałym odstępnie $\frac{1}{2}$. Gdy więc $h = \frac{1}{2}$, a $mh = 0.34$, to jest

$$m = 0.68, \quad \delta(0.34) = f(a + 0.68h).$$

Utwórzmy schemat wartości funkcji oraz różnic według (z).

f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$	$\Delta^6 f$	$\Delta^7 f$	$\Delta^8 f$
$f(a - 4h) = 20^\circ 31' 3.'' 5$								
	$+ 1^\circ 44' 40.'' 6$							
$f(a - 3h) = 22^\circ 15' 44.'' 1$		$- 14' 50.'' 6$						
	$+ 1^\circ 29' 50.'' 0$		$- 1' 11.'' 2$					
$f(a - 2h) = 23^\circ 45' 34.'' 1$		$- 16' 1.'' 8$		$+ 9.'' 5$				
	$+ 1^\circ 13' 48.'' 2$		$- 1' 1.'' 7$		$+ 3.'' 8$			
$f(a - h) = 24^\circ 59' 22.'' 3$		$- 17' 3.'' 5$		$+ 13.'' 3$		$- 1.'' 4$		
	$+ 0^\circ 56' 44.'' 7$		$- 0' 48.'' 4$		$+ 2.'' 4$		$+ 0.'' 3$	
$f(a) = 25^\circ 56' 7.'' 0$		$- 17' 51.'' 9$		$+ 15.'' 7$		$- 1.'' 1$		$+ 0.'' 3$
	$+ 0^\circ 38' 52.'' 8$		$- 0' 32.'' 7$		$+ 1.'' 3$		$+ 0.'' 6$	
$f(a + h) = 26^\circ 34' 59.'' 8$		$- 18' 24.'' 6$		$+ 17.'' 0$		$- 0.'' 5$		$- 0.'' 8$
	$+ 0^\circ 20' 28.'' 2$		$- 0' 15.'' 7$		$+ 0.'' 8$		$- 0.'' 2$	
$f(a + 2h) = 26^\circ 55' 28.'' 0$		$- 18' 40.'' 3$		$+ 17.'' 8$		$- 0.'' 7$		
	$+ 0^\circ 1' 47.'' 9$		$+ 0' 2.'' 1$		$+ 0.'' 1$			
$f(a + 3h) = 26^\circ 57' 15.'' 9$		$- 18' 38.'' 2$		$+ 17.'' 9$				
	$- 0^\circ 16' 50.'' 3$		$+ 0' 20.'' 0$					
$f(a + 4h) = 26^\circ 40' 25.'' 6$		$- 18' 18.'' 2$						
	$- 0^\circ 35' 8.'' 5$							
$f(a + 5h) = 26^\circ 5' 17.'' 1$								

Zastosujmy najprzód wzór (47). W tym przykładzie jest

$$f(a) = 25^{\circ} 56' 7.'' 0, \quad \Delta f(a) = 0^{\circ} 38' 52.'' 8, \quad \Delta^2 f(a) = -18' 24.'' 6, \\ \Delta^3 f(a) = -0' 15.'' 7, \quad \Delta^4 f(a) = +17.'' 8, \quad \Delta^5 f(a) = +0.'' 1.$$

Spółczynniki wzoru (47) dla $m = 0.68$ mają wartości następujące:

$$\begin{aligned} \binom{m}{2} &= -\frac{0.68 \times 0.32}{2} = -0.10880 \\ \binom{m}{3} &= +\frac{0.68 \times 0.32 \times 1.32}{6} = 0.0479 \\ \binom{m}{4} &= -\frac{0.68 \times 0.32 \times 1.32 \times 2.32}{24} = -0.0278 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} f(a) &= 25^{\circ} 56' 7.'' 0 \\ m \Delta f(a) &= + 26' 26.'' 3 \\ \binom{m}{2} \Delta^2 f(a) &= + 2' 0.'' 2 \\ \binom{m}{3} \Delta^3 f(a) &= - 0.'' 7 \\ \binom{m}{4} \Delta^4 f(a) &= - 0.'' 4 \\ &\dots \dots \dots \\ \hline \delta(0.34) &= 26^{\circ} 24' 32.'' 4 \end{aligned}$$

Zastosowanie wzoru Newtona ułatwia tablica II (na końcu książki), zawierająca wartości współczynników poszczególnych wyrazów wzoru dla różnych wartości m .

Celem zastosowania wzoru (47') mamy w naszym przykładzie

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(a - h) &= -17' 51.'' 9, & \Delta^3 f(a - h) &= -0' 32.'' 7 \\ \Delta^4 f(a - 2h) &= +15.'' 7, & \Delta^5 f(a - 2h) &= +1.'' 3; \end{aligned}$$

spółczynniki kolejnych wyrazów wzoru obliczamy, jak następuje:

$$\binom{m}{2} \frac{m+1}{3} = - \frac{0.1088 \times 1.68}{3} = -0.0609$$

$$\binom{m}{3} \frac{m+1}{4} = - \frac{0.0479 \times 1.68}{4} = +0.0201$$

$$\binom{m}{3} \frac{m+1}{4} \cdot \frac{m+2}{5} = \frac{0.0201 \times 2.68}{5} = +0.0108$$

.

Mamy więc

$$f(a) = 25^{\circ} 56' 7'' 0$$

$$m \Delta f(a) = + 26' 26'' 3$$

$$\binom{m}{2} \Delta^2 f(a - h) = + 1' 56'' 6$$

$$\binom{m}{2} \frac{m+1}{3} \Delta^3 f(a - h) = + 2'' 2$$

$$\binom{m}{3} \frac{m+1}{4} \cdot \Delta^4 f(a - 2h) = + 0'' 3$$

$$\delta(0.34) = 26^{\circ} 24' 32'' 4$$

We wzorze (47'') występują nieparzyste różnice wiersza, stojącego ponad $f(a)$, a mianowicie:

$$\Delta f(a - h) = 0^{\circ} 56' 44'' 7, \quad \Delta^3 f(a - 2h) = - 0' 48'' 4;$$

wartości współczynników są następujące:

$$m = 0.68$$

$$\frac{m(m+1)}{2} = \frac{0.68 \times 1.68}{2} = 0.5712$$

$$\binom{m}{2} \frac{m+1}{3} = - \frac{0.1088 \times 1.68}{3} = -0.0609$$

$$\binom{m}{2} \frac{(m+1)(m+2)}{3.4} = - \frac{0.0609 \times 2.68}{4} = -0.0407;$$

otrzymamy więc

$$\begin{aligned}
 f(a) &= 25^{\circ} 56' 7.'' 0 \\
 m \Delta f(a - h) &= + 38' 35.'' 2 \\
 \binom{m}{1} \frac{m+1}{2} \Delta^2 f(a - h) &= - 10' 12.'' 1 \\
 \binom{m}{2} \frac{m+1}{3} \Delta^3 f(a - 2h) &= + 2.'' 9 \\
 \binom{m}{2} \frac{(m+1)(m+2)}{3 \cdot 4} \Delta^4 f(a - 2h) &= - 0.'' 6 \\
 \hline
 \delta(0.34) &= 26^{\circ} 24' 32.'' 4
 \end{aligned}$$

Widzimy, że wzory (47), (47') i (47'') prowadzą do wyników jednakowych.

Aby dać przykład zastosowania wzoru (48), położmy $m = \frac{1}{2}$. Z poprzednio podanemi wartościami funkcji $f(x)$ i różnic otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \delta(0.25) &= 26^{\circ} 15' 33.'' 4 + \frac{1}{8} \cdot 18' 8.'' 2 + \frac{3}{128} \cdot 16.'' 3 - \dots \\
 &= 26^{\circ} 15' 33.'' 4 + 2' 16.0 + 0'' 4 = 26^{\circ} 17' 49.'' 8.
 \end{aligned}$$

Wreszcie celem zastosowania wzorów (49) obliczamy wartości pochodnych funkcji $f(x) = \delta(x - a)$ dla $x = a$. Znajdujemy:

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= 2(0^{\circ} 38' 52.'' 8 + 9' 12.'' 3 - 5.'' 2 - 4.'' 5 \dots) = 1^{\circ} 35' 50.'' 8 \\
 f''(a) &= 4(-18' 24.'' 6 + 15.'' 7 + 16.'' 3 + \dots) = -1^{\circ} 11' 30.'' 4 \\
 f'''(a) &= 8(-15.'' 7 - 26.'' 7 + 0.'' 2 - \dots) = -5' 37.'' 6 \\
 f^{(IV)}(a) &= 16(17.'' 8 - 0.'' 2 + \dots) = +4' 41.'' 6 \\
 f^{(V)}(a) &= 32(0.'' 1 + \dots) = 3.'' 2 \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

ROZDZIAŁ II.

KSZTAŁT I ROZMIARY ZIEMI.

20. Spółrządne geograficzne. Aby można było określić położenie jakiegoś ciała niebieskiego, musi być przedewszystkiem określone dokładnie stanowisko obserwatora, przez którego to ciało jest widziane. Jako miejsce spostrzeżeń przyjmujemy powierzchnię ziemi, która w pierwszym przybliżeniu może być uważana za kulę.

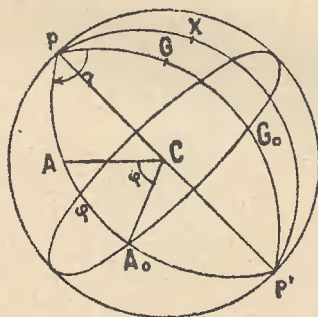
Położenie miejsca obserwacji na powierzchni kuli, jak wiemy, może być określone przez spółrządne sferyczne, odniesione do jakiegoś danego układu sferycznego. Układ taki na powierzchni ziemi może być obrany w sposób rozmaity. Przedewszystkiem określa taki układ ruch obrotowy ziemi. Ruch ten odbywa się dokoła osi, przechodzącej przez środek ziemi, której położenie wewnątrz ziemi w pierwszym przybliżeniu uważać można za niezmiennie. W tem założeniu oś obrotu ziemi, przecinając się z powierzchnią ziemi, określa na niej dwa stałe punkty, zwane *biegunami ziemskimi*. Bieguny te odróżniać będziemy w ten sposób, że jeden z nich p (ryc. 13), który na rycinie znajduje się wyżej, nazywać będziemy *biegunem północnym*, drugi zaś p' — *biegunem południowym*.

Bieguny określają na powierzchni ziemi koło główne $CA_0 G_0$, które nazywa się *równikiem ziemskim*. Jeżeli zaś jakiś punkt G_0 na równiku w sposób stosowny określimy jako początek układu sferycznego, którego biegunami są punkty p i p' , a kołem głównem koło $CG_0 A_0$, to położenie punktu A na powierzchni ziemi

określone będzie przez kąt $G_0 pA = \lambda$ oraz przez łuk $A_0 A = \angle A_0 CA = \varphi$.

W sposób powyższy określone współrzędne punktu A nazywają się *współrzędnymi geograficznymi*. Współrzędna λ nazywa się *długością geograficzną*, współrzędna φ — *szerokością geograficzną*.

Równik ziemski dzieli ziemię na dwie półkule, z których jedna, mianowicie zawierająca północny biegun ziemi p , nazywa się północną, druga zaś, zawierająca południowy biegun p' , nazywa się południową. Szerokość geograficzną punktów pół-



Rycina 13.

kuli północnej nazywać będziemy szerokością północną i liczyć ją będziemy dodatnio; odpowiednio szerokość geograficzną punktów półkuli południowej nazywać będziemy szerokością południową i liczyć ją będziemy ujemnie.

Półkole, przechodzące przez bieguny ziemskie oraz jakiś punkt A na powierzchni ziemi, nazywa się *południkiem geograficznym* tego punktu. Wszystkie punkty danego południka geograficznego mają jednakową długość geograficzną.

Małe koło, przechodzące przez punkt A na powierzchni ziemi i równoległe do równika ziemskiego, nazywa się *równoleżnikiem geograficznym* tego punktu. Wszystkie punkty danego równoleżnika geograficznego mają jednakową szerokość geograficzną.

Płaszczyzna każdego południka dzieli powierzchnię ziemi na dwie półkule. Ta z nich, która dla obserwatora, zwróco-

nego ku biegunowi północnemu, przypada po stronie lewej od jego południka, jest dla tego południka *półkulą zachodnią*; odpowiednio druga półkula jest *wschodnią*. Wypływa to z kierunku obrotu ziemi dookoła osi, który dla obserwatora, zajmującego wyżej podane położenie, odbywa się z lewa na prawo.

W związku z tem zazwyczaj liczy się w astronomji długość geograficzną dodatnio na zachód od południka pG_0p' od 0° do 360° , gdy w geografji rozróżnia się długość wschodnią i zachodnią i każdą z nich liczy się od południka pG_0p' od 0° do 180° .

Południk pG_0p' , od którego liczą się długości geograficzne, nazywa się *południkiem głównym* lub *zerowym*. Oczywiście każdy południk mógłby być obrany za główny, jednakże jest rzeczą ważną, aby taki wybór był powszechnie uznany. Na międzynarodowej konferencji astronomicznej, która odbyła się w Paryżu w dniach 23—26 października 1911 r. postanowiono za południk główny uznać południk greenwichski i do tego południka odnosić wszelkie obliczenia i dane, zawarte w rocznikach astronomicznych, efemerydach, tablicach i t. p. Wszystkie więc też dane, zawarte, w tej książce, które mają jakikolwiek związek z długością geograficzną, odnoszą się do południka greenwichskiego.

Gdyby długość punktu A odniesioną była nie do południka, przechodzącego przez Greenwich (na rycinie punkt G), lecz do jakiegoś innego południka, naprzykład przechodzącego przez punkt X, to z łatwością można znaleźć długość punktu A względem Greenwich, gdy znana jest długość punktu X względem Greenwich.

Oznaczmy przez λ_G długość geograficzną punktu A względem Greenwich a przez λ_X długość tegoż punktu, liczoną od południka, przechodzącego przez X. Z rycin 13 wynika:

$$\sphericalangle XpA = XpG + GpA, \quad \lambda_X = XpG + \lambda_G$$

oraz

$$\lambda_G = \lambda_X + GpX \quad (a)$$

To znaczy, że długość geograficzna punktu A względem Greenwich równa się sumie długości tegoż punktu, liczonej od południka punktu X, i długości punktu X, liczonej od Greenwich.

Tak na przykład względem Greenwich mają długość geograficzną:

Paryż	—	2° 20' 14".1
Berlin	—	13° 23' 42".0
Lwów	—	24° 0' 57".0

Jest zatem według wzoru (a):

$$-24^{\circ} 0' 57''.0 = \lambda_B - 13^{\circ} 23' 42''.0 = \lambda_P - 2^{\circ} 20' 14''.1$$

skąd wynika

$$\lambda_B = -10^{\circ} 37' 15''.0, \quad \lambda_P = -21^{\circ} 40' 42''.9.$$

λ_B oznacza tu długość geograficzną Lwowa względem Berlina, a λ_P długość geogr. Lwowa względem Paryża.

21. Elementy sferoidy ziemskiej. W rozważaniach astronomicznych można ziemię uważać za kulę zawsze wtedy, gdy nie wchodzi w rachubę odległość punktu obserwacji od środka ziemi oraz gdy nie zachodzi potrzeba rozróżniania między kierunkiem promienia ziemi, przechodzącego przez miejsce obserwacji, a kierunkiem pionu w tym punkcie. Jeżeli zaś potrzeba takiego rozróżniania zachodzi, lub wchodzi w rachubę rozmiary ziemi, to należy brać pod uwagę prawdziwy kształt i prawdziwe rozmiary ziemi.

Badaniem kształtu i rozmiarów ziemi zajmuje się geodezja. Z badań tych wynika, że powierzchnia ziemi ma postać bardzo skomplikowaną, ale odchylenia od regularnego kształtu geometrycznego są tak małe, że gdy chodzi o kwestje astronomiczne, można ją zawsze uważać za sferoidę, spłaszczoną u biegunów. Przy takim kształcie ziemi równoleżniki jej są kołami, a południki są połowami elips, których oś mała schodzi się co do położenia i długości z osią ziemską, a oś wielka przypada w płaszczyźnie równika ziemskiego i równa się jego średnicy.

Niech rycina 14 przedstawia przekrój sferoidalnej ziemi płaszczyzną jakiegoś południka. Jest to elipsa, której mała oś $p p'$ schodzi się z osią ziemską, a wielka oś $r' r$ jest jedną ze średnic równika. Połóżmy

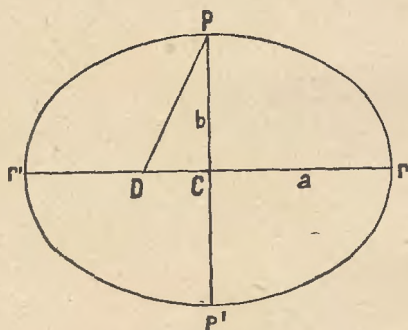
$$Cr = a, \quad Cp = b.$$

Niechaj D będzie jednym z ognisk tej elipsy, to, jak wiadomo, jest $Dp = a$. Oznaczmy dalej przez e mimośród południka, to jest $DC = ae$, i z trójkąta DCp wynika

$$a^2 = b^2 + a^2 e^2$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Do określenia kształtu ziemi często też służy stosunek $\frac{a-b}{a} = \alpha$, który nazywa się *splaszczeniem* ziemi. W związku z długością osi i splaszczeniem znajduje się długość obwodu



Rycina 14.

elipsy południkowej ziemi. Oznaczmy ćwiartkę tej elipsy, t. j. łuk pr , przez s .

Pomiary geodezyjne połączone są z przeróżnemi trudnościami, wskutek czego wyniki, dotyczące kształtu i rozmiarów ziemi, obarczone są jeszcze dosyć znacznymi błędami. Zestawiamy tu liczby, stanowiące wyniki niezależnych od siebie opracowań Bessla, Clarke'a, Helmherta i Hayforda¹⁾.

1. Sferoida Bessla (r. 1837):

$$a = 6377397.15 \text{ m}, \quad b = 6356078.96 \text{ m}, \quad s = 10000855.76 \text{ m},$$

$$e = 0.081696812, \quad \alpha = \frac{1}{299.152813} = 0.003342773182 \quad (b)$$

¹⁾ Patrz też w tablicy I.

2. Sferoida Clarke'a (r. 1880):

$$a = 6378249.17 \text{ m}, \quad b = 6356514.99 \text{ m}, \quad s = 10001867.67 \text{ m},$$

$$e = 0.082483217, \quad \alpha = \frac{1}{293.4603} = 0.0034075462.$$

3. Sferoida Helmerta (r. 1907):

$$a = 6378200.00 \text{ m}, \quad b = 6356818.17 \text{ m}, \quad s = 10002066.93 \text{ m},$$

$$e = 0.081813334, \quad \alpha = \frac{1}{298.3} = 0.0033523299.$$

4. Sferoida Hayforda (r. 1909):

$$a = 6378388, \quad b = 6356909, \quad \alpha = \frac{1}{297.0}, \quad e = 0.081992, \quad s = 10002293 \text{ m}.$$

Widzimy, jakiego rzędu są różnice tych czterech określeń. Są one tak małe, że w zagadnieniach astronomicznych nie odgrywają prawie żadnej roli. Wartość s wskazuje, o ile metr używany różni się od idealnego, który równać się ma jednej dziesięciomiljonowej części ćwiartki południka ziemskiego.

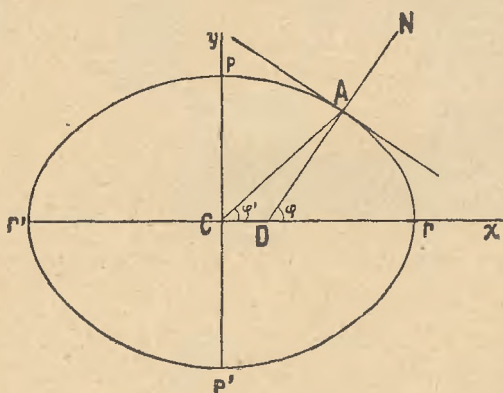
Za podstawę obliczeń, związanych z rozmiarami i kształtem ziemi, przyjmować będziemy najczęściej elementy Bessla, ponieważ są one też podstawą wielu tablic, obliczanych w różnych specjalnych celach, a ułatwiających niekiedy bardzo zawile rachunki. W związku z powyższą uwagą podajemy jeszcze następujące często używane liczby według Bessla:

$$e^2 = 0.00667437, \quad 1 - e^2 = 0.99332563, \quad \sqrt{1 - e^2} = 0.99665723.$$

22. Szerokość geocentryczna. Promień ziemi w danym punkcie powierzchni. Przyspieszenie ciężkości. Długość wahadła sekundowego. Normalną w jakimś punkcie A powierzchni krzywej nazywa się prosta, prostopadła do płaszczyzny stycznej do tej powierzchni w punkcie A . Gdyby ziemia była kulą, to, zgo-

dnie z geometrycznymi własnościami kuli, normalna w każdym punkcie jej powierzchni schodziłaby się co do kierunku z promieniem, przechodzącym przez ten punkt. Ale ponieważ ziemia jest sferoidą, więc normalna NA w punkcie A (ryc. 15) tworzy z promieniem CA kąt CAD , którego wielkość zależy od spłaszczenia ziemi i zmienia się wraz z odległością punktu A od równika.

Należy więc obecnie bardziej sprecyzować pojęcie szerokości



Rycina 15.

kości geograficznej. Normalna w danym punkcie powierzchni ziemi określona jest przez *pion*, którego kierunek określony jest przez położenie równowagi nitki, zawieszanej na jednym końcu, a na drugim obciążonej. Otóż przez szerokość geograficzną należy rozumieć kąt ADr , który tworzy pion punktu A z płaszczyzną równika. Różni się od niego kąt ACr , który z płaszczyzną równika tworzy promień ziemi AC , przechodzący przez punkt A . Ten kąt ACr nazywa się *szerokością geocentryczną* punktu A .

Pomiędzy szerokością geograficzną a geocentryczną zachodzi związek, który pozwala jedną z nich wyznaczyć, gdy druga jest znana.

Obierzmy w tym celu układ prostokątny (xy) , mający po-

czątek w środku ziemi C, którego osi schodzą się z osiami elipsy południkowej pAp'. Oznaczmy jeszcze

$$\sphericalangle ACr = \varphi', \quad \sphericalangle ADr = \varphi, \quad CA = r,$$

to współrzędne prostokątne punktu A mają wartości następujące:

$$x = r \cos \varphi', \quad y = r \sin \varphi'. \quad (c)$$

Normalna do powierzchni ziemi w punkcie A tworzy z osią x kąt φ . Jak wiadomo z geometrii, wartość tego kąta określona jest przez wzór

$$\operatorname{tang} \varphi = - \frac{dx}{dy}. \quad (d)$$

Niech będzie $Cr = a$, $Cp = b$, to równanie elipsy prp'r' ma postać

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (e)$$

Przez różniczkowanie otrzymujemy z niego

$$\frac{x}{a^2} dx + \frac{y}{b^2} dy = 0,$$

oraz

$$- \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x} \frac{a^2}{b^2}.$$

Wprowadzając w tem wyrażeniu wartość $-\frac{dx}{dy}$ według wzoru (d) oraz wypływającą ze wzorów (e) wartość $\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \varphi'$, otrzymamy

$$\operatorname{tang} \varphi' = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tang} \varphi; \quad (50)$$

albo ponieważ jest $\alpha = \frac{a - b}{a}$, a więc $\frac{b}{a} = 1 - \alpha$, możemy wzór

powyższy pisać też w postaci następującej:

$$\operatorname{tang} \varphi' = (1 - \alpha)^2 \operatorname{tang} \varphi, \quad (50')$$

lub także, wprowadzając wartości liczbowe według (b),

$$\operatorname{tang} \varphi' = \{ 9.9970916 \} \operatorname{tang} \varphi, \quad (50'')$$

gdzie liczba w klamrach oznacza logarytm współczynnika.

Ponieważ $(1 - \alpha)^2 < 1$, więc możemy $\varphi' - \varphi$ rozwinąć na szereg, postępujący według wstaw wielokrotności kąta 2φ podług wzoru (27). Wyprowadźmy to wyrażenie, jako przykład zastosowania wspomnianego wzoru. Oznaczmy

$$(1 - \alpha)^2 = \cos \omega$$

to współczynnikami wyrazów szeregu na $\varphi' - \varphi$ będą potęgi wyrażenia

$$\frac{\cos \omega - 1}{\cos \omega + 1} = -\operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2}.$$

Szereg (27) w tym przypadku ma więc postać

$$\varphi' = \varphi - \operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tang}^4 \frac{\omega}{2} \sin 4\varphi - \frac{1}{3} \operatorname{tang}^6 \frac{\omega}{2} \sin 6\varphi + \dots \quad (51)$$

przyczem należy jeszcze pamiętać, że gdy kąt $\varphi' - \varphi$ ma być wyrażony w miarach łukowych, należy w tych samych miarach wyrazić współczynniki, dzieląc ich wartości liczbowe przez $\sin 1''$.

Obliczmy współczynniki szeregu (51).

$$\log \cos \omega = \log (1 - \alpha)^2 = 9.9970916$$

$$\omega = 6^\circ 37' 24''.6, \quad \frac{\omega}{2} = 3^\circ 18' 42''.3;$$

$$\operatorname{tang} \frac{\omega}{2} \quad 8.762419$$

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2} \quad 7.524838 \qquad \operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2} \operatorname{cosec} 1'' \quad 2.839263$$

$$\operatorname{tang}^4 \frac{\omega}{2} \quad 5.049076 \qquad \operatorname{tang}^4 \frac{\omega}{2} \operatorname{cosec} 1'' \quad 0.36410$$

$$\operatorname{tang}^6 \frac{\omega}{2} \quad 2.574514 \qquad \operatorname{tang}^6 \frac{\omega}{2} \operatorname{cosec} 1'' \quad 7.8889.$$

Wzór poszukiwany ma więc postać następującą:

$$\varphi' = \varphi + [2.839263 \, n] \sin 2 \varphi + [0.06307] \sin 4 \varphi + [7.4118 \, n] \sin 6 \varphi + \dots \quad (51')$$

lub gdy zamiast logarytmów napiszemy wartości współczynników:

$$\varphi' = \varphi - 690.''66 \sin 2 \varphi + 1.''156 \sin 4 \varphi - 0.''0026 \sin 6 \varphi + \dots \quad (51'')$$

Długość promienia wodzącego CA również jest zależna od szerokości geograficznej, wyprowadźmy więc wzór, który tę zależność wyraża. Podstawiając w równaniu (e) na miejsce x i y ich wartości według (c), mamy

$$\frac{r^2}{a^2} \cos^2 \varphi' + \frac{r^2}{b^2} \sin^2 \varphi' = 1, \quad (e')$$

$$\frac{r^2}{a^2} \cos^2 \varphi' \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tang}^2 \varphi' \right) = 1;$$

a że $\frac{a^2}{b^2} \operatorname{tang} \varphi' = \operatorname{tang} \varphi$, więc jest też

$$\frac{r^2}{a^2} \cos^2 \varphi' (1 + \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \varphi') = 1,$$

skąd po łatwej redukcji otrzymuje się

$$\frac{r}{a} = \rho = \sqrt{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi' \cos (\varphi' - \varphi)}} \quad (52)$$

Jak widzimy, ρ oznacza stosunek promienia r do promienia równika ziemskiego a , albo też długość promienia sferoidy ziemskiej w szerokości geograficznej φ , gdy za jednostkę długości obrano promień równika. Wyrażeniu na ρ można nadawać rozmaitą postać. Tak np. pisząc

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi'} = 1 + \tan^2 \varphi', \quad \frac{1}{\sin^2 \varphi'} = 1 + \frac{1}{\tan^2 \varphi'},$$

czyli

$$\cos^2 \varphi' = \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi'}, \quad \sin^2 \varphi' = \frac{\tan^2 \varphi'}{1 + \tan^2 \varphi'}$$

podstawiamy te wartości w równaniu (e'). Otrzymujemy stąd

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} \tan^2 \varphi' = 1 + \tan^2 \varphi';$$

a ponieważ $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$, więc uwzględniając wzór (50), znajdziemy:

$$\frac{r^2}{a^2} = \frac{1 + \frac{b^4}{a^4} \tan^2 \varphi}{1 + \frac{b^2}{a^2} \tan^2 \varphi} = \frac{1 + (1 - e^2)^2 \tan^2 \varphi}{1 + (1 - e^2) \tan^2 \varphi}.$$

Wypływającą stąd wartość na ρ rozwinąć możemy na szereg potęgowy według potęg e ; ograniczając się do dwóch pierwszych wyrazów tego szeregu, otrzymamy z łatwością

$$\frac{r}{a} = \rho = 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \dots, \quad (52')$$

albo po wprowadzeniu na e wartości liczbowej

$$\rho = 1 - 0.0033372 \sin^2 \varphi' - \dots \quad (52'')$$

Wzór ten jest dokładny tylko do 0.00001.

Wyprowadźmy jeszcze niektóre częściej używane postaci wzorów na ρ .

Oznaczmy $1 - e^2 = \varepsilon^2$, to jest

$$\rho = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^4 \operatorname{tang}^2 \varphi}{1 + \varepsilon^2 \operatorname{tang}^2 \varphi}},$$

albo ponieważ

$$\operatorname{tang}^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2 \varphi}{1 + \cos 2 \varphi},$$

więc jest też

$$\rho = \sqrt{\frac{1 + \cos 2 \varphi + \varepsilon^4 (1 - \cos 2 \varphi)}{1 + \cos 2 \varphi + \varepsilon^2 (1 - \cos 2 \varphi)}} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon^4) \cos 2 \varphi}{1 + \varepsilon^2 + (1 - \varepsilon^2) \cos 2 \varphi}}. \quad (f)$$

Gdy napiszemy:

$$\begin{aligned} 1 + \varepsilon^4 &= \frac{1}{2} (1 + \varepsilon^2)^2 + \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2)^2, \\ 1 + \varepsilon^2 &= \frac{1}{2} (1 + \varepsilon)^2 + \frac{1}{2} (1 - \varepsilon)^2, \\ 1 - \varepsilon^4 &= (1 + \varepsilon^2) (1 - \varepsilon^2), \\ 1 - \varepsilon^2 &= (1 + \varepsilon) (1 - \varepsilon), \end{aligned}$$

a dalej

$$1 + \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon^4) \cos 2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon^2)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right)^2 + 2 \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \cos 2 \varphi \right\},$$

$$1 + \varepsilon^2 + (1 - \varepsilon^2) \cos 2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^2 + 2 \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cos 2 \varphi \right\},$$

i podstawimy powyższe wartości w wyrażeniu (f), to otrzymamy

$$\rho = \frac{1 + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right)^2 + 2 \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \cos 2 \varphi}{1 + \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^2 + 2 \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cos 2 \varphi}} \quad (f')$$

Oznaczmy

$$\frac{1 + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon} = k, \quad \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} = p, \quad \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} = p', \quad 2\varphi = \gamma, \quad (g)$$

oraz

$$q = \sqrt{1 + p^2 + 2p \cos \gamma}, \quad (h)$$

$$q' = \sqrt{1 + p'^2 + 2p' \cos \gamma},$$

to

$$\rho = k \cdot \frac{q}{q'}. \quad (i)$$

Wzorem (h) można nadać postać, dogodną do rachunku logarytmicznego. Podnosząc do kwadratu, znajdujemy

$$q^2 = (1 + p \cos \gamma)^2 + p^2 \sin^2 \gamma = p^2 \sin^2 \gamma \left[1 + \frac{(1 + p \cos \gamma)^2}{p^2 \sin^2 \gamma} \right].$$

Położmy

$$\operatorname{tang} \chi = \frac{p \sin \gamma}{1 + p \cos \gamma}, \quad (j)$$

to

$$1 + \frac{(1 + p \cos \gamma)^2}{p^2 \sin^2 \gamma} = 1 + \cotg^2 \chi = \operatorname{cosec}^2 \chi,$$

oraz

$$q = p \frac{\sin \gamma}{\sin \chi}. \quad (h')$$

Możemy też nadać postać logarytmiczną wzorowi (j). Położmy

$$p \cos \gamma = \sin M \quad (k)$$

to jest

$$\begin{aligned} \frac{p \sin \gamma}{1 + p \cos \gamma} &= \frac{p \sin \gamma}{1 + \sin M} = \operatorname{tang} \gamma \frac{\sin M}{1 + \sin M} = \\ &= \operatorname{tang} \gamma \operatorname{tang} M \frac{\operatorname{cös} M}{1 + \sin M}; \end{aligned}$$

a że

$$\frac{\cos M}{1 + \sin M} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 M}{(1 + \sin M)^2}} = \sqrt{\frac{1 - \sin M}{1 + \sin M}} = \tan \left(45^\circ - \frac{M}{2} \right),$$

więc

$$\tan \chi = \tan \gamma \tan M \tan \left(45^\circ - \frac{M}{2} \right). \quad (j')$$

Podobnie, kładąc

$$p' \cos \gamma = \sin M',$$

$$\tan \chi' = \tan \gamma \tan M' \tan \left(45^\circ - \frac{M'}{2} \right),$$

znajdujemy

$$q' = p' \frac{\sin \gamma}{\sin \chi'}$$

oraz

$$\rho = k \frac{p}{p'} \cdot \frac{\sin \chi'}{\sin \chi}. \quad (52''')$$

Wygodniejszym jest jeszcze wzór na $\log \rho$, który się otrzymuje, stosując wzór (26). Logarytmując wzór (f') znajdujemy, uwzględniając (g) i (h)

$$\log \rho = \log \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon} \right) + (\log q - \log q'). \quad (l)$$

Według wzoru (26) jest

$$\log q = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \cos 2 \varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right)^2 \cos 4 \varphi + \frac{1}{8} \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right)^3 \cos 6 \varphi - \dots$$

$$\log q' = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cos 2 \varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^2 \cos 4 \varphi + \frac{1}{8} \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^3 \cos 6 \varphi - \dots$$

Podstawiając powyższe wartości we wzorze (l) i mnożąc wzór, w ten sposób otrzymany, przez moduł logarytmów zwykłych M , otrzymuje się ostatecznie

$$\begin{aligned} \log \rho = & \log \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon} \right) + M \left\{ \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} - \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) \cos 2 \varphi - \right. \\ & - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right)^2 - \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^2 \right] \cos 4 \varphi + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right)^3 - \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^3 \right] \cos 6 \varphi - \\ & \left. - \dots \right\} \quad (52^{\text{IV}}) \end{aligned}$$

Obliczmy wartości współczynników tego wzoru.

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = 0.00667437, \quad \varepsilon^2 = 0.99332563, \quad \varepsilon = 0.99665723 \\ 1 - \varepsilon = 0.00334277, \quad 1 + \varepsilon = 1.99665723 \\ 1 - \varepsilon^2 = 0.00667437, \quad 1 + \varepsilon^2 = 1.99332563 \end{aligned}$$

$$1 - \varepsilon \quad 7.5241064, \quad 1 - \varepsilon^2 \quad 7.8244103, \quad p - p' \quad 7.2238011,$$

$$1 + \varepsilon \quad 0.3003035, \quad 1 + \varepsilon^2 \quad 0.2995783, \quad p^2 - p'^2 \quad 4.9247247,$$

$$p' = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad 7.2238029, \quad p = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \quad 7.5248320, \quad p^3 - p'^3 \quad 2.5153604,$$

$$p'^2 = \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^2 \quad 4.4476058, \quad p^2 = \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right)^2 \quad 5.0496640, \quad \frac{1 + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon} \quad 9.9992748,$$

$$p'^3 = \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^3 \quad 1.6714107, \quad p^3 = \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right)^3 \quad 2.5744960, \quad M \quad 9.6377843,$$

$$\begin{aligned} M(p - p') \quad 6.8615854 \quad \frac{1}{2} M(p^2 - p'^2) \quad 4.2614790 \\ M(p - p') = 0.00072708 \quad \frac{1}{2} M(p^2 - p'^2) = 0.00000183 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} M(p^3 - p'^3) \quad 1.6760234 \\ \frac{1}{3} M(p^3 - p'^3) = 0.0000000 \end{aligned}$$

Z powyższemi wartościami współczynników wzór (52^{IV}) otrzymuje postać następującą:

$$\log \rho = 9.9992748 + 0.00072708 \cos 2 \varphi - 0.00000183 \cos 4 \varphi + \dots \quad (52^{\text{V}})$$

Wartości współczynników wzorów (51'') i (52^V), obliczone z elementami Hayforda, podane są w tabelcy I.

W związku z elementami sferoidy ziemskiej znajdują się jeszcze różne inne wielkości, które mają zastosowanie w astronomji. Najważniejszymi z nich są przyspieszenie ciężkości i długość wahadła sekundowego.

Pomiędzy wymienionemi wyżej wielkościami zachodzi ściśle związek. Oznaczmy stałą przyspieszenia siły ciężkości przez g , a długość wahadła sekundowego przez l , to jest

$$g = \pi^2 \bar{l} \quad (53)$$

Wartość stałej g jest ściśle związana z wielkością masy ziemskiej, z objętością i kształtem ziemi oraz z prędkością jej ruchu wirowego. Może ona być wyprowadzona na drodze teoretycznej a również wyznaczoną na drodze doświadczalnej; wypływa ona pośrednio na przykład według wzoru (53) z określonej doświadczalnie długości wahadła sekundowego. Jedna i druga z tych wartości zmieniają się wraz z szerokością geograficzną.

Na podstawie skrupulatnej dyskusji 1603 określeń, dokonanych w różnych punktach powierzchni ziemi, Helmert otrzymał następujące wartości na g i l , wyrażone w metrach:

$$\begin{aligned} g &= 9.78046 (1 + 0.005302 \sin^2 \varphi - 0.000007 \sin^2 2\varphi \dots) \\ &= 9.80632 - 0.025928 \cos 2\varphi + 0.000068 \cos^2 2\varphi \dots \end{aligned} \quad (54)$$

$$l = 0.993588 - 0.002627 \cos 2\varphi + 0.000007 \cos^2 2\varphi \dots \quad (55)$$

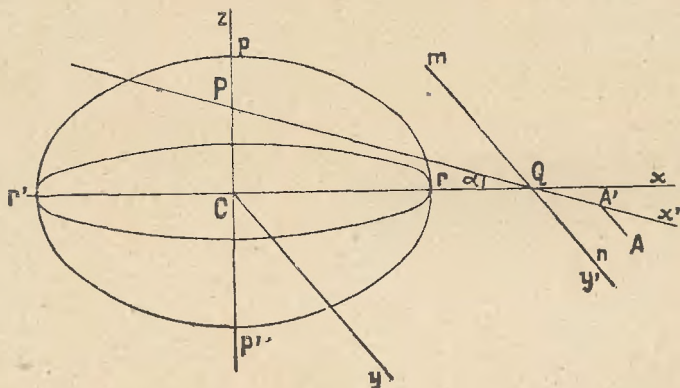
23. Przekroje sferoidy płaszczyznami. Gdy jakąś sferoidę przetniemy płaszczyzną, to przekrój jest elipsą. Weźmy pod uwagę ten przypadek, gdy płaszczyzna, przecinająca sferoidę ziemską, nie jest równoległa do płaszczyzny równika, i określmy kształt przekroju eliptycznego.

Równanie powierzchni sferoidy w układzie prostokątnym, którego oś z schodzi się z jej mniejszą osią, a początek układu przypada w jej środku, ma postać

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (m)$$

W przypadku ziemi oś z schodzi się z osią obrotu ziemi, a płaszczyzna xy przypada w płaszczyźnie równika ziemskiego.

Niechaj będzie (ryc. 16) mn prosta, według której jakaś płaszczyzna, nachylona pod kątem α do płaszczyzny równika ziemskiego, przecina tę ostatnią, a P punktem przecięcia tej płaszczyzny z osią ziemską. Poprowadźmy ze środka ziemi C prostą rr' , prostopadłą do mn , i niechaj ta prosta będzie osią x układu, do którego odnosi się równanie (m); osią y jest prosta Cy ,



Rycina 16.

do poprzedniej [prostopadła, a więc równoległa do mn . Punkt przecięcia prostej rr' z prostą mn oznaczmy przez Q . Prosta PQ oczywiście przypada w płaszczyźnie, przecinającej sferoidę, a również w płaszczyźnie południka $prp' r'$; jest ona więc prostą przecięcia się tych dwóch płaszczyzn. Oznaczmy

$$\sphericalangle PQC = \alpha, CQ = k,$$

to α jest kątem nachylenia płaszczyzny przecinającej do płaszczyzny równika, a k jest odległością prostej przecięcia się tych dwóch płaszczyzn od środka ziemi.

Znajdźmy równanie elipsy, według której płaszczyzna Pmn przecina się z powierzchnią ziemi. Obierzmy w tym celu w płaszczyźnie Pmn jakiś punkt A , którego spólrzędne w układzie (xyz) są x, y, z . Odnieśmy dalej położenie tego punktu do układu pro-

stokątnego ($x' y'$), którego oś x' schodzi się z kierunkiem prostej PQ, a oś y' przechodzi przez Q i ma kierunek $Qn \parallel Cy$. Spółrzędne punktu A w układzie $x' y'$ są:

$$x' = QA', \quad y' = A'A.$$

Wyrażmy współrzędne x, y, z przez x' i y' . Współrzędne punktu Q, t. j. początku układu ($x' y'$) w układzie (xyz), są następujące:

$$x_0 = CQ = k, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0.$$

Rzuty odcinka QA' na osiach x i z są:

$$QA' \cos \alpha = x' \cos \alpha, \quad QA' \sin \alpha = x' \sin \alpha,$$

a więc współrzędne punktu A mają wartości

$$x = k + x' \cos \alpha, \quad y = y', \quad z = x' \sin \alpha \quad (n)$$

Jeżeli punkt A znajduje się na powierzchni sferoidy, to współrzędne jego spełniać muszą równanie (m); a ponieważ leży on w płaszczyźnie Pmn, więc jest on jednym z punktów krzywej, według której płaszczyzna ta przecina sferoidę. Otrzymamy zatem równanie tej krzywej, odniesione do układu ($x' y'$), gdy wartości współrzędnych (n) podstawimy w równaniu (m). Jest ono:

$$\frac{(k + x' \cos \alpha)^2 + y'^2}{a^2} + \frac{x'^2 \sin^2 \alpha}{b^2} = 1,$$

albo

$$\frac{y'^2}{a^2} + x'^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \right) + \frac{2kx' \cos \alpha}{a^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}.$$

Oznaczmy

$$\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} = g^2,$$

$$\frac{k \cos \alpha}{a^2} = h, \quad (o)$$

$$1 - \frac{k^2}{a^2} = f^2,$$

to jest

$$x'^2 g^2 + 2 x' h + \frac{y'^2}{a^2} = f^2,$$

albo

$$\left(x' + \frac{h}{g^2}\right)^2 + \frac{y'^2}{a^2 g^2} = \frac{f^2}{g^2} + \frac{h^2}{g^4} = \frac{1}{g^2} \left(f^2 + \frac{h^2}{g^2}\right);$$

a gdy jeszcze oznaczymy

$$\begin{aligned} a^2 \left(f^2 + \frac{h^2}{g^2}\right) &= a'^2, \\ \frac{1}{g^2} \left(f^2 + \frac{h^2}{g^2}\right) &= b'^2, \end{aligned} \tag{p}$$

to jest

$$\frac{y'^2}{a'^2} + \frac{\left(x' + \frac{h}{g^2}\right)^2}{b'^2} = 1. \tag{q}$$

Jest to równanie elipsy, której jedna oś $2a'$ leży na osi y' , druga zaś oś $2b'$ przebiega równolegle do osi x' w odległości $-\frac{h}{g^2}$ od niej.

Z równań (p) wynika

$$\frac{a'^2}{b'^2} = a^2 g^2 = \cos^2 \alpha + \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \alpha = 1 + \sin^2 \alpha \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right);$$

a że

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{1 - e^2}, \quad \frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{e^2}{1 - e^2},$$

więc

$$\frac{a'^2}{b'^2} = 1 + \frac{e^2 \sin^2 \alpha}{1 - e^2}. \tag{r}$$

Znaczy to, że $a' > b'$, t. j. że osią większą elipsy jest ta, która leży na osi y' , a więc też w płaszczyźnie równika. Oznaczając przez e' mimośród tej elipsy, mamy

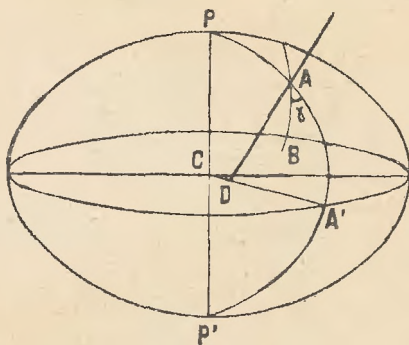
$$1 - e'^2 = \frac{b'^2}{a'^2} = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \alpha},$$

$$e'^2 = 1 - \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \alpha} = \frac{e^2 \sin^2 \alpha}{1 - e^2 \cos^2 \alpha},$$

$$e' = \frac{e \sin \alpha}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha}}. \quad (s)$$

Wzory (r) i (s), które są niezależne od k , wskazują, że płaszczyzny równoległe określają na powierzchni sferoidy elipsy do siebie podobne.

24. Przekroje pionowe sferoidy ziemskiej. Szerokość geograficzna jakiegoś punktu na powierzchni ziemi jest to, jak wiemy,



Rycina 17.

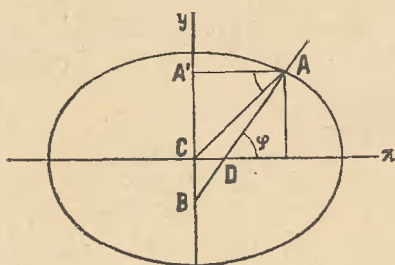
kąt nachylenia pionu tego punktu do płaszczyzny równika ziemskiego. Każda płaszczyzna, przechodząca przez pion, jest *płaszczyzną pionową*, a przekrój ziemi taką płaszczyzną jest przekrojem pionowym. Ponieważ pion w danym punkcie A powierzchni ziemi przypada w płaszczyźnie południka geograficznego tego punktu, więc płaszczyzna południka jest także płaszczyzną pionową, a południk jest jednym z przekrojów pionowych, przechodzących przez punkt A.

Niechaj będzie D (ryc. 17) punktem przecięcia płaszczyzny równika z pionem punktu A, a więc DAB płaszczyzną pio-

nową, przechodzącą przez punkt B, która określa na powierzchni ziemi łuk AB. Jeżeli położenie punktu A jest znane, to położenie punktu B może być określone przez łuk przekroju pionowego AB oraz kąt $A'AB = \gamma$, który tworzy płaszczyzna DAB z płaszczyzną południka punktu A. Ten kąt γ nazywa się *azymutem* płaszczyzny DAB.

Łuk AB jest łukiem eliptycznym, jednakże gdy jest niewielki, różni się on mało od łuku koła, którego promień równa się promieniowi krzywizny przekroju eliptycznego AB w punkcie A. Znajdźmy ten promień.

Jak wiadomo z geometrii, promień krzywizny elipsy, któ-



Rycina 18.

rej wielka i mała oś mają odpowiednio wartości $2a$ i $2b$, w końcu jej małej osi określony jest przez wzór

$$R = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (t)$$

Jest to największy z promieni krzywizny wymienionej elipsy. Z drugiej strony wiadomo, że jeżeli w punkcie A elipsy (ryc. 18) poprowadzimy do niej normalną i oznaczymy przez φ kąt ADx , który normalna ta tworzy z wielką osią elipsy, a przez n_φ długość odcinka AB normalnej pomiędzy punktem A a punktem jej przecięcia się z małą osią elipsy, to promień krzywizny r_φ w punkcie A ma wartość

$$r_\varphi = \frac{n_\varphi^3}{R^2} = \frac{n_\varphi^3}{a^2} (1 - e^2). \quad (u)$$

W celu wyznaczenia wartości n_φ odnieśmy elipsę do układu współrzędnych osiowych i niechaj będą x i y współrzędne prostokątne punktu A. Z rysunku widzimy, że jest

$$\begin{aligned} A'A &= x = AB \cos \varphi \\ n_\varphi &= x \sec \varphi; \end{aligned}$$

a ponieważ jest (ust. 22)

$$\operatorname{tang} \varphi = -\frac{dx}{dy} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y}{x},$$

więc można wyznaczyć współrzędne punktu A, w którym normalna do elipsy nachylona jest względem jej wielkiej osi pod kątem φ . Podstawiając w równaniu (e) wypływającą z powyższego wzoru wartość

$$\frac{y}{b} = \frac{b}{a^2} x \operatorname{tang} \varphi,$$

znajdziemy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^4} x^2 \operatorname{tang}^2 \varphi = 1;$$

a uwzględniając (t),

$$\frac{x^2}{a^2} [1 + (1 - e^2) \operatorname{tang}^2 \varphi] = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} (1 - e^2 \sin^2 \varphi) = \cos^2 \varphi,$$

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$y = (1 - e^2) x \operatorname{tang} \varphi = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (\text{w})$$

a dalej też

$$n_\varphi = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (56)$$

$$r_\varphi = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}. \quad (57)$$

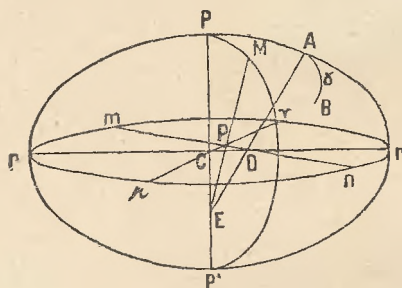
Są to wzory ogólne, które oczywiście możemy też zastosować do elipsy (q). Dla tej elipsy jest według (p)

$$R' = \frac{a'^2}{b'} = a^2 \sqrt{h^2 + f^2 g^2},$$

a po łatwych redukcjach

$$R' = \sqrt{\frac{a^2 (1 - e^2 \cos^2 \alpha) - k^2 \sin^2 \alpha}{1 - e^2}}. \quad (x)$$

Wzór ten, ważny dla jakiejkolwiek płaszczyzny, przecinającej ziemię, ważny jest też dla jakiejkolwiek płaszczyzny



Rycina 19.

pionowej w punkcie A, którego szerokość geograficzna jest φ . Wartości k i α zależą będą w tym przypadku od φ i od azymutu γ płaszczyzny przecinającej.

Niechaj będzie na rycinie 19 pAp' południk punktu A, którego szerokość geograficzna $\angle ADr = \varphi$; pp' jest osią ziemską, rr' prostą, według której przecina się płaszczyzna południka punktu A z płaszczyzną równika ziemskiego, D — punktem przecięcia się normalnej do powierzchni ziemi w punkcie A z płaszczyzną równika i prostą rr' , E — punktem przecięcia się normalnej z osią ziemską. Poprowadźmy przez A płaszczyznę pionową, która przechodzi przez punkt B na powierzchni ziemi; kąt $rAB = \gamma$ jest azymutem tej płaszczyzny. Płaszczyzna ta oczywiście przechodzi też przez punkty D i E. Niechaj będzie dalej mn prostą, według której płaszczyzna pionowa ABD

przecina się z płaszczyzną równika. Jest to cięciwa, przez której środek P oraz środek ziemi C prowadzimy prostą $\mu\nu$; prosta ta jest prostopadła do mn.

Według ustępu 23 wielka oś elipsy, określonej na powierzchni ziemi przez płaszczyznę pionową ABD, jest równoległa do mn, mała zaś oś leży w prostopadłej do niej płaszczyźnie południka pvp' i jest oczywiście linią przecięcia się płaszczyzny pvp' z płaszczyzną pionową ABD. Punkt P, który leży na prostej mn, a więc na płaszczyźnie ABD, jednocześnie zaś na prostej $\mu\nu$, więc w płaszczyźnie pvp', jest wspólnym punktem obu wspomnianych płaszczyzn. Wspólnym punktem tych płaszczyzn jest także punkt E, gdyż leży na osi ziemskiej, przez którą przechodzą wszystkie południki, i na pionie punktu A, przez który przechodzą wszystkie płaszczyzny pionowe w punkcie A. Wynika stąd, że prosta PE jest prostą przecięcia się płaszczyzn pvp' i ABD, a więc przypada w niej mała oś przekroju eliptycznego. Punkt M, w którym prosta EP przecina się z powierzchnią ziemi, jest jednym z końców tej malej osi.

Mamy zatem dla płaszczyzny pionowej ABD:

$$\alpha = 90^\circ - \angle pEM, \quad k = CP = CE \tan pEM = CE \cotg \alpha.$$

Gdy spólrzędne punktu A oznaczymy przez x i y , to jest według wzorów (w) i (56):

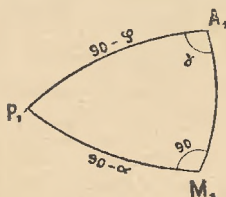
$$CE + y = n \sin \varphi$$

$$CE = \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{ae^2 \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (58)$$

$$k = \frac{ae^2 \sin \varphi \cotg \alpha}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (59)$$

Gdy więc chcemy dla tej elipsy wyznaczyć jeszcze promień krzywizny w punkcie M według wzoru (x), należy znaleźć wartość kąta α . W tym celu promieniem dowolnym dokoła punktu E zakreślmy powierzchnię kuli i niech będą P_1 , M_1 i A_1 (ryc. 20) odpowiednio punkty, w których powierzchnię tej kuli przecinają proste Ep, EM i EA. Płaszczyzny EpM i MEA są do

siebie prostopadłe, ponieważ przecinają się z płaszczyzną równika według prostych mn i $\mu\nu$, które są do siebie prostopadłe. Wynika stąd, że kąt przy M_1 jest prosty; kąt przy A_1 jest to



Rycina 20.

azymut płaszczyzny MAB w punkcie A , który oznaczyliśmy przez γ . Prócz tego jest

$$P_1 A_1 = 90^\circ - \varphi, \quad M_1 P_1 = \angle pEM = 90^\circ - \alpha.$$

Wypływa więc z trójkąta $P_1 A_1 M_1$

$$\cos \alpha = \cos \varphi \sin \gamma; \quad (60)$$

podstawiając tę wartość we wzorze (59), znajdujemy

$$k = \frac{ae^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \gamma}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \gamma)}}; \quad (59')$$

dalej podstawiając w wyrażeniu (x) wartość α według wzoru (60) i uwzględniając, że

$$k^2 \sin^2 \alpha = \frac{a^2 e^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \gamma}{1 - e^2 \sin^2 \varphi},$$

otrzymamy

$$R' = a \sqrt{\frac{(1 - e^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \gamma)(1 - e^2 \sin^2 \varphi) - e^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \gamma}{(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}},$$

albo po uproszczeniu

$$R' = a \sqrt{\frac{1 - e^2(1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma)}{(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}}. \quad (61)$$

Obecnie możemy też znaleźć promień krzywizny rozważanej elipsy w punkcie A. Ponieważ dla każdego z przekrojów pionowych w tym punkcie odcinek normalnej między punktem A a osią pp' jest n_φ , więc promień krzywizny w tym punkcie przy azymucie γ wyrazi się przez wzór

$$\begin{aligned} r' &= \frac{n_\varphi^3}{R'^2} = \frac{a^3}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}{a^2 [1 - e^2 (1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma)]} = \\ &= \frac{a(1 - e^2)}{[1 - e^2 (1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma)] \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \end{aligned} \quad (62)$$

Z tego wzoru wypływa

$$\text{dla } \gamma = 0: r'_0 = r_\varphi = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{jak poprzednio}),$$

$$\text{dla } \gamma = 90^\circ: r'_{90} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = n_\varphi.$$

Plaszczyzna pionowa w punkcie A, prostopadła do płaszczyzny południka tego punktu, nazywa się *pierwszą płaszczyzną pionową* albo *pierwszym wertykałem*. Wzór na r'_{90} wyraża, że odcinek normalnej pomiędzy punktem A a osią pp' równa się promieniowi krzywizny w tym punkcie elipsy, określonej na powierzchni ziemi przez pierwszy wertykał punktu A. Oznaczmy jeszcze

$$r'_{90} = r_1, \quad r'_0 = r_2,$$

to jest

$$\frac{r_1}{r'} = \frac{1 - e^2 + e^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma}{1 - e^2} = 1 + \frac{e^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma}{1 - e^2}, \quad r_1 > r';$$

$$\frac{r_2}{r'} = \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi - e^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \gamma}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = 1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \gamma}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}, \quad r_2 < r'.$$

Widzimy stąd, że ze wszystkich przekrojów pionowych w punkcie A najmniejszą krzywiznę ma południk, największą zaś — przekrój pierwszym wertykałem.

Pomiędzy r_1, r_2, r' i γ zachodzi prosty związek. Z poprzednich wzorów otrzymujemy z łatwością

$$\begin{aligned} r_1 r_2 &= \frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^2} \\ r_1 \cos^2 \gamma + r_2 \sin^2 \gamma &= \frac{a \cos^2 \gamma}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a(1-e^2) \sin^2 \gamma}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{a[1-e^2(1-\cos^2 \varphi \cos^2 \gamma)]}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

stąd zaś wynika

$$\frac{r_1 \cos^2 \gamma + r_2 \sin^2 \gamma}{r_1 r_2} = \frac{[1-e^2(1-\cos^2 \varphi \cos^2 \gamma)] \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}{a(1-e^2)} = \frac{1}{r'},$$

albo

$$\frac{1}{r'} = \frac{\sin^2 \gamma}{r_1} + \frac{\cos^2 \gamma}{r_2}. \quad (63)$$

Jest to *równanie Eulera*, które pozwala w prosty sposób obliczyć r' dla dowolnego γ , gdy $r_2 = r_\varphi$ i $r_1 = n_\varphi$ zostały obliczone według wzorów (56) i (57).

Ponieważ w przypadku ziemi e jest małe, więc zamiast wzorów ścisłych można zawsze prawie stosować wzory przybliżone. Otrzymujemy je, rozwijając wyżej wyprowadzone wzory na r_1, r_2, r' według potęg e^2 i ograniczając się do dwóch pierwszych wyrazów; mianowicie jest:

$$r_1 = 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \dots \quad (56')$$

$$r_2 = 1 - (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi) e^2 + \dots \quad (57')$$

$$r' = 1 + (\frac{1}{2} \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma) e^2 + \dots \quad (62')$$

W powyższych wzorach za jednostkę przyjęty został promień równika ziemskiego.

Różnica między r_1 i r_2 wynosi $e^2 \cos^2 \varphi$, która osiąga największą wartość e^2 na równiku, a na biegunach staje się zerem. Tam promień krzywizny jest największy, mianowicie

$r_1 = r_2 = 1 + \frac{1}{2}e^2$. Najmniejszym ze wszystkich promieni krzywizny jest promień \mathfrak{r}_2 dla $\varphi = 0$, wynosi on $1 - e^2$. Różnica pomiędzy najmniejszym a największym promieniem krzywizny na sferoidzie wogóle wynosi $\frac{3}{2}e^2$.

Skoro odległość punktu B od A (ryc. 17) została wymierzona i wyrażona w jednostkach długości, to przyjmując, że równa się ona łukowi koła, zakreślonego promieniem krzywizny przekroju pionowego w punkcie A, mającego azymut γ , możemy długość tego łuku wyrazić także w miarach łukowych. Niechaj długość łuku w miarach długości będzie s , a w miarach łukowych σ , to jest

$$\sigma = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \frac{s}{r'} = 57^\circ 17' 44.''8 \cdot \frac{s}{r'},$$

$$s = 0.0174524 \sigma r'.$$

25. Poziom. Widnokrąg. Horyzont fizyczny. Depresja horyzontu fizycznego. Każda płaszczyzna, prostopadła do pionu danego punktu na powierzchni ziemi, jest dla tego punktu *płaszczyzną poziomą*, a każdy kierunek, przypadający w płaszczyźnie poziomej, jest kierunkiem poziomym. Płaszczyzna pozioma, przechodząca przez dany punkt obserwacji, nazywa się *poziomem* tego punktu.

Gdybyśmy sobie wyobrazili, że całą powierzchnię ziemi pokrywa morze, to poziomem w jakimś punkcie tej powierzchni byłaby płaszczyzna, styczna do tej powierzchni w tym punkcie. Poziom w jakimś punkcie powierzchni morza nazywa się *poziomem morza* w tym punkcie. W rzeczywistości nierówności skorupy ziemskiej powodują, że pewna część skorupy ziemskiej nie jest pokryta wodą, t. j. wznosi się ponad poziom morza. *Wzniesieniem nad poziom morza* jakiegoś punktu nazywamy odcinek pionu, zawarty między poziomem tego punktu a poziomem morza, gdyby ono do pionu tego punktu dochodziło. Wszelkie wzniesienie się powierzchni ziemi nad poziom morza, lub też obniżenie się tej powierzchni pod poziom morza powoduje odchylenie kształtu ziemi od przyjętego kształtu geometrycznego sferoidy, któryby posiadała ziemia, gdyby cała jej powierzchnia pokryta była wodą.

po między poziomem punktu A' a kierunkiem stycznej do powierzchni morza HA'B, nazywa się *depresją* czyli *obniżeniem* horyzontu fizycznego w kierunku A'B.

Skoro uważamy AB za łuk koła o promieniu r , to jest także $OB = r$ i $OB \perp A'B$. Gdy φ jest szerokością geograficzną punktu A, to według wzoru (62') jest z dostateczną dokładnością

$$r = 1 + (\frac{1}{2} \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma) e^2.$$

Ponieważ $\sphericalangle BOA' = \sphericalangle BA'H = \alpha$, więc z trójkąta OBA' wypływa

$$\cos \alpha = \frac{OB}{OA'} = \frac{r}{r+h}$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{r}{r+h}\right)^2}{\left(\frac{r}{r+h}\right)^2}} = \sqrt{\left(\frac{h+r}{r}\right)^2 - 1} = \sqrt{2 \frac{h}{r} + \frac{h^2}{r^2}}. \quad (y)$$

Oznaczając

$$\frac{1}{2} \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma = m, \quad (z)$$

t. j. pisząc $r = 1 + me^2$ i podstawiając tę wartość we wzorze (y), znajdziemy

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sqrt{2h(1+me^2) + h^2}}{1+me^2},$$

a rozwijając wyrażenie po prawej stronie na szereg według potęg e^2 i poprzestając na dwóch pierwszych wyrazach, otrzymamy

$$\operatorname{tang} \alpha = \sqrt{2h + h^2} - \frac{hm(1+h)}{\sqrt{2h + h^2}} e^2 + \dots \quad (y')$$

Tu oczywiście jednostką długości jest promień równika ziemskiego. W stosunkach ziemskich wysokość, którą osiągnąć może obserwator, jest zawsze niewielka w stosunku do tej jednostki. Nawet gdy wysokość ta wynosi 10 km, którą uważać można prawie za granicę, osiągalną obecnie przez człowieka, jest

$h = \frac{1}{638} = 0.00157$; jest to wartość jeszcze przeszło 4 razy mniejsza, niż e^2 . Pisząc więc z dostateczną dokładnością

$$\sqrt{2h + h^2} = \sqrt{2h} \left(1 + \frac{h}{4}\right),$$

i opuszczając wyrazy małe, można przyjąć

$$\text{tang } \kappa = \sqrt{2h} \left(1 + \frac{h}{4}\right) - \sqrt{\frac{h}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma\right) e^2. \quad (y'')$$

Wyrażając κ w sekundach, a h w metrach; otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \kappa = & 115''.510 h^{\frac{1}{2}} + 0''.0000044 h^{\frac{3}{2}} - \\ & - 0''.3855 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma\right) h^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (64)$$

Drugi wyraz powyższego wzoru jest bardzo mały i dopiero przy wzniesieniu $h = 7640$ m wynosi $1''$; w praktyce więc może on tylko bardzo rzadko wchodzić w rachubę, i zazwyczaj wystarcza wzór uproszczony

$$\kappa = [115''.510 - 0''.3855 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma\right)] \sqrt{h}. \quad (64')$$

Drugi wyraz tego wzoru uproszczonego, jak widzimy, zależy od φ i łatwo sprawdzić przez przyrównanie do zera pochodnej wyrażenia w nawiasie względem φ , że wyraz ten osiąga swoją wartość maksymalną, gdy $\varphi = \pm 45^\circ$, a $\gamma = 0$. Wtedy współczynnik tego wyrazu ma wartość $-0''.5783$ i np. dla $h = 10000$ m wyraz ten ma wartość $-57''.83$, a więc znaczną. Poza tem, jak zaznaczyliśmy, wartość tego wyrazu zależy od γ i różnica jego wartości w kierunku południka i pierwszego wertykału wynosi $0''.3855 \cos^2 \varphi \sqrt{h}$, co czyni na równiku $38''.5$ dla $h = 10000$ m.

Jednakże w warunkach najczęściej zachodzących i ten wyraz ma wartość niewielką. Z drugiej zaś strony obserwacyjne wyznaczenie kąta κ nie bywa nigdy dokładne wskutek warunków lokalnych oraz zmiennego wpływu atmosfery ziemskiej, o którym będzie mowa w rozdziale V. Wartość kąta κ ,

określoną przez wzór (64), należy uważać tylko za pierwsze przybliżenie, nie uwzględniające wpływu refrakcji atmosferycznej, który jest dosyć znaczny. Z tego też powodu nie popełnimy wielkiego błędu, gdy przyjmimy, że κ ma we wszystkich azymutach wartość jednakową, równą średniej arytmetycznej z dwóch krańcowych wartości, które osiąga dla $\gamma = 0$ i $\gamma = 90^\circ$. Ta średnia wartość wypływa z następującego wzoru, który jest też uproszczonym wzorem na κ :

$$\kappa = (115.''510 + 0''.1978 \cos 2\varphi) \sqrt{h}. \quad (64'')$$

Wreszcie gdy uważamy ziemię za kulę, we wzorze 64 opada wyraz, zależny od szerokości geograficznej, i jest wprost

$$\kappa = 115.''510 \sqrt{h}. \quad (64''')$$

Wzory (64), wyprowadzone w założeniu, że punkt A znajduje się na poziomie morza, wymagają sprawdzenia, czy ważne są one też wtedy, gdy punkt A wzniesiony jest na pewną wysokość ponad poziom morza; ma to miejsce zawsze, gdy punkt A znajduje się na lądzie. W miejscowości, pokrytej nierównościami, kąt κ ulegać może zmianom znacznym, zależnie od konfiguracji terenu. Pomijając te zboczenia lokalne powierzchni ziemi od kształtku geometrycznego, przypuśćmy, że teren jest równy, to znaczy, że gdy punkt A wzniesiony jest na wysokość z nad poziom morza, to tak samo wzniesiony jest nad poziom morza cały teren, ograniczony widnokregiem.

Jeżeli więc na poziomie morza punktu A promień krzywizny jakiegoś przekroju pionowego jest r , to w samym punkcie A wynosi on

$$r + z = 1 + z + me^2,$$

i kąt κ wypływa w tym przypadku ze wzoru (y''), gdy w nim zastąpimy me^2 przez $z + me^2$. Jest więc

$$\text{tang } \kappa = \sqrt{2h} \left(1 + \frac{h}{4} \right) - \sqrt{\frac{h}{2}} me^2 - \sqrt{\frac{h}{2}} \cdot z.$$

We wzorze tym współczynnik wyrazu, zależnego od z , wynosi zaledwie 0."000009, a więc wyraz ten dla $h = 10000$ m i $z = 10000$ m jeszcze nie osiąga wartości 1". Wyraz ten zatem zawsze może być pominięty, i wzory (64) są ważne dla jakiegokolwiek wzniesienia terenu nad poziom morza.

Długość łuku AB na ryc. 21 jest odległością horyzontu fizycznego od punktu A w azymucie γ . Ponieważ depresja horyzontu fizycznego w tym kierunku wynosi κ , więc oznaczając $AB = s$, mamy

$$s = r \kappa'' \sin 1'' = (1 + me^2)(115.510 - 0.3855 m) \sqrt{h} \cdot \sin 1'' = \\ = [115.510 + (115.510 e^2 - 0.3855) m - 0.3855 m^2 e^2] \sqrt{h} \cdot \sin 1'',$$

albo w metrach

$$s = (3571.4 + 11.92 m - 0.08 m^2) \sqrt{h}. \quad (65)$$

Opuszczając wyraz trzeci, jako praktycznie nie wchodzący w rachubę, oraz pisząc na miejsce m wartość według (z), otrzymamy

$$s = \{ 3571.4 + 11.92 (\tfrac{1}{2} \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma) \} \sqrt{h}. \quad (65')$$

Gdy zaś znów wprowadzimy dla dowolnego azymutu średnią wartość wyrazu drugiego, podobnie jak przy wyprowadzeniu wzoru (64''), to wzór (65') otrzyma postać

$$s = (3571.4 - 5.96 \cos 2 \varphi) \sqrt{h}. \quad (65'')$$

Gdy zaś wreszcie uważać będziemy ziemię za kulę, to jest wprost

$$s = 3571.4 \sqrt{h}. \quad (65''')$$

Wspomnieliśmy już, że wzory (64) i (65) nie są dokładne, ponieważ nie uwzględniają wpływu atmosfery ziemskiej. Atmosfera sprawia, że droga promienia światła, dochodzącego do oka obserwatora w A', jest linią krzywą. Nazwijmy wielkości κ i s , określone przez wzory (64) i (65), odpowiednio *prawdziwą*

depresją horyzontu fizycznego i *prawdziwym* promieniem widnokręgu w azymucie γ ; stosownie do tego wartości, zmienione przez atmosferę, nazywać będziemy *pozornymi*. Te ostatnie jedynie dostępne są bezpośredniej obserwacji, a teoretyczne ich wyprowadzenie znajduje się w ścisłym związku z teorią refrakcji wogóle.

W związku z powyższemi uwagami trzeba też odróżniać prawdziwy i pozorny horyzont fizyczny oraz prawdziwy i pozorny widnokrąg. Zazwyczaj wszakże nie akcentuje się tych różnic, i gdy specjalnie tego się nie zaznacza, zawsze należy przez widnokrąg i horyzont fizyczny rozumieć widnokrąg pozorny i horyzont fizyczny pozorny.

26. Wahania szerokości i długości geograficznej. Spółrzędne geograficzne miejsca obserwacji mają wartość stałą tylko pod tym warunkiem, że układ spółrzędnych geograficznych jest niezmienny. W istocie tak nie jest z dwóch powodów: 1) oś obrotu ziemi nie schodzi się ściśle z osią głównego momentu bezwładności, lecz tworzy z nią mały kąt i zakreśla dokola niej powierzchnię stożkową; 2) sama oś głównego momentu zmienia położenie wewnątrz ziemi. Skutkiem tego bieguny, określone na powierzchni ziemi przez oś obrotu, zmieniają swoje położenie, od tego zaś położenia zależy, jak wiemy, jaknajściślej położenie południka danego miejsca obserwacji oraz równika ziemskiego. Jest więc rzeczą zrozumiałą, że zmiany położenia biegunów pociągać muszą za sobą też zmiany szerokości i długości geograficznej.

Zmiany wspomniane stały się w ostatnich lat dziesiątkach przedmiotem bardzo skrupulatnych badań. Tylko dzięki wydoskonalonym specjalnym metodom badania i nader precyzyjnym przyrządom, w połączeniu z celową organizacją badań w miejscowościach, na całej powierzchni ziemi stosownie obranych, zdołano w istocie stwierdzić drobne zmiany szerokości geograficznych. Z charakteru tych zmian można było dopiero wyciągnąć pewne wnioski, dotyczące ruchu biegunów na powierzchni ziemi.

Zmiany szerokości geograficznej, a więc też odpowiadający im ruch biegunów ziemskich, są bardzo nieznaczne. Oznaczmy przez φ szerokość geograficzną miejsca obserwacji w czasie t ,

przez φ' też szerokość w czasie t' , a przez λ długość geograficzną, to zmianę szerokości wyrazić można przez wzór

$$\varphi' - \varphi = x \cos \lambda + y \sin \lambda + \xi.$$

We wzorze tym x i y są to współrzędne prostokątne momentalnego bieguna w układzie, którego płaszczyzną xy jest płaszczyzna, prostopadła do kierunku osi bezwładności, początkiem jest punkt przecięcia się tej płaszczyzny z kierunkiem osi bezwładności, osią x jest rzut na płaszczyznę xy południka greenwichskiego, a osią y rzut na tę płaszczyznę południka, przechodzącego o 90° na zachód do Greenwich. Wartość tych współrzędnych ze względu na zmiany kąta φ wyraża się zazwyczaj w sekundach łukowych.

Spółrzędne x i y , jak wynika ze spostrzeżeń, są perjodycznymi funkcjami czasu, których okres według Chandlera wynosi około 14 miesięcy, a obszar wahań zawarty jest w granicach $\pm 0.''2$. Spostrzeżenia, specjalnie w tym celu robione, pozwalają wartość współrzędnych wyznaczyć dla każdej chwili, począwszy mniej więcej od r. 1900, w którym podjęte zostały systematyczne obserwacje przez organizację międzynarodową do badania wahań szerokości geograficznej.

Wyraz ξ jest niezależny od współrzędnych geograficznych miejsca obserwacji, a więc posiada jednakową wartość we wszystkich miejscach powierzchni ziemi. Podlega on również zmianom perjodycznym, których okres wynosi około roku, a obszar wynosi zaledwie $\pm 0.''03$. Wyraz ten został odkryty przez astronoma japońskiego Kimurę w r. 1901 i stąd też nosi nazwę wyrazu *Kimury*. Co do pochodzenia tego wyrazu istnieją różne hipotezy, dotąd jednakże przyczyna jego całkowicie wyjaśnioną nie została.

Zmiany szerokości i długości geogr. są tak małe, że uwzględniane być muszą jedynie w badaniach, wymagających zastosowania najwyższego stopnia dokładności.

ROZDZIAŁ III.

RUCH DZIENNY NIEBA.

27. Uwagi ogólne. Gdy obrany został na niebie jakiś układ sferyczny, to spólrzędne sferyczne danego punktu na niebie określają jego położenie w tym układzie. Jeżeli spólrzędne punktu ulegają zmianie, to istnieją trzy możliwości: 1. układ spólrzędnych nie zmienia położenia, a więc badany punkt zmienia położenie na niebie; 2. punkt nie zmienia swego położenia na niebie, zmienia więc położenie układ spólrzędnych; 3. zmieniają jednocześnie położenie układ spólrzędnych i dany punkt na niebie. W tym ostatnim przypadku spólrzędne same mogą nawet pozostawać niezmiennymi, jeżeli ruch punktu i zmiany położenia układu spólrzędnych wzajemnie się kompensują.

Gdy zasadnicze znaczenie w danym zagadnieniu posiada tylko wartość samych spólrzędnych oraz ich zmiana, wtedy jest rzeczą obojętną, która z trzech wymienionych możliwości w istocie zachodzi. Gdy jednakże głębiej wnikać pragniemy w istotę tych zmian, to zasadnicze znaczenie może mieć pytanie, czy w zmianach spólrzędnych nie objawia się też zmienność układu spólrzędnych i w jaki sposób można to stwierdzić.

Jak wiemy, trzy wielkości, χ , ψ i z (ust. 5) określają w zupełności położenie układu sferycznego względem innego takiegoż układu. Naturalnie określenie takie wymaga znowu dokładnego określenia układu odniesienia, to zaś w astronomji opiera się na obserwacji w związku z pewnymi założeniami, które wydają się dostatecznie uzasadnionymi.

Względy praktyczne nakazują o ile możności korzystać

tylko z takich układów, których położenie jest niezmiennie, lub gdy jest zmienne, to w każdej chwili wyznaczonem być może. W rzeczywistości wszystkie układy, określone przez zjawiska astronomiczne, zmieniają położenie; ale są pośród nich takie układy, których położenie zmienia się bardzo powoli, lub też podlega zmianom perjodycznym, zawartym w granicach niewielkich, tak że w pierwszym przybliżeniu układy te uważać można za niezmiennie.

Pozatem wybór układu określony jest przez charakter badanych zjawisk w związku z dążeniem, aby przebieg zjawisk mógł być przedstawiony w sposób najprostszy i najwygodniejszy.

Opierając się na bezpośrednim wrażeniu, że ciała niebieskie rozmieszczone są na kulistym sklepieniu niebieskiem, w którego środku znajduje się spostrzegacz ziemski, zakładamy w pierwszym przybliżeniu, że położenie punktu obserwacji w przestrzeni jest niezmiennie. Ponieważ takie same wrażenie odnosi obserwator, znajdujący się w dowolnym punkcie powierzchni ziemi, więc wnioskujemy, że rozmiary ziemi w stosunku do sklepienia niebieskiego są nieskończenie małe, albo, co jest równoznaczne, że rozmiary sklepienia niebieskiego w stosunku do ziemi są nieskończenie wielkie. Wobec tego też każdy punkt wnętrza ziemi, a więc i jej środek, uważany być może za środek sfery niebieskiej.

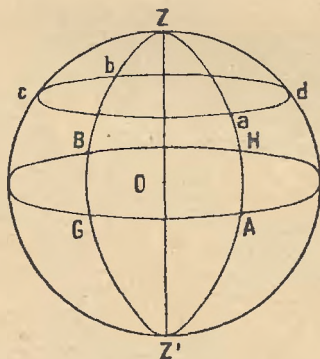
Wniosek powyższy w pierwszym przybliżeniu uważać będziemy za słuszny nie tylko dla pozornej sfery niebieskiej, jako całości, ale też w stosunku do odległości każdego z ciał niebieskich, które na tej sferze widzimy. Innemi słowy, uważać będziemy za równoległe do siebie proste, poprowadzone do jakiejś gwiazdy z dwóch jakichkolwiek punktów powierzchni ziemi lub jej wnętrza.

Dalszem założeniem, które czynimy w pierwszym przybliżeniu, jest to, że promień widzenia gwiazdy określa jej prawdziwy kierunek w przestrzeni, t. j. że światło od tej gwiazdy przybywa do obserwatora po linii prostej i momentalnie.

Przy badaniu dokładniejszym okazuje się, że założenia powyższe nie są w ścisłej zgodzie ze zjawiskami, wobec czego i wnioski, które z nich wypływają, nie są dokładne i tylko

w pierwszym przybliżeniu za słuszne uważane być mogą. W rozdziale tym i następnym właśnie tylko to pierwsze przybliżenie mieć będziemy na widoku.

28. Układ poziomy. Układ godzinny. Układ spólrzędnych astronomicznych jest określony, gdy dany jest na sklepieniu niebieskiem jakiś punkt, który obieramy za biegun układu, oraz jakiś punkt na kole głównem tego bieguna, który obrany jest za początek układu. Widzieliśmy, że w danem miejscu powierzchni ziemi pion ma kierunek niezmienny i łatwo dający się



Rycina 22.

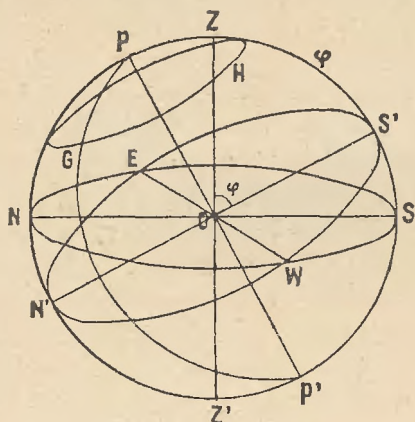
wyznaczyć. Kierunek ten możemy obrać za oś wielkiego koła, którego biegunami będą punkty przecięcia się z tą osią sklepienia niebieskiego.

Niechaj będzie O (ryc. 22) miejsce obserwacji, które przyjmujemy za środek sfery niebieskiej, a ZZ' niech będzie pionem punktu O. Jest on osią wielkiego koła HG, które zatem jest kołem, według którego poziom punktu O przecina się ze sklepieniem niebieskiem. Koło to nazywa się *horyzontem astronomicznym* punktu O. Biegunami tego koła są punkty Z i Z' , z których punkt Z, przypadający na widzialnej półkuli nieba, nazywa się *wierzchołkiem* czyli *zenitem* punktu O, punkt zaś Z' , leżący na półkuli niewidzialnej, nazywa się *spodkiem* czyli *nadirem* punktu O.

Każda płaszczyzna pionowa przecina się za sklepieniem niebieskiem według wielkiego koła, przechodzącego przez zenit

i nadir. Koła takie, np. ZAZ na ryc. 22, nazywają się *kołami wierzchołkowemi* lub *kołami wysokości*. Każda płaszczyzna pozioma przecina się ze sklepieniem niebieskiem według małego koła, równoległego do horyzontu astronomicznego. Te małe koła, np. abed, nazywają się *almukantaratami* albo *almukantarami*.

Układ współrzędnych sferycznych, którego kołem głównem jest horyzont astronomiczny, a biegunami są zenit i nadir, nazywa się *układem poziomowym*.



Rycina 23.

Inny kierunek w przestrzeni, dający się przez spostrzeżenia wyznaczyć, określony jest przez oś obrotu ziemi. Ruch ziemi dookoła osi dla obserwatora ziemskiego ujawnia się w ten sposób, że dookoła tej samej osi, lecz w kierunku przeciwnym, obracać się zdaje sklepienie niebieskie. Gdy weźmiemy pod uwagę jakąś gwiazdę, to zakreśli ona na niebie koło w tym samym czasie, w którym ziemia wykonywa obrót dookoła osi, a płaszczyzna tego koła jest prostopadła do osi ziemskiej. Dookoła tej prostej odbywa się ruch pozorny sklepienia niebieskiego; dlatego nazywa się ona *osią świata*, a punkty, w których ona przecina sklepienie niebieskie, nazywają się *biegunami świata*.

Niechaj na rycinie 23 punkt O będzie miejscem obserwa-

cji, prosta PP' niech oznacza oś świata, a więc punkty P i P' oznaczają bieguny świata; ten z nich, ku któremu zwrócona jest półkula północna ziemi nazywa się biegunem *północnym*, drugi zaś odpowiednio nazywa się biegunem *południowym*. Za biegun północny świata przyjmujemy biegun P , za południowy zaś biegun P' .

Kolem głównem biegunów świata jest wielkie koło $ES'WN'$, według którego przecina się ze sklepieniem niebieskiem płaszczyzna prostopadła do osi PP' , przechodząca przez punkt O . Koło to nazywa się *równikiem świata*. Wobec nieskończenie małych rozmiarów ziemi w stosunku do sklepienia niebieskiego równik świata jest identyczny z kołem przecięcia się płaszczyzny równika ziemskiego ze sferą niebieską.

Niech będzie OZ pionem miejsca obserwacji, punkt Z zenitem, koło $ESWN$ horyzontem astronomicznym, a ZPZ' płaszczyzną, przechodzącą przez oś ziemską i pion miejsca obserwacji; płaszczyzna ta jest to płaszczyzna południka geograficznego miejsca obserwacji. Przedłużając tę płaszczyznę do przecięcia się z pozornem sklepieniem niebieskiem, określimy na niem wielkie koła $PZP'Z'$, które nazywa się *południkiem astronomicznym* miejsca obserwacji. Jest to, jak wyjaśnia rysina, koło wierzchołkowe, przechodzące przez bieguny świata.

Kąt $S'OZ$ w płaszczyźnie południka jest to kąt nachylenia pionu do płaszczyzny równika; równa się on szerokości geograficznej miejsca obserwacji. A ponieważ jest

$$\sphericalangle S'OZ + \sphericalangle ZOP = \sphericalangle ZOP + \sphericalangle NOP = 90^\circ,$$

więc jest także

$$\sphericalangle S'OZ = \sphericalangle NOP = \varphi, \quad (a)$$

$$\sphericalangle S'Z = \sphericalangle NP = \varphi.$$

Każda płaszczyzna, przechodząca przez oś świata, przecina sklepienie niebieskie według wielkiego koła, przechodzącego przez oba bieguny świata. Koła takie, np. koło PGP' , nazywają się *kołami godzinnymi* lub *kołami zboczeń*. Ponieważ południk astronomiczny przechodzi przez bieguny świata, więc jest on

także kołem godzinnem, przechodzącym przez zenit i nadir miejsca obserwacji.

Małe koła, równoległe do równika, np. GH, nazywają się *równoleżnikami*.

Linja prosta NS, która jest wspólną średnicą horyzontu astronomicznego i południka astronomicznego miejsca obserwacji, nazywa się *linją południkową*. Z dwóch jej punktów końcowych ten, który znajduje się dalej od bieguna widzialnego P, t. j. punkt S, nazywa się punktem *południowym*, ten zaś, który znajduje się bliżej bieguna P, t. j. punkt N, nazywa się *punktem północnym*.

Linja prosta EW jest wspólną średnicą horyzontu astronomicznego i równika świata. Ponieważ punkty E i W są biegunami koła, przechodzącego przez bieguny horyzontu i równika, t. j. południka, więc prosta EW jest prostopadłą do płaszczyzny południka; jest ona więc też prostopadłą do prostych SN i S'N', według których płaszczyzna południka przecina się z płaszczyzną horyzontu astronomicznego i płaszczyzną równika. Wynika stąd, że punkty N, E, S i W dzielą horyzont na 4 ćwiartki. Punkt E, przypadający po lewej stronie obserwatora, patrzącego w kierunku od O ku S, nazywa się *punktem wschodnim*, punkt W, dyamentralnie przeciwległy punktowi E, nazywa się *punktem zachodnim*.

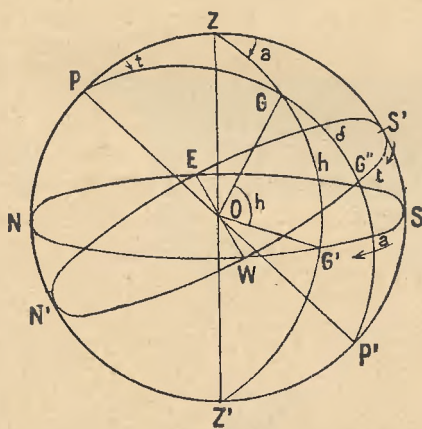
Nie określiliśmy dotąd jeszcze tego koła wierzchołkowego, które w układzie poziomym wyznacza początek układu na horyzoncie. Jeżeli za to koło początkowe obierzemy południk astronomiczny, to ponieważ jest on zarazem kołem godzinnem, więc punkt przecięcia jego z równikiem świata może również służyć za początek w układzie, którego kołem głównym jest równik. W istocie układ taki, zwany *układem godzinnym*, ma w astronomji bardzo rozległe zastosowanie.

Układ poziomy i układ godzinny są obecnie, skoro i co do początku każdego z nich uczyniliśmy wybór, całkowicie określone, i można położenie dowolnego punktu na niebie określić przez spólrzędne sferyczne czy to w jednym, czy w drugim z tych układów. Niechaj na ryc. 24 punkt Z będzie zenitem miejsca obserwacji O, koło ESWN jego horyzontem astronomicznym, a koło PZP'Z' jego południkiem astronomicznym.

Poprowadźmy przez jakąś gwiazdę G koło wierzchołkowe, które przecina horyzont w punkcie G' . Przyjmując za początek rachuby na horyzoncie punkt S , określimy położenie punktu G w układzie godzinnym przez spólrzędne

$$q = \cap G'G = h \text{ i } p = \cap SG' = a.$$

Oznaczenia q i p odpowiadają oznaczeniom ogólnym, sto-



Rycina 24.

sowanym w ustępie 4, oznaczenia h i a odnoszą się specjalnie do układu poziomowego.

W układzie poziomowym spólrzędna $q = h$ nosi nazwę *wysokości* i liczy się od 0° do $\pm 90^\circ$, spólrzędna zaś $p = a$ nazywa się *azymutem* i liczy się od S w kierunku, wskazanym przez strzałkę, od 0° do 360° . Oczywiście jest także

$$\sphericalangle G'OG = h \text{ i } \sphericalangle SZG = a.$$

Spólrzędnymi poziomowymi punktu G są więc jego wysokość i azymut. Zamiast wysokości często stosuje się jej dopełnienie do 90° , t. j. $z = 90^\circ - h$; z nazywa się *odległością zenitalną* gwiazdy G .

Gdy natomiast przez punkt G poprowadzimy koło godzinne PGP', które z równikiem przecina się w punkcie G'', i przyjmiemy za początek rachuby na równiku punkt S', to położenie gwiazdy G w układzie godzinnym określone jest przez współrzędne

$$q' = \cap G''G = \delta, \quad p' = \cap S'G'' = t.$$

Spółrzędna $q' = \delta$ nazywa się *zбочeniem* czyli *deklinacją*, współrzędna $p' = t$ nazywa się *kątem godzinnym*. Zбочenia i kąty godzinne liczy się w podobny sposób, jak wysokości i azymuty. Kierunek rachuby azymutów i kątów godzinnych, zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, które posuwają się z lewa na prawo, nazywa się w astronomji *wstęcznym*; odpowiednio kierunek, przeciwny ruchowi wskazówek zegara, nazywa się w astronomji *prostym*.

Zбочenie i kąt godzinny punktu G są to jego *spółrzędne godzinne*. Oczywiście jest także

$$\sphericalangle G''OG = \delta, \quad \sphericalangle S'PG = t.$$

Widzimy na ryc. 24, że $\sphericalangle ZOS' = \cap ZS'$ jest zбочeniem zenitu Z, a $\sphericalangle NOP = \cap NP$ jest wysokością widzialnego bieguna P. Oznaczmy

$$\sphericalangle ZOS' = \delta_z, \quad \sphericalangle NOP = h_p,$$

to zgodnie ze wzorami (a) jest

$$\delta_z = h_p = \varphi. \quad (b)$$

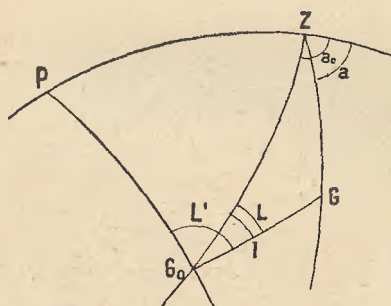
Wzór ten wyraża, że szerokość geograficzna miejsca obserwacji równa się zбочeniu jego zenitu lub też wysokości widzialnego bieguna.

W związku ze współrzędnymi sferycznymi poziomowymi i godzinnymi znajdują się współrzędne pozycyjne poziomowe i godzinne. Niechaj będzie (ryc. 25) P biegun świata, Z zenit i G₀ punkt, którego współrzędne w układzie poziomowym są α_0 i h_0 ,

a w układzie godzinny t_0 i δ_0 . Poprowadźmy przez G_0 koło wysokości ZG_0 , koło godzinne PG_0 oraz wielkie koło G_0G , przechodząc przez punkt G , który ma być określony przez swe współrzędne pozycyjne. Gdy oznaczymy

$$G_0G = l, \quad \angle ZG_0G = L, \quad \angle PG_0G = L',$$

to l i L są poziomymi, a l i L' godzinnymi współrzędnymi pozycyjnymi punktu G . Gdy a i h są współrzędnymi poziomowymi



Rycina 25.

punktu G , a t i δ jego współrzędnymi godzinnymi, to otrzymamy, uwzględniając kierunek wsteczny wzrostu kątów a i t , następujące wzory specjalne, odpowiadające wzorom ogólnym (22'):

$$\begin{aligned} a - a_0 &= -l \sin L \sec h_0, \\ h - h_0 &= l \cos L, \end{aligned} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} t - t_0 &= -l \sin L' \sec \delta_0, \\ \delta - \delta_0 &= l \cos L'. \end{aligned} \quad (d)$$

29. Przejście z układu poziomowego na godzinny i odwrotnie.

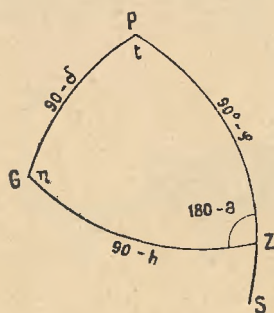
Uważając układ poziomowy za układ CAB (ust. 4), a układ godzinny za układ ZXY, mamy w tych układach:

$$\begin{aligned} p &= a, \quad q = h, \\ p' &= t, \quad q' = \delta. \end{aligned} \quad (e)$$

Koła główne układów poziomowego i godzinnego przecinają się ze sobą w punkcie E (ryc. 24), który zatem odpowiada punktowi A na ryc. 9. Wielkości, określające położenie układu godzinnego względem układu poziomowego, są następujące:

$$\psi = ES' = 90^0, \quad \chi = ES = 90^0, \quad i = PZ = 90^0 - \varphi. \quad (e')$$

Gdy więc w ogólnych wzorach zamiany współrzędnych (13) i (13') podstawimy wartości według (e) i (e'), to otrzymamy wzory



Rycina 26.

przejścia z układu poziomowego na układ godzinny i odwrotnie. Wzory te są:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos a, \\ \cos \delta \sin t &= \cos h \sin a, \\ \cos \delta \cos t &= \sin h \cos \varphi + \cos h \sin \varphi \cos a. \end{aligned} \quad (66)$$

oraz

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t, \\ \cos h \sin a &= \cos \delta \sin t, \\ \cos h \cos a &= -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t. \end{aligned} \quad (66')$$

Wzory powyższe wypływają też bezpośrednio z trójkąta sferycznego, którego wierzchołkami są: biegun świata P, zenit miejsca obserwacji Z oraz gwiazda G (ryc. 26). W trójkącie

tym, zgodnie ze stosowaniem poprzednio oznaczeniami, znaczenie boków jest następujące:

$$PZ = 90^\circ - \varphi, \quad PG = 90^\circ - \delta, \quad ZG = 90^\circ - h.$$

Co się tyczy kątów, to ponieważ koło PZ jest południkiem astronomicznym miejsca obserwacji, więc kąt $SGZ = a$ jest azymutem gwiazdy G, kąt $ZPG = t$ jej kątem godzinnym. A więc w trójkącie PZG wartości kątów są:

$$\sphericalangle GZP = 180^\circ - \alpha, \quad \sphericalangle ZPG = t, \quad \sphericalangle PGZ = \gamma.$$

Trójkąt ZPG nazywa się często *trójkątem paralaktycznym*, a kąt PGZ *kątem paralaktycznym*. Oczywiście z trójkąta ZPG prócz wzorów (66) i (66') wyprowadzić można jeszcze liczne inne związki, zachodzące między jego elementami, z których niejednokrotnie wypadnie nam korzystać.

Podstawiając wartości (e) i (e') we wzorach ogólnych (16) i (16'), otrzymamy wzory różniczkowe dla układu poziomowego i godzinowego w postaci następującej:

$$\begin{aligned} d\delta &= \cos \gamma dh + \cos h \sin \gamma da + \cos t d\varphi, \\ \cos \delta dt &= -\sin \gamma dh + \cos h \cos \gamma da + \sin \delta \sin t d\varphi, \end{aligned} \quad (67)$$

oraz

$$\begin{aligned} dh &= \cos \gamma d\delta - \cos \delta \sin \gamma dt - \cos a d\varphi, \\ \cos h da &= \sin \gamma d\delta + \cos \delta \cos \gamma dt - \sin h \sin a d\varphi. \end{aligned} \quad (67')$$

Tu znaki w wyrazach, w których zachodzi czynnik $\sin \gamma$, są przeciwne, aniżeli we wzorach (16) i (16'), ponieważ przyjmujemy, że kąt paralaktyczny ma zawsze ten sam znak, co kąt godzinny t , gdy przy wyprowadzaniu wzorów ogólnych (16) takiego warunku nie postawiliśmy.

Wreszcie wzory Fabritiusa (17') i (18') w zastosowaniu do współrzędnych poziomowych i godzinnych otrzymują postać:

$$\begin{aligned}\Delta \delta &= d\delta - \frac{1}{2}(dt)^2 \sin \delta \cos \delta \sin 1'', \\ \Delta t &= dt + dt d\delta \tan \delta \sin 1'';\end{aligned}\quad (68)$$

$$\begin{aligned}\Delta h &= dh - \frac{1}{2}(da)^2 \sin h \cos h \sin 1'', \\ \Delta a &= da + da dh \tan h \sin 1''.\end{aligned}\quad (68')$$

Wzory przejścia dla współrzędnych pozycyjnych otrzymuje się ze wzorów (25) po odpowiednich podstawieniach. Kąt τ , który występuje we wzorach (25), jest w tym przypadku kątem paralaktycznym początku układu współrzędnych, gdyż, jak to wiadać na ryc. 25, jest $L' = L + \angle PG_0 Z$. Oznaczmy $\angle PG_0 Z = \tau_0$, to wzory przejścia są:

$$\begin{aligned}t - t_0 &= \{(a - a_0) \cos h_0 \cos \tau_0 - (h - h_0) \sin \tau_0\} \sec \delta_0, \\ \delta - \delta_0 &= (a - a_0) \cos h_0 \sin \tau_0 + (h - h_0) \cos \tau_0,\end{aligned}\quad (69)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\cos \delta_0 \sin \tau_0 &= \cos \varphi \sin a_0, \\ \cos \delta_0 \cos \tau_0 &= \sin \varphi \cos h_0 + \cos \varphi \sin h_0 \cos a_0.\end{aligned}\quad (69')$$

Podobnie otrzymuje się

$$\begin{aligned}a - a_0 &= \{(t - t_0) \cos \delta_0 \cos \tau_0 + (\delta - \delta_0) \sin \tau_0\} \sec h_0, \\ h - h_0 &= - (t - t_0) \cos \delta_0 \sin \tau_0 + (\delta - \delta_0) \cos \tau_0,\end{aligned}\quad (70)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\cos h_0 \sin \tau_0 &= \cos \varphi \sin t_0, \\ \cos h_0 \cos \tau_0 &= \sin \varphi \cos \delta_0 - \cos \varphi \sin \delta_0 \cos t_0.\end{aligned}\quad (70')$$

30. Kilka zastosowań wzorów (66) i (66').

1. Wzory (66) i (66') służą przede wszystkim do tego, aby przy znanej wartości φ obliczyć t i δ , gdy dane są a i h , lub też odwrotnie obliczyć a i h , gdy dane są t i δ . W zastosowaniu praktycznem nadaje się wzorom tym postać, dogodną do rachunku logarytmami, przez wprowadzenie kątów pomocniczych. Kładąc we wzorach (66)

$$\begin{aligned}\sin h &= m \cos M, \\ \cos h \cos a &= m \sin M,\end{aligned}\tag{f}$$

otrzymamy wzory

$$\begin{aligned}\sin \delta &= m \sin (\varphi - M), \\ \cos \delta \sin t &= \cos h \sin a, \\ \cos \delta \cos t &= m \cos (\varphi - M).\end{aligned}\tag{g}$$

Podobnie, kładąc we wzorach (66')

$$\begin{aligned}\sin \delta &= n \sin N, \\ \cos \delta \cos t &= n \cos N,\end{aligned}\tag{h}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned}\sin h &= n \cos (\varphi - N), \\ \cos h \sin a &= \cos \delta \sin t, \\ \cos h \cos a &= n \sin (\varphi - N).\end{aligned}\tag{i}$$

Wzory (g) i (i) są to poszukiwane wzory logarytmiczne. Wzory kontrolne (21) i (21') mają w zastosowaniu do tego specjalnego przypadku postać następującą:

$$\cos \delta \sin (a - t) = 2 m \sin a \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(M + 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right), \tag{k}$$

$$\cos h \sin (a - t) = 2 n \sin t \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(N + 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right), \tag{l}$$

$$\sin \frac{h - \delta}{2} = m \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(M + 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \sec \frac{h + \delta}{2}, \tag{k'}$$

$$\sin \frac{h - \delta}{2} = n \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(N + 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \sec \frac{h + \delta}{2}. \tag{l'}$$

Z powodu obrotu ziemi dokoła osi wszystkie punkty sfery niebieskiej zakreślają pozornie koła, równoległe do równika, co

znaczy innemi słowy, że wskutek pozornego obrotu nieba nie zmienia się zбочenie gwiazd. Gdy więc we wzorach (66) wielkości φ i δ , niezależne od obrotu ziemi, uważać będziemy za znane, to z trzech wielkości zmiennych, występujących w tych wzorach, mianowicie t , a i h , tylko jedna musi być daną, aby pozostałe wyznaczone być mogły.

Gdy chodzi o wyznaczenie a i h na podstawie danej wartości t , to rozwiązanie tego zadania dają wzory (h) i (i). Jednakże niekiedy zdarza się, że znajomość a nie jest potrzebna i chodzi tylko o wyznaczenie h ; wtedy δ wyznacza się w sposób następujący. Ponieważ jest

$$\cos t = 1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2},$$

więc z pierwszego wzoru (66') wypływa

$$\sin h = \cos(\varphi - \delta) - 2 \cos \delta \cos \varphi \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Pisząc tu

$$\sin h = \cos z = 1 - 2 \sin^2 \frac{z}{2},$$

$$\cos(\varphi - \delta) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi - \delta}{2},$$

otrzymamy

$$\sin^2 \frac{z}{2} = \sin^2 \frac{\varphi - \delta}{2} + \cos \delta \cos \varphi \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Oznaczmy

$$\sin \frac{\varphi - \delta}{2} = n,$$

$$\sqrt{\cos \delta \cos \varphi} = m, \quad (m)$$

to jest

$$\sin^2 \frac{z}{2} = n^2 + m^2 \sin^2 \frac{t}{2} = n^2 \left(1 + \frac{m^2}{n^2} \sin^2 \frac{t}{2} \right).$$

Gdy zaś położymy

$$\frac{m}{n} \sin \frac{t}{2} = \cotg \psi, \quad (n)$$

to znajdziemy wreszcie

$$\sin \frac{z}{2} = \frac{n}{\sin \psi}. \quad (o)$$

Obliczanie sposobem powyższym szczególnie wtedy jest znacznie uproszczone, gdy dla danego obserwatorium istnieją tablice wielkości m i n z argumentem δ , których przygotowanie nie wymaga wielkiego trudu. Wtedy wzory (n) i (o) wyznaczają $z = 90^\circ - h$ na podstawie danego t .

2. Znaleźć wysokość h i kąt godzinny t , gdy dany jest azymut a .

Gdy we wzorze

$$\sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos a$$

oznaczymy

$$\sin \varphi = b \cos B, \quad \cos \varphi \cos a = b \sin B, \quad (p)$$

to wzór ten otrzyma postać

$$\sin \delta = b \sin (h - B),$$

skąd wypływa

$$\sin (h - B) = \frac{\sin \delta}{b} = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \cos B. \quad (q)$$

Obliczywszy więc b i B zapomocą wzorów (p), znajdujemy ze wzoru (q) $h - B$, a więc też h .

W celu znalezienia kąta godzinnego t dzielimy trzecie z równań (66') przez drugie; otrzymujemy

$$\cotg a \sin t = - \tang \delta \cos \varphi + \sin \varphi \cos t,$$

a więc też

$$\tang \delta \cos \varphi = \sin \varphi \cos t - \cotg a \sin t.$$

Położmy tu

$$\sin \varphi = c \sin C, \quad \cotg a = c \cos C, \quad (r)$$

to jest

$$\text{tang } \delta \cos \varphi = c \sin (C - t),$$

a stąd

$$\sin (C - t) = \frac{\text{tang } \delta \cos \varphi}{c} = \text{tang } \delta \cotg \varphi \sin C. \quad (s)$$

Wzory (r) i (s) rozwiązują zadanie.

3. Znaleźć kąt godzinny t i azymut a , gdy daną jest wysokość h .

Z pierwszego wzoru (66') wypływa bezpośrednio

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi}, \quad (t)$$

a z pierwszego wzoru (66)

$$\cos a = - \frac{\sin \delta - \sin h \sin \varphi}{\cos h \cos \varphi}. \quad (u)$$

Wzory (t) i (u) mają postać niedogodną w zastosowaniu praktycznem i dlatego do obliczenia t i a używa się wzorów wygodniejszych, które otrzymuje się z powyższych w sposób następujący. Uwzględniając wzór (t), tworzymy

$$1 + \cos t = \frac{\cos \delta \cos \varphi + \sin h - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi} = \frac{\cos (\varphi + \delta) + \cos z}{\cos \delta \cos \varphi},$$

$$1 - \cos t = \frac{\cos \delta \cos \varphi - \sin h + \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi} = \frac{\cos (\varphi - \delta) - \cos z}{\cos \delta \cos \varphi}.$$

Dzieląc drugie z powyższych równań przez pierwsze, otrzymamy:

$$\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} = \text{tang}^2 \frac{t}{2} = \frac{\sin \frac{z + \varphi - \delta}{2} \sin \frac{z - \varphi + \delta}{2}}{\cos \frac{z + \varphi + \delta}{2} \cos \frac{z - \varphi - \delta}{2}}.$$

Położmy

$$z + \varphi + \delta = 2s, \quad (v)$$

to jest

$$\begin{aligned} z + \varphi - \delta &= 2(s - \delta), \\ z - \varphi + \delta &= 2(s - \varphi), \\ -(z - \varphi - \delta) &= 2(s - z), \end{aligned} \quad (v')$$

a więc

$$\operatorname{tang} \frac{t}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin(s - \delta) \sin(s - \varphi)}{\cos s \cos(s - z)}}. \quad (w)$$

Podobnie tworzymy, uwzględniając wzór (u):

$$1 + \cos a = \frac{\cos h \cos \varphi - \sin \delta + \sin h \sin \varphi}{\cos h \cos \varphi} = \frac{\sin(z + \varphi) - \sin \delta}{\cos h \cos \varphi},$$

$$1 - \cos a = \frac{\cos h \cos \varphi + \sin \delta - \sin h \sin \varphi}{\cos h \cos \varphi} = \frac{\sin(z - \varphi) + \sin \delta}{\cos h \cos \varphi},$$

i z tych równań otrzymujemy, jak poprzednio,

$$\operatorname{tang}^2 \frac{a}{2} = \frac{\sin \frac{z + \delta - \varphi}{2} \cos \frac{z - \varphi - \delta}{2}}{\sin \frac{z + \varphi - \delta}{2} \cos \frac{z + \varphi + \delta}{2}},$$

albo wprowadzając oznaczenia według (v) i (v'),

$$\operatorname{tang} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin(s - \varphi) \cos(s - z)}{\sin(s - \delta) \cos s}}. \quad (x)$$

Wzory (w) i (x) są poszukiwanemi wzorami logarytmicznemi do obliczenia kątów t i a .

31. Przykłady do ustępów 29 i 30.

1. Dane są współrzędne poziome punktu G_0 , $\alpha_0 = 15^{\circ}25'$, $h_0 = 58^{\circ}19'$, współrzędne pozycyjne poziome punktu G , $l = 115''$, $L = 130^{\circ}20'$, i szerokość geograficzna miejsca obserwacji $\varphi = 49^{\circ}50'$

Znaleźć współrzędne poziome punktu G, kąt pozycyjny tego punktu w układzie pozycyjnym godzinowym oraz jego współrzędne godzinne.

Obliczamy $a - a_0$ i $h - h_0$ według wzorów (c) ustępu 28; następnie obliczamy τ_0 według wzorów (70'); wreszcie, ponieważ $L' = L + \tau_0$, znajdujemy $t - t_0$ i $\delta - \delta_0$ według wzorów (d) ustępu 28.

l	2.0607	$\left\{ \begin{array}{l} \sin \varphi \\ \cos h_0 \end{array} \right.$	9.8832	L'	140°.46'
$\sin L$	9.8821	$\left\{ \begin{array}{l} \cos h_0 \\ \Pi \end{array} \right.$	9.7203	l	2.0607
$\sec h_0$	0.2797	Π	9.6035	$\sin L'$	9.8011
$a - a_0$	2.2225 n	$\left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi \\ \sin h_0 \end{array} \right.$	9.8096	$\sec \delta_0$	0.0240
$a - a_0 = -166.''9$		$\left\{ \begin{array}{l} \sin h_0 \\ \cos a_0 \end{array} \right.$	9.9299	$t - t_0$	1.8858 n
$a = 15^\circ 22' 13.'' 1$		$\cos a_0$	9.9841	$t - t_0 = -76.''9$	
$\cos L$	9.8111 n	Π	9.7236	$\cos L'$	9.8891 n
$h - h_0$	1.8718 n	A	9.8799	$\delta - \delta_0$	1.9498 n
$h - h_0 = -74''.4$		B	0.2451	$\delta - \delta_0 = -89.''1$	
$h = 58^\circ 17' 45.''6$		$\cos \delta_0 \cos \tau_0$	9.9687		
$\sin a_0$	9.4246	$\cos \delta_0 \sin \tau_0$	9.2342		
		$\tan \tau_0$	9.2655		
		$\tau_0 = 10^\circ 26'$			
		$\sin \tau_0$	9.2582		
		$\cos \delta_0$	9.9760		

Przy zastosowaniu wzorów (70') zostały użyte logarytmy addycyjne i do tego zastosowania odnoszą się wielkości A i B . Logarytmy takie znaleźć można w wielu zbiorach tablic rachunkowych, np. w zbiorze tablic Bidschofa i Vitala (Więdeń i Lipsk 1905).

W celu znalezienia t i δ należy obliczyć t_0 i δ_0 według wzorów (66) przy pomocy (f) i (g) ust. 30. Wykonamy ten rachunek, stosując logarytmy sześciomiejscowe, aby otrzymać t i δ z dokładnością do $0''.1$.

$m \cos M$	9.929911	$\sin(\varphi - M)$	9.514411
$\cos h_0$	9.720345	m	9.995725
$\cos a_0$	9.984085	$\sin \delta_0$	9.510136
$m \sin M$	9.704430	$\delta_0 = 18^\circ 53' 11''.5$	
$\text{tang } M$	9.774519	$\sin a_0$	9.424615
$M = 30^\circ 45' 10''.0$		$\cos h_0$	9.720345
$\sin M$	9.708705	$\cos \delta_0 \sin t_0$	9.144960
m	9.995725	$\cos(\varphi - M)$	9.975459
$\varphi - M = 19^\circ 4' 50''.0$		$\cos \delta_0 \cos t_0$	9.971184
		$\text{tang } t_0$	9.173776
		$t_0 = 8^\circ 29' 10''.0$	

Dla kontroli zastosujemy wzory (k) i (k') ust. 30.

$$\begin{array}{lcl}
 a_0 - t_0 = 6^\circ 55' 50''.0 & \left\{ \begin{array}{ll} 2 & 0.301030 \\ m & 9.995725 \\ \sin a_0 & 9.424615 \\ \cos \delta_0 \cos(a_0 - t_0) & 9.057554 \end{array} \right. & \cos \left(M + 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) 9.800401 \\
 \cos \delta_0 & 9.975965 & \\
 \sin(a_0 - t_0) & 9.081589 & \\
 \cos \delta_0 \cos(a_0 - t_0) & 9.057554 & \\
 \frac{\varphi}{2} = 24^\circ 55' & \left\{ \begin{array}{ll} \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) & 9.535783 \\ \Pi & 9.057554 \end{array} \right. & \\
 45^\circ & \frac{\varphi}{2} = 20^\circ 5' & \\
 M + 45^\circ - \frac{\varphi}{2} = 50^\circ 50' 10''.0 & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \frac{1}{2}(h_0 - \delta_0) = 19^\circ 42' 54''.3 & & \\
 \frac{1}{2}(h_0 + \delta_0) = 38^\circ 36' 5''.8 & & \\
 \left\{ \begin{array}{ll} \sin \frac{1}{2}(h_0 - \delta_0) & 9.528072 \\ \cos \frac{1}{2}(h_0 + \delta_0) & 9.892930 \end{array} \right. & & \\
 \Pi & 9.421002 & \\
 m & 9.995725 & \\
 \left\{ \begin{array}{ll} \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) & 9.535783 \\ \sin \left(M + 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) & 9.889494 \end{array} \right. & & \\
 \Pi & 9.421002 &
 \end{array}$$

Z otrzymanymi poprzednio wartościami na $t - t_0$ i $\delta - \delta_0$ otrzymuje się:

$$t = 8^\circ 29' 10.''0 - 1' 16.''9 = 8^\circ 27' 53.''1,$$

$$\delta = 18^\circ 53' 11.''5 - 1' 29.''1 = 18^\circ 51' 42.''4.$$

2. Mając dane $\varphi = 49^\circ 50'$, $\delta = +18^\circ 51' 42.''4$ oraz $t = 8^\circ 27' 53.''1$, znaleźć azymut a i wysokość h .

$\sin \delta = n \sin N$	9.509587	$\cos \delta$	9.976029
$\cos \delta$	9.976029	$\sin t$	9.167911
$\cos t$	9.995243	$\cos h \sin a$	9.143940
$\cos \delta \cos t = n \cos N$	9.971272	n	9.995745
$\text{tang } N$	9.538315	$\sin (\varphi - N)$	9.709036
$N = 19^\circ 3' 16.''6$		$\cos h \cos a$	9.704781
$\cos N$	9.975527	$\text{tang } a$	9.439159
n	9.995745	$a = 15^\circ 22' 13.''4$	
$\varphi - N = 30^\circ 46' 43.''5$		$\cos a$	9.984182
		$\cos h$	9.720599
		$h = 58^\circ 17' 45.''4$	

Kontrolę rachunku przeprowadzamy zapomocą wzorów (I) i (I') ust. 30.

$$45^\circ - \frac{\varphi}{2} = 20^\circ 5' \qquad h + \delta = 77^\circ 9' 27.''8$$

$$N + 45^\circ - \frac{\varphi}{2} = 39^\circ 8' 16.''6 \qquad h - \delta = 39^\circ 26' 3.''0$$

$a - t = 6^{\circ}54'20''.3$		$\frac{1}{2}(h + \delta) = 38^{\circ}34'43''.9$
$\sin(a - t)$	9.080029	$\frac{1}{2}(h - \delta) = 19^{\circ}43'1''.5$
$\cos h$	9.720599	$\sin \frac{1}{2}(h - \delta)$
$\cos h \sin(a - t)$	8.800628	$\cos \frac{1}{2}(h + \delta)$
2	0.301030	$\sin \frac{h - \delta}{2} \cos \frac{h + \delta}{2}$
n	9.995745	n
$\sin t$	9.167911	$\sin \left(45^{\circ} - \frac{\varphi}{2}\right)$
$\sin \left(45^{\circ} - \frac{\varphi}{2}\right)$	9.535783	$\cos \left(N + 45^{\circ} - \frac{\varphi}{2}\right)$
$\sin \left(N + 45^{\circ} - \frac{\varphi}{2}\right)$	9.800160	
Π	8.800629	Π

Otrzymane wartości na h i a , jak widzimy, nieznacznie różnią się od wartości, danych w poprzednim przykładzie, co jest skutkiem niezupełnej dokładności obliczenia logarytmicznego.

Gdyby chodziło tylko o znalezienie wysokości h , zastosowalibyśmy wzory (m), (n) i (o) w sposób następujący:

$\varphi - \delta = 30^{\circ} 58' 17''.6$	$\frac{t}{2} = 4^{\circ} 13' 56''.5$
$\frac{1}{2}(\varphi - \delta) = 15^{\circ} 29' 8''.8$	
$n = 9.426510$	$\sin \frac{t}{2} = 8.868066$
$\cos \delta = 9.976029$	$\frac{m}{n} = 0.466289$
$\cos \varphi = 9.809569$	$\cotg \psi = 9.334355$
$\cos \delta \cos \varphi = 9.785598$	$\psi = 77^{\circ} 48' 50''.6$
$m = 9.892799$	$\sin \psi = 9.990102$
	$\sin \frac{z}{2} = 9.436408$
	$\frac{z}{2} = 15^{\circ} 51' 7''.4$
	$z = 31^{\circ} 42' 14''.8$
	$h = 58^{\circ} 17' 45''.2$

3. Dane są te same wartości φ i δ , co w przykładzie poprzednim, oraz $a = 15^{\circ} 22' 13''.1$; znaleźć h i t .

Stosujemy wzory (p), (q), (r) i (s) ust. 30.

$\sin \varphi = 9.883191$	$\sin \delta = 9.509587$
$\cos \varphi = 9.809569$	$\operatorname{cosec} \varphi = 0.116809$
$\cos a = 9.984182$	$\cos B = 9.889633$
$b \sin B = 9.793751$	$\sin(h - B) = 9.516029$
$\operatorname{tang} B = 9.910560$	$h - B = 19^{\circ} 9' 16''.3$
$B = 39^{\circ} 8' 29''.1$	$h = 58^{\circ} 17' 45''.4$
$\cotg a = 9.560843$	$\operatorname{tang} \delta = 9.533558$
$\operatorname{tang} C = 9.322348$	$\cotg \varphi = 9.926378$
$C = 11^{\circ} 51' 47''.5$	$\sin C = 9.312972$
	$\sin(C - t) = 8.772908$
	$C - t = 3^{\circ} 23' 54''.5$
	$t = 8^{\circ} 27' 53''.0$

4. Dane są φ i δ , jak w przykładach poprzednich, oraz $h = 58^\circ 17' 45''.5$; znaleźć t i α .

Stosujemy wzory (v), (w) i (x) ust. 30.

$h = 58^\circ 17' 45''.5$	$\sin(s - \delta)$	9.716072
$z = 31^\circ 42' 14''.5$	$\sin(s - \varphi)$	7.805652
$\varphi = 49^\circ 50'$	$\cos s$	9.806258
$\delta = 18^\circ 21' 42''.4$	$\cos(s - z)$	9.976968
$2s = 100^\circ 23' 56''.9$	$\sin(s - \delta) \sin(s - \varphi)$	7.521724
$s = 50^\circ 11' 58''.5$	$\cos s \cos(s - z)$	9.783226
$s - \delta = 31^\circ 20' 16''.1$	$\tan^2 \frac{t}{2}$	7.738498
$s - z = 18^\circ 29' 44''.0$	$\tan \frac{t}{2}$	8.869249
$s - \varphi = 0^\circ 21' 58''.5$	$\frac{t}{2} = 4^\circ 13' 56''.5$	
	$t = 8^\circ 27' 53''.0$	

$$\sin(s - \varphi) \cos(s - z) \quad 7.782620$$

$$\sin(s - \delta) \cos s \quad 9.522330$$

$$\tan^2 \frac{a}{2} \quad 8.260290$$

$$\tan \frac{a}{2} \quad 9.130145$$

$$\frac{a}{2} = 7^\circ 41' 6''.5$$

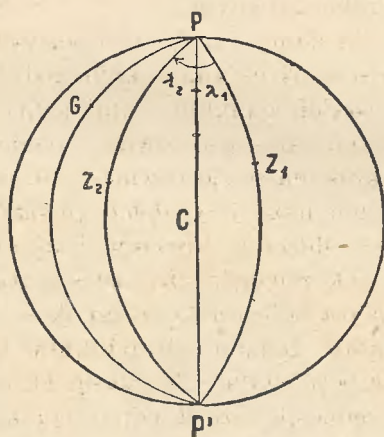
$$a = 15^\circ 22' 13''.0$$

32. Związek, zachodzący między kątem godzinnym a długością geograficzną. Doba gwiazdowa. Ruch ziemi dookoła osi objawia się w ten sposób, że z dwóch współrzędnych godzinnych δ i t pierwsza nie ulega zmianie, druga zaś, t. j. kąt godzinny, wzrasta stale i w okresie jednego obrotu ziemi w danym punkcie obserwacji przyjmuje wszystkie wartości od 0° do 360° . Oczywiście wartość, jaką ma kąt godzinny w danej chwili, jest różna na różnych południkach geograficznych.

Gdy A_1 i A_2 są dwoma punktami na powierzchni ziemi,

których długości geograficzne są odpowiednie λ_1 i λ_2 , a punkt A_2 jest położony na zachód względem A_1 , to $\lambda_2 - \lambda_1$ jest różnicą długości geograficznych tych punktów i równa się kątowi, jaki tworzą ze sobą płaszczyzny południków tych punktów.

Taką samą wartość ma oczywiście kąt, utworzony przez południki astronomiczne punktów A_1 i A_2 , którego wierzchołkiem jest jeden z biegunów świata. Gdy więc na ryc. 27 punkty P i P' oznaczają bieguny świata, a punkty Z_1 i Z_2 — zenity



Rycina 27.

punktów A_1 i A_2 , to półkola PZ_1P' i PZ_2P' są południkami astronomicznymi tych punktów, a kąt $Z_1PZ_2 = \lambda_2 - \lambda_1$.

Weźmy pod uwagę gwiazdę G ; kąty godzinne jej w punktach A_1 i A_2 , jak widać z ryciny, są odpowiednio

$$\angle Z_1PG = t_1, \quad \angle Z_2PG = t_2,$$

i jest

$$\lambda_2 - \lambda_1 = t_1 - t_2,$$

albo

$$t_1 + \lambda_1 = t_2 + \lambda_2.$$

Wzór powyższy ważny jest oczywiście też dla południka głównego, na którym jest $\lambda = 0$. Oznaczając więc przez t_0 kąt

godzinny gwiazdy G na południku głównym, a przez t kąt godzinny tej samej gwiazdy w miejscu obserwacji, którego długość geograficzna wynosi λ , otrzymamy ogólnie

$$t + \lambda = t_0 \quad (71)$$

Wzór ten powiada, że suma długości geograficznej i kąta godzinnego danej gwiazdy w danej chwili jest na całej powierzchni ziemi wielkością stałą, równą kątowi godzinnemu tejże gwiazdy na południku głównym.

Ponieważ λ dla danego miejsca obserwacji jest wielkością stałą, więc oczywiście okres zmian kąta godzinnego t od 0° do 360° jest dla wszystkich punktów ziemi jednakowy. Gdy poza-tem założymy, że ten okres jest również jednakowy dla wszystkich gwiazd, to okres ten ściśle równa się okresowi obrotu ziemi dokoła osi. Okres ten nazwijmy *dobą gwiazdową* i uważajmy go za niezmienny ¹⁾. Możemy okres ten obrać za jednostkę czasu. Z drugiej strony tak z teorii, jak i ze spostrzeżeń wynika, że obrót ziemi dokoła osi odbywa się z prędkością stałą, wskutek czego i wzrost kątów godzinnych punktów nieruchomych na niebie zachodzi proporcjonalnie do czasu. Dzięki temu możemy określić mniejsze jednostki czasu, odpowiadające pewnym określonym przyrostom kąta godzinnego. Okresy czasu, w których kąt godzinny wzrasta odpowiednio o 15° , $15'$, $15''$, nazywają się godziną gwiazdową, minutą gwiazdową i sekundą gwiazdową. Jest więc z używanymi zwykle oznaczeniami:

1 doba	gwiazdowa	$= 24$ godzin gwiazdowych	$= 24^h$,
1 godzina	»	$= 60$ minut gwiazdowych	$= 60^m$,
1 minuta	»	$= 60$ sekund gwiazdowych	$= 60^s$.

Ale możemy okresy, w których kąt godzinny wzrasta odpowiednio o 1° , $1'$, $1''$ również uważać za jednostki czasu. Wówczas jest

$$\begin{aligned} 1 \text{ doba gw.} &= 24^h = 360^\circ, \\ 1^h &= 15^\circ; 1^\circ = 4^m, \\ 1^m &= 15'; 1' = 4^s, \\ 1^s &= 15''. \end{aligned}$$

¹⁾ Dokładną definicję doby gwiazdowej podajemy w rozdziale X.

Skutkiem takiej odpowiedniości między miarami łukowemi a miarami czasu zazwyczaj wyraża się kąty godzinne w jednostkach czasu, ale też i odwrotnie czas często wyraża się przez jednostki łukowe. Na końcu książki dodane są tablice, służące do zamiany godzin i minut na sekundy (tabl. III), do zamiany godzin, minut i sekund na doby i odwrotnie (tabl. IV) oraz do zamiany stopni na godziny i odwrotnie (tabl. V).

Ponieważ kąt godzinny występuje we wzorach (66) i (66') w postaci funkcji perjodycznych $\sin t$ i $\cos t$, więc wielkości zmienne a i h , zależne od t , mają ten sam okres zmian, co t , t. j. dobę gwiazdową, i przy danych wartościach φ i δ tej samej wartości t odpowiadają zawsze te same wartości a i h ; tylko zmiany tych wielkości są mniej proste niż zmiany t . W tych zmianach, gdy wielkościom φ i δ nadawać będziemy wszystkie te wartości, jakie one dla różnych punktów powierzchni ziemi i sfery niebieskiej przybierać mogą, objawia się całokształt zjawisk, związanych z tak zwanym *ruchem dziennym* nieba. Wszystkie te zjawiska zawarte są więc w każdym z równoznacznych systemów wzorów (66) i (66') i wypływają z dyskusji szczegółowej tych wzorów.

Zajmijmy się więc tą dyskusją i w tym celu napiszmy jeszcze raz na tem miejscu wzory (66')

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t, \\ \cos h \sin a &= \cos \delta \sin t, \\ \cos h \cos a &= -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t.\end{aligned}\tag{y}$$

Zastąpmy w tych wzorach δ przez $-\delta$, a φ przez $-\varphi$ i oznaczmy przez h_1 i a_1 odpowiednie wartości na wysokość i azymut, to jest:

$$\begin{aligned}\sin h_1 &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t, \\ \cos h_1 \sin a_1 &= \cos \delta \sin t, \\ \cos h_1 \cos a_1 &= \sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi \cos t.\end{aligned}\tag{y'}$$

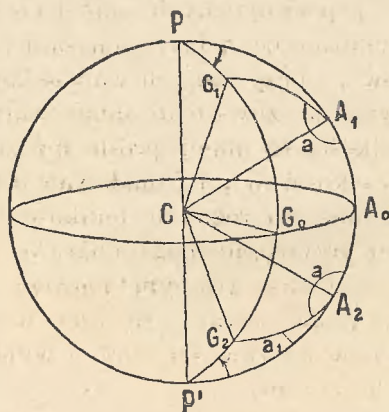
Z porównania wzorów (y) i (y') widzimy przedewszystkiem, że $\sin h_1 = \sin h$, a więc też $h_1 = h$. To znaczy, że w miejscu obserwacji, którego szerokość geograficzna jest $-\varphi$ przy danym kącie godzinnym gwiazda, której zboczenie jest $-\delta$, ma

taką samą wysokość, jak gwiazda, której zboczenie jest $+\delta$, w miejscu, którego szerokość geograficzna jest $+\varphi$.

Dalej z porównania tych wzorów wynika, że

$$\begin{aligned}\sin a_1 &= \sin a, \\ \cos a_1 &= -\cos a,\end{aligned}$$

skąd wnioskujemy, że $a_1 = 180^\circ - a$. Jednakże ta różnica azy-



Rycina 28.

mutów w istocie jest tylko pozorna, co wyjaśnia ryc. 28. Jeżeli jest

$$A_1 A_0 = A_0 A_2, \quad G_1 G_0 = G_0 G_2 \quad \text{i} \quad \sphericalangle A_1 P G_1 = \sphericalangle A_2 P' G_2,$$

to jest też

$$A_1 G_1 = A_2 G_2 \quad \text{i} \quad \sphericalangle P A_1 G_1 = \sphericalangle P' A_2 G_2.$$

Na półkuli północnej azymutem gwiazdy G_1 jest kąt $A_0 A_1 G_1$, liczony od tej części południka, która leży po stronie przeciwnej, niż biegun widzialny P. Gdy od tej samej części południka liczyć będziemy azymut gwiazdy G_2 na półkuli południowej, to jest nim kąt $a_1^* = \sphericalangle P' A_2 G_2 = 180^\circ - a$. Gdy wszakże i na półkuli południowej azymuty liczyć będziemy od części południka, na której przypada biegun widzialny P' , to azymutem gwiazdy G_2 jest kąt $A_0 A_2 G_2 = \sphericalangle A_0 A_1 G_1 = a$.

Wnioski powyższe można streścić w sposób następujący. Gdy przyjmiemy, że początkiem rachuby azymutów na horyzoncie astronomicznym na półkuli północnej jest punkt południowy, a na półkuli południowej punkt północny, t. j. gdy obierzemy początek rachuby azymutów w ten sposób, ażeby biegun świata, widzialny w miejscu obserwacji, miał azymut 180° , to z porównania wzorów (y) i (y') wynika, że zjawiska ruchu dziennego danej gwiazdy na półkuli północnej ziemi są takie same, jak na półkuli południowej zjawiska ruchu dziennego gwiazdy, której zboczenie ma znak przeciwny, aniżeli gwiazda wyżej wspomniana.

Z tego powodu w szczegółowej dyskusji wzorów (66) ograniczyć się możemy do jednej z dwóch półkul ziemi, określonych przez równik. Będziemy mianowicie przyjmować stałe, że $0^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ$.

33. Kulminacje i największe dygresje. Gdy we wzorach (67') położymy

$$d\varphi = 0, \quad d\delta = 0,$$

to otrzymamy

$$\frac{dh}{dt} = -\cos \delta \sin \eta, \quad (z)$$

$$\cos h \frac{da}{dt} = \cos \delta \cos \eta. \quad (z')$$

Wiadomo, że wartość funkcji $f(x)$ wzrasta wtedy, gdy $f'(x) > 0$, a maleje, gdy $f'(x) < 0$. Wzory (z) i (z') pokazują zatem, że wysokość h wzrasta, gdy $\sin \eta < 0$, a maleje, gdy $\sin \eta > 0$; podobnie wnioskujemy, że azymut a rośnie, gdy $\cos \eta > 0$, a maleje, gdy $\cos \eta < 0$.

Z trójkąta PZG (ryc. 26) wynika

$$\cos h \sin \eta = \cos \varphi \sin t, \quad (aa)$$

$$\cos h \cos \eta = \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t. \quad (ab)$$

Jest zatem

$$\begin{aligned} \sin \eta &\geq 0, & \text{gdy } \sin t &\geq 0, \\ \cos \eta &\geq 0, & \text{gdy } \cos t &\leq \tan \varphi \cot \delta. \end{aligned}$$

Ponieważ $\sin t > 0$ dla wartości t od $t=0^\circ$ do $t=180^\circ$, a $\sin t < 0$ dla wartości t od $t=180^\circ$ do $t=360^\circ$, więc widzimy, że wysokość gwiazdy wzrasta, gdy gwiazda znajduje się na stronie wschodniej nieba, wysokość zaś maleje, gdy gwiazda znajduje się na stronie zachodniej nieba. Gdy $\sin \eta = 0$, jest $\frac{dh}{dt} = 0$; to znaczy, że wtedy h osiąga swą wartość największą lub najmniejszą. Jedną z tych wartości zachodzi, gdy $\eta = 0^\circ$, druga zaś, gdy $\eta = 180^\circ$. Tworząc

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -\cos \delta \cos \eta \frac{d\eta}{dt},$$

widzimy, że, ponieważ zawsze $\frac{d\eta}{dt} > 0$, jest:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -\cos \delta \frac{d\eta}{dt} < 0, \quad \text{gdy } \eta = 0^\circ,$$

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \cos \delta \frac{d\eta}{dt} > 0, \quad \text{gdy } \eta = 180^\circ;$$

a więc, gdy $\eta = 0^\circ$, wysokość jest największa, gdy zaś $\eta = 180^\circ$, wysokość jest najmniejsza. A że jest także $t = 0^\circ$, gdy $\eta = 0^\circ$, i $t = 180^\circ$, gdy $\eta = 180^\circ$, więc największą i najmniejszą wartość na h otrzymamy, kładąc w pierwszym ze wzorów (66') odpowiednio $t = 0^\circ$ i $t = 180^\circ$. Oznaczmy największą wartość na h przez h_1 , a najmniejszą przez h_2 , to jest:

$$\sin h_1 = \cos(\varphi - \delta), \quad h_1 = 90^\circ \pm (\varphi - \delta), \quad (\text{ac})$$

$$\sin h_2 = -\cos(\varphi + \delta), \quad h_2 = -90^\circ \pm (\varphi + \delta). \quad (\text{ad})$$

Chwile, w których wysokość gwiazdy jest największa lub najmniejsza, nazywają się *kulminacjami*. Pierwsza nazywa się

kulminacją górną czyli *górowaniem*, druga zaś *kulminacją dolną* czyli *dołowaniem*.

Gdy za południk miejsca obserwacji uważać będziemy całe wielkie koło, przechodzące przez zenit, nadir i oba bieguny świata, to dla $\varphi > 0^\circ$ będziemy nazywali tę połowę południka (między dwoma biegunami), w której przypada zenit, połową południową, tę zaś, w której przypada nadir, połową północną. Wartości t , przy których zachodzą kulminacje, wskazują, że kulminacja górna zachodzi w chwili przejścia gwiazdy przez południową połowę południka, kulminacja zaś dolna w chwili przejścia gwiazdy przez północną połowę południka.

We wzorach (ac) i (ad), określających wysokość kulminacji, występuje znak podwójny. Ponieważ $h \leq |90^\circ|$, więc znak należy zawsze tak obrać, ażeby ten warunek był spełniony. Jest więc, ponieważ $h_1 \leq +90^\circ$,

$$\begin{aligned} h_1 &= 90^\circ + (\varphi - \delta), \text{ gdy } \delta > \varphi, \\ h_1 &= 90^\circ - (\varphi - \delta), \text{ gdy } \delta < \varphi. \end{aligned} \quad (ae)$$

Podobnie jest, ponieważ zawsze $h_2 > -90^\circ$,

$$\begin{aligned} h_2 &= -90^\circ + (\varphi + \delta), \text{ gdy } \varphi + \delta > 0^\circ, \\ h_2 &= -90^\circ - (\varphi + \delta), \text{ gdy } \varphi + \delta < 0^\circ. \end{aligned} \quad (ae')$$

Co się tyczy wartości azymutu w chwilach kulminacji, otrzymuje się ją, kładąc np. w drugim ze wzorów (66') $t = 0^\circ$ dla kulminacji górnej, a $t = 180^\circ$ dla kulminacji dolnej. W obu przypadkach otrzymuje się

$$\cos h \sin a = 0,$$

skąd wypływa $a = 0^\circ$, lub $a = 180^\circ$.

Którą z tych dwóch wartości przyjąć należy, wypływa to ze wzoru na $\cos h \cos a$. Jest mianowicie dla $t = 0^\circ$

$$\cos h_1 \cos a_1 = -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi = \sin(\varphi - \delta),$$

i widzimy, że $\cos a_1$ ma ten sam znak, co $\sin(\varphi - \delta)$. Gdy więc $\varphi > \delta$, to $a_1 = 0^\circ$, gdy zaś $\varphi < \delta$, jest $a_1 = 180^\circ$. Podobnie dla $t = 180^\circ$ jest

$$\cos h_2 \cos a_2 = -\sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi = -\sin(\varphi + \delta);$$

a więc $\cos a_2$ ma ten sam znak, co $-\sin(\varphi + \delta)$; wynika stąd, że $a_2 = 0^\circ$, gdy $\varphi + \delta < 0^\circ$, i $a_2 = 180^\circ$, gdy $\varphi + \delta > 0^\circ$.

Wyniki powyższe możemy zestawić w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \delta - \varphi < 0^\circ, \quad h_1 &= 90^\circ + (\delta - \varphi), \quad a_1 = 0^\circ, \\ \delta - \varphi > 0^\circ, \quad h_1 &= 90^\circ - (\delta - \varphi), \quad a_1 = 180^\circ, \\ \delta + \varphi < 0^\circ, \quad h_2 &= -90^\circ - (\delta + \varphi), \quad a_2 = 0^\circ, \\ \delta + \varphi > 0^\circ, \quad h_2 &= -90^\circ + (\delta + \varphi), \quad a_2 = 180^\circ. \end{aligned} \quad (72)$$

Wzory te wskazują, że punkt górowania gwiazdy znajduje się pomiędzy zenitem a biegunem niewidzialnym, gdy $\delta - \varphi < 0^\circ$ znajduje się zaś pomiędzy zenitem a biegunem widzialnym, gdy $\delta - \varphi > 0^\circ$. Podobnie punkt dołowania gwiazdy znajduje się pomiędzy biegunem niewidzialnym a nadirem, gdy $\delta + \varphi < 0^\circ$, a pomiędzy nadirem a biegunem widzialnym, gdy $\delta + \varphi > 0^\circ$. Gdy $\delta = \varphi$, gwiazda góruje w zenicie, gdy zaś $\delta = -\varphi$, gwiazda dołuje w nadirze.

Ponieważ w ciągu doby gwiazdowej kąt godzinny każdej gwiazdy przyjmuje wszystkie wartości od 0° do 360° , więc też każda gwiazda w ciągu doby raz góruje i raz dołuje, wysokość jej stale pozostaje w granicach pomiędzy wysokością górowania a wysokością dołowania.

Zastanówmy się teraz, w jakich granicach zmienia się azymut gwiazdy. Gdy weźmiemy pod uwagę wzór (z'), to widzimy, że a maleje lub wzrasta, zależnie od tego, czy $\cos \varphi$ ma wartość ujemną czy dodatnią. Widzieliśmy, że do pierwszego przypadku odnosi się znak $>$, do drugiego zaś znak $<$ w wyrażeniu

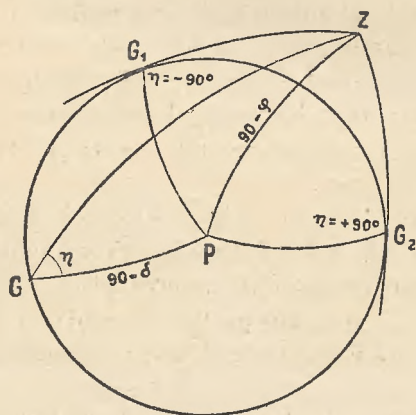
$$\cos t \geq \cotg \delta \tan \varphi.$$

Pierwszy z tych warunków spełniony być może oczywiście tylko wtedy, gdy $|\cotg \delta \tan \varphi| < 1$. Ponieważ $\cos t$ w ciągu doby przyjmuje wszystkie wartości od -1 do $+1$, więc gdy warunek pierwszy jest spełniony, azymut w ciągu pewnej części doby wzrasta, w ciągu zaś pozostałej części maleje; w pewnych chwilach zatem azymut osiąga swą wartość maksymalną i minimalną. Gdy zaś jest $|\cotg \delta \tan \varphi| > 1$, to zawsze też jest $\cos t < |\cotg \delta \tan \varphi|$, a więc azymut gwiazd, spełniających ten warunek, tylko stale wzrastać może, nie może zatem mieć ani maximum ani minimum.

Położenia gwiazdy, w których azymut jej osiąga wartość największą lub najmniejszą, nazywają się jej *największymi dygresjami*. Warunkiem, aby zachodziła największa dygresja, jest według wzoru (z'), $\cos \eta = 0$. Podstawiając tę wartość we wzorze (ab), znajdziemy wzór, określający kąt godzinny, przy którym największa dygresja zachodzi, mianowicie

$$\cos t = \tan \varphi \cotg \delta. \quad (73)$$

Wzór ten określa 2 wartości na t , z których jedna odnosi się do największej wartości azymutu, druga zaś do najmniejszej.



Rycina 29.

szej; jedna z największych dygresyj jest wschodnia, druga zachodnia.

Jak widać ze wzoru (73), kąt godzinny największej dygresji może mieć wartość rzeczywistą tylko wtedy, gdy $\varphi < |\delta|$, gdyż wtedy też tylko spełniony być może warunek $\eta = \pm 90^\circ$. Znaczenie geometryczne tego warunku wyjaśnia ryc. 29.

Niechaj punkt P oznacza biegun północny świata, punkt Z — zenit miejsca obserwacji, koło $GG_1 G_2$ — równoleżnik gwiazdy G. Oczywiście kąt paralaktyczny η jest wtedy prostym, gdy koło godzinne gwiazdy G, t. j. koło PG, jest prostopadłe do koła wysokości ZG. Zachodzi to wówczas, gdy koło ZG jest styczne

do równoleżnika gwiazdy w dwóch jej położeniach G_1 i G_2 , symetrycznych względem południka PZ. Aby to było możliwe, musi, jak wyjaśnia rycina, zenit Z przypadać nazewnątrz równoleżnika, a więc musi być $PZ > PG$, czyli $90^\circ - \varphi > 90^\circ - \delta$. Pisząc ten warunek w postaci $\varphi < \delta$, widzimy, że te tylko gwiazdy mogą znajdować się w największej dygresji, których zboczenie jest większe, niż szerokość geograficzna miejsca obserwacji.

W ogólniejszej postaci warunek, któremu zadość czynić muszą gwiazdy, mające największą dygresję, jest $\varphi < |\delta|$. To znaczy, że największą dygresję mają też na półkuli północnej ziemi gwiazdy, których odległość od bieguna południowego jest mniejsza niż $90^\circ - \varphi$. Jak wynika ze wzoru (73), kąty godzinne największych dygresyj są jednakowe dla gwiazd jednakowo odległych od obu biegunów, spełniających warunek $\varphi < |\delta|$. Naturalnie największe dygresje gwiazd południowych nie mogą być obserwowane na półkuli północnej ziemi, a gwiazd północnych na półkuli południowej.

Obie wartości na t dla największych dygresyj są jednakowe, gdy $\varphi = \delta$. Wtedy, jak też wnioskujemy z ryciny, zenit znajduje się na równoleżniku gwiazdy i obie dygresje zachodzą na południku w chwili górowania gwiazdy w zenicie.

Wysokość największych dygresyj wpływa ze wzoru

$$\sin \varphi = \sin \delta \sin h + \cos \delta \cos h \cos \eta,$$

gdy położymy w nim $\cos \eta = 0$; otrzymuje się wtedy

$$\sin h = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta}. \quad (73')$$

Wreszcie azymuty największych dygresyj otrzymuje się ze wzoru

$$\cos \delta \sin \eta = \cos \varphi \sin a,$$

z którego dla $\eta = \pm 90^\circ$ wypływa

$$\sin a = \pm \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}. \quad (73'')$$

Naturalnie wartości rzeczywiste na h i a otrzymuje się tylko wtedy, gdy warunek $\varphi \leq |\delta|$ jest spełniony.

Ze wzoru (73) wynika jeszcze to, że dla $\varphi = \pm 90^\circ$, t. j. na biegunach ziemskich, żadna gwiazda nie może znajdować się w największej dygresji; na równiku zaś, t. j. dla $\varphi = 0^\circ$, wszystkie gwiazdy mają największą dygresję, gdy $t = \pm 90^\circ$, i jest wtedy $h = 0^\circ$, $a = \pm (90^\circ - \delta)$. Na równiku więc największe dygresje zachodzą na horyzoncie w azymutach, równych odległości danej gwiazdy od bieguna.

34. Wschód i zachód gwiazd. *Wschodem* gwiazdy nazywamy chwilę, gdy gwiazda znajduje się na horyzoncie a wysokość jej rośnie, *zachodem* zaś chwilę, gdy gwiazda znajduje się na horyzoncie, ale wysokość jej maleje. Punkty horyzontu, w których gwiazda znajduje się w chwili wschodu i zachodu, nazywają się odpowiednio *punktem wschodu* i *punktem zachodu* gwiazdy.

Ponieważ odróżniamy horyzont astronomiczny i fizyczny, więc też odróżniać musimy *wschód i zachód astronomiczny*, t. j. chwilę, w której gwiazda znajduje się na horyzoncie astronomicznym, od *wschodu i zachodu fizycznego*, t. j. chwili, w której gwiazda znajduje się na horyzoncie fizycznym. Ten ostatni jest, jak wiemy (ust. 25), w przybliżeniu małym kątem, odległym od horyzontu astronomicznego o mały kąt α , depresję horyzontu fizycznego, a więc też punkty wschodu i zachodu fizycznego mają wysokość $h = -\alpha$. Wartość kąta α określona jest przez wzory (64).

Weźmy najprzód pod uwagę wschód i zachód astronomiczny. Na horyzoncie astronomicznym jest $h = 0^\circ$. Podstawiając tę wartość na h we wzorach (66'), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 0 &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t, \\ \sin a &= \cos \delta \sin t, \\ \cos a &= -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t. \end{aligned}$$

Z pierwszego wzoru wypływa

$$\cos t = -\tan \delta \tan \varphi, \quad (74)$$

wobec czego jest

$$\begin{aligned}\sin a &= \cos \delta \sqrt{1 - \tan^2 \delta \tan^2 \varphi} = \frac{\pm \sqrt{\cos(\delta + \varphi) \cos(\delta - \varphi)}}{\cos \varphi}, \\ \cos a &= -\sin \delta \cos \varphi - \frac{\sin \delta \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.\end{aligned}\quad (74')$$

Ze wzoru (74) wnioskujemy, że t tylko wówczas ma wartość rzeczywistą, gdy $|\tan \delta \tan \varphi| \leq 1$; jest to zatem warunek konieczny, aby gwiazda mogła wschodzić i zachodzić. Gdy warunek ten jest spełniony, to ze wzoru (74) otrzymuje się na t dwie wartości równe, lecz z przeciwnymi znakami, z których jedna odnosi się do wschodu, druga zaś do zachodu gwiazdy.

Wzór (z) wskazuje, że h wzrasta, gdy $\tau < 0^\circ$, a więc też, gdy $t < 0^\circ$; gwiazdy więc w chwili wschodu posiadają kąty godzinne, zawarte między 0° a -180° , w chwili zaś zachodu kąty godzinne, zawarte między 0° a $+180^\circ$. Wreszcie wzór na $\sin a$ pokazuje, że azymut gwiazdy w chwili wschodu i zachodu przypada w tej samej ćwiartce, co kąt godzinny.

Oznaczmy odpowiednio przez t_1 i t_2 kąty godzinne gwiazdy w chwili wschodu i zachodu, to $t_2 - t_1 = 2\tau$ oznacza długość łuku równoleżnika gwiazdy, który ona zakreśla nad horyzontem. Gdy zaś 2τ wyrazimy w godzinach gwiazdowych, to 2τ oznacza także przeciąg czasu, w ciągu którego gwiazda znajduje się nad horyzontem miejsca obserwacji pomiędzy jej wschodem a zachodem. Łuk 2τ wskutek tego nazywa się *łukiem dziennym* gwiazdy. Odpowiednio $24^h - 2\tau = 2\sigma$ oznacza długość łuku, który gwiazda zakreśla pod poziomem, wyrażony w godzinach, a zarazem ilość godzin, w ciągu których gwiazda przebywa pod horyzontem miejsca obserwacji pomiędzy jej zachodem a wschodem. Łuk 2σ wskutek tego nazywa się *łukiem nocnym* gwiazdy.

Wartość τ zależy od φ i δ według wzoru (74). Przyjmując, jak zawsze dotąd ze względu na uwagi ustępu 32, $\varphi \geq 0^\circ$, otrzymamy wobec tego, że $\cos t \leq |1|$ następujące możliwości:

$$1. \varphi = 0^\circ;$$

$$\cos t = 0, \quad \tau = 6^h, \quad 2\tau = 12^h, \quad 2\sigma = 12^h, \quad a = \pm (90^\circ + \delta).$$

To znaczy, że gdy miejsce obserwacji znajduje się na równiku, to wschodzą tam i zachodzą wszystkie gwiazdy bez względu na wartość zboczenia, i wszystkie przebywają równie długo nad horyzontem, jak i pod nim. Azymut $\pm(90^\circ + \delta)$ liczony jest od bieguna południowego, który znajduje się na horyzoncie miejsca obserwacji.

$$2. \delta = 0^\circ;$$

$$\cos t = 0, \quad 2\tau = 12^h = 2\sigma, \quad \alpha = \pm 90^\circ.$$

Gdy gwiazda znajduje się na równiku astronomicznym, to we wszystkich punktach ziemi bez względu na ich szerokość geograficzną, przebywa ona równie długo nad horyzontem miejsca obserwacji, jak i pod horyzontem, a punkty wschodu i zachodu przypadają odpowiednio w punkcie wschodnim i zachodnim.

$$3. \varphi > 0^\circ, \quad \delta > 0^\circ;$$

$$\cos t < 0, \quad 2\tau > 12^h, \quad 2\sigma < 12^h, \quad \cos \alpha < 0, \quad |a| > 90^\circ.$$

Gdy szerokość geograficzna i zboczenie gwiazdy mają znak jednakowy, to łuk dzienny gwiazdy jest większy, niż nocny; punkt wschodu gwiazdy przypada pomiędzy punktem wschodnim a północnym, punkt zaś zachodu gwiazdy przypada pomiędzy punktem zachodnim a północnym.

$$4. \varphi > 0^\circ, \quad \delta < 0^\circ;$$

$$\cos t > 0, \quad 2\tau < 12^h, \quad 2\sigma > 12^h, \quad \cos \alpha > 0, \quad |a| < 90^\circ.$$

Gdy szerokość geograficzna i zboczenie gwiazdy mają znaki przeciwne, to łuk dzienny gwiazdy jest krótszy od łuku nocnego; punkt wschodu gwiazdy przypada pomiędzy punktem południowym a punktem wschodnim, punkt zaś zachodu gwiazdy przypada między punktem południowym a punktem zachodnim.

Warunek

$$|\operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi| \leq 1,$$

lub też

$$-1 \leq -\operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi \leq +1,$$

określa zboczenie tych gwiazd, które w szerokości geograficznej φ wschodzą i zachodzą. Jest bowiem

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} \varphi &\geq \operatorname{tang} \delta \geq -\operatorname{cotg} \varphi, \\ 90^\circ - \varphi &\geq \delta \geq -(90^\circ - \varphi). \end{aligned}$$

To znaczy, że w szerokości geograficznej φ wschodzą i zachodzą tylko te gwiazdy, które znajdują się w pasie nieba, rozciągającym się na odległość $90^\circ - \varphi$ na północ i na południe od równika. Równik przebiega przez środek tego pasa.

Gdy $\varphi = \pm 90^\circ$, to zboczenie równoleżników granicznych jest 0° ; na biegunach ziemskich zatem gwiazdy nie wschodzą i nie zachodzą. Przeciwnie, gdy $\varphi = 0^\circ$, pas wschodzących gwiazd rozciąga się po obu stronach równika na odległość 90° , t. j. do samych biegunów; a więc dla obserwatora, znajdującego się na równiku, wszystkie gwiazdy wschodzą i zachodzą, zgodnie z tem, co już przedtem wywnioskowaliśmy.

W ogólności więc też powiedzieć możemy, że w dowolnej szerokości geograficznej φ nie wschodzą i nie zachodzą gwiazdy, leżące w dwóch odcinkach nieba, których środkami są dwa przeciwległe bieguny świata, a przestrzeń między temi odcinkami zajmuje pas gwiazd wschodzących i zachodzących.

W odcinku, zawierającym biegun południowy, przypadają te gwiazdy, dla których jest $\delta < -90^\circ + \varphi$, albo $\delta - \varphi < -90^\circ$. Jak wynika z pierwszego ze wzorów (72), jest wówczas $h_1 < 0^\circ$; to znaczy, że gwiazdy tego odcinka znajdują się pod horyzontem nawet wtedy, gdy górują, a więc w szerokości φ nigdy nad horyzontem nie są widzialne. Natomiast gwiazdy odcinka północnego spełniają warunek $\delta > 90^\circ - \varphi$, albo $\delta + \varphi > 90^\circ$. Dla tych gwiazd, jak wynika z czwartego ze wzorów (72), jest $h_2 > 0^\circ$; to znaczy, że nawet w chwili dołowania gwiazdy te znajdują się nad horyzontem miejsca obserwacji, a więc stale znajdują się nad horyzontem. Gwiazdy te są dla szerokości geograficznej φ *naokołobiegunowemi*. Im większa jest szerokość geograficzna (bezwzględnie), tem więcej jest gwiazd naokoło-

biegunowych; na równiku zatem gwiazd naokołobiegunowych nie ma wcale, a na biegunach ziemskich naokołobiegunowemi są wszystkie gwiazdy tej półkuli nieba, której środkiem jest widzialny tam biegun świata, schodzący się z zenitem.

Gdy chodzi o podanie chwili pojawienia się gwiazdy na horyzoncie fizycznym lub też chwili jej zniknięcia w czasie zachodu, to we wzorach (66') należy przyjąć $h = -\kappa$, rozumiejąc przez κ wartość depresji horyzontu fizycznego w miejscu obserwacji. Wtedy, oznaczając przez t_1 i a_1 kąt godzinny i azymut punktów wschodu i zachodu fizycznego, jest

$$\begin{aligned} -\sin \kappa &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t_1, \\ \cos \kappa \sin a_1 &= \cos \delta \sin t_1, \\ \cos \kappa \cos a_1 &= -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t_1. \end{aligned} \quad (\text{af})$$

Gdy zapomocą pierwszego z tych wzorów wyznaczymy t_1 , to z dwóch pozostałych wzorów wypływa a_1 . Jednaże κ jest zawsze małym kątem, dzięki czemu t_1 i a_1 obliczyć można zapomocą wzorów przybliżonych.

Oznaczmy przez t_0 i a_0 kąt godzinny i azymut gwiazdy w chwili jej wschodu lub zachodu astronomicznego, to jest, jak wiemy,

$$0 = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t_0.$$

Gdy od tego równania odejmiemy pierwszy ze wzorów (af), to jest

$$\sin \kappa = \cos \delta \cos \varphi (\cos t_0 - \cos t_1);$$

przyjmując zaś $\sin \kappa = \kappa'' \sin 1''$, oraz

$$\cos t_0 - \cos t_1 = 2 \sin \frac{t_1 - t_0}{2} \sin \frac{t_1 + t_0}{2} = (t_1 - t_0) \sin t_0 \sin 1'',$$

znajdziemy

$$\kappa = \cos \delta \cos \varphi \sin t_0 (t_1 - t_0).$$

Pisząc jeszcze

$$\sin t_0 = \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2 \varphi \operatorname{tang}^2 \delta},$$

wobec czego jest

$$\kappa = \pm \sqrt{\cos(\delta + \varphi) \cos(\delta - \varphi)} (t_1 - t_0),$$

otrzymamy ostatecznie

$$t_1 = t_0 + \frac{\kappa}{\cos \delta \cos \varphi \sin t_0} = t_0 \pm \frac{\kappa}{\sqrt{\cos(\delta + \varphi) \cos(\delta - \varphi)}}. \quad (75)$$

Znak — w tym wzorze odnosi się do wschodu, a znak + do zachodu.

Gdy oznaczymy przez $2\tau_0$ łuk dzienny astronomiczny, a przez $2\tau_1$ łuk dzienny fizyczny, to różnica

$$2\tau_1 - 2\tau_0 = \frac{2\kappa}{\cos \delta \cos \varphi \sin t_0}$$

oznacza przedłużenie łuku dziennego gwiazdy, spowodowane depresją horyzontu fizycznego.

Wzór (75) można stosować tylko wtedy, gdy $\delta + \varphi$ i $\delta - \varphi$ nie mają wartości bliskiej 90° . Gdy zachodzi ten ostatni przypadek, to należy stosować do obliczenia t_1 wzory ściśle (af).

Przybliżony wzór na azymut a_1 otrzymamy, kładąc w drugim ze wzorów (af) $\cos \kappa = 1$ oraz podstawiając w nim

$$t_1 = t_0 + \frac{\kappa}{\cos \varphi \sin a_0}.$$

Jest wtedy

$$\sin a_1 = \cos \delta \left(\sin t_0 + \frac{\cos t_0}{\cos \varphi \sin a_0} \kappa \sin 1'' \right).$$

Że zaś ze wzoru

$$\cos \delta \cos t = \sin h \cos \varphi + \cos h \sin \varphi \cos a$$

dla $h = 0^\circ$ wypływa

$$\cos \delta \cos t_0 = \sin \varphi \cos a_0,$$

więc jest także

$$\sin a_1 - \sin a_0 = \tan \varphi \frac{\cos a_0}{\sin a_0} \kappa \sin 1''.$$

Przyjmując

$$\sin a_1 - \sin a_0 = 2 \sin \frac{a_1 - a_0}{2} \cos \frac{a_1 + a_0}{2} = (a_1 - a_0) \cos a_0 \sin 1'',$$

znajdziemy

$$a_1 - a_0 = \frac{\tan \varphi}{\sin a_0} \kappa;$$

albo ponieważ według pierwszego ze wzorów (74') jest

$$\cos \varphi \sin a_0 = \pm \sqrt{\cos(\delta + \varphi) \cos(\delta - \varphi)},$$

więc

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + \frac{\tan \varphi}{\sin a_0} \cdot \kappa = a_0 \pm \frac{\kappa \sin \varphi}{\sqrt{\cos(\delta + \varphi) \cos(\delta - \varphi)}} = \\ &= a_0 + (t_1 - t_0) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (75')$$

Znak $-$ i w tym wzorze odnosi się do wschodu gwiazdy, a znak $+$ do zachodu; pozatem stosowalność wzoru (75'), podobnie jak wzoru (75), ograniczona jest warunkiem, aby $\delta + \varphi$ i $\delta - \varphi$ nie miały wartości, bliskiej 90° .

35. Przejścia gwiazd przez pierwsze koło wierzchołkowe.

Pierwszem kołem wierzchołkowem jest koło wysokości, określone przez pierwszy wertykał (ust. 24). Oczywiście punkty pierwszego koła wierzchołkowego mają azymut $\pm 90^\circ$; gwiazda zatem przechodzi przez pierwsze koło wierzchołkowe, gdy jest dla niej $a = \pm 90^\circ$. Podstawiając powyższą wartość na a w trzecim ze wzorów (66), otrzymujemy

$$\cos t = \tan \delta \cot \varphi. \quad (76)$$

Gdy zaś tę samą wartość na a podstawimy w pierwszym ze wzorów (66), to wynika

$$\sin h = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}. \quad (76')$$

Wzory (76) i (76') wskazują, że ażeby przejście gwiazdy przez pierwsze koło wierzchołkowe w istocie mogło nastąpić, musi być $|\delta| < \varphi$; w przeciwnym razie wartości t i h , wypływające z tych wzorów, byłyby urojone. Warunek ten, jak widzimy, przeciwny jest warunkowi, od którego zależy istnienie największej dygresji. To znaczy, że gwiazdy które mają największą dygresję, nie mogą przechodzić przez pierwsze koło wierzchołkowe, i odwrotnie, gwiazdy, które mogą przechodzić przez pierwsze koło wierzchołkowe, nie mają największej dygresji.

Gwiazdy, przechodzące przez pierwsze koło wierzchołkowe, zawarte są w pasie nieba, którego środkiem przebiega równik, a granicami są równoleżniki $\delta = \pm \varphi$. Pas ten zatem jest tem szerszy, im większa jest szerokość geograficzna miejsca obserwacji. Na równiku ziemskim gwiazd, przechodzących przez pierwsze koło wierzchołkowe, niema wcale; na biegunach zaś przez to koło przechodzą wszystkie gwiazdy. W danej szerokości geograficznej φ jednakże nie wszystkie przejścia gwiazd przez pierwsze koło wierzchołkowe mogą być obserwowane, gdyż nie wszystkie te przejścia zachodzą nad horyzontem, a część pasa, zawierającego te gwiazdy, stale znajduje się pod horyzontem. Wzór (76') pokazuje, że h i δ mają zawsze jednakowy znak; oznacza to, że nad horyzontem przez pierwsze koło wierzchołkowe przechodzą tylko te gwiazdy, których zboczenie ma taki sam znak, jak szerokość geograficzna miejsca obserwacji. Dwie wartości na t z przeciwnymi znakami, wypływające ze wzoru (76), oznaczają, że punkty przejścia gwiazdy przez pierwsze koło wierzchołkowe są położone symetrycznie względem południka. Kąty godzinne gwiazd w chwilach przejścia są w ogólności mniejsze, niż $|90^\circ|$, i tylko dla $\delta = 0^\circ$ jest $h = 0^\circ$ i $t = \pm 90^\circ$; w tym ostatnim przypadku przejścia gwiazdy zachodzą odpowiednio w punktach wschodnim zachodnim. Tylko gwiazdy, które przez pierwsze koło wierz-

chołkowe przechodzą pod horyzontem, w chwili przejścia mają kąt godzinny, większy niż $|90^0|$.

36. Przykłady do ustępów 34 i 35. Zboczenie gwiazd *Antaresa* (α *Scorpii*), *Wegi* (α *Lyrae*)-i α *Ursae majoris* jest odpowiednio $-26^0 15'$, $+38^0 42'$ i $62^0 12'$. Zbadać najważniejsze zjawiska ruchu dziennego tych gwiazd we Lwowie ($\varphi = 49^0 50'$).

1. Kulminacje.

α *Scorpii*.

$$\begin{aligned} h_1 &= 90^0 + (-26^0 15' - 49^0 50') = 90^0 - 76^0 5' = 13^0 55', \\ h_2 &= -90^0 + (-26^0 15' + 49^0 50') = -90^0 + 23^0 35' = -66^0 25'. \end{aligned}$$

α *Lyrae*.

$$\begin{aligned} h_1 &= 90^0 + (38^0 42' - 49^0 50') = 90^0 - 11^0 8' = 78^0 52', \\ h_2 &= -90^0 + (38^0 42' + 49^0 50') = -90^0 + 88^0 32' = -1^0 28'. \end{aligned}$$

α *Ursae maj.*

$$\begin{aligned} h_1 &= 90^0 - (62^0 12' - 49^0 50') = 90^0 - 12^0 22' = 77^0 38', \\ h_2 &= -90^0 + (62^0 12' + 49^0 50') = -90^0 + 112^0 2' = 22^0 2'. \end{aligned}$$

Gwiazdy α *Scorpii* i α *Lyrae* górują nad poziomem, a dolują pod poziomem; punkt górowania każdej z nich znajduje się pomiędzy zenitem a punktem południowym. Gwiazda α *Ursae majoris* góruje i doluje nad horyzontem, jest więc gwiazdą naokolobiegunową; punkt górowania tej gwiazdy znajduje się między zenitem a biegunem widzialnym.

2. Największe dygresje.

Tylko dla gwiazdy α *Ursae majoris* spełniony jest warunek $\varphi < |\delta|$, a więc tylko ona ma największe dygresje. Obliczamy kąt godzinny, wysokość i azymut największych dygresyj według wzorów (73).

$\tan \varphi$	0.0736	$\sin \varphi$	9.8832	$\cos \delta$	9.6685
$\cot g \delta$	9.7220	$\sin \delta$	9.9467	$\cos \varphi$	9.8096
$\cos t$	9.7956	$\sin h$	9.9365	$\sin a$	9.8589
$t = \pm 51^0 21'$		$h = 59^0 46'$		$a = \pm 46^0 16'$	

3. Wschód i zachód.

Gwiazda α *Ursae majoris* jest naokołobiegunową we Lwowie, a więc tam nie wschodzi i nie zachodzi. Dla dwóch pozostałych gwiazd kąt godzinny i azymut punktów wschodu i zachodu obliczamy, stosując wzory (74).

 α *Scorpii*

$\text{tang } \varphi$	0.0736	$\sin \delta$	9.6457 <i>n</i>
$\text{tang } \delta$	9.6930 <i>n</i>	$\cos \varphi$	9.8096
$\cos t$	9.7666	$\cos a$	9.8361
$t = \pm 54^{\circ} 15'$		$a = \pm 46^{\circ} 43'$	

 α *Lyrae*

$\text{tang } \varphi$	0.0736	$\sin \delta$	9.7961
$\text{tang } \delta$	9.9037	$\cos \varphi$	9.8096
$\cos t$	9.9773 <i>n</i>	$\cos a$	9.9865 <i>n</i>
$t = \pm 161^{\circ} 38'$		$a = \pm 165^{\circ} 47'$	

Łuk dzienny tych gwiazd ma wartości: pierwszej $2\tau = 108^{\circ} 30' = 7^h 14^m$, drugiej $2\tau = 323^{\circ} 16' = 21^h 33^m$. Odpowiednio łuk nocny ich wynosi $16^h 46^m$ i $2^h 27^m$.

Liczby powyższe odnoszą się do wschodu i zachodu astronomicznego. Przypuśćmy, że miejsce obserwacji wzniesione jest na 30 *m* nad powierzchnię otaczającego terenu i znajdziemy kąty godzinne i azymuty punktów wschodu i zachodu fizycznego.

Depresja horyzontu fizycznego, obliczona według przybliżonego wzoru (64'') wynosi

$$\kappa = 115.''51 \cdot \sqrt{30} = 632.''7.$$

Rachunek dalszy wykonamy dla gwiazdy α *Scorpii* z pomocą pierwszych wyrażeń na t_1 i a_1 we wzorach (75) i (75'), a dla gwiazdy α *Lyrae* za pomocą drugich wyrażeń.

α *Scorpii*.

κ''	2.8012	κ''	2.8012
$\sec \delta$	0.0473	$\tan \varphi$	0.0736
$\sec \varphi$	0.1904	$\operatorname{cosec} a_0$	0.1379
$\operatorname{cosec} t_0$	0.0907		
Δt	3.1296	Δa	3.0127
$\Delta t =$	$1348'' = 22'$	$\Delta a =$	$1030'' = 17'$
$t_1 = \pm$	$54^\circ 37'$	$a_1 = \pm$	$47^\circ 0'.$

α *Lyrae*.

$\delta =$	$38^\circ 42'$	κ''	2.8012
$\delta + \varphi =$	$88^\circ 32'$	Δt	3.6012
$\delta - \varphi =$	$-11^\circ 8'$	$\Delta t =$	$3992'' = 67'$
$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\delta + \varphi) \\ \cos(\delta - \varphi) \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 8.4082 \\ 8.9918 \end{array}$	$t = \pm$	$162^\circ 45'$
Π	8.4000	$\sin \varphi$	9.8832
$\sqrt{\Pi}$	9.2000	Δa	3.4844
		$\Delta a =$	$3051'' = 51'$
		$a_1 =$	$166^\circ 38'.$

Rachunek dla gwiazdy α *Lyrae* jest krótszy, i szczególnie wtedy korzystnem jest zastosowanie tego sposobu obliczenia, gdy wartości t_0 i a_0 nie są dane.

4. Przejście przez pierwsze koło wierzchołkowe.

Warunek $|\delta| < \varphi$ spełniony jest tylko dla gwiazd α *Scorpii* i α *Lyrae*. Gwiazda α *Ursae majoris*, jako mająca największą dygresję, przez pierwsze koło wierzchołkowe nie przechodzi. Do obliczenia stosujemy wzory (76).

α *Scorpii*.

$\tan \delta$	$9.6930 n$	$\sin \delta$	$9.6457 n$
$\cotg \varphi$	9.9264	$\sin \varphi$	9.8832
$\cos t$	$9.6194 n$	$\sin h$	$9.7625 n$
$t = \pm$	$114^\circ 36'.$	$h =$	$-35^\circ 22'$

α *Lyrae*.

$\text{tang } \delta$	9.9037	$\sin \delta$	9.7961
$\text{cotg } \varphi$	9.9264	$\sin \varphi$	9.8832
$\cos t$	9.8301	$\sin h$	9.9129
$t = \pm 47^{\circ} 27'$		$h = \pm 54^{\circ} 55'$	

Przejdzie przez pierwsze koło wierzchołkowe gwiazdy α *Scorpii* zachodzi pod horyzontem, a więc obserwowane być nie może.

ROZDZIAŁ IV.

RUCH SŁOŃCA.

37. Układ ekliptyczny. Układ równikowy. Czas gwiazdowy.

Rozważając zjawiska ruchu dziennego gwiazd w poprzednim rozdziale, przyjęliśmy, że zboczenie ich ma wartość stałą, a kąt godzinny zmienia się proporcjonalnie do czasu z prędkością u wszystkich gwiazd jednakową. To założenie jednakże w stosunku do żadnej z gwiazd nie jest spełnione z całą ścisłością. Wymagałoby ono z jednej strony, aby położenie gwiazdy na niebie było niezmiennie, z drugiej strony, aby niezmiennym też był układ sferyczny, względem którego położenie gwiazdy na niebie zostało określone. W istocie spółrządne ciał niebieskich, odniesione do jakiegokolwiek układu sferycznego, ulegają zmianom, i ze względu na wielkość i prędkość tych zmian dzielimy ciała niebieskie na dwie kategorie: do pierwszej z tych kategorii należą gwiazdy stałe, do drugiej słońce, księżyc, planety i komety.

Zmienne położenie ciał niebieskich powoduje, że wnioski, wyprowadzone w poprzednim rozdziale, wymagać będą pewnych poprawek i uzupełnień, które dla ciał niebieskich dwóch wspomnianych kategorii oczywiście znacznie będą się między sobą różniły.

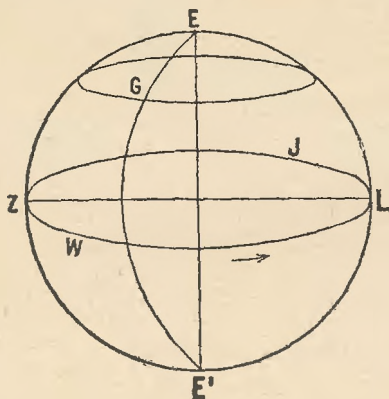
Najistotniejsze znaczenie w astronomji sferycznej posiada ruch własny słońca. Przebiega ono pośród gwiazd wielkie koło, którego płaszczyzna nachylona jest do płaszczyzny równika świata. Koło to nosi nazwę *ekliptyki* ¹⁾.

¹⁾ Dokładna definicja ekliptyki dana będzie w rozdziale VIII.

Ruch słońca na ekliptyce odbywa się w kierunku prostym i ten kierunek przyjmuje się na ekliptyce za dodatni kierunek rachuby kątów.

Jako koło wielkie, dokładnie na niebie przez ruch słońca określone, może ekliptyka, podobnie jak horyzont astronomiczny lub równik świata, być obraną za koło główne układu sferycznego, którego biegunami są bieguny ekliptyki.

Niechaj na rycinie 30 koło WLJZ będzie ekliptyką, punkty E i E' jej biegunami, a prosta EE' jej osią. Biegun ekliptyki E,



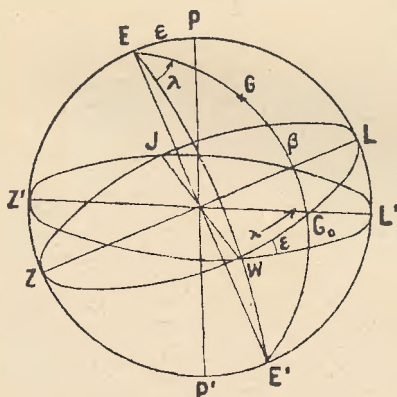
Rycina 30.

przypadający w półkuli północnej, nazywa się północnym biegunem ekliptyki, biegun przeciwny E' — nazywa się biegunem południowym ekliptyki. Kierunek ruchu słońca na ekliptyce wskazany jest przez strzałkę.

Wielkie koła, przechodzące przez bieguny ekliptyki, np. EGE', nazywają się *kołami szerokości*, małe zaś koła, równoległe do ekliptyki, nazywają się *równoleżnikami ekliptyki*.

Gdy przyjmujemy ekliptykę za koło główne układu sferycznego, należy obrać na niej jakiś punkt za początek rachuby współrzędnych. Ekliptyka, jako wielkie koło, nachylone do równika świata, przecina się z nim w dwóch punktach, o 180° od siebie oddległych i przez ruch słońca dokładnie określonych. Jeden z tych dwóch punktów może być obrany za początek układu sferycznego.

Poprowadźmy przez oś świata PP' (ryc. 31) i oś ekliptyki EE' wielkie koło, które niechaj przypada w płaszczyźnie rysunku. Równik świata $WL'JZ'$ przecina się z ekliptyką $WLJZ$ w dwóch punktach W i J , które są biegunami koła $EPE'P'$ (ust. 1). Gdy kierunek, wskazany na rysunku przez strzałkę, obierzemy za dodatni kierunek rachuby na równiku i na ekliptyce, to kąt $L'WL = \varepsilon$ jest kątem nachylenia ekliptyki względem równika świata. Kąt ten jest równy odległości biegunów



Rycina 31.

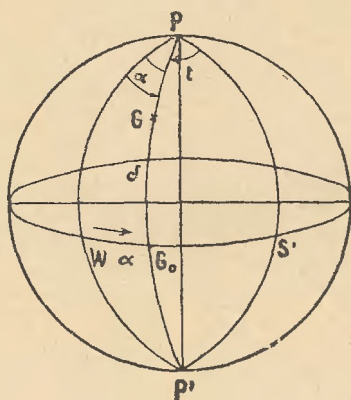
jednoimiennych równika i ekliptyki, t. j. $EP = E'P' = \varepsilon$; nazywa się on *pochyłością ekliptyki*.

Jeżeli za początek układu, którego kołem głównem jest ekliptyka, obierzemy punkt W , to położenie gwiazdy G w tym układzie określone jest przez łuk $G_0G = \beta$ koła szerokości, przechodzącego przez gwiazdę, oraz przez łuk $WG_0 = \lambda = \angle WEG = \lambda$, utworzony przez koło szerokości gwiazdy, oraz koło EWE' , przechodzące przez początek układu.

Wyżej określony układ sferyczny nazywa się *układem ekliptycznym*; współrzędna β liczona od 0° do $\pm 90^\circ$ na północ dodatnio, na południe ujemnie, nazywa się *szerokością astronomiczną*, współrzędna zaś λ , liczona od 0° do 360° w kierunku prostym, t. j. w kierunku biegu słońca na ekliptyce, nazywa się *długością astronomiczną*.

Równik i ekliptyka określone są na niebie zupełnie niezależnie od miejsca obserwacji, niezależnie więc też od miejsca obserwacji określony jest punkt przecięcia się tych kół W. Punkt ten wraz z gwiazdami bierze udział w ruchu sklepienia niebieskiego, a więc spólrzędne ekliptyczne gwiazdy mają wartość niezależną od obrotu ziemi i od położenia obserwatora.

Gdy obierzemy punkt W za początek układu sferycznego, którego kołem głównem jest równik świata, to układ ten nazywa się *układem równikowym*. Spólrzędne gwiazdy G w układzie



Rycina 32.

równikowym (ryc. 32) stanowią: łuk $G_0G = \delta$, t. j. zboczenie gwiazdy, oraz łuk $WG_0 = \angle WPG = \alpha$, liczony od 0° do 360° w kierunku prostym. Kąt α nazywa się *rektascensją* lub *wznoszeniem prostym* gwiazdy G. Spólrzędne równikowe, podobnie jak spólrzędne ekliptyczne, są niezależne od obrotu ziemi i od położenia miejsca obserwacji.

Zboczenie jest jednocześnie spólrzędną układu równikowego i godzinnego, druga zaś spólrzędna równikowa, wznoszenie proste, z drugą spólrzędną układu godzinnego, kątem godzinnym, znajduje się w prostym związku.

Niech będzie $PS'P'$ (ryc. 32) południkiem miejsca obserwacji, to kąt $S'PG = t_*$ jest kątem godzinnym gwiazdy G, a kąt

$S'PW = t_w$ jest kątem godzinnym punktu W. Piszmy jeszcze $t_* = t$, $t_w = \theta$, to jest

$$\theta = \alpha + t. \quad (77)$$

Wzór ten wyraża, że suma wznoszenia prostego jakiejkolwiek gwiazdy i jej kąta godzinowego zawsze równa się kątowi godzinnemu punktu W. Ze wzoru (77) wypływa też, że

$$\begin{aligned} t &= \theta - \alpha, \\ \alpha &= \theta - t. \end{aligned}$$

Wprowadzony tu kąt θ ma w astronomji znaczenie pierwszorzędne. Obrót nieba dokoła osi świata dokonywa się w ciągu doby gwiazdowej; w tym czasie w danem miejscu obserwacji wszystkie punkty nieba raz dołują i raz górują. Chcąc obrót nieba zużytkować jako miarę czasu, należy pewną chwilę obrać za początek doby gwiazdowej.

Otóż za ten *początek doby gwiazdowej* przyjmuje się w danem miejscu obserwacji chwilę górowania punktu W. Przy takiej umowie kąt godzinny punktu W w danej chwili jest miarą czasu, jaki upłynął od początku doby gwiazdowej w tem miejscu obserwacji. Ten czas, który upłynął od początku doby gwiazdowej, nazywa się wprost *czasem gwiazdowym*.

Jak do kątów godzinnych wogóle, tak oczywiście i do czasu gwiazdowego odnosi się wzór (71). W tym przypadku jest

$$\theta + \lambda = \theta_0. \quad (71')$$

To znaczy, że czas gwiazdowy w danem miejscu obserwacji jest mniejszy od czasu gwiazdowego na południku głównym o długość geograficzną miejsca obserwacji. Czas danego miejsca wogóle nazywa się *czasem miejscowym* albo *lokalnym*.

Dla $t = 0^0$ ze wzoru (77) wynika $\theta = \alpha$. Znaczy to, że w chwili górowania danej gwiazdy czas gwiazdowy równa się wznoszeniu prostemu tej gwiazdy; można też powiedzieć odwrotnie, że w danym czasie gwiazdowym górują te gwiazdy, których wznoszenie proste równa się czasowi gwiazdowemu. Oczywiście więc w każdej chwili zachodzi górowanie danej

gwiazdy, mianowicie na tym południku geograficznym, na którym miejscowy czas gwiazdowy właśnie równa się wznoszeniu prostemu gwiazdy.

38. Przejście z układu ekliptycznego na inne układy i odwrotnie, z innych układów na układ ekliptyczny. Wzory przejścia z układu ekliptycznego na równikowy i odwrotnie wypływają ze wzorów ogólnych (13) i (13'), gdy w nich przyjmiemy $\psi = \chi = 0^\circ$, ponieważ wspólnym początkiem, od którego liczy się długości astronomiczne i wznoszenia proste, jest punkt przecięcia się ekliptyki i równika W. Dalej należy podstawić we wzorach ogólnych $i = \varepsilon$, $p = \alpha$, $q = \delta$, $p' = \lambda$, $q' = \beta$. W ten sposób otrzymuje się wzory następujące:

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha, \\ \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha, \\ \cos \beta \sin \lambda &= \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha:\end{aligned}\tag{78}$$

oraz

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda, \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda, \\ \cos \delta \sin \alpha &= -\sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda.\end{aligned}\tag{78'}$$

Podobnie jak wzory przejścia z układu godzinnego na poziomowy i odwrotnie, mianowicie wzory (66) i (66'), wypływają bezpośrednio z trójkąta paralaktycznego, tak samo i wzory (78) i (78') wypływają bezpośrednio z trójkąta sferycznego EPG (ryc. 33), którego wierzchołkami są biegun ekliptyki E, biegun świata P i gwiazda G. W tym trójkącie boki mają wartości następujące:

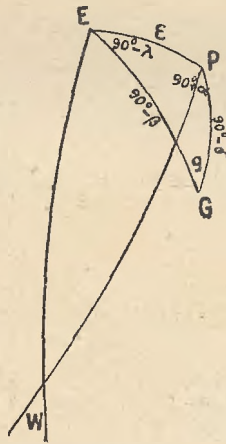
$$PE = \varepsilon, \quad PG = 90^\circ - \delta, \quad EG = 90^\circ - \beta.$$

Ponieważ dalej PE jest łukiem wielkiego koła, które ze względu na punkt W, uważany za biegun, jest kołem głównem, więc koła wielkie, prostopadłe do koła PE i przechodzące przez punkty P i E, przecinają się w biegunie W. Od koła szerokości WE liczą się długości astronomiczne, a więc długością gwiazdy G

jest kąt $WEG = \lambda$. Podobnie wznoszeniem prostem gwiazdy G jest kąt $WPG = \alpha$. Wypływają stąd następujące wartości kątów trójkąta sferycznego EPG:

$$\sphericalangle GEP = 90^\circ - \lambda, \quad \sphericalangle EPG = 90^\circ + \alpha, \quad \sphericalangle PEG = g.$$

Łatwo sprawdzić, że stosując do trójkąta EPG zasadnicze wzory trygonometrii sferycznej z uwzględnieniem wyżej podanych wartości jego elementów, otrzymuje się wzory (78) i (78').



Rycina 33.

Rachunek liczbowy za pomocą wzorów (78) i (78') ułatwia się przez wprowadzenie kątów pomocniczych w sposób podobny, jak to było wyjaśnione w ustępach 9 i 30. Połóżmy we wzorach (78)

$$\begin{aligned} \sin \delta &= m \cos M, \\ \cos \delta \sin \alpha &= m \sin M, \end{aligned} \tag{a}$$

to otrzymamy

$$\begin{aligned} \sin \beta &= m \cos (M + \varepsilon), \\ \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha, \\ \cos \beta \sin \lambda &= m \sin (M + \varepsilon). \end{aligned} \tag{b}$$

Podobnie kładąc we wzorach (78')

$$\begin{aligned}\sin \beta &= n \sin N, \\ \cos \beta \sin \lambda &= n \cos N,\end{aligned}\tag{e}$$

znajdziemy

$$\begin{aligned}\sin \delta &= n \sin (N + \varepsilon), \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda, \\ \cos \delta \sin \alpha &= n \cos (N + \varepsilon).\end{aligned}\tag{d}$$

Wzory kontrolne, analogiczne do (21) i (21'), są w tym przypadku

$$\begin{aligned}\cos \beta \sin (\lambda - \alpha) &= 2 m \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \left(M + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cos \alpha, \\ \sin \frac{\delta - \beta}{2} &= m \sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(M + \frac{\varepsilon}{2} \right) \sec \frac{\beta + \delta}{2};\end{aligned}\tag{e}$$

oraz

$$\begin{aligned}\cos \delta \sin (\lambda - \alpha) &= 2 n \sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(N + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cos \lambda, \\ \sin \frac{\delta - \beta}{2} &= n \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \left(N + \frac{\varepsilon}{2} \right) \sec \frac{\beta + \delta}{2}.\end{aligned}\tag{f}$$

Wzory różniczkowe mają tu postać następującą:

$$\begin{aligned}d\beta &= \cos g d\delta - \cos \delta \sin g d\alpha - \sin \lambda d\varepsilon, \\ \cos \beta d\lambda &= \sin g d\delta + \cos \delta \cos g d\alpha + \sin \beta \cos \lambda d\varepsilon;\end{aligned}\tag{g}$$

$$\begin{aligned}d\delta &= \cos g d\beta + \cos \beta \sin g d\lambda + \sin \alpha d\varepsilon, \\ \cos \delta d\alpha &= -\sin g d\beta + \cos \beta \cos g d\lambda - \sin \delta \cos \alpha d\varepsilon.\end{aligned}\tag{h}$$

Kąt g , występujący w tych wzorach, oblicza się za pomocą wzorów, wypływających z trójkąta PEG, mianowicie:

$$\begin{aligned}\cos \delta \sin g &= \cos \lambda \sin \varepsilon, \\ \cos \delta \cos g &= \cos \beta \cos \varepsilon - \sin \beta \sin \varepsilon \sin \lambda,\end{aligned}\tag{i}$$

albo

$$\begin{aligned}\cos \beta \sin g &= \cos \alpha \sin \varepsilon, \\ \cos \beta \cos g &= \cos \delta \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon \sin \alpha.\end{aligned}\quad (j)$$

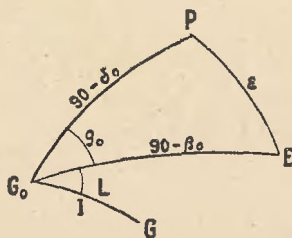
Przy obliczaniu można tym wzorom nadać postać logarytmiczną przez wprowadzenie kątów pomocniczych.

Wreszcie podajemy jeszcze wzory *Fabritiusa* w zastosowaniu do specjalnego przypadku współrzędnych ekliptycznych i równikowych.

$$\begin{aligned}\Delta \beta &= d\beta - \frac{1}{2} d\lambda^2 \sin \beta \cos \beta \sin 1'', \\ \Delta \lambda &= d\lambda + d\lambda d\beta \tan \beta \sin 1'';\end{aligned}\quad (k)$$

$$\begin{aligned}\Delta \delta &= d\delta - \frac{1}{2} d\alpha^2 \sin \delta \cos \delta \sin 1'', \\ \Delta \alpha &= d\alpha + d\alpha d\delta \tan \delta \sin 1''.\end{aligned}\quad (l)$$

Gdy przez l i L oznaczymy ekliptyczne współrzędne pozy-



Rycina 34.

cyjne punktu G względem G_0 (ryc. 34), a przez β_0 , λ_0 i β , λ odpowiednio współrzędne ekliptyczne punktów G_0 i G , to stosując wzory ogólne (22') i uwzględniając, że kąt λ wzrasta w kierunku przeciwnym, aniżeli kąt p , występujący w tych wzorach, znajdziemy:

$$\begin{aligned}\lambda - \lambda_0 &= l \sin L \sec \beta_0, \\ \beta - \beta_0 &= l \cos L.\end{aligned}\quad (l)$$

Podobnie gdy współrzędne pozycyjne równikowe oznaczmy

przez l i L' , a przez α_0 , δ_0 i α , δ odpowiednio oznaczmy współrzędne równikowe punktów G_0 i G , znajdziemy wzory

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha_0 &= l \sin L' \sec \delta_0, \\ \delta - \delta_0 &= l \cos L'.\end{aligned}\tag{m}$$

Pozatem jest $L' = L + g$, i wartość g wypływa ze wzorów (i) lub (j).

Wzory (25) w zastosowaniu do współrzędnych ekliptycznych i równikowych otrzymują postać następującą:

$$\begin{aligned}\lambda - \lambda_0 &= [(\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0 \cos g + (\delta - \delta_0) \sin g] \sec \beta_0, \\ \beta - \beta_0 &= -(\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0 \sin g + (\delta - \delta_0) \cos g;\end{aligned}\tag{n}$$

i odwrotnie

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha_0 &= [(\lambda - \lambda_0) \cos \beta_0 \cos g - (\beta - \beta_0) \sin g] \sec \delta_0, \\ \delta - \delta_0 &= (\lambda - \lambda_0) \cos \beta_0 \sin g + (\beta - \beta_0) \cos g.\end{aligned}\tag{p}$$

Wzory przejścia z układu godzinowego na poziomy pozwalają obliczyć h i a , gdy dane są t i δ . Gdy jednakże we wzorach tych napiszemy $t = \theta - \alpha$, to współrzędne godzinne będą zastąpione przez równikowe. Podobnie wzory przejścia z układu poziomego na godzinny wyznaczają t i δ , gdy dane są h i a . Gdy zaś w nich zastąpimy t przez $\theta - \alpha$, to wzory te służą także do przejścia z układu poziomego na równikowy.

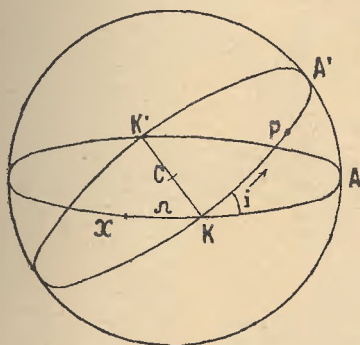
A zatem wzory przejścia z układu poziomego na równikowy i odwrotnie różnią się od wzorów (66) i (66') tylko tem, że występuje w nich $\theta - \alpha$ zamiast t , we wzorach zaś różniczkowych (67) i (67'), gdy mają one być zastosowane do współrzędnych równikowych, należy zastąpić dt przez $d\theta$.

Gdy zachodzi potrzeba przejścia z układu ekliptycznego na poziomy, to przejście to uskutecznia się najdogodniej w ten sposób, że się z układu ekliptycznego najprzód przechodzi na równikowy, a z tego dopiero na poziomy. Podobnie za pośrednictwem układu równikowego przechodzi się z układu poziomego na ekliptyczny.

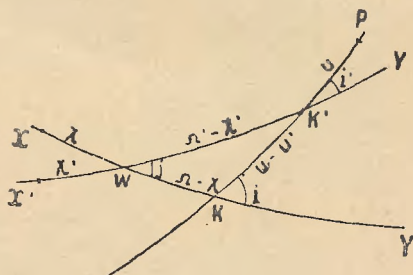
39. Wielkości, określające położenie koła i punktu na niem.
Gdy na niebie przecinają się dwa wielkie koła KAK' i $KA'K'$

(ryc. 35), to punkty ich przecięcia się K i K' nazywają się *węzłami*, a prosta KK' nazywa się *linją węzłów*. Jeżeli kołem KAK' jest równik lub ekliptyka, a kierunkiem dodatnim na kole $KA'K'$ jest ten, który wskazuje strzałka, to węzeł K , w którym koło $KA'K'$ przechodzi z półkuli południowej na północną, nazywa się *węzłem wstępującym*, drugi zaś węzeł K' , w którym koło $KA'K'$ przechodzi z półkuli północnej na południową, nazywa się *węzłem zstępującym*.

Położenie koła $KA'K'$ względem koła KAK' jest określone, gdy znany jest kąt nachylenia $AKA' = i$ oraz odległość jednego



Rycina 35.



Rycina 36.

z węzłów, np. węzła K , od pewnego punktu X , dokładnie określonego na kole KAK' . Oznaczmy tę odległość $XK = \varrho$. Gdy prócz tego dla jakiegoś punktu P na kole $KA'K'$ znana jest odległość od węzła, mianowicie $KP = u$, to położenie punktu P również jest jednoznacznie określone.

Weźmy teraz pod uwagę dwa koła XY i $X'Y'$, nachylone do siebie pod kątem j (ryc. 36) i przecinające się ze sobą w punkcie W . Początkiem rachuby na kole XY niech będzie punkt X , a początkiem rachuby na kole $X'Y'$ niech będzie punkt X' . Położenie punktu W jest określone przez odległości $XW = \chi$ i $X'W = \chi'$.

Położenie punktu P , leżącego na kole $KK'P$, może być określone w odniesieniu do koła XXK , lub też do koła $X'K'$. Niech będzie mianowicie

$$\begin{aligned} \sphericalangle PKY &= i, & XK &= \Omega, & KP &= u. \\ \sphericalangle PK'Y' &= i', & X'K' &= \Omega', & X'P &= u'. \end{aligned}$$

Jeżeli prócz kątów χ , χ' i j znane są jeszcze wartości kątów i , Ω i u to można obliczyć i' , Ω' i u' . Odwrotnie można znaleźć wartości kątów i , Ω i u , gdy dane są kąty i' , Ω' i u' . Wzory, za pomocą których wykonywa się obliczenie, wypływają z trójkąta WK'K. W trójkącie tym, jak widać na rycinie, kąty mają wartości j , i' , $180^\circ - i$, a przeciwległe boki odpowiednio wartości $u - u'$, $\Omega - \chi$ i $\Omega' - \chi'$. Stosując wzory Delambre'a (6), otrzymujemy wzory następujące:

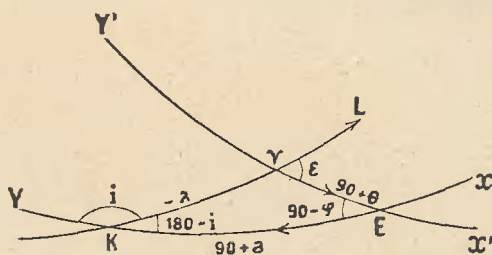
$$\begin{aligned} \sin \frac{i'}{2} \sin \frac{(\Omega' - \chi') + (u - u')}{2} &= \sin \frac{\Omega - \chi}{2} \sin \frac{i + j}{2}, \\ \sin \frac{i'}{2} \cos \frac{(\Omega' - \chi') + (u - u')}{2} &= \cos \frac{\Omega - \chi}{2} \sin \frac{i - j}{2}, \\ \cos \frac{i'}{2} \sin \frac{(\Omega' - \chi') - (u - u')}{2} &= \sin \frac{\Omega - \chi}{2} \cos \frac{i + j}{2}, \\ \cos \frac{i'}{2} \cos \frac{(\Omega' - \chi') - (u - u')}{2} &= \cos \frac{\Omega - \chi}{2} \cos \frac{i - j}{2}. \end{aligned} \tag{79}$$

Zważywszy, że zawsze jest $i' < 180^\circ$ (ust. 1), wnioskujemy, że $\sin \frac{i'}{2}$ i $\cos \frac{i'}{2}$ mają zawsze wartość dodatnią. Wobec tego pierwszy i drugi z powyższych wzorów określają wartość sumy $(\Omega' - \chi') + (u - u')$, a wzory trzeci i czwarty wartość różnicy $(\Omega' - \chi') - (u - u')$. Wszystkie zatem wzory (79) razem określają wartości $\Omega' - \chi'$ i $u - u'$; że zaś wartości χ' i u uważamy za dane, więc tem samem wyznaczone są wartości Ω' , u' i i' .

Gdyby odwrotnie dane były wartości Ω' , i' i u' i trzeba było znaleźć Ω , i i u , to należałoby stosować następujące wzory, analogiczne do poprzednich.

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{i}{2} \sin \frac{(\delta - \chi) - (u - u')}{2} &= \sin \frac{\delta' - \chi'}{2} \sin \frac{i' - j}{2}, \\
 \sin \frac{i}{2} \cos \frac{(\delta - \chi) - (u - u')}{2} &= \cos \frac{\delta' - \chi'}{2} \sin \frac{i' + j}{2}, \\
 \cos \frac{i}{2} \sin \frac{(\delta - \chi) + (u - u')}{2} &= \sin \frac{\delta' - \chi'}{2} \cos \frac{i' - j}{2}, \\
 \cos \frac{i}{2} \cos \frac{(\delta - \chi) + (u - u')}{2} &= \cos \frac{\delta' - \chi'}{2} \cos \frac{i' + j}{2}.
 \end{aligned} \quad (79)$$

W tych wzorach jest $\sin \frac{i}{2} > 0$ i $\cos \frac{i}{2} > 0$, a więc odnoszą się do tych wzorów te same uwagi, co i do poprzednich. Weźmy pod uwagę kilka specjalnych przypadków.



Rycina 37.

1. Znaleźć kąt nachylenia ekliptyki względem horyzontu astronomicznego oraz azymuty i długości astronomiczne punktów przecięcia się ekliptyki z horyzontem.

Niechaj koło XY (ryc. 37) przedstawia horyzont astronomiczny punktu obserwacji, którego szerokość geograficzna jest φ , a koło X'Y' niech przedstawia równik świata; jednym z punktów przecięcia się równika z horyzontem jest punkt wschodni E. Kąt nachylenia wzajemnego tych dwóch kół jest równy odległości bieguna świata od zenitu miejsca obserwacji, a zatem $Y'EY' = 90^\circ - \varphi$.

Gdy koło KY wyobraża ekliptykę i gdy strzałki na rycinie wskazują kierunek dodatni rachuby na ekliptyce i na horyzoncie, to kątem nachylenia ekliptyki względem horyzontu jest

$\angle YK\gamma = i$. Gdy zaś przez a oznaczymy azymut punktu przecięcia się tych dwóch kół K , to ponieważ liczy się azymut na horyzoncie od punktu południowego, który od punktu E oddalony jest o 90° , więc jest $EK = 90^\circ + a$. Dalej, gdy przez γ rozumieć będziemy punkt wiosenny, to $\angle X'\gamma L = \varepsilon$; że zaś czas gwiazdowy w chwili obserwacji równa się kątowi godzinnemu punktu wiosennego γ , więc jest też $E\gamma = 90^\circ + \theta$. Wreszcie łuk $\gamma K = -\lambda$ jest długością punktu K , t. j. węzła wstępującego horyzontu na ekliptyce.

Uwzględniając wyżej podane wartości kątów i boków w trójkącie $EK\gamma$, można zastosować do niego wzory (79), pisząc w nich:

$$\begin{aligned} j &= 90^\circ - \varphi, & i' &= 180^\circ - \varepsilon, & i &= i, \\ \Omega - \chi &= 90^\circ + a, & \Omega' - \chi' &= 90^\circ + \theta, & u - u' &= -\lambda. \end{aligned}$$

Otrzymuje się w ten sposób:

$$\begin{aligned} \sin \frac{i}{2} \sin \frac{90^\circ + a + \lambda}{2} &= \sin \frac{90^\circ + \theta}{2} \sin \frac{90^\circ + \varphi - \varepsilon}{2}, \\ \sin \frac{i}{2} \cos \frac{90^\circ + a + \lambda}{2} &= \cos \frac{90^\circ + \theta}{2} \sin \frac{270^\circ - \varphi - \varepsilon}{2}, \\ \cos \frac{i}{2} \sin \frac{90^\circ + a - \lambda}{2} &= \sin \frac{90^\circ + \theta}{2} \cos \frac{90^\circ + \varphi - \varepsilon}{2}, \\ \cos \frac{i}{2} \cos \frac{90^\circ + a - \lambda}{2} &= \cos \frac{90^\circ + \theta}{2} \cos \frac{270^\circ - \varphi - \varepsilon}{2}; \end{aligned} \quad (q)$$

oraz

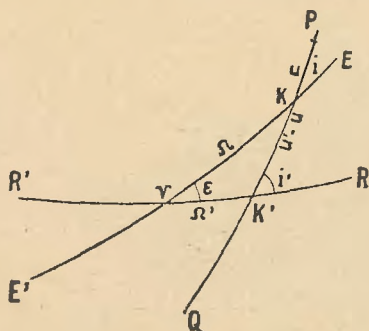
$$\begin{aligned} \sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{90^\circ + \theta + \lambda}{2} &= \sin \frac{90^\circ + a}{2} \sin \frac{90^\circ + \varphi - i}{2}, \\ \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{90^\circ + \theta + \lambda}{2} &= \cos \frac{90^\circ + a}{2} \sin \frac{270^\circ - \varphi - i}{2}, \\ \cos \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{90^\circ + \theta - \lambda}{2} &= \sin \frac{90^\circ + a}{2} \cos \frac{90^\circ + \varphi - i}{2}, \\ \cos \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{90^\circ + \theta - \lambda}{2} &= \cos \frac{90^\circ + a}{2} \cos \frac{270^\circ - \varphi - i}{2}. \end{aligned} \quad (r)$$

We wzorach (r) niewiadomemi są tylko a i λ .

Ponieważ w branym pod uwagę specjalnym przypadku pochyłość ekliptyki jest wielkością wiadomą, więc można niewiadome i , a i λ obliczyć także, nie uciekając się do wzorów Delambre'a, z pomocą następujących wzorów prostszych, których wyprowadzenie z trójkąta KVE nie przedstawia żadnych trudności:

$$\begin{aligned}\cos i &= -\cos \varepsilon \sin \varphi + \sin \varepsilon \cos \varphi \sin \theta, \\ \sin i \cos a &= \sin \varepsilon \cos \theta, \\ \sin i \sin a &= \cos \varepsilon \cos \varphi + \sin \varepsilon \sin \varphi \sin \theta, \\ \sin i \sin \lambda &= -\cos \varphi \cos \theta, \\ \sin i \cos \lambda &= \sin \varepsilon \sin \varphi + \cos \varepsilon \cos \varphi \sin \theta,\end{aligned}\tag{s}$$

w których zawsze należy przyjmować $\sin i > 0$.



Rycina 38.

Podobnie, gdy wiadomymi są i i a , to do obliczenia niewiadomych θ i λ służyć mogą wzory następujące:

$$\begin{aligned}\sin \varepsilon \cos \theta &= \sin i \cos a, \\ \sin \varepsilon \sin \theta &= \cos i \cos \varphi + \sin i \sin \varphi \sin a, \\ \sin \varepsilon \sin \lambda &= -\cos \varphi \cos a, \\ \sin \varepsilon \cos \lambda &= \sin i \sin \varphi + \cos i \cos \varphi \sin a.\end{aligned}\tag{t}$$

2. Punkt P (ryc. 38) znajduje się na kole QP, które przecina się z równikiem świata RR' w punkcie K', a z ekliptyką EE' w punkcie K. Jest zatem $\sphericalangle RK'P = i'$ nachyleniem koła QP

względem równika, a łuk $\gamma K' = \Omega'$ wznoszeniem prostem węzła wstępującego koła QP na równiku. Podobnie $\angle EKP = i$ jest nachyleniem koła QP względem ekliptyki, a łuk $\gamma K = \Omega$ jest długością węzła wstępującego K tego koła na ekliptyce. Oznaczmy jeszcze $KP = u$ i $K'P = u'$. Znaleść związki, zachodzące pomiędzy kątami Ω , i , u , a kątami Ω' , i' , u' . Stosując wzory (79) do trójkąta $\gamma KK'$, znajdujemy wzory następujące:

$$\begin{aligned}\sin \frac{i'}{2} \sin \frac{\Omega' - (u' - u)}{2} &= \sin \frac{\Omega}{2} \sin \frac{i - \varepsilon}{2}, \\ \sin \frac{i'}{2} \cos \frac{\Omega' - (u' - u)}{2} &= \cos \frac{\Omega}{2} \sin \frac{i + \varepsilon}{2}, \\ \cos \frac{i'}{2} \sin \frac{\Omega' + (u' - u)}{2} &= \sin \frac{\Omega}{2} \cos \frac{i - \varepsilon}{2}, \\ \cos \frac{i'}{2} \cos \frac{\Omega' + (u' - u)}{2} &= \cos \frac{\Omega}{2} \cos \frac{i + \varepsilon}{2};\end{aligned}\tag{u}$$

oraz

$$\begin{aligned}\sin \frac{i}{2} \sin \frac{\Omega + (u' - u)}{2} &= \sin \frac{\Omega'}{2} \sin \frac{i' + \varepsilon}{2}, \\ \sin \frac{i}{2} \cos \frac{\Omega + (u' - u)}{2} &= \cos \frac{\Omega'}{2} \sin \frac{i' - \varepsilon}{2}, \\ \cos \frac{i}{2} \sin \frac{\Omega - (u' - u)}{2} &= \sin \frac{\Omega'}{2} \cos \frac{i' + \varepsilon}{2}, \\ \cos \frac{i}{2} \cos \frac{\Omega - (u' - u)}{2} &= \cos \frac{\Omega'}{2} \cos \frac{i' - \varepsilon}{2}.\end{aligned}\tag{w}$$

Wzory (u) wyznaczają i' , Ω' i u' , gdy dane są wartości i , Ω i u ; wzory zaś (w) służą do wyznaczenia i , Ω i u , gdy dane są wartości i' , Ω' i u' .

40. Przykłady do ustępu 39.

Przykład 1. Dane są wartości

$$\begin{aligned}\chi &= 28^{\circ} 15', & \chi' &= 108^{\circ} 9', & j &= 36^{\circ} 20', \\ \Omega &= 320^{\circ} 6', & i &= 80^{\circ} 16', & u &= 45^{\circ} 20';\end{aligned}$$

znaleźć wartości niewiadomych Ω' , i' i u' .

Stosujemy do obliczenia wzory (79).

$\Omega = 320^{\circ} 6'$	$\sin \frac{i+j}{2}$	9.92983
$\chi = 28^{\circ} 15'$	$\sin \frac{\Omega - \chi}{2}$	9.74840
$\Omega - \chi = 291^{\circ} 51'$	$\cos \frac{i+j}{2}$	9.72055
$\frac{1}{2}(\Omega - \chi) = 145^{\circ} 55'.5$	$\sin \frac{i'}{2} \sin \frac{(\Omega' - \chi') + (u - u')}{2}$	9.67823
$i = 80^{\circ} 16'$	$\cos \frac{i'}{2} \sin \frac{(\Omega' - \chi') - (u - u')}{2}$	9.46895
$j = 36^{\circ} 20'$	$\sin \frac{i-j}{2}$	9.57295
$i+j = 116^{\circ} 36'$	$\cos \frac{\Omega - \chi}{2}$	9.91819 <i>n</i>
$i-j = 43^{\circ} 56'$	$\cos \frac{i-j}{2}$	9.96727
$\frac{1}{2}(i+j) = 58^{\circ} 18'$	$\sin \frac{i'}{2} \cos \frac{(\Omega' - \chi') + (u - u')}{2}$	9.49114 <i>n</i>
$\frac{1}{2}(i-j) = 21^{\circ} 58'$	$\cos \frac{i'}{2} \cos \frac{(\Omega' - \chi') - (u - u')}{2}$	9.88546 <i>n</i>
	$\sin \frac{(\Omega' - \chi') + (u - u')}{2}$	9.92348
	$\cos \frac{(\Omega' - \chi') - (u - u')}{2}$	9.97021 <i>n</i>
	$\sin \frac{i'}{2}$	9.75475
	$\cos \frac{i'}{2}$	9.81525
$\text{tang } \frac{1}{2} \{(\Omega' - \chi') + (u - u')\} = 0.18709 \text{ } n$	$\chi' = 108^{\circ} 9'.0$	
$\frac{1}{2} \{(\Omega' - \chi') + (u - u')\} = 123^{\circ} 1'.4$	$\Omega' = 30^{\circ} 11'.6$	
$\Omega' - \chi' + (u - u') = 246^{\circ} 2'.8$	$u - u' = 325^{\circ} 3'.9$	
$\text{tang } \frac{1}{2} \{(\Omega' - \chi') - (u - u')\} = 9.58349 \text{ } n$	$u = 45^{\circ} 20'$	
$\frac{1}{2} \{(\Omega' - \chi') - (u - u')\} = 159^{\circ} 1'.2$	$u' = 80^{\circ} 16'.1$	
$\Omega' - \chi' - (u - u') = 318^{\circ} 2'.4$	$\frac{i'}{2} = 34^{\circ} 38'.6$	
$2(\Omega' - \chi') = 564^{\circ} 5'.2$	$i' = 69^{\circ} 17'.2$	
$\Omega' - \chi' = 282^{\circ} 2'.6$		

Poszukiwane wartości są następujące:

$$\Omega' = 30^{\circ} 11'.6, \quad i' = 69^{\circ} 17'.2, \quad u' = 80^{\circ} 16'.1.$$

Przykład 2. Znaleźć w miejscu obserwacji, położonem w szerokości geograficznej $\varphi = 49^{\circ} 50'$, w czasie gwiazdowym lokalnym $\theta = 17^h 10^m$, kąt nachylenia ekliptyki do horyzontu, azymut węzła wstępującego ekliptyki na horyzoncie oraz długość astronomiczną węzła wstępującego horyzontu na ekliptyce. Jako pochyłość ekliptyki przyjmuje się $\varepsilon = 23^{\circ} 27'$.

Do obliczenia stosujemy wzory (q).

$\theta = 257^{\circ} 30'$	$90^{\circ} + \varphi - \varepsilon = 116^{\circ} 23'$
$90^{\circ} + \theta = 347^{\circ} 30'$	$270^{\circ} - \varphi - \varepsilon = 196^{\circ} 43'$
$\frac{1}{2}(90^{\circ} + \theta) = 173^{\circ} 45'$	$\frac{1}{2}(90^{\circ} + \varphi - \varepsilon) = 58^{\circ} 11'.5$
$\varphi - \varepsilon = 26^{\circ} 23'$	$\frac{1}{2}(270^{\circ} - \varphi - \varepsilon) = 98^{\circ} 21'.5$
$\varphi + \varepsilon = 73^{\circ} 17'$	
$\sin \frac{1}{2}(90^{\circ} + \varphi - \varepsilon) \quad 9.92933$	$\frac{1}{2}(90^{\circ} + a + \lambda) = 174^{\circ} 37'.6$
$\sin \frac{1}{2}(90^{\circ} + \theta) \quad 9.03690$	$\frac{1}{2}(90^{\circ} + a - \lambda) = 21^{\circ} 39'.5$
$\cos \frac{1}{2}(90^{\circ} + \varphi - \varepsilon) \quad 9.72187$	$90^{\circ} + a + \lambda = 349^{\circ} 15'.2$
$\sin \frac{i}{2} \sin \frac{1}{2}(90^{\circ} + a + \lambda) \quad 8.96623$	$90^{\circ} + a - \lambda = 43^{\circ} 19'.0$
$\cos \frac{i}{2} \sin \frac{1}{2}(90^{\circ} + a - \lambda) \quad 8.75877$	$180^{\circ} + 2a = 392^{\circ} 34'.2$
$\sin \frac{1}{2}(270^{\circ} - \varphi - \varepsilon) \quad 9.99536$	$2a = 212^{\circ} 34'.2$
$\cos \frac{1}{2}(90^{\circ} + \theta) \quad 9.99741 \, n$	$a = 106^{\circ} 17'.1$
$\cos \frac{1}{2}(270^{\circ} - \varphi - \varepsilon) \quad 9.16246 \, n$	$\sin \frac{1}{2}(90^{\circ} + a + \lambda) \quad 8.97149$
$\sin \frac{i}{2} \cos \frac{1}{2}(90^{\circ} + a - \lambda) \quad 9.99277 \, n$	$\sin \frac{i}{2} \quad 9.99474$
$\cos \frac{i}{2} \cos \frac{1}{2}(90^{\circ} + a - \lambda) \quad 9.15987$	$\sin \frac{1}{2}(90^{\circ} + a - \lambda) \quad 9.56711$
$\text{tang} \frac{1}{2}(90^{\circ} + a + \lambda) \quad 8.97346 \, n$	$\cos \frac{i}{2} \quad 9.19166$
$\text{tang} \frac{1}{2}(90^{\circ} + a - \lambda) \quad 9.59890$	$\frac{i}{2} = 81^{\circ} 3'.3$
	$i = 162^{\circ} 7'$
	<u>$\lambda = 152^{\circ} 58'.1$</u>

Dla porównania z rachunkiem powyższym podajemy jeszcze rozwiązanie powyższego zadania zapomocą wzorów (s). Litera A i B oznaczają tu liczby z tablicy logarytmów addycyjnych i subtrakcyjnych.

1	{	$-\cos \varepsilon$	9.96256 n	$\sin \varepsilon$	9.59983	$-\cos \varphi$	9.80957 n		
		$\sin \varphi$	9.88319	$\cos \theta$	9.33534 n	$\cos \theta$	9.33534 n		
		Π_1	9.84575 n	$\sin i \cos a$	8.93517 n	$\sin i \sin \lambda$	9.14491		
2	{	$\sin \varepsilon$	9.59983	3 {	$\cos \varepsilon$	9.96256	5 {	$\sin \varepsilon$	9.59983
		$\cos \varphi$	9.80957		$\cos \varphi$	9.80957		$\sin \varphi$	9.88319
		$\sin \theta$	9.98958 n		Π_3	9.77213		Π_5	9.48302
		Π_2	9.39898 n	4 {	$\sin \varepsilon$	9.59983	6 {	$\cos \varepsilon$	9.96256
		A	9.55323		$\sin \varphi$	9.88319		$\cos \varphi$	9.80957
		B	0.13275		$\sin \theta$	9.98958 n		$\sin \theta$	9.98958 n
		$\cos i$	9.97850 n		Π_4	9.47260 n		Π_6	9.76171 n
		<u>$i=162^{\circ} 7'$</u>			B	0,29953		B	0.27869
					A	9.99700		A	9.95411
				$\sin i \sin a$	9.46960	$\sin i \cos \lambda$	9.43713 n		
				$\text{tang } a$	0.53443 n	$\text{tang } \lambda$	9.70778 n		
				<u>$a=106^{\circ} 17'$</u>		<u>$\lambda=152^{\circ} 58'$</u>			
				$\sin a$	9.98222				
				$\sin i$	9.48738				
				<u>$i=162^{\circ} 7'$</u>					

Wynik, zgodny według obu obliczeń, jest następujący:

$$a = 106^\circ 17', \quad \lambda = 152^\circ 58', \quad i = 162^\circ 7'.$$

Przykład 3. Płaszczyzna drogi planetoidy Pallas (2) nachylona jest do płaszczyzny ekliptyki pod kątem $i = 34^\circ 42'$; długość węzła wstępującego drogi na ekliptyce wynosi $\Omega = 172^\circ 57'$, a punkt jej przysłoneczny znajduje się w odległości $\omega = 309^\circ 1'$ od węzła wstępującego. Znaleźć kąt nachylenia płaszczyzny drogi tej planetoidy do płaszczyzny równika i' , wznoszenie proste węzła wstępującego tej drogi na równiku Ω' , oraz odległość punktu przysłonecznego drogi od tego węzła ω' .

Rachunek wykonamy według wzorów (u).

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega}{2} &= 86^{\circ} 28'.5 & \sin \frac{i-\varepsilon}{2} & 8.99130 & \sin \frac{i'}{2} \sin \frac{\Omega'-(\omega'-\omega)}{2} & 8.99048 \\
i &= 34^{\circ} 42' & \sin \frac{\Omega}{2} & 9.99918 & \sin \frac{i'}{2} \cos \frac{\Omega'-(\omega'-\omega)}{2} & 8.71789 \\
\varepsilon &= 23^{\circ} 27' & \cos \frac{i-\varepsilon}{2} & 9.99791 & \tan \frac{\Omega'-(\omega'-\omega)}{2} & 0.27259 \\
i-\varepsilon &= 11^{\circ} 15' & \sin \frac{i+\varepsilon}{2} & 9.92913 & \cos \frac{i'}{2} \sin \frac{\Omega'+(\omega'-\omega)}{2} & 9.99709 \\
i+\varepsilon &= 58^{\circ} 9' & \cos \frac{\Omega}{2} & 8.78876 & \cos \frac{i'}{2} \cos \frac{\Omega'+(\omega'-\omega)}{2} & 8.51114 \\
\frac{1}{2}(i-\varepsilon) &= 5^{\circ} 37'.5 & \cos \frac{i+\varepsilon}{2} & 9.72238 & \tan \frac{\Omega'+(\omega'-\omega)}{2} & 1.48595 \\
\frac{1}{2}(i+\varepsilon) &= 29^{\circ} 4'.5 & & & &
\end{aligned}$$

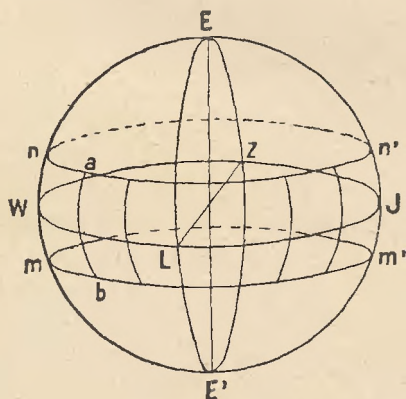
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\Omega'-(\omega'-\omega)] &= 61^{\circ} 54'.3 & \sin \frac{1}{2}[\Omega'-(\omega'-\omega)] & 9.94555 \\
\frac{1}{2}[\Omega'+(\omega'-\omega)] &= 88^{\circ} 7'.8 & \sin \frac{i'}{2} & 9.04493 \\
\Omega'-(\omega'-\omega) &= 123^{\circ} 48'.6 & \sin \frac{1}{2}[\Omega'+(\omega'-\omega)] & 9.99977 \\
\Omega'+(\omega'-\omega) &= 176^{\circ} 15'.6 & \cos \frac{i'}{2} & 9.99732 \\
2\Omega' &= 300^{\circ} 4'.2 & \frac{i'}{2} & = 6^{\circ} 22'.0 \\
\Omega' &= 150^{\circ} 2'.1 & i' & = 12^{\circ} 24' \\
\omega'-\omega &= 26^{\circ} 13'.5 \\
\omega' &= 335^{\circ} 14'.5
\end{aligned}$$

Wartości poszukiwane są więc następujące:

$$i' = 12^{\circ} 24', \quad \Omega' = 150^{\circ} 2', \quad \omega' = 335^{\circ} 14'.5.$$

41. Spółrzedne ekliptyczne i równikowe słońca. Kardynalne punkty ekliptyki. Ekliptyka określona została wyżej, jako to wielkie koło, na którym stale pozostaje środek tarczy słońca, zmieniającego swe położenie pośród gwiazd. Z określenia powyższego wynika, że szerokość astronomiczna słońca, którą oznaczać będziemy przez β_{\odot} , stale równa się zeru. Długość astronomiczna słońca wzrasta stale i przyjmuje kolejno wszystkie wartości od 0° do 360° .

Gdy na ryc. 39 koło WLJZ wyobraża ekliptykę, to pas nieba $mnm'n'$, którego środkiem przebiega ekliptyka i który po obu stronach ekliptyki rozciąga się na odległość $8\frac{1}{2}^{\circ}$, nazywa się *pasem zwierzyńcowym* czyli *zodjakałnym*. Gdy poczynawszy od koła szerokości, przechodzącego przez punkt wiosenny W, t. j. od koła EWE', poprowadzimy koła szerokości w odstępach co 30° , to podzielimy pas zwierzyńcowy na 12 równych części, takich jak np. mnab; części te nazywają się *znakami zwierzyńca*. Nazwy znaków i oznaczenia ich są po kolei następujące: 1. Baran Υ (0° — 30°), 2. Byk $\mathbf{\text{B}}$ (30° — 60°), 3. Bliźnięta Π (60° — 90°)



Rycina 39.

4. Rak $\mathbf{\text{R}}$ (90° — 120°), 5. Lew $\mathbf{\text{L}}$ (120° — 150°), 6. Panna $\mathbf{\text{P}}$ (150° — 180°), 7. Waga $\mathbf{\text{W}}$ (180° — 210°), 8. Niedźwiadek $\mathbf{\text{N}}$ (210° — 240°), 9. Strzelec $\mathbf{\text{S}}$ (240° — 270°), 10. Koziorożec $\mathbf{\text{K}}$ (270° — 300°), 11. Wodnik $\mathbf{\text{W}}$ (300° — 330°), 12. Ryby $\mathbf{\text{R}}$ (330° — 360°). Punkty W, L, J i Z przypadają odpowiednio na początku znaków Barana, Raka, Wagi i Koziorożca. Dlatego to punkt W nazywa się *punktem Barana* i oznacza się symbolem Υ , który wyobraża baranie rogi, a punkt J często nazywany bywa *punktem Wagi* i oznacza się przez $\mathbf{\text{W}}$.

Znaki zwierzyńcowe noszą te same nazwy i następują po sobie w tej samej kolejności, co gwiazdozbiory, zawarte w granicach pasa zwierzyńcowego. Gwiazdozbiory te wszakże, zwane *gwiaz-*

zdozbiorami zwierzyńca, rozciągają się wzdłuż ekliptyki na niejednakową długość i zmieniają swe położenie w stosunku do znaków zwierzyńca wskutek precesji (p. rozdział VIII). Obecnie na przykład znak Barana znajduje się w gwiazdozbiórze Ryb, i w ten sposób cofnięte są o jeden gwiazdozbiór wszystkie inne znaki.

Spółrzędne równikowe słońca wypływają ze wzorów (78'). Oznaczny przez \odot długość słońca, a przez α_{\odot} i δ_{\odot} jego wznoszenie proste i zboczenie, to, ponieważ jest $\beta_{\odot} = 0^{\circ}$, więc ze wzorów (78') w przypadku słońca otrzymujemy następujące:

$$\begin{aligned}\sin \delta_{\odot} &= \sin \varepsilon \sin \odot, \\ \cos \delta_{\odot} \cos \alpha_{\odot} &= \cos \odot, \\ \cos \delta_{\odot} \sin \alpha_{\odot} &= \cos \varepsilon \sin \odot.\end{aligned}\tag{80}$$

Zważywszy, że zawsze jest $\cos \delta_{\odot} \geq 0$, wnioskujemy z dwóch ostatnich powyższych wzorów, że α_{\odot} przypada zawsze w tej samej ćwiartce koła co \odot ; możemy więc zawsze bez dwuznaczności wyznaczyć δ_{\odot} za pomocą pierwszego z powyższych wzorów, a α_{\odot} ze wzoru

$$\tan \alpha_{\odot} = \cos \varepsilon \tan \odot.\tag{80'}$$

Często stosuje się też do obliczenia α_{\odot} szereg (27). Ponieważ jest w tym przypadku $m = \cos \varepsilon$, a zatem

$$\frac{m-1}{m+1} = \frac{\cos \varepsilon - 1}{\cos \varepsilon + 1} = -\tan^2 \frac{\varepsilon}{2},$$

wiec stosując wzór (27), znajdujemy

$$\begin{aligned}\alpha_{\odot} &= \odot - \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\odot + \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\varepsilon}{2} \sin 4\odot - \\ &\quad - \frac{1}{3} \tan^6 \frac{\varepsilon}{2} \sin 6\odot + \dots\end{aligned}\tag{80''}$$

Gdy zaś dane jest wznoszenie proste słońca i należy obliczyć jego długość, to zgodnie ze wzorem (80') jest

$$\tan \odot = \tan \alpha_{\odot} \sec \varepsilon.\tag{81}$$

Celem zaś zastosowania wzoru (27) należy w tym przypadku podstawić $m = \sec \varepsilon$; jest więc

$$\frac{m-1}{m+1} = \frac{\sec \varepsilon - 1}{\sec \varepsilon + 1} = \frac{1 - \cos \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon} = \tan^2 \frac{\varepsilon}{2},$$

oraz

$$\begin{aligned} \odot = \alpha_{\odot} + \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2 \alpha_{\odot} + \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\varepsilon}{2} \sin 4 \alpha_{\odot} + \\ + \frac{1}{8} \tan^6 \varepsilon \sin 6 \alpha_{\odot} + \dots \end{aligned} \quad (81')$$

Celem otrzymania wznoszenia prostego i długości słońca zapomocą wzorów (80'') i (81') w miarach łukowych, współczynniki $\tan^{2k} \frac{\varepsilon}{2}$ muszą być wyrażone w sekundach łukowych, a w tym celu wartości ich liczbowe muszą być pomnożone przez $\text{cosec } 1'' = 206265$.

Zmiany spółrzędnych równikowych słońca, które mają ten sam okres, co zmiany długości słońca, pociągają za sobą w przebiegu dziennego ruchu słońca również zmiany, powtarzające się w tym samym okresie. W jaki sposób zmiany te się objawiają, zobaczmy w dalszych ustępach tego rozdziału.

W przebiegu zjawisk, zależnych od ruchu słońca wśród gwiazd, szczególnie wybitnie wyróżniają się cztery okresy, których początek stanowią chwile, gdy długość słońca \odot wynosi odpowiednio 0° , 90° , 180° i 270° . Słońce wtedy znajduje się w punktach, oznaczonych literami W, L, J i Z na rycinach 31 i 39. Te cztery punkty nazywają się *kardynalnymi punktami ekliptyki*.

Spółrzędne równikowe słońca w punktach kardynalnych zgodnie z wzorami (80) są następujące:

1. $\odot = 0^\circ, \alpha_{\odot} = 0^\circ, \delta_{\odot} = 0^\circ;$
 2. $\odot = 90^\circ, \alpha_{\odot} = 90^\circ, \delta_{\odot} = +\varepsilon;$
 3. $\odot = 180^\circ, \alpha_{\odot} = 180^\circ, \delta_{\odot} = 0^\circ;$
 4. $\odot = 270^\circ, \alpha_{\odot} = 270^\circ, \delta_{\odot} = -\varepsilon.$
- (x)

Okres czasu, w którym \odot wzrasta o 360° , nazywa się *rokiem zwrotnikowym*, a okres czasu, który upływa pomiędzy przejściami słońca przez dwa następujące po sobie punkty kar-

dynalne, nazywa się *porą roku*. Rok zwrotnikowy dzieli się zatem na cztery pory roku, z których każda zaczyna się w chwili, gdy słońce znajduje się w jednym z punktów kardynalnych. Nazwy pór roku są: wiosna, lato, jesień i zima.

Na półkuli północnej zaczynają się odpowiednio wiosna, lato, jesień i zima, gdy \odot ma wartości 0° , 90° , 180° i 270° . Dlatego też punkty kardynalne, odpowiadające powyższym wartościom długości słońca, nazywają się kolejno *punktem wiosennym* (W), *letnim* (L), *jesiennym* (J) i *zimowym* (Z). Na półkuli południowej w tych samych momentach zaczynają się po kolei jesień, zima, wiosna i lato. W ogólności w danym miejscu na powierzchni ziemi jest wiosna i lato wtedy, gdy szerokość geograficzna tego miejsca i zboczenie słońca mają znak jednakowy, jesień zaś i zima jest wtedy, gdy szerokość geograficzna miejsca i zboczenie słońca mają znak przeciwny.

Różniczkując względem \odot , znajdujemy ze wzoru (80)

$$\cos \delta_{\odot} \frac{d\delta_{\odot}}{d\odot} = \sin \varepsilon \cos \odot.$$

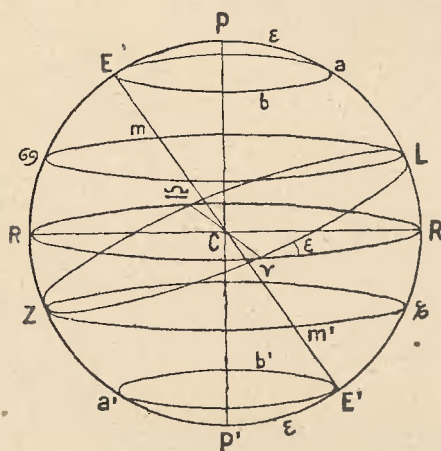
Ponieważ zawsze $\cos \delta_{\odot} \geq 0$, więc z powyższego wzoru wynika, że

$$\frac{d\delta_{\odot}}{d\odot} > 0, \text{ gdy } -90^\circ < \odot < +90^\circ,$$

$$\frac{d\delta_{\odot}}{d\odot} < 0, \text{ gdy } 90^\circ < \odot < 270^\circ.$$

To znaczy, że gdy $\odot = 0^\circ$, to δ_{\odot} przechodzi przez 0 wzrastając, gdy zaś $\odot = 180^\circ$, to δ_{\odot} przechodzi przez 0 malejąc. W pierwszym przypadku słońce z półkuli południowej przechodzi na północną, w drugim przypadku z półkuli północnej na południową. Gdy $\delta_{\odot} = 0^\circ$, jest (ust. 34) $2\tau_{\odot} = 2\sigma_{\odot} = 12^h$, i to niezależnie od wartości φ . Wtedy na całej powierzchni ziemi łuk dzienny i łuk nocny słońca są sobie równe. A że *dniem* nazywany jest powszechnie ten okres czasu, kiedy słońce znajduje się nad horyzontem, *nocą* zaś ten okres czasu, gdy słońce znajduje się pod horyzontem, więc można też powiedzieć, że gdy jest $\delta_{\odot} = 0^\circ$, to we wszystkich punktach powierzchni ziemi dzień jest równy nocy. Wskutek tego punkty wiosenny i jesienny nazywają się także *punktami równonocnymi*.

Gdy $\frac{d\delta_{\odot}}{d\odot}=0$, to, jak wiadomo, δ_{\odot} posiada swą wartość największą lub najmniejszą. Zachodzi to wówczas, gdy $\cos \odot = 0$, a więc gdy $\odot = \pm 90^{\circ}$. Jak widać z tabelki punktów kardynalnych (x), jest wtedy $\delta_{\odot} = \pm \varepsilon$. W tych położeniach słońce, oddalając się od równika, zatrzymuje się w swoim ruchu i poczyną się zbliżać do równika. Dlatego punkty L ($\odot = 90^{\circ}$, $\delta = +\varepsilon$) i Z ($\odot = 270^{\circ}$, $\delta = -\varepsilon$) nazywają się *stanowiskami* słońca. Chwila przejścia słońca przez stanowisko L jest początkiem astronomicznym lata, chwila zaś przejścia przez stanowisko Z jest początkiem astronomicznym zimy; dlatego pierwsze z tych stanowisk nazywa się *stanowiskiem letnim*, a drugie — *stanowiskiem zimowym*.



Rycina 40.

Równoleżniki Lm \odot i Zm' \mathcal{Z} (ryc. 40) stanowią granice, których słońce w swym biegu nigdy nie przekracza; osiągnąwszy je w punktach L i Z, zmienia słońce kierunek ruchu, t. j. zawraca z powrotem w kierunku równika. Dlatego nazywają się one *zwrotnikami*. Zwrotnik, przechodzący przez stanowisko letnie L, które przypada na początku znaku Raka, nazywa się *zwrotnikiem Raka*, zwrotnik zaś, przechodzący przez stanowisko zimowe Z, które przypada na początku znaku Koziorożca, nazywa się *zwrotnikiem Koziorożca*.

Oprócz zwrotników na uwagę zasługują równoleżniki abE i $a'b'E'$, które przechodzą przez bieguny ekliptyki E i E' , a zatem przebiegają w odległości $PE = P'E' = \epsilon$ od biegunów świata; a w odległości $\delta = \pm(90^\circ - \epsilon)$ od równika. Równoleżniki te nazywają się *kołami biegunowymi*, pierwsze — północnem, drugie — południowem.

Zwrotnikom i kołom biegunowym na powierzchni ziemi odpowiadają równoleżniki w szerokościach geograficznych odpowiednio $\varphi = \pm \epsilon$ i $\varphi = \pm(90^\circ - \epsilon)$. Równoleżniki te, t. j. zwrotniki geograficzne (zwrotnik Raka i zwrotnik Koziorożca) i koła biegunowe na ziemi wyróżniane są z pośród innych głównie z tego powodu, ponieważ stanowią one granice t. zw. stref klimatycznych na ziemi.

42. Uwagi ogólne o rachubie czasu w związku z ruchem słońca.

Niechaj w danem miejscu obserwacji w czasie gwiazdowym θ kąt godzinny słońca ma wartość t_\odot , a wznoszenie proste słońca wartość α_\odot . Według wzoru ogólnego (77) jest w tym przypadku

$$t_\odot = \theta - \alpha_\odot.$$

Gdy $\theta = \alpha_\odot$, a więc $t_\odot = 0^h$, słońce góruje. Chwila ta nazywa się *prawdziwem południem*, ponieważ dzieli ona dzień, liczony od wschodu do zachodu słońca, w przybliżeniu na dwie równe części. Gdy zaś $\theta = \alpha_\odot + 12^h$, a więc $t_\odot = 12^h$, to słońce dołuje. Chwila ta nazywa się *prawdziwą północą*, ponieważ dzieli noc, liczoną od zachodu słońca do wschodu, na dwie w przybliżeniu równe części.

Okres czasu, w ciągu którego kąt godzinny słońca t_\odot wzrasta o 360° , nazywa się *prawdziwą dobą słoneczną*; za początek prawdziwej doby słonecznej przyjmuje się prawdziwe południe. Ilość czasu, która w danej chwili upłynęła od prawdziwego południa, mierzona kątem godzinnym słońca, nazywa się *prawdziwym czasem słonecznym*; oznaczać go będziemy literą ϑ . Jest zatem według określenia $\vartheta = t_\odot$, a zgodnie ze wzorem (71) jest także $\vartheta = \vartheta_0 - \lambda$, jeżeli przez ϑ_0 oznaczymy czas prawdziwy słoneczny południka głównego, a przez λ długość geograficzną miejsca obserwacji.

Okres czasu, w którym długość słońca \odot wzrasta o 360° ,

nazywać będziemy *rokiem zwrotnikowym*, przyjmując w pierwszym przybliżeniu długość jego

$$R_z = 366.2422 \dots \text{dni gwiazdowych.}$$

Dokładna definicja roku zwrotnikowego oraz jego długość będzie podana później (p. rozdział X).

Ponieważ ruch słońca jest przeciwny co do kierunku dziennemu ruchowi nieba, więc w ciągu roku zwrotnikowego słońce wykonywa o jeden obrót dokoła osi świata mniej, aniżeli stałe punkty nieba. Jest zatem

$$366.2422 \dots \text{dni gwiazdowych} = 365.2422 \dots \text{dni prawdz. słoneczn.}$$

Prawdziwa doba słoneczna jest więc dłuższa od doby gwiazdowej. Ponieważ w prawdziwe południe jest zawsze $\theta = \alpha_{\odot}$, więc, gdy α_{\odot} przebiega wszystkie wartości od 0^h do 24^h , także i czas gwiazdowy w prawdziwe południe jest coraz późniejszy i w ciągu roku zmienia się od 0^h do 24^h : wynosi on 0^h i 12^h w chwilach wiosennej i jesiennej równonocy, a 6^h i 18^h odpowiednio w czasie przejścia słońca przez stanowisko letnie i zimowe.

Gdy oznaczymy przez $\Delta\alpha_{\odot}$ zmianę wznoszenia prostego słońca w czasie pomiędzy dwoma kolejnymi jego górowaniami, to wielkość ta wyraża zarazem, o ile czas gwiazdowy następnego prawdziwego południa jest większy od czasu gwiazdowego poprzedniego prawdziwego południa. Oznaczmy przez ω_{\odot} prawdziwą dobę słoneczną, a przez ω' dobę gwiazdową według określenia, podanego w ustępie (32), to z powyższych uwag wynika, że

$$\omega_{\odot} = \omega' + \Delta\alpha_{\odot}.$$

Gdyby zmiana $\Delta\alpha_{\odot}$ w ciągu całego roku miała wartość stałą dla dowolnych dwóch po sobie następujących górowań słońca, to byłoby oczywiście

$$\Delta\alpha_{\odot} = \frac{24^h}{365.2422 \dots}$$

i doba słoneczna prawdziwa miałyby również w ciągu roku stałą wartość. Jednakże przyrost wznoszenia prostego słońca nie jest jednostajny. Jedną z przyczyn tej niejednostajności jest nachylenie ekliptyki względem równika. Ze wzoru

$$\operatorname{tang} \alpha_{\odot} = \cos \varepsilon \operatorname{tang} \odot$$

wynika

$$d\alpha_{\odot} = \frac{\cos^2 \alpha_{\odot}}{\cos^2 \odot} \cos \varepsilon d\odot = \cos \varepsilon \sec^2 \delta_{\odot} d\odot \quad (y)$$

Widzimy z tego wzoru, że ponieważ δ_{\odot} zmienia się w ciągu roku w granicach od $-\varepsilon$ do $+\varepsilon$, to odpowiednio $d\alpha_{\odot}$ zmieniać się musi w granicach od $\cos \varepsilon d\odot$ do $\sec \varepsilon d\odot$. Poza tem i długość słońca zmienia się niejednostajnie, jak to z obserwacji ruchu słońca wynika.

Uwagi powyższe prowadzą do wniosku, że doba słoneczna prawdziwa ma długość zmienną. Oznaczmy więc

$$\Delta\alpha_m = \frac{24^h}{365.2422\dots} = \frac{\omega'}{365.2422\dots},$$

to $\Delta\alpha_m$ przedstawia średnią wartość ze wszystkich wartości $\Delta\alpha_{\odot}$ w ciągu roku zwrotnikowego. Połóżmy dalej

$$\omega_m = \omega' + \Delta\alpha_m \quad (z)$$

to ω_m oznacza stały okres czasu, który nazywa się *średnią dobą słoneczną*. Mnożąc wzór (z) przez 365.2422..., otrzymamy

$$365.2422\dots \omega_m = 365.2422\dots \omega' + \omega' = 366.2422\dots \omega',$$

skąd wynika:

$$\begin{aligned} \omega_m &= \frac{366.2422\dots}{365.2422\dots} \omega' = 1.0027379\dots \omega', \\ \omega' &= \frac{365.2422\dots}{366.2422\dots} \omega_m = 0.9972695\dots \omega_m. \end{aligned} \quad (aa)$$

Gdy przyjmiemy podział średniej doby słonecznej na godziny, minuty i sekundy średnie słoneczne, analogiczny do podziału doby gwiazdowej na godziny, minuty i sekundy gwiazdowe, to możemy też pisać

$$\omega_m = 1^d \ 0^h \ 3^m \ 56^s.555 \dots \text{ gwiazdowych} \quad (aa')$$

$$\omega' = 0^d \ 23^h \ 56^m \ 4^s.091 \dots \text{ średnich}$$

Doba średnia słoneczna, której dokładniejszą definicję podamy w rozdziale X, z rozmaitych względów jest podstawą rachuby i pomiaru czasu wogóle i w astronomji w szczególności. W ścisłym związku z wprowadzeniem tej jednostki czasu znajduje się stosowanie w praktyce średniego czasu słonecznego zamiast prawdziwego. Ten ostatni, jak wynika ze wzoru $\vartheta = \theta - \alpha_{\odot}$, nie wzrasta proporcjonalnie do czasu, gdyż α_{\odot} wzrasta z prędkością zmienną. Możemy sobie jednakże wyobrazić taki punkt, który biegnie na równiku świata ze stałą prędkością $\Delta\alpha_m$ na dobę średnią i jednocześnie ze słońcem przechodzi przez punkt wiosenny. Odstęp między dwoma kolejnymi górowaniami powyższego punktu wynosiłby oczywiście stale średnią dobę słoneczną.

Oznaczmy wznoszenie proste tego punktu przez α_m , to kąt godzinny jego $t_m = \theta - \alpha_m$ wzrasta proporcjonalnie do czasu, gdy w ten sam sposób wzrasta θ i α_m .

Punkt fikcyjny, określony w sposób powyższy, nazwijmy *słońcem średnim*. Stosownie do tego chwilę górowania tego średniego słońca nazywać będziemy *średnim południem*, a wyżej określona doba średnia słoneczna będzie okresem czasu, upływającym pomiędzy dwoma następującymi po sobie średnimi południami. Za początek średniej doby słonecznej przyjmuje się średnie południe, wobec czego *czasem średnim słonecznym* w danej chwili jest czas, który upłynął od średniego południa, mierzony kątem godzinnym średniego słońca. Oznaczmy czas średni słoneczny przez τ , to według określenia powyższego jest $\tau = t_m$. Gdy $t_m = 0^0$, jest $\theta = \alpha_m$, t. j., że w średnie południe czas gwiazdowy równa się wznoszeniu prostemu średniego słońca.

Oczywiście i w zastosowaniu do czasu średniego ważny jest wzór (71), jest zatem

$$\eta = \eta_0 - \lambda,$$

gdy λ oznacza długość geograficzną miejsca obserwacji, a η_0 czas średni słoneczny na południku głównym.

Pomiędzy czasem słonecznym prawdziwym a czasem słonecznym średnim zachodzi ścisły związek, który pozwala obliczyć jeden z nich, gdy dany jest drugi. Niechaj będzie w danej chwili

$$\eta - \vartheta = Z,$$

to Z nazywa się *równaniem czasu*.

Sprawami, związanymi z pomiarem czasu, szczegółowo zajmuje się rozdział X. Tam też równaniu czasu poświęcony jest obszerniejszy ustęp.

Rok zwrotnikowy i doba średnia słoneczna są podstawowymi jednostkami chronologicznej rachuby czasu, którą nomenklatura astronomia.

Każdy moment w czasie, o ile ma być dokładnie określony, musi mieć swoją *datę*. Daty muszą być podawane w takiej formie, aby odstęp czasu pomiędzy dwoma datami mógł być wyrażony w przyjętych jednostkach czasu, a więc w dniach średnich słonecznych oraz w mniejszych jednostkach czasu, z tej podstawowej jednostki wyprowadzonych. Gdy więc w dalszych częściach tej książki będzie mowa o dniach, godzinach, minutach i sekundach bez bliższego określenia, to należy zawsze rozumieć przez nie dni, godziny, minuty i sekundy średnie słoneczne.

Do określenia daty służy obecnie *rok kalendarzowy*, będący w powszechnym użyciu. Jest to okres czasu, obejmujący całkowitą liczbę dni średnich słonecznych, i różniący się od roku zwrotnikowego tylko o ułamek doby. Ponieważ rok zwrotnikowy, jak widzieliśmy, ma 365.2422... dni, więc rok kalendarzowy może mieć dni 365 lub 366. Liczba lat kalendarzowych po 365 i 366 dni w jakimś okresie czasu, obejmującym

p lat, winna być określona tak, ażeby o ile możliwości jak najdokładniej spełniony był warunek

$$365m + 366n = 365.2422\dots p,$$

gdzie przez m , n i p rozumieć należy liczby całkowite takie, że $m + n = p$.

W taki sposób w okresie, obejmującym p lat zwrotnikowych, a równocześnie kalendarzowych, uzyskuje się wyrównanie pomiędzy rachubą chronologiczno-kalendarzową a ruchem słońca, służącym za podstawę rachuby lat. Określony w sposób powyższy okres p -letni nazywa się *okresem wyrównania*; lata kalendarzowe tego okresu, mające po dni 365, nazywają się latami *zwyczajnymi*, lata zaś, mające po dni 366, nazywają się *przestępnymi*.

Takich okresów wyrównania można sobie wyobrazić bardzo wiele, i różne takie okresy miały i mają zastosowanie w rachubie chronologicznej różnych narodów. Weźmy pod uwagę tylko dwa takie okresy, które są podstawą kalendarzy *jułjańskiego* i *gregorjańskiego*.

W kalendarzu jułjańskim jest $p = 4$, $m = 3$, $n = 1$; przeciętna długość roku jułjańskiego wynosi zatem

$$\frac{3 \cdot 365 + 366}{4} = \frac{1461}{4} = 365.25 \text{ dni.}$$

Rok jułjański jest więc średnio o $365^d.25 - 365^d.2422\dots = 0^d.0078\dots$ dłuższy od roku zwrotnikowego, wskutek czego data jułjańska względem roku zwrotnikowego przesuwają się wstecz o 1 dzień w okresie, wynoszącym $\frac{1}{0.0078\dots} = 128$ lat.

Lepsze wyrównanie osiąga kalendarz gregorjański, który też był obmyślany, jako udoskonalenie kalendarza jułjańskiego. W kalendarzu gregorjańskim przyjęto $p = 400$, $m = 303$, $n = 97$, przeciętna więc długość roku gregorjańskiego wynosi

$$\frac{303 \cdot 365 + 97 \cdot 366}{400} = \frac{146097}{400} = 365.2425 \text{ dni.}$$

Rok gregorjański różni się więc od roku zwrotnikowego za-
ledwie o $365^d.2425 - 365^d.2422 \dots = 0.0003 \dots$ dnia.

W astronomji bardzo często za jednostki czasu używane
bywają: *rok juljański*, mający 365.25 dni, oraz *stulecie juljań-
skie*, mające 36525 dni.

Tak w kalendarzu juljańskim, jak i w gregorjańskim lata
liczymy od Narodzenia Chrystusa. Początek rachuby lat określa
erę chronologiczną. Era, w której lata liczą się od Narodzenia
Chrystusa, nazywa się *erą chrześcijańską*.

Datę określa się przez podanie liczby roku ery chrześci-
jańskiej, nazwy miesiąca, liczby dnia w miesiącu oraz ewen-
tualnie części dnia, czy to w postaci jego ułamka, czy też wy-
rażonej w mniejszych jednostkach czasu i ich częściach. Poza-
tem należy podać południk, do którego odnosi się data. Jednakże
należy zwrócić uwagę na pewne różnice między t. zw. *cywilną*
i *astronomiczną* rachubą dat; są one następujące:

1. Doba cywilna x (t. j. dzień miesiąca) zaczyna się w mo-
mencie średniej północy; ta sama doba astronomiczna x za-
czyna się dopiero w następne średnie południe. Godziny astro-
nomiczne liczy się zawsze od 0^h do 24^h , cywilne zaś zazwyczaj
tylko od 0^h do 12^h do następnego południa i od 0^h do 12^h do
północy; celem odróżnienia od siebie godzin tych dwóch seryj
należy dodatkowo wyjaśnić, czy są to godziny po południu, czy
po północy. Gdy zaś liczy się godziny doby od 0^h do 24^h , to
zawsze za początek dnia przyjmuje się północ. Jest zatem

cywilnie:

a) $n < 12^h$:

dzień x godzina n , lub godzina n po północy;

b) $n > 12^h$:

dzień x godzina n , lub godzina $n - 12^h$ po południu.

astronomicznie:

a) $n < 12^h$:

dzień $x - 1$, godzina $n + 12^h$;

b) $n > 12^h$:

dzień x , godzina $n - 12^h$.

Począwszy od r. 1925 za początek doby przyjmują roczniki astronomiczne północ średnią w Greenwich. Także i w tej książce, gdy podany jest czas, należy rozumieć go jako czas cywilny greenwich'ski, o ile nie jest powiedziane, że jest inny. Czas cywilny greenwich'ski, zgodnie z propozycją profesora Banachiewicza, zyskującą coraz więcej zwolenników, nazywać będziemy *czasem uniwersalnym*.

2. Rok kalendarzowy cywilny zaczyna się d. 31 grudnia o godzinie 12 po południu, która jest godziną 0 d. 1 stycznia. Astronomicznie rok kalendarzowy zaczyna się o 12 godzin wcześniej w latach zwyczajnych, t. j. d. 31 grudnia w południe, a o 12 godzin później w latach przestępnych, t. j. d. 1 stycznia w południe. Astronomicznie oznacza się początek roku kalendarzowego jako

styczeń $0,0^h 0^m 0^s.0$ czasu miejscowego

w latach zwyczajnych, oraz jako

styczeń $1,0^h 0^m 0^s.0$ czasu miejscowego

w latach przestępnych.

Astronomicznie równoznacznymi są 2 następujące oznaczenia daty początku roku zwyczajnego na tym samym południku geograficznym:

Rok y , grudzień $31,0^h 0^m 0^s = \text{Rok } y + 1$, styczeń $0,0^h 0^m 0^s$.

43. Kulminacje i największe dygresje słońca; przejścia słońca przez pierwsze koło wierzchołkowe. Roczniki astronomiczne podają spólrzędne słońca dla godziny 0 czasu uniwersalnego. Spólrzędne księżyca, jako znacznie szybciej się zmieniające, podawane są w niektórych rocznikach dla każdej pełnej godziny czasu uniwersalnego, lub także dla chwili jego górowania w Greenwich. Spólrzędne wielkich planet są podawane również dla godziny 0 w odstępach dwu- lub czterodniowych, zależnie od prędkości ich ruchu geocentrycznego.

Gdy chodzi o poznanie ogólnego charakteru zmian, jakim podlegają zjawiska ruchu dziennego ciał niebieskich, których spólrzędne równikowe są zmienne, można spólrzędne te uważać za stałe w ciągu jednej doby, np. równe wartości ich o godzinie 0 tego dnia, jak ją podają efemerydy. Czyniąc powyższe założenie, zbadajmy zmiany, jakim ulega ruch dzienny słońca w ciągu roku, w związku z ruchem własnym na ekliptyce.

Ponieważ $t = \theta - \alpha$, więc gdy α rośnie, to dana wartość kąta godzinowego t przypada w każdym dniu następnym o godzinie gwiazdowej późniejszej o tyle, o ile w tym czasie wzrosło α . Opóźnienie to jednakże nie wpływa na wartość spólrzędnych poziomowych, którą one tego dnia osiągnąć mogą: wartości spólrzędnych poziomowych przy danej wartości t w danym miejscu obserwacji, zależą jedynie od wartości δ , jak to wypływa ze wzorów (66').

Oznaczmy przez t_{\odot} i δ_{\odot} spólrzędne godzinne słońca, rozumiejąc przez spólrzędne słońca zawsze spólrzędne jego środka, i zbadajmy, jaką wartość w różnych dniach roku mają spólrzędne poziomowe środka słońca w chwili, gdy kąt godzinny słońca posiada pewną daną wartość t_{\odot} . W związku z uwagami, dotyczącymi przebiegu zjawisk na dwóch półkulach ziemi, których granicę stanowi równik (ust. 32), będziemy stale przyjmowali $\varphi > 0^{\circ}$, gdyż zjawiska dla $\varphi > 0^{\circ}$ i $\delta \geq 0^{\circ}$ mają taki sam przebieg, jak dla $\varphi < 0^{\circ}$ i $\delta \leq 0^{\circ}$.

Ponieważ δ_{\odot} podlega zmianom perjodycznym w granicach od $-\varepsilon$ do $+\varepsilon$ w okresie rocznym, więc też i zmiany spólrzędnych poziomowych słońca przy danej wartości t_{\odot} mają okres roczny.

Weźmy przedewszystkiem pod uwagę wysokość słońca w chwilach kulminacyj. Kulminacja górna słońca zachodzi wówczas, gdy $t_{\odot} = 0^{\circ}$, kulminacja zaś dolna wtedy, gdy $t_{\odot} = 12^h$. Wysokości słońca h_1 i h_2 odpowiednio w chwili górowania i dołowania, zgodnie z wzorami (ac) i (ad) ustępu 33, mają wartości następujące:

$$h_1 = 90^{\circ} \pm (\varphi - \delta_{\odot}), \quad h_2 = -90^{\circ} \pm (\varphi + \delta_{\odot}). \quad (\text{ab})$$

Ponieważ największa wartość, jaką osiągnąć może δ_{\odot} , jest $+\varepsilon$, więc gdy jest $\varphi > \varepsilon$ to zawsze jest też $\varphi - \delta_{\odot} > 0^{\circ}$ i wzory (ab) w tem założeniu można pisać ze znakiem pojedynczym, t. j.

$$h_1 = 90^{\circ} - (\varphi - \delta_{\odot}), \quad h_2 = -90^{\circ} + (\varphi + \delta_{\odot}), \quad (\text{ab}')$$

Z tych wzorów wynika, że gdy $\varphi > \varepsilon$, wysokość górowania słońca zmienia się w granicach od

$$h'_1 = 90^{\circ} - \varphi - \varepsilon, \quad \text{gdy } \delta_{\odot} = -\varepsilon;$$

do

$$h''_1 = 90^{\circ} - \varphi + \varepsilon, \quad \text{gdy } \delta_{\odot} = +\varepsilon.$$

Podobnie wnioskujemy, że wysokość dołowania słońca zmienia się w granicach od

$$h'_2 = -90^{\circ} + \varphi - \varepsilon, \quad \text{gdy } \delta_{\odot} = -\varepsilon$$

do

$$h''_2 = -90^{\circ} + \varphi + \varepsilon, \quad \text{gdy } \delta_{\odot} = +\varepsilon.$$

Wynika z tych wzorów, że

$$h''_1 - h'_1 = h''_2 - h'_2 = 2\varepsilon.$$

To znaczy, że w punktach powierzchni ziemi, położonych między biegunem a zwrotnikiem tej samej półkuli, wysokość górowania i wysokość dołowania słońca zmienia się w ciągu roku w tych samych granicach: obszar zmian jednej i drugiej wynosi 2ε .

Ze wzorów (ab) widzimy też, że ponieważ zawsze musi być $h_1 < 90^{\circ}$, a $h_2 > -90^{\circ}$, więc w miejscowościach, dla których jest $\varphi > \varepsilon$, słońce nie może nigdy górować w zenicie i nie może nigdy dołować w nadirze.

Jeżeli $\varphi \leq \varepsilon$, to może być też $\varphi - \delta_{\odot} \geq 0^{\circ}$; wobec tego, że δ_{\odot} zmienia się od $-\varepsilon$ do $+\varepsilon$, musi dwa razy w roku być $\varphi = \delta_{\odot}$ i 2 razy do roku $\varphi = -\delta_{\odot}$. Te dwa razy sprowadzają

się do jednego w przypadku krańcowym, gdy $\varphi = \varepsilon$. W dniach, gdy $\varphi = \delta_{\odot}$, jest

$$h''_1 = 90^\circ, \text{ a } h_2 = -90^\circ + 2\varphi,$$

w dniach zaś, gdy $\varphi = -\delta_{\odot}$, jest

$$h_1 = 90^\circ - 2\varphi, \text{ a } h'_2 = -90^\circ.$$

Najmniejszą wysokością górowania słońca jest w tych warunkach $h'_1 = 90^\circ - \varphi - \varepsilon$, a największą wysokością dołowania jest $h''_2 = -90^\circ + \varphi + \varepsilon$.

Widzimy stąd, że w szerokościach geograficznych, przypadających pomiędzy zwrotnikami, słońce 2 razy do roku góruje w zenicie i 2 razy do roku dołuje w nadirze, a obszar rocznych zmian wysokości górowania i dołowania słońca wynosi $\varphi + \varepsilon$. Na samych zwrotnikach, gdzie $\varphi = \pm \varepsilon$, amplituda powyższych zmian osiąga 2ε , a górowanie w zenicie i dołowanie w nadirze zachodzi tylko raz na rok.

Jeżeli w szerokości geograficznej φ w jakimś dniu jest $h_1 < 0^\circ$, to znaczy, że w tej szerokości słońce przez całą dobę znajduje się pod horyzontem. Aby to było możliwe, musi być spełniony warunek $90^\circ < \varphi - \delta_{\odot}$, a więc, wobec założenia $\varphi > 0^\circ$, musi być wtedy $\delta_{\odot} \leq \varphi - 90^\circ$. Warunek ten jest spełniony, gdy $\delta_{\odot} \leq 0^\circ$; to znaczy, że w miejscowościach, dla których jest $\varphi \geq 90^\circ + \delta_{\odot}$, słońce znajduje się stale pod horyzontem przez cały ten okres czasu, w ciągu którego wartość δ_{\odot} maleje od $\varphi - 90^\circ$ do $-\varepsilon$ i wzrasta z powrotem od $-\varepsilon$ do $\varphi - 90^\circ$. Okres ten jest oczywiście tem dłuższy, im mniejszą wartość ma $\varphi - 90^\circ$, i tem krótszy, im bardziej $\varphi - 90^\circ$ zbliża się do $-\varepsilon$. Specjalnie np. gdy $\varphi = +90^\circ$, t. j. na północnym biegunie ziemskim, słońce znajduje się pod horyzontem przez cały czas, gdy δ_{\odot} zmienia swą wartość od 0° do $-\varepsilon$ i z powrotem od $-\varepsilon$ do 0° , a więc od równonocy jesiennej do równonocy wiosennej. W szerokości geograficznej $\varphi = 90^\circ - \varepsilon$, t. j. na północnym kole biegunowym, słońce przez całą dobę znajduje się pod horyzontem tylko w tym jednym dniu, gdy $\delta_{\odot} = -\varepsilon$, gdy więc słońce znajduje się w swem stanowisku zimowym.

Jak wynika z powyższej dyskusji, w częściach powierzchni ziemi, zawartych pomiędzy równikiem a kołami biegunowemi, słońce w ciągu całego roku codziennie wschodzi i zachodzi. Koła biegunowe stanowią granicę, poza którą, w kierunku wzrastających (bezwzględnie) szerokości, słońce przynajmniej w ciągu jednego dnia na rok nie ukazuje się nad horyzontem. Ten okres niewidzialności słońca trwa tem dłużej, im bardziej miejsce spostrzeżeń zbliżone jest ku biegunom. Na samych biegunach słońce pozostaje pod horyzontem przez pół roku, mianowicie przez cały czas trwania jesieni i zimy na danej półkuli.

Jeżeli w szerokości geograficznej φ w jakimś dniu jest $h_2 > 0^\circ$, to znaczy, że słońce przez całą dobę znajduje się tam nad horyzontem. Aby to było możliwe, musi być spełniony warunek $90^\circ < \varphi + \delta_\odot$; gdy więc $\varphi > 0^\circ$, musi być $\delta_\odot \geq 90^\circ - \varphi$. Warunek ten może być spełniony tylko, gdy $\delta_\odot \geq 0^\circ$; wówczas w szerokościach, spełniających warunek $\varphi \geq 90^\circ - \delta_\odot$, słońce jest stale naokołobiegunowem przez cały ten czas, gdy δ_\odot od wartości $90^\circ - \varphi$ wzrasta do $+\epsilon$ i maleje z powrotem do $90^\circ - \varphi$. Okres ten jest tem dłuższy, im mniejszą wartość ma $90^\circ - \varphi$, a tem krótszy, im bardziej $90^\circ - \varphi$ zbliża się do $+\epsilon$. Specjalnie gdy $\varphi = +90^\circ$, t. j. na biegunie północnym, słońce przez cały czas, gdy δ_\odot zmienia swą wartość od 0° do $+\epsilon$ i z powrotem od $+\epsilon$ do 0° , to znaczy od równonocy wiosennej do równonocy jesiennej, stale znajduje się nad poziomem. W szerokości geograficznej $\varphi = 90^\circ - \epsilon$, t. j. na północnym kole biegunowem, słońce jest naokołobiegunowem tylko w tym jednym dniu, gdy $\delta_\odot = -\epsilon$, a więc w dniu, gdy słońce znajduje się na zwrotniku Raka w swem stanowisku letnim.

Widzimy więc, że słońce jest przez pewną część roku naokołobiegunowem w tych samych szerokościach geograficznych, w których przez pewną część roku stale przebywa pod poziomem. Stale nad horyzontem znajduje się tam słońce przy dodatnich wartościach δ_\odot , z których najmniejsza zależy od wartości φ ; podobnież stale pod horyzontem znajduje się tam słońce przy ujemnych wartościach δ_\odot , i najmniejsza z tych wartości, uważana bezwzględnie, jest ta sama, co wyżej wspomniana wartość dodatnia.

Gdy weźmiemy pod uwagę miejscowości, leżące poza ko-

łami biegunowemi na obu półkulach ziemi w jednakowych odległościach od biegunów, to te same zjawiska zachodzą w szerokości geograficznej $+\varphi$, gdy $\delta_{\odot} \geq 0^{\circ}$, jak i w szerokości $-\varphi$, gdy $\delta_{\odot} \leq 0^{\circ}$. Tak więc np. w tym czasie, gdy w szerokości geograficznej $+\varphi$ słońce jest naokołobiegunowem, w szerokości $-\varphi$ przebywa ono stale pod horyzontem; i odwrotnie jest ono naokołobiegunowem na półkuli południowej, gdy na półkuli północnej stale przebywa pod horyzontem.

Największa dygresja słońca zachodzić może tylko w tych szerokościach geograficznych, w których spełniony może być warunek $\varphi \leq \delta_{\odot}$ (ust. 33). Ponieważ największą wartością δ_{\odot} jest ε , więc największa dygresja słońca możliwa jest tylko w tych szerokościach geograficznych, dla których spełniony jest warunek $|\varphi| < \varepsilon$, t. j. w strefie międzyzwrotnikowej.

Na równiku, gdzie $\varphi = 0^{\circ}$, przez cały rok codziennie słońce ma największe dygresje, i te, jak wskazują wzory (73') i (73''), zachodzą na horyzoncie w azymutach $\pm(\delta_{\odot} - 90^{\circ})$. Na zwrotnikach gdzie $\varphi = \pm \varepsilon$, największa dygresja słońca zachodzi tylko raz do roku: na zwrotniku Raka wtedy, gdy $\delta_{\odot} = +\varepsilon$, a na zwrotniku Koziorożca wtedy, gdy $\delta_{\odot} = -\varepsilon$; słońce w czasie największej dygresji na zwrotnikach znajduje się w zenicie. W każdej innej szerokości $|\varphi| < \varepsilon$ największa dygresja słońca zachodzi codziennie w czasie, gdy δ_{\odot} zmienia się od $\delta_{\odot} = \varphi$ do $\delta_{\odot} = \pm \varepsilon$ i z powrotem zbliża się do φ . Kąt godzinny, wysokość i azymut tych największych dygresyj wypływa ze wzorów (73), (73') i (73'').

Aby słońce mogło przechodzić przez pierwsze koło wierzchołkowe, musi być spełniony warunek $|\delta_{\odot}| < |\varphi|$ (ust. 35). Warunek ten jest spełniony w ciągu całego roku, gdy $|\varphi| > \varepsilon$, t. j. na całej powierzchni ziemi, z wyjątkiem strefy międzyzwrotnikowej. W pasie międzyzwrotnikowym tylko wówczas słońce przechodzi przez pierwsze koło wierzchołkowe, gdy niespełnione są wyżej podane warunki, przy których zachodzą największe dygresje.

44. Wschód i zachód słońca. Długość dnia i nocy. Kąt godzinny słońca w chwili wschodu i zachodu, jak wypływa ze wzoru (74), ma wartość

$$\cos t_{\odot} = -\tan \delta_{\odot} \tan \varphi.$$

Gdy δ_{\odot} zmienia się od $-\varepsilon$ do $+\varepsilon$, to wartości krańcowe na t_{\odot} wypływają ze wzorów

$$\cos t'_{\odot} = \tan \varepsilon \tan \varphi \text{ i } \cos t''_{\odot} = -\tan \varepsilon \tan \varphi. \quad (\text{ac})$$

Łuk dzienny słońca, wyrażony w jednostkach czasu, jest miarą długości dnia, łuk zaś nocny słońca — miarą długości nocy. Gdy więc przez $2\tau_{\odot}$ i $2\sigma_{\odot}$ oznaczymy odpowiednio długość dnia i nocy, to widzimy, że na półkuli północnej ziemi, t. j. dla $\varphi > 0^{\circ}$, $2\tau_{\odot}$ ma najmniejszą wartość $2\tau'_{\odot}$ wtedy, gdy $\delta_{\odot} = -\varepsilon$, a największą wartość $2\tau''_{\odot}$ wtedy, gdy $\delta_{\odot} = +\varepsilon$. Ponieważ, jak to wynika ze wzorów (ac), $\cos t'_{\odot} = -\cos t''_{\odot}$, więc jest $t'_{\odot} = 12^h - t''_{\odot}$, oraz $2\tau''_{\odot} = 24^h - 2\tau'_{\odot}$. Że zaś jest także $2\sigma'_{\odot} = 24^h - 2\tau'_{\odot}$ i $2\sigma''_{\odot} = 24^h - 2\tau''_{\odot}$, więc wynika stąd, że także

$$2\tau'_{\odot} = 2\sigma''_{\odot}, \quad 2\tau''_{\odot} = 2\sigma'_{\odot}. \quad (\text{ad})$$

Znaczy to, że w każdym miejscu na powierzchni ziemi najdłuższy dzień równa się najdłuższej nocy i najkrótszy dzień równa się najkrótszej nocy. Gdy $\delta_{\odot} = 0^{\circ}$, jest na całej ziemi $2\tau_{\odot} = 2\sigma_{\odot} = 12^h$.

Różnica między najdłuższym a najkrótszym dniem w różnych miejscach na powierzchni ziemi zależy od szerokości geograficznej. Ze wzorów (ac) wypływa

$$\cos t''_{\odot} - \cos t'_{\odot} = -2 \tan \varepsilon \tan \varphi,$$

$$\sin \frac{t''_{\odot} + t'_{\odot}}{2} \sin \frac{t''_{\odot} - t'_{\odot}}{2} = \tan \varepsilon \tan \varphi;$$

a że $t''_{\odot} + t'_{\odot} = 12^h$, więc $\sin \frac{t''_{\odot} + t'_{\odot}}{2} = 1$ oraz

$$\sin \frac{t''_{\odot} - t'_{\odot}}{2} = \tan \varepsilon \tan \varphi. \quad (\text{ae})$$

Wzór ten zawodzi, gdy $\tan \varepsilon \tan \varphi > |1|$, t. j. gdy $|\varphi| > 90^{\circ} - \varepsilon$; nie ma więc zastosowania w tych miejscach, gdzie

słońce w pewnych częściach roku stale znajduje się przez kilka dni pod lub nad horyzontem. Na równiku ($\varphi = 0^\circ$) jest $\tau''_\odot = \tau'_\odot$: w ciągu całego roku dzień i noc mają tam długość jednakową, równą 12 godzin. Na kołach biegunowych ($\varphi = |90 - \varepsilon|$) jest $\tau''_\odot - \tau'_\odot = 12^h$, a więc $2\tau'' = 24^h$, $2\tau'_\odot = 0^h$. To znaczy, że w czasie stanowiska północnego na północnym kole biegunowym słońce przez całą dobę znajduje się nad poziomem, a w czasie stanowiska południowego przez całą dobę znajduje się pod poziomem. Na kole biegunowym południowym zachodzi to samo odpowiednio w czasie stanowiska południowego i północnego.

Wraz z długością dnia zmienia się też azymut punktów wschodu i zachodu słońca. Ponieważ wogóle jest w czasie wschodu i zachodu słońca zgodnie z wzorem (74')

$$\cos a_\odot = -\frac{\sin \delta_\odot}{\cos \varphi}$$

więc jest np. dla $\delta_\odot = 0^\circ$, $\cos a_\odot = 0$, $a_\odot = \pm 90^\circ$; to znaczy, że w czasie równonocy słońce wschodzi i zachodzi odpowiednio w punktach wschodnim i zachodnim. Gdy $\delta_\odot < 0^\circ$, jest $\cos a_\odot > 0$ i $|a_\odot|$ przypada w pierwszej ćwiartce horyzontu, licząc od punktu południowego na wschód lub na zachód: gdy zaś $\delta_\odot > 0^\circ$, to $\cos a_\odot < 0$ i $|a_\odot|$ przypada w drugiej ćwiartce horyzontu. W czasie gdy δ_\odot maleje od 0° do $-\varepsilon$, punkty wschodu i zachodu słońca przesuwają się na horyzoncie ku punktowi południowemu, w czasie zaś, gdy δ_\odot wzrasta od 0° do $+\varepsilon$, punkty wschodu i zachodu słońca przesuwają się ku punktowi północnemu. Krańcowe wartości azymutów punktów wschodu i zachodu słońca wypływają ze wzorów:

$$\cos a'_\odot = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi} \quad \text{i} \quad \cos a''_\odot = -\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi}. \quad (\text{af})$$

Gdy $\varphi = 90^\circ - \varepsilon$, jest $\cos a'_\odot = +1$ i $\cos a''_\odot = -1$, a więc $a'_\odot = 0^\circ$, a $a''_\odot = 180^\circ$. To znaczy, że na kołach biegunowych punkt wschodu słońca w ciągu roku przebiega całe półkole wschodnie horyzontu od punktu południowego do północnego, a punkt zachodu słońca całe półkole zachodnie horyzontu. To

samo dotyczy szerokości większych niż $90^\circ - \varepsilon$ (gdzie więc jest $\cos \varphi < \sin \varepsilon$), ale tylko w odniesieniu do tego okresu czasu, gdy $\cos a_\odot < 1$, t. j. gdy słońce faktycznie wschodzi i zachodzi.

Dla $\varphi < |90 - \varepsilon|$ obszar zmian azymutów punktów wschodu i zachodu słońca znajdujemy w sposób podobny, jak wyżej obszar zmian kątów godzinnych tych punktów. Jest mianowicie:

$$\cos a''_\odot - \cos a'_\odot = -2 \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi},$$

$$\sin \frac{a''_\odot + a'_\odot}{2} \sin \frac{a''_\odot - a'_\odot}{2} = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi};$$

a że $\cos a''_\odot + \cos a'_\odot = 0$, więc $a''_\odot = 180^\circ - a'_\odot$, $\sin \frac{a''_\odot + a'_\odot}{2} = 1$, oraz

$$\sin \frac{a''_\odot - a'_\odot}{2} = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi}. \quad (\text{ag})$$

45. Wpływ zmian spółrzędnych równikowych w ciągu doby na przebieg zjawisk ruchu dziennego. Przykłady. W ustępach 43 i 44 chodziło tylko o przedstawienie tych zmian charakterystycznych, którym zjawiska ruchu dziennego słońca podlegają w okresie rocznym. Uczyniliśmy to, przyjmując, że spółrzędne słońca w ciągu doby mają wartość stałą. W istocie tak nie jest, i gdy chodzi o podanie dokładnego przebiegu zjawisk, należy uwzględnić także zmiany spółrzędnych w ciągu doby, które zachodzą w sposób ciągły. Gdy więc na przykład chodziłoby o wyznaczenie kąta godzinnego słońca w chwili jego wschodu z całą dokładnością, należałoby za podstawę obliczenia wziąć tę wartość spółrzędnych równikowych słońca, którą one posiadają właśnie w chwili wschodu. Ponieważ jednakże chwila wschodu słońca określa się właśnie dopiero na podstawie znanego kąta godzinnego w chwili wschodu, więc rachunek może być wykonany tylko przez szereg kolejnych przybliżeń.

Uwagi powyższe w równej mierze odnoszą się do księżyca i planet. Ponieważ spółrzędne księżyca zmieniają się znacznie

szybciej, niż współrzędne słońca, więc też obliczenia, dotyczące księżyca, wymagają większej liczby przybliżeń, niż dotyczące słońca. Jak należy wykonać obliczenia, wyjaśnimy przy pomocy przykładu.

Przykład. Obliczyć czas gwiazdowy i wysokość górnej kulminacji słońca oraz czas gwiazdowy wschodu i zachodu słońca we Lwowie w dniu 9 lipca 1918 r.

Spółrzędne geograficzne Lwowa są: $\varphi = 49^\circ 50' 11''.2$, $\lambda = -1^h 36^m 4^s$.

W roczniku berlińskim B. A. J. na rok 1918 znajdujemy następujące wartości w średnie południe Greenwich'skie d. 9 lipca:

$$\begin{aligned}\alpha_{\odot} &= 7^h 11^m 21^s.47, & \delta_{\odot} &= +22^\circ 26' 9''.3, \\ \theta_0 &= 7^h 6^m 27^s.38, & Z = -t_0 &= +4^m 54^s.08.\end{aligned}$$

Przyjmując w pierwszym przybliżeniu powyższe wartości współrzędnych równikowych słońca jako stałe w ciągu całego dnia 9 lipca, otrzymalibyśmy dla chwili górowania słońca we Lwowie według wzorów (77) i (ab) niniejszego rozdziału

$$\alpha_{\odot} = \theta_g = 7^h 11^m 21^s.47, \quad h_{\odot} = 90^\circ - (\varphi - \delta_{\odot}) = 62^\circ 35' 58''.1.$$

Czas gwiazdowy wschodu i zachodu słońca obliczymy za pomocą wzoru (74). Przyjmując za podstawę rachunku wartości przybliżone

$$\varphi = 49^\circ 50', \quad \delta_{\odot} = +22^\circ 26',$$

obliczamy, jak następuje:

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} \varphi & 0.0737 \\ \operatorname{tang} \delta_{\odot} & 9.6158 \\ \cos t_0 & 9.6895 n \\ t_0 &= \pm 119^\circ 18' = \pm 7^h 57^m 12^s, \\ \theta_w &= -7^h 57^m 12^s + 7^h 11^m 22^s = 23^h 14^m 10^s, \\ \theta_z &= +7^h 57^m 12^s + 7^h 11^m 22^s = 15^h 8^m 34^s.\end{aligned}$$

Przez wskaźniki g , w i z przy θ zaznaczone jest, że czasy gwiazdowe te odnoszą się odpowiednio do chwili górowania, wschodu i zachodu słońca.

W rzeczywistości jednakże spólrzędne słońca stale się zmieniają i dlatego dokładne czasy gwiazdowe różnią się od powyższych przybliżonych. Aby uwzględnić zmiany spólrzędnych słońca, korzystamy z efemerydy słońca, zamieszczonej w cytowanym roczniku B. A. J., której część, potrzebną do interpolacji w danym przykładzie, wypisujemy. Wszystkie liczby tu podane odnoszą się do średniego południa Greenwich'skiego.

Data	θ	α_{\odot}	$\Delta\alpha_{\odot}$	$\Delta^2\alpha_{\odot}$
Lipiec 8.0	$7^h 2^m 30^s.83$	$7^h 7^m 15^s.44$		
			$+4^m 6^s.03$	
« 9.0	$7 6 27.38$	$7 11 21.47$		$-0^s.41$
			$4 5.62$	
« 10.0		$7 15 27.09$		-0.42
			$4 5.20$	
« 11.0		$7 19 32.29$		
		δ_{\odot}	$\Delta\delta_{\odot}$	$\Delta^2\delta_{\odot}$
		$+22^{\circ} 32' 56''.4$		
			$-6' 47''.1$	
		$22 26 9.3$		$-23''.2$
			$-7 10.3$	
		$22 18 59.0$		-23.1
			$-7 33.4$	
		$22 11 25.9$		

Ponieważ jest wogóle $\theta + \lambda = \theta_0$, więc przybliżonym wyżej otrzymanym czasem gwiazdowym wschodu, górowania i zachodu słońca we Lwowie odpowiadają następujące przybliżone czasy gwiazdowe południka Greenwich'skiego:

$$\theta_w^0 = 21^h 38^m 6^s, \quad \theta_g^0 = 5^h 35^m 18^s, \quad \theta_z^0 = 13^h 32^m 30^s.$$

Dalej, biorąc pod uwagę czas gwiazdowy w średnie po-

Łudnie Greenwich'skie d. 8 i 9 lipca według powyższej tabelki, znajdujemy, że

od średn. połud. Gr. d. 8 lipca upłynęło do θ_w^0 : $14^h 35^m 35^s.17$
 « « « « « 8 « « do θ_g^0 : $22^h 32^m 47^s.17$
 « « « « « 9 « « do θ_z^0 : $6^h 26^m 2^s.62$

Znalezione odstępys czasu, wyrażone w godzinach, minutach i sekundach gwiazdowych, zamieniamy na ułamki doby gwiazdowej, do czego posługujemy się tablicą IV w sposób następujący:

$$\begin{array}{rcl}
 14^h & = 0^d.583333 & 22^h & = 0^d.916667 \\
 35^m & = 0^d.024306 & 32^m & = 0^d.022222 \\
 35^s.17 & = 0^d.000407 & 47^s.17 & = 0^d.000546 \\
 \hline
 14^h 35^m 35^s.17 & = 0^d.608046 & 22^h 32^m 47^s.17 & = 0^d.939435 \\
 \\
 6^h & = 0^d.250000 & & \\
 26^m & = 0^d.018056 & & \\
 2^s.62 & = 0^d.000030 & & \\
 \hline
 6^h 26^m 2^s.62 & = 0^d.268086 & &
 \end{array}$$

Powyższe ułamki stanowią wartości mh wzoru interpolacyjnego (47). Interwalem efemerydy jest doba średnia słoneczna, która, jak widzieliśmy w ustępie 42, równa się $1.0027379...$ doby gwiazdowej. Kładąc więc $h = 1.002738$, znajdujemy następujące wartości m , odpowiadające wschodowi, górowaniu i zachodowi słońca, oraz z tablicy II współczynniki drugich wyrazów wzoru (47):

$$m_w = 0.6068, \quad m_g = 0.9369, \quad m_z = 0.2674,$$

$$\left(\frac{m_w}{2}\right) = 0.1193, \quad \left(\frac{m_g}{2}\right) = 0.0296, \quad \left(\frac{m_z}{2}\right) = 0.0981.$$

Inne współczynniki pomijamy, ponieważ dalsze wyrazy są znikome i na dokładność nie wpływają.

Stosując więc wzór interpolacyjny (47), znajdujemy nastę-

pujące wartości współrzędnych równikowych słońca, które są podstawą drugiego przybliżenia.

$$\begin{aligned}\alpha_w &= 7^h 7^m 15^s.44 + 2^m 29^s.29 - 0^s.04 = 7^h 9^m 44^s.69, \\ \delta_w &= 22^\circ 32' 56''.4 - 4' 7''.0 - 2''.7 = 22^\circ 28' 46''.7, \\ \alpha_g &= 7^h 7^m 15^s.44 + 3^m 50^s.50 - 0^s.01 = 7^h 11^m 5^s.93, \\ \delta_g &= 22^\circ 32' 56''.4 - 6' 21''.4 - 0''.7 = 22^\circ 26' 34''.3 \\ \alpha_z &= 7^h 11^m 21^s.47 + 1^m 5^s.67 - 0^s.04 = 7^h 12^m 27^s.10, \\ \delta_z &= 22^\circ 26' 9''.3 - 1' 55''.1 - 2''.3 = 22^\circ 24' 11''.9.\end{aligned}$$

Z temi wartościami otrzymujemy w drugim przybliżeniu najprzód

$$\theta_g = 7^h 11^m 5^s.93, \quad h_g = 62^\circ 36' 23''.1.$$

Rachunek kąta godzinowego wschodu i zachodu słońca musimy teraz wykonać oddzielnie, stosując dla wschodu zboczenie δ_w , a dla zachodu δ_z . Dokładność wymaga stosowania przy obliczeniu 7-cyfrowych logarytmów. Przytaczamy ten rachunek:

$\text{tang } \varphi$	0.0736702	$\text{tang } \varphi$	0.0736702
$\text{tang } \delta_w$	9.6167876	$\text{tang } \delta_z$	9.6151479
$\cos t_w$	9.6904578 <i>n</i>	$\cos t_z$	9.6888181 <i>n</i>
$t_w = -$	$7^h 57^m 26^s.40$	$t_z = +$	$7^h 56^m 57^s.27.$

Z temi wartościami t otrzymujemy w drugim przybliżeniu następujące czasy gwiazdowe wschodu i zachodu słońca we Lwowie:

$$\begin{aligned}\theta_w &= t_w + \alpha_w = -7^h 57^m 26^s.40 + 7^h 9^m 44^s.69 = 23^h 12^m 18^s.29, \\ \theta_z &= t_z + \alpha_z = +7^h 56^m 57^s.27 + 7^h 12^m 27^s.10 = 15^h 9^m 24^s.37.\end{aligned}$$

Po odliczeniu długości znajdujemy odpowiednie czasy głównego południka:

$$\theta_w^0 = 21^h 36^m 14^s.29, \quad \theta_g^0 = 5^h 35^m 1^s.93, \quad \theta_z^0 = 13^h 33^m 20^s.37.$$

Porównyując powyższe wartości z odpowiedniami war-

tościami pierwszego przybliżenia, znajdujemy, że wzrost ich wynosi odpowiednio

$$\Delta \theta_{\omega}^0 = -1^m 51^s.71 = -1^m.86, \quad \Delta \theta_g^0 = -16^s.07 = -0^m.27, \\ \Delta \theta_z^0 = 50^s.37 = 0^m.84.$$

Celem znalezienia zmiany współrzędnych słońca w ciągu 1 minuty, dzielimy przyrosty południowe od 8 do 10 lipca według efemerydy przez $48 \cdot 60 = 2880$, t. j. przez liczbę minut w dwóch dniach, i znajdujemy

$$\frac{8^m 11^s.65}{2880} = 0^s.02, \quad \frac{-13' 57''.4}{2880} = -0''.3;$$

pierwsza z tych liczb oznacza zmianę α_{\odot} w ciągu 1 minuty, druga zmianę δ_{\odot} w tym samym czasie. Jest zatem

$$\begin{aligned} -1.86 \times 0^s.02 &= -0^s.04, & -0.27 \times 0^s.02 &= 0^s.00, \\ -1.86 \times -0''.3 &= 0''.5, & -0.27 \times -0''.3 &= 0''.1, \\ 0.84 \times 0^s.02 &= 0^s.02, \\ 0.84 \times -0''.3 &= -0''.2. \end{aligned}$$

Uwzględniając zmiany powyższe, znajdujemy ostatecznie następujące wartości współrzędnych równikowych słońca w chwili wschodu, górowania i zachodu słońca we Lwowie:

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega} &= 7^h 9^m 44^s.65, & \delta_{\omega} &= 22^{\circ} 28' 47''.2, \\ \alpha_g &= 7^h 11^m 5^s.93, & \delta_g &= 22^{\circ} 26' 34''.5, \\ \alpha_z &= 7^h 12^m 27^s.12, & \delta_z &= 22^{\circ} 24' 11''.7. \end{aligned}$$

Otrzymujemy stąd przedewszystkiem

$$\underline{\theta_g = 7^h 11^m 5^s.93}, \quad \underline{h_g = 62^{\circ} 36' 23''.2},$$

a dalej, ponieważ drobne zmiany δ_{\odot} nie wpływają w sposób dostrzegalny na wartości t_{ω} i t_z

$$\underline{\theta_{\omega} = 23^h 12^m 18^s.25}, \quad \underline{\theta_z = 15^h 9^m 24^s.39}.$$

Mając dokładną wartość δ_{\odot} , możemy obliczyć też od razu dokładną wartość azymutów punktów wschodu i zachodu słońca, stosując wzór (74'). Przytaczamy ten rachunek.

$\cos \varphi$	3.8095406	$\cos \varphi$	9.8095406
$\sin \delta_{\omega}$	9.5824694	$\sin \delta_z$	9.5810650
$\cos a_{\omega}$	9.7729288 <i>n</i>	$\cos a_z$	9.7715244 <i>n</i>
$a_{\omega} = -$	<u>126° 21' 28".6</u>	$a_z = +$	<u>126° 13' 18".9</u>

Należy tu zauważyć, że wyżej otrzymana wysokość południkowa słońca nie jest największą wysokością słońca nad horyzontem. Gdy δ ma wartość zmienną i chcemy się dowiedzieć, w jaki sposób zmienia się wysokość ciała niebieskiego nad horyzontem w zależności od obrotu ziemi i od zmiennej wartości zboczenia, to należy we wzorze (67') uwzględnić także wyraz pierwszy. Jest wtedy

$$dh = \cos \eta d\delta - \cos \delta \sin \eta dt,$$

i warunek, określający wartość η , odpowiadającą największej wartości h , wyraża się równaniem

$$\cos \eta \frac{d\delta}{dt} - \cos \delta \sin \eta = 0,$$

z którego wynika

$$\operatorname{tang} \eta = \sec \delta \frac{d\delta}{dt}. \quad (\text{ah})$$

Widzimy z tego wzoru, że $\eta \geq 0^\circ$, gdy $d\delta \geq 0$. Oczywiście największa wysokość zachodzi w bliskości południka i zatem w chwili największej wysokości η i t są małemi kątami. Możemy więc w pierwszym wzorze (70') zamiast $\sin \eta$ i $\sin t$ pisać η i t ; gdy jeszcze położymy w tym wzorze $h = 90^\circ \pm (\varphi - \delta)$ to wypływa z niego z dostatecznem przybliżeniem

$$\eta = \pm t \frac{\cos \varphi}{\sin (\varphi - \delta)}, \quad (\text{ai})$$

i należy użyć znaku $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy jest $\varphi > \delta$, czy też $\varphi < \delta$. W pierwszym przypadku także azymut największej wysokości ma wartość bliską zera, w drugim zaś przypadku wartość ta zbliża się do 180° , a więc kąt $180^\circ - a$ jest małym kątem. Możemy więc przyjąć według pierwszego wzoru (69')

$$\begin{aligned} \text{gdy } \varphi > \delta, \quad \eta \cos \delta &= a \cos \varphi; \\ \text{a gdy } \varphi < \delta, \quad \eta \cos \delta &= (180^\circ - a) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (\text{aj})$$

Niechaj będzie $d\delta$ zmianą wartości δ w ciągu jednej minuty, wyrażoną w sekundach łukowych, to znaczy, że jest $dt = 1^m = 15 \cdot 60'' = 900''$. Pochodna $\frac{d\delta}{dt}$ ma zawsze wartość bardzo małą, wobec czego wzór (aj) możemy pisać

$$\eta = \frac{\sec \delta \, d\delta}{900} \operatorname{cosec} 1'' = \frac{206265}{900} \sec \delta \, d\delta. \quad (\text{aj}')$$

Podstawiając tu na miejsce η wartości według wzorów (ai) i (aj), otrzymamy następujące wzory na kąt godzinny i azymut słońca w chwili największej wysokości nad horyzontem

$$t = \pm \frac{206265}{900} \cdot \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \varphi \cos \delta} d\delta \quad (\text{ak})$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{206265}{900} \sec \varphi \, d\delta, \text{ gdy } \varphi > \delta \\ 180^\circ - a &= \frac{206265}{900} \sec \varphi \, d\delta, \text{ gdy } \varphi < \delta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{al})$$

Zastosujmy te wzory celem znalezienia kąta godzinnego i azymutu słońca w d. 9 lipca 1918 r. we Lwowie, gdy wysokość słońca jest największa. Przyjmując $\varphi = 49^\circ 50'$, $\delta_\odot = 22^\circ 27'$, $d\delta_\odot = -0''.3$, obliczamy, jak następuje:

$\log 206265 = 5.3144$	$k = 2.3602$	$k = 2.3602$
$\log 900 = 2.9542$	$\sin(\varphi - \delta) = 9.6627$	$\sec \varphi = 0.1905$
$\log \frac{206265}{900} = \log k = 2.3602$	$\sec \varphi = 0.1905$	$d\delta = 9.4771 n$
$\varphi = 49^\circ 50'$	$\sec \delta = 0.0342$	$\log a'' = 2.0278 n$
$\delta = 22^\circ 27'$	$d\delta = 9.4771 n$	$a = -106''.6$
$\varphi - \delta = 27^\circ 23'$	$\log t'' = 1.7197 n$	
	$t = -52''.4 = -3^s.49.$	

Widzimy, że pomiędzy chwilą przejścia słońca przez największą wysokość a przejściem przez południk upływa zaledwie $3^s.5$, zboczenie słońca w obu tych momentach zatem praktycznie uważać możemy za jednakowe; skutkiem tego też wysokość górowania i największa wysokość słońca praktycznie między sobą się nie różnią.

U księżyca, którego ruch jest znacznie prędszy od ruchu słońca, różnica tych dwóch wysokości może być stwierdzoną i określoną przez obserwację. Wobec tego też w przypadku księżyca zdarza się potrzeba obliczenia tej największej wysokości. W tym celu należy przedewszystkiem obliczyć kąt godzinny t największej wysokości według wzoru (ak). Jeżeli α_g jest wzniesieniem prostem księżyca w chwili przejścia przez południk, to $\theta_g = \alpha_g$ jest czasem gwiazdowym tego przejścia, a czas gwiazdowy największej wysokości księżyca jest w pierwszym przybliżeniu $(\theta) = \theta_g + t$. Dla tego czasu gwiazdowego przez interpolację obliczamy współrzędne księżyca (δ) i (α); $\theta = t + (\alpha)$ będzie wtedy czasem gwiazdowym największej wysokości w drugim przybliżeniu. Gdy dla tego czasu obliczymy zboczenie δ , to wartość tę możemy już przyjąć za dokładną. Niech będzie h wysokość, odpowiadająca zboczeniu δ , a więc największa wysokość, i oznaczmy

$$h = h_g + \Delta h, \quad \delta = \delta_g + \Delta \delta,$$

to jest

$$\sin(h_g + \Delta h) = \sin \varphi \sin(\delta_g + \Delta \delta) + \cos \varphi \cos(\delta_g + \Delta \delta) \cos t,$$

albo, pisząc $\cos t = 1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2}$,

$$\sin(h_g + \Delta h) = \cos(\varphi - \delta_g - \Delta \delta) - 2 \cos \varphi \cos(\delta_g + \Delta \delta) \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Ponieważ Δh , $\Delta \delta$ i t są małemi kątami, więc jest też z dostatecznem przybliżeniem

$$\sin h_g + \Delta h \cos h_g \sin 1'' = \cos(\varphi - \delta_g) + \sin(\varphi - \delta_g) \Delta \delta \sin 1'' - \\ - 2 \cos \varphi \cos \delta_g \frac{t^2}{4} \sin^2 1'';$$

a że

$$\sin h_g = \cos(\varphi - \delta_g), \quad \cos h_g = \pm \sin(\varphi - \delta_g),$$

więc

$$\pm \sin(\varphi - \delta_g) \cdot \Delta h = \sin(\varphi - \delta_g) \Delta \delta - \frac{1}{2} \cos \varphi \cos \delta_g t^2 \sin 1'',$$

$$\Delta h = \pm \Delta \delta \mp \frac{\cos \varphi \cos \delta_g t^2 \sin 1''}{2 \sin(\varphi - \delta_g)},$$

albo też, gdy na miejsce t podstawimy wartość, wypływającą ze wzoru (ai), otrzymamy ostatecznie

$$\Delta h = \pm \Delta \delta \mp \frac{206265 \sin(\varphi - \delta) d \delta^2}{2 \cdot 900^2 \cos \varphi \cos \delta} = \pm \Delta \delta \mp \frac{0.127 \sin(\varphi - \delta)}{\cos \varphi \cos \delta} d \delta^2. \quad (\text{aI})$$

Tu oznacza, jak wiemy, $d \delta$ zmianę zboczenia księżyca na minutę, a $\Delta \delta$ zmianę zboczenia księżyca w czasie pomiędzy przejściem przez południk a chwilą największej wysokości. Znak górny należy stosować, gdy $\varphi > \delta$, a znak dolny, gdy $\varphi < \delta$.

Gdy chodzi o dokładne wyznaczenie czasu wschodu i zachodu ciał niebieskich, musi jeszcze być uwzględniony wpływ refrakcji, a w przypadku księżyca i słońca także wpływ paralaksy dziennej. Prócz tego w przypadku księżyca i słońca może jeszcze zachodzić potrzeba wyznaczenia chwili wschodu i zachodu dla górnego lub dolnego brzegu tarczy, albo też na przykład czasu trwania całkowitego przejścia tarczy przez horyzont lub południk. Pozatem, jak wiemy, zachodzi potrzeba odróżniania pomiędzy wschodem i zachodem fizycznym a astronomicznym.

Niektórym z tych kwestyj poświęcimy jeszcze uwagę przy innych sposobnościach.

ROZDZIAŁ V.

REFRAKCJA ASTRONOMICZNA.

46. Zjawisko refrakcji. Gdy w danej chwili przez obserwację określimy azymut i wysokość jakiejś gwiazdy, a następnie na podstawie znanych współrzędnych równikowych dla tej samej chwili obliczymy współrzędne poziomowe gwiazdy, to z porównania wartości obliczonych i obserwowanych wynika, iż azymut obserwowany nie różni się od obliczonego, wysokość zaś obserwowana jest większa od obliczonej.

Uważajmy wysokość obserwowaną za *pozorną*, a obliczoną za *prawdziwą*, i oznaczmy pierwszą przez h' , a drugą przez h , to jest

$$h' - h = R$$

i R ma wartość dodatnią.

Ze spostrzeżeń wynika dalej, że różnica R nie jest wielkością stałą. Jest ona zerem, gdy gwiazda znajduje się w zenicie, i wzrasta stale wraz z odległością zenitalną. Wprowadzając zamiast wysokości odległość zenitalną, możemy też pisać

$$z - z' = R = f(z')$$

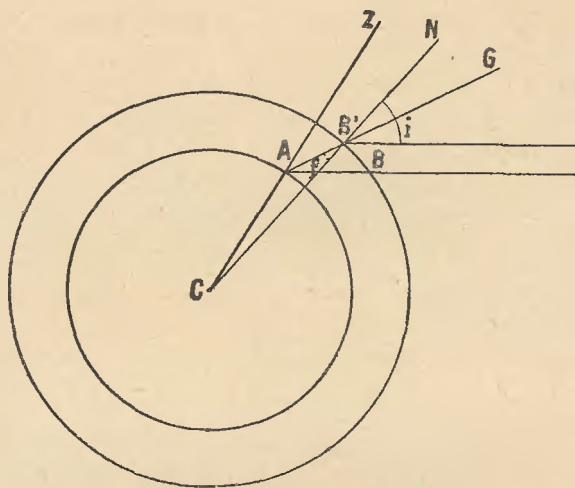
i $f(z')$ wzrasta stale od $f(0^\circ) = 0$, do $f(90^\circ) = 36'$ (w przybliżeniu).

Funkcja $f(z')$, jak z badań wynika, jest dosyć skomplikowana, a wartość jej zależy nie tylko od z' , ale także od tych czynników, które określają stan atmosfery ziemskiej w danej chwili.

Przyczyną zjawiska wyżej scharakteryzowanego jest dzia-

łanie atmosfery ziemskiej, która załamuje przechodzące przez nią promienie światła gwiazd; nosi ono wskutek tego nazwę *refrakcji astronomicznej* lub też *atmosferycznej*.

Że atmosfera ziemska w istocie zjawisko refrakcji powodować musi, wynika z następującego schematycznego rozważania. Przypuśćmy, że ziemia jest kulą, a atmosfera jej tworzy warstwę spółśrodkową o grubości dowolnej i gęstości wszędzie jednakowej. Wyobraźmy sobie na powierzchni ziemi jakiś punkt A oraz przekrój ziemi CAG (ryc. 41), określony przez płaszczyznę



Rycina 41.

wierzchołkową gwiazdy G, widzianej z punktu A. Pion AZ punktu A określa na niebie zenit.

Przyjmując, że rozmiary ziemi są znikomą małe w porównaniu z odległościami gwiazd, uważamy wszystkie promienie, dochodzące od jakiejś gwiazdy do ziemi, za równoległe do siebie. Przypuśćmy, że AB jest odcinkiem prostej, przechodzącej przez punkt A i gwiazdę, i niech będzie B punktem przecięcia się tej prostej z powierzchnią atmosfery ziemskiej. Gdyby nie było atmosfery, obserwator w A widziałby gwiazdę w kierunku AB, a więc w odległości zenitalnej prawdziwej $ZAB = z$. Ponieważ atmosfera załamuje promień, spotykający ją w punkcie B, i od-

chyła go od pierwotnego kierunku, więc do punktu A promień ten nie dochodzi; dochodzi natomiast do A inny promień, do poprzedniego równoległy, który spotyka atmosferę w punkcie B' i po załamaniu się przyjmuje kierunek B'A. Obserwator w A widzi więc gwiazdę G w kierunku AB', w odległości zenitalnej pozornej $ZAG = z'$.

Ponieważ promień przechodzi z próżni do warstwy, mającej pewną gęstość, różną od zera, więc podlega on ogólnym prawom załamania światła: 1. Po załamaniu promień pozostaje w tej samej płaszczyźnie CAG, w której znajdował się przed załamaniem. 2. Stosunek wstawy kąta podania i do wstawy kąta załamania $AB'C = f$ jest wielkością stałą, t. j.

$$\frac{\sin i}{\sin f} = v = \text{const.}$$

Przy przejściu z ośrodka mniej gęstego do bardziej gęstego jest $v > 1$, więc jest też $i > f$.

Widzimy z ryciny, że $\sphericalangle ZAB > \sphericalangle ZAG$, a więc, zgodnie z obserwacją, $z' < z$. A ponieważ promień po załamaniu znajduje się w tej samej płaszczyźnie, co przed załamaniem, więc też azymut gwiazdy, zgodnie z obserwacją, nie ulega zmianie.

Przyjęta wyżej prosta budowa atmosfery rzeczywistości nie odpowiada. Gdy chodzi tylko o stronę jakościową, zjawisko refrakcji zachodzić musi w sposób podobny przy jakiegokolwiek budowie atmosfery; gdy jednakże określimy postać funkcji $f(z') = z - z'$, przyjmując, że atmosfera jest warstwą koncentryczną z ziemią i we wszystkich swych częściach ma gęstość jednakową, i porównamy tak obliczone wartości $z - z'$ z obserwowanymi, to wystąpi niezgodność, która wskazuje, że założenie, uczynione co do budowy atmosfery, nie odpowiada rzeczywistości. Gdy więc chodzi o znalezienie postaci funkcji $f(z')$, z której wynikać mają dla wszystkich z' wartości $z - z'$ zgodne ze spostrzeżeniami, należy co do budowy atmosfery ziemskiej czynić założenia, bardziej odpowiadające prawdzie.

47. Cel i podstawy teorii refrakcji. Zadaniem teorii refrakcji jest znaleźć taki wzór, któryby pozwolił na podstawie znanej

wysokości pozornej h' obliczyć prawdziwą wysokość h i odwrotnie, a prócz tego był dokładnym matematycznym wyrazem działania atmosfery na przebiegające przez nią promienie światła.

Gdy za granicę dokładności pomiarów astronomicznych przyjmiemy $0''.01$, to ideałem byłaby taka teoria refrakcji, z której wypływałyby wartości refrakcji, nie różniące się więcej, jak o $0''.01$ od prawdziwych.

W istocie żadna ze znanych teorii refrakcji nie posiada powyższego stopnia dokładności dla całego zakresu wartości h od 0° do 90° . Błędy teorii są tem większe, im mniejsze jest h : im dokładniejsza jest teoria, tem mniejsze są różnice między spostrzeżeniem a obliczeniem przy małych h .

Powodem takiego stanu rzeczy jest niedostateczna znajomość budowy atmosfery ziemskiej. Gdy chodzi o odległości zenitalne niewielkie, już uwzględnienie najbardziej zasadniczych danych, charakteryzujących stan atmosfery, prowadzi do wyników zgodnych z obserwacją. Jednakże w celu uzyskania zgodności między teorią a obserwacją także przy znaczniejszych odległościach zenitalnych, należy bardziej się liczyć z istotną budową atmosfery.

Niedostateczna znajomość tej budowy zniewala do tworzenia hipotez, które często nie mają głębszego uzasadnienia, ale które mogą być użyteczne w teorii refrakcji, gdy prowadzą do wyników o ile możliwości zgodnych ze spostrzeżeniem. Przy wyborze hipotezy zresztą często nie tyle chodzi o zgodność ze stanem prawdziwym (bo na sprawdzenie tej zgodności zazwyczaj niema sposobów), ile o nadanie zagadnieniu postaci takiej, aby trudności rozwiązania matematycznego można było pokonać.

Pomimo więc istniejącego dążenia do oparcia teorii refrakcji na faktach, głębiej i szczegółowiej uwzględniających budowę atmosfery ziemskiej, trudności zdobycia tych szczegółów z jednej strony, z drugiej zaś strony trudności matematyczne, zmuszające do hipotez upraszczających, powodują, że wszystkie dosyć liczne teorie refrakcji prowadzą ostatecznie do wyrażen, mniej lub więcej zbliżonych do wzorów interpolacyjnych; dokładność wyników maleje wraz z wysokością, dla której się refrakcję oblicza. Wynika stąd, że jeżeli nawet wartości refrakcji

wypływające z teorii, opartej na pewnych założeniach co do budowy atmosfery, z obserwacją są w zgodzie, to prawdziwa budowa atmosfery może się znacznie różnić od przyjętej przez teorię.

Badania, dotyczące wpływu spłaszczenia ziemi oraz warstw atmosferycznych jednakowej gęstości, prowadzą do wniosku, że jest on znikomy w tem znaczeniu, iż błędy stąd pochodzące nie przekraczają błędów obserwacji oraz błędów wartości refrakcji, wynikających ze wzorów teoretycznych. Również wynikająca z kształtu tych warstw refrakcja azymutalna pozostaje znikomą przy znaczniejszych wysokościach, a występuje silniej dopiero w bliskości horyzontu, gdzie wszakże jeszcze silniej występują błędy obserwacji i teorii. Wobec tego w teorii refrakcji możemy nie brać pod uwagę spłaszczenia ziemi i przyjąć, że ziemia ma kształt kulisty.

Drugie założenie, jakie w teorii refrakcji zazwyczaj się robi, jest następujące: gęstość atmosfery w równych odległościach od środka ziemi jest we wszystkich kierunkach jednakowa i maleje w sposób ciągły dla rosnących odległości.

Stan taki, przyjmowany dla każdej chwili, pomimo bezustannych zmian, jakie w atmosferze zachodzą, nie odpowiada rzeczywistości. Jak szybko stan ten zmieniać się może, ilustrują nam wahania położenia gwiazdy, widzianej w polu lunety, gdy panuje t. zw. niepokój powietrza. Przyczyną właściwą tych wahań są szybkie zmiany refrakcji, które, jak wynika z amplitudy wahań, wynosić mogą 1' nawet w znaczniejszych wysokościach.

Jako położenie gwiazdy przyjmuje się w danej chwili jej położenie średnie pomiędzy położeniami ruchomego jej obrazu i temu położeniu odpowiada wartość refrakcji, którą dla gwiazdy przyjmujemy. Wartość przyjęta odpowiada oczywiście pewnemu idealnie wyrównanemu stanowi atmosfery w tej chwili, zgodnemu z wyżej przytoczonymi założeniami.

Ale i takie wyrównane stany atmosfery w różnych czasach wykazują różnice z powodu zmian temperatury, ciśnienia i wilgotności, którym atmosfera ziemiska bezustannie podlega. Gdy wszakże określimy dla jakiegokolwiek wyrównanego stanu atmosfery funkcję, wyrażającą związek pomiędzy gęstością warstwy

atmosferycznej a jej odległością od środka ziemi, to wynika, że rozmaite stany wyrównane atmosfery zależą tylko od warjacji pewnych stałych parametrów, od których wartość liczbową powyższej funkcji zależy.

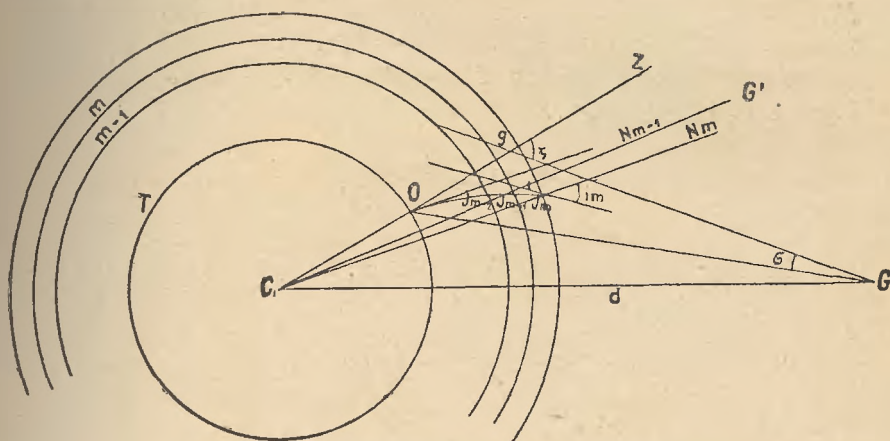
Głównym zadaniem teorii refrakcji jest wyprowadzenie wartości refrakcji przy pewnych określonych wartościach elementów, charakteryzujących chwilowy stan atmosfery, czyli t. zw. *refrakcji średniej*. Zmiany tych elementów wymagają dodatkowego wyznaczenia wpływu tych zmian; uwzględnia się go przez obliczenie poprawek, które, dodane do refrakcji średniej, dają *refrakcję prawdziwą* dla danego wyrównanego stanu atmosfery.

48. Związek między pozorną odległością zenitalną gwiazdy a wartością kąta padania promienia, ulegającego refrakcji atmosferycznej. Zgodnie z powyższymi założeniami uważamy, że atmosfera składa się z warstw powietrza, spółśrodkowych z powierzchnią ziemi, o grubości nieskończenie małej, wewnątrz których gęstość ma wartość stałą. Promień światła, przechodząc do danej warstwy, załamuje się na jej powierzchni i w granicach tej warstwy przebiega po linii prostej; pozostaje on przytem w płaszczyźnie, określonej przez promień padający i kierunek prostej, normalnej do powierzchni warstwy w punkcie, w którym promień podający powierzchnię tę spotyka; oczywiście pozostaje on też w tej samej płaszczyźnie, gdy ulega załamaniu we wszystkich następnych warstwach i gdy wreszcie dosięga oka obserwatora na powierzchni ziemi. Widzimy więc, że promień światła w atmosferze przy powyższych założeniach przebiega drogę płaską.

Kierunkiem, w którym promień światła, idący od jakiejś gwiazdy, dosięga powierzchni ziemi, jest to ten kierunek, w którym spostrzegacz widzi gwiazdę. Można więc powiedzieć, że promień światła przebiega w atmosferze drogę, której płaszczyzna określona jest przez pion miejsca obserwacji oraz przez kierunek, w którym widzialna jest gwiazda; jest to oczywiście płaszczyzna wierzchołkowa, przechodząca przez gwiazdę. Ponieważ w tej samej płaszczyźnie znajduje się promień przed załamaniem w atmosferze, więc azymut gwiazdy z powodu refrakcji nie ulega zmianie.

Niechaj płaszczyzna rysunku przedstawia płaszczyznę, przechodzącą przez środek ziemi C (ryc. 42), punkt obserwacji O oraz gwiazdę G , której odległość od C jest $CG = d$. Koło TO jest to przekrój ziemi płaszczyzną COG , koła zaś spółśrodkowe z TO są przekrojami szeregu warstw atmosfery. Weźmy pod uwagę dwie takie warstwy sąsiednie, z których bliższą powierzchni ziemi uważamy za $(m-1)$ -szą, a dalszą za m -tą; przyjmujemy każdą z nich za jednorodną, zakładając zarazem, że gęstość warstwy m -ej jest mniejsza, niż gęstość warstwy $(m-1)$ -szej.

Promień światła GJ_m , który spotyka w punkcie J_m po-



Rycina 42.

wierzchnię graniczną m -ej warstwy, tworzy z normalną $J_m N_m$ do tej powierzchni w punkcie J_m kąt i_m ; jest to kąt padania promienia w punkcie J_m . Wskutek załamania się w warstwie m -tej promień zbliża się do kierunku normalnej, przebiegając wewnątrz tej warstwy prostą drogę $J_m J_{m-1}$, i w punkcie J_{m-1} spotyka powierzchnię graniczną warstwy $(m-1)$ -szej. Kąt $CJ_m J_{m-1} = f_m$ jest to kąt załamania się przy przejściu promienia z warstwy $(m-1)$ -szej do m -tej.

Oznaczmy przez $\mu_m, \mu_{m-1}, \mu_{m-2} \dots$ współczynniki załamania światła, przechodzącego z próżni odpowiednio do warstwy m -ej, $(m-1)$ -szej, $(m-2)$ -giej i t. d., a współczynnik załamania przy

przejściu promienia z warstwy $(m+1)$ -szej do m -tej przez v_m . Znaczy to, że jest

$$v_m = \frac{\mu_{m-1}}{\mu_m},$$

a więc według prawa Snelliusa

$$\frac{\sin i_m}{\sin f_m} = \frac{\mu_{m-1}}{\mu_m}. \quad (a)$$

Niech będzie dalej J_{m-1} punkt, w którym promień spotyka powierzchnię graniczną $(m-1)$ -szej warstwy, a CN_{m-1} normalna w tym punkcie, to $J_m J_{m-1} N_{m-1} = i_{m-1}$ jest kątem padania w tym punkcie. Oznaczmy $CJ_m = \Delta_m$, $CJ_{m-1} = \Delta_{m-1}$, to z trójkąta $CJ_m J_{m-1}$ wypływa

$$\frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m} = \frac{\sin f_m}{\sin i_{m-1}}. \quad (b)$$

Mnożąc przez siebie równania (a) i (b), otrzymujemy

$$\frac{\sin i_m}{\sin i_{m-1}} = \frac{\Delta_{m-1} \mu_{m-1}}{\Delta_m \mu_m}$$

albo

$$\Delta_m \mu_m \sin i_m = \Delta_{m-1} \mu_{m-1} \sin i_{m-1}.$$

Związek powyższy ważny jest oczywiście dla jakichkolwiek dwóch warstw sąsiadujących, a więc też dla jakichkolwiek dwóch warstw w ogólności. Gdy więc ogólnie oznaczmy przez Δ odległość jakiejkolwiek warstwy atmosferycznej, uważanej za nieskończenie cienką, od środka ziemi, przez μ współczynnik załamania w tej warstwie światła, przechodzącego do niej z próżni, a przez i kąt padania, to dla całej atmosfery jest

$$\Delta \mu \sin i = \text{const.} \quad (c)$$

i μ oznacza tu wprost współczynnik załamania powietrza w odległości Δ od środka ziemi, który jest funkcją ciągłą tej odległości.

Promień GJ_m przebiega w atmosferze drogę $J_m J_{m-1} J_{m-2} \dots$ i dosięga powierzchni ziemi w punkcie O . Jest to linja krzywa, gdyż poszczególne warstwy są nieskończenie cienkie. Niechaj będzie OG' kierunek, w którym ten promień wpada do oka obserwatora, to widzi on gwiazdę G w tym kierunku; a zatem $\angle ZOG' = z'$ jest pozorną odległością gwiazdy G . Gdyby nie było atmosfery, obserwator widziałby gwiazdę w kierunku OG , a więc $\angle ZOG = z$ jest prawdziwą odległością zenitalną gwiazdy.

Wzór (c) ważny jest dla całej atmosfery, a więc też dla jej granicy górnej, gdzie zaczyna się próżnia, jak i dla granicy dolnej, którą jest powierzchnia ziemi.

Niechaj będzie Gg droga w próżni tego promienia, który po wejściu do atmosfery ziemskiej przebiega w niej drogę $J_m J_{m-1} \dots O$; promień ten przecinałby się z pionem punktu O w punkcie g . Oznaczmy

$$\angle ZgG = \zeta, \quad \angle gGO = \sigma,$$

to jest

$$z = \zeta - \sigma. \quad (d)$$

Oznaczmy dalej przez H odległość górnej granicy atmosfery od środka ziemi, a przez i_0 kąt padania promienia Gg w punkcie spotkania się jego z atmosferą. Ponieważ na granicy atmosfery jest $\mu = 1$, więc zgodnie ze wzorem (c) jest też

$$\Delta \mu \sin i = H \sin i_0. \quad (c')$$

Z drugiej strony niech będzie $CO = r_0$ odległość punktu obserwacji od środka ziemi, a współczynnik załamania powietrza w miejscu obserwacji niech będzie μ_0 . Ponieważ kątem padania w punkcie O jest $\angle ZOG' = z'$, więc jest także

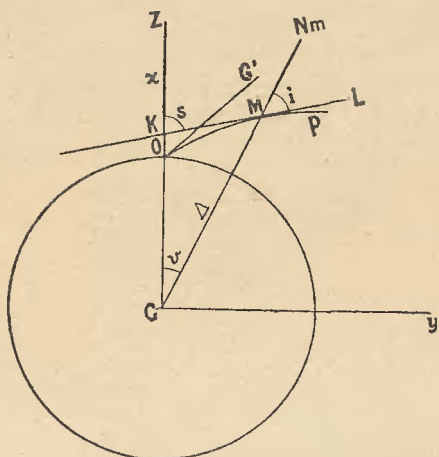
$$\Delta \mu \sin i = r_0 \mu_0 \sin z'. \quad (c'')$$

Ten ostatni wzór, w którym po prawej stronie wszystkie wielkości uważać możemy za znane, wyraża poszukiwaną zależność pomiędzy pozorną odległością zenitalną gwiazdy a wartością kąta padania promienia, ulegającego załamaniu, która zmienia się wraz z Δ .

49. Równanie drogi światła w atmosferze. Równanie różniczkowe refrakcji. Znając związek (c''), możemy przystąpić do wyprowadzenia równania krzywej, którą przebiega promień światła w atmosferze ziemskiej.

Niechaj będzie na rycinie 43 C środek ziemi, O punkt obserwacji na powierzchni ziemi, OP część drogi, którą przebiega w atmosferze ziemskiej promień światła, dochodzący do O.

Obierzmy punkt C za początek układu prostokątnego współrzędnych, którego osią x jest prosta COZ, a osią y prosta



Rycina 43.

prostopadła do CO w płaszczyźnie promienia OP. Niechaj współrzędne punktu M, leżącego na krzywej OP, będą x i y . Prosta CMN_m jest to normalna do tej warstwy atmosfery, współśrodkowej z powierzchnią ziemi, na której leży punkt M. Niechaj będzie odległość tej warstwy od środka ziemi CM = Δ .

Poprowadźmy w punkcie M styczną do krzywej OP, która przecina oś x w punkcie K, tworząc z nią kąt ZKM = s . Styczna ta określa kierunek, w którym promień światła przybywa do punktu M; to znaczy, że kąt N_mML = i jest kątem padania promienia w punkcie M. Oznaczmy jeszcze \sphericalangle OCM = v , to jest

$$s = v + i. \quad (e)$$

Równanie krzywej OP znajdziemy, gdy wyprowadzimy zależność, zachodzącą między x i y , lub też między współrzędnymi biegunowymi punktu M, t. j. v i Δ . Jest przede wszystkim

$$\operatorname{tang} v = \frac{y}{x},$$

a według geometrycznego znaczenia pochodnej jest

$$\operatorname{tang} s = \frac{dy}{dx}.$$

Że zaś wobec (e)

$$\operatorname{tang} i = \operatorname{tang}(s - v) = \frac{\operatorname{tang} s - \operatorname{tang} v}{1 + \operatorname{tang} s \operatorname{tang} v}$$

więc podstawiając na miejsce $\operatorname{tang} s$ i $\operatorname{tang} v$ powyższe wartości otrzymamy

$$\operatorname{tang} i = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}} = \frac{x \, dy - y \, dx}{x \, dx + y \, dy}. \quad (\text{f})$$

Wprowadzamy teraz we wzorze (f) zamiast współrzędnych prostokątnych, współrzędne biegunowe Δ i v . Mamy:

$$x = \Delta \cos v, \quad y = \Delta \sin v,$$

$$dx = \cos v \, d\Delta - \Delta \sin v \, dv, \quad dy = \sin v \, d\Delta + \Delta \cos v \, dv.$$

Podstawiając te wartości w (f), otrzymamy po uproszczeniu

$$\operatorname{tang} i = \Delta \frac{dv}{d\Delta},$$

a stąd

$$dv = \frac{d\Delta}{\Delta} \operatorname{tang} i. \quad (\text{g})$$

Wzór powyższy wyraża związek między spólrzędnymi biegunowymi v i Δ dowolnego punktu krzywej OP, jest to zatem poszukiwane równanie drogi promienia światła w atmosferze. W ścisłym związku z kształtem tej drogi znajduje się wartość refrakcji.

Różniczkując logarytmicznie wzór (c'') otrzymujemy

$$\frac{d\Delta}{\Delta} + \frac{d\mu}{\mu} + \cotg i \, di = 0,$$

albo

$$\frac{d\Delta}{\Delta} \tan g i + di = - \frac{d\mu}{\mu} \tan g i.$$

Uwzględniając wzory (g) i (e), mamy też

$$dv + di = ds = - \frac{d\mu}{\mu} \tan g i,$$

lub ponieważ ze wzoru (c'') wypływa

$$\tan g i = \frac{\sin i}{\sqrt{1 - \sin^2 i}} = \frac{\frac{r_0 \mu_0 \sin z'}{\Delta \mu}}{\sqrt{1 - \frac{r_0^2 \mu_0^2 \sin^2 z'}{\Delta^2 \mu^2}}} = \frac{r_0 \mu_0 \sin z'}{\sqrt{\Delta^2 \mu^2 - r_0^2 \mu_0^2 \sin^2 z'}} \quad (h)$$

więc otrzymujemy wreszcie

$$ds = - \frac{r_0 \mu_0 \sin z'}{\sqrt{\Delta^2 \mu^2 - r_0^2 \mu_0^2 \sin^2 z'}} \cdot \frac{d\mu}{\mu}. \quad (82)$$

Kąt s zmienia się w zależności od położenia punktu M na krzywej OP: największa jego wartość odpowiada położeniu punktu M na zewnętrznej powierzchni granicznej atmosfery, najmniejsza zaś położeniu jego w punkcie O na powierzchni ziemi. W pierwszym z tych położów MK schodzi się z kierunkiem promienia PO w próżni i wtedy, jak widzieliśmy w ustępie poprzednim, jest $s = \zeta$; w drugim z tych położów styczna do krzywej OP w punkcie O określa kierunek, w którym obserwator widzi gwiazdę, i jest wtedy $s = \sphericalangle ZOG' = z'$. Gdy

więc wzór (82) scałkujemy, przyjmując dla granicy dolnej, t. j. na powierzchni ziemi, $\mu = \mu_0$, a dla granicy górnej, t. j. dla granicy atmosfery, $\mu = 1$, to znajdziemy

$$\zeta - \varepsilon' = - \int_{\mu_0}^1 \frac{r_0 \mu_0 \sin \varepsilon'}{\sqrt{\Delta^2 \mu^2 - r_0^2 \mu_0^2 \sin^2 \varepsilon'}} \cdot \frac{d\mu}{\mu},$$

gdzie oczywiście zamiast Δ należy również wprowadzić wartości odpowiadające powyższym granicom, t. j. r_0 i H .

Podstawiając w wyżej otrzymanym wzorze jeszcze na miejsce ζ wartość określoną przez wzór (d), znajdujemy wreszcie

$$\varepsilon - \varepsilon' = \int_1^{\mu_0} \frac{r_0 \mu_0 \sin \varepsilon'}{\sqrt{\Delta^2 \mu^2 - r_0^2 \mu_0^2 \sin^2 \varepsilon'}} \cdot \frac{d\mu}{\mu} - \sigma. \quad (83)$$

Różnica $\varepsilon - \varepsilon'$ pomiędzy oległością zenitalną prawdziwą a pozorną wyraża wpływ refrakcji na odległość zenitalną, czyli wprost wartość refrakcji. Widzimy ze wzoru (83), że wartość ta tylko o kąt σ różni się od wartości całki, stanowiącej pierwszy wyraz tego wzoru po prawej stronie. Chcąc zatem znaleźć wartość refrakcji, należy znaleźć wartość powyższej całki oraz wartość kąta σ .

Obliczmy najprzód wartość kąta σ . Z trójkąta OgG (ryc. 42) wynika

$$\sin \sigma = \frac{Og}{OG} \sin \zeta = \frac{Og}{r_0} \cdot \frac{r_0}{OG} \sin \zeta.$$

Kąt padania w tym punkcie atmosfery, w którym spotyka ją promień światła, oznaczyliśmy przez i_0 ; ponieważ odległość tego punktu od środka ziemi jest H , więc zachodzi proporcja

$$\frac{Cg}{H} = \frac{\sin i_0}{\sin \zeta};$$

albo ze względu na wzory (c') i (c''), jest też

$$Cg = r_0 \mu_0 \frac{\sin \varepsilon'}{\sin \zeta}.$$

Że zaś jest

$$\text{Og} = \text{Cg} - r_0 = r_0 \left(\mu_0 \frac{\sin z'}{\sin \zeta} - 1 \right),$$

więc znajdujemy

$$\sin \sigma = \frac{r_0}{\text{OG}} (\mu_0 \sin z' - \sin \zeta).$$

Ponieważ odległość r_0 jest bardzo mała w stosunku do odległości gwiazdy od miejsca obserwacji, a wyrażenie w nawiasie jest również małym ułamkiem, więc bez wpływu na dokładność wyniku możemy położyć $\text{OG} = d$ i przyjąć $r_0 = a$, oznaczając przez a promień równika ziemskiego. Gdy jeszcze napiszemy

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{\text{OG}} &= \frac{a}{d} = \pi \sin 1'', \\ \sin \sigma &= \sigma \sin 1'', \\ \zeta &= z = z' + (z - z'), \\ \sin \zeta &= \sin z' + (z - z') \cos z' \sin 1'', \end{aligned}$$

to otrzymamy

$$\sigma = \pi [(\mu_0 - 1) \sin z' - (z - z') \cos z' \sin 1'']. \quad (84)$$

Kąt π jest to paralaksa dzienna gwiazdy (p. rozdział VI). Dla gwiazd stałych wartość jej jest znikoma, a więc dla tych gwiazd $\sigma = 0$. Dla ciał naszego układu słonecznego również jest praktycznie, z wyjątkiem księżyca, $\sigma = 0$. W przypadku księżyca σ osiągnąć może wartość, której nie można pominąć, gdy chodzi o największą dokładność. Jest mianowicie dla $z' = 30^\circ, 84^\circ, 90^\circ$, odpowiednio $\sigma = 0''.01, 0''.1$ i $1''$. Gdy więc σ musi być uwzględnione, to do obliczenia wartości tego kąta służy wzór (84).

Pomijając ten wyjątkowy przypadek, wymagający uwzględnienia σ , możemy przyjąć, że wartość refrakcji określa wzór

$$z - z' = R = \int_1^{\mu_0} \frac{r_0 \mu_0 \sin z'}{\sqrt{\Delta^2 \mu^2 - r_0^2 \mu_0^2 \sin^2 z'}} \cdot \frac{d\mu}{\mu}, \quad (85)$$

albo też wzór różniczkowy

$$dR = \frac{r_0 \mu_0 \sin \varepsilon'}{\sqrt{\Delta^2 \mu^2 - r_0^2 \mu_0^2 \sin^2 \varepsilon'}} \cdot \frac{d\mu}{\mu}. \quad (85')$$

Wzór ten stanowi równanie różniczkowe refrakcji.

50. Przybliżona wartość refrakcji. Ażeby obliczyć wartość refrakcji dla danego ε' , należy scałkować wyrażenie, stojące po prawej stronie wzoru (85'). Ponieważ μ jest funkcją Δ , więc całkowanie wymaga znajomości postaci tej funkcji. Lecz przybliżoną wartość refrakcji można znaleźć, chociaż nieznana jest postać powyższej funkcji ani też całki (85).

Ponieważ jest

$$H \sin i_0 = r_0 \mu_0 \sin \varepsilon',$$

więc

$$\sin i_0 - \sin \varepsilon' = \sin \varepsilon' \left(\frac{r_0 \mu_0}{H} - 1 \right).$$

Przypuśćmy, że i_0 tak mało różni się od ε' , że można przyjąć z dostateczną dokładnością

$$\sin i_0 - \sin \varepsilon' = 2 \sin \frac{i_0 - \varepsilon'}{2} \cos \frac{i_0 + \varepsilon'}{2} = (i_0 - \varepsilon') \cos \varepsilon' \sin 1'';$$

wówczas jest

$$(i_0 - \varepsilon') \sin 1'' = \tan \varepsilon' \left(\frac{r_0 \mu_0}{H} - 1 \right).$$

Gdy gwiazda jest w zenicie, wtedy jest $i_0 = \varepsilon' = z = 0^\circ$. Im większe jest ε' , tem bardziej różni się i_0 od ε , ale można przyjąć, że aż do pewnej niezbyt wielkiej odległości zenitalnej jest $i_0 - \varepsilon < 0''.1$. Przy tem założeniu jest z dostatecznem przybliżeniem $i_0 - \varepsilon' = R$, a więc

$$R \sin 1'' = \left(\frac{r_0 \mu_0}{H} - 1 \right) \tan \varepsilon'. \quad (i)$$

Założenie $i_0 = z = \zeta$ jest oczywiście równoznaczne z założeniem, że pion w punkcie spotkania się promienia z atmosferą jest równoległy do pionu miejsca obserwacji. W istocie zachodziłoby to tylko wówczas, gdyby było $r_0 = \infty$, t. j. gdyby powierzchnia ziemi była płaska. Ponieważ wtedy byłoby też $H = \infty$, więc kładąc $\lim \frac{r_0}{H} = 1$ oraz oznaczając

$$(\mu_0 - 1) \operatorname{cosec} 1'' = \beta, \quad (\text{k})$$

nadać możemy wzorowi (i) uproszczoną postać

$$R = \beta \tan z'. \quad (\text{i}')$$

Wzór ten, jak wynika ze spostrzeżeń, przy niewielkich odległościach zenitalnych określa wartość refrakcji z pożądaną dokładnością, a błąd przy $z' = 45^\circ$ wynosi zaledwie kilka dziesiątych sekundy łuku. Znaczy to, że w niewielkich odległościach zenitalnych wartość refrakcji jest niezależna od krzywizny warstw atmosferycznych oraz od zmian, którym podlega współczynnik załamania światła μ przy wzrastającej odległości od powierzchni ziemi.

Postać, analogiczną do wzoru (i') można nadać wzorowi na refrakcję także wówczas, gdy nie czynimy żadnych ograniczających założeń. Pisząc

$$\frac{r_0 \mu_0 \sin z'}{\sqrt{\Delta^2 \mu^2 - r_0^2 \mu_0^2 \sin^2 z'}} = \tan z' \frac{r_0 \mu_0^*}{\sqrt{\Delta^2 \mu^2 \sec^2 z' - r_0^2 \mu_0^2 \tan^2 z'}}$$

i oznaczając

$$(\mu_0 - 1) y \operatorname{cosec} 1'' = \int_1^{\mu_0} \frac{r_0 \mu_0}{\sqrt{\Delta^2 \mu^2 \sec^2 z' - r_0^2 \mu_0^2 \tan^2 z'}} \cdot \frac{d\mu}{\mu}, \quad (\text{l})$$

znajdziemy

$$R = \beta y \tan z'. \quad (\text{i}'')$$

W tym wzorze jednakże y jest pewną funkcją z' , której znalezienie wymaga scałkowania wyrażenia, stojącego po prawej stronie równania (l), a więc przede wszystkim poznania związku, jaki zachodzi pomiędzy zmiennymi μ i Δ .

51. Kilka uwag o współczynniku załamania światła. Ze wzoru (i) wnioskujemy, że wartość refrakcji jest tem większa, im większy jest współczynnik załamania μ_0 . Światło, które wysyłają gwiazdy, nie jest jednorodne, lecz składa się z promieni różnej długości fali λ , a wiadomo, że im mniejsza jest długość fali, tem większy jest współczynnik załamania. Skutkiem tego światło, przychodzące od gwiazd, ulega w atmosferze ziemskiej nie tylko załamaniu, t. j. refrakcji, ale także rozszczepieniu czyli dyspersji. Obraz gwiazdy, widziany przez obserwatora ziemskiego, jest więc w istocie widmem tej gwiazdy. W widmie tem, zgodnie ze wzorem (i), najwyżej przez refrakcję jest wzniesiona ta część, dla której współczynnik załamania jest największy, t. j. część, utworzona z promieni o najmniejszej długości fali λ . Obraz gwiazdy jest zatem widmem, rozciągniętem wzdłuż koła wierzchołkowego, w którym część czerwona zajmuje położenie najniższe.

Naturalnie rozciągłość tego widma jest bardzo niewielka, a w znaczniejszej wysokości nad horyzontem trudno je wogóle stwierdzić obserwacją. O rozciągłości widma atmosferycznego gwiazd wnioskować możemy na podstawie wartości współczynnika załamania dla promieni różnych długości fali. Współczynniki załamania suchego powietrza przy temperaturze 0°C i ciśnieniu 760 mm. dla głównych linii Fraunhofera są podane w następującej tabelce :

Linja Fraunhofera	λ w $\mu\mu^1$	$\mu_0 - 1 = \alpha$
B	687	0.0002911
C	656	0.0002914
D	589	0.0002922
E	527	0.0002933
F	486	0.0004943
G	431	0.0002962
H	397	0.0002978

t. j. w milionowych częściach milimetra.

Widzimy z tej tabelki, że wartość α w granicach widma optycznego zawarta jest pomiędzy 0.0002911 a 0.0002978. Oznaczmy przez λ_0 długość fali tych promieni, których działanie optyczne jest najsilniejsze, które więc najbardziej wpływają na widzialność gwiazdy; na podstawie licznych badań można przyjąć w przybliżeniu $\lambda_0 = 555 \mu\mu$. Gdy przez R rozumiemy będziemy wartość refrakcji dla długości fali λ_0 , to różnica pomiędzy wartością R a wartością refrakcji dla jakiejś innej długości fali λ wyraża się wzorem

$$dR = -0.005 R \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2} \right),$$

w którym λ wyrażone są w mikronach.

Ze wzoru tego dla długości fali $687 \mu\mu$ i $397 \mu\mu$ wynikają odpowiednio na dR wartość $+0.006 R$ i $-0.016 R$; a więc różnica wartości refrakcji dla linii B i H wynosi $0.022 R$, i ta różnica określa rozciągłość widma. Przyjmując $0.022 R = 0''.1$, znajdziemy $R = 5''$; wartość tę ma refrakcja, jak widać z tablicy VI, w wysokości $h = 85^\circ$. Znaczy to, że dyspersja w wysokościach, większych niż 85° , nie może powodować w wyznaczeniu wysokości gwiazdy błędu większego, aniżeli błąd samej refrakcji. Ale i w wysokościach jeszcze znacznie mniejszych błąd, spowodowany dyspersją, nie wchodzi w rachubę, gdy wysokość obserwowaną zidentyfikujemy z wysokością części widma optycznie najczynniejszej i gdy stosownie do tego za wartość najwłaściwszą refrakcji uważać będziemy tę, która opiera się na współczynniku załamania promienia o długości fali $575 \mu\mu$.

Jak wynika ze spostrzeżeń wartość $\lambda_0 = 575 \mu\mu$ najbardziej odpowiada gwiazdom klasy K harwardzkiej klasyfikacji, długość fali najczynniejszej części widma u innych gwiazd jest mniejsza lub większa od powyższej. Wobec tego na wartość refrakcji ma wpływ widmo gwiazdy. Wzory, pozwalające obliczyć poprawki refrakcji dla gwiazd wszystkich typów widmowych, podał prof. Kamiński (A. N., tom 185). Zwrócimy jeszcze uwagę na 2 przypadki, gdy wartość refrakcji, oparta na powyższym współczynniku, prowadzi do wyników błędnych. Zachodzi to przede wszystkim wówczas, gdy obserwacja nie jest optyczna lecz fotograficzna. Na kliszę fotograficzną najsilniej działają nie promienie optyczne

najsilniejsze, lecz promienie fioletowe, których długość fali wynosi około 430 μ . Położenie obrazu fotograficznego jest zatem wyższe od położenia obrazu optycznego, i jest rzeczą naturalną, że wartość refrakcji przy obserwacjach fotograficznych opierać się musi na współczynniku załamania światła, odpowiadającym długości fali 430 μ .

Drugi przypadek, w którym stosowanie refrakcji, opartej na współczynniku załamania promieni optycznie najczystszych, prowadzi do błędów, nastroczają obserwacje w bliskości horyzontu. Tu źródło błędu tkwi w absorbcji atmosferycznej. Wpływ absorbcji atmosferycznej na różne części widma jest tem silniejszy, im mniejsza jest długość fali. W bliskości horyzontu, gdzie absorbcja wogóle jest najsilniejsza, część optycznie najczystsza może być tak silnie osłabiona, że staje się słabszą od części czerwonej, która przez absorbcję jest mniej osłabiona. W tych warunkach pozycję części czerwonej widma, a nie części optycznie najsilniejszej, przyjmujemy za pozycję gwiazdy. Wartość refrakcji, którą w tym przypadku stosować należy, oczywiście opierać się winna na współczynniku załamania tych promieni, które najsłabiej są pochłonięte, na przykład odpowiadającym długości fali linii C.

Tu zaznaczymy, uprzedzając dalsze w tej sprawie wyjaśnienia, że podstawą obliczenia refrakcji jest t. zw. *stała refrakcji*, która znajduje się w ścisłym związku ze współczynnikiem załamania powietrza, ale której wartość określona musi być tak, aby pomiędzy wartościami teoretycznymi refrakcji a obserwowanymi zachodziła jak największa zgodność.

52. Wprowadzenie nowych zmiennych do równania (85') i przekształcenie wyrażenia refrakcji. Wartość współczynnika μ_0 na powierzchni ziemi możemy wyznaczyć dla jakichkolwiek długości fali metodami fizycznymi, ale nie jesteśmy w stanie bezpośrednio doświadczeniem wykryć prawa, według którego zmienia się wartość μ w zależności od Δ . Musimy jednakże znać związek między μ i Δ jeżeli chcemy scałkować równanie (85').

Badanie warunków fizycznych tych warstw atmosfery, do których dostać się nie możemy, jest wogóle bardzo utrudnione. Pomimo to co do warunków panujących w wyższych warstwach

atmosfery jesteśmy w stanie wyprowadzać pewne wnioski na podstawie własności warstw niższych, bezpośrednio badaniu dostępnych. Pozatem można co do tych warunków czynić pewne mniej lub więcej prawdopodobne i uzasadnione hipotezy.

Jeżeli jakaś inna wielkość, z którą w ścisłej a znanej zależności znajduje się współczynnik załamania μ , łatwiej dostępna jest badaniu, albo też zastosować do niej można jakąś prawdopodobną hipotezę, to można ją wprowadzić zamiast μ do równania (85').

Taką wielkością jest naprzykład gęstość atmosfery, którą oznaczmy przez ρ . Z doświadczeń wiadomo, że dla gazów jednorodnych pomiędzy gęstością gazu a współczynnikiem załamania zachodzi prosty związek

$$\mu - 1 = c\rho. \quad (m)$$

We wzorze tym c jest wielkością stałą, charakterystyczną dla danego gazu i danej długości fali. Wielkość $\mu - 1$, która, jak widzimy, jest proporcjonalna do gęstości gazu, nazywa się *siłą łamiącą* gazu. Ponieważ $\mu - 1$ różni się od $\mu^2 - 1$ zaledwie o jednostkę siódmego miejsca dziesiętnego, więc bardzo często przyjmuje się też

$$\mu^2 - 1 = c\rho,$$

co ma swe uzasadnienie w pewnych korzyściach rachunkowych.

Gdy w pierwszym przybliżeniu uważać będziemy powietrze za gaz jednorodny, to zakładamy, że związek (m) stosuje się także do powietrza. Specjalnie też, gdy przez ρ_0 oznaczymy gęstość powietrza przy powierzchni ziemi, a przez μ_0 odpowiedni współczynnik załamania, jest także

$$\mu_0 - 1 = c\rho_0. \quad (m')$$

Ze wzorów (m) i (m') wypływa więc

$$\frac{\mu_0}{\mu} = \frac{1 + c\rho_0}{1 + c\rho}.$$

Położmy

$$\alpha = \frac{c\rho_0}{1 + c\rho_0}, \quad (n)$$

skąd wypływa

$$c\rho_0 = \frac{\alpha}{1 - \alpha}, \quad c\rho = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \frac{\rho}{\rho_0},$$

i wprowadźmy te wartości do wzoru na $\frac{\mu_0}{\mu}$, to otrzymamy

$$\frac{\mu_0}{\mu} = \frac{1 + c\rho_0}{1 + c\rho} = \frac{1}{1 - \alpha \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)}. \quad (o)$$

Oznaczmy jeszcze

$$1 - \frac{\rho}{\rho_0} = \omega, \quad (p)$$

to jest

$$\frac{\mu_0}{\mu} = (1 - \alpha\omega)^{-1}, \quad (q)$$

$$d\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right) = \alpha(1 - \alpha\omega)^{-2} d\omega. \quad (q')$$

Odpowiadają sobie, jak z określenia wynika, następujące wartości graniczne zmiennych μ , ρ i ω :

$$\begin{aligned} \mu &= 1, & \rho &= 0, & \omega &= 1; \\ \mu &= \mu_0, & \rho &= \rho_0, & \omega &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ zawsze jest $\Delta > r_0$, więc gdy oznaczymy

$$\frac{r_0}{\Delta} = 1 - s, \quad (r)$$

to s jest zawsze małym ułamkiem.

Te nowe zmienne wprowadzamy do równania (l); otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (\mu_0 - 1) y \operatorname{cosec} 1'' &= \int_1^{\mu_0} \frac{r_0 \mu_0}{\sqrt{\Delta^2 + \left\{ \Delta^2 - r_0^2 \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^2 \right\} \tan^2 \varepsilon'}} \cdot \frac{d\mu}{\mu^2} = \\
 &= \int_{\mu_0}^1 \frac{\frac{r_0}{\Delta}}{\sqrt{1 + \left\{ 1 - \left(\frac{r_0}{\Delta} \right)^2 \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^2 \right\} \tan^2 \varepsilon'}} \cdot d \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right), \quad (l')
 \end{aligned}$$

a gdy uwzględnimy wzory (m'), (q), (q') i (r), oraz wprowadzimy granice dla zmiennej ω , to jest

$$c \rho_0 y \operatorname{cosec} 1'' = \alpha \int_0^1 \frac{(1-s)(1-\alpha\omega)^{-2} d\omega}{\sqrt{1 + \{1 - (1-s)^2(1-\alpha\omega)^{-2}\} \tan^2 \varepsilon'}} \quad (l'')$$

W ten sposób zamiast wzoru (i'') otrzymujemy wzór następujący:

$$R = \alpha'' \tan \varepsilon' \int_0^1 \frac{(1-s)(1-\alpha\omega)^{-2} d\omega}{\sqrt{1 + \{1 - (1-s)^2(1-\alpha\omega)^{-2}\} \tan^2 \varepsilon'}} \quad (86)$$

Wartość α , występująca w tym wzorze pod znakiem całkowania, jest ułamkiem, określonym przez wzór (n), wartość zaś α'' , stojąca przed znakiem całkowania, wyrażona jest w sekundach łukowych.

W teorii refrakcji występują głównie dwie trudności. Jak widzimy, obliczenie wartości refrakcji według wzoru (86) wymaga znalezienia wartości całki określonej, stojącej po prawej stronie tego wzoru. Pod znakiem całkowania we wzorze (86), jakkolwiek postać byśmy temu wzorowi nadali, występują dwie zmienne. Związek między ω i s sprowadza się do związku między ρ i Δ lub między μ i Δ . Otóż jedna ze wspomnianych wyżej trudności polega na tem, że postać tego związku nie jest znana. Wskutek

tego musimy się w tym względzie uciekać do hipotez, dążąc oczywiście do tego, ażeby hipotezy te oprzeć było można na znanych faktach, lub też przynajmniej aby hipotezy te były w zgodzie ze znanymi faktami.

Druga trudność jest natury czysto matematycznej. Z postaci wzoru (86) wynika, że nawet gdy za podstawę obliczenia bierzemy taką hipotezę, której postać matematyczna jest o ile możliwości najprostsza, to pomimo to całkowanie w zamkniętej postaci jest niewykonalne; jest ono zadaniem skomplikowanym nawet wtedy, gdy chodzi o osiągnięcie wartości przybliżonej, ale posiadającej dokładność dostateczną.

Ze względu na wspomniane trudności cały szereg najwybitniejszych uczonych zajmował się teorią refrakcji, dążąc do jej udoskonalenia. Odsyłając ciekawego czytelnika do nader bogatej literatury tego przedmiotu, oprzemy się w dalszym wykładzie głównie na cennych pracach z dziedziny teorii refrakcji Radau'a, uzupełnionych przez L. de Balla, modyfikując je w sposób stosowny.

Wspomnieliśmy, że zmienna s jest zawsze małym ułamkiem. Z określenia tej wielkości wypływa, że posiada ona największą wartość na granicy atmosfery, t. j. gdy $\Delta = H$. Nie wiemy, do jakiej odległości od powierzchni ziemi sięga atmosfera ziemską, ale gdy weźmiemy pod uwagę, w jaki sposób maleje gęstość powietrza w miarę wznoszenia się nad powierzchnię ziemi, to można z wielkiem prawdopodobieństwem wnioskować, że w odległości 60—70 km od powierzchni ziemi gęstość powietrza jest już tak mała, iż współczynnik załamania tam nie różni się praktycznie od jedności. Możemy więc przyjąć

$$H = r_0 + 66 \text{ km} = 1.01 r_0,$$

t. j. że największa zachodząca praktycznie w rachubę wartość zmiennej s wynosi co najwyżej 0.01.

Również stała α ma wartość małą. Według określenia jest $\alpha = \frac{\mu_0 - 1}{\mu_0}$, a że w przybliżeniu $\mu_0 = 1.0003$, więc także w przybliżeniu $\alpha = 0.0003 = \mu_0 - 1$.

Okoliczność, że s i α są małemi ułamkami, pozwala na pewne uproszczenia wyrażenia, stojącego pod znakiem całkowania, które nie wpływają na dokładność ostatecznego wyniku. Gdy mianowicie rozwinie my to wyrażenie na szereg potęgowy, postępujący według potęg α i s , to możemy, uwzględniając dokładność, którą pragniemy osiągnąć, opuścić w tym szeregu wszystkie wyrazy, zawierające potęgi α , poczynawszy od drugiej, potęgi s , poczynawszy od trzeciej, i iloczyny, zawierające czynniki α i s w jakiegokolwiek potędze.

Zgodnie z powyższemi uwagami przyjmujemy:

$$\begin{aligned}(1 - \alpha\omega)^{-2} &= 1 + 2\alpha\omega + \dots, \\ (1 - s)(1 - \alpha\omega)^{-2} &= 1 - s + 2\alpha\omega + \dots, \\ (1 - s)^2(1 - \alpha\omega)^{-2} &= 1 - 2s + 2\alpha\omega + s^2 - 4\alpha\omega s + \dots\end{aligned}$$

Gdy w tem ostatniem równaniu po prawej stronie dodamy wyraz $4\alpha^2\omega^2$, którego wartość jest znikoma, to możemy je napisać w postaci

$$1 - (1 - s)^2(1 - \alpha\omega)^{-2} = 2(s - \alpha\omega) - (s - 2\alpha\omega)^2.$$

Oznaczając jeszcze

$$s = u + \alpha\omega, \quad (s)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}1 - s + 2\alpha\omega &= 1 - u + \alpha\omega, \\ 2(s - \alpha\omega) - (s - 2\alpha\omega)^2 &= 2\left[u - \frac{(u - \alpha\omega)^2}{2}\right].\end{aligned}$$

Gdy wartości powyższe wprowadzimy do wzoru (86), otrzymamy następującą postać uproszczoną:

$$R = \alpha'' \operatorname{tang} z' \int_0^1 \frac{(1 - u + \alpha\omega) d\omega}{\sqrt{1 + 2\left[u - \frac{(u - \alpha\omega)^2}{2}\right] \operatorname{tang}^2 z'}}. \quad (87)$$

Jak wynika ze wzoru (s), zmienna u jest zawsze małym ułamkiem tego samego rzędu co s , a zatem tego samego rzędu jest współczynnik w mianowniku przy $\tan^2 \varepsilon'$. Gdy więc oznaczymy

$$u - \frac{(u - \alpha\omega)^2}{2} = X, \quad (t)$$

to pierwiastek, stojący w mianowniku pod znakiem całkowania we wzorze (87), można rozwinąć na szereg potęgowy, postępujący według potęg $(X \operatorname{tang}^2 \varepsilon')$, który jest zbieżny, jeżeli $2 X \operatorname{tang}^2 \varepsilon < 1$. Szereg ten, jak łatwo sprawdzić, ma postać następująca:

$$(1 + 2X \operatorname{tang}^2 \varphi')^{-\frac{1}{2}} = 1 - X \operatorname{tang}^2 \varphi' + \frac{1 \cdot 3}{2!} X^2 \operatorname{tang}^4 \varphi' - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} X^3 \operatorname{tang}^6 \varphi' + \dots \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} X^n \operatorname{tang}^{2n} \varphi' \mp \dots \quad (\text{u})$$

Szereg ten wprowadzamy do wzoru (87). Wyrażenie pod znakiem całkowania rozpada się skutkiem tego na sumę wyrażeń, których całkowanie jest o wiele łatwiejsze, aniżeli znalezienie całki wzoru (87). Zmiennymi są w tych wyrażeniach wielkości u , ω i X , a stałymi α i ε' . Gdy więc potęgi tang ε' przeniesiemy przed znak całkowania i oznaczmy

$$A_0 = \alpha'' \int_0^1 (1-u+\alpha\omega) d\omega,$$
$$A_1 = \alpha'' \int_0^1 (1-u+\alpha\omega) X d\omega, \tag{v}$$
$$A_2 = \frac{1 \cdot 3}{2!} \alpha'' \int_0^1 (1-u+\alpha\omega) X^2 d\omega,$$
$$\begin{array}{ccccccccccc} . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$
$$A_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} \alpha'' \int_0^1 (1-u+\alpha\omega) X^n d\omega,$$

to do obliczenia wartości refrakcji otrzymamy następujący szereg:

$$R = A_0 \tan z' - A_1 \tan^3 z' + A_2 \tan^5 z' - \dots (-1)^n A_n \tan^{2n+1} z' + \dots \quad (88)$$

W ten sposób, jak widzimy, zadanie obliczenia wartości refrakcji sprowadza się do znalezienia całek postaci

$$\int_0^1 (1 - u + \alpha\omega) X^n d\omega. \quad (w)$$

Jednakże z całek tej postaci w rachubę brane być muszą tylko niektóre. Mianowicie w wyrażeniach potęg X^n występują potęgi dwumianu

$$(u - \alpha\omega)^2 = u^2 - 2u\alpha\omega + \alpha^2\omega^2;$$

ponieważ przed znakiem całkowania zawsze znajduje się mały czynnik α , więc w iloczynach postaci $(1 - u + \alpha\omega) X^n$ można, bez wpływu na dokładność wyniku, opuścić wszystkie te wyrazy, w których występują kwadraty i wyższe potęgi iloczynu $\alpha\omega$. Po opuszczeniu tych wyrazów całki postaci (w) przedstawione zostaną, jako sumy całek dwóch tylko postaci, mianowicie $\int_0^1 u^n d\omega$ i $\int_0^1 u^n \omega d\omega$.

53. Związek, zachodzący pomiędzy zmiennymi u i ω . Aby znaleźć wartość całek postaci $\int_0^1 u^n d\omega$ i $\int_0^1 u^n \omega d\omega$, musimy poznać związek, jaki zachodzi między zmiennymi u i ω . Jak wynika ze wzorów (p), (r) i (s), należy w tym celu określić gęstość powietrza, jako funkcję odległości Δ od środka ziemi. Postarajmy się znaleźć wymienioną funkcję.

Przypuśćmy, że powietrze jest gazem jednorodnym. W takim razie gęstość jego ρ w danem miejscu zależy tylko od ciśnienia i temperatury. Oznaczmy ciśnienie przez p , a temperaturę bezwzględną, wyrażoną w stopniach Celsjusza, przez T i postarajmy się znaleźć związek, zachodzący między ρ , p i T .

Weźmy pod uwagę warstwę powietrza w odległości Δ od środka ziemi, której grubość jest $d\Delta$, i załóżmy, że wewnątrz tej warstwy, którą uważamy za dowolnie cieką, gęstość jest wszędzie jednakowa, mianowicie ρ . Niechaj ciśnienie, wywierane przez tę warstwę na warstwę pod nią leżącą, będzie dp . Ciśnie-

nie to oczywiście jest proporcjonalne do grubości warstwy uci-
skającej, do jej gęstości i wreszcie do przyspieszenia ciężkości
w odległości Δ od środka ziemi, które oznaczmy przez γ . Jest więc

$$dp = -\gamma \rho d\Delta,$$

i znak — jest wyrazem tego faktu, że ciśnienie działa w kie-
runku środka ziemi, a więc przeciwnym kierunkowi wzrastania
odległości Δ .

Jeżeli przyspieszenie ciężkości w miejscu obserwacji ozna-
czymy przez g_0 , to ze względu na prawo Newtona jest

$$\gamma : g_0 = r_0^2 : \Delta^2.$$

Pisząc więc $\gamma = g_0 \frac{r_0^2}{\Delta^2}$ we wzorze na dp , otrzymamy

$$dp = -g_0 \rho \cdot \frac{r_0^2}{\Delta^2} \cdot d\Delta. \quad (x)$$

Wprowadźmy tu jeszcze s zamiast Δ . Ponieważ $s = 1 - \frac{r_0}{\Delta}$,
więc $\frac{r_0^2}{\Delta^2} d\Delta = r_0 ds$. Podstawiając tę wartość we wzorze (x),
znajdujemy

$$dp = -g_0 r_0 \rho ds. \quad (y)$$

Całkowania tego wzoru wykonać nie możemy, ponieważ
nie znamy związku, zachodzącego między ρ i s . Możemy jed-
nakże wprowadzić jeszcze inną zależność pomiędzy dp , ρ i s ,
z której, po wyrugowaniu dp za pomocą wzoru (y), otrzymać
będzie można ρ , jako funkcję zmiennej s .

Oznaczmy przez p_0 ciśnienie atmosfery w miejscu obser-
wacji, a przez T_0 bezwzględną temperaturę powietrza tamże,
to według praw Mariotte'a i Gay-Lussaca, gdy jeszcze
przez a oznaczymy współczynnik rozszerzalności powietrza, jest

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho (1 + aT)}{\rho_0 (1 + aT_0)}.$$

Różniczkując wzór powyższy, otrzymujemy

$$dp = \frac{p_0}{\rho_0(1+aT_0)} \cdot \{(1+aT) d\rho + a\rho dT\}, \quad (z)$$

a po wyrugowaniu dp z równań (y) i (z), znajdujemy poszukiwany związek pomiędzy ρ i s :

$$-g_0 r_0 \rho ds = \frac{p_0}{\rho_0(1+aT_0)} \{(1+aT) d\rho + a\rho dT\}. \quad (aa)$$

Tu jednakże prócz ρ i s występuje jeszcze zmienna T , która jest także funkcją odległości Δ , a więc i s . Badania nad zmianą temperatury powietrza w miarę wznoszenia się ponad powierzchnię ziemi doprowadziły do ciekawych i ważnych wniosków, jednakże dotyczą one tylko stosunkowo niewielkich wysokości, nie przekraczających kilku lub kilkunastu kilometrów. Na podstawie tych ograniczonych danych tworzyć trzeba hipotezy co do zależności pomiędzy T i s , których ważność sięgać ma aż do samych granic atmosfery. Hipotezy te mogą być różne i one to stanowią jedną z cech zasadniczych, któremi różnią się między sobą różne teorie refrakcji.

Najprostszą z takich hipotez, która znajduje się w rażącej sprzeczności nawet z najpowierzchowniejszą obserwacją, jest hipoteza, którą w swej teorii refrakcji przyjmuje Newton, mianowicie $T = T_0$. Hipoteza ta przyjmuje więc, że temperatura atmosfery jest wszędzie taka sama, jak w miejscu obserwacji, a więc $dT = 0$.

Oznaczmy

$$p_0 = g_0 \rho_0 l_0 \quad (ab)$$

i połóżmy we wzorze (aa) $T = T_0$, to wzór ten otrzyma postać następującą:

$$-\frac{r_0}{l_0} ds = \frac{d\rho}{\rho}.$$

Przez całkowanie otrzymujemy stąd

$$\log n \rho = -\frac{r_0}{l_0} s + C.$$

Biorąc pod uwagę, że dla $\rho = \rho_0$ jest $s = 0$, znajdujemy $C = \log n \rho_0$; a zatem poszukiwany związek między ρ i s według hipotezy Newtona ma postać

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{r_0}{l_0} s}.$$

Gylđén w swojej teorii refrakcji przyjmuje między T i s zależność, wyrażająca się przez wzór

$$\frac{1 + aT}{1 + aT_0} = (1 - \frac{1}{2} \beta s)^2;$$

Bessel zaś kładzie

$$\frac{1 + aT}{1 + aT_0} = e^{-\beta s}.$$

Bardziej skomplikowaną hipotezę przyjmuje Laplace, mianowicie

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{f}{m} u\right) e^{-\frac{u}{m}},$$

gdzie oznacza

$$u = s - \alpha \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right);$$

tu f i m są wielkościami stałymi, które mają być określone w ten sposób, aby wartości refrakcji, wypływające z teorii, zgadzały się z obserwowaniami.

Bardzo dogodną hipotezę zależności między temperaturą powietrza, a wysokością warstwy przyjmuje Ivory, mianowicie

$$\frac{1 + aT}{1 + aT_0} = 1 - f \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) = 1 - f\omega; \quad (89)$$

tu f jest wielkością stałą, której wartość należy wyznaczyć z obserwacji.

Jak łatwo zauważyć, hipoteza Newtona jest specjalnym przypadkiem hipotezy Ivory'ego, gdy w niej przyjąć $f=0$.

Radau w swojej teorii refrakcji również przyjmuje hipotezę Ivory'ego. Zajmijmy się wyszukaniem związku pomiędzy ω i s , który wypływa z tej hipotezy. Różniczkując równanie (89), znajdujemy

$$adT = -f(1 + aT_0)d\omega.$$

Tę wartość oraz wartość

$$1 + aT = (1 + aT_0)(1 - f\omega),$$

wypływającą z równania (89), podstawiamy w równaniu (aa); uwzględniając przytem wzór (ab), znajdujemy

$$-\frac{r_0}{l_0} \rho ds = \frac{1}{1 + aT_0} [(1 + aT_0)(1 - f\omega) d\rho - f(1 + aT_0) \rho d\omega]. \quad (ac)$$

Dalej jest według wzoru (p)

$$r = 1 - \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \rho = \rho_0(1 - \omega),$$

lub po zróżniczkowaniu

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\omega}{1 - \omega}.$$

Podstawiając tę wartość w równaniu (ac), otrzymamy

$$\frac{r_0}{l_0} ds = \left(\frac{1-f\omega}{1-\omega} + f \right) d\omega = \frac{1-f+2f(1-\omega)}{1-\omega} d\omega,$$

albo też

$$\frac{r_0}{l_0} ds = (1-f) \frac{d\omega}{1-\omega} + 2f d\omega, \quad (90)$$

a po scałkowaniu

$$\frac{r_0}{l_0} s = -(1-f) \log n(1-\omega) + 2f\omega. \quad (91)$$

Stała całkowania jest zerem, ponieważ dla $s=0$ jest też $\omega=0$.

Wzór (91) stanowi poszukiwany związek pomiędzy s i ω , lub pomiędzy ω i Δ . Gdy jeszcze wprowadzimy $s = u + \alpha\omega$, to otrzymamy niezbędny do znalezienia całek $\int_0^1 u^n d\omega$ i $\int_0^1 u^n \omega d\omega$ związek między u i ω , mianowicie

$$u = -\frac{l_0}{r_0} (1-f) \log n(1-\omega) + \left(2f \frac{l_0}{r_0} - \alpha \right) \omega. \quad (91')$$

Oznaczmy dla krótkości

$$\frac{l_0}{r_0} (1-f) = a_0, \quad (\text{ad})$$

$$2f \frac{l_0}{r_0} = a_0 k_0 + \alpha, \quad (\text{ae})$$

to poszukiwany związek między zmiennymi u i ω ostatecznie otrzymuje postać

$$\frac{u}{a_0} = -\log n(1-\omega) + k_0 \omega, \quad (92)$$

Stała l_0 , występująca we wzorach (ad) i (ae), która określona została przez równanie (ab), ma znaczenie fizyczne. Wyobraźmy sobie mianowicie w miejscu obserwacji, gdzie przyspieszenie jest g_0 , słup powietrza, którego gęstość jest ρ_0 , a wysokość χ . Ciśnienie, jakie ten słup powietrza wywiera, wynosi

$$p_0 = g_0 \rho_0 \chi;$$

gdy wzór powyższy porównamy ze wzorem (ab), wynika, że $l_0 = \chi$. To znaczy, że stała l_0 oznacza tę wysokość, którąby miała atmosfera, gdyby gęstość jej nie malała w miarę wznoszenia się nad powierzchnię ziemi, lecz była wszędzie taka, jak w miejscu obserwacji na powierzchni ziemi.

54. Obliczenie wartości całek $\int_0^1 u^n d\omega$ i $\int_0^1 u^n \omega d\omega$. Przyjmując, że u jest funkcją zmiennej ω , określoną przez wzór (92), możemy przystąpić do znalezienia potrzebnych nam całek. Oznaczmy jeszcze

$$-\log n(1 - \omega) = x, \quad (\text{af})$$

to jest

$$u = a_0(x + k_0 \omega), \quad (92')$$

a więc też

$$u^n = a_0^n \left[x^n + nk_0 \omega x^{n-1} + \binom{n}{2} k_0^2 \omega^2 x^{n-2} + \dots + k_0^n \omega^n \right].$$

Całki, któremi się zająć mamy, mają postać następującą:

$$\int_0^1 u^n d\omega = a_0^n \int_0^1 \left[x^n + nk_0 \omega x^{n-1} + \binom{n}{2} k_0^2 \omega^2 x^{n-2} + \dots + k_0^n \omega^n \right] d\omega,$$

$$\int_0^1 u^n \omega d\omega = a_0^n \int_0^1 \left[x^n + nk_0 \omega x^{n-1} + \binom{n}{2} k_0^2 \omega^2 x^{n-2} + \dots + k_0^n \omega^n \right] \omega d\omega.$$

Widzimy z tych wyrażeń, że całka $\int_0^1 u^n d\omega$ rozpada się na szereg wyrazów postaci ogólnej

$$H_p = a_0^n k_0^p \binom{n}{p} \int_0^1 \omega^p x^{n-p} d\omega, \quad (\text{ag})$$

całka zaś $\int_0^1 u^n \omega d\omega$ na szereg wyrazów postaci ogólnej

$$G_p = a_0^n k_0^p \binom{n}{p} \int_0^1 \omega^{p+1} x^{n-p} d\omega, \quad (\text{ah})$$

i jest

$$\int_0^1 u^n d\omega = \sum_{p=0}^n H_p, \quad (\text{ai})$$

$$\int_0^1 u^n \omega d\omega = \sum_{p=0}^n G_p. \quad (\text{aj})$$

Obliczenie całek $\int_0^1 u^n d\omega$ i $\int_0^1 u^n \omega d\omega$, jak widzimy, sprowadza się do znalezienia całek, które występują w wyrażeniach (ag) i (ah). Zajmijmy się temi całkami. Ze wzoru (af) wynika

$$\omega = 1 - e^{-x},$$

$$d\omega = e^{-x} dx,$$

a granice zmiennych ω i x , odpowiadające sobie, są następujące:

$$\omega = 0, \quad x = 0;$$

$$\omega = 1, \quad x = \infty.$$

Wprowadzając więc pod znakiem całkowania zamiast ω zmienną x , otrzymujemy

$$\int_0^1 \omega^p x^{n-p} d\omega = \int_0^\infty (1 - e^{-x})^p e^{-x} x^{n-p} dx;$$

$$\int_0^1 \omega^{p+1} x^{n-p} d\omega = \int_0^\infty (1 - e^{-x})^{p+1} e^{-x} x^{n-p} dx.$$

Wartość całek, stojących po prawej stronie powyższych równań, otrzymuje się, stosując wzór (29). Znajdujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega^p x^{n-p} d\omega &= (n-p)! \left\{ 1 - \frac{1}{2^{n-p+1}} \binom{p}{1} + \frac{1}{3^{n-p+1}} \binom{p}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \dots (-1)^p \frac{1}{(p+1)^{n-p+1}} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega^{p+1} x^{n-p} d\omega &= (n-p)! \left\{ 1 - \frac{1}{2^{n-p+1}} \binom{p+1}{1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3^{n-p+1}} \binom{p+1}{2} - \dots (-1)^{p+1} \frac{1}{(p+2)^{n-p+1}} \right\}. \end{aligned}$$

Oznaczmy ogólnie

$$\beta_n^{(p)} = 1 - \frac{1}{2^{n-p+1}} \binom{p}{1} + \frac{1}{3^{n-p+1}} \binom{p}{2} - \dots (-1)^p \frac{1}{(p+1)^{n-p+1}}, \quad (93)$$

to możemy pisać

$$\int_0^1 \omega^p x^{n-p} d\omega = (n-p)! \beta_n^{(p)},$$

$$\int_0^1 \omega^{p+1} x^{n-p} d\omega = (n-p)! \beta_{n+1}^{(p+1)};$$

ORAZ

$$H_p = a_0^n n! \frac{k_0^p}{p!} \beta_n^{(p)},$$

$$G_p = a_0^n n! \frac{k_0^p}{p!} \beta_{n+1}^{(p+1)}.$$
(94)

Podstawiając te wartości we wzorach (ai) i (aj), otrzymujemy ostatecznie:

$$\int_0^1 w^n dw = a_0^n n! \left(\beta_n^{(0)} + \frac{k_0}{1!} \beta_n^{(1)} + \frac{k_0^2}{2!} \beta_n^{(2)} + \dots + \frac{k_0^n}{n!} \beta_n^{(n)} \right);$$

$$\int_0^1 w^n \omega dw = a_0^n n! \left(\beta_{n+1}^{(1)} + \frac{k_0}{1!} \beta_{n+1}^{(2)} + \frac{k_0^2}{2!} \beta_{n+1}^{(3)} + \dots + \frac{k_0^n}{n!} \beta_{n+1}^{(n+1)} \right).$$
(95)

Załączamy tu tabelkę wartości stałych $\beta_s^{(r)}$; należącą do danych wartości r i s wartość $\beta_s^{(r)}$ znajdujemy na przecięciu kolumny r -tej i wiersza s -tego.

$\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6
1	1	$\frac{1}{2}$					
2	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$				
3	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{4}$			
4	1	$\frac{15}{16}$	$\frac{85}{108}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{1}{5}$		
5	1	$\frac{31}{32}$	$\frac{575}{648}$	$\frac{115}{576}$	$\frac{137}{300}$	$\frac{1}{6}$	
6	1	$\frac{63}{64}$	$\frac{3661}{3888}$	$\frac{5845}{6912}$	$\frac{12019}{18000}$	$\frac{49}{120}$	$\frac{1}{7}$

Oznaczmy jeszcze dla krótkości

$$\alpha_0^n \left(\beta_n^{(0)} + \frac{k_0}{1!} \beta_n^{(1)} + \frac{k_0^2}{2!} \beta_n^{(2)} + \dots + \frac{k_0^n}{n!} \beta_n^{(n)} \right) = U_n \quad (96)$$

$$\alpha_0^n \left(\beta_{n+1}^{(1)} + \frac{k_0}{1!} \beta_{n+1}^{(2)} + \frac{k_0^2}{2!} \beta_{n+1}^{(3)} + \dots + \frac{k_0^n}{n!} \beta_{n+1}^{(n)} \right) = W_n,$$

to wartości poszukiwanych całek są następujące:

$$\int_0^1 u^n d\omega = n! U_n; \quad (97)$$

$$\int_0^1 u^n \omega d\omega = n! W_n.$$

55. Obliczenie współczynników A_n szeregu (88). Ponieważ (ust. 52) możemy przyjąć z dostateczną dokładnością

$$(u - \alpha\omega)^2 = u^2 - 2\alpha u\omega,$$

więc wzór (t) otrzymuje postać

$$X = u - \frac{u^2}{2} + \alpha u\omega = u \left[\left(1 - \frac{u}{2} \right) + \alpha\omega \right], \quad (ak)$$

a przy zachowaniu tego samego stopnia dokładności

$$X^n = u^n \left(1 - \frac{u}{2} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{u}{2} + n\alpha\omega \right). \quad (al)$$

Podstawiając tę wartość w ostatnim ze wzorów (v), otrzymamy

$$A_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{n!} \alpha'' \int_0^1 (1 - u + \alpha\omega) u^n \left(1 - \frac{u}{2} \right)^{n-1} \times \\ \times \left(1 - \frac{u}{2} + n\alpha\omega \right) d\omega. \quad (a\lambda)$$

Jak widzimy, pod znakiem całkowania występują tylko potęgi u od n -ej do $(2n+1)$ -ej; obliczenie więc całki wzoru (a1) sprowadza się do obliczenia całek postaci $\int_0^1 u^\kappa d\omega$ i $\int_0^1 u^\kappa \omega d\omega$, gdzie κ jest liczbą całkowitą przyjmującą wartości począwszy od n do $2n+1$. Do obliczenia tych całek służą wzory (95). Jednakże można wzór (a1) jeszcze bardziej uprościć, zachowując pożądaną stopień dokładności.

Jak zobaczymy później, a_0 jest małym ułamkiem. Wynika stąd, że ze wszystkich całek postaci $\int_0^1 u^\kappa d\omega$ i $\int_0^1 u^\kappa \omega d\omega$, na które rozkłada się całka wzoru (a1), największą wartość mają całki te dla $\kappa = n$. A ponieważ także k_0 jest ułamkiem dodatnim, więc we wzorach (96), określających U_n i W_n , największą wartość mają wyrazy pierwsze tych wzorów; jest więc, ponieważ $\beta_n^{(0)} = 1$,

$$U_n > a_0^n, \quad W_n > a_0^n \beta_{n+1}^{(1)};$$

ze względu zaś na wzory (97) jest także

$$\int_0^1 u^n d\omega > a_0^n n!, \quad \int_0^1 u^n \omega d\omega > a_0^n n! \beta_{n+1}^{(1)}. \quad (\text{am})$$

Niechaj będą λ i μ dwie liczby, zawarte pomiędzy n i $2n+1$. Pośród wyrazów, na które rozpada się ogólny wyraz refrakcji $A_n \tan^{2n+1} \varepsilon'$, ze względu na wartość czynnika A_n , określoną przez wzór (a1), znajdują się między innemi także wyrazy następujące:

$$L = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{n!} \alpha'' \int_0^2 u^\lambda d\omega \times \tan^{2n+1} \varepsilon'; \quad (\text{an})$$

$$M = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{n!} \alpha'' \int_0^1 u^\mu \omega d\omega \times \tan^{2n+1} \varepsilon'.$$

Według wzorów (an) jest oczywiście także

$$\int_0^1 u^\lambda dw > a_0^\lambda \lambda!, \quad \int_0^1 u^\mu \omega dw > a_0^\mu \mu! \beta_{\mu+1}^{(1)}.$$

Gdy więc całki wyrażeń (an) zastąpimy przez ich pierwsze wyrazy i oznaczymy

$$L' = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{n!} \alpha'' a_0^\lambda \lambda! \operatorname{tang}^{2n+1} \varepsilon', \quad (\text{ao})$$

$$M' = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{n!} \alpha'' a_0^\mu \mu! \beta_{\mu+1}^{(1)} \operatorname{tang}^{2n+1} \varepsilon',$$

to oczywiście jest $L > L'$ i $M > M'$.

Gdy w obliczeniu refrakcji mamy osiągnąć dokładność do 0''.1, to uwzględnione muszą być wszystkie te wyrazy, wzorów (an), których wartość wynosi co najmniej 0''.1. Łatwo zbadać, jakie są największe wartości λ i μ , przy których jest jeszcze $L' > 0''.1$ i $M' > 0''.1$, czyli ze względu na wzory (ao), przy jakich λ i μ jest

$$1.3.5 \dots (2n-1) a_0^\lambda \lambda! \operatorname{tang}^{2n+1} \varepsilon' > n! \frac{0''.1}{\alpha''},$$

$$1.3.5 \dots (2n-1) a_0^\mu \mu! \beta_{\mu+1}^{(1)} \operatorname{tang}^{2n+1} \varepsilon' > n! \frac{0''.1}{\alpha''}.$$

Pomnożmy obie strony tych nierówności, celem uniknięcia przy obliczeniach zbyt małych liczb, przez 10^{10} , to dla wyznaczenia λ i μ otrzymamy następujące nierówności

$$10^{10} a_0^\lambda \lambda! > \frac{10^{10} n! 0''.1}{1.3.5 \dots (2n-1) \operatorname{tang}^{2n+1} \varepsilon' \cdot \alpha''} \quad (\text{ap})$$

$$10^{10} a_0^\mu \mu! \beta_{\mu+1}^{(1)} > \frac{10^{10} n! 0''.1}{1.3.5 \dots (2n-1) \operatorname{tang}^{2n+1} \varepsilon' \cdot \alpha''}$$

Gdy dla pewnych wartości λ i μ warunki powyższe są jeszcze spełnione, a dla wartości o jedność większych już nie są spełnione, to nie są one też spełnione dla jakichkolwiek innych większych wartości λ i μ . Te największe wartości λ i μ , które wskazują, jakie potęgi n pod znakiem całkowania wzoru (aI) uwzględnione być muszą, otrzymamy, kładąc we wzorach (aP) na n , λ i μ kolejno wartości 1, 2, 3 i t. d. i porównując ze sobą wartość obu stron nierówności.

Aby móc rachunki te wykonać, muszą być znane wartości a_0 , α'' i $\tan z'$. Co się tyczy z' , to ze względu na uproszczenia poprzednie przyjmujemy $z' = 85^\circ$ jako tę największą odległość zenitalną, przy której wartość refrakcji ma jeszcze być dokładna do $0''.1$. Dokładne wartości a_0 i α'' będą podane później, dla tego rachunku przyjmujemy następujące wartości przybliżone:

$$a_0 = 0.001, \quad \alpha'' = 60''.$$

Oznaczmy jeszcze dla krótkości

$$\begin{aligned} 10^{10} a_0^\lambda \lambda! &= l \\ 10^{10} a_0^\mu \mu! \beta_{\mu+1}^{(1)} &= m \\ \frac{10^{10} n! 0''.1}{1.3.5 \dots (2n-1) \tan^{2n+1} z' \cdot \alpha''} &= k(z'), \end{aligned}$$

to otrzymamy dla szeregu wartości $\lambda = \mu = n$ odpowiadające im wartości $\log l$, $\log m$ i $\log [k(85^\circ)]$, zawarte w następującej tabelce:

$n = \lambda = \mu$	$\log [k(85^\circ)]$	$\log l$	$\log m$
1	4.0477	7.0000	6.8751
2	1.7555	4.3010	4.2430
3	1.4176	1.7782	1.7502
4	3.0584	2.3802	2.3664
5	6.6871	4.0792	4.0723
6		6.8573	6.8539

Z tej tabelki widzimy, że przy danem n wartości l i m są większe od $k(85^0)$ tylko wtedy, gdy $\lambda = \mu = n$, lub gdy $\lambda = \mu = n + 1$; gdy $\lambda > n + 1$ jest $l > k(85^0)$ i również gdy $\mu > n + 1$ jest $m > k(85^0)$. To znaczy, że pod znakiem całkowania we wzorze (a1) można opuścić bez wpływu na dokładność wszystkie potęgi u z wyjątkiem potęgi n -tej i $(n + 1)$ -ej.

Wobec powyższego wyniku można ze względu na to, że pod znakiem całkowania we wzorze (a1) jednym czynnikiem jest u^n , we wszystkich innych czynnikach opuścić wszystkie potęgi u z wyjątkiem pierwszej. Gdy jeszcze w tym iloczynie opuścimy, jak poprzednio, wszystkie wyrazy zawierające α^2 , to po łatwej redukcji z dostatecznem przybliżeniem otrzymamy:

$$(1 - u + \alpha\omega) \left(1 - \frac{u}{2} + n\alpha\omega\right) \left(1 - \frac{u}{2}\right)^{n-1} = 1 + (n+1)\alpha\omega - \\ - u(1 + n\alpha\omega) \left(1 + \frac{n}{2}\right).$$

A zatem na A_n po uwzględnieniu oznaczeń wzorów (96) uzyskuje się następujący dostatecznie przybliżony wzór:

$$A_n = 1.3.5 \dots (2n-1) \cdot \alpha'' \left[U_n + \alpha(n+1) W_n - \right. \\ \left. - \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot U_{n+1} - \frac{n(n+1)(n+2)}{2} \alpha \cdot W_{n+1} \right].$$

Jednakże i dalsze jeszcze uproszczenie jest możliwe. Przede wszystkim można opuścić wyraz ostatni, który jest rzędu $\alpha_0^{n+1} \alpha$, a więc bardzo mały. Wyrazowi z W_n , który posiada mały czynnik α , można również nadać postać uproszczoną. Gdy mianowicie pomnożymy U_n przez $\beta_{n+1}^{(1)}$ i uwzględnimy, że $\beta_n^{(0)} = 1$ to pierwszy ze wzorów (96) daje:

$$U_n \beta_{n+1}^{(1)} = \alpha_0^n \left(\beta_{n+1}^{(1)} + \frac{k_0}{1!} \beta_n^{(1)} \beta_{n+1}^{(1)} + \dots \right).$$

Porównując ten wzór z drugim ze wzorów (96), widzimy, że $U_n \beta_{n+1}^{(1)}$ różni się od W_n tylko wyrazami, w których czynnikami są potęgi ułamka k_0 . Gdy więc przyjmiemy

$$W_n = U_n \beta_{n+1}^{(1)}, \quad (\text{aq})$$

to w obliczeniu A_n popełnimy tylko błąd rzędu $\alpha_0^n \alpha k_0$, który jest znikomy.

Ostatecznie więc do obliczenia A_n z pożądanym stopniem dokładności może być użyty wzór następujący:

$$A_n = 1.3.5 \dots (2n-1) \cdot \alpha'' \left\{ \left[1 + \alpha(n+1) \beta_{n+1}^{(1)} \right] U_n - \frac{1}{2}(n+1)(n+2) U_{n+1} \right\}. \quad (98)$$

Wzór powyższy ważny jest tylko, gdy $n > 0$. Wzór na A_0 wypływa bezpośrednio z pierwszego ze wzorów (v), mianowicie

$$A_0 = \alpha'' \left\{ \int_0^1 d\omega - \int_0^1 u d\omega + \alpha \int_0^1 \omega d\omega \right\} = \alpha'' (1 - U_1 + \frac{1}{2} \alpha).$$

Wartość na U_1 wypływa z pierwszego wzoru (96), mianowicie

$$U_1 = a_0 (1 + \frac{1}{2} k_0).$$

Podstawiając tu jeszcze zamiast $a_0 k_0$ wartość według wzoru (ae), otrzymamy ostatecznie

$$A_0 = \alpha'' \left(1 - \frac{l_0}{r_0} + \alpha \right). \quad (99)$$

Wzór (99) wskazuje, że pierwszy wyraz wyrażenia refrakcji, który jest co do wartości największy, niezależny jest od stałej f , a więc też od prawa, według którego zmienia się temperatura powietrza w miarę wznoszenia się w górę. Gdy zatem drugi wyraz wyrażenia refrakcji, mianowicie $A_1 \tan^3 \varepsilon'$ jest mniejszy, niż $0''.1$, t. j. gdy z dostateczną dokładnością jest wprost $R = A_0 \tan \varepsilon'$, to wybór dowolny prawa zmiany temperatury pozostaje bez wpływu na wartość refrakcji. Oczywiście

przy pewnej dostatecznie wielkiej wartości z' wyraz pierwszy staje się niewystarczającym.

Spółczynniki A_x zależne są od całego szeregu wielkości, charakteryzujących stan atmosfery ziemskiej. Aby zatem można było podać wartości liczbowe tych współczynników, należy wprowadzić do wzorów ogólnych wartości liczbowe stałych r_0 , l_0 , g_0 , f , α i t. d. Sprawą tą zajmiemy się w ustępie 58.

56. Refrakcja w bliskości horyzontu. Rozwinięcie wyrażenia refrakcji staje się rozbieżnem, gdy z' zbliża się do 90° . W tych więc przypadkach, gdy wzór (88) staje się niedogodnym z powodu zbyt wielkiej liczby wyrazów, które uwzględnione być muszą, lub gdy staje się rozbieżnym, należy uciec się do innych sposobów obliczania. Sposoby te, co z góry można przewidzieć, są bardziej skomplikowane; co gorsza, wyniki, dotąd uzyskane w tej dziedzinie, nie posiadają jeszcze pożądanego stopnia dokładności. Dokładność uzyskana jednakże może być uważana za dostateczną, gdy chodzi o potrzeby praktyki astronomicznej, a to dzięki znacznie mniejszej dokładności pomiarów, dokonywanych w bliskości horyzontu, w porównaniu z pomiarami w większych wysokościach.

Przyczyną wspomnianej mniejszej dokładności jest przede wszystkim zmienna wartość samej refrakcji, zależna od szybkich zmian stanu atmosfery, które pociągają za sobą ruchomość obrazu gwiazdy, utrudniającą w wysokim stopniu dokładne jej nastawienie. Drugiem ważnem źródłem błędów obserwacji jest, jak o tem już była mowa w ust. 51, dyspersja w połączeniu z absorbcją atmosferyczną.

Gdy jako pożądaną dokładność teorii refrakcji przyjęliśmy taką, aby błędy teorii nie przekraczały $0''.1$, uczyniliśmy to w tem założeniu, że obserwacja osiąga przynajmniej taką samą dokładność. W istocie zaś dokładność obserwacji maleje wraz z wysokością z powodów wyżej wymienionych. Tak więc w odległościach zenitalnych od 80° do 85° błędy pomiaru wysokości, wynoszące znaczne ułamki sekundy, a nawet przekraczające sekundę, przy pomiarach najdokładniejszych są rzeczą normalną, a w jeszcze większych odległościach zenitalnych mogą one wynosić nawet znaczny ułamek minuty.

Gdy więc obserwacje w bliskości horyzontu obarczone są tak wielkimi błędami, to niema też potrzeby uwzględniać wpływu refrakcji z większą dokładnością, aniżeli wynoszą prawdopodobne błędy spostrzeżenia. Z drugiej strony byłoby to też niemożliwe, gdyż wartość teoretyczna refrakcji nie może być inaczej sprawdzona, jak tylko na drodze obserwacji; nie posiadamy więc żadnego kryterjum do twierdzenia, iż którakolwiek z wartości teoretycznych jest dokładniejsza od innej, jeżeli różnice pomiędzy nimi nie przekraczają wartości prawdopodobnych błędów spostrzeżenia.

Ale nie ulega wątpliwości także i to, że i błędy teorii wzrastają w miarę zbliżania się do horyzontu i to przynajmniej tak szybko, jak błędy spostrzeżenia. Choćby tylko niedokładna znajomość budowy atmosfery musi się tem silniej uwydatnić w błędach teoretycznych obliczeń, im większą jest sama wartość refrakcji. Jednem słowem, mamy podstawę przyjmować, że błędy teorii i błędy obserwacji wzrastają jednocześnie, skąd wynika, że nie jesteśmy w stanie rozstrzygnąć, w jakim stopniu różnice między obliczeniem a obserwacją w bliskości horyzontu zależą od błędów teorii, a w jakim od błędów obserwacji.

Po tych uwagach ogólnych zajmijmy się zagadnieniem nadania wyrażeniu refrakcji takiej postaci, któraby mogła mieć zastosowanie przy dowolnie wielkiej wartości z' .

Wzór (87) można napisać w postaci

$$\begin{aligned} R &= \alpha'' \operatorname{tang} z' \int_0^1 \frac{(1-u+\alpha\omega) d\omega}{\sqrt{1+2\left[u-\frac{(u-\alpha\omega)^2}{2}\right]} \operatorname{tang}^2 z'} = \\ &= \alpha'' \int_0^1 \frac{(1-u+\alpha\omega) d\omega}{\sqrt{\cotg^2 z' + 2u - (u-\alpha\omega)^2}} \end{aligned}$$

i rozwinać według potęg wyrażenia $(u-\alpha\omega)^2$. Otrzymujemy:

$$R = \alpha'' \int_0^1 \frac{(1-u+\alpha\omega) d\omega}{\sqrt{\cotg^2 z' + 2u}} + \frac{1}{2} \alpha'' \int_0^1 \frac{(1-u+\alpha\omega)(u-\alpha\omega)^2 d\omega}{\sqrt{(\cotg^2 z' + 2u)^3}} + \dots \quad (100)$$

W rozwinięciu tem ograniczyliśmy się do dwóch pierwszych wyrazów, już bowiem drugi wyraz wynosi conajwyżej 1", a dalsze wyrazy są jeszcze znacznie mniejsze. Obliczenie R według wzoru (100) wymaga zatem tylko znalezienia wartości dwóch całek następujących:

$$C_1 = \alpha'' \int_0^1 \frac{(1-u+\alpha\omega) d\omega}{\sqrt{\cotg^2 \varepsilon' + 2u}}; \quad (\text{ar})$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \alpha'' \int_0^1 \frac{(1-u+\alpha\omega)(u-\alpha\omega)^2 d\omega}{\sqrt{(\cotg^2 \varepsilon' + 2u)^3}}. \quad (\text{as})$$

W celu znalezienia tych całek skorzystamy z następującego znanego twierdzenia z teorii całek określonych:

Jeżeli funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ są ciągłe w przedziale od a do b i θ jest dodatnim ułamkiem właściwym, to zachodzi związek

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f[a + \theta(b-a)] \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (\text{at})$$

Twierdzenie powyższe jest ważne ogólnie, a więc też w tym specjalnym przypadku, gdy $\varphi(x) = 1$. Wówczas wzór (at) otrzymuje postać

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f[a + \theta(b-a)],$$

a stąd wynika

$$f[a + \theta(b-a)] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Po podstawieniu tej ostatniej wartości we wzorze (at), otrzymuje się

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (\text{au})$$

Stosując powyższe twierdzenie do całek (ar) i (as), których granice są $a=0$, $b=1$, otrzymujemy:

$$C_1 = \alpha'' \int_0^1 (1-u+\alpha\omega) d\omega \int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\cotg^2 z' + 2u}};$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \alpha'' \int_0^1 (1-u+\alpha\omega) d\omega \int_0^1 \frac{(u-\alpha\omega)^2 d\omega}{\sqrt{(\cotg^2 z' + 2u)^3}}.$$

Oznaczmy jeszcze

$$\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\cotg^2 z' + 2u}} = I_1, \quad (\text{aw})$$

$$\int_0^1 \frac{(u-\alpha\omega)^2 d\omega}{\sqrt{(\cotg^2 z' + 2u)^3}} = I_2, \quad (\text{ax})$$

to, po uwzględnieniu pierwszego ze wzorów (v), znajdziemy na wartość refrakcji następujący wzór:

$$R = A_0 (I_1 + \frac{1}{2} I_2). \quad (101)$$

57. Obliczenie całek I_1 i I_2 . Obliczenie refrakcji według wzoru (101) sprowadza się do znalezienia wartości całek I_1 i I_2 , określonych przez wzory (aw) i (ax). Przyjmując, jak poprzednio, że pomiędzy ω i u zachodzi związek (91') i uwzględniając wzór (af), znajdujemy

$$\frac{r_0}{l_0} u = (1-f)x + \left(2f - \frac{r_0}{l_0} \alpha\right) (1-e^{-x}).$$

Gdy dalej przez λ oznaczmy dowolną stałą, której wartość później w sposób stosowny określimy, i na prawej

stronie powyższego równania dodamy i odejmiemy wyrażenie $\lambda x \left(2f - \frac{r_0}{l_0} \alpha \right)$, to znajdziemy

$$\frac{r_0}{l_0} u = \left[1 - f + \lambda \left(2f - \frac{r_0}{l_0} \alpha \right) \right] x + \left(2f - \frac{r_0}{l_0} \alpha \right) (1 - e^{-x} - \lambda x).$$

Oznaczmy dla krótkości

$$\frac{r_0}{l_0} \cdot \frac{1}{1 - f + \lambda \left(2f - \frac{r_0}{l_0} \alpha \right)} = 2\gamma^2, \quad (102)$$

$$\frac{2f - \frac{r_0}{l_0} \alpha}{1 - f + \lambda \left(2f - \frac{r_0}{l_0} \alpha \right)} = k, \quad (103)$$

to jest

$$2\gamma^2 u = x - k(\lambda x + e^{-x} - 1). \quad (104)$$

Wzory powyższe upraszczają się znacznie, gdy przyjmiemy $\lambda = \frac{1}{2}$. Wtedy jest:

$$k = \frac{2f - \frac{r_0}{l_0} \alpha}{1 - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{r_0}{l_0}} = \frac{4f - 2\alpha \frac{r_0}{l_0}}{2 - \alpha \cdot \frac{r_0}{l_0}}, \quad (103')$$

$$\gamma^2 = \frac{r_0}{l_0} \cdot \frac{1}{2 - \alpha \cdot \frac{r_0}{l_0}}, \quad (102')$$

$$2\gamma^2 u = x - k\left(\frac{1}{2}x + e^{-x} - 1\right). \quad (104')$$

Oznaczmy dalej

$$k\left(\frac{1}{2}x + e^{-x} - 1\right) = \psi(x), \quad (ay)$$

$$x - \psi(x) = w, \quad (az)$$

to jest

$$u = \frac{w}{2\gamma^2}. \quad (\text{ba})$$

Z temi oznaczeniami całki I_1 i I_2 otrzymują postać następującą:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{\cotg^2 z' + \frac{w}{\gamma^2}}} = \gamma \int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{\gamma^2 \cotg^2 z' + w}}, \quad (\text{bb})$$

$$I_2 = \gamma^3 \int_0^\infty \frac{\left[\frac{w}{2\gamma^2} - \alpha(1 - e^{-x}) \right]^2 e^{-x} dx}{\sqrt{(\gamma^2 \cotg^2 z' + w)^3}}; \quad (\text{bc})$$

albo, gdy jeszcze położymy

$$\gamma \cotg z' = Z, \quad (\text{bd})$$

jest także

$$I_1 = \gamma \int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{Z^2 + w}}, \quad (\text{be})$$

$$I_2 = \frac{1}{4\gamma} \int_0^\infty \frac{[w - 2\alpha\gamma^2(1 - e^{-x})]^2 e^{-x} dx}{\sqrt{(Z^2 + w)^3}}. \quad (\text{bf})$$

Wzory (102') — (104') i (bd) wskazują, że wielkości γ i Z są niezależne od f .

W celu znalezienia całek (be) i (bf) musimy funkcje zmiennej x , występujące pod znakiem całkowania, mianowicie $e^{-x} dx$, $e^{-2x} dx$ i $e^{-3x} dx$, wyrazić zapomocą zmiennej w . Można by to osiągnąć, korzystając ze związków (ay) i (az), ale krócej dochodzimy do celu, stosując następujące znane twierdzenie Lagrange'a:

Jeżeli między zmiennymi x i w zachodzi związek taki, że

$x - \psi(x) = w$, a przez $f(x)$ oznaczmy jakąś inną ciągłą funkcję zmiennej x , to tę funkcję można wyrazić w sposób następujący:

$$f(x) = f(w) + \psi(x) f'(w) + \frac{1}{2!} \frac{d}{dw} \{[\psi(w)]^2 \cdot f'(w)\} + \\ + \frac{1}{3!} \frac{d^2}{dw^2} \{[\psi(w)]^3 f'(w)\} + \dots,$$

albo też

$$f(x) = f(w) + f'(w) \psi(w) [1 + \psi(w)] + \frac{1}{2} f''(w) [\psi(w)]^2 + \dots,$$

skąd przez zróżniczkowanie wypływa:

$$f'(x) \frac{dx}{dw} = f'(w) \{1 + \psi'(w) [1 + \psi(w)] + \psi(w) \psi''(w)\} + \\ + f''(w) \psi(w) [1 + 2\psi'(w)] + \frac{1}{2} f'''(w) [\psi(w)]^2 + \dots \quad (\text{bg})$$

Gdy zastosujemy twierdzenie powyższe do naszego zadania, to należy przyjąć ogólnie

$$f(x) = e^{-nx}$$

i zgodnie z równaniem (ay),

$$\psi(x) = k(\frac{1}{2}x + e^{-x} - 1).$$

Jest w tym przypadku

$$\begin{array}{ll} f'(x) = -n e^{-nx}, & \psi(w) = k(\frac{1}{2}w + e^{-w} - 1), \\ f'(w) = -n e^{-nw}, & \psi'(w) = k(\frac{1}{2} - e^{-w}), \\ f''(w) = +n^2 e^{-nw}, & \psi''(w) = k e^{-w}. \\ f'''(w) = -n^3 e^{-nw}, & \\ & \end{array}$$

Podstawiając te wartości we wzorze (bg), znajdujemy

$$e^{-nx} \frac{dx}{dw} = L_n e^{-nw} + M_n w e^{-nw} + N_n e^{-(n+1)w} + P_n w e^{-(n+1)w} + \\ + Q_n e^{-(n+2)w} + R_n w^2 e^{-nw} + \dots \quad (\text{bh})$$

Spółczynniki tego wzoru, jak łatwo sprawdzić, mają wartości następujące:

$$\begin{aligned}
 L_n &= 1 + \frac{1}{2} k (1 + \frac{1}{2} k) + n k (1 + k) + \frac{1}{2} n^2 k^2 + \dots \\
 M_n &= -\frac{1}{2} n k (1 + k + n k) + \dots \\
 N_n &= -k [(1 + 2k) + n (1 + 3k + n k)] + \dots \\
 P_n &= \frac{1}{2} k^2 [1 + n (2 + n)] + \dots \\
 Q_n &= \frac{1}{2} k^2 [4 + n (4 + n)] + \dots \\
 R_n &= \frac{1}{8} k^2 n^2 + \dots \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{bi}$$

Ogólna postać całek, które występują we wzorach (be) i (bf), jest

$$K = \int_0^{\infty} \frac{w^r e^{-n x} dx}{(Z^2 + w)^p \sqrt{Z^2 + w}}.$$

Gdy na miejsce $e^{-n x} dx$ w tym ostatnim wzorze podstawimy wartości według wzoru (bh), to rozbijemy całkę K na sumę całek postaci ogólnej

$$A_{m,p}^{(n)} = \int_0^{\infty} \frac{w^m e^{-n w} dw}{(Z^2 + w)^p \sqrt{Z^2 + w}} \tag{bj}$$

i, jak wskazuje wzór (bh), wystarczy uwzględnienie z całek $A_{m,p}^{(n)}$ tylko tych, dla których jest conajwyżej $m = r + 2$.

Całkami typu (bj) zajmowaliśmy się w ustępie 13; do ich obliczenia służą wzory (33) do (38).

Zajmijmy się najprzód całką I_1 . Całka $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{Z^2 + w}}$ jest specjalnym przypadkiem całki K dla $n=1$, $p=0$, $r=0$. Według wzoru (bh) jest

$$\begin{aligned}
 e^{-x} dx &= (L_1 e^{-w} + M_1 w e^{-w} + N_1 e^{-2w} + P_1 w e^{-2w} + Q_1 e^{-3w} + \\
 &\quad + R_1 w^2 e^{-w} + \dots) dw,
 \end{aligned}$$

a zatem

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{Z^2 + w}} = L_1 A_{0,0}^{(1)} + M_1 A_{1,0}^{(1)} + N_1 A_{0,0}^{(2)} + P_1 A_{1,0}^{(2)} + Q_1 A_{0,0}^{(3)} + \\ + R_1 A_{2,0}^{(1)} + \dots \quad (\text{bk})$$

Wartość współczynników tego wzoru otrzymuje się ze wzorów (bi) dla $n=1$, a wartości całek A są następujące. Przede wszystkim według wzoru (35) jest

$$A_{0,0}^{(n)} = \frac{2}{\sqrt{n}} e^{Z^2 n} e^{-Z^2 n} \psi(Z\sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n}} \psi(Z\sqrt{n}),$$

gdzie oznacza (ust. 13)

$$\psi(\alpha) = e^{\alpha^2} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Oznaczmy jeszcze

$$\sqrt{n} \psi(Z\sqrt{n}) = \psi_n, \quad (105)$$

to jest

$$A_{0,0}^{(n)} = \frac{2}{n} \psi_n. \quad (\text{bl})$$

Dalej jest według wzoru (36)

$$n A_{1,0}^{(n)} = Z + \left(\frac{1}{2} - n Z^2\right) A_{0,0}^{(n)} = Z + \left(\frac{1}{n} - 2 Z^2\right) \psi_n;$$

a według wzoru (33)

$$n A_{2,0}^{(n)} = \left(\frac{3}{2} - n Z^2\right) A_{1,0}^{(n)} + Z^2 A_{0,0}^{(n)},$$

albo ze względu na wzór poprzedni:

$$n^2 A_{2,0}^{(n)} = \left(\frac{3}{2} - n Z^2\right) \left[Z + \left(\frac{1}{n} - 2 Z^2\right) \psi_n\right] + 2 Z^2 \psi_n.$$

Jest zatem

$$\begin{aligned}
 A_{0,0}^{(1)} &= 2\psi_1, \\
 A_{1,0}^{(1)} &= Z + (1 - 2Z^2)\psi_1, \\
 A_{0,0}^{(2)} &= \psi_2, \\
 A_{1,0}^{(2)} &= \frac{1}{2}Z + (\frac{1}{4} - Z^2)\psi_2, \\
 A_{0,0}^{(3)} &= \frac{2}{3}\psi_3, \\
 A_{2,0}^{(1)} &= Z(\frac{3}{2} - Z^2) + (\frac{3}{2} - 2Z^2 + 2Z^4)\psi_1,
 \end{aligned} \tag{bl}$$

gdzie zgodnie ze wzorem (105) oznacza:

$$\psi_1 = \psi(Z), \quad \psi_2 = \sqrt{2} \psi(Z\sqrt{2}), \quad \psi_3 = \sqrt{2} \psi(Z\sqrt{3}). \tag{bm}$$

Powyższe wartości podstawiamy we wzorze (bk) i otrzymujemy, mnożąc przez γ :

$$I_1 = \gamma(F_1 + G_1\psi_1 + H_1\psi_2 + J_1\psi_3 + \dots). \tag{bn}$$

Jak łatwo sprawdzić, współczynniki mają tu postać następującą:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= [M_1 + \frac{1}{2}P_1 + (\frac{3}{2} - Z^2)R_1]Z, \\
 G_1 &= (2I_1 + M_1 + \frac{3}{2}R_1) - 2(R_1 + M_1)Z^2 + 2R_1Z^4, \\
 H_1 &= N_1 + \frac{1}{4}P_1 - P_1Z^2, \\
 J_1 &= \frac{2}{3}Q_1, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{bo}$$

gdzie według wzorów (bi) jest

$$\begin{aligned}
 L_1 &= 1 + \frac{3}{2}k + \frac{7}{4}k^2 + \dots, \\
 M_1 &= -\frac{1}{2}k - k^2 + \dots, \\
 N_1 &= -2k - 6k^2 + \dots, \\
 P_1 &= 2k^2 + \dots, \\
 Q_1 &= \frac{9}{2}k^2 + \dots, \\
 R_1 &= \frac{1}{8}k^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{bp}$$

Gdy wyrazy wzoru (bn) uporządkujemy według potęg k , to jest też

$$I_1 = \gamma (K_0^{(1)} + K_1^{(1)} k + K_2^{(1)} k^2 + \dots), \quad (106)$$

a współczynniki tego wzoru mają wartości następujące:

$$\begin{aligned} K_0^{(1)} &= 2 \psi_1, \\ K_1^{(1)} &= -\frac{1}{2} Z + \left(\frac{5}{2} + Z^2\right) \psi_1 - 2 \psi_2, \\ K_2^{(1)} &= \frac{3}{16} Z - \frac{1}{8} Z^3 + \left(\frac{43}{16} + \frac{7}{4} Z^2 + \frac{1}{4} Z^4\right) \psi_1 - \left(\frac{11}{2} + 2 Z^2\right) \psi_2 + 3 \psi_3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (107)$$

Obliczenie wyrazu I_1 odbywa się zatem w sposób następujący. Gdy znane są wartości stałych α i f , oblicza się przede wszystkim k i γ według wzorów (102') i (103'), a następnie dla danego z' według wzoru (bd) oblicza się Z . Gdy Z jest znane, znajdujemy z pomocą tablic (p. str. 52) wartości potrzebne funkcji ψ , mianowicie $\psi(Z)$, $\psi(Z\sqrt{2})$, $\psi(Z\sqrt{3})$, i obliczamy wartości ψ_1 , ψ_2 i ψ_3 według wzoru (105). W dalszym ciągu stosuje się albo wzory (bo) i (bn), albo też wzory (106) i (107); dla kontroli zaleca się wykonanie rachunku z pomocą jednych i drugich wzorów.

Ponieważ we wzorze (106) współczynniki $K_x^{(1)}$ są niezależne od k , a więc i od stałej f , więc wzór ten dogodny jest szczególnie wtedy, gdy w celu pogodzenia rachunku z obserwacją wyznaczyć trzeba stosowną wartość na f . Skoro współczynniki $K_x^{(1)}$ zostały obliczone, to wraz z f ulega zmianie tylko wartość k , którą można uważać za niewiadomą.

Zajmijmy się teraz obliczeniem wartości I_2 , określonej przez wzór (bf). Licznik wyrażenia pod znakiem całkowania można przedstawić tak:

$$[w - 2\alpha\gamma^2(1 - e^{-x})]^2 e^{-x} dx = (4\alpha^2\gamma^4 - 4\alpha\gamma^2 w + w^2) e^{-x} dx + \\ + 4\alpha\gamma^2(w - 2\alpha\gamma^2) e^{-2x} dx + 4\alpha^2\gamma^4 e^{-3x} dx;$$

albo, gdy opuścimy małe wyrazy, zawierające czynnik α^2 , z dostateczną dokładnością przyjąć można

$$[w - 2\alpha\gamma^2(1 - e^{-x})]^2 e^{-x} dx = (-4\alpha\gamma^2 w + w^2) e^{-x} dx + \\ + 4\alpha\gamma^2 w e^{-2x} dx. \quad (\text{bq})$$

Stosując wzór (bh), znajdujemy:

$$e^{-x} dx = (I_1 e^{-w} + M_1 w e^{-w} + N_1 e^{-2w} + P_1 w e^{-2w} + \\ + Q_1 e^{-3w} + R_1 w^2 e^{-w} + \dots) dw,$$

$$e^{-2x} dx = (I_2 e^{-2w} + M_2 w e^{-2w} + N_2 e^{-3w} + P_2 w e^{-3w} + \\ + Q_2 e^{-4w} + R_2 w^2 e^{-2w} + \dots) dw.$$

Gdy podstawimy powyższe wartości we wzorze (bq) i uwzględnimy wzór (bj), to znajdujemy:

$$I_2 = -\alpha \gamma (L_1 A_{1,1}^{(1)} + M_1 A_{2,1}^{(1)} + N_1 A_{1,1}^{(2)} + P_1 A_{2,1}^{(2)} + Q_1 A_{1,1}^{(3)} + \\ + R_1 A_{3,1}^{(1)} + \dots) + \\ + \frac{1}{4\gamma} (L_1 A_{2,1}^{(1)} + M_1 A_{3,1}^{(1)} + N_1 A_{2,1}^{(2)} + P_1 A_{3,1}^{(2)} + Q_1 A_{2,1}^{(3)} + \\ + R_1 A_{4,1}^{(1)} + \dots) + \\ + \alpha \gamma (L_2 A_{1,1}^{(2)} + M_2 A_{2,1}^{(2)} + N_2 A_{1,1}^{(3)} + P_2 A_{2,1}^{(3)} + Q_2 A_{1,1}^{(4)} + \\ + R_2 A_{3,1}^{(2)} + \dots). \quad (\text{br})$$

Liczba wyrazów, które należy uwzględnić we wzorze (106) zależy od dokładności, jaką w rachunku pragniemy osiągnąć. Dokładność do 1" jest tu zupełnie wystarczająca. W wyrażeniu refrakcji według wzoru (101) wyrazy z k^n mają wartość rzędu $A_0 \gamma k^n = \varepsilon_n$. Jak zobaczymy, jest w przybliżeniu $k = 0.2$, $\gamma = 21$; a że $A_0 = 60''.09$ (p. niżej ust. 59), więc $\varepsilon_4 = 2''$, $\varepsilon_5 = 0''.4$. Możemy więc uważać k^5 za najwyższą potęgę, jaką jeszcze należałoby uwzględnić.

Oczywiście nie mamy potrzeby obliczać I_2 z większą dokładnością, niż I_1 . Ponieważ we wzorze (br) wyrazy na prawej stronie są pomnożone przez $\alpha \gamma$ lub $\frac{1}{4\gamma}$, więc w wyrażeniu refrakcji (101) współczynniki wyrazów z k^0 w wyrażeniu I_2 są rzędu $\frac{1}{2} A_0 \alpha \gamma = 0''.01$ i $\frac{A_0}{4\gamma} = 0''.3$. Gdy więc pomijamy we wzorze (106) wyrazy z k^5 , możemy I_2 pominąć w całości i przyjąć wprost

$$R = A_0 I_1. \quad (108)$$

58. Refrakcja średnia. Definicja stałej α'' i jej wartość liczbowa. Chcąc na podstawie wzorów, wyprowadzonych w poprzednich ustępach, obliczyć wartość refrakcji dla danej odległości zenitalnej z' , trzeba znać wartości stałych, które w tych wzorach występują. Wartości te znajdują się w ścisłym związku ze stanem atmosfery, który znowu zależy od różnych czynników.

Wzory teoretyczne zostały wyprowadzone bez specjalnego założenia co do stanu atmosfery, są więc całkiem ogólne. Jednakże wypływające z nich wartości refrakcji zależne są od przyjętych wartości stałych. Gdy wartości stałych wyznaczymy, przyjmując za podstawę pewne ściśle określone warunki atmosferyczne, to odpowiadająca tym warunkom refrakcja nazywa się *refrakcją średnią*. Refrakcja, odpowiadająca innym warunkom atmosferycznym, oczywiście różni się mniej lub więcej od refrakcji średniej. Ta, pewnym warunkom chwilowym odpowiadająca refrakcja, nazywa się *refrakcją prawdziwą*.

Sprecyzujmy warunki, przy których refrakcję uważać będziemy za refrakcję średnią. Niechaj to będzie ta refrakcja, którą w miejscu, położonem na poziomie morza w szerokości geograficznej $\pm 45^\circ$, powodowała atmosfera, zawierająca domieszkę pary wodnej o prężności 6 mm, której ciśnienie równa się ciśnieniu słupa rtęci, mającego przy temperaturze 0°C wysokość 760 mm, i której temperatura przy powierzchni ziemi wynosi 0°C .

Wyznamy wartość stałej α , odpowiadającą warunkom atmosferycznym, przy których według powyższej definicji zachodzi refrakcja średnia.

Niechaj odległość miejsca obserwacji od środka ziemi, którą oznaczaliśmy przez r_0 , obecnie, zgodnie z definicją refrakcji średniej, oznacza promień wodzący ziemi w szerokości geograficznej $\pm 45^\circ$, a g_0 niech będzie przyspieszeniem ciężkości w tejże szerokości na poziomie morza. Według wzorów (52^v) i (54) jest

$$\begin{aligned} r_0 &= 6366750 \text{ m,} \\ g_0 &= 9.80632 \text{ m.} \end{aligned}$$

Ciśnienie p_0 przy powyższych założeniach jest to ciśnienie

jednej atmosfery. Oznaczmy przez δ gęstość rtęci w temperaturze 0°C , to jest

$$p_0 = 0.760 g_0 \delta.$$

Ciśnienie to według założenia składa się z ciśnienia suchego powietrza, które oznaczmy przez p_1 , i z ciśnienia pary wodnej, zawartej w atmosferze, które oznaczmy przez p_2 . Jest więc

$$p_0 = p_1 + p_2.$$

Gęstość powietrza przy powierzchni ziemi ρ_0 jest sumą gęstości suchego powietrza ρ_1 i gęstości pary wodnej ρ_2 . Oznaczmy przez ρ_1^0 i ρ_2^0 odpowiednio gęstość suchego powietrza i pary wodnej pod ciśnieniem p_0 , to, ponieważ gęstość gazu jest proporcjonalna do ciśnienia, które wywiera, więc

$$\rho_1 = \rho_1^0 \cdot \frac{p_1}{p_0}, \quad \rho_2 = \rho_2^0 \cdot \frac{p_2}{p_0},$$

i z doświadczenia wiadomo, że $\rho_2^0 = 0.622 \rho_1^0$.

Z tą ostatnią wartością znajdujemy

$$\rho_0 = \rho_1 + \rho_2 = \rho_1^0 \left(\frac{p_1}{p_0} + 0.622 \frac{p_2}{p_0} \right);$$

albo gdy napiszemy $p_1 = p_0 - p_2$, jest także

$$\rho_0 = \rho_1^0 \left(1 - 0.378 \frac{p_2}{p_0} \right).$$

Według założenia $p_2 = 6 \text{ mm}$, a więc $\frac{p_2}{p_0} = \frac{6}{760}$; podstawiając tę wartość i pisząc z dostatecznem przybliżeniem $0.378 = \frac{3}{8}$, otrzymujemy

$$\rho_0 = \rho_1^0 \left(1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{760} \right). \quad (109)$$

Gdy przyjmiemy $\rho_1^0 = 0.00128284$, t. j. wartość, otrzymaną przez Rayleigha, która uchodzi za najdokładniejszą, to wynika

$$\rho_0 = 0.00127906.$$

Dalej, zgodnie z tabelką wartości współczynnika załamania światła, podaną w ustępie 50, przyjmujemy dla $\lambda = 555 \mu\mu$, t. j. dla promieni optycznie najczystszych, $\mu_0 = 1.0002928$. Z tą wartością jest według wzoru (m') $c\rho_0 = 0.0002928$ i według wzoru (n)

$$\alpha = 0.00029272, \quad \alpha'' = 60.38,$$

$$\log \alpha = 6.4664439, \quad \log \alpha'' = 1.78087.$$

Stała α'' , która występuje jako czynnik we wszystkich wyrazach wzoru (88), określającego wartość refrakcji, ma w teorii refrakcji pierwszorzędne znaczenie i nazywa się *stałą refrakcji*. Od dokładnego wyznaczenia wartości tej stałej zależy dokładność wypływającej ze wzoru (88) wartości R, gdyż małe nawet błędy stałej w poszczególnych wyrazach pomnożone są przez $\tan^m \varepsilon'$, co przy znacznych wartościach ε' powodować może znaczne błędy w wyniku.

Oczywiście dokładność stałej α zależy od dokładnego wyznaczenia wartości μ_0 i ρ_0 , i łatwo sprawdzić, że zmiana wartości ρ_0 o jednostkę na 6-em miejscu dziesiętnem powoduje zmianę wartości α'' o $0''.1$. Tymczasem wyznaczenie wartości μ_0 i ρ_0 połączone jest z dużymi trudnościami i błędy ich określenia są wielkie w porównaniu z dokładnością teorii; z drugiej strony na wartość stałej refrakcji wpływa także jeszcze wiele innych czynników trudno uchwytnych, i dlatego w teorii refrakcji nieuwzględnianych. Z powyższych względów okazuje się rzeczą konieczną wyznaczenie stałej refrakcji z obserwacji astronomicznych tak, aby wartości refrakcji, wypływające z obserwacji, najlepiej zgadzały się z wartościami, obliczonymi na podstawie wzorów (88) i (101). Oczywiście znaczenie fizyczne tej stałej, określone przez wzór (n), pozostaje niezmienione.

Pomimo bardzo licznych i nader skrupulatnych badań w tej dziedzinie, stałej refrakcji dotąd nie zdołano wyznaczyć tak dokładnie, jakby to ze względu na jej fundamentalne znaczenie we wszystkich precyzyjnych badaniach astronomicznych było pożądané. Nowsze określenia wartości stałej refrakcji grupują się około wartości $60''.15$, otrzymanej przez Bauschingera, i tę wartość uważać można za najbardziej do prawdy zbliżoną.

59. Wartości liczbowe współczynników A_z oraz całek I_1 i I_2 .

Wartość współczynnika A_0 , określona przez wzór (99), zależy od wartości stałej l_0 . Ze wzoru (ab) wynika $l_0 = \frac{p_0}{g_0 \rho_0}$. Podstawiając tu, zgodnie z ustępem poprzednim, $p_0 = 0.760 g_0 \delta$, gdzie δ oznacza ciężar właściwy rtęci, i przyjmując $\delta = 13.59552$ oraz, jak poprzednio, $\rho_0 = 0.00127906$, znajdujemy

$$\log l_0 = 3.90731, \quad l_0 = 8078 \text{ m.}$$

Dalej, przyjmując $r_0 = 6366750 \text{ m}$, a więc $\frac{l_0}{r_0} = 0.0012686$, oraz według Bauschingera $\alpha = 0.0002916$, $\alpha'' = 60''.15$, znajdujemy według wzoru (99)

$$A_0 = 0.99902 \alpha'' = 60''.09. \quad (99')$$

W celu znalezienia wartości współczynników A_z , określonych przez wzór (98), należy przedewszystkiem obliczyć wartość wyrażeń U_z , określonych przez pierwszy ze wzorów (96). We wzorze tym występują stałe a_0 i k_0 , określone przez wzory (ad) i (ae). Aby móc obliczyć wartość tych ostatnich stałych, musi być znana wartość stałej f , wprowadzonej przez wzór (89).

Stała f może być wyznaczona tylko na drodze doświadczalnej, mianowicie z obserwacji temperatury powietrza w wyższych jego warstwach, dokonywanych w czasie wzlotów balonami lub też uzyskanych przez zastosowanie latawców lub balonów na uwięzi do badań tego rodzaju. Ponieważ wpływ warstw bardzo wysokich, jako bardzo rozrzedzonych, na zjawisko refrakcji można uważać za znikomy, więc dostatecznie dokładną

wartość stałej f uzyskuje się ze spostrzeżeń w istocie dających się dokonać, t. j. odnoszących się do warstw stosunkowo niskich (najwyższe osiągnięte wysokości nie przekraczają 15 do 20 km).

Z obserwacjami dotychczasowymi zgadza się dosyć dobrze wartość $f=0.2$. Z tą wartością otrzymuje się

$$\begin{aligned}\log a_0 &= 7.00648, & a_0 &= 0.001015; \\ \log k_0 &= 9.32777, & k_0 &= 0.21270.\end{aligned}$$

Dalej według pierwszego wzoru (96) z zastosowaniem tabelki wartości $\beta_s^{(n)}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\log U_1 &= 7.05055 - 10, & U_1 &= 0.001123; \\ \log U_2 &= 4.07990 - 10, & U_2 &= 0.0000012; \\ \log U_3 &= 1.09850 - 10, & U_3 &= 9.00000000125; \\ \log U_4 &= 8.106 - 20, & U_4 &= 0.0000000000013.\end{aligned}\tag{96'}$$

Wreszcie współczynniki A_z , obliczone według wzoru (98), mają wartości następujące:

$$\begin{aligned}\log A_1 &= 8.82373, & A_1 &= 0''.06664; \\ \log A_2 &= 6.33325, & A_2 &= 0''.000215; \\ \log A_3 &= 4.04876, & A_3 &= 0''.0000011.\end{aligned}\tag{98'}$$

Oznaczmy zatem średnią refrakcję przez R_m , to dla $z' < 80^\circ$ jest z dostateczną dokładnością:

$$\begin{aligned}R_m &= 60''.09 \tan z' - (8.82373) \tan^3 z' + (6.33325) \tan^5 z' - \\ &\quad - (4.04876) \tan^7 z' + \dots\end{aligned}\tag{88'}$$

Liczby, zamieszczone w nawiasach, są to logarytmy współczynników, wyrażonych w ułamkach sekundy łukowej.

Gdy $z' > 80^\circ$, do obliczenia refrakcji należy stosować wzór (108). We wzorze na I_1 występują stałe γ i k , określone przez wzory (102') i (103'). Przyjmując na f , α i $\frac{l_0}{r_0}$ wyżej podane wartości znajdujemy

$$\log k = 9.28389, \quad k = 0.19226\tag{103''}$$

$$\log \gamma = 1.32430, \quad \gamma = 21.10.\tag{102''}$$

Z temi wartościami obliczamy I_1 według wzorów (106) i (107), korzystając przy obliczaniu z tablic funkcji ψ (ust. 13).

Refrakcja średnia na horyzoncie astronomicznym według obliczenia Radau'a wynosi $36' 48''$.

60. Refrakcja prawdziwa. Przykład. Ponieważ miejsca obserwacji znajdują się w różnych szerokościach geograficznych i wzniesione są rozmaicie nad poziom morza, a stan atmosfery podlega ustawicznym zmianom i w ogólności różni się od stanu, któremu odpowiada refrakcja średnia, więc refrakcja prawdziwa, jaka zachodzi w danym miejscu obserwacji w danej chwili, w ogólności różni się od refrakcji średniej, określonej przez wzory (88') i (108).

Jednakże różnice, jakie tu zachodzą, są tak małe, że refrakcja prawdziwa może być zawsze obliczona przez dodanie do refrakcji średniej poprawek, wyrażających wpływ zmiany elementów, od których wartość refrakcji zależy. Zajmijmy się wyznaczeniem tych poprawek.

Niechaj będzie w chwili obserwacji p ciśnienie atmosfery, t temperatura powietrza a π ciśnienie pary wodnej, zawartej w powietrzu, w miejscu obserwacji, położonem w szerokości geograficznej φ i wzniesionem nad poziom morza na h metrów. Znaleźć wartość refrakcji prawdziwej w powyższych warunkach.

Jeżeli pod ciśnieniem p_0 (t. j. jednej atmosfery) i przy temperaturze 0°C gęstość gazu wynosi ρ_0 , to pod ciśnieniem p i przy temperaturze $t^\circ\text{C}$, gdy przez a oznaczymy współczynnik rozszerzalności gazu na 1°C , gęstość jego wynosi

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{p}{p_0} (1 + at)^{-1}.$$

Oznaczmy w warunkach wyżej określonych przez ρ_1' gęstość suchego powietrza, a przez ρ_2' gęstość pary wodnej. Skoro ciśnienie powietrza wilgotnego jest p , a ciśnienie pary wodnej π , to ciśnienie suchego powietrza wynosi $p - \pi$. Gdy dla suchego powietrza i pary wodnej przyjmiemy ten sam współczynnik rozszerzalności a , to jest

$$\rho_1' = \rho_1^0 \cdot \frac{p - \pi}{p_0} (1 + at)^{-1}$$

$$\rho_2' = \rho_2^0 \cdot \frac{\pi}{p_0} (1 + at)^{-1},$$

a gęstość powietrza wilgotnego, równa sumie dwóch powyższych gęstości, wynosi

$$\rho = \frac{\rho_1^0 (p - \pi) + \rho_2^0 \pi}{p_0 (1 + at)}.$$

Przyjmując $\rho_2^0 = 0.622 \rho_1^0$ i pisząc, jak w ustępie 58 z dostateczną dokładnością $\frac{3}{8}$ zamiast 0.378, znajdziemy

$$\rho = \rho_1^0 \cdot \frac{p}{p_0} \left(1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{p} \right) \cdot \frac{1}{1 + at}. \quad (\text{bs})$$

Według określenia jest

$$p_0 = 760 \delta g_0,$$

gdzie δ oznacza ciężar właściwy rtęci przy temperaturze 0°C , a g_0 stałą grawitacyjną w szerokości geograficznej $\varphi = \pm 45^\circ$ na poziomie morza. Podobnie jest

$$v = B \delta_t g \text{ i } \pi = b \delta_t g,$$

gdzie δ_t oznacza ciężar właściwy rtęci przy temperaturze $t^\circ \text{C}$, g — przyspieszenie ciężkości w szerokości geograficznej φ przy wzniesieniu h nad poziom morza, B — wysokość słupa rtęci w rurce barometrycznej, wyrażoną w milimetrach, i wreszcie b — prężność pary wodnej, wyrażoną również w milimetrach. Oznaczmy jeszcze przez k współczynnik rozszerzalności rtęci, to jest

$$\delta_t = \frac{\delta}{1 + kt}$$

a dalej

$$\frac{\pi}{\varpi} = \frac{b}{B'}, \quad \frac{p}{p_0} = \frac{Bg}{760 g_0 (1 + kt)}.$$

Podstawiając powyższe wartości we wzorze (bs), znajdujemy

$$\rho = \rho_1^0 \cdot \frac{B}{760} \cdot \frac{1}{(1 + at)(1 + kt)} \cdot \frac{g}{g_0} \left(1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{b}{B} \right). \quad (110)$$

Taką jest gęstość powietrza w przyjętych wyżej warunkach co do położenia miejsca obserwacji i co do stanu atmosfery w chwili obserwacji. Gęstość w warunkach, którym odpowiada refrakcja, przyjęta za średnią, wyrażona jest przez wzór (109). Dzieląc wzór (110) przez wzór (109), znajdujemy

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{B}{760} \cdot \frac{g}{g_0} \cdot \frac{1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{b}{B}}{1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{760}} \cdot \frac{1}{(1 + at)(1 + kt)}. \quad (111)$$

Gdy jeszcze dla krótkości pisać będziemy

$$B' = B \cdot \frac{1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{b}{B}}{1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{760}} = (0.00128) B \left(1 - \frac{3}{8} \frac{b}{B} \right), \quad (bt)$$

to jest

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{B'}{760} \cdot \frac{g}{g_0} \cdot \frac{1}{(1 + at)(1 + kt)}. \quad (111')$$

Wprowadźmy teraz do tego wzoru wartości liczbowe. Gdy oznaczymy

$$B' - 760 \text{ mm} = \Delta B,$$

to możemy napisać

$$\frac{B'}{760} = 1 + \frac{\Delta B}{760} = 1 + 0.0013158 \Delta B. \quad (bu)$$

Dalej według wzoru (54) jest na poziomie morza w szerokości geograficznej φ

$$g_{\varphi} = g_0 (1 - 0.00264 \cos 2\varphi).$$

gdzie $g_0 = 9.80632$ m.

Wzór (52^v) pozwala obliczyć promień wodzący ziemi w dowolnej szerokości. Oznaczmy go ogólnie przez r_{φ} , to według założenia $r_{45} = r_0$ i jest

$$r_0 = 6366750 \text{ m,}$$

$$r_{\varphi} = r_0 (1 + 0.00167 \cos 2\varphi).$$

Ponieważ miejsce obserwacji wzniesione jest nad poziom morza na h m, więc odległość jego od środka ziemi wynosi

$$r = r_{\varphi} + h,$$

a przyspieszenie ciężkości ma tam wartość

$$g = g_{\varphi} \left(1 - \frac{2h}{r}\right) = g_0 (1 - 0.00264 \cos 2\varphi) \left(1 - \frac{2h}{r}\right).$$

Podstawiając tu wyżej podaną wartość r i, ponieważ $\frac{h}{r}$ jest zawsze małym ułamkiem, przyjmując z dostatecznem przybliżeniem

$$\frac{2h}{r} = \frac{2h}{r_0 (1 + 0.00167 \cos 2\varphi) + h} = \frac{2h}{r_0} (1 - 0.00167 \cos 2\varphi),$$

otrzymamy

$$g = g_0 \left[1 - \frac{2h}{r_0} - \left(0.00264 - 0.00167 \frac{2h}{r_0} \right) \cos 2\varphi \right],$$

a po wprowadzeniu wartości liczbowej na r_0

$$g = g_0 (1 - 0.00000031 h - 0.00264 \cos 2\varphi). \quad (\text{bx})$$

Wartości a i k znane są z fizyki. Przyjmujemy

$$a = 0.0036706, \quad k = 0.0001817$$

wobec czego

$$(1 + at)(1 + kt) = 1 + (a + k)t + akt^2 = 1 + 0.0038523 t + 0.0000006 t^2.$$

Podstawiając we wzorze (111') wartość powyższą oraz wartości na $\frac{B'}{760}$ i $\frac{g}{g_0}$ według wzorów (bu) i (bx), znajdujemy po pomnożeniu i opuszczeniu wyrazów bardzo małych

$$\rho = \rho_0(1 + x + y). \quad (111'')$$

Znaczenie wielkości x i y , jak łatwo sprawdzić, jest następujące. Oznaczmy

$$\begin{aligned} -0.0038523 t + 0.0000141 t^2 + 0.000000054 t^3 &= a, \\ 0.0013158 - 0.000005068 t + 0.000000019 t^2 &= b, \end{aligned} \quad (\text{by})$$

to

$$x = a + b \Delta B, \quad (\text{bz})$$

$$y = -(0.00000031 h + 0.00264 \cos 2 \varphi). \quad (\text{ca})$$

Gęstość powietrza wpływa przedewszystkiem na wartość stałej refrakcji. Jest ona w warunkach, przyjętych za średnie, określona przez wzór (n),

$$\alpha = \frac{c\rho_0}{1 + c\rho_0}.$$

Oznaczmy jej wartość w warunkach prawdziwych, gdy gęstość powietrza wynosi ρ , przez α' , to jest podobnie

$$\alpha' = \frac{c\rho}{1 + c\rho}.$$

Dzieląc α' przez α , znajdujemy z dostatecznem przybliżeniem

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{1 + c\rho_0}{1 + c\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} [1 - c(\rho - \rho_0) + \dots],$$

a gdy podstawimy wypływającą ze wzoru (111'') wartość

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 (x + y),$$

to jest

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = (1 + x + y) [1 - c\rho_0 (x + y)] = 1 + (1 - c\rho_0) (x + y).$$

Przyjmując tu z dostatecznem przybliżeniem $c\rho_0 = \alpha$, otrzymujemy wreszcie

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + 0.9997 (x + y) \quad (\text{cb})$$

Gęstość powietrza wpływa też na wartość stałej l_0 , od której zależą współczynniki refrakcji. Jednakże występuje ona stale tylko jako licznik ułamka $\frac{l}{r'}$, a więc podzielona przez wielką liczbę; wskutek tego zmiana tej stałej, zależna od stanu atmosfery, jak również od φ i h , na wartość powyższego ułamka wpływa tylko bardzo nieznacznie i zawsze przyjąć można $\frac{l}{r'} = \frac{l_0}{r'_0}$.

We wzorze na refrakcję średnią

$$R_m = A_0 \tan z' - A_1 \tan^3 z' + A_2 \tan^5 z' - \dots$$

wszystkie współczynniki mają wspólny czynnik α'' , a iloraz $\frac{R_m}{\alpha''}$ można uważać za niezależny od zmian stanu atmosfery. Oznaczając więc przez R_v refrakcję prawdziwą, można przyjąć z dostateczną dokładnością

$$\frac{R_m}{\alpha''} = \frac{R_v}{(\alpha')''},$$

skąd wypływa

$$R_v = R_m \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Z przeliczenia wypływa, że można tu przyjąć zawsze

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + x + y, \quad (cb')$$

a więc także

$$R_v = R_m + R_m x + R_m y. \quad (112)$$

Wzór ten określa prawdziwą refrakcję przez dodanie do refrakcji średniej dwóch poprawek. Pierwszą z tych poprawek $R_m x$ określają wzory (by) i (bz), jako funkcję ciśnienia barometrycznego, wilgotności i temperatury powietrza, drugą poprawkę $R_m y$, wyrażającą wpływ szerokości geograficznej i wzniesienia miejsca obserwacji nad poziom morza, określa wzór (ca). Ta ostatnia poprawka jest zawsze bardzo mała, i obliczenie jej jest bardzo uproszczone przez to, że y dla danego miejsca obserwacji ma wartość stałą. Tak np. dla Lwowa jest $\varphi = 49^\circ 50'$, $h = 330$ m, więc według wzoru (ca) $y = 0.000341$; przy tej wartości y poprawka $R_m y$ dopiero dla $z' = 80^\circ$ wynosi $0''.1$

Tu należy dodać uwagę, że wzór (112) ważny jest dla wszystkich wartości z' , t. j. może być stosowany zawsze, t. j. czy R_m zostało obliczone za pomocą wzoru (88), czy też za pomocą wzoru (108).

Przykład. Odległość zenitalna pozorna gwiazdy, obserwowanej we Lwowie, wynosi $56^\circ 30'$. Znaleźć odległość zenitalną prawdziwą, gdy w czasie obserwacji temperatura powietrza wynosiła $+15^\circ \text{C}$, ciśnienie po zredukowaniu stanu barometru na temperaturę zewnętrzną wynosiło 742 mm, a prężność pary wodnej w powietrzu 12 mm.

Obliczamy najprzód refrakcję średnią według wzoru (88')

A_0	1.77880	A_1	8.82373	A_2	6.33325
$\tan z'$	0.17922	$\tan^3 z'$	0.53766	$\tan^5 z'$	0.89610
$A_0 \tan z'$	1.95802	$A_1 \tan^3 z'$	9.36139	$A_2 \tan^5 z'$	7.22935
$A_0 \tan z' = 90''.79$		$A_1 \tan^3 z' = 0''.23$		$A_2 \tan^5 z' = 0''.00$	

Widzimy, że tylko dwa pierwsze wyrazy wchodzą w rachubę i jest

$$R_m = 90''.79 - 0''.23 = 90''.56.$$

Celem znalezienia refrakcji prawdziwej obliczamy poprawki $R_m x$ i $R_m y$. Dla obliczenia x mamy $B = 742$ mm, $b = 12$ mm, i z temi wartościami obliczamy B' stosując wzór (bt)

$$1 - \frac{b}{B} = 1 - \frac{12}{742} = 1 - \frac{3}{185.5} = \frac{147.5}{185.5}$$

$$\log \frac{147.5}{185.5} = 9.99736$$

$$B \quad 2.87040$$

$$\quad 0.00128$$

$$B' \quad 1.86904$$

$$B' = 739.67$$

Jest więc $\Delta B = -20.33$.

Z tą wartością ΔB oraz $t = +15^\circ$ obliczamy x według wzorów (by) i (bz).

$$a = -0,0038523.15 + 0,0000141.225 + 0,000000054.3375 =$$

$$= -0,0577845 + 0,0031725 + 0,0001823 = -0,0544297;$$

$$b = 0,0013158 - 0,000005068.15 + 0,000000019.225 =$$

$$= 0,0013158 - 0,0000760 + 0,0000043 = 0,0012441;$$

$$x = -0,0544297 - 0,0012441.20,33 =$$

$$= -0,0544297 - 0,0252925 = -0,0797222.$$

Co się tyczy y , to, jak już wspomnieliśmy, jest dla Lwowa $y = 0.000341$. Jest zatem

$$R_m x = -0.0797 \times 90''.56 = -7''.21$$

$$R_m y = 0.00034 \times 90''.56 = 0''.03$$

$$R_v = 90''.56 - 7''.21 + 0''.03 = 83''.38.$$

61. Tablice refrakcji. W praktyce astronomicznej byłoby rzeczą zbyt uciążliwą obliczanie za każdym razem refrakcji za pomocą wzorów, wyprowadzonych przez teorię. Na podstawie

tych wzorów oblicza się tablice refrakcji, z których w sposób dogodny potrzebną wartość refrakcji otrzymać można. Tablice refrakcji składają się zawsze z dwóch części: 1) z tablic refrakcji średniej, obliczonych dla pewnego specjalnego stanu atmosfery i przy określonych założeniach co do położenia miejsca obserwacji, i 2) z tablic poprawkowych, pozwalających znaleźć refrakcję prawdziwą w dowolnie położonem miejscu obserwacji przy każdym innym stanie atmosfery.

Układ, który nadaje się tablicom refrakcji, bywa rozmaity i znajduje się zwykle w ścisłym związku z teorią, która jest podstawą tablic. Najbardziej rozpowszechnione tablice refrakcji są następujące.

1. *Tablice Bessla*. W teorii refrakcji Bessla występują 2 stałe α_0 i β_0 , z których pierwsza odpowiada co do fizycznego znaczenia stałej refrakcji α , występującej w wyłożonej teorii, druga zaś odpowiada stałej f tej teorii w tem znaczeniu, że występuje ona we wzorze, wyrażającym przyjętą przez Bessla zależność pomiędzy temperaturą warstwy atmosferycznej a odległością jej od powierzchni ziemi. Jak widzieliśmy w ustępie 53, Bessel przyjmuje tę zależność w postaci wzoru

$$\frac{1 + aT}{1 + aT_0} = e^{-\beta_0 s}.$$

Wartość refrakcji w teorii Bessla otrzymuje się, jako funkcję odległości zenitalnej pozornej z' , z pewnego szeregu, wynikającego z teorii, przyczem wartości stałych zostały tak określone, aby odpowiadające im wartości refrakcji były w zgodzie z obserwacjami Bradleya, wykonanemi w latach 1750—1762. Stała α_0 zależna jest od ciśnienia i temperatury powietrza, stała β_0 tylko od temperatury.

Bessel oblicza refrakcję średnią, przyjmując temperaturę 50° według termometru, używanego przez Bradleya, która odpowiada 48° 75 F, oraz ciśnienie 29.6 cali angielskich. Jest to według oznaczeń dzisiaj stosowanych temperatura + 9° 3 C. i ciśnienie 751.7 mm. Wartości stałych, przyjęte przez Bessla, są

$$\alpha_0 = 57''.538, \quad \beta_0 = 745.747.$$

Wartości refrakcji średniej R_m , obliczone z powyższemi wartościami stałych, umieszczone są w tablicy z argumentem z' . Refrakcję prawdziwą oblicza Bessel według wzoru

$$R_v = R_m (BT)^A \cdot \gamma^\lambda,$$

w którym czynnik B znajduje się w związku z ciśnieniem barometrycznem, czynnik T z temperaturą barometru, a czynnik γ z temperaturą zewnętrzną powietrza. Wartość logarytmu każdego z tych czynników podana jest w oddzielnych tablicach z odpowiedniami argumentami.

Bessel kładzie dalej $R_m = \alpha \tan z'$; tu α nie ma już znaczenia stałej refrakcji, lecz jest to wielkość zmienna, której wartość przy niewielkich z' mało się różni od stałej α_0 . Wartość $\log \alpha$ oraz wykładników potęgowych A i λ podana jest w tablicy z argumentem z' .

Refrakcję prawdziwą zatem z tablic Bessla otrzymuje się według wzoru

$$\log R_v = \log \alpha + A (\log B + \log T) + \lambda \log \gamma + \log \tan z',$$

a tablice podają

$\log \alpha$, A i λ , obliczone dla argumentu z' ,

$\log B$	«	«	«	stan barometru,
$\log T$	«	«	«	temperatura barometru,
$\log \gamma$	«	«	«	temperatura zewnętrzna.

Gdyby chodziło o znalezienie refrakcji dla znanej prawdziwej odległości zenitalnej z , można to osiągnąć przez przybliżenia. Jednakże w tablicach Bessla obok $\log \alpha$, A i λ podane są też odpowiednie wartości $\log \alpha'$, A' i λ' z argumentem z .

Tablice Bessla pojawiły się po raz pierwszy wraz z jego teorią refrakcji w dziele *Fundamenta astronomiae* (Regiomonti, 1818), a potem uzupełnione i nieco zmienione w *Astronomische Untersuchungen*, t. I. Przedrukowywane potem były wielokrotnie w zmienianym rozmaicie układzie, np. w podręczniku *Astronomji sferycznej* Chauveneta, w 7-cyfrowych tablicach

logarytmów Vegi-Bremikera, w tablicach astronomicznych Bidschofa-Vitala i t. d.

2. *Tablice Radau'a*. Refrakcja średnia tych tablic obliczona została zapomocą wzorów, wyprowadzonych w naszym wykładzie, dla $\varphi = \pm 45^\circ$, $t = 0^\circ \text{C}$ i ciśnienia 760 mm; jako wartość stałej refrakcji przyjęta została wartość Bessla. Poprawka na temperaturę dla 1°C podana jest w tablicy o dwóch argumentach, z których jednym jest temperatura, drugim — odległość zenitalna z' . Liczba, otrzymana z tablicy, pomnożona przez temperaturę, wyrażoną w stopniach C, stanowi poprawkę refrakcji na temperaturę. Do obliczenia poprawki na ciśnienie służy tablica, która podaje zmianę wartości refrakcji, odpowiadającą jednemu milimetrowi ciśnienia; argumentem tej tablicy jest wartość refrakcji. Ażeby uzyskać poprawkę na ciśnienie, należy wartość, podaną w tablicy, pomnożyć przez $B - 760 \text{ mm}$, jeżeli B jest ciśnieniem, wyrażonem w milimetrach, dla którego oblicza się poprawkę.

W przypadku wielkich odległości zenitalnych poprawkę na temperaturę otrzymuje się wygodniej zapomocą innej specjalnej tablicy. Jest to tablica o dwóch argumentach, z której dla danej temperatury i odległości zenitalnej otrzymuje się pewną liczbę, wyrażoną w jednostkach kątowych. Tę liczbę należy pomnożyć przez temperaturę, dla której się poprawia, wyrażoną w stopniach C; otrzymany iloczyn stanowi poprawkę argumentu z' . Z tak poprawionym argumentem z tablicy refrakcji średniej otrzymuje się refrakcję prawdziwą dla danej temperatury.

Pomijamy jeszcze kilka dodatkowych tablic, mających znaczenie mniej istotne.

Teorię swoją wraz z tablicami ogłosił Radau w pracy p. t. *Essai sur les refractions astronomiques* w *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XIX, 1889.

3. *Tablice L. de Balla*. Tablice te opierają się w głównej mierze na teorii refrakcji Radau'a; przyjmują one dla średniej refrakcji $h = 0^\circ$, $\varphi = \pm 45^\circ$, $t = 0^\circ \text{C}$, ciśnienie 760 mm, prężność pary wodnej w atmosferze 6 mm, a jako wartość sta-

łej refrakcji $60''.15$. Wzór, na podstawie którego oblicza się refrakcję prawdziwą ma u de Balla postać następującą:

$$\log R_v = \log R_m + \log \rho + \text{poprawka na temperaturę} + \\ + \text{poprawka na gęstość powietrza.}$$

Te dwie poprawki są poprawkami logarytmu refrakcji średniej.

Log R_m podany jest w tablicy z argumentem z' dla każdej minuty od $z' = 0^\circ$ do $z' = 80^\circ$. Prócz tego w oddzielnej tablicy podana jest refrakcja prawdziwa dla odległości zenitalnych od $0^\circ 0'$ do $0^\circ 25'$ z dwoma argumentami, z których jednym jest z' , a drugim logarytm gęstości powietrza.

Poprawka na temperaturę podana jest w tablicy z argumentami z' i $t^\circ \text{C}$ w jednostkach 4-go miejsca logarytmu refrakcji średniej dla temperatur od -38° do $+38^\circ$. Poprawka na gęstość powietrza podana jest w tych samych jednostkach dla wartości logarytmu gęstości od 9.90 do 0.07.

Prócz tych głównych tablic, w zbiorze de Balla znajdują się jeszcze różne tablice, odpowiadające różnym praktycznym potrzebom astronomji.

Wydane zostały tablice de Balla w oddzielnej książce z objaśniającym tekstem niemieckim i francuskim w r. 1906 u Engelmanna w Lipsku.

4. *Tablice refrakcji umieszczone w tej książce* (Tablice VI). Tablica VIa zawiera wartości refrakcji średniej R_m dla temperatury 0°C , ciśnienia barometrycznego 760 mm, prężności pary wodnej w powietrzu 6 mm, dla poziomu morza w szerokości geograficznej $\varphi = \pm 45^\circ$, przyjmując wartość stałej refrakcji $\alpha = 60''.15$. Refrakcję prawdziwą oblicza się według wzoru (112)

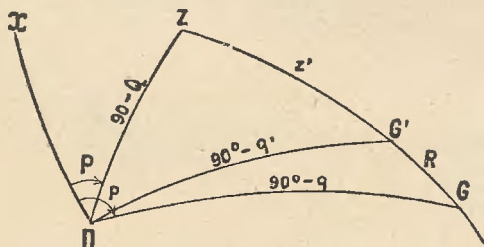
$$R_v = R_m + R_m x + R_m y,$$

wyjaśnionego w ustępie 60. Czynniki x i y są zależne od temperatury i ciśnienia, a czynnik y ma w danym miejscu obserwacji wartość stałą. Tablica VIb podaje wartość czynnika x z argumentami t (temperatura) i ΔB . Ten ostatni jest funkcją stanu barometru B , zredukowanego na temperaturę zewnętrzną,

oraz prężności pary wodnej b . Wartość ΔB podaje tablica VIc z argumentami b i B . Gdy stanu wilgotności się nie uwzględnia, przyjmuje się wprost $\Delta B = B - 760$ mm.

62. Wpływ refrakcji na spólrzędne gwiazd w dowolnym układzie sferycznym. Niech oznacza na ryc. 44 Z zenit miejsca obserwacji, a ZG koło wysokości gwiazdy G . Ponieważ refrakcja nie zmienia azymutu, więc miejsce jej prawdziwe G i przez refrakcję zmienione miejsce pozorne G' przypadają na jednym kole wysokości. Niechaj będzie prawdziwa odległość zenitalna gwiazdy $ZG = z$, a pozorna odległość zenitalna $ZG' = z'$, to jest, jak wiemy,

$$z - z' = R.$$



Rycina 44.

Z powodu przesunięcia się gwiazdy o łuk R na kole wysokości ulegają zmianie jej spólrzędne w każdym układzie sferycznym. Weźmy pod uwagę ogólnie układ, którego biegunem jest punkt Π , niechaj spólrzędnymi gwiazdy G w tym układzie będą: 1) odległość gwiazdy od bieguna Π , liczona na wielkiem kole, przechodzącym przez biegun Π i gwiazdę, 2) kąt, jaki tworzy wspomniane wielkie koło z kołem ΠX , którego położenie na niebie jest w sposób ścisły określone; kierunek wzrostu tego kąta wskazuje strzałka.

Punkty Z , G i G' w tym układzie mają odpowiednio spólrzędne (P, Q) , (p, q) i (p', q') . To znaczy, że jest:

$$\Pi Z = P \text{ i } \Pi Z = 90^\circ - Q,$$

$$\Pi G = p \text{ i } \Pi G = 90^\circ - q,$$

$$\Pi G' = p' \text{ i } \Pi G' = 90^\circ - q'.$$

Jeżeli spółrzedne zenitu P i Q w układzie ΠX są wiadome, to na podstawie wiadomych spółrzednych prawdziwych gwiazdy w tym samym układzie p i q można znaleźć jej spółrzedne pozorne p' i q' , lub też odwrotnie, na podstawie danych spółrzednych pozornych znaleźć spółrzedne prawdziwe.

Wyprowadźmy potrzebne wzory. Z trójkątów $\Pi G G'$ i $\Pi Z G'$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sin(p - p') : \sin R &= \sin \Pi G' G : \cos q, \\ \sin(p' - P) : \sin z' &= \sin \Pi G' G : \cos Q;\end{aligned}$$

a stąd wynika

$$\frac{\sin(p - p') \cos q}{\sin R} = \frac{\sin(p' - P) \cos Q}{\sin z'} \quad (cc)$$

oraz

$$\sin(p - p') = \frac{\sin(p' - P) \cos Q \sin R}{\cos q \sin z'}. \quad (cd)$$

Położmy

$$\sin R = k \sin z' \quad (113)$$

i wprowadźmy po prawej stronie wzoru (cd) $p' = p - (p - p')$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sin(p - p') &= k \cos Q [\sin(p - P) \cos(p - p') - \\ &\quad - \cos(p - P) \sin(p - p')] \sec q,\end{aligned}$$

a stąd

$$\operatorname{tang}(p - p') = \frac{k \cos Q \sec q \sin(p - P)}{1 + k \cos Q \sec q \cos(p - P)}. \quad (114)$$

W celu znalezienia różnicy $q - q'$ bierzemy pod uwagę wzory następujące, wypływające z trójkątów $Z \Pi G$ i $Z \Pi G'$:

$$\begin{aligned}\sin q &= \sin Q \cos z + \cos Q \sin z \cos \Pi Z G, \\ \sin q' &= \sin Q \cos z' + \cos Q \sin z' \cos \Pi Z G.\end{aligned}$$

Wypływa z tych wzorów

$$\frac{\sin q - \sin Q \cos z}{\sin z} = \frac{\sin q - \sin Q \cos z'}{\sin z'}$$

oraz

$$\sin q \sin z' - \sin q' \sin z = -\sin Q \sin(z - z') = -\sin Q \sin R;$$

a gdy uwzględnimy wzór (113), znajdziemy też

$$\sin q - \sin q' \frac{\sin z}{\sin z'} = -k \sin Q. \quad (\text{ce})$$

Z tych samych trójkątów wypływają wzory

$$\sin z \sin \Pi ZG = \cos q \sin(p - P),$$

$$\sin z' \sin \Pi ZG = \cos q' \sin(p' - P),$$

a zatem też

$$\frac{\sin z}{\sin z'} = \frac{\cos q \sin(p - P)}{\cos q' \sin(p' - P)}. \quad (\text{cf})$$

Tę wartość na $\frac{\sin z}{\sin z'}$ podstawmy we wzorze (ce) i pomnóżmy obie strony tak otrzymanego równania przez $\cos q'$; otrzymamy

$$\sin q \cos q' - \sin q' \cos q \frac{\sin(p - P)}{\sin(p' - P)} = -k \sin Q \cos q'.$$

Gdy tu po lewej stronie dodamy i odejmiemy po $\sin q' \cos q$, to po łatwych redukcjach znajdziemy

$$\sin(q - q') = \frac{\sin q' \cos q}{\sin(p' - P)} [\sin(p - P) - \sin(p' - P)] - k \sin Q \cos q'. \quad (\text{cg})$$

Piszmy jeszcze

$$\sin(p - P) - \sin(p' - P) = 2 \sin \frac{p - p'}{2} \cos \left(\frac{p + p'}{2} - P \right),$$

$$\sin(p - p') = 2 \sin \frac{p - p'}{2} \cos \frac{p - p'}{2}.$$

a więc

$$\sin(p - P) - \sin(p' - P) = \frac{\sin(p - p') \cos \left(\frac{p + p'}{2} - P \right)}{\cos \frac{p - p'}{2}};$$

a gdy podstawimy tu wartość na $\sin(p - p')$ według wzoru (cd), jest także

$$\sin(p - P) - \sin(p' - P) = \frac{k \sin(p' - P) \cos Q \cos \left(\frac{p + p'}{2} - P \right)}{\cos q \cos \frac{p - p'}{2}}.$$

Tę wartość podstawiamy we wzorze (cg) i znajdujemy

$$\sin(q - q') = k \left[\cos Q \frac{\cos \left(\frac{p + p'}{2} - P \right)}{\cos \frac{p - p'}{2}} \sin q' - \sin Q \cos q' \right]. \quad (\text{ch})$$

Dla rachunku logarytmowego wprowadzamy tu kąt pomocniczy M , określony, jak następuje

$$\text{tang } M = \cotg Q \cdot \frac{\cos \left(\frac{p + p'}{2} - P \right)}{\cos \frac{p - p'}{2}}, \quad (115)$$

i wzór (ch) wtedy otrzymuje postać

$$\sin(q - q') = - \frac{k \sin Q \cos(M + q')}{\cos M}. \quad (\text{ci})$$

Gdy we wzorze powyższym wprowadzimy $q' = q - (q - q')$, to po łatwym przekształceniu otrzymuje się wzór na $\text{tang}(q - q')$, mianowicie:

$$\text{tang}(q - q') = \frac{-k \sin Q \sec M \cos(M + q)}{1 + k \sin Q \sec M \sin(M + q)}. \quad (116)$$

Wzory (114) i (116) są zupełnie ogólne i całkiem ściśle. W praktyce jednakże stosowanie wzorów ścisłych nie zawsze jest konieczne. Jak wynika ze wzoru (113), określającego współczynnik k , współczynnik ten jest zawsze małym ułamkiem, którego największa wartość, odpowiadająca $\varepsilon' = 90^\circ$, wynosi 0.0107. Wobec tego drugi wyraz mianownika wzorów (114) i (116) tylko wówczas musi być uwzględniony, gdy q lub M mają wartość, zbliżającą się do 90° . Gdy ta okoliczność nie zachodzi, co bywa najczęściej, można drugi wyraz mianownika tych wzorów opuścić, a wówczas różnice $p - p'$ i $q - q'$ są tak małe, że można przyjąć z dostateczną dokładnością

$$\begin{aligned} \text{tang}(p - p') &= (p - p') \sin 1'', \\ \text{tang}(q - q') &= (q - q') \sin 1'', \\ \cos(p - p') &= \cos(q - q') = 1, \\ \cos\left(\frac{p + p'}{2} - P\right) &= \cos(p - P); \end{aligned}$$

prócz tego jest jeszcze, gdy k wyrazimy w sekundach łukowych

$$R = k'' \sin \varepsilon'. \quad (113')$$

Przy założeniach powyższych wzory ściśle się upraszczają i otrzymuje się następujące wzory przybliżone:

$$p - p' = k'' \cos Q \sin(p - P) \sec q \quad (114')$$

$$\text{tang } M = \cotg Q \cos(p - P) \quad (115')$$

$$q - q' = -k'' \sin Q \cos(M + q) \sec M \quad (116')$$

albo zamiast dwóch ostatnich wzorów, bez wprowadzania kąta pomocniczego,

$$q - q' = -k'' [\sin Q \cos q - \cos Q \sin q \cos (p - P)]. \quad (116'')$$

Powyższe wzory ogólne można specjalizować dla poszczególnych układów sferycznych, mających zastosowanie w praktyce astronomicznej. Gdy chodzi o wyznaczenie wpływu refrakcji na zmianę współrzędnych sferycznych, to w rachubę wchodzi, prócz odległości zenitalnej (wysokości), jeszcze tylko współrzędne godzinne i równikowe. Zajmijmy się wyznaczeniem wpływu refrakcji na wymienione współrzędne.

Tak w układzie godzinnym, jak i w równikowym, biegunem Π jest biegun świata, a współrzędną q jest zboczenie. Ponieważ zboczenie zenitu równa się szerokości geograficznej miejsca obserwacji, więc $Q = \varphi$. Współrzędnymi p są w układzie godzinnym kąty godzinne, które liczy się od południka. Ponieważ zenit Z leży na południku, więc $P = 0$.

Otrzymamy więc wzory dla współrzędnych godzinnych, gdy podstawimy we wzorach ogólnych

$$\begin{aligned} Q &= \varphi, & P &= 0; \\ q &= \delta, & p &= t; \\ q' &= \delta', & p' &= t'; \end{aligned}$$

Wzory ściśle są:

$$\left. \begin{aligned} \text{tang}(t - t') &= \frac{k \cos \varphi \sec \delta \sin t}{1 + k \cos \varphi \sec \delta \cos t'} \\ \text{tang } M &= \cotg \varphi \cdot \frac{\cos \frac{t + t'}{2}}{\cos \frac{t - t'}{2}} \\ \text{tang}(\delta - \delta') &= \frac{-k \sin \varphi \sec M \cos(M + \delta)}{1 + k \sin \varphi \sec M \sin(M + \delta)}, \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

a wzory przybliżone:

$$\begin{aligned} t - t' &= k'' \cos \varphi \sec \delta \sin t, \\ \delta - \delta' &= -k'' (\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t); \end{aligned} \quad (117')$$

lub też gdy w ostatnim wzorze wprowadzimy kąt pomocniczy M , określony przez wzór

$$\text{tang } M = \cotg \varphi \cos t,$$

to wzór ten otrzymuje postać

$$\delta - \delta' = -k'' \sin \varphi \sec M \cos (M + \delta).$$

Wzór, wyrażający wpływ refrakcji na wznoszenie proste, otrzymujemy wprost, kładąc w pierwszym ze wzorów (117) i w pierwszym ze wzorów (117') $t = \theta - \alpha$ i $t' = \theta - \alpha'$. Jest więc

$$\text{tang } (\alpha - \alpha') = \frac{-k \cos \varphi \sec \delta \sin (\theta - \alpha)}{1 + k \cos \varphi \sec \delta \cos (\theta - \alpha)}, \quad (118)$$

$$\alpha - \alpha' = -k'' \cos \varphi \sec \delta \sin (\theta - \alpha). \quad (118')$$

Wzory przybliżone otrzymać też można, stosując wprost wzory różniczkowe (67). Kładąc w nich mianowicie

$$dh = R = k'' \sin z', \quad da = 0, \quad d\varphi = 0,$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} d\delta &= k'' \sin z' \cos \eta, \\ \cos \delta \, dt &= -k'' \sin z' \sin \eta; \end{aligned}$$

gdzie kąt paralaktyczny η ma wartość, wypływającą ze wzorów (70'), t. j.

$$\begin{aligned} \sin z \cos \eta &= \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t, \\ \sin z \sin \eta &= \cos \varphi \sin t. \end{aligned}$$

Gdy po prawej stronie wzorów różniczkowych przyjmiemy $z = z'$, to otrzymamy wzory, zgodne ze wzorami (117').

Wzorem (117') często nadaje się też postać następującą. Określmy czynnik r tak, że jest

$$R = r \operatorname{tang} z. \quad (119)$$

Wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} d\delta &= r \operatorname{tang} z \cos \eta = r \frac{\sin z \cos \eta}{\cos z} = r \frac{\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t}{\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t} \\ \cos \delta \, dt &= \frac{-r \cos \varphi \sin t}{\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t} \end{aligned}$$

Gdy w tych wzorach położymy

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin p \cos P, \\ \cos \varphi \cos t &= \sin p \sin P, \\ \cos \varphi \sin t &= \cos p, \end{aligned} \quad (120)$$

to znajdziemy

$$\begin{aligned} d\delta &= \frac{r \sin p \cos (P + \delta)}{\sin p \sin (P + \delta)} = r \cotg (P + \delta), \\ \cos \delta \, dt &= \frac{r \cotg p}{\sin (P + \delta)}. \end{aligned} \quad (121)$$

63. Wpływ refrakcji na kąt godzinny i azymut punktów wschodu i zachodu. W ustępie 34 rozróżnialiśmy między wschodem i zachodem fizycznym a wschodem i zachodem astronomicznym. Gdy bierzemy pod uwagę wpływ refrakcji astronomicznej, to należy jeszcze rozróżniać pomiędzy wschodem i zachodem prawdziwym a pozornym.

Obserwować możemy tylko wschód i zachód pozorny; zachodzi on wtedy, gdy $z' = 90^\circ$. Oznaczmy przez R_0 wartość refrakcji na horyzoncie astronomicznym, to odległość zenitalna prawdziwa gwiazdy w czasie wschodu i zachodu pozornego wynosi $z = 90^\circ + R_0$, a więc jej wysokość prawdziwa jest $h = -R_0$. Natomiast w czasie wschodu i zachodu prawdziwego wysokość prawdziwa gwiazdy równa się zeru.

Oznaczmy przez t_0 i a_0 kąt godzinny i azymut gwiazdy w chwili prawdziwego wschodu, a przez t'_0 i a'_0 wartości tychże współrzędnych w chwili pozornego wschodu, to w różnicach $t'_0 - t_0$ i $a'_0 - a_0$ wyrazi się wpływ refrakcji na kąt godzinny i azymut punktu wschodu i zachodu.

Celem znalezienia t'_0 i a'_0 podstawiamy we wzorach (66') $h = -R_0$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} -\sin R_0 &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t'_0, \\ \cos R_0 \sin a'_0 &= \cos \delta \sin t'_0, \\ \cos R_0 \cos a'_0 &= -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t'_0. \end{aligned}$$

Stąd wypływa przedewszystkiem

$$\cos t'_0 = -\frac{\sin R_0}{\cos \varphi \cos \delta} - \tan \varphi \tan \delta, \quad (122)$$

a następnie, gdy powyższą wartość podstawimy we wzorze, określającym $\cos a'_0$,

$$\cos a'_0 = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi \cos R_0} - \tan \varphi \tan R_0. \quad (123)$$

Widzimy, że refrakcja powoduje efekt podobny, jak wzniesienie obserwatora nad poziom morza. Sprawą tą zajmowaliśmy się w ustępie 34. Zazwyczaj przy obliczeniu t'_0 i a'_0 stosuje się średnią wartość refrakcji przy horyzoncie. Wobec tego, że wartość ta jest niewielka, można zamiast wzorów (122) i (123) stosować wzory przybliżone, zupełnie analogiczne do wzorów (75) i (75'), zastępując w nich depresję horyzontu κ przez R_0 . Przyjmując $R_0 = 37' = 148^s$, otrzymamy:

$$t'_0 = t_0 + \frac{148^s}{\cos \varphi \cos \delta \sin t_0} = t_0 \pm \frac{148^s}{\sqrt{\cos(\delta + \varphi) \cos(\delta - \varphi)}}, \quad (122')$$

$$a'_0 = a_0 + 37' \frac{\tan \varphi}{\sin a_0} = a_0 \pm \frac{37' \sin \varphi}{\sqrt{\cos(\delta + \varphi) \cos(\delta - \varphi)}}. \quad (123')$$

Jak widzimy ze wzoru (122'), wskutek refrakcji łuk dzienny gwiazd jest przedłużony o $\frac{296^s}{\sqrt{\cos(\delta + \varphi) \cos(\delta - \varphi)}}$; przedłużenie to

dla danej gwiazdy zmienia się wraz z szerokością geograficzną, a w danym miejscu zależy od zboczenia gwiazdy. Wpływ refrakcji na słońce pociąga za sobą przedłużenie dnia, którego wielkość w danym miejscu obserwacji jest zmienna w zależności od δ_{\odot} . Tak na przykład we Lwowie przedłużenie dnia wskutek refrakcji zmienia się w ciągu roku w granicach od 459^s do 583^s . Najmniej przedłużony jest dzień w czasie równonocy, najbardziej w czasie stanowisk słońca.

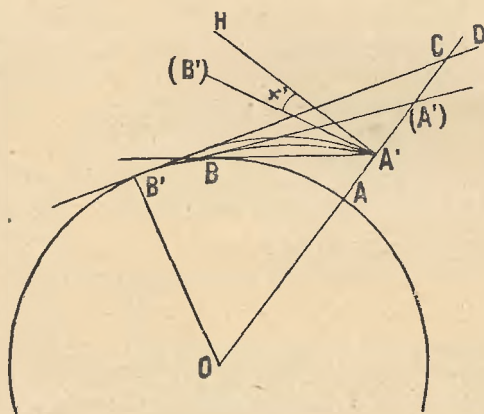
64. Wpływ refrakcji na wielkość depresji horyzontu fizycznego i promień widnokręgu. W ustępie 25 zaznaczyliśmy potrzebę rozróżniania pomiędzy prawdziwą depresją horyzontu fizycznego i prawdziwym promieniem widnokręgu, a depresją pozorną i promieniem widnokręgu pozornym. Różnice wspomniane wywołane są przez działanie refrakcji.

Gdyby światło nie ulegało załamaniu w atmosferze, to styczna, poprowadzona do powierzchni ziemi z jakiegoś punktu A' (ryc. 45) przecinałaby sklepienie niebieskie na horyzoncie fizycznym punktu A'. Niechaj na przykład w płaszczyźnie rysunku punktem styczności będzie B, to punkt B widzialny jest na horyzoncie fizycznym punktu A', i odwrotnie, punkt A' widzialny jest na horyzoncie astronomicznym punktu B. Kąt $HA'B = \alpha$ jest zatem prawdziwą depresją horyzontu fizycznego w punkcie A'.

Skutkiem refrakcji jednakże promień, który z punktu A' wychodzi w kierunku A'B, zakreśla w atmosferze drogę krzywą, której strona wklęsła zwrócona jest ku powierzchni ziemi. Do punktu B z A' przybywa promień, który z A' wyszedł w kierunku innym, aniżeli A'B, i przybywa również po linii krzywej. Niechaj będzie B(A') kierunek stycznej do tej krzywej w punkcie B, to jest to zarazem kierunek, w którym z punktu B widzialny jest punkt A'. Jest on w tych warunkach, jak widać na rycinie, wzniesiony nad horyzont astronomiczny punktu B o kąt $(A')BA'$.

Niechaj będzie B' taki punkt na powierzchni ziemi, że prosta B'D, przypadająca w płaszczyźnie poziomu tego punktu, jest zarazem styczna do promienia światła, przechodzącego z A

do B' w atmosferze. Oczywiście w tym wypadku punkt A' widzialny jest z punktu B' na jego horyzoncie astronomicznym, ale punkt B' z punktu A' widzialny jest w kierunku stycznej do promienia zakrzywionego, przechodzącej przez punkt A' , t. j. w kierunku prostej $A'(B')$. Jeżeli więc $A'H$ jest prostą poziomą w płaszczyźnie $A'B'(B')$, to kąt $HA'(B') = \kappa'$ jest pozorną depresją horyzontu fizycznego w punkcie A' . Podobnie łuk $AB = s$ jest prawdziwym promieniem widnokregu punktu A' , a łuk $AB' = s'$, jest pozornym promieniem tego widnokregu.



Rycina 45.

Widzimy z rysunku, że $\angle HA'(B') < \angle HA'B$, a $\cap B'A > \cap BA$ albo $\kappa' < \kappa$, a $s' > s$. To znaczy, że z powodu refrakcji depresja horyzontu fizycznego jest zmniejszona, a promień widnokregu jest powiększony.

W celu znalezienia wartości kątów κ' i s' oprzyjmy się na wyłożonej poprzednio teorii refrakcji. Niechaj będzie r_0 odległość punktu B' od środka ziemi, μ_0 współczynnik załamania powietrza w punkcie B' , i_0 kąt padania promienia światła $A'B'$ również w punkcie B' . Odpowiednie wielkości dla punktu A' niech będą $r_0 + h$, μ , i . Pomiedzy temi wielkościami, jak wiemy, zachodzi związek (c'')

$$\Delta\mu \sin i = r_0 \mu_0 \sin i_0.$$

Ponieważ w punkcie B' styczna do promienia A'B' jest linią poziomą, a styczna do tego promienia w punkcie A' tworzy z płaszczyzną poziomą kąt κ' , więc jest $i_0 = 90^\circ$, $i = 90^\circ - \kappa'$, i z powyższego wzoru wypływa

$$\cos \kappa' = \frac{r_0}{\Delta} \cdot \frac{\mu_0}{\mu}.$$

Zgodnie z oznaczeniami poprzednich ustępów jest także

$$\frac{r_0}{\Delta} = \cos \kappa = 1 - s, \quad \frac{\mu_0}{\mu} = 1 + \alpha\omega;$$

można więc też pisać

$$\cos \kappa' = (1 - s)(1 + \alpha\omega),$$

albo z dostatecznem przybliżeniem

$$\cos \kappa' = 1 - (s - \alpha\omega).$$

Rozwijając $\cos \kappa$ i $\cos \kappa'$ i poprzestając na wyrazach drugiego stopnia, otrzymujemy z powyższych wzorów

$$\cos^2 \kappa = 1 - 2s, \quad \cos^2 \kappa' = 1 - 2(s - \alpha\omega),$$

a więc

$$\frac{\sin \kappa'}{\sin \kappa} = \sqrt{1 - \frac{\alpha\omega}{s}} = \frac{\kappa'}{\kappa},$$

$$\kappa' = \kappa \sqrt{1 - \alpha \cdot \frac{\omega}{s}}. \quad (c)$$

Pomiędzy ω i s przyjęliśmy związek, określony przez wzór (91), mianowicie

$$\frac{r_0}{l_0} s = 2f\omega - (1 - f) \log(1 - \omega).$$

Rozwijając ω na szereg według potęg s , otrzymujemy

$$\omega = \frac{\frac{r_0}{l_0} s}{1+f} - \frac{1}{2} \frac{(1-f) \left(\frac{r_0}{l_0}\right)^2 s^2}{(1+f)^3} - \dots$$

i dla obliczenia ω wystarczy uwzględnić pierwszy wyraz tego szeregu. Przyjmując więc

$$\frac{\omega}{s} = \frac{r_0}{l_0(1+f)},$$

po podstawieniu we wzorze (cj) otrzymujemy

$$\kappa' = \kappa \left(1 - \frac{\alpha r_0}{2 l_0 (1+f)} \right).$$

W teorii refrakcji przyjęliśmy (str. 263)

$$\alpha = 0.0002916, \quad \frac{l_0}{r_0} = 0.012686, \quad f = 0.2.$$

Z temi wartościami według powyższego wzoru otrzymuje się

$$\kappa' = (1 - 0.0958) \kappa = 0.9042 \kappa. \quad (\text{ck})$$

W powyższym wzorze współczynnik przy κ , którego wartość stoi w związku ścisłym z teorią ogólną refrakcji astronomicznej i z wartościami stałych w tejże teorii przyjętymi, nie zgadza się z obserwacją. Pochodzi to stąd, że na wartość jego wpływają wyłącznie tylko najniższe warstwy atmosfery, których stan ulega bardzo szybkim zmianom, mogącym powodować znaczne odchylenia wartości współczynnika od średniej wartości. Z bardzo licznych obserwacyj otrzymał Delambre jako wartość średnią współczynnika 0.9216, i tę wartość przyjmuje się w praktyce, jako najlepiej odpowiadającą spostrzeżeniom. Przyjmując powyższą wartość oraz wartość κ według wzoru (64''), znajdujemy

$$\kappa' = 106''.45 \sqrt{h}. \quad (124)$$

Wzór ten określa wartość średnią depresji pozornej, prawdziwa jej wartość zmienia się w zależności od warunków meteorologicznych, skutkiem czego objawia się u niej chód dzienny z maximum w południe; wartość depresji jest też mniejsza na morzu, niż na lądzie.

Szczególnie silnie na wartość depresji wpływa różnica temperatury powierzchni ziemi lub wody i przylegającej do niej warstwy powietrza. Zajmijmy się nieco bliżej tą sprawą.

Ponieważ jest

$$\cos \kappa' = \frac{r_0}{\Delta} \cdot \frac{\mu_0}{\mu},$$

więc

$$\operatorname{tang}^2 \kappa' = \frac{1 - \cos^2 \kappa'}{\cos^2 \kappa'} = \left(\frac{\Delta}{r_0} \right)^2 \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^2 - 1.$$

Pisząc

$$\mu = 1 + (\mu - 1), \quad \mu_0 = 1 + (\mu_0 - 1),$$

i zważywszy, że $\mu - 1$ i $\mu_0 - 1$ są małymi ułamkami, możemy przyjąć z dostateczną dokładnością

$$\begin{aligned} \mu^2 &= 1 + 2(\mu - 1), \\ \mu_0^2 &= 1 + 2(\mu_0 - 1), \end{aligned}$$

oraz

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^2 = \frac{1 + 2(\mu - 1)}{1 + 2(\mu_0 - 1)} = 1 - 2(\mu_0 - \mu).$$

Dalej jest

$$\left(\frac{\Delta}{r_0} \right)^2 = \sec^2 \kappa = 1 + \operatorname{tang}^2 \kappa,$$

a zatem

$$\operatorname{tang}^2 \kappa' = (1 + \operatorname{tang}^2 \kappa) [1 - 2(\mu_0 - \mu)] - 1,$$

lub też, gdy opuścimy mały wyraz $2 \operatorname{tang}^2 \kappa (\mu_0 - \mu)$, jest

$$\operatorname{tang}^2 \kappa' = \operatorname{tang}^2 \kappa - 2(\mu_0 - \mu).$$

Mieliśmy także

$$\alpha\omega = 1 - \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0}$$

oraz

$$\omega = 1 - \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Jeżeli różnice gęstości powietrza w przylegających do siebie warstwach przypiszemy tylko różnicy temperatury tych warstw, gdyż przy małych wzniesieniach obserwatora różnice ciśnienia są małe i na gęstość powietrza znaczniejszego wpływu mieć nie mogą, to możemy napisać

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1 + at_0}{1 + at} = 1 + a(t_0 - t) + \dots,$$

gdzie a oznacza współczynnik rozszerzalności powietrza, t temperaturę w miejscu obserwacji, a t_0 temperaturę na powierzchni ziemi lub morza. Przy takim założeniu jest w przybliżeniu

$$\begin{aligned}\omega &= a(t - t_0), \\ \mu_0 - \mu &= \alpha \mu_0 a(t - t_0), \\ \text{tang}^2 \kappa' &= \text{tang}^2 \kappa - 2 \alpha \mu_0 a(t - t_0).\end{aligned}$$

Wyciągając pierwiastek po obu stronach i pisząc

$$\text{tang } \kappa = \kappa \sin 1'', \quad \text{tang } \kappa' = \kappa' \sin 1'',$$

otrzymujemy z dostatecznem przybliżeniem

$$\kappa' = \kappa - \frac{\alpha \mu_0 a}{\kappa \sin^2 1''} (t - t_0).$$

Przyjmowaliśmy poprzednio

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.0002916, \\ \mu_0 &= 1.0002925, \\ a &= 0.0036706.\end{aligned}$$

Z temi wartościami, stosując wzór powyższy, otrzymujemy

$$\kappa' = \kappa + \frac{45553''}{\kappa} (t_0 - t).$$

Widzimy z tego wzoru, że wartość κ' w silnym stopniu zależy od różnicy temperatury ($t_0 - t$), i że nawet stać się może ujemną, jeżeli różnica ta jest dostatecznie wielka. Wtedy horyzont fizyczny wznosi się ponad horyzont astronomiczny. Oczywiście zdarzać się to może tylko w warunkach wyjątkowych, a przykład stanowi zjawisko mirażu.

W ścisłym związku z wartością κ' znajduje się też wartość pozornego promienia widnokręgu s' . Jak już zaznaczyliśmy, pozornym promieniem widnokręgu jest łuk AB' na ryc. 45. Punkt C, w którym styczna do koła AB w punkcie B' przecina pion punktu A, jest tym punktem, dla którego łuk AB' jest prawdziwym promieniem widnokręgu. Gdy więc jest

$$AA' = h, \quad AC = h_1,$$

to według wzoru (65''') znajdujemy

$$AB = s = 3571.4 \sqrt{h},$$

$$AB' = s' = 3571.4 \sqrt{h_1},$$

a stąd wypływa

$$s' = \sqrt{\frac{h_1}{h}} \cdot s.$$

Aby można było obliczyć s' z powyższego wzoru, musi być znana wartość h_1 . Ponieważ $\sphericalangle A'B'O$ bardzo mało różni się od kąta prostego, a kąt $B'OA'$ jest bardzo mały, więc kąt $B'A'O$ także mało różni się od kąta prostego. Możemy zatem z dostatecznem przybliżeniem uważać trójkąt $CB'A'$ za prostokątny przy A' ; w tem założeniu otrzymujemy

$$A'C = h_1 - h = B'C \sin CB'A'.$$

Tu podstawiamy

$$\overline{B'C}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{B'O}^2 = (r + h)^2 - r^2 = 2 r h_1 + h_1^2,$$

albo z dostateczną dokładnością

$$B'C = \sqrt{2 r h_1};$$

również z dostateczną dokładnością przyjąć można

$$\sphericalangle CB'A' = \sphericalangle BA'(B) = \kappa - \kappa'.$$

Podstawiając te wartości przybliżone we wzorze na $h_1 - h$, znajdujemy

$$h_1 - h = \sin(\kappa - \kappa') \sqrt{2 r h_1}.$$

Tu przyjmujemy, jak poprzednio, $\kappa' = 0.9216 \kappa$ oraz

$$\sin(\kappa - \kappa') = (\kappa - \kappa') \sin 1'' = 0.0784 \kappa \sin 1''.$$

Dalej według ustępu 25 można przyjąć

$$\kappa \sin 1'' = \sqrt{2 \frac{h}{r}},$$

więc

$$\begin{aligned} h_1 - h &= 0.1568 \sqrt{h h_1}, \\ \frac{h_1}{h} &= 1 + 0.1568 \sqrt{\frac{h_1}{h}}, \end{aligned}$$

a stąd przez rozwiązanie równania wypływa

$$\sqrt{\frac{h_1}{h}} = 0.0784 + \sqrt{1 + (0.0784)^2} = 1.0815.$$

Postawiając tę wartość we wzorze na s' , znajdujemy wreszcie

$$s' = 1.0815 s = 3862 \sqrt{h}. \quad (125)$$

Oczywiście pozorny promień widnokregu ulega takim samym wahaniom, jak pozorna depresja horyzontu, i jest on tem większy, im mniejszą jest depresja.

ROZDZIAŁ VI.

PARALAKSA.

65. Ruch paralaktyczny. Określenie paralaksy. Zjawisko refrakcji poucza nas, że należy rozróżniać pomiędzy *promieniem widzenia* gwiazdy, t. j. prostą, określającą kierunek, w którym obserwator *widzi* gwiazdę, a prostą, łączącą oko obserwatora z gwiazdą, określającą kierunek, w którym gwiazda się *znajduje*. Pierwszy z tych kierunków określa na sklepieniu niebieskiem *miejsce pozorne* gwiazdy, drugi określa jej *miejsce prawdziwe*. Stosownie do tego współrzędne, odnoszące się do miejsca pozornego, nazywają się *pozornemi*, odnoszące się zaś do miejsca prawdziwego — *prawdziwemi*. Refrakcja nie jest, jak zobaczymy, jedynem zjawiskiem, stwarzającym potrzebę rozróżniania pomiędzy współrzędnymi prawdziwymi a pozornymi. W ogólności wartości tych współrzędnych różnią się między sobą, a wielkość tej różnicy jest zmienną, jako zależną od zmiennego wpływu tych czynników, które ją powodują. Wynikają stąd zmiany wartości współrzędnych pozornych, zachodzące nawet wtedy, gdy kierunek, określający miejsce prawdziwe gwiazdy, nie ulega zmianie. Zmiany te określają *ruch pozorny* gwiazdy.

Zmianom ulegać mogą nie tylko współrzędne pozorne, ale i prawdziwe, chociaż położenie gwiazdy w przestrzeni jest niezmiennie; i takie zatem zmiany objawiają się, jako ruchy pozorne gwiazd. Jednem ze źródeł ruchów pozornych tego rodzaju jest ruch obserwatora.

Zmiana położenia prostej, łączącej oko obserwatora z jakimś punktem, wywołana może być w sposób dwojaki: 1. przez zmianę położenia punktu, 2. przez zmianę położenia oka. Gdy

za taki punkt uważać będziemy gwiazdę, której miejsce prawdziwe na niebie przez prostą, prowadzoną do niej od oka, jest określone, to zmiana miejsca gwiazdy lub oka, o ile ta zmiana nie odbywa się w kierunku prostej łączącej, pociąga za sobą ruch kątowy gwiazdy na niebie; gdy zmienia swe położenie gwiazda, ruch jest prawdziwy, gdy zmienia swe położenie obserwator, ruch jest pozorny. Widzieliśmy, że przyczyny ruchów pozornych wogóle mogą być różne. Specjalnie taki ruch pozorny, który jest odzwierciedleniem prawdziwego ruchu obserwatora, nazywa się *ruchem paralaktycznym*. Tak na przykład ruch dzienny gwiazd, odzwierciedlający ruch obserwatora dookoła osi ziemskiej, lub ruch roczny słońca, odzwierciedlający ruch obserwatora wraz z ziemią dookoła słońca, są ruchami paralaktycznymi.

Ogólnie *paralakśą* jakiejś gwiazdy nazywać będziemy kąt, którego wierzchołkiem jest gwiazda, którego jedno ramię posiada stały kierunek, drugie zaś przechodzi przez punkt obserwacji. Z powyższego określenia paralaksy wynika, że każdy ruch obserwatora, odbywający się w kierunku, tworzącym z kierunkiem ku danemu przedmiotowi kąt różny od zera, musi zmieniać wartość paralaksy tego przedmiotu.

Przedmiotami, które wchodzą w rachubę w astronomji sferycznej, są ciała niebieskie. Gdyby promień ziemi w stosunku do odległości ciał niebieskich można uważać za znikomy, t. j. gdyby dwie proste, poprowadzone z dwóch końców jakiegokolwiek średnicy ziemskiej do danego ciała niebieskiego, uchodzić mogły za równoległe, to zmiana punktu obserwacji na ziemi, nie powodowałaby zmiany paralaksy.

W istocie, kąt utworzony przez dwie takie proste, praktycznie jest równy zeru, gdy są one skierowane do jakiejś gwiazdy stałej. W przypadku ciał naszego układu planetarnego kąt ten jednakże ma wartość, różną od zera, która z pomocą narzędzi i metod astronomicznych wyznaczona być może. Wskutek tego spólrzędne sferyczne tych ciał mają wartość, zmieniającą się wraz z miejscem obserwacji, i gdy je podajemy, jest rzeczą niezbędną podanie też spólrzędnych geograficznych miejsca obserwacji. Prócz tego, położenie miejsca obserwacji w przestrzeni ulega zmianie z powodu obrotu ziemi dookoła osi i określone jest

jedynie wtedy, gdy dany jest czas obserwacji. Paralaksa, której wartość zmienia się w zależności od współrzędnych geograficznych miejsca obserwacji oraz od obrotu ziemi dookoła osi i mająca skutek tego okres dzienny, nazywa się *paralakcją dzienną*.

Ale miejsce obserwatora w przestrzeni zmienia się także z powodu każdego innego ruchu ziemi. Weźmy pod uwagę najważniejsze z nich.

Ziemia ze swym księżycem tworzy układ, którego środek ciężkości znajduje się na prostej, łączącej środek ziemi ze środkiem księżyca w odległości od tych środków odwrotnie proporcjonalnej do mas tych dwóch ciał. Dookoła tego środka ciężkości zakreśla środek ziemi drogę zamkniętą, zupełnie podobną kształtem do drogi księżyca, i w tej samej płaszczyźnie co ta ostatnia leżącą. Okresem tego ruchu jest miesiąc gwiazdowy. Ten ruch ziemi jest źródłem paralaksy, która ze względu na okres, w ciągu którego prosta, łącząca środek ziemi i księżyca powraca do poprzedniego położenia, nazywa się *paralakcją miesięczną*.

Paralaksa dzienna i paralaksa miesięczna mają wartość znikomą dla gwiazd stałych. Ruch ziemi dookoła słońca objawia się przedewszystkiem w ruchach paralaktycznych słońca i planet, które złączone z własnymi ich ruchami, powodują te ruchy, które w istocie obserwujemy. Te ruchy geocentryczne planet są przedmiotem badań teorii ruchów planetarnych i w zakres astronomii sferycznej nie wchodzi.

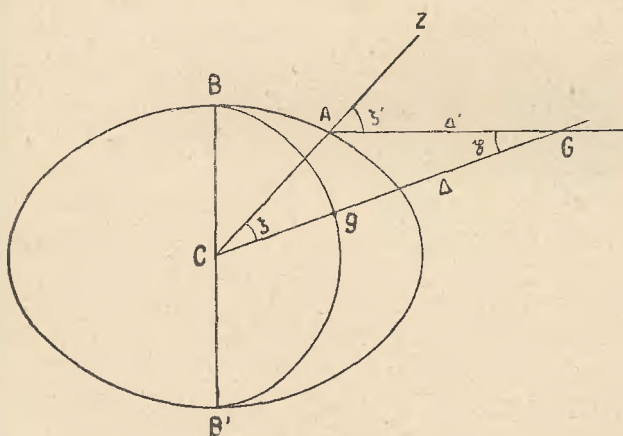
Do astronomii sferycznej należą zmiany współrzędnych gwiazd stałych, powodowane tym ruchem ziemi. Ponieważ ziemia po upływie roku wraca do tych samych punktów swej drogi, więc paralaksa gwiazd stałych, mająca źródło w ruchu ziemi dookoła słońca, nazywa się *paralakcją roczną*.

Prócz trzech wyżej wymienionych ruchów, ziemia posiada jeszcze ruch przestrzenny, któremu ulega cały układ planetarny. Ruch ten pociąga za sobą ruch paralaktyczny gwiazd, który jest jeszcze mało zbadany i nie wykazuje dotąd żadnej okresowości ani zmiany kierunku. Paralaksa, mająca źródło w ruchu ziemi, wspólnym całemu układowi planetarnemu, nazywa się *paralakcją wiekową*.

Zajmijmy się szczegółowiej każdą z wymienionych paralaks.

66. Paralaksa dzienna. Spółrzedne topocentryczne i geocentryczne. Niechaj elipsa BAB' (ryc. 46) wyobraża przekrój sferoidalnej ziemi płaszczyzną południka miejsca obserwacji A ; C jest środkiem ziemi, a BB' jej osią. Niechaj spółrzedne geograficzne miejsca obserwacji będą φ i λ , a θ niech będzie czasem gwiazdowym obserwacji gwiazdy G , której odległość od środka ziemi $CG = \Delta$; prosta CG przecina powierzchnię ziemi w punkcie g .

Kierunek promienia ziemskiego CA , przechodzącego przez punkt obserwacji, przecina sklepienie niebieskie w punkcie Z' , który nazywać będziemy *geocentrycznym zenitem* dla odróżnienia



Rycina 46.

od zenitu, określonego przez pion punktu A (ust. 28). Kąt $\zeta' = Z'AG$ jest więc odległością gwiazdy G od geocentrycznego zenitu punktu A , widzianą przez obserwatora w A . Podobnie kąt $\zeta = Z'CG$ jest odległością gwiazdy G od geocentrycznego zenitu punktu A , widzianą ze środka ziemi.

Nazwijmy płaszczyzny, przechodzące przez promień CA , a więc też przez zenit geocentryczny punktu A , *geodezyjnymi płaszczyznami wierzchołkowemi*, a *geodezyjnymi kołami wierzchołkowemi* wielkie koła, określone przez te płaszczyzny na sklepieniu niebieskiem. Stosownie do tego odległość zenitalną, liczoną na geodezyjnym kole wierzchołkowem od geocentrycznego zenitu, nazywać będziemy *odległością zenitalną geodezyjną*, kąt zaś

między geodezyjną płaszczyzną wierzchołkową a płaszczyzną południka punktu A — *azymutem geodezyjnym*. Można jeszcze nazwać *poziomem geodezyjnym* płaszczyznę prostopadłą do promienia punktu A, przechodzącą przez środek ziemi, *horyzontem geodezyjnym* wielkie koło, określone przez nią na niebie, wreszcie układ spółrzednych, którego biegunem jest zenit geocentryczny, kołem zaś głównem horyzont geodezyjny, nazwać można *geodezyjnym układem poziomowym*. W tym układzie spółrzednymi punktu na niebie są: azymut geodezyjny i geodezyjna odległość zenitalna.

Gdy od gwiazdy G przeprowadzimy linje proste przez środek ziemi C, którego położenie nie ulega zmianie z powodu obrotu ziemi, oraz przez punkt obserwacji A, to, zgodnie z określeniem poprzedniego ustępu, kąt $CGA = p$ jest paralaksą dzienną gwiazdy G.

Widzimy z ryciny, że gdyby obserwator w punkcie A przesunął się do środka ziemi, pociągnęłoby to za sobą przesunięcie paralaktyczne gwiazdy G w płaszczyźnie ACG; odpowiadałby mu pozorny ruch gwiazdy na przechodzącym przez nią geodezyjnym kole wierzchołkowem. Zmianie skutkiem tego uległaby tylko geodezyjna odległość zenitalna gwiazdy, azymut zaś geodezyjny pozostałby niezmienny.

Oznaczmy przez ζ i ζ' odpowiednio kąty $Z'CG$ i $Z'AG$, to z trójkąta ACG wynika

$$\zeta' = \zeta + p. \quad (126)$$

To znaczy, że wskutek paralaksy dziennej gwiazda, widziana z jakiegokolwiek punktu ziemi A, posiada geodezyjną odległość zenitalną o kąt p większą, aniżeli widziana ze środka ziemi. Oczywiście kąt p ma wartość zmienną w zależności od obrotu ziemi.

Niech będzie promień ziemi $CA = r$, to z trójkąta AGC otrzymujemy

$$\sin p = \frac{r}{\Delta} \sin \zeta'. \quad (127)$$

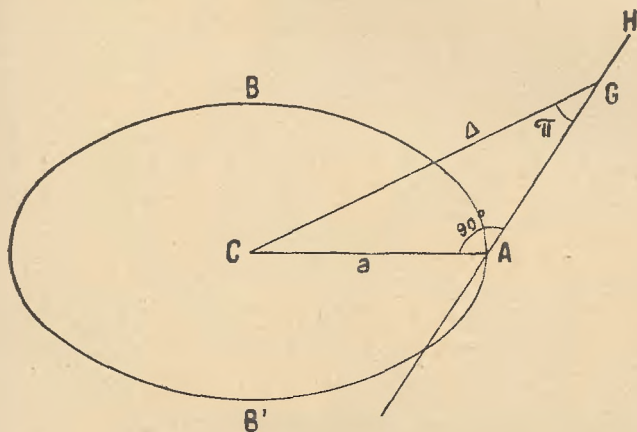
Widzimy z tego wzoru, że kąt p jest tem mniejszy, im większą jest odległość gwiazdy Δ ; przy danej zaś odległości

wzrasta wraz z r i ζ' . W danem miejscu obserwacji kąt p ma największą wartość, gdy $\zeta' = 90^\circ$, t. j., gdy gwiazda znajduje się na geodezyjnym horyzoncie. Wtedy jest

$$\sin p_0 = \frac{r}{\Delta} \quad (127')$$

i kąt p_0 nazywa się *paralakcją horyzontalną*. Wartość paralaksy horyzontalnej zależy od r i staje się największą, gdy $r = a$, t. j. promieniowi równika ziemskiego. Dla obserwatora na równiku, gdy $\zeta' = 90^\circ$, jest

$$\sin \pi = \frac{a}{\Delta}, \quad (127'')$$



Rycina 47.

Kąt π nazywa się *paralakcją horyzontalną równikową*. Na równiku kierunek pionu danego punktu schodzi się z kierunkiem promienia, przechodzącego przez ten punkt, a więc też zenit astronomiczny jest zarazem geocentrycznym; również horyzont astronomiczny schodzi się z geodezyjnym.

Znaczenie geometryczne kąta π wynika z ryc. 47. Niechaj AH przedstawia prostą poziomą w punkcie A, leżącym na równiku ziemskim, na której znajduje się gwiazda G. Ponieważ AG bardzo mało różni się od Δ , więc π jest kątem, pod którym z odległości gwiazdy widziany jest promień równika ziemskiego. Kąt π dla danej stałej odległości Δ ma również wartość stałą.

Ze wzoru (127'') wypływa

$$\Delta = \frac{a}{\sin \pi} = a \operatorname{cosec} \pi ; \quad (128)$$

lub, gdy przyjmiemy promień równika ziemskiego za jednostkę długości, jest wprost

$$\Delta = \operatorname{cosec} \pi. \quad (128')$$

Widzimy, że pomiędzy odległością gwiazdy a jej paralaksą horyzontalną równikową zachodzi prosta zależność, która pozwala tę odległość, wyrażoną w promieniach równika ziemskiego, wyznaczyć, gdy paralaksa horyzontalna równikowa gwiazdy jest znana.

Pisząc jeszcze $\frac{r}{a} = \rho$, mamy też

$$\sin p_0 = \rho \sin \pi,$$

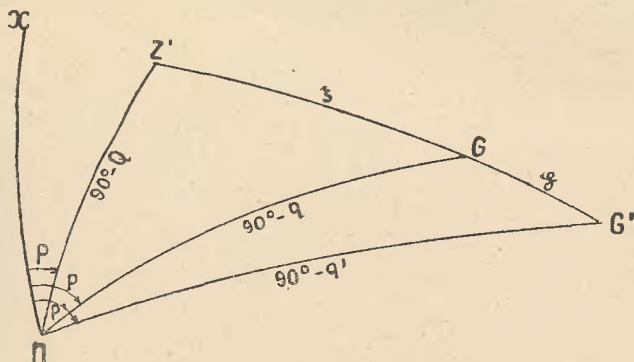
$$\sin p = \rho \sin \pi \sin \zeta'.$$

Nazwijmy spółrzedne gwiazdy G, widzianej z danego miejsca obserwacji, spółrzednymi *topocentrycznymi*, a spółrzedne tejże gwiazdy, widzianej ze środka ziemi, *geocentrycznymi*. Pomiędzy spółrzednymi topocentrycznymi a geocentrycznymi zachodzi w ogólności pewna różnica, zależna od paralaksy p , która w specjalnych przypadkach redukuje się do zera. Różnica ta stanowi *redukcję na środek ziemi* miejsca gwiazdy. Tak np. redukcja na środek ziemi geodezyjnej odległości zenitalnej równa się kątowi p , redukcja zaś na środek ziemi geodezyjnego azymutu równa się zeru.

Gdy chodzi o badanie zmiany spółrzednych gwiazdy, niezależnych od położenia obserwatora, nie można w tym celu porównywać jej spółrzednych topocentrycznych, obserwowanych przez różnych obserwatorów w różnych czasach i miejscach, lecz tylko spółrzedne sprowadzone do jednego wspólnego miejsca obserwacji, które nie bierze udziału w ruchu obrotowym ziemi. Najdogodniejszym takim punktem jest środek ziemi.

Gdy więc na podstawie obserwacji, dokonanych w różnych miejscach, znajdziemy dla epok obserwacji, współrzędne geocentryczne, t. j. wykonamy redukcję na środek ziemi, wtedy dopiero możemy być pewni, że różnice współrzędnych, które po redukcji pozostaną, nie mają źródła w paralaksie dziennej.

67. Zmiana wartości współrzędnych sferycznych gwiazdy z powodu paralaksy dziennej. Wzory ogólne. Widzieliśmy, że zjawisko paralaksy dziennej występuje w postaci najprostszej, gdy współrzędne gwiazdy odniesione są do geodezyjnego układu poziomego; odpowiednio też i sposób redukcji na środek ziemi jest wtedy najprostszy.



Rycina 48.

Chociaż wspomniany układ współrzędnych w praktyce astronomicznej nigdy nie bywa stosowany, to jednakże wyniki otrzymane mają znaczenie doniosłe, gdyż dają możliwość wyznaczenia wpływu paralaksy dziennej na współrzędne gwiazdy, odniesione do jakiegokolwiek układu sferycznego, którego położenie w odniesieniu do geodezyjnego układu poziomego jest określone. Postępujemy w sposób zupełnie podobny, jak w ustępie 62, gdzie chodziło o wyznaczenie zmian, jakim ulegają współrzędne gwiazd wskutek refrakcji.

Niechaj na rycinie 48 Z' oznacza zenit geocentryczny miejsca obserwacji, a $Z'GG'$ geodezyjne koło wierzchołkowe gwiazdy G . Na tem kole w punkcie G niechaj znajduje się geocentryczne

miejsce gwiazdy, a w punkcie G' — topocentryczne. To ostatnie jest, jak wiemy, o kąt p bardziej oddalone od geocentrycznego zenitu, aniżeli pierwsze. Gdy więc oznaczymy

$$Z'G = \zeta, \quad Z'G' = \zeta',$$

to jest

$$\zeta' = \zeta + p.$$

Gdy położenie gwiazdy odniesiemy do układu współrzędnych, którego biegunem jest punkt Π , podobnie jak w ustępie 62, to p i q są geocentrycznymi współrzędnymi gwiazdy, a p' i q' jej współrzędnymi topocentrycznymi. Wzory na $p' - p$ i $q' - q$ znajdziemy zupełnie analogicznie, jak w ust. 62. Teraz wzór (cd) ustępu 62-go ma postać

$$\sin(p' - p) = \frac{\sin(p - P) \cos Q \sin p}{\cos q' \sin \zeta}; \quad (a)$$

a że jest

$$\sin \zeta \sin Z' = \cos q \sin(p - P), \quad (b)$$

$$\sin \zeta' \sin Z' = \cos q' \sin(p' - P), \quad (c)$$

więc

$$\frac{\sin(p - P)}{\cos q' \sin \zeta} = \frac{\sin(p' - P)}{\cos q \sin \zeta'}.$$

Gdy wprowadzimy tu

$$\sin p = \rho \sin \pi \sin \zeta',$$

to jest

$$\sin(p' - p) = \frac{\rho \sin \pi \sin(p' - P) \cos Q}{\cos q}, \quad (d)$$

oraz też

$$\tan(p' - p) = \frac{\rho \sin \pi \cos Q \sec q \sin(p - P)}{1 - \rho \sin \pi \cos Q \sec q \cos(p - P)}. \quad (129)$$

W celu znalezienia $q' - q$ mamy

$$\begin{aligned} \sin q \sin \zeta' - \sin q' \sin \zeta &= \sin Q \sin p = \rho \sin \pi \sin Q \sin \zeta', \\ -\sin q \cos q' + \sin q' \cos q \cdot \frac{\sin(p - P)}{\sin(p' - P)} &= -\rho \sin \pi \sin Q \cos q', \\ \sin(q' - q) - \sin q' \cos q \left[1 - \frac{\sin(p - P)}{\sin(p' - P)} \right] &= -\rho \sin \pi \sin Q \cos q', \\ \sin(q' - q) = \frac{\sin q' \cos q}{\sin(p' - P)} [\sin(p' - P) - \sin(p - P)] - & \\ -\rho \sin \pi \sin Q \cos q', & \\ \sin(q' - q) = \rho \sin \pi \left[\cos Q \frac{\cos\left(\frac{p' + p}{2} - P\right)}{\cos \frac{p' - p}{2}} \sin q' - \sin Q \cos q' \right]. & \quad (e) \end{aligned}$$

Określając M podług wzoru (115), t. j. kładąc

$$\operatorname{tang} M = \cotg Q \frac{\cos\left(\frac{p' + p}{2} - P\right)}{\cos \frac{p' - p}{2}}$$

i podstawiając we wzorze (e), otrzymamy

$$\sin(q' - q) = -\rho \sin \pi \sin Q \sec M \cos(M + q'), \quad (f)$$

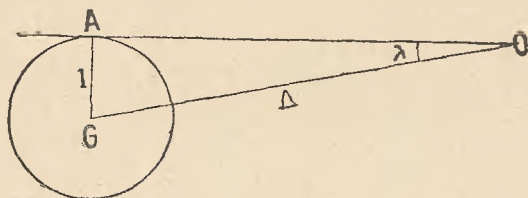
oraz

$$\operatorname{tang}(q' - q) = \frac{-\rho \sin \pi \sin Q \sec M \cos(M + q)}{1 - \rho \sin \pi \sin Q \sec M \sin(M + q)}. \quad (130)$$

We wzorach (129) i (130), określających wartość redukcji współrzędnych na środek ziemi, po prawej stronie występują współrzędne geocentryczne. Wzory te służą zatem bezpośrednio tylko do obliczenia współrzędnych topocentrycznych, gdy znane są geocentryczne. Jednakże można z ich pomocą obliczać także współrzędne geocentryczne na podstawie topocentrycznych przez przybliżenia.

W tym ostatnim przypadku w pierwszym przybliżeniu oblicza się $p' - p$ i $q' - q$, kładąc po prawej stronie wzorów (129) i (130) p' i q' zamiast p i q . Otrzymane w ten sposób wartości p_1 i q_1 są przybliżonemi wartościami p i q . Kładąc te wartości we wzorach na miejsce p' i q' , otrzymamy $p' - p_2$ i $q' - q_2$; p_2 i q_2 są drugiemu przybliżeniami wartości p i q . Gdy po podstawieniu tych wartości po prawej stronie otrzymane stąd $p' - p_3$ i $q' - q_3$ nie różnią się od $p - p_2$ i $q - q_2$, to znaczy, że $p_2 = p$, $q_2 = q$; jeżeli jest różnica, to należy wykonać jeszcze jedno przybliżenie.

Dodać należy, że pierwsze przybliżenie można zawsze obliczać za pomocą wzorów przybliżonych, o których niżej będzie mowa.



Rycina 49.

Jeżeli średnica ciała niebieskiego widziana jest przez obserwatora pod kątem, który może być wymierzony, to, gdy zmienia się odległość obserwatora od tego ciała, zmienia się też wielkość kątowa średnicy. Należy więc też, podobnie jak u współrzędnych, odróżniać średnicę topocentryczną od geocentrycznej. Różnica tych dwóch średnic stanowi redukcję średnicy ciała niebieskiego na środek ziemi i wyraża wpływ paralaksy na wielkość pozorną.

Ograniczmy się do przypadku, gdy ciało niebieskie ma postać kuli, co w praktyce jest zupełnie wystarczającym. Przypuśćmy, że środkiem tej kuli, przedstawiającej ciało niebieskie, jest punkt G na ryc. 49, i niech będzie l długość jej promienia. Promień ten przez obserwatora, znajdującego się w punkcie O, widziany jest pod kątem $\angle GOA = \lambda$. Jeżeli odległość $GO = \Delta$, to z trójkąta GOA wynika

$$\sin \lambda = \frac{l}{\Delta};$$

gdyby odległość obserwatora wynosiła Δ' , to kąt GOA miałby wartość λ' i byłoby podobnie

$$\sin \lambda' = \frac{l}{\Delta'};$$

z obu powyższych wyrażeń wypływa

$$\frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda} = \frac{\Delta}{\Delta'}. \quad (g)$$

Jeżeli więc Δ oznacza geocentryczną, a Δ' topocentryczną odległość gwiazdy G, to z ryciny 46 wynika

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\sin \zeta'}{\sin \zeta}, \quad (h)$$

oraz ze względu na (g)

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda} = \frac{\sin \zeta'}{\sin \zeta}. \quad (131)$$

To znaczy, że wstawy topocentrycznej i geocentrycznej wielkości kątowej danego ciała niebieskiego mają się do siebie tak, jak wstawy topocentrycznej i geocentrycznej geodezyjnej odległości zenitalnej.

W praktyce spółrzedne gwiazdy odnoszą się zazwyczaj do innych układów sferycznych, postaramy się więc znaleźć wzór, w którym zamiast ζ i ζ' występować będą spółrzedne gwiazdy p i q , odniesione do układu ogólnego.

Z trójkątów $\Pi GZ'$ i $\Pi G'Z'$ (ryc. 48) wypływa

$$\sin \zeta \cos Z' = \sin q \cos Q - \cos q \sin Q \cos (p - P). \quad (i)$$

$$\sin \zeta' \cos Z' = \sin q' \cos Q - \cos q' \sin Q \cos (p' - P). \quad (j)$$

Pisząc

$$\begin{aligned} \frac{p' - p}{2} &= \left(\frac{p' + p}{2} - P \right) - (p - P), \\ -\frac{p' - p}{2} &= \left(\frac{p' + p}{2} - P \right) - (p' - P), \end{aligned}$$

skąd wynika

$$\begin{aligned}\cos \frac{p'-p}{2} &= \cos \left(\frac{p'+p}{2} - P \right) \cos (p-P) + \\ &+ \sin \left(\frac{p'+p}{2} - P \right) \sin (p-P) = \\ &= \cos \left(\frac{p'+p}{2} - P \right) \cos (p'-P) + \\ &+ \sin \left(\frac{p'+p}{2} - P \right) \sin (p'-P),\end{aligned}$$

oraz

$$\cos (p-P) = \frac{\cos \frac{p'-p}{2}}{\cos \left(\frac{p'+p}{2} - P \right)} - \operatorname{tang} \left(\frac{p'+p}{2} - P \right) \sin (p-P), \quad (\text{k})$$

$$\cos (p'-P) = \frac{\cos \frac{p'-p}{2}}{\cos \left(\frac{p'+p}{2} - P \right)} - \operatorname{tang} \left(\frac{p'+p}{2} - P \right) \sin (p'-P), \quad (\text{l})$$

i wprowadzając kąt pomocniczy M , określony przez wzór (115), t.j.

$$\operatorname{tang} M = \operatorname{cotg} Q \cdot \frac{\cos \left(\frac{p+p'}{2} - P \right)}{\cos \frac{p'-p}{2}},$$

otrzymamy

$$\sin Q \cos (p-P) = \cos Q \operatorname{cotg} M - \operatorname{tang} \left(\frac{p'+p}{2} - P \right) \sin Q \sin (p-P), \quad (\text{m})$$

$$\sin Q \cos (p'-P) = \cos Q \operatorname{cotg} M - \operatorname{tang} \left(\frac{p'+p}{2} - P \right) \sin Q \sin (p'-P). \quad (\text{n})$$

Te wartości podstawiamy we wzorach (i) i (j); otrzymujemy

$$\sin \zeta \cos Z' = \sin q \cos Q - \cos q \cos Q \cotg M + \\ + \operatorname{tang} \left(\frac{p' + p}{2} - P \right) \sin Q \sin (p - P) \cos q,$$

$$\sin \zeta' \cos Z' = \sin q' \cos Q - \cos q' \cos Q \cotg M + \\ + \operatorname{tang} \left(\frac{p' + p}{2} - P \right) \sin Q \sin (p' - P) \cos q',$$

a uwzględniając wzory (b) i (c), także

$$\sin \zeta \cos Z' \sin M = -\cos Q \cos (q + M) + \\ + \operatorname{tang} \left(\frac{p' + p}{2} - P \right) \sin Q \sin M \sin \zeta \sin Z',$$

$$\sin \zeta' \cos Z' \sin M = -\cos Q \cos (q' + M) + \\ + \operatorname{tang} \left(\frac{p' + p}{2} - P \right) \sin Q \sin M \sin \zeta' \sin Z',$$

albo

$$\sin \zeta \sin M \left[\cos Z' - \sin Z' \sin Q \operatorname{tang} \left(\frac{p' + p}{2} - P \right) \right] = \\ = -\cos Q \cos (q + M), \quad (o)$$

$$\sin \zeta' \sin M \left[\cos Z' - \sin Z' \sin Q \operatorname{tang} \left(\frac{p' + p}{2} - P \right) \right] = \\ = -\cos Q \cos (q' + M). \quad (p)$$

Dzieląc równanie (p) przez (o), znajdujemy

$$\frac{\sin \zeta'}{\sin \zeta} = \frac{\cos (q' + M)}{\cos (q + M)},$$

a gdy wynik ten podstawimy we wzorze (131), otrzymamy wreszcie

$$\frac{\Delta}{\lambda'} = \frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda} = \frac{\cos (q' + M)}{\cos (q + M)}. \quad (132)$$

Wzór (132) wyraża związek między paralaksą, a wielkością kątową obserwowanego ciała niebieskiego oraz jego odległością.

W zastosowaniach praktycznych nadaje się wzorom (129) i (130) zazwyczaj postać, dogodną do obliczenia logarytmowego przez wprowadzenie kątów pomocniczych, jak to zostało zrobione w ustępie 22 w zastosowaniu do wzoru (j) rozdz. II.

Oznaczmy

$$-\rho \sin \pi \cos Q \sec q \cos (p - P) = \sin \mu, \quad (133)$$

to jest

$$\operatorname{tang}(p' - p) = -\operatorname{tang}(p - P) \operatorname{tang} \mu \operatorname{tang} \left(45^\circ - \frac{\mu}{2} \right). \quad (129')$$

Podobnie, kładąc

$$-\rho \sin \pi \sin Q \sec M \sin (M + q) = \sin \nu, \quad (133')$$

otrzymamy

$$\operatorname{tang}(q' - q) = \operatorname{cotg}(M + q) \operatorname{tang} \nu \operatorname{tang} \left(45^\circ - \frac{\nu}{2} \right). \quad (130')$$

Niekiedy jest rzeczą korzystną wyrazić $p' - p$ i $q' - q$ w postaci szeregów, co uczynić można stosując wzory (26"). Oznaczmy

$$\rho \sin \pi \cos Q \sec q = m, \quad (134)$$

to jest

$$\operatorname{tang}(p' - p) = \frac{m \sin (p - P)}{1 - m \cos (p - P)},$$

i według trzeciego wzoru (26")

$$(p' - p) \sin 1'' = m \sin (p - P) + \frac{1}{2} m^2 \sin 2(p - P) + \frac{1}{3} m^3 \sin 3(p - P) + \dots \quad (129'')$$

Podobnie położmy

$$\rho \sin \pi \sin Q \sec M = n, \quad (134')$$

to jest

$$\operatorname{tang}(q' - q) = \frac{-n \sin [90^\circ - (M + q)]}{1 - n \cos [90^\circ - (M + q)]}$$

i według czwartego wzoru (26'') na str. 46

$$(q' - q) \sin 1'' = -n \cos (M + q) - \frac{1}{2} n^2 \sin 2(M + q) + \\ + \frac{1}{3} n^3 \cos 3(M + q) + \frac{1}{4} n^4 \sin 4(M + q) - \dots \quad (130'')$$

Wzory ściśle, wyżej wyprowadzone, stosowane być muszą tylko w przypadku księżycy, gdyż paralaksa księżycy wynosi zawsze około 1° . Paralaksa dzienna innych ciał naszego układu jest znacznie mniejsza; paralaksa słońca wynosi średnio $8''.80$, paralaksa zaś planet co najwyżej $30''$, a zazwyczaj tylko kilka lub kilkanaście sekund. Skutkiem tego we wszystkich przypadkach, z wyjątkiem księżycy, do obliczenia paralaksy dziennej wystarczają wzory przybliżone. Paralaksa dzienna gwiazd stałych jest znikoma.

Co się tyczy wzoru (132), to wogóle tylko w przypadku księżycy znajduje on zastosowanie, gdyż we wszystkich innych przypadkach różnica między λ i λ' zawarta jest zawsze w granicach błędów obserwacji. Ale i w przypadku księżycy różnica ta jest niewielka, i obliczenie jej dokładne z pomocą wzoru (132), w którym $\frac{\cos(q' + M)}{\cos(q + M)}$ mało się różni od jedności, wymagałoby uwzględnienia bardzo dużej liczby miejsc dziesiętnych; dlatego korzystniej jest stosować dostatecznie dokładny wzór przybliżony. Pisząc mianowicie

$$\lambda' = \lambda + (\lambda' - \lambda) \quad \text{i} \quad q' = q + (q' - q),$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \sin \lambda \cos (\lambda' - \lambda) + \cos \lambda \sin (\lambda' - \lambda) = \\ = & \frac{\sin \lambda [\cos (M + q) \cos (q' - q) - \sin (M + q) \sin (q' - q)]}{\cos (M + q)} = \\ = & \sin \lambda [\cos (q' - q) - \operatorname{tang} (M + q) \sin (q' - q)]. \end{aligned}$$

Ponieważ dla księżyca λ wynosi około $15\frac{1}{2}'$, a $\cos(\lambda' - \lambda)$ i $\cos(q' - q)$ mało różnią się od jedności, więc gdy przyjmiemy

$$\begin{aligned}\sin \lambda \cos(\lambda' - \lambda) &= \sin \lambda \cos(q' - q), \\ \cos \lambda &= 1,\end{aligned}$$

wypływa •

$$\sin(\lambda' - \lambda) = -\sin \lambda \tan(M + q) \sin(q' - q).$$

Podstawiając tu na $\sin(q' - q)$ wartość według wzoru (f), oraz z dostatecznem przybliżeniem przyjmując

$$\tan M = \cotg Q \cos(p - P), \quad (115')$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}\lambda' - \lambda &= \lambda \rho \sin \pi [\sin Q \sin q + \cos Q \cos q \cos(p - P)] = \\ &= \lambda \rho \sin \pi \cos \zeta.\end{aligned} \quad (132')$$

Do obliczenia Δ' również wygodniej stosować wzór na różnicę $\Delta' - \Delta$. Ponieważ jest

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda} = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

więc

$$\frac{\Delta - \Delta'}{\Delta'} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}.$$

Podstawiając na $\lambda' - \lambda$ wartość według wzoru (132'), pisząc po prawej stronie Δ zamiast Δ' i uwzględniając, że $\Delta \sin \pi = 1$, znajdujemy

$$\Delta' - \Delta = -\rho [\sin Q \sin q + \cos Q \cos q \cos(p - P)] = -\rho \cos \zeta. \quad (132'')$$

W przypadkach obliczenia paralaksy słońca i planet można przyjąć

$$m = \rho \pi \sin 1'' \cos Q \sec q, \quad (135)$$

$$n = \rho \pi \sin 1'' \sin Q \sec M, \quad (135')$$

a w rozwinięciach (129'') i (130'') można się ograniczyć do pierwszych wyrazów. Jest więc

$$p' - p = \rho \pi \cos Q \sin(p - P) \sec q, \quad (129''')$$

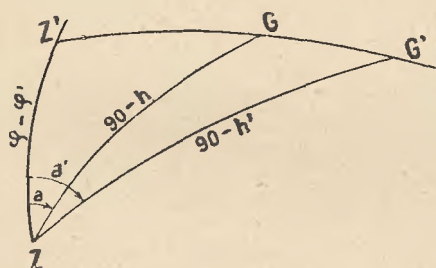
$$q' - q = -\rho \pi \sin Q \cos(q + M) \sec M, \quad (130''')$$

gdzie M ma wartość określoną przez wzór (115'), albo też bez kąta pomocniczego

$$q' - q = -\rho \pi [\sin Q \cos q - \cos Q \sin q \cos(p - P)]. \quad (130^{IV})$$

Powyższe wzory przybliżone służą przedewszystkiem do obliczenia wartości $p' - p$ i $q' - q$, gdy znane są wartości p, q ; ale można je stosować również wtedy, gdy dane są wartości p', q' , pisząc te ostatnie po prawej stronie tych wzorów wprost zamiast p, q , co na dokładność wyniku nie wpływa.

68. Wpływ paralaksy dziennej na współrzędne poziome. W układzie poziomowym biegunem jest zenit Z (ryc. 50), a współrzędnymi są wysokość i azymut. Zenit geocentryczny Z' określony jest przez kierunek promienia ziemi, przechodzącego przez miej-



Rycina 50.

sce obserwacji, a zenit Z przez pion miejsca obserwacji. Dwa te kierunki tworzą ze sobą kąt, równy różnicy szerokości geograficznej i geocentrycznej, jak to widać na ryc. 15 ust. 22. Kątowi CAD na ryc. 15 odpowiada na ryc. 50 łuk ZZ' koła wysokości. Jest zatem

$$ZZ' = \varphi - \varphi'.$$

Punkty Z i Z' leżą na południku astronomicznym miejsca obserwacji, a ponieważ azymuty liczą się od południka w kierunku strzałki, tak jak kąty p na ryc. 48, więc koło ZX schodzi się z kołem ZZ' i jest $P=0^\circ$.

Wzory, wyrażające wpływ paralaksy na współrzędne poziome, otrzymamy zatem, kładąc we wzorach (129'), (115), (130) i (135):

$$\begin{aligned} P &= 0^\circ, & p &= a, & p' &= a', \\ Q &= 90^\circ - (\varphi - \varphi'), & q &= h, & q' &= h'. \end{aligned}$$

Wzory ściśle mają więc postać następującą:

$$\operatorname{tang}(a' - a) = \frac{\rho \sin \pi \sin(\varphi - \varphi') \sin a \sec h}{1 - \rho \sin \pi \sin(\varphi - \varphi') \cos a \sec h}, \quad (136)$$

$$\operatorname{tang} M = \operatorname{tang}(\varphi - \varphi') \cdot \frac{\cos \frac{a + a'}{2}}{\cos \frac{a - a'}{2}}, \quad (137)$$

$$\operatorname{tang}(h - h') = \frac{-\rho \sin \pi \cos(\varphi - \varphi') \cos(M + h) \sec M}{1 - \rho \sin \pi \cos(\varphi - \varphi') \sin(M + h) \sec M}, \quad (138)$$

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda} = \frac{\cos(M + h')}{\cos(M + h)}. \quad (139)$$

W tej ścisłej postaci jednakże nawet w przypadku księżyca wzory te nie są stosowane, ponieważ $\varphi - \varphi'$ jest kątem, który co najwyżej wynosi niespełna $12'$ (wzór 51"). Można wobec tego w wyrazach, w których $\sin \pi$ jest czynnikiem, przyjąć

$$\sin \pi \sin(\varphi - \varphi') = \sin \pi (\varphi - \varphi') \sin 1'',$$

$$\sin \pi \cos(\varphi - \varphi') = \sin \pi.$$

Łatwo sprawdzić, że $a' - a$ jest małym kątem, wynoszącym co najwyżej około $10''$, wobec czego w mianowniku

wzoru (136) można drugi wyraz opuścić i przyjąć z dostateczną dokładnością

$$a' - a = \rho \sin \pi (\varphi - \varphi') \sin a \sec h. \quad (136')$$

Dalej we wzorze (137) można przyjąć

$$\cos \frac{a + a'}{2} = \cos a, \quad \cos \frac{a' - a}{2} = 1,$$

a więc też

$$M = (\varphi - \varphi') \cos a. \quad (137')$$

Oczywiście kąt M jest wielkością tego samego rzędu, co $\varphi - \varphi'$, wskutek czego we wzorze (138) można przyjąć także $\sec M = 1$; wzór ten sprowadza się więc do postaci

$$\text{tang}(h' - h) = \frac{-\rho \sin \pi \cos(M + h)}{1 - \rho \sin \pi \sin(M + h)}, \quad (138')$$

a zazwyczaj wystarczy bardziej jeszcze uproszczony wzór

$$\text{tang}(h' - h) = \frac{-\rho \sin \pi \cos h}{1 - \rho \sin \pi \sin h}. \quad (138'')$$

Kładąc

$$-\rho \sin \pi \sin(M + h) = \sin v, \quad (140)$$

otrzymujemy wzór (138') w postaci, dogodnej do rachunku logarytmami, mianowicie

$$\text{tang}(h' - h) = \cotg(M + h) \text{tang } v \text{tang} \left(45^\circ - \frac{v}{2}\right). \quad (138''')$$

Oznaczając

$$\rho \sin \pi = n, \quad (141)$$

otrzymujemy na $h' - h$ według znanego wzoru następujący szereg:

$$(h' - h) \sin 1'' = -n \cos(M + h) - \frac{1}{2} n^2 \sin 2(M + h) + \\ + \frac{1}{3} n^3 \cos 3(M + h) + \frac{1}{4} n^4 \sin 4(M + h) - \dots \quad (138^{\text{IV}})$$

Dalej jest według wzorów (132') i (132'') z dostatecznem przybliżeniem

$$\lambda' - \lambda = \lambda \rho \sin \pi \sin h, \quad (139')$$

$$\Delta' - \Delta = -\rho \sin h. \quad (139'')$$

Gdy paralaksa jest mała, t. j. w przypadku słońca lub planet, wystarczające są następujące wzory uproszczone

$$a' - a = \rho \pi (\varphi - \varphi') \sin 1'' \sin a \sec h, \quad (136'')$$

$$h' - h = -\rho \pi \cos h; \quad (138'')$$

poza tem

$$\lambda' - \lambda = 0, \quad \Delta' - \Delta = -\rho \sin h.$$

Oznaczmy paralaksę horyzontalną równikową księżyca przez $\pi_{\text{☾}}$, a taką samą paralaksę słońca przez $\pi_{\text{☉}}$. Ponieważ jest wogóle

$$\sin \pi = \frac{a}{\Delta},$$

więc gdy przez $\Delta_{\text{☾}}$ i $\Delta_{\text{☉}}$ oznaczymy odpowiednio odległości księżyca i słońca od środka ziemi, jest też

$$\sin \pi_{\text{☾}} = \frac{a}{\Delta_{\text{☾}}}, \quad \sin \pi_{\text{☉}} = \frac{a}{\Delta_{\text{☉}}}.$$

Wobec eliptycznego kształtu drogi ziemi i drogi księżyca $\Delta_{\text{☾}}$ i $\Delta_{\text{☉}}$, a więc także $\pi_{\text{☾}}$ i $\pi_{\text{☉}}$ mają wartości zmienne. Niechaj będą $\Delta^0_{\text{☾}}$ i $\Delta^0_{\text{☉}}$ odpowiednio średnie odległości księżyca i słońca od ziemi, czyli połowy wielkich osi ich dróg, oraz

$$\sin \pi^0_{\text{☾}} = \frac{a}{\Delta^0_{\text{☾}}}, \quad \sin \pi^0_{\text{☉}} = \frac{a}{\Delta^0_{\text{☉}}},$$

to jest

$$\sin \pi_{\text{☾}} = \frac{\Delta^0_{\text{☾}}}{\Delta_{\text{☾}}} \sin \pi^0_{\text{☾}}, \quad \sin \pi_{\text{☉}} = \frac{\Delta^0_{\text{☉}}}{\Delta_{\text{☉}}} \sin \pi^0_{\text{☉}}.$$

Kąty π^0_{\oplus} i π^0_{\odot} noszą nazwę *stałych paralaksy* księżycy i słońca.

Wartość stosunku $\frac{\Delta^0_{\oplus}}{\Delta_{\oplus}}$ wynika z elementów drogi księżycy i może być dla każdej chwili obliczona; tak samo wartość stosunku $\frac{\Delta^0_{\odot}}{\Delta_{\odot}}$ wynika z elementów drogi ziemskiej. Aby więc wyznaczyć wartości π_{\oplus} lub π_{\odot} , znane być muszą jeszcze wartości stałych π^0_{\oplus} i π^0_{\odot} . Przyjmujemy, jako wartości najprawdopodobniejsze, $\pi^0_{\oplus} = 57' 2''.70$ i $\pi^0_{\odot} = 8''.80$. Roczniki astronomiczne podają wartość $\sin \pi_{\oplus}$ dla każdego średniego południa i każdej średniej północy czasu uniwersalnego, a wartość $\sin \pi_{\odot}$ w odstępach czasu takich, jak tego potrzeba wymaga.

We wzorach na paralaksę księżycy za jednostkę długości przyjmuje się promień równika ziemskiego. We wzorach na paralaksę słońca i planet przyjmuje się za jednostkę długości średnią odległość słońca od ziemi Δ^0_{\odot} , która nazywa się *jednostką planetarną*.

Oznaczmy przez d odległość ciała niebieskiego od ziemi, wyrażoną w jednostkach planetarnych, przez Δ tęże odległość, wyrażoną w jakichś innych jednostkach długości, a przez π paralaksę równikową horyzontalną, to ponieważ $d = \frac{\Delta}{\Delta^0_{\odot}}$, więc jest także

$$d = \frac{\sin \pi^0_{\odot}}{\sin \pi} = \frac{\pi^0_{\odot}}{\pi},$$

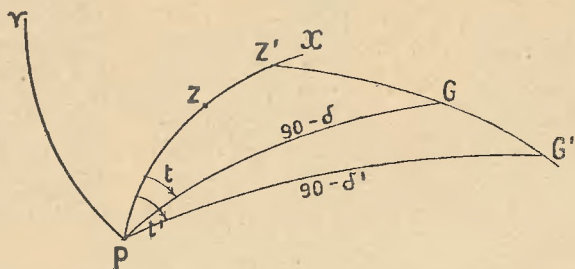
a więc $\pi = \frac{\pi^0_{\odot}}{d}$. Gdy więc d jest znane, można pisać wzory (136^v) i (138^v) także w postaci następującej:

$$a' - a = \frac{\rho}{d} \pi^0_{\odot} \sin 1'' (\varphi - \varphi') \sin a \sec h, \quad (136^{vi})$$

$$h' - h = - \frac{\rho}{d} \pi^0_{\odot} \cos h, \quad (138^{vi})$$

$$d' - d = - \rho \pi^0_{\odot} \sin 1'' \sin h. \quad (139''')$$

69. Wpływ paralaksy dziennej na współrzędne godzinne i równikowe. W układach godzinny i równikowy biegunowi II odpowiada biegun świata P (ryc. 51). Współrzędnymi w układzie godzinny są zboczenie δ i kąt godzinny t . Kołu IIX odpowiada południk PZ' , od którego liczy się kąty t ; jest zatem $P=0$. Kątowi Q w układzie godzinny odpowiada zboczenie zenitu geocentrycznego, które równa się szerokości geocentrycznej



Rycina 51.

miejsca obserwacji; jest więc $Q = \varphi'$. Gdy więc we wzorach ogólnych prócz tego napiszemy

$$p = t, \quad p' = t', \quad q = \delta, \quad q' = \delta',$$

to otrzymamy

$$\operatorname{tang}(t' - t) = \frac{\rho \sin \pi \cos \varphi' \sin t \sec \delta}{1 - \rho \sin \pi \cos \varphi' \cos t \sec \delta}, \quad (142)$$

$$\operatorname{tang} M = \cotg \varphi' \frac{\cos \frac{t' + t}{2}}{\cos \frac{t' - t}{2}} \quad (143)$$

$$\operatorname{tang}(\delta' - \delta) = \frac{-\rho \sin \pi \sin \varphi' \cos(M + \delta) \sec M}{1 - \rho \sin \pi \sin \varphi' \sin(M + \delta) \sec M}, \quad (144)$$

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda} = \frac{\cos(M + \delta')}{\cos(M + \delta)}. \quad (145)$$

Oznaczając

$$\sin \mu = -\rho \sin \pi \cos \varphi' \cos t \sec \delta, \quad (146)$$

$$\sin \nu = -\rho \sin \pi \sin \varphi' \sin (M + \delta) \sec M, \quad (147)$$

otrzymuje się, jak poprzednio, wzory dogodne do rachunku logarytmami

$$\text{tang } (t' - t) = -\text{tang } t \text{ tang } \mu \text{ tang } \left(45^\circ - \frac{\mu}{2}\right), \quad (142')$$

$$\text{tang } (\delta' - \delta) = \cotg (M + \delta) \text{ tang } \nu \text{ tang } \left(45^\circ - \frac{\nu}{2}\right), \quad (144')$$

oraz

$$\lambda' - \lambda = \lambda \rho \sin \pi \sin \varphi' \sin (M + \delta) \sec M, \quad (148)$$

$$\Delta' - \Delta = -\rho \sin \varphi' \sin (M + \delta) \sec M. \quad (149)$$

Kładąc

$$m = \rho \sin \pi \cos \varphi' \sec \delta, \quad (150)$$

$$n = \rho \sin \pi \sin \varphi' \sec M, \quad (151)$$

otrzymujemy na $t' - t$ i $\delta' - \delta$ następujące szeregi:

$$(t' - t) \sin 1'' = m \sin t + \frac{1}{2} m^2 \sin 2t + \frac{1}{3} m^3 \sin 3t + \dots \quad (142'')$$

$$(\delta' - \delta) \sin 1'' = -n \cos (M + \delta) - \frac{1}{2} n^2 \sin 2(M + \delta) + \frac{1}{3} n^3 \sin 3(M + \delta) + \dots \quad (144'')$$

Wreszcie wzory uproszczone w tym przypadku są:

$$t' - t = \frac{\rho}{d} \pi^0_{\odot} \cos \varphi' \sin t \sec \delta, \quad (142''')$$

$$\text{tang } M = \cotg \varphi' \cos t, \quad (143')$$

$$\begin{aligned}\delta' - \delta &= -\frac{\rho}{d} \pi^0_{\odot} (\sin \varphi' \cos \delta - \cos \varphi' \sin \delta \cos t) = \\ &= -\frac{\rho}{d} \pi^0_{\odot} \sin \varphi' \cos (M + \delta) \sec M, \quad (144''')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d' - d &= -\rho \pi^0_{\odot} \sin 1'' (\sin \varphi' \sin \delta + \cos \varphi' \cos \delta \cos t), \quad (149') \\ &= -\rho \pi^0_{\odot} \sin \varphi' \sin (M + \delta) \sec M \sin 1''. \quad (149'')\end{aligned}$$

Gdy we wzorach, które wyrażają wpływ paralaksy dziennej na współrzędne godzinne, położymy

$$t = \theta - \alpha, \quad t' = \theta - \alpha',$$

to jest

$$t' - t = \alpha - \alpha',$$

i po prawej stronie wszystkich wymienionych wzorów występuje wznoszenie proste α zamiast t . W tej postaci wzory wspomniane wyrażają wpływ paralaksy na współrzędne równikowe.

Różnice $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$ i t. d., jak wynika z wyrażających je wzorów, obliczone mogą być tylko wtedy, gdy znaną jest geocentryczna odległość ciała niebieskiego d . Odległość tę możemy uważać za znaną tylko wtedy, gdy mamy do czynienia z ciałem niebieskim, którego droga jest znana. Nie zachodzi to wówczas, gdy obserwujemy jakąś nieznaną dotąd planetę lub kometę. Wtedy za pomocą obserwacji wyznaczyć można tylko topocentryczne współrzędne, a ze wzorów na paralaksę obliczone mogą być tylko wartości iloczynów

$$d (\alpha' - \alpha) = -\rho \pi^0_{\odot} \cos \varphi' \sec \delta \sin (\theta - \alpha), \quad (150)$$

$$d (\delta' - \delta) = -\rho \pi^0_{\odot} [\sin \varphi' \cos \delta - \cos \varphi' \sin \delta \cos (\theta - \alpha)]. \quad (151)$$

Wyrażenia, stojące po prawej stronie tych wzorów, noszą nazwę *czynników paralaktycznych*. Gdy d jest znane, to dzieląc te czynniki przez d , znajdujemy różnice $\alpha' - \alpha$ i $\delta' - \delta$.

Wartość tych czynników podawaną bywa zawsze wraz z wartościami współrzędnych, uzyskanymi przez obserwację;

ulatwiają one obliczenie redukcji na środek ziemi spostrzeżeń, wykonanych w różnych miejscach obserwacji, gdy ono jest możliwe, t. j. gdy już przybliżona wartość d jest znana. Ponieważ spostrzeżeń może być bardzo wiele, więc obliczenie czynników paralaktycznych upraszcza się przez zastosowanie tabelek, które dla każdego obserwatorium z łatwością mogą być obliczone.

Oznaczmy

$$A = \rho \pi^0_{\odot} \cos \varphi', \quad B = \rho \pi^0_{\odot} \sin \varphi', \quad (q)$$

to jest

$$d(\alpha' - \alpha) = -A \sec \delta \sin(\theta - \alpha), \quad (r)$$

$$d(\delta' - \delta) = -B \cos \delta + A \sin \delta \cos(\theta - \alpha), \quad (s)$$

$$d' - d = -[B \sin \delta + A \cos \delta \cos(\theta - \alpha)] \sin 1''. \quad (t)$$

A i B mają w danem miejscu obserwacji wartość stałą. Połóżmy dalej

$$A \sin(\theta - \alpha) = T, \quad (u)$$

$$A \cos(\theta - \alpha) = A \sin[90^\circ - (\theta - \alpha)] = D. \quad (v)$$

Dla T oblicza się tabelkę z argumentem $t = \theta - \alpha$, z której również otrzymuje się wartość D . Gdy, jak to jest zwyczajem, różnica $(\alpha' - \alpha)$ ma być wyrażona w sekundach czasowych, to wzory na czynniki paralaktyczne mają postać następującą:

$$d(\alpha' - \alpha)^s = -\frac{1}{15} T \sec \delta, \quad (150')$$

$$d(\delta' - \delta) = -B \cos \delta + D \sin \delta, \quad (151')$$

$$d' - d = -B \sin \delta - D \cos \delta. \quad (149'')$$

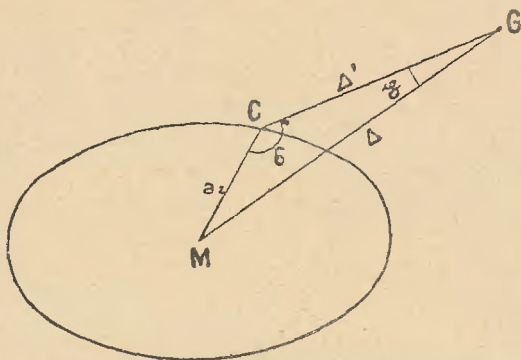
70. Paralaksa miesięczna. Jak już wspomnieliśmy, źródłem paralaksy miesięcznej jest ruch ziemi dookoła środka ciężkości układu ziemia-księżyc. Oznaczmy przez μ stosunek masy księżyca do masy ziemskiej i, jak poprzednio, przez Δ^0_{\oplus} średnią odległość księżyca od ziemi. Ponieważ środek ciężkości układu ziemia-księżyc znajduje się na prostej, łączącej środki ziemi i księżyca,

w odległości od tych punktów odwrotnie proporcjonalnej do mas, więc średnia odległość środka ziemi od środka ciężkości układu jest

$$a_z = \frac{\mu}{1 + \mu} \Delta^0_{\odot} \quad (w)$$

Jest to połowa wielkiej osi elipsy, którą środek ziemi w płaszczyźnie drogi księżyca zakreśla dokoła środka ciężkości, stanowiącego ognisko tej elipsy.

Rozmiary tej elipsy wypływają ze wzoru (w). Jak wiemy, jest $\Delta^0_{\odot} = \operatorname{cosec} \pi^0_{\odot}$, gdy promień równika ziemskiego przyjmiemy za jednostkę długości. Przyjmując jak poprzednio



Rycina 52.

$\pi^0_{\odot} = 57' 2''.70$, oraz według Newcomba $\mu = \frac{1}{81.45}$, otrzymamy $a_z = 0.731$. Ponieważ paralaksa dzienna nie wpływa na pozycje gwiazd stałych, więc tembardziej nie wywiera na nie dostrzegalnego wpływu paralaksa miesięczna. W tych przypadkach, w których paralaksa miesięczna wchodzi w rachubę, można bez wpływu na dokładność pominąć kształt eliptyczny drogi środka ziemi dokoła środka ciężkości i uważać ją za koło o promieniu a_z .

W jaki sposób w ogólności paralaksa miesięczna się ujawnia, wyjaśnia rycina 52.

Niech będzie M środek ciężkości układu ziemia-księżyc, C — środek ziemi, poruszający się dokoła M po kole o promie-

niu $MC = a_z$. Kierunek geocentryczny ku gwiazdzie G, t. j. prosta CG, tworzy z kierunkiem MG kąt $MGC = p$; gdy oznaczymy

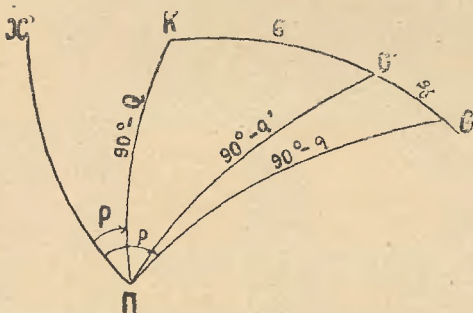
$$MG = \Delta, \quad CG = \Delta', \quad \sphericalangle MCG = \sigma,$$

to z trójkąta MCG wynika

$$a_z : \Delta = \sin p : \sin \sigma,$$

albo, ponieważ $\frac{a_z}{\Delta}$ jest zawsze małym ułamkiem, to jest też z dostateczną dokładnością

$$p = \frac{a_z}{\Delta} \sin \sigma \operatorname{cosec} 1''. \quad (152)$$



Rycina 53.

Kierunki CG i MG określają płaszczyznę, w której przypada położenie geocentryczne G i położenie, widziane z punktu M, a więc płaszczyznę, w której zachodzi przesunięcie paralaktyczne. Gdy więc weźmiemy pod uwagę wielkie koło, które płaszczyzna MGC określa na niebie, to na tem kole w K (ryc. 53) znajduje się punkt, w którym kierunek CM przecina sklepienie niebieskie; na tem samem kole znajduje się w G' punkt, w którym gwiazda widziana jest ze środka ziemi, a więc jej położenie geocentryczne, oraz punkt G, w którym gwiazda widziana jest z punktu M. Ponieważ punkt M leży na prostej, łączącej środek ziemi ze środkiem księżyca, więc K jest punktem nieba, w którym ze środka ziemi widziany jest środek księżyca.

Widzimy więc, że geocentryczne położenie gwiazdy przy-

pada na wielkiem kole, określonym przez geocentryczne położenie księżyca oraz przez położenie gwiazdy, widzianej z punktu M, i że od tego ostatniego punktu przesunięte jest o kąt p w kierunku ku księżycowi.

Opierając się na powyższych uwagach, można wyznaczyć wpływ paralaksy miesięcznej na współrzędne sferyczne gwiazdy.

Gdy w układzie ogólnym, którego biegunem jest punkt II, oznaczymy współrzędne punktów K, G i G' odpowiednio przez P, Q, p, q i p', q' , to wpływ paralaksy miesięcznej wyrazimy za pomocą wzorów, analogicznych do wzorów (129''') i (130^{IV}). Napiszmy we wzorze (152)

$$\Delta = \frac{1}{\pi \sin 1''},$$

to jest

$$p = a_z \pi \sin \sigma,$$

i przybliżone wzory na paralaksę miesięczną w układzie ogólnym mają postać

$$p' - p = -a_z \pi \cos Q \sin(p - P) \sec q, \quad (153)$$

$$q' - q = a_z \pi [\sin Q \cos q - \cos Q \sin q \cos(p - P)]. \quad (154)$$

Wpływ paralaksy miesięcznej na współrzędne równikowe i ekliptyczne otrzymamy, podstawiając zamiast p i q odpowiednio α i δ lub λ i β . Gdy jeszcze oznaczymy przez α_{\odot} i δ_{\odot} geocentryczne wznoszenie proste i zboczenie księżyca, a przez ϵ i β_{\odot} geocentryczną długość i szerokość księżyca, to otrzymamy poszukiwane wzory

$$\alpha' - \alpha = -a_z \pi \cos \delta_{\odot} \sin(\alpha - \alpha_{\odot}) \sec \delta, \quad (155)$$

$$\delta' - \delta = a_z \pi [\sin \delta_{\odot} \cos \delta - \cos \delta_{\odot} \sin \delta \cos(\alpha - \alpha_{\odot})], \quad (156)$$

i podobnie

$$\lambda' - \lambda = -a_z \pi \cos \beta_{\odot} \sin(\lambda - \epsilon) \sec \beta, \quad (157)$$

$$\beta' - \beta = a_z \pi [\sin \beta_{\odot} \cos \beta - \cos \beta_{\odot} \sin \beta \cos(\lambda - \epsilon)]. \quad (158)$$

Weźmy pod uwagę kilka specjalnych przypadków. Gdy położymy $\alpha = \alpha_{\odot}$, $\delta = \delta_{\odot}$, to jest

$$\alpha'_{\odot} - \alpha_{\odot} = 0, \quad \delta'_{\odot} - \delta_{\odot} = 0;$$

paralaksa miesięczna zatem nie zmienia położenia księżyca, co jest oczywistem, ponieważ kierunek CK schodzi się z kierunkiem MK.

Paralakse miesięczną słońca otrzymamy, kładąc

$$\alpha = \alpha_{\odot}, \quad \delta = \delta_{\odot}, \quad \lambda = \odot, \quad \beta = \beta_{\odot}.$$

Dla współrzędnych równikowych znajdujemy wzory

$$\alpha'_{\odot} - \alpha_{\odot} = -a_z \pi_{\odot} \cos \delta_{\odot} \sin (\alpha_{\odot} - \alpha_{\oplus}) \sec \delta_{\odot}, \quad (155')$$

$$\delta'_{\odot} - \delta_{\odot} = a_z \pi_{\odot} [\sin \delta_{\odot} \cos \delta_{\oplus} - \cos \delta_{\odot} \sin \delta_{\oplus} \cos (\alpha_{\odot} - \alpha_{\oplus})]; \quad (156')$$

i podobnie dla współrzędnych ekliptycznych

$$\odot' - \odot = -a_z \pi_{\odot} \cos \beta_{\odot} \sin (\odot - \oplus) \sec \beta_{\odot}, \quad (157')$$

$$\beta'_{\odot} - \beta_{\odot} = a_z \pi_{\odot} [\sin \beta_{\odot} \cos \beta_{\oplus} - \cos \beta_{\odot} \sin \beta_{\oplus} \cos (\odot - \oplus)]. \quad (158')$$

Widzimy przedewszystkiem, że okresem paralaksy miesięcznej w przypadku słońca jest okres, w którym różnica $\alpha_{\odot} - \alpha_{\oplus}$ lub różnica $\odot - \oplus$ zmienia się o 360° . Okresem tym jest miesiąc synodyczny (p. rozdział X). Dalej zobaczymy, że gdy się mówi o drodze ziemi dookoła słońca, to rozumieć należy nie drogę środka ziemi, lecz drogę środka ciężkości układu ziemia-księżyc, i ta ostatnia właśnie przypada w płaszczyźnie ekliptyki. Jest zatem $\beta_{\odot} = 0$. Gdy więc przez R oznaczymy odległość słońca od ziemi, wyrażoną w jednostkach planetarnych, wobec czego jest

$$\pi_{\odot} = \frac{\pi^0_{\odot}}{R},$$

$$a_z \pi_{\odot} = \frac{0.731 \times 8''.80}{R} = \frac{6''.43}{R},$$

i wartości powyższe podstawimy we wzorach (158') to otrzymamy

$$\odot' - \odot = -\frac{6''.43}{R} \cos \beta_{\odot} \sin (\odot - \odot'), \quad (157'')$$

$$\beta'_{\odot} = \frac{6''.43}{R} \sin \beta_{\odot}. \quad (158'')$$

Wzory te pouczają nas, że paralaksa miesięczna u słońca objawia się w ten sposób, iż długość geocentryczna słońca podlega wahaniom, których okresem jest miesiąc synodyczny, geocentryczna zaś szerokość słońca różni się od zera i podlega zmianom, których okresem jest miesiąc zwrotnikowy. Ponieważ nachylenie drogi księżyca do ekliptyki wynosi średnio $5^{\circ}9'$, więc średni obszar wahań długości \odot' wynosi $\pm \frac{6''.43}{R}$, wartość zaś β'_{\odot} zawarta jest w granicach od $-\frac{0''.58}{R}$ do $+\frac{0''.58}{R}$.

Później poznamy jeszcze inne powody, dla których geocentryczna szerokość słońca różni się od zera; wartość jej wszakże jest zawsze bardzo mała i w maximum nie wiele przekracza $\pm 1''$.

Co się tyczy wpływu paralaksy miesięcznej na spólrzędne planet, to w praktyce nie zachodzi nigdy potrzeba uwzględnienia go, co dałoby się skutecznie z pomocą wzorów (155) i (156) lub (157) i (158); gdy bowiem dane są geocentryczne spólrzędne słońca, to geocentryczne spólrzędne planety wynikają wprost ze wzorów przejścia z układu heljocentrycznego na geocentryczny.

71. Paralaksa roczna. W celu zbadania wpływu ruchu ziemi dookoła słońca na położenie gwiazd, rozważmy zagadnienie następujące.

Znane są spólrzędne gwiazdy stałej, widzianej z ziemi; wyznaczyć spólrzędne tejże gwiazdy, widzianej ze środka słońca.

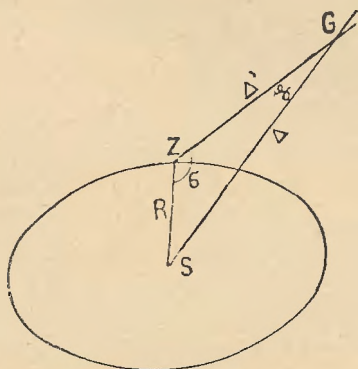
Niechaj będzie w S (ryc. 54) środek słońca, znajdujący się w ognisku eliptycznej drogi ziemskiej, a w Z środek ziemi w chwili obserwacji; możemy go w tem zagadnieniu identyfikować z miejscem obserwacji, ponieważ paralaksa dzienna gwiazd

stałych praktycznie równa się zeru. W punkcie G znajduje się gwiazda, której odległość od słońca niechaj będzie $SG = \Delta$, a odległość od ziemi $ZG = \Delta'$. Gdy jeszcze przez R oznaczymy odległość ZS ziemi od słońca, oraz $\sphericalangle SZG = \sigma$ i $\sphericalangle ZGS = p$, to z trójkąta ZGS wynika

$$\sin p = \frac{R}{\Delta} \sin \sigma. \quad (159)$$

Okres kąta p jest taki sam, jak kąta σ , mianowicie roczny; nazywa się ten kąt wskutek tego *paralaką roczną*.

Odległość ziemi od słońca zmienia się z powodu eliptycz-



Rycina 54.

nego kształtu drogi ziemskiej; jednakże zmiany te są w stosunku do samej odległości R nieznaczne, a w stosunku do Δ znikome. Można więc przyjąć w zagadnieniu paralaksy rocznej $R = R_0$.

Obierając R_0 za jednostkę długości, mamy

$$\sin p = \frac{1}{\Delta} \sin \sigma, \quad (159')$$

i widzimy z tego wzoru, że p zależy od σ .

Oznaczmy przez π największą wartość kąta p , którą on osiąga, gdy $\sigma = 90^\circ$. Jest zatem

$$\sin \pi = \frac{1}{\Delta}. \quad (160)$$

Ponieważ $\frac{1}{\Delta}$ jest zawsze małym ułamkiem, więc możemy przyjąć $\sin \pi = \pi \sin 1''$, a zatem

$$\pi = \frac{1}{\Delta \sin 1''}, \quad (160')$$

$$p = \pi \sin \sigma. \quad (159'')$$

Jak wynika z powyższego określenia, π jest to kąt, pod którym jednostka planetarna widzialna jest z odległości danej gwiazdy. Znając π , odległość gwiazdy otrzymuje się ze wzoru

$$\Delta = \frac{1}{\pi \sin 1''}. \quad (161)$$

Gdy jest mowa o paralaksie rocznej jakiejś gwiazdy stałej bez bliższego określenia, to rozumiany jest zawsze należący do tej gwiazdy kąt π .

Jeżeli wartość kąta π dla danej gwiazdy nie jest znikoma, to zachodzi pewna różnica pomiędzy jej spółrzednemi, widzianemi z punktu Z, t. j. geocentrycznemi, a spółrzednemi, widzianemi z punktu S, t. j. heljocentrycznemi. Różnica wartości spółrzednych geocentrycznych i heljocentrycznych stanowi *redukcję na środek słońca*.

Jeżeli obserwacje danej gwiazdy, robione w różnych czasach, a więc w różnych położeniach ziemi w jej drodze rocznej, mają być ze sobą porównywane, to muszą być przedewszystkiem sprowadzone do środka słońca, gdy paralaksa roczna gwiazdy jest znana; także spółrzedne jej, podawane w katalogach, są to spółrzedne heljocentryczne.

Wzory redukcji na środek słońca z powodu paralaksy rocznej otrzymujemy w sposób podobny, jak wzory redukcji na środek ziemi w zagadnieniu paralaksy dziennej. Miejsce heljocentryczne i geocentryczne gwiazdy przypada w płaszczyźnie ZGS. Jeżeli SG (ryc. 55) jest kole, według którego płaszczyzna ZGS przecina się ze sklepieniem niebieskiem, a punkty S i G' odpowiednio oznaczają geocentryczne położenie słońca i gwiazdy na

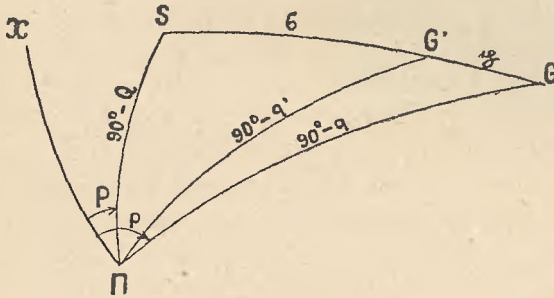
tem kole, to jest $SG' = \sigma$. Heljocentryczne położenie gwiazdy G przesunięte jest względem G' o łuk $G'G = p$.

Odnosząc położenie gwiazdy do układu ogólnego, otrzymamy w sposób zupełnie podobny, jak w ustępie poprzednim, gdy przytem uwzględnimy wzór (160'), wzory następujące:

$$p' - p = -\pi \cos Q \sin(p - P) \sec q, \quad (162)$$

$$q' - q = \pi [\sin Q \cos q - \cos Q \sin q \cos(p' - P)]. \quad (163)$$

W tych wzorach P i Q oznaczają geocentryczne współrzędne środka słońca, p' i q' współrzędne geocentryczne gwiazdy, p i q jej współrzędne heljocentryczne, a π paralaksę roczną.



Rycina 55.

W celu wyznaczenia wpływu paralaksy rocznej na współrzędne równikowe oznaczmy przez α i δ heljocentryczne, a przez α' i δ' geocentryczne współrzędne równikowe gwiazdy, dalej przez α_{\odot} i δ_{\odot} geocentryczne współrzędne równikowe słońca. Podstawiając te wartości we wzorach ogólnych, znajdujemy następujące wzory redukcji:

$$\alpha' - \alpha = \pi \cos \delta_{\odot} \sin(\alpha_{\odot} - \alpha) \sec \delta, \quad (164)$$

$$\delta' - \delta = \pi [\sin \delta_{\odot} \cos \delta - \cos \delta_{\odot} \sin \delta \cos(\alpha_{\odot} - \alpha)]. \quad (165)$$

Analogicznie oznaczmy przez λ i β heljocentryczne, a przez λ' i β' geocentryczne współrzędne ekliptyczne gwiazdy; ponieważ przyjąć możemy, że geocentryczna szerokość słońca β_{\odot} równa

się zeru, więc, oznaczając jeszcze długość słońca przez \odot i podstawiając wartości te we wzorach ogólnych, otrzymamy następujące wzory, wyrażające wpływ paralaksy rocznej na spółrzedne ekliptyczne:

$$\lambda' - \lambda = \pi \sin(\odot - \lambda) \sec \beta, \quad (166)$$

$$\beta' - \beta = -\pi \cos(\odot - \lambda) \sin \beta. \quad (167)$$

Jak wskazują wzory redukcji, miejsce geocentryczne zakreśla dokoła miejsca heljocentrycznego gwiazdy pewną drogę. Kształt tej drogi i położenie na niej miejsca geocentrycznego w sposób najprostszy wypływa ze wzorów (166) i (167).

Obierzmy w tym celu punkt (λ, β) , t. j. miejsce heljocentryczne gwiazdy, za początek układu prostokątnego, którego osią x jest styczna w punkcie (λ, β) do równoleżnika ekliptyki, przechodzącego przez ten punkt, a osią y styczna do koła szerokości w tym punkcie. Dodatni kierunek na osi x w tym układzie niech odpowiada kierunkowi wzrostu długości, a dodatnim kierunkiem na osi y niech będzie kierunek ku biegunowi północnemu ekliptyki. W układzie tym jest według wzorów (24)

$$x = (\lambda' - \lambda) \cos \beta, \quad y = \beta' - \beta.$$

Gdy więc podstawimy tu wartości redukcji na środek słońca według wzorów (166) i (167), to wartości spółrzednych będą

$$x = \pi \sin(\odot - \lambda), \quad (x)$$

$$y = -\pi \cos(\odot - \lambda) \sin \beta. \quad (y)$$

Podnosząc do kwadratu i dodając, otrzymujemy

$$x^2 + y^2 \operatorname{cosec}^2 \beta = \pi^2,$$

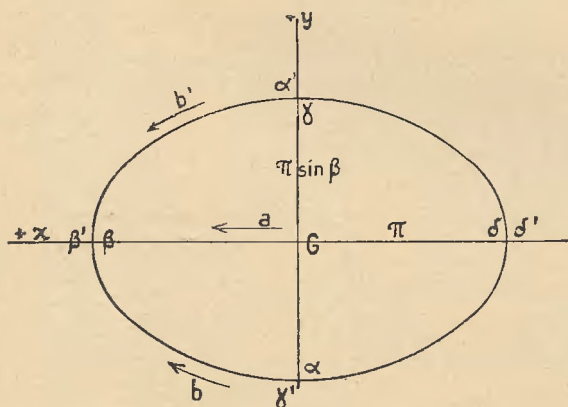
albo też

$$\frac{x^2}{\pi^2} + \frac{y^2}{(\pi \sin \beta)^2} = 1. \quad (z)$$

Widzimy z tego równania, że skutkiem paralaksy rocznej miejsce geocentryczne gwiazdy zakreśla w ciągu roku elipsę,

której środkiem jest heljocentryczne miejsce gwiazdy, której oś wielka jest równoległa do ekliptyki i wynosi 2π , mała zaś oś, przypadająca na kole szerokości, ma wartość $|2\pi \sin \beta|$. Rozmiary tej elipsy paralaktycznej zależą więc od π , a więc od odległości gwiazdy, kształt zaś od szerokości astronomicznej gwiazdy. Dla $\beta = \pm 90^\circ$ elipsa ta staje się kołem, a dla $\beta = 0^\circ$ ruch na elipsie sprowadza się do wahań na ekliptyce.

Niechaj ryc. 56 przedstawia tę elipsę paralaktyczną gwiazdy G, której środkiem jest miejsce heljocentryczne gwiazdy. Odnosimy jej położenie do układu prostokątnego (xy) i strzałka a



Rycina 56.

wskazuje kierunek wzrostu długości, a więc też kierunek dodatni na osi x ; biegun północny ekliptyki wyobrażamy sobie na górze, a więc też ku górze skierowany jest dodatni kierunek na osi y .

Miejsce, które w elipsie paralaktycznej zajmuje położenie geocentryczne gwiazdy G' , wypływa ze wzorów (x) i (y). Wartości współrzędnych, odpowiadające czterem wartościom kąta \odot , różniącym się o 90° , znajdujemy w następującej tabelce:

$\odot - \lambda = 0^\circ$,	$x = 0$,	$y = -\pi \sin \beta$,
$\odot - \lambda = 90^\circ$,	$x = +\pi$,	$y = 0$,
$\odot - \lambda = 180^\circ$,	$x = 0$,	$y = +\pi \sin \beta$,
$\odot - \lambda = 270^\circ$,	$x = -\pi$,	$y = 0$.

Oznaczmy przez α , β , γ i δ położenia punktu G' , odpowiadające czterem powyższym wartościom kąta $\odot - \lambda$, gdy $\beta > 0$, a przez α' , β' , γ' i δ' położenia tegoż punktu, gdy $\beta < 0$, to z ryciny widzimy, że w pierwszym przypadku ruch punktu G' odbywa się w kierunku wskazanym przez strzałkę b , a w drugim przypadku w kierunku, wskazanym przez strzałkę b' . Pierwszy z tych kierunków jest wsteczny, drugi zaś prosty.

72. Paralaksa wiekowa. Zagadnienie, mające na celu wyznaczenie ruchu układu słonecznego w przestrzeni, nie jest dotąd jeszcze w sposób zadowalający rozwiązane. Badania dotychczasowe nie pozwoliły wyznaczyć dokładnie kierunku ruchu, a tembardziej stwierdzić, czy kierunek ten nie ulega zmianie. Wskutek tego zagadnienie paralaksy wiekowej opieramy na założeniu, że ruch układu słonecznego w przestrzeni odbywa się po linii prostej z prędkością stałą.

Przypuśćmy, że ruch układu odbywa się z prędkością stałą v km/sek po linii prostej, która w przedłużeniu przecina się ze sklepieniem niebieskiem w dwóch punktach, diamentralnie przeciwległych: punkt, ku któremu ruch jest skierowany, nazywa się *apeksem*, punkt przeciwległy *antiapeksem*.

Ruch paralaktyczny gwiazd, który jest odzwierciedleniem tak określonego ruchu słońca, a więc i obserwatora ziemskiego, w przestrzeni, wypływa z następującego rozważania.

Niechaj słońce w czasie danym t znajduje się w punkcie S (ryc. 57), a w czasie t' w punkcie S' . Oznaczmy przez a długość drogi, przebytej w czasie $t' - t$, to przy prędkości v km/sek jest

$$a = v(t' - t) \text{ km.}$$

W kierunku SS' znajduje się apeks przestrzennego ruchu słońca.

Weźmy pod uwagę jakąś gwiazdę G . Z powodu ruchu słońca zmienia się odległość gwiazdy od słońca oraz kąt, utworzony przez kierunek ruchu słońca i prostą, przechodzącą przez słońce i gwiazdę. Odległość ta w czasach t i t' niech będzie odpowiednio Δ i Δ' , a kąty, utworzone przez kierunek ruchu i kierunek słońce — gwiazda, w tych samych czasach niech

będą μ i μ' . Oznaczmy jeszcze przez p kąt, który tworzą ze sobą kierunki SG i $S'G$, to, jak widać z ryciny, jest

$$\mu' = \mu + p.$$

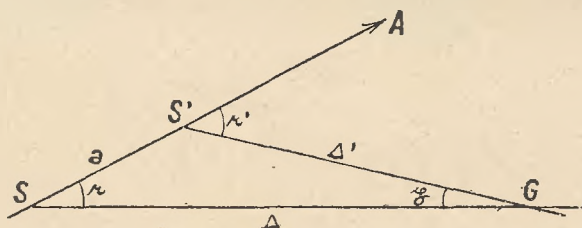
Kąt p stanowi paralaksę wiekową gwiazdy G , spowodowaną przejściem słońca z punktu S do S' .

Z trójkąta SGS' wynika

$$a : \sin p = \Delta : \sin (\mu + p),$$

a stąd

$$\operatorname{tang} p = \frac{\frac{a}{\Delta} \sin \mu}{1 - \frac{a}{\Delta} \cos \mu}. \quad (168)$$



Rycina 57.

Gdy $t' - t$ jest odstępem czasu niewielkim, tak że przebyta przez słońce droga a jest wielkością małą w stosunku do odległości gwiazdy Δ , co zawsze przyjąć można, to jest z dostateczną dokładnością

$$p \sin 1'' = \frac{a}{\Delta} \sin \mu. \quad (168')$$

Jest oczywiście

$$\frac{a}{\Delta} = \frac{a}{R_0} \cdot \frac{R_0}{\Delta};$$

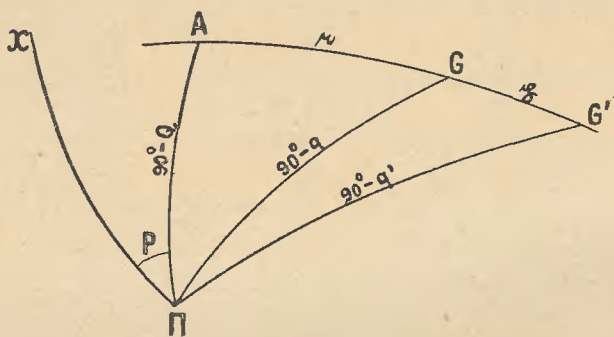
gdzie więc przez π oznaczmy paralaksę roczną gwiazdy, to

$$\frac{R_0}{\Delta} = \pi \sin 1'';$$

oznaczymy dalej $\frac{a}{R_0} = q$, rozumiejąc przez q przebytą drogę, wyrażoną w jednostkach planetarnych, to wzór uproszczony otrzymuje postać następującą:

$$p = q \pi \sin \mu. \quad (168'')$$

Ruch paralaktyczny gwiazdy zachodzi w płaszczyźnie ASG. Niechaj płaszczyzna ta przecina się ze sklepieniem niebieskiem według wielkiego koła AG (ryc. 58). Na tem wielkim kole obserwator ziemski widzi apeks w punkcie A, a gwiazdę w epokach t i t' odpowiednio w punktach G i G'. Widzimy, że skut-



Rycina 58.

kiem ruchu słońca gwiazda się oddala od apeksu o kąt p , a zatem o tyleż zbliża się do antiapeksu. Prócz tego wzór (168'') wyraża, że p ma wartość tem większą, im większą wartość ma $\sin \mu$; największy jest ruch paralaktyczny tych gwiazd, które leżą na kole głównem punktu A, a gwiazdy, znajdujące się po obu stronach tego koła w równych odległościach, mają też ruchy paralaktyczne jednakowe (oczywiście caeteris paribus).

Odnieśmy położenie apeksu i gwiazdy do układu ogólnego, którego biegunem jest punkt II, i niech będą w nim P i Q współrzędne apeksu, a p i q oraz p' i q' odpowiednio współrzędne gwiazdy w epokach t i t' , to zachodzą między temi wielkościami związki zupełnie podobne do wzorów (162) i (163), z różnicą tylko w współczynnikach i znakach. Wzory te są:

$$p' - p = q \pi \cos Q \sin(p - P) \sec q, \quad (169)$$

$$q' - q = -q \pi [\sin Q \cos q - \cos Q \sin q \cos(p - P)]. \quad (170)$$

W zastosowaniu do spólrzędnych równikowych wzory te otrzymują postać następującą:

$$\alpha' - \alpha = + q \pi \cos D \sin(\alpha - A) \sec \delta, \quad (171)$$

$$\delta' - \delta = - q \pi [\sin D \cos \delta - \cos D \sin \delta \cos(\alpha - A)], \quad (172)$$

gdzie przez A i D oznaczone zostały spólrzędne równikowe apeksu.

Wzory na paralaksę wiekową w tej ostatniej postaci zazwyczaj są używane. Widzimy z nich, że aby znaleźć paralaksę wiekową jakiejś gwiazdy, musi być prócz spólrzędnych apeksu znana paralaksa roczna gwiazdy, oraz droga, którą słońce przebiegło w czasie $t' - t$, a więc także prędkość biegu słońca w przestrzeni.

Oczywiście jeżeli słońce posiada ruch przestrzenny, to ruch ten objawić się musi właśnie w powolnych zmianach spólrzędnych gwiazd; stwierdzenie i mierzenie tych zmian jest rzeczą obserwacji. W istocie obserwacje stwierdzają te zmiany, lecz wykazują zarazem, że wielkie koła, w których ruchy gwiazd zachodzą, nie przecinają się ze sobą w dwóch diametralnie przeciwnych punktach nieba, jakby to być musiało, gdyby ruch ich był tylko wiekowym ruchem paralaktycznym. Znaczy to, że obserwowany ruch gwiazdy jest wypadkową ruchu paralaktycznego gwiazdy i ruchu jej prawdziwego.

Skutkiem tego, że gwiazdy zmieniają miejsce w przestrzeni, wyznaczenie ruchu układu słonecznego staje się zagadnieniem bardzo zawilem i, jak już wspomnieliśmy wyżej, dalecy jeszcze jesteście od zadawalającego jego rozwiązania.

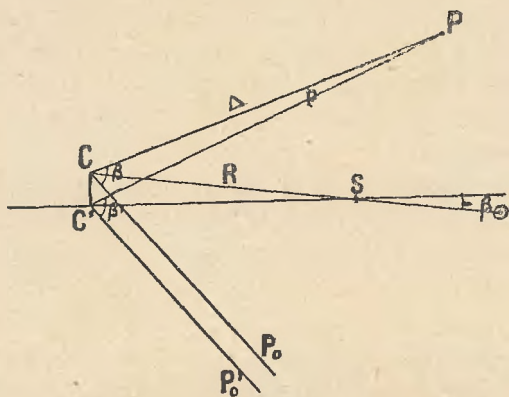
Jako wartości najprawdopodobniejsze spólrzędnych apeksu i prędkości układu słonecznego, przyjmuje się obecnie wyniki, otrzymane przez Campbell'a, mianowicie

$$A = 268^{\circ}.5, \quad D = 25^{\circ}.3, \quad v = 19.5 \text{ km.}$$

Gdy więc przyjmiemy $t' - t = 1$ rok, to a przedstawia drogę roczną układu słonecznego, wyrażoną w km, a q tę samą

drogę, wyrażoną w jednostkach planetarnych. Z łatwego rachunku wynika w przybliżeniu $q=4$. Gdy więc tę wartość podstawimy na miejsce q we wzorach (171) i (172), to wzory te określają roczną zmianę z powodu paralaksy wiekowej współrzędnych równikowych gwiazdy, której paralaksa roczna jest π .

73. Niektóre zagadnienia, pokrewne paralaksie. W zagadnieniu obliczania dróg planet i komet często wykonywa się redukcję obserwowanych współrzędnych nie na środek ziemi, ale na inny punkt, stosownie obrany, leżący w płaszczyźnie ekliptyki. Redukcja taka przynosi tę korzyść, że szerokość słońca, widziana



Rycina 59.

z takiego punktu, jest zerem, a wskutek tego upraszczają się znacznie te wzory, w których szerokość słońca występuje.

Gdy odległość planety w przybliżeniu jest znana i chodzi tylko o usunięcie ze wzorów szerokości słońca, to postępuje się w sposób następujący.

Niechaj na ryc. 59 punkt C oznacza środek ziemi, punkt S środek słońca, a punkt P planetę. $CS = R$ jest promieniem wodzącym słońca, a $CP = \Delta$ jest geocentryczną odległością planety.

Poprowadźmy z punktu C prostą do płaszczyzny ekliptyki, która z tą płaszczyzną przecina się w punkcie C'. Kąt C'SC równa się oczywiście szerokości słońca β_{\odot} , jest więc

$$C'S = R \cos \beta_{\odot}, \quad C'C = -R \sin \beta_{\odot}.$$

Gdy poprowadzimy przez punkty P, C i C' płaszczyznę, która przecina płaszczyznę ekliptyki według prostej C'P₀', to kąt P₀'C'P = β' jest szerokością astronomiczną planety, widzianą z punktu C'. Gdy zaś poprowadzimy prostą CP₀, równoległą do C'P₀', to kąt P₀CP jest geocentryczną szerokością planety. Oznaczmy jeszcze $\sphericalangle C'PC = p$, to jest $\beta' = \beta + p$. Dalej wynika z trójkąta PCC'

$$C'C : \Delta = \sin p : \cos \beta',$$

a po podstawieniu wartości na C'C

$$\sin p = -\frac{R}{\Delta} \cos \beta' \sin \beta_{\odot}.$$

Ponieważ β_⊙ jest małym kątem, można, gdy za jednostkę długości przyjmiemy jednostkę planetarną, położyć

$$R = 1, \quad \sin p = (\beta' - \beta) \sin 1'', \quad \sin \beta_{\odot} = \beta_{\odot} \sin 1'', \quad \cos \beta' = \cos \beta$$

i wtedy jest

$$\beta' - \beta = -\frac{\beta_{\odot}}{\Delta} \cos \beta.$$

Otóż jeżeli przy obliczeniach drogi planety jako jej szerokość przyjmiemy otrzymany w sposób powyższy kąt β', t. j. gdy wyobrazimy sobie, że w chwili obserwacji środek ziemi znajdował się w płaszczyźnie ekliptyki w punkcie C', to oczywiście w dalszych rachunkach należy przyjąć β_⊙ = 0, taką bowiem jest szerokość słońca, gdy środek ziemi znajduje się w płaszczyźnie ekliptyki.

Redukcja taka, jak to już wspomnieliśmy, tylko wtedy jest możliwa, gdy odległość geocentryczna planety Δ przynajmniej w przybliżeniu jest znana. Gdy zaś odległość Δ jest nieznaną, to niemożliwa jest nie tylko powyższa redukcja, ale też i redukcja na środek ziemi przez uwzględnienie paralaksy dziennej. W tym przypadku znajduje zastosowanie sposób Gaussa redukcji na «miejsce urojone» (reductio ad locum fictum). Za ta-

kie miejsce urojone przyjmuje Gauss punkt, w którym prosta, łącząca miejsce obserwacji z planetą, przecina płaszczyznę ekliptyki. Skutkiem przejścia obserwatora do tego punktu oczywiście nie zmieniają się współrzędne sferyczne planety, a szerokość słońca, widzianego z tego punktu, jest zerem. Zmienia się natomiast skutkiem przejścia na miejsce urojone długość słońca, inną też jest odległość słońca i planety od punktu urojonego, aniżeli odległość ich od miejsca obserwacji. Ta zmiana odległości pociąga za sobą potrzebę uwzględnienia innego czasu aberracji (ust. 75), a więc też odpowiedniej poprawki czasu obserwacji.

Gauss wyprowadza wzory, które rozwiązują zagadnienie. Pomijamy je tutaj, ponieważ zagadnienie samo wchodzi bardziej w zakres astronomii teoretycznej.

74. Przykłady obliczania paralaksy.

Przykład 1. Znaleźć współrzędne topocentryczne księżyca poziomowe, godzinne i równikowe oraz topocentryczny promień księżyca i odległość jego od miejsca obserwacji. Miejscem obserwacji jest Lwów, a data obserwacji 19 października 1918 r., $7^h 18^m 45^s$ czasu środkowo-europejskiego.

Czas Greenwich'ski obserwacji jest $6^h 18^m 45^s$. Dla daty powyższej z efemeryd księżyca, podanych w B. A. J. na rok 1918, znajdujemy przez interpolację następujące wartości geocentrycznych współrzędnych równikowych księżyca:

$$\alpha = 1^h 21^m 23^s.1, \quad \delta = +12^\circ 50' 28''.$$

Z tych samych efemeryd otrzymujemy

$$\rho_{\odot} = 16' 46''.4, \quad \log \sin \pi_{\odot} = 8.25227.$$

Powyższej wartości paralaksy odpowiada geocentryczna odległość księżyca

$$\log \Delta = 1.74733, \quad \Delta = 55.941.$$

Czas gwiazdowy we Lwowie w chwili obserwacji, wpływający również z efemeryd, jest $\theta = 21^h 44^m 27^s$. Wobec tego

geocentryczny kąt godzinny księżyca, liczony od południka lwowskiego, w tym czasie jest

$$t = 0 - \alpha = 21^h 44^m 27^s - 1^h 21^m 23^s.1 = 20^h 23^m 3^s.9.$$

Przyjmując dla Lwowa $\varphi = 49^\circ 50' 11''.5$, obliczamy za pomocą wzorów (h) i (i) ustępu 30 współrzędne poziome geocentryczne księżyca. Wartości ich są

$$a = 290^\circ 16' 7'', \quad h = 32^\circ 30' 22''.1.$$

W celu obliczenia współrzędnych poziomych topocentrycznych stosujemy wzory (136'), (137'), (140), (138'').

Dla Lwowa według wzorów (51'') i (52'') znajdujemy:

$$\varphi - \varphi' = 11' 26'' = 686'', \quad \varphi' = 49^\circ 38' 45''.5, \quad \log \rho = 9.999171.$$

Z temi wartościami obliczenie paralaksy dla współrzędnych poziomych jest następujące:

ρ	9.99917	$\varphi - \varphi'$	2.83632
$\sin \pi$	8.25227	$\cos a$	9.53960
$\varphi - \varphi'$	2.83632	M	2.37592
$\sin a$	9.97224 <i>n</i>	$M = 237''.6 = 3' 57''.6$	
$\sec h$	0.07400	$M + h = 32^\circ 34' 19''$	
$a' - a$	1.13400 <i>n</i>	$\rho \sin \pi$	8.25144
<u>$a' - a = -13''.6$</u>		$\sin(M + h)$	9.73107
		$\sin v$	7.98251 <i>n</i>
		$v = -33' 1''$	
		$\frac{v}{2} = -16' 30''.5$	
		$\cotg(M + h)$	0.19461
		$\tang v$	7.98253 <i>n</i>
		$\tang\left(45^\circ - \frac{v}{2}\right)$	0.00417
		$\tang(h' - h)$	8.18131 <i>n</i>
		<u>$h' - h = -52' 11''.1$</u>	

Gdy do obliczenia $h' - h$ zastosujemy wzory (141) i (138^{IV}), to, jak rachunek pokazuje, ograniczyć się możemy do dwóch pierwszych wyrazów. Przytaczamy ten rachunek.

$$1 \left\{ \begin{array}{ll} M + h = 32^{\circ} 34' 19'' \\ n & 8.25144 \\ \cos(M + h) & 9.92568 \\ \operatorname{cosec} 1'' & 5.31442 \\ \Pi_1 & 3.49154 n \\ \Pi_1 = & -3101''.4 \end{array} \right. \quad 2 \left\{ \begin{array}{ll} 2(M + h) = 65^{\circ} 8' 38'' \\ \frac{n^2}{2} & 6.20185 \\ \sin 2(M + h) & 9.95778 \\ \operatorname{cosec} 1'' & 5.31442 \\ \Pi_2 & 1.47405 n \\ \Pi_2 = & -29''.8 \end{array} \right.$$

$$\underline{h' - h = -3101''.4 - 29''.8 = -3131''.2 = -52' 11''.2.}$$

Jak widzimy, wynik zgodny jest z poprzednim.
Różnicę $\lambda' - \lambda$ obliczamy z pomocą wzoru (139').

$$\begin{aligned} \lambda &= 1006''.4 \\ \lambda &3.00277 \\ \rho \sin \pi &8.25144 \\ \sin h &9.73029 \\ \lambda' - \lambda &0.98450 \\ \lambda' - \lambda &= 9''.65 \\ \lambda' &= 1016''.1. \end{aligned}$$

Wreszcie celem obliczenia różnicy $\Delta' - \Delta$ stosujemy wzór (139'').

$$\begin{aligned} \rho &9.99917 \\ \sin h &9.73029 \\ \Delta' - \Delta &9.72946 n \\ \Delta' - \Delta &= -0.536 \\ \Delta &= 55.941 \\ \Delta' &= 55.405. \end{aligned}$$

Z uwzględnieniem obliczonych redukcji wartości spółrzednych topocentrycznych są następujące:

$$\begin{aligned} \alpha &= 290^{\circ} 15' 53'', & h &= 31^{\circ} 38' 11''. \\ \lambda &= 16' 56''.1, & \Delta' &= 55.405. \end{aligned}$$

Wpływ paralaksy na spółrzedne godzinne obliczamy z pomocą wzorów (146), (147), (142'), (143) i (144').

$\rho \sin \pi$	8.25144	$\frac{t' + t}{2} =$	$22^h 21^m 57^s.4$
$\cos \varphi'$	9.81127	$\frac{t' - t}{2} =$	$-1^m 6^s.6$
$\cos t$	9.76677	$\cotg \varphi'$	9.929285
$\sec \delta$	0.01100	$\cos \frac{t' + t}{2}$	9.763839
$\sin \mu$	7.84048 <i>n</i>	$\sec \frac{t' - t}{2}$	0.000005
$\mu =$	$-23' 48''.6$	$\tan M$	9.693129
$\frac{\mu}{2} =$	$-11' 54''.3$	$M =$	$26^\circ 15' 29''$
$\tan t$	0.14247 <i>n</i>	$\delta =$	$12^\circ 50' 28''$
$\tan \mu$	7.84049 <i>n</i>	$M + \delta =$	$39^\circ 5' 57''$
$\tan \left(45^\circ - \frac{\mu}{2}\right)$	0.00301	$\rho \sin \pi$	8.25144
$\tan(t' - t)$	7.98597 <i>n</i>	$\sin \varphi'$	9.88199
<u>$t' - t = -2^m 13^s.1$</u>		$\sin(M + \delta)$	9.79980
		$\sec M$	0.04730
		$\sin v$	7.98053 <i>n</i>
		$v =$	$-32' 52''$
		$\frac{v}{2} =$	$-16' 26''$
		$\cotg(M + \delta)$	0.09009
		$\tan v$	7.98055 <i>n</i>
		$\tan \left(45^\circ - \frac{v}{2}\right)$	0.00415
		$\tan(\delta' - \delta)$	8.07479 <i>n</i>
		<u>$\delta' - \delta = -40' 50''.1$</u>	

Za pomocą wzorów (150), (151), (142'') i (144'') ten sam rachunek wykonywa się tak:

$t =$	$20^h 53^m 3^s.9$	$M + \delta =$	$39^\circ 5' 57''$
$2t =$	$17^h 46^m 7^s.8$	$2(M + \delta) =$	$78^\circ 11' 54''$
$\rho \sin \pi$	8.25144	$\rho \sin \pi$	8.25144
$\cos \varphi'$	9.81127	$\sin \varphi'$	9.88199

sec δ		0.01100	sec M		0.04730
m		8.07371	n		8.18073
m^2		6.14742	n^2		6.36146
1	m	8.07371	3	n	8.18073
	$\sin t$	9.90924 n		$\cos (M + \delta)$	9.88989
	sec 1^s	4.13833		sec $1''$	5.31442
	Π_1	2.12128 n		Π_3	3.38504 n
2	$\frac{1}{2} m^2$	5.84639	4	$\frac{1}{2} n^2$	6.06043
	$\sin 2t$	9.99920 n		$\sin 2(M + \delta)$	9.99072
	sec 1^s	4.13833		sec $1''$	5.31442
	Π_2	9.98392 n		Π_4	1.36557 n
$\Pi_1 = -$		132 ^s .2	$\Pi_3 = -$		2426 ^{''} .9
$\Pi_2 = -$		0 ^s .9	$\Pi_4 = -$		23 ^{''} .2
$t' - t = -$		<u>2^m 13^s.1</u>	$\delta' - \delta = -$		<u>2450^{''}.1 = -40' 50^{''}.1</u>

Wyniki, osiągnięte oboma sposobami, są ze sobą zgodne. Ponieważ $t' - t = -(\alpha' - \alpha)$, więc $\alpha' - \alpha = +2^m 13^s.1$.

Przykład 2. Znaleźć wartość paralaksy miesięcznej słońca dla epoki tej samej, co w poprzednim przykładzie.

Do obliczenia wpływu paralaksy miesięcznej na współrzędne równikowe słońca służą wzory (155') i (156'). Aby je móc zastosować, należy znać wartości α_{\odot} , δ_{\odot} i π_{\odot} dla wspomnianej epoki. Otrzymuje się je z efemeryd przez interpolację, mianowicie

$$\alpha_{\odot} = 13^h 34^m 44^s.38, \quad \delta_{\odot} = -9^{\circ} 53' 2''.7, \quad \pi_{\odot} = 8''.83.$$

Jest więc dalej

$$a_{\odot} \pi_{\odot} = 6''.45, \quad \alpha_{\odot} - \alpha_{\oplus} = 12^h 13^m 21^s.3.$$

Wystarczy rachunek na trzy miejsca dziesiętne. Jest on następujący:

$a_{\odot} \pi_{\odot}$	0.810	sec δ_{\oplus}	0.011
$\cos \delta_{\odot}$	9.994	$\alpha'_{\odot} - \alpha_{\odot}$	9.580 n
$\sin (\alpha_{\odot} - \alpha_{\oplus})$	8.765 n	<u>$\alpha'_{\odot} - \alpha_{\odot} = -$</u>	<u>0^{''}.38</u>

$$\begin{array}{ll}
 \sin \delta_{\odot} & 9.347 \\
 \cos \delta_{\odot} & 9.994 \\
 \sin \delta_{\oplus} \cos \delta_{\odot} & 9.341 \\
 \sin \delta_{\oplus} \cos \delta_{\odot} & = 0.219 \\
 0.219 - 0.167 & = 0.052 \\
 \delta'_{\odot} - \delta'_{\oplus} & = 0.052 \times 6''.46 = 0''.33.
 \end{array}
 \quad \left\{ \begin{array}{ll}
 \cos \delta_{\oplus} & 9.989 \\
 \sin \delta_{\oplus} & 9.235 \, n \\
 \cos (\alpha_{\odot} - \alpha_{\oplus}) & 9.999 \, n \\
 \Pi & 9.223 \\
 \Pi & = 0.167
 \end{array} \right.$$

Aby znaleźć wpływ paralaksy miesięcznej na współrzędne ekliptyczne słońca, bierzemy z efemeryd długość słońca i pochyłość ekliptyki, w danym wypadku

$$\odot = 205^{\circ} 32' 40''.6, \quad \varepsilon = 23^{\circ} 26' 56'',$$

i według wzorów (a) i (b) ustępu 38 obliczamy współrzędne ekliptyczne księżyca

$$\oplus = 23^{\circ} 36' 10'', \quad \beta_{\oplus} = +3^{\circ} 57' 23''.$$

Jest zatem $\odot - \oplus = 181^{\circ} 56' 31''$ i rachunek dalszy wykonuje się według wzorów (157'') i (158'')

$$\begin{array}{ll}
 a_z \pi_{\odot} & 0.810 \\
 \cos \beta_{\oplus} & 9.999 \\
 \sin (\odot - \oplus) & 8.528 \, n \\
 \odot' - \odot & 9.337 \, n \\
 \odot' - \odot & = -0''.2.
 \end{array}
 \quad \begin{array}{ll}
 a_z \pi_{\odot} & 0.810 \\
 \sin \beta_{\oplus} & 8.839 \\
 \beta'_{\odot} & 9.639 \\
 \beta'_{\odot} - \beta_{\odot} & = 0''.4.
 \end{array}$$

Przykład 3. Znaleźć wartość paralaksy słońca we Lwowie w epoce

$$1918 \text{ grudzień } 8, \ 6^h 20^m \text{ cz. } \text{śr. Gr.}$$

Z efemeryd B. A. J. znajdujemy dla powyższej epoki

$$\theta = 13^h 0^m 52^s,$$

$$\alpha_{\odot} = 16^h 56^m 26^s, \quad \delta_{\odot} = -22^{\circ} 39', \quad \odot = 255^{\circ} 21', \quad \log R = 9.99342,$$

$$\text{a więc } t_{\odot} = \theta - \alpha_{\odot} = -3^h 55^m 34^s.$$

Z temi wartościami rachunek według wzorów (h) i (i) ustępu 30 daje

$$a = -52^{\circ} 12', \quad h = 0^{\circ} 45'.$$

Obliczamy zmianę współrzędnych poziomowych słońca z powodu paralaksy, stosując wzory (136^{VI}) i (138^{VI}). Wystarcza rachunek czteromiejskowy.

$\pi^0_{\odot} \sin 1''$	5.6304	π^0_{\odot}	0.9445
$\varphi - \varphi'$	2.8363	$\frac{\rho}{R}$	0.0058
$\frac{\rho}{R}$	0.0058	$\cos h$	0.0000
$\sin a$	9.8977 <i>n</i>	$h' - h$	0.9503 <i>n</i>
$\sec h$	0.0000	<u>$h' - h = -8''.91.$</u>	
$a' - a$	8.3702		
<u>$a' - a = -0''.02.$</u>			

Wpływ paralaksy na współrzędne godzinne obliczamy za pomocą wzorów (142''') i (144''').

π^0_{\odot}	0.9445	1	{	$\sin \varphi'$	9.8820
$\frac{\rho}{R}$	0.0058			$\cos \delta$	9.9651
$\cos \varphi'$	9.8113			Π_1	9.8471
$\sin t$	9.9326 <i>n</i>			$\Pi_1 =$	0.7033
$\sec \delta$	0.0349	2	{	$\cos \varphi'$	9.8113
$t' - t$	0.7291 <i>n</i>			$\sin \delta$	9.5856 <i>n</i>
<u>$t' - t = -5''.36.$</u>				$\cos t$	9.7132
				Π_2	9.1101
				$\Pi_2 =$	0.1288
				$\Pi_1 + \Pi_2 =$	0.8321
				$\Pi_1 + \Pi_2$	9.9202
				$\frac{\rho}{R}$	0.0058
				π^0_{\odot}	0.9445
				$\delta' - \delta$	0.8705 <i>n</i>
				<u>$\delta' - \delta = -7''.42.$</u>	

Prócz tego jest

$$\underline{\alpha' - \alpha = -(t' - t) = +5''.36.}$$

Przykład 4. Obliczyć wpływ paralaksy rocznej na współrzędne równikowe i ekliptyczne gwiazdy α *Centauri* w dniu 15 grudnia 1919 r. Paralaksa i współrzędne tej gwiazdy mają wartości następujące:

$$\pi = 0''.75, \quad \alpha = 14^h 34^m, \quad \delta = -60^\circ 30'.$$

We wzorach (164) i (165), które do obliczenia zastosujemy, występują współrzędne słońca. Według B. A. J. dla grudnia 1919 przyjmujemy

$$\alpha_{\odot} = 17^h 28^m, \quad \delta_{\odot} = -23^\circ 15', \quad \odot = 262^\circ 42',$$

jest więc $\alpha_{\odot} - \alpha = 2^h 54^m$.

π	9.875	1	{	$\sin \delta_{\odot}$	9.596 <i>n</i>
$\cos \delta_{\odot}$	9.963			$\cos \delta$	9.696
$\sin (\alpha_{\odot} - \alpha)$	8.838			Π_1	9.292 <i>n</i>
$\sec \delta$	0.304	2	{	$\cos \delta_{\odot}$	9.963
$\alpha' - \alpha$	9.980			$\sin \delta$	9.938 <i>n</i>
<u>$\alpha' - \alpha = 0''.96$</u>				$\cos (\alpha_{\odot} - \alpha)$	9.861
				Π_2	9.762 <i>n</i>
				$\Pi_1 =$	-0.196
				$\Pi_2 =$	-0.578
				$\Pi_1 - \Pi_2 =$	0.382
				$\Pi_1 - \Pi_2$	9.582
				π	9.875
				$\delta' - \delta$	9.457
				<u>$\delta' - \delta =$</u>	<u>0''.29</u>

Celem zastosowania wzorów (166) i (167) obliczamy najprzód współrzędne ekliptyczne gwiazdy; znajdujemy

$$\lambda = 238^\circ 14', \quad \beta = -42^\circ 21',$$

a więc $\odot - \lambda = 24^\circ 28'$.

π	9.875	π	9.875
$\sin (\odot - \lambda)$	9.617	$\cos (\odot - \lambda)$	9.959
$\sec \beta$	0.132	$\sin \beta$	9.828 <i>n</i>
$\lambda' - \lambda$	9.624	$\beta' - \beta$	9.662
<u>$\lambda' - \lambda = 0''.42$</u>		<u>$\beta' - \beta = 0''.46$</u>	

ROZDZIAŁ VII.

ABERACJA.

75. Czas aberacji. Rok światła. Równanie światła. Promienie światła, wysyłane przez jakieś źródło, przybywają do oka obserwatora dopiero po upływie pewnego czasu, który nazywa się *czasem aberacji*. Czas aberacji oczywiście zależy od odległości źródła światła i od prędkości, z jaką drgania świetlne przenoszą się w eterze, t. j. od prędkości światła.

Skutkiem tego czasu aberacji wszystkie zjawiska astronomiczne obserwujemy zawsze później, aniżeli one w istocie zachodzą. Opóźnienie to, gdy chodzi o gwiazdy stałe, wynosić może lata, dziesiątki lub nawet tysiące lat, a że odległości gwiazd są bardzo rozmaite, więc zjawiska, które w danej chwili na różnych gwiazdach dostrzegamy, są w istocie zjawiskami różnoczesnemi. Uwaga ta dotyczy także pozycyj gwiazd, które zmieniają się tak wskutek ruchu gwiazd w przestrzeni, jak i wskutek ruchu układu słonecznego, powodującego paralaksę wiekową. Położenie gwiazdy, obserwowanej w danej chwili, różni się od jej prawdziwego położenia w tej samej chwili o tę zmianę, która zaszła w czasie aberacji.

Prędkość światła w próżni wynosi 299860 km na sekundę. Odległości pomiędzy gwiazdami są tak wielkie, że, chcąc je wyrazić w jednostkach długości, wynikających ze stosunków odległościowych w naszym układzie planetarnym, a więc w promieniach równika ziemskiego lub w jednostkach planetarnych, otrzymalibyśmy liczby bardzo wielkie i w zastosowaniu niedogodne. Dla orientacji w stosunkach odległościowych międzygwiazdowych bardzo dogodną jest jednostka długości, zwana

rokiem światła. Rozumiemy przez tę nazwę długość drogi, którą przebiega promień światła w roku zwrotnikowym.

Stosunek roku światła do jednostki planetarnej jest taki sam, jak stosunek roku zwrotnikowego do t. zw. *równania światła*. Tą nazwą oznaczamy czas, w ciągu którego światło przebiega drogę, równą jednostce planetarnej. Równanie światła wynosi 498.580 sekund średnich, a rok zwrotnikowy (p. rozdział X) wynosi 31556926 sek. śr. Dzieląc drugą z powyższych liczb przez pierwszą, otrzymuje się, że

$$1 \text{ rok światła} = 63293.6 \text{ jednostek planetarnych.}$$

Jeżeli π jest wartością paralaksy rocznej gwiazdy, to odległość tej gwiazdy wynosi według wzoru (161) .

$$\Delta = \frac{1}{\pi \sin 1''} = \frac{206205}{\pi} \text{ jedn. plan.}$$

Gdy więc $\pi = 1''$, to $\Delta = 206205$ jedn. plan., i odległość tę nazywamy *parsek*; z określenia tego wynika, że

$$1 \text{ parsek} = \frac{206205}{63293.6} = 3.26 \text{ lat światła,}$$

$$1 \text{ rok światła} = 0.31 \text{ parseków;}$$

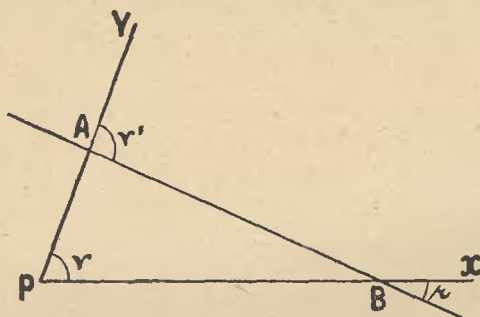
jest zatem $\Delta = \frac{1}{\pi}$ odległością gwiazdy, mającej paralaksę π , wyrażoną w parsekach, a $\Delta = \frac{3.26}{\pi}$ odległością tejże gwiazdy, wyrażoną w latach światła. Gdy np. $\pi = 0''.02$, to odległość gwiazdy wynosi 50 parseków = 163 lata światła; jest to największa odległość, którą z pomocą metod trygonometrycznych jeszcze wyznaczyć można.

76. Aberacja gwiazdowa. Gdyby gwiazda zajmowała w przestrzeni położenie niezmiennie i obserwator również był nieruchomy, to uważając, że nie zachodzi refrakcja, promień widzenia gwiazdy określałby prawdziwy kierunek, w którym gwiazda się znajduje. Promień widzenia także i wtedy określałby prawdziwy kierunek ku gwiazdzie, gdyby obserwator posiadał ruch i gwiazda zmieniała miejsce, ale światło miało prędkość nieskończenie

wielką. W rzeczywistości obserwator ziemski znajduje się w ruchu, a światło przenosi się z prędkością, która w stosunku do prędkości obserwatora nie jest nieskończenie wielką; wskutek tego promień widzenia gwiazdy odchyła się od kierunku prostej, łączącej gwiazdę z obserwatorem w chwili obserwacji i określającej prawdziwy kierunek ku gwiazdzie w tej chwili. Odchylenie to nosi nazwę *aberracji gwiazdowej*.

Zjawisko, analogiczne do aberracji gwiazdowej, występuje zawsze wtedy, gdy dodają się do siebie dwa ruchy, których kierunki tworzą ze sobą kąt różny od zera.

Przypuśćmy na przykład, że z punktu P (ryc. 60) w kierunku PX przenosi się jakiś przedmiot ze stałą prędkością V , a jednocześnie z tegoż punktu w kierunku PY przenosi się obser-



Rycina 60.

wator ze stałą prędkością v . Oznaczmy przez v kąt XPY, który tworzą ze sobą kierunki PX i PY.

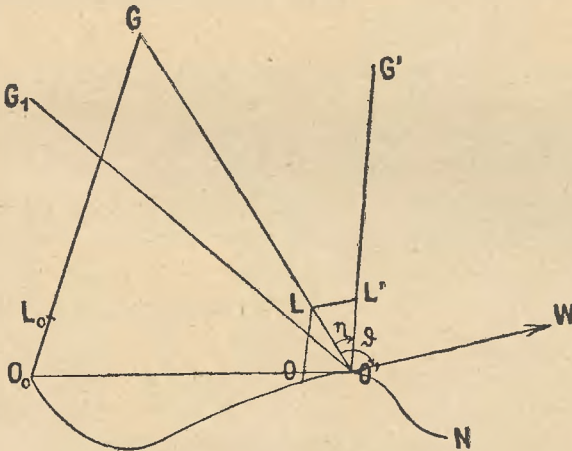
Gdy w pewnej chwili obserwator znajduje się w punkcie A, a przedmiot w punkcie B, to jest oczywiście

$$PA : PB = v : V,$$

i w każdej innej chwili kierunek prostej, łączącej obserwatora z przedmiotem ruchomym, jest równoległy do AB. Kierunek ten tworzy z kierunkiem PY kąt $BAY = v'$. Gdyby obserwator był nieruchomy, przedmiot znajdowałby się stale w kierunku PX, który z kierunkiem PY tworzy kąt v . Różnica $v' - v$ zależy od stosunku prędkości $\frac{v}{V}$.

Przy zjawisku aberacji gwiazdowej mamy do czynienia nie z ruchem jakiegoś przedmiotu, lecz z przenoszeniem się promienia światła od gwiazdy do oka obserwatora. Wynik wszakże jest analogiczny do przedstawionego w powyższym przykładzie, jak to wypływa z następującego rozważania.

Gdy na przedmiot patrzymy przez lunetę, to kierunek, w którym go widzimy, określony jest przez oś optyczną lunety, w której ognisku znajduje się obraz przedmiotu. Niechaj w pewnej chwili t_0 w punkcie L_0 (ryc. 61) znajduje się obiektywa



Rycina 61.

lunety, a w O_0 okular; oś optyczna lunety posiada więc kierunek L_0O_0 . Przypuśćmy, że w tej samej chwili od gwiazdy G wychodzi promień w kierunku GO_0 z prędkością V km/sek. Gdyby luneta była nieruchoma, to obserwator zobaczyłby po upływie czasu $\frac{O_0G}{V}$ gwiazdę w kierunku O_0G . Jednakże luneta wraz z obserwatorem posiada ruch w przestrzeni. Przypuśćmy, że przebiega ona dowolną drogę $O_0O'O'N$ i że po upływie czasu θ kierunek osi optycznej jest $L'O'$. W tej chwili niech do okularu przybywa promień światła, który wyszedł od gwiazdy w kierunku GO' w czasie t . Jest zatem $\theta = \frac{GO'}{V}$, i jeżeli gwiazda jest nieruchoma, to $O'G$ jest prawdziwym kierunkiem ku gwiazdzie

dla obserwatora, znajdującego się w O' . Lecz nie widzi on jej w tym prawdziwym kierunku. Aby bowiem promień mógł dojść do okularu, musiał on przedtem napotkać obiektywę lunety L , gdy luneta zajmowała położenie LO ; LO' jest drogą, którą przebiega promień w granicach lunety wzdłuż jej osi optycznej, a kierunek tej osi $O'L'$ określa promień widzenia gwiazdy. Obserwator widzi zatem gwiazdę w kierunku $O'G'$.

Wyznamy kąt pomiędzy kierunkiem promienia widzenia $O'G'$, który określa *miejsce pozorne* gwiazdy, a kierunkiem prawdziwym $O'G$. Niechaj będzie τ czas, potrzebny na to, aby promień światła przebiegł drogę LO' . Jest to przeciąg czasu tak krótki, że jakikolwiek kształt ma droga, którą przebywa obserwator, można kawałek drogi, przebyty w czasie τ uważać za odcinek prostej OW , stycznej do drogi w chwili obserwacji, a prędkość v za stałą. W tem założeniu oś optyczna lunety w czasie τ przenosi się równolegle do siebie. Gdy więc $LO \parallel L'O'$ przedstawia położenie lunety w epoce $t + \theta - \tau$, to w czasie τ promień światła przebywa drogę $LO' = \tau V$, a obserwator (luneta) drogę $OO' = \tau v$, i jest oczywiście $\frac{OO'}{LO'} = \frac{v}{V}$.

Jak widzimy, promień widzenia $O'G'$ odchylony jest od kierunku prawdziwego $O'G$ o kąt $GO'G' = \eta$ w kierunku ruchu obserwatora; kąt ten leży w płaszczyźnie $GO'W$, określonej przez momentalny kierunek ruchu obserwatora i gwiazdę.

Niechaj będzie $GO'W = \vartheta$ kąt, utworzony przez prawdziwy kierunek ku gwiazdzie $O'G$ oraz kierunek momentalny ruchu obserwatora $O'W$, to z trójkąta LOO' wynika

$$\frac{OO'}{LO'} = \frac{v}{V} = \frac{\sin \eta}{\sin (\vartheta - \eta)}. \quad (a)$$

Oznaczmy jeszcze

$$\frac{v}{V} = p, \quad (b)$$

to ze wzoru (a) wypływa

$$\operatorname{tang} \eta = \frac{p \sin \vartheta}{1 + p \cos \vartheta}. \quad (173)$$

Ten kąt η , o który pozorny kierunek ku gwiazdzie odchyłony jest od prawdziwego w chwili obserwacji, jest miarą aberacji gwiazdowej. Kąt ten, jak widzimy ze wzoru (173), jest zupełnie niezależny od odległości gwiazdy, ani też od prędkości obserwatora i kształtu jego drogi w czasie aberacji; zależy on jedynie od prędkości i kierunku obserwatora w chwili obserwacji.

Kierunek $O'G$, który nazwalibyśmy prawdziwym w epoce $t + 0$, byłby takim w istocie tylko wtedy, gdyby gwiazda nie posiadała ruchu. Gdy jednakże w czasie 0 gwiazda G przeszła do G_1 , to prawdziwy kierunek ku gwiazdzie określa prosta $O'G_1$. Ten kierunek jednakże podać możemy tylko wtedy, gdy znany jest ruch własny gwiazdy. Do tej sprawy powrócimy jeszcze później.

Oczywiście każdy ruch obserwatora powodować musi aberacją gwiazdową. Biorąc znowu pod uwagę te cztery główne ruchy obserwatora, które braliśmy pod uwagę w rozdziale poprzednim, odróżniać będziemy też cztery następujące przypadki aberacji gwiazdowej: 1) aberację wiekową, 2) aberację roczną, 3) aberację miesięczną i 4) aberację dzienną.

Jak wynika ze wzoru (173), jest co najwyżej $\tan \eta = p = \frac{v}{V}$, i oczywiście p ma wartość tem większą, im większą jest prędkość obserwatora v . Otóż z ruchów wyżej wymienionych, jak wiemy, największą jest prędkość ruchu rocznego ziemi dookoła słońca, wynosząca około 30 km/sek. W tym przypadku jest w przybliżeniu $p = 10^{-4}$, a we wszystkich innych przypadkach wartość p jest mniejsza. Wobec tego można we wzorze (173) opuścić w mianowniku drugi wyraz i przyjąć $\tan \eta = \eta \sin 1''$; otrzymuje się w ten sposób dostatecznie dokładny wzór przybliżony

$$\eta \sin 1'' = p \sin \vartheta, \quad (173')$$

który, gdy oznaczymy

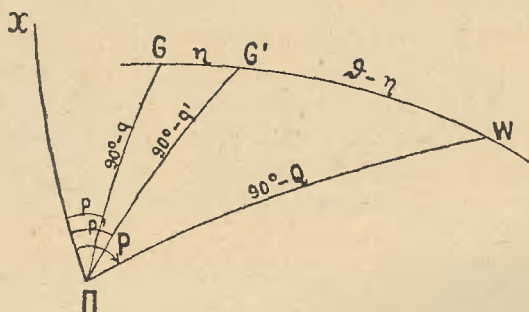
$$\frac{p}{\sin 1''} = k, \quad (c)$$

otrzymuje postać

$$\eta = k \sin \vartheta. \quad (173'')$$

W tym ostatnim wzorze η i k wyrażone są w sekundach łukowych.

77. Zmiana wartości współrzędnych sferycznych gwiazdy z powodu aberracji gwiazdowej. Z poprzednich rozważań można wnioskować, w jaki sposób aberracja gwiazdowa wpływa na współrzędne gwiazdy. Prawdziwe i pozorne położenie gwiazdy przypada w płaszczyźnie, określonej przez gwiazdę i kierunek ruchu obserwatora w chwili obserwacji. Płaszczyzna ta określa na sklepieniu niebieskiem wielkie koło, przechodzące przez prawdziwe miejsce gwiazdy G (ryc. 62) oraz punkt W , w którym kierunek ruchu obserwatora przecina sklepienie niebieskie. Miejsce pozorne gwiazdy G' , jak wynika z poprzedniego ustępu, przypada na wielkiem kole GW i jest przesunięte w kierunku



Rycina 62.

od G do W o kąt η , określony przez wzór (173''), w którym oznaczono $GW = \delta$. Jest zatem.

$$GG' = \eta, \quad G'W = \delta - \eta.$$

Dzięki tym prostym stosunkom możemy wyprowadzić wzory ogólne na zmianę współrzędnych w sposób podobny, jak to uczyniliśmy dla refrakcji w ust. 62 i dla paralaksy w ust. 67.

Niechaj na rycinie 62 punkt Π oznacza biegun układu ogólnego sferycznego, a koło ΠX niech będzie początkiem rachuby kątów przy biegunie; kierunek rachuby tych kątów niech będzie wsteczny. Dalej niech oznaczają p i q współrzędne prawdziwe gwiazdy w tym układzie, p' i q' współrzędne pozorne (t. j. zmienione przez aberrację), a P i Q współrzędne punktu W . Z trójkątów $G\Pi G'$ i $G'\Pi W$ wypływają proporcje

$$\sin \eta : \sin (p' - p) = \cos q : \sin GG'\Pi,$$

$$\sin (\vartheta - \eta) : \sin (P - p') = \cos Q : \sin GG'\Pi,$$

a z nich

$$\frac{\sin (p' - p) \cos q}{\sin \eta} = \frac{\sin (P - p') \cos Q}{\sin (\vartheta - \eta)}.$$

Podstawiając tu wartość na $\sin \eta$, wypływającą ze wzorów (a), (b), (c), mianowicie

$$\sin \eta = k \sin (\vartheta - \eta) \sin 1'',$$

otrzymamy

$$\sin (p' - p) \cos q = k \sin (P - p') \cos Q \sin 1'', \quad (d)$$

albo też, pisząc

$$\sin (p' - p) \cos q = k \cos Q \sin 1'' [\sin (P - p) \cos (p' - p) - \cos (P - p) \sin (p' - p)],$$

$$\begin{aligned} \sin (p' - p) [\cos q + k \cos Q \cos (P - p) \sin 1''] &= \\ &= k \cos Q \sin (P - p) \cos (p' - p) \sin 1'', \end{aligned}$$

znajdziemy

$$\operatorname{tang} (p' - p) = \frac{-k \cos Q \sin (p - P) \sec q \sin 1''}{1 + k \cos Q \cos (p - P) \sec q \sin 1''}. \quad (174)$$

Zazwyczaj (mianowicie z wyjątkiem przypadku, gdy gwiazda znajduje się bardzo blisko bieguna Π , wskutek czego wartość $\sec q$ jest znaczna), można drugi wyraz w mianowniku opuścić i przyjąć $\operatorname{tang} (p' - p) = (p' - p) \sin 1''$. Wtedy otrzymamy wzór przybliżony

$$p' - p = -k \cos Q \sin (p - P) \sec q. \quad (174')$$

W celu wyznaczenia spólrzędnej q' bierzemy pod uwagę trójkąty $\Pi G W$ i $\Pi G' W$, z których otrzymuje się

$$\sin q = \cos \vartheta \sin Q + \sin \vartheta \cos Q \cos W,$$

$$\sin q' = \cos (\vartheta - \eta) \sin Q + \sin (\vartheta - \eta) \cos Q \cos W,$$

oraz

$$\frac{\sin q - \cos \vartheta \sin Q}{\sin \vartheta} = \frac{\sin q' - \cos (\vartheta - \eta) \sin Q}{\sin (\vartheta - \eta)}.$$

Dalej jest

$$\begin{aligned} \sin Q [\sin \vartheta \cos (\vartheta - \eta) - \cos \vartheta \sin (\vartheta - \eta)] = \\ = \sin q' \sin \vartheta - \sin q \sin (\vartheta - \eta), \end{aligned}$$

$$\sin q' \sin \vartheta - \sin q \sin (\vartheta - \eta) = \sin Q \sin \eta,$$

$$\sin q' \frac{\sin \vartheta}{\sin (\vartheta - \eta)} = \sin q + k \sin Q \sin 1''. \quad (e)$$

Z tych samych trójkątów wypływają wzory

$$\sin \vartheta \sin W = \cos q \sin (P - p),$$

$$\sin (\vartheta - \eta) \sin W = \cos q' \sin (P - p'),$$

z których przez dzielenie otrzymujemy

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin (\vartheta - \eta)} = \frac{\cos q \sin (P - p)}{\cos q' \sin (P - p')}. \quad (f)$$

Tę wartość podstawiamy we wzorze (e), co daje

$$\sin q + k \sin Q \sin 1'' = \frac{\sin q' \cos q \sin (P - p)}{\cos q' \sin (P - p')}$$

oraz

$$\frac{\sin q' \cos q \sin (P - p)}{\sin (P - p')} - \sin q \cos q' = k \sin Q \cos q' \sin 1''.$$

Odejmując tu i dodając po lewej stronie $\sin q' \cos q$, otrzymujemy

$$\sin q' \cos q \left[\frac{\sin(P-p)}{\sin(P-p')} - 1 \right] + \sin(q' - q) = k \sin Q \cos q' \sin 1'',$$

a po łatwym przekształceniu

$$\sin(q' - q) = \frac{\sin q' \cos q}{\sin(P-p')} [\sin(P-p') - \sin(P-p)] + k \sin Q \cos q' \sin 1'',$$

lub

$$\sin(q' - q) = - \frac{2 \sin q' \cos q}{\sin(P-p')} \cos\left(P - \frac{p' + p}{2}\right) \sin \frac{p' - p}{2} + k \sin Q \cos q' \sin 1''.$$

Pisząc tu

$$2 \sin \frac{p' - p}{2} = \frac{\sin(p' - p)}{\cos \frac{p' - p}{2}}$$

i podstawiając zamiast $\sin(p' - p) \cos q$ wartość według wzoru (d), znajdujemy

$$\sin(q' - q) = - k \sin 1'' \left[\cos Q \frac{\cos\left(P - \frac{p' + p}{2}\right)}{\cos \frac{p' - p}{2}} \sin q' - \sin Q \cos q' \right], \quad (g)$$

albo gdy jeszcze wprowadzimy kąt pomocniczy M , określony w sposób następujący (p. wzór 115),

$$\operatorname{tang} M = \cotg Q \frac{\cos\left(\frac{p' + p}{2} - P\right)}{\cos \frac{p' - p}{2}},$$

to jest

$$\sin(q' - q) = \frac{k \sin Q \cos(M + q') \sin 1''}{\cos M}.$$

Z tego wzoru rugujemy q' , wprowadzając $q' = q + (q' - q)$, i otrzymujemy ostatecznie

$$\operatorname{tang}(q' - q) = \frac{k \sin Q \cos(M + q) \sec M \sin 1''}{1 + k \sin Q \sin(M + q) \sec M \sin 1''} \quad (175)$$

Zamiast powyższego wzoru ścisłego można stosować zawsze, gdy M nie jest kątem bliskim 90° , wzór przybliżony

$$q' - q = k \sin Q \cos(M + q) \sec M, \quad (175')$$

a w tym przypadku stosuje się też zamiast ścisłego wzoru na M wzór przybliżony

$$\operatorname{tang} M = \operatorname{cotg} Q \cos(p - P).$$

Można też używać wzoru przybliżonego bez kąta pomocniczego M , mianowicie

$$q' - q = k [\sin Q \cos q - \cos Q \sin q \cos(p - P)]. \quad (175'')$$

Powyższe wzory ogólne specjalizować można dla poszczególnych układów sferycznych, mających zastosowanie w astronomji. Gdy chodzi o obliczenie wpływu aberracji na współrzędne, w praktyce wchodzi w rachubę tylko dwa układy, układ równikowy i układ ekliptyczny.

Oznaczmy przez α , δ współrzędne równikowe prawdziwe gwiazdy, przez α' , δ' jej współrzędne pozorne, a przez α_w , δ_w współrzędne punktu nieba, ku któremu w chwili obserwacji skierowany jest ruch obserwatora, to otrzymamy wzory aberracji dla układu równikowego, podstawiając we wzorach ogólnych odpowiednio

$$\begin{aligned} q &= \delta, & q' &= \delta', & Q &= \delta_w, \\ p &= -\alpha, & p' &= -\alpha', & P &= -\alpha_w, \end{aligned}$$

Wzory (174) i (175) oraz wzór na M przejdą zatem w następujące wzory specjalne:

$$\operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{-k \cos \delta_w \sin(\alpha - \alpha_w) \sec \delta \sin 1''}{1 + k \cos \delta_w \cos(\alpha - \alpha_w) \sec \delta \sin 1''}, \quad (176)$$

$$\operatorname{tang}(\delta' - \delta) = \frac{k \sin \delta_w \cos(M + \delta) \sec M \sin 1''}{1 + k \sin \delta_w \sin(M + \delta) \sec M \sin 1''}, \quad (177)$$

$$\operatorname{tang} M = \cotg \delta_w \frac{\cos\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2} - \alpha_w\right)}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}}, \quad (178)$$

a zamiast nich najczęściej wystarczają w praktyce wzory przybliżone

$$\alpha' - \alpha = -k \cos \delta_w \sin(\alpha - \alpha_w) \sec \delta, \quad (176')$$

$$\delta' - \delta = k \sin \delta_w \cos(M + \delta) \sec M, \quad (177')$$

$$\operatorname{tang} M = \cotg \delta_w \cos(\alpha - \alpha_w), \quad (178')$$

lub też zamiast (177') wzór, nie zawierający kąta pomocniczego,

$$\delta' - \delta = k [\sin \delta_w \cos \delta - \cos \delta_w \sin \delta \cos(\alpha - \alpha_w)]. \quad (177'')$$

Zupełnie podobne do wzorów powyższych są wzory dla spólrzędnych ekliptycznych, należy w nich tylko zastąpić spólrzędne α , δ przez λ , β . Napiszemy tylko wzory przybliżone, ponieważ później wypadnie nam z nich skorzystać:

$$\lambda' - \lambda = -k \cos \beta_w \sin(\lambda - \lambda_w) \sec \beta, \quad (179)$$

$$\beta' - \beta = k [\sin \beta_w \cos \beta - \cos \beta_w \sin \beta \cos(\lambda - \lambda_w)]. \quad (180)$$

W jaki sposób każdy z wyżej wymienionych ruchów obserwatora wpływa na spólrzędne gwiazdy, zależy to przede wszystkim od prędkości v i ściśle z nią związanego kąta k , dalej zaś od kierunku ruchu, określonego przez spólrzędne P i Q punktu W ,

ku któremu w chwili obserwacji zwrócony jest ruch obserwatora. Punkt ten zwany jest ogólnie *apeksem* ruchu obserwatora (por. ust. 72).

Zajmijmy się kolejno czterema wyszczególnionymi poprzednio przypadkami aberacji gwiazdowej.

78. Aberacja wiekowa. Wpływ aberacji wiekowej na współrzędne równikowe gwiazdy otrzymamy, podstawiając we wzorach (176), (177) i (178) na miejsce α_w i δ_w współrzędne apektu ruchu słońca w przestrzeni A i D i odpowiednią wartość stałej k . Jak widzieliśmy (ust. 72), wartości te nie są dokładnie wyznaczone; przyjęliśmy $A = 268^{\circ}.5$, $D = 25^{\circ}.3$, $v = 19.5$ km/sek. Oznaczmy przez k_s wartość stałej k , wypływającą ze wzorów (b) i (c), gdy w nich przyjmiemy prędkość układu, to otrzymamy następujące wzory, wyrażające wpływ aberacji wiekowej na współrzędne równikowe gwiazd:

$$\alpha' - \alpha = -k_s \cos D \sin(\alpha - A) \sec \delta, \quad (181)$$

$$\delta' - \delta = k_s [\sin D \cos \delta - \cos D \sin \delta \cos(\alpha - A)]. \quad (182)$$

Stała $k_s = 13''$ nosi nazwę *stałej aberacji wiekowej*.

Gdy także wartości A , D są stałe, jak to założyliśmy, to również stałymi są dla danej gwiazdy różnice $\alpha' - \alpha$ i $\delta' - \delta$. Ze wzorów powyższych wynika więc, że wszystkie gwiazdy wskutek aberacji wiekowej przesunięte są ku apeksowi układu słonecznego o pewien łuk, którego wartość dla danej gwiazdy jest niezmienna.

W związku z powyższym wynikiem znajdują się uwagi następujące. Współrzędne prawdziwe α , δ określałyby prawdziwe miejsce gwiazdy tylko w tym przypadku, gdyby światło od gwiazdy do obserwatora dochodziło momentalnie, wtedy bowiem nie byłoby, jak wiemy, aberacji gwiazdowej. Jeżeli zaś w rzeczywistości światło posiada prędkość skończoną i czas aberacji dla danej gwiazdy wynosi θ , to, gdy przez $t + \theta$ oznaczymy epokę obserwacji, jest rzeczną zrozumiałą, iż współrzędne α , δ określają kierunek ku gwiazdzie w epoce t i nie wiadomo nic, jakim zmianom uległy one w czasie aberacji. Czas aberacji w ogólności

jest nieznany, można jednakże wykazać, że zmiana współrzędnych w czasie aberacji jest od jego wartości θ niezależna.

Zmiana współrzędnych gwiazdy ma dwie przyczyny: 1) ruch paralaktyczny w czasie θ , 2) ruch prawdziwy w czasie θ . Przypuśćmy najprzód, że gwiazda jest nieruchoma, że zatem współrzędne jej ulegają zmianie tylko wskutek ruchu paralaktycznego. Zakładamy, że ruch obserwatora odbywa się po linii prostej w kierunku, określonym przez współrzędne apeksu tego ruchu A, D , ze stałą prędkością v .

Oznaczmy przez α_0, δ_0 współrzędne prawdziwe gwiazdy w epoce t , przez a drogę, przebytą przez układ słoneczny w czasie aberacji, wreszcie przez α, δ współrzędne prawdziwe gwiazdy w epoce $t + \theta$; stosując wzory paralaksy wiekowej (171) i (172) otrzymamy

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha_0 &= a \pi \cos D \sin(\alpha - A) \sec \delta, \\ \delta - \delta_0 &= -a \pi [\sin D \cos \delta - \cos D \sin \delta \cos(\alpha - A)].\end{aligned}\tag{h}$$

We wzorach tych po prawej stronie napisaliśmy α, δ zamiast α_0, δ_0 , co na wartość różnic $\alpha - \alpha_0$ i $\delta - \delta_0$ nie wpływa.

Oznaczmy przez Δ odległość gwiazdy, a przez V prędkość światła, to jest $\Delta = \theta V$ i $a = \theta v$. A ponieważ $\pi = \frac{1}{\Delta \sin 1''}$, więc jest

$$a \pi = \frac{\theta v}{\theta V \sin 1''} = \frac{v}{V \sin 1''} = k_s.\tag{i}$$

Podstawiając tę wartość we wzorach (h), otrzymamy

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha_0 &= k_s \cos D \sin(\alpha - A) \sec \delta, \\ \delta - \delta_0 &= -k_s [\sin D \cos \delta - \cos D \sin \delta \cos(\alpha - A)].\end{aligned}\tag{j}$$

Przy założeniach wyżej podanych, że ruch obserwatora odbywa się ze stałą prędkością po linii prostej, wartości v, A i D mają we wzorach (j) to samo znaczenie, co we wzorach (181) i (182). Gdy więc porównamy ze sobą wymienione wzory, to

widzimy, że prawe ich strony różnią się tylko znakami. Wobec tego jest też

$$\alpha' - \alpha = \alpha_0 - \alpha, \quad \delta' - \delta = \delta_0 - \delta;$$

albo

$$\alpha' = \alpha_0, \quad \delta' = \delta_0.$$

Wynik, do którego doszliśmy, jest ten, że, bez względu na wartość czasu aberacji, spólrzędne pozorne gwiazdy w epoce $t + \theta$ równają się jej spólrzędnym prawdziwym w epoce t . W czasie aberacji zatem spólrzędne gwiazdy zmieniają się o tyle tylko, ile wynosi różnica między jej spólrzędnymi prawdziwymi a obarczonemi aberacją wiekową.

Gdy gwiazda ma ruch własny, to spólrzędne jej, które w danej chwili obserwujemy, różnią się od prawdziwych ich wartości o te zmiany, którym one uległy w czasie aberacji. Zastanówmy się nad wielkością tych zmian.

W astronomji sferycznej w rachubę wchodzi oczywiście tylko składowa ruchu gwiazdy, prostopadła do promienia widzenia. Oznaczmy linjową wartość tej składowej przez b a odległość gwiazdy przez Δ , to wielkość kątowna składowej b , wyrażona w sekundach, jest $\mu = \frac{b}{\Delta \sin 1''}$. Niechaj będzie jeszcze v_g składowa prędkości linjowej, prostopadła do promienia widzenia, to w czasie aberacji θ jest $b = \theta v_g$. Z drugiej strony jest $\Delta = \theta V$. Podstawiając powyższe wartości na b i Δ w wyrażeniu na μ , znajdziemy

$$\mu = \frac{\theta v_g}{\theta V \sin 1''} = \frac{v_g}{V \sin 1''}. \quad (k)$$

Widzimy z tego wzoru, że wartość ruchu kątownego gwiazdy w czasie aberacji nie zależy zupełnie od czasu aberacji, a więc i od odległości gwiazdy, ale tylko od składowej jej prędkości, prostopadłej do promienia widzenia. Gdy jeszcze przez μ_α i μ_δ oznaczymy składowe ruchu kątownego μ w spólrzędnych α i δ , to zatem o te wartości powiększone są spólrzędne α i δ z powodu ruchu własnego gwiazdy w czasie aberacji.

Wartości μ_α i μ_δ tylko w wyjątkowych wypadkach mogą być wyznaczone; aby bowiem można było wyznaczyć v_g , znaną musi być paralaksa roczna gwiazdy oraz jej ruch własny. Jednakże są to wielkości stałe dla danej gwiazdy i przytem niewielkie, bo tego samego rzędu, co aberacja wiekowa. Nieznajomość ich nie ma więc większego znaczenia nie tylko wtedy, gdy posługujemy się spólrzędnymi gwiazdy, zmienionymi przez aberację gwiazdową, i zupełnie tej zmiany nie bierzemy pod uwagę, ale nawet i w tych zagadnieniach, w których należałoby się opierać na prawdziwych położeniach gwiazd w przestrzeni. Skutkiem tego obraz nieba, który w danej chwili obserwujemy, jest połączeniem zjawisk różnoczesnych, jak już wspomnieliśmy na początku tego rozdziału, a dotyczy to również spólrzędnych gwiazd; sprowadzeniu spólrzędnych do jednej wspólnej epoki stoi na przeszkodzie przede wszystkim nieznajomość odległości gwiazd, a więc i czasów aberacji.

79. Aberacja roczna. Wyrażenie aberacji rocznej otrzymamy, gdy we wzorach ogólnych (174') i (175'') podstawimy spólrzędne apeksu ruchu ziemi dookoła słońca w chwili obserwacji, a spólczynnik k określimy z prędkości tego ruchu w tej samej chwili.

Najprościej otrzymuje się wzory, wyrażające wpływ aberacji rocznej na spólrzędne ekliptyczne.

Kierunek ruchu ziemi w danej chwili określony jest przez styczną do drogi ziemskiej w tym punkcie, w którym ziemia w tej chwili się znajduje. Niechaj tę drogę wyobraża elipsa na ryc. 63. W ognisku S tej elipsy znajduje się słońce, położenie ziemi w chwili obserwacji niechaj oznacza punkt Z. Gdy strzałka a wskazuje kierunek ruchu ziemi w jej drodze, to styczna ZW w punkcie Z wskazuje momentalny kierunek ziemi w chwili obserwacji, a punkt, w którym ta prosta przecina sklepienie niebieskie, określa na niem apeks ruchu ziemi.

Ponieważ styczna ta leży w płaszczyźnie drogi ziemskiej, która na niebie określa ekliptykę, więc także i apeks znajduje się zawsze na ekliptyce; szerokość astronomiczna jego zatem równa się zeru. Położenie apeksu na ekliptyce określa jego długość astronomiczna; jeżeli prosta ZY' oznacza kierunek od ziemi

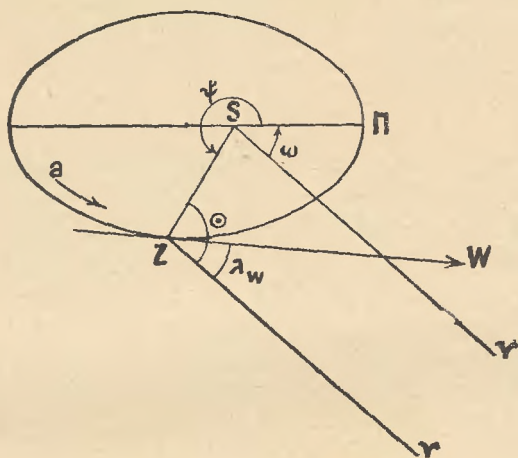
ku punktowi wiosennemu, to długością apeksu jest oczywiście kąt γZW .

Długość apeksu zmienia się wraz z położeniem ziemi w jej drodze. Z ryciny widzimy, że jest

$$\sphericalangle \gamma ZW = \sphericalangle \gamma ZS - \sphericalangle WZS.$$

Ponieważ słońce z ziemi widziane jest w kierunku ZS , więc kąt γZS jest długością słońca. Oznaczmy $\sphericalangle \gamma ZS = \odot$ i $\sphericalangle WZS = \chi$, to współrzędne apeksu ruchu ziemi dookoła słońca są

$$\lambda_w = \odot - \chi, \quad \beta_w = 0.$$



Rycina 63.

Gdy te wartości podstawimy we wzorach ogólnych (179) i (180), to otrzymamy następujące wzory, wyrażające wpływ aberracji rocznej na współrzędne ekliptyczne:

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= k \sin (\odot - \chi - \lambda) \sec \beta, \\ \beta' - \beta &= -k \cos (\odot - \chi - \lambda) \sin \beta, \end{aligned} \tag{1}$$

i przez k należy tu rozumieć wartość odpowiadającą prędkości ziemi w jej drodze, obliczoną według wzoru $k = \frac{v}{V \sin 1''}$.

Celem nadania wzorom postaci, pozwalającej zastosować je w praktyce, wprowadzamy do nich wartości v i k , wypływające z teorii ruchu eliptycznego. Oznaczmy przez Π punkt przysłoneczny drogi ziemskiej (ryc. 63) i poprowadźmy z punktu S prostą SY' równoległą do ZY . Prosta ta zatem skierowana jest również ku punktowi wiosennemu i kąt $Y'S\Pi = \omega$ jest długością punktu Π . Oznaczmy dalej anomalję prawdziwą ziemi, t. j. kąt ΠSZ , przez ψ , mimośród drogi ziemskiej przez e , połowę jej wielkiej osi przez a i promień wodzący ziemi SZ przez r , to do określenia v , r i ψ służą wzory następujące:

$$v^2 = c\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (m)$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \psi}, \quad (n)$$

$$\chi = 90^\circ + e \sin \psi. \quad (o)$$

W średniej odległości ziemi od słońca jest $r = a$. Oznaczmy odpowiadającą tej odległości prędkość ziemi, t. j. średnią prędkość, przez v_0 , to ze wzoru (m) wypływa $v_0^2 = \frac{c\mu}{a}$ oraz

$$\left(\frac{v}{v_0} \right)^2 = 2 \frac{a}{r} - 1. \quad (p)$$

Gdy tu podstawimy wartość r według wzoru (n), to otrzymamy z łatwością

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 + 2e \cos \psi + e^2}{1 - e^2}}, \quad (q)$$

a gdy wyrażenie, stojące po prawej stronie, rozwiniemy na szereg według potęg e , to z dostateczną dokładnością możemy przyjąć

$$v = v_0 (1 + e \cos \psi).$$

Z ryciny widzimy, że jest

$$\psi = 180^\circ + \odot - \omega,$$

a więc ostatecznie

$$v = v_0 [1 - e \cos(\odot - \omega)], \quad (r)$$

$$\chi = 90^\circ - e \sin(\odot - \omega). \quad (s)$$

Te wartości podstawiamy zamiast χ i v we wzorach (l). Przedewszystkiem z dokładnością do pierwszej potęgi e jest:

$$\begin{aligned} \sin(\odot - \chi - \lambda) &= \sin[\odot - \lambda - 90^\circ + e \sin(\odot - \omega)] = \\ &= -\cos[e \sin(\odot - \omega) + (\odot - \lambda)] = \\ &= -\cos(\odot - \lambda) + e \sin(\odot - \omega) \sin(\odot - \lambda), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\odot - \chi - \lambda) &= \cos[\odot - \lambda - 90^\circ + e \sin(\odot - \omega)] = \\ &= \sin[e \sin(\odot - \omega) + (\odot - \lambda)] = \\ &= \sin(\odot - \lambda) + e \sin(\odot - \omega) \cos(\odot - \lambda); \end{aligned}$$

a dalej

$$(\lambda' - \lambda) \sin 1'' = \frac{v_0}{V} \sec \beta [1 - e \cos(\odot - \omega)] [-\cos(\odot - \lambda) + e \sin(\odot - \omega) \sin(\odot - \lambda)],$$

$$(\beta' - \beta) \sin 1'' = -\frac{v_0}{V} \sin \beta [1 - e \cos(\odot - \omega)] [\sin(\odot - \lambda) + e \sin(\odot - \omega) \cos(\odot - \lambda)].$$

Gdy jeszcze oznaczymy

$$\frac{v_0}{V \sin 1''} = k_1, \quad k_1 e = k_1', \quad (183)$$

to po łatwych redukcjach i opuszczeniu potęg e , wyższych niż pierwsza, wzory na aberację otrzymują postać następującą:

$$\lambda' - \lambda = -k_1 \cos(\odot - \lambda) \sec \beta + k_1' \cos(\omega - \lambda) \sec \beta, \quad (184)$$

$$\beta' - \beta = -k_1 \sin(\odot - \lambda) \sin \beta + k_1' \sin(\omega - \lambda) \sin \beta. \quad (185)$$

Wartości stałych k_1 i k_1' oblicza się na podstawie znanych wartości v_0 , V i e . Oznaczmy przez T liczbę sekund średnich w roku gwiazdowym, to jest

$$v_0 = \frac{2\pi a}{T},$$

gdzie a oznacza, jak poprzednio, jednostkę planetarną.

Oznaczmy jeszcze przez a_0 promień równika ziemskiego, a przez π^0_{\odot} stałą paralaksy słońca (ust. 68), to jest

$$a = \frac{a_0}{\pi^0_{\odot} \sin 1''},$$

a więc

$$v_0 = \frac{2\pi a_0}{T \pi^0_{\odot} \sin 1''}.$$

Celem obliczenia wartości stałych k_1 i k_1' według wzoru (183), przyjmujemy następujące wartości liczbowe (p. Tabl. I)

$$a_0 = 6377.4 \text{ km}, \quad T = 31558149.5 \text{ sek},$$

$$\pi^0_{\odot} = 8''.80, \quad V = 299860 \text{ km}, \quad e = 0.0168;$$

jest zatem

$$k_1 = \frac{6,28 \times 6377,4}{31558149,5 \times 8,80 \times 299860 \sin^2 1''} = 20''.472,$$

$$k_1' = 0,0168 \times 20''.472 = 0''.343.$$

Konferencje paryskie r. 1896 i r. 1911 przyjęły, jako wartość obowiązującą w obliczeniach roczników astronomicznych,

$$\underline{k_1 = 20''.47.}$$

Stała k_1 jest to *stała aberracji rocznej*. Uwzględniając otrzymane wartości liczbowe, możemy napisać:

$$\lambda' - \lambda = -20''.47 \cos(\odot - \lambda) \sec \beta + 0''.343 \cos(\omega - \lambda) \sec \beta, \quad (184')$$

$$\beta' - \beta = -20''.47 \sin(\odot - \lambda) \sin \beta + 0''.343 \sin(\omega - \lambda) \sin \beta. \quad (185')$$

Uwaga. Ponieważ jest

$$k_1 = \frac{2\pi a_0}{T \pi^0_{\odot} \cdot V \sin^2 1''},$$

więc

$$k_1 \pi^0_{\odot} = \frac{2\pi a_0}{T V \sin^2 1''} = 180,15.$$

Widzimy stąd, że iloczyn $k_1 \pi^0_{\odot}$ może być obliczony z wielką dokładnością na podstawie wielkości, które są od obu tych stałych czynników niezależne. To daje możność wyznaczenia wartości stałej aberacji, gdy znana jest stała paralaksy słońca, lub też odwrotnie, stałej paralaksy słońca, gdy znana jest wartość stałej k_1 . Innemi słowy poprawka, znaleziona na jakiegokolwiek drodze dla jednej z tych stałych, pociąga za sobą ściśle określoną i łatwo wyznaczalną poprawkę drugiej.

Aby wyznaczyć wpływ aberacji rocznej na współrzędne równikowe, należy we wzorach (176') i (177'') podstawić na miejsce α_w , δ_w wartości współrzędnych apeksu ruchu rocznego ziemi oraz odpowiednią wartość na k . Ponieważ współrzędne ekliptyczne apeksu zostały wyżej określone, mianowicie

$$\lambda_w = \odot - \gamma, \quad \beta_w = 0,$$

więc współrzędne równikowe znajdziemy, stosując wzory przejścia z układu ekliptycznego na równikowy (78'). Otrzymujemy z nich dla $\beta = \beta_w = 0$

$$\begin{aligned} \cos \delta_w \cos \alpha_w &= \cos \lambda_w, \\ \cos \delta_w \sin \alpha_w &= \sin \lambda_w \cos \epsilon, \\ \sin \delta_w &= \sin \lambda_w \sin \epsilon. \end{aligned} \tag{t}$$

Z temi wartościami wzory (176') i (177'') przechodzą w następujące:

$$\begin{aligned} (\alpha' - \alpha) \sin 1'' &= \frac{v}{V} \sec \delta (\sin \lambda_w \cos \epsilon \cos \alpha - \cos \lambda_w \sin \alpha), \\ (\delta' - \delta) \sin 1'' &= \frac{v}{V} (\sin \lambda_w \sin \epsilon \cos \delta - \cos \lambda_w \sin \delta \cos \alpha - \\ &\quad - \sin \lambda_w \cos \epsilon \sin \delta \sin \alpha). \end{aligned} \tag{u}$$

Tu należy podstawić wartość λ_w , która, zgodnie ze wzorem (s), jest

$$\lambda_w = \odot - \chi = \odot - 90^\circ + e \sin (\odot - \omega).$$

Z dokładnością do pierwszych potęg e otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sin \lambda_w &= -\cos \odot + e \sin \odot \sin (\odot - \omega), \\ \cos \lambda_w &= \sin \odot + e \cos \odot \sin (\odot - \omega),\end{aligned}$$

a więc po podstawieniu we wzorach (u)

$$\begin{aligned}(\alpha' - \alpha) \sin 1'' &= \\ &= -\frac{v}{V} \sec \delta (\cos \odot \cos \alpha \cos \varepsilon + \sin \odot \sin \alpha) + \\ &\quad + \frac{v}{V} e \sin (\odot - \omega) \sec \delta (\sin \odot \cos \alpha \cos \varepsilon - \cos \odot \sin \alpha), \\ (\delta' - \delta) \sin 1'' &= \\ &= -\frac{v}{V} (\cos \odot \sin \varepsilon \cos \delta + \sin \odot \cos \alpha \sin \delta - \cos \alpha \sin \odot \cos \varepsilon \sin \delta) + \\ &\quad + \frac{v}{V} e \sin (\odot - \omega) (\sin \odot \sin \varepsilon \cos \delta - \cos \odot \cos \alpha \sin \delta - \\ &\quad - \sin \odot \sin \alpha \cos \varepsilon \sin \delta).\end{aligned}$$

Gdy we wzorach powyższych podstawimy znowu

$$v = v_0 [1 - e \cos (\odot - \omega)]$$

i napiszemy

$$k_1 = 20''.47, \quad k_1 e = k_1' = 0''.343,$$

to opuszczając potęgi e wyższe niż pierwsza, znajdziemy po uporządkowaniu:

$$\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= -20''.47 \sec \delta (\cos \odot \cos \alpha \cos \varepsilon + \sin \odot \sin \alpha) + \\ &\quad + 0''.343 \sec \delta (\cos \omega \cos \alpha \cos \varepsilon + \sin \omega \sin \alpha),\end{aligned}\quad (186)$$

$$\begin{aligned}\delta' - \delta &= -20''.47 [(\sin \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \sin \delta \sin \alpha) \cos \odot + \\ &\quad + \sin \delta \cos \alpha \sin \odot] + \\ &\quad + 0''.343 [(\sin \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \sin \delta \sin \alpha) \cos \omega + \\ &\quad + \sin \delta \cos \alpha \sin \omega].\end{aligned}\quad (187)$$

We wzorach (184) i (185) oraz (186) i (187) pierwsze wyrazy, zależne od \odot , mają okres roczny. Są to wyrazy pod względem wielkości główne i one też stanowią właściwą aberację roczną. Drugie wyrazy są małe i podlegają tylko powolnym zmianom wiekowym, zależnym od ruchu punktu przysłonecznego ziemi. Wartość ω wzrasta rocznie o $61''.8$ (p. Rozdz. X) i na początku trzech najbliższych stuleci jest następująca:

$$\begin{array}{rcl} \text{w r. 1800 } \omega & = & 99^{\circ} 30', \\ & & 1900 \quad 101^{\circ} 13', \\ & & 2000 \quad 102^{\circ} 56'. \end{array}$$

Widzimy więc, że drugie wyrazy w ciągu długich okresów czasu można uważać za stałe; łączą się one z aberacją wiekową gwiazd i w wartościach spółrzędnych gwiazd, podawanych w katalogach, są już zawarte.

Położmy

$$\lambda + k_1' \cos(\omega - \lambda) \sec \beta = l, \quad (w)$$

$$\beta + k_1' \sin(\omega - \lambda) \sin \beta = b, \quad (x)$$

to l i b są spółrzędnymi gwiazdy, wypływającymi z pozycji katalogowych dla chwili obserwacji. Wprowadzając te spółrzędne do wzorów (184) i (185), znajdziemy

$$\lambda' - l = -k_1 \cos(\odot - \lambda) \sec \beta, \quad (y)$$

$$\beta' - b = -k_1 \sin(\odot - \lambda) \sin \beta. \quad (z)$$

Z tych wzorów wypływa kształt drogi, jaką zakresła miejsce pozorne gwiazdy dokoła prawdziwego. Obierzmy znowu w sposób podobny, jak w ustępie 71, układ spółrzędnych prostokątnych, którego początkiem jest punkt (l, b) ; spółrzędne miejsca prawdziwego w tym układzie mają według wzorów (24) wartości

$$x = (\lambda' - l) \cos \beta, \quad y = \beta' - b,$$

lub, gdy uwzględnimy wzory (y) i (z),

$$x = -k_1 \cos(\odot - \lambda), \quad y \operatorname{cosec} \beta = -k_1 \sin(\odot - \lambda). \quad (aa)$$

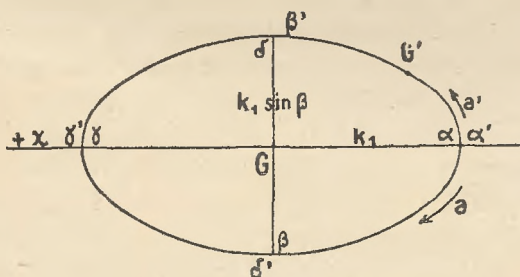
Wypływa stąd

$$x^2 + y^2 \operatorname{cosec}^2 \beta = k_1^2,$$

albo też

$$\frac{x^2}{k_1^2} + \frac{y^2}{(k_1 \sin \beta)^2} = 1. \quad (\text{ab})$$

Jest to równanie elipsy, której połowa wielkiej osi wynosi $k_1 = 20''.47$, a połowa małej osi $k_1 \sin \beta$. Taką więc elipsę zakreśla w ciągu roku skutkiem aberacji rocznej miejsce pozorne każdej gwiazdy dookoła jej miejsca prawdziwego. Jak widzimy z równania (ab), osi wielkie wszystkich elips aberacyjnych są



Rycina 64.

sobie równe, osi małe zaś są tem mniejsze, im bliżej ekliptyki znajduje się gwiazda. Położenie elips aberacyjnych jest takie same, jak położenie elips paralaktycznych (ust. 71), ale te ostatnie są znacznie mniejsze i wielkość ich, jako zależna od wartości π , jest dla każdej gwiazdy inną.

Także i położenie gwiazd w elipsach aberacyjnych przy jednakowych wartościach długości słońca jest inne, niż w elipsach paralaktycznych. Wyjaśnia to ryc. 64, która wyobraża taką elipsę aberacyjną; miejscem prawdziwym gwiazdy jest środek elipsy G, a miejsce pozorne G' przebiega elipsę. Układ spółrzędnych jest obrany tak samo, jak w ustępie 71 dla elipsy paralaktycznej. Miejsce, które w elipsie zajmuje punkt G', wpływa ze wzorów (aa). Wartości spółrzędnych, które odpowia-

dają czterem wartościom kąta $\odot - \lambda$, różniącym się o 90° , są następujące:

$$\begin{aligned}\odot - \lambda &= 0^\circ, & x &= -k_1, & y &= 0; \\ \odot - \lambda &= 90^\circ, & x &= 0, & y &= -k_1 \sin \beta; \\ \odot - \lambda &= 180^\circ, & x &= +k_1, & y &= 0; \\ \odot - \lambda &= 270^\circ, & x &= 0, & y &= +k_1 \sin \beta.\end{aligned}$$

Oznaczmy przez α, β, γ i δ cztery położenia punktu G' , odpowiadające czterem powyższym wartościom kąta $\odot - \lambda$, gdy $\beta > 0$, a przez α', β', γ' i δ' położenie odpowiednie tegoż punktu, gdy $\beta < 0$, to widzimy, że w pierwszym przypadku ruch punktu G' wskazany jest przez strzałkę a , w drugim zaś przez strzałkę a' : pierwszy z tych kierunków jest wsteczny, drugi zaś prosty. Widzimy więc, że także pod względem kierunku ruch aberacyjny zgadza się z ruchem paralaktycznym. Jednakże z porównania ryc. 64 z ryc. 55 wypływa, że gwiazda w elipsie paralaktycznej wyprzedza o 90° jej położenie w elipsie aberacyjnej.

Ruch paralaktyczny łączy się z ruchem aberacyjnym, a ruch wypadkowy określają wzory (166), (167), (y) i (z). W tych ostatnich wartości l i b mają to samo znaczenie, co λ i β we wzorach (166) i (167). Oznaczmy przez $\lambda'' - l$ i $\beta'' - b$ zmiany współrzędnych, spowodowane przez paralaksę i aberację razem, to jest

$$\lambda'' - l = + \sec \beta [\pi \sin (\odot - \lambda) - k_1 \cos (\odot - \lambda)],$$

$$\beta'' - b = - \sin \beta [\pi \cos (\odot - \lambda) + k_1 \sin (\odot - \lambda)].$$

Gdy napiszemy

$$(\lambda'' - l) \cos \beta = x = \pi \sin (\odot - \lambda) - k_1 \cos (\odot - \lambda),$$

$$(\beta'' - b) \operatorname{cosec} \beta = \frac{y}{\sin \beta} = -\pi \cos (\odot - \lambda) - k_1 \sin (\odot - \lambda),$$

to, podnosząc te równania do kwadratu i dodając, otrzymamy

$$x^2 + \frac{y^2}{\sin^2 \beta} = \pi^2 + k_1^2,$$

albo, gdy oznaczymy

$$\pi^2 + k_1^2 = \kappa^2,$$

to jest także

$$\frac{x^2}{\kappa^2} + \frac{y^2}{(\kappa \sin \beta)^2} = 1.$$

Jest to, jak widzimy, również równanie elipsy, której połowa wielkiej osi wynosi $\kappa = \sqrt{\pi^2 + k_1^2}$. W tej elipsie wypadkowej, jak wynika z wartości współrzędnych pozornych gwiazdy, położenie gwiazdy wyprzedza jej położenie w elipsie aberacyjnej o łuk, którego wielkość zależy od stosunku $\frac{\pi}{k_1}$.

Ponieważ zjawisko aberacji gwiazdowej jest niezależne od odległości ciała niebieskiego, więc występuje ono także u słońca, planet i księżyca; obliczyć można aberację zawsze według wzorów (184)—(187), podstawiając w nich wartości współrzędnych ciała niebieskiego dla tej epoki, dla której wpływ aberacji się oblicza. Okres aberacji, zależnej od rocznego ruchu ziemi, w przypadku, gdy współrzędne ciała niebieskiego są zmienne, nie będzie już roczny, lecz zależec będzie także od zmiany współrzędnych. Weźmy pod uwagę jako przykład aberację roczną słońca.

Ponieważ szerokość słońca równa się zeru, więc aberacja wpływa tylko na jego długość. Gdy we wzorze (184') na miejsce λ i β podstawimy współrzędne ekliptyczne słońca, mianowicie $\lambda = \odot$, $\beta = 0$, to otrzymamy

$$\odot' - \odot = -20''.47 + 0''.343 \cos(\odot - \omega). \quad (188)$$

Widzimy, że we wzorze (188) pierwszy wyraz ma wartość stałą, równą stałej aberacji rocznej, drugi zaś wyraz, który zależy od kąta $\odot - \omega$, t. j. anomalji prawdziwej słońca, ma okres roczny. Pozorna długość słońca jest zawsze mniejsza od prawdziwej i różnica waha się w ciągu roku w granicach od 20''.13 do 20''.81.

Wzorowi (188) można nadać jeszcze inną postać. Podstawiając w pierwszym wzorze (1) \odot zamiast λ , otrzymujemy

$$\odot' - \odot = -\frac{v}{V \sin 1''} \sin \chi.$$

Ze względu na wartość kąta χ , określoną przez wzór (o), można też z dokładnością do pierwszej potęgi e przyjąć wprost

$$\odot' - \odot = -\frac{v}{V \sin 1''}; \quad (\text{ac})$$

z tą samą dokładnością mieliśmy poprzednio

$$r = \frac{a}{1 + e \cos \psi},$$

$$v = v_0 (1 + e \cos \psi);$$

wypływa stąd

$$v = v_0 \cdot \frac{a}{r},$$

a więc też

$$\frac{v}{V \sin 1''} = k_1 \cdot \frac{a}{r}. \quad (\text{ad})$$

Podstawiając tę wartość we wzorze (ac) i kładąc $a=1$, otrzymujemy

$$\odot' - \odot = -\frac{20''.47}{r}.$$

W ścisłym związku ze stałą aberacji rocznej znajduje się też wartość równania światła (ust. 75). Oznaczmy ją przez μ , to jest według określenia

$$\mu = \frac{a}{V},$$

a ponieważ (p. str. 363)

$$a = \frac{a_0}{\pi^0_{\odot} \sin 1''}, \quad k_1 = \frac{v}{V \sin 1''} = \frac{2\pi a_0}{T \pi^0_{\odot} \cdot V \sin^2 1''},$$

więc wynika stąd

$$\mu = k_1 \sin 1'' \cdot \frac{T}{2\pi}, \quad (189)$$

czyli po obliczeniu

$$\mu = 498^s.58 = 0^d.0057706,$$

$$\log \mu^s = 2.69773, \quad \log \mu^d = 7.76122.$$

80. Aberacja miesięczna. Obieg środka ziemi dookoła środka ciężkości układu ziemia-księżyc powodować musi zmiany aberacyjne współrzędnych gwiazd, zachodzące w okresie miesięcznym.

Ponieważ połowa wielkiej osi tej drogi miesięcznej środka ziemi wynosi $0.731 a_0$ (ust. 77), więc prędkość ruchu ziemi w tej drodze jest

$$v_m = \frac{2\pi \times 0.731 a_0}{T},$$

gdzie T oznacza liczbę sekund średnich w miesiącu gwiazdowym. Ponieważ $T = 2360591.5$ (p. tabl. I), więc $v_m = 0.01$ km, a stała aberacji miesięcznej, t. j. $\frac{v_m}{V \sin 1''}$ nie wynosi nawet $0''.01$.

Wynika stąd, że wpływ aberacji miesięcznej na współrzędne gwiazd jest znikomy i w praktyce zawsze może być pominięty.

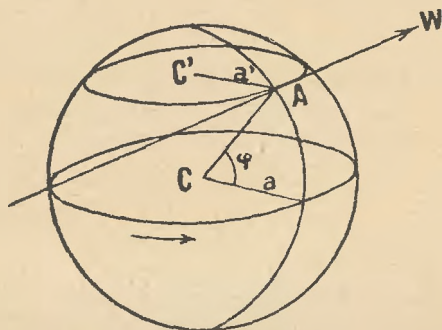
81. Aberacja dzienna. Aberacja dzienna jest skutkiem ruchu obserwatora, biorącego udział w ruchu obrotowym ziemi. Wzory na aberację dzienną otrzymamy, gdy we wzorach (176') i (177'') podstawimy na miejsce α_w i δ_w współrzędne tego punktu, ku któremu w danej chwili skierowany jest ruch obserwatora z powodu obrotu ziemi, a stałą aberacji określimy stosownie do prędkości tego ruchu.

Zajmijmy się najprzód wyznaczeniem wartości tej stałej. Niech rycina 65 przedstawia kulę ziemską: na jej powierzchni znajduje się punkt obserwacji A, którego szerokość geograficzna niech będzie φ . Gdy przez a_0 oznaczymy promień równika ziemskiego, a przez a_φ promień równoleżnika punktu A, to jest

$$a_\varphi = a_0 \cos \varphi,$$

a droga, którą obserwator przebywa w okresie obrotu ziemi, wynosi $2\pi a_\varphi$.

Gdy przez T oznaczymy okres obrotu ziemi, wyrażony



Rycina 65.

w sekundach średnich, przez v_φ prędkość linjową punktu A, a przez v_0 prędkość linjową punktu równika ziemskiego, to jest

$$v_\varphi = \frac{2\pi a_0 \cos \varphi}{T} = v_0 \cos \varphi.$$

Podstawiając $a_0 = 6377.4$ km, $T = 86164$, znajdujemy $v_0 = 0.466$ km oraz

$$\frac{v_0}{V \sin 1''} = 0''.320 = k_2.$$

Stała k_2 nazywa się *stałą aberacji dziennej*.

Wyznamy teraz spólrzędne apeksu dziennego ruchu

obserwatora. Momentalny kierunek ruchu obserwatora w danej chwili określony jest przez styczną do równoleżnika punktu obserwacji w tym punkcie. Wyobraża ją na rycinie prosta AW, równoległa do płaszczyzny równika. Przecina się ona ze sklepieniem niebieskiem w punkcie, leżącym na równiku świata, którego zboczenie jest więc zerem. Prosta AW jest prostopadła do płaszczyzny południka punktu A, więc punkt, w którym ona przecina sklepienie niebieskie jest o 90° oddalony od punktu przecięcia się południka astronomicznego punktu A z równikiem świata; że zaś kąty godzinne liczy się w kierunku przeciwnym temu, który wskazuje strzałka na rycinie, więc kąt godzinny apeksu punktu A wynosi -90° .

Gdy oznaczmy przez θ czas gwiazdowy obserwacji, to ponieważ jest ogólnie $t = \theta - \alpha$, więc w danym przypadku jest również $-90^\circ = \theta - \alpha_w$; spółrzedne równikowe apeksu są zatem:

$$\alpha_w = \theta + 90^\circ, \quad \delta_w = 0^\circ.$$

Po podstawieniu we wzorach (176') i (177'') powyższych wartości stałej aberacji dziennej i spółrzednych apeksu, znajdziemy

$$\alpha' - \alpha = 0''.320 \cos \varphi \cos (\theta - \alpha) \sec \delta, \quad (190)$$

$$\delta' - \delta = 0''.320 \cos \varphi \sin (\theta - \alpha) \sin \delta. \quad (191)$$

Gdyby zachodziła potrzeba wyznaczenia wpływu aberacji dziennej na spółrzedne ekliptyczne, to według wzorów ogólnych byłoby

$$\lambda' - \lambda = 0''.320 \cos \varphi \cos \beta_w \sin (\lambda_w - \lambda) \sec \beta, \quad (ae)$$

$$\beta' - \beta = 0''.320 \cos \varphi [\sin \beta_w \cos \beta - \cos \beta_w \sin \beta \cos (\lambda_w - \lambda)],$$

gdzie λ_w , β_w są spółrzednymi ekliptycznymi apeksu. Wartość ich otrzymamy, podstawiając we wzorach przejścia z układu równikowego na ekliptyczny $\alpha_w = \theta + 90^\circ$, $\delta_w = 0^\circ$; w tym przypadku wzory te otrzymują postać

$$\begin{aligned} \sin \beta_w &= -\sin \varepsilon \cos \theta, \\ \cos \beta_w \cos \lambda_w &= -\sin \theta, \\ \cos \beta_w \sin \lambda_w &= \cos \varepsilon \cos \theta. \end{aligned}$$

W praktyce wzory (ae) stosowane nie bywają.

Wpływ aberacji dziennej na spólrzędne równikowe gwiazd jest podobny do wpływu aberacji rocznej na spólrzędne ekliptyczne. W sposób podobny, jak w ustępie 79, wnioskujemy, że skutkiem aberacji dziennej, gwiazdy w ciągu doby zakreślają małe elipsy, których osi wielkie przypadają na równoleżnikach gwiazd i mają długość $0''.640 \cos \varphi$, małe zaś osi mają długość $0''.640 \cos \varphi \sin \delta$. Ruch gwiazd w tych elipsach jest wsteczny, gdy $\delta > 0$, a prosty, gdy $\delta < 0$.

82. Aberacja planetarna. Wspomnieliśmy wyżej, że aberacja wpływa na pozycje planet w sposób podobny, jak na pozycje gwiazd, i że wpływ ten obliczyć można według wzorów (184) i (185), podstawiając w nich spólrzędne planety, ważne w danej chwili. Ale zastosowanie znajduje też zasada, która wypływa z rozważania aberacji wiekowej, mianowicie ta, że pozorne spólrzędne gwiazdy w epocie $t + \theta$ równają się jej spólrzędnym prawdziwym w epoce t . Przez θ rozumiany jest tu czas aberacji.

Ruch ziemi dookoła słońca wprawdzie nie odbywa się po linii prostej z prędkością stałą, t. j. nie odpowiada założeniom, przy których zasada powyższa została wyprowadzona. Pomimo to założenia powyższe i w przypadku planet uczynić można wobec tego, że czas aberacji w tym przypadku jest niewielki. Dla największej mogącej tu wchodzić w rachubę odległości Neptuna wynosi on zaledwie $498^s.58 \times 31 = 4^h 17^m 36^s$, a dla bliższych planet jest znacznie krótszy. W czasie aberacji Neptuna zmiana kierunku ruchu ziemi wynosi zaledwie $0''.03$, i w ogólności kąt, wyrażający tę zmianę, uważać można za znikomy. Podobnie i prędkość ruchu w czasie aberacji można uważać za stałą, równą prędkości w chwili obserwacji.

Można wobec tego powiedzieć, zgodnie ze wspomnianą zasadą, że pozorne spólrzędne planety w chwili obserwacji równają się jej spólrzędnym prawdziwym w czasie wcześniejszym od chwili obserwacji o czas aberacji. Gdy więc przez Δ oznaczmy odległość planety w chwili obserwacji, wyrażoną w jednostkach planetarnych, to czas aberacji wynosi $\theta = 498^s.58 \Delta$. Jeżeli obserwacja była zrobiona w epocie $t + \theta$, to pozorne spólr-

rzędne planety są wówczas takie same, jakimi były jej spółrzędne prawdziwe w epoce t .

Gdybyśmy za pomocą wzorów (184) i (185) wyznaczyli dla jakiejś planety spółrzędne λ i β , to nie byłyby to jej spółrzędne prawdziwe w czasie $t + \theta$, gdyż pozycja planety odnosi się do epoki t , a w czasie aberacji planeta przebiegła pewien łuk na niebie. Gdy wszakże znany jest czas aberacji oraz ruch geocentryczny planety, to można też znaleźć prawdziwe spółrzędne planety w epoce $t + \theta$.

Oznaczmy w tym celu przez ν_λ i ν_β zmiany spółrzędnych ekliptycznych planety w jednostce czasu, to $\nu_\lambda \theta$ i $\nu_\beta \theta$ są zmianami tych spółrzędnych w czasie aberacji. Że zaś λ' i β' są prawdziwymi spółrzędnymi planety w epoce t , więc

$$\lambda'' = \lambda' + \nu_\lambda \theta, \quad \beta'' = \beta' + \nu_\beta \theta$$

są prawdziwymi spółrzędnymi planety w epoce obserwacji $t + \theta$.

Gdy zaś ruch geocentryczny planety nie jest znany, to aberację, której podlega planeta, czyli t. zw. *aberrację planetarną*, uwzględnić możemy w ten sposób, że odejmujemy od epoki obserwacji $t + \theta$ czas aberacji θ , a dla otrzymanej w ten sposób epoki t obserwowane spółrzędne pozorne planety są prawdziwymi. Kierunek prawdziwy od obserwatora ku gwieździe w epoce t jest określony przez spółrzędne pozorne planety w epoce $t + \theta$.

W zagadnieniu wyznaczania dróg planetarnych obserwacje dotyczą często planet nowych, których odległość od ziemi nie jest znana, a więc i czas aberacji dla nich obliczony być nie może. Nie można wówczas oczywiście też wyznaczyć prawdziwego kierunku w chwili obserwacji. W tym przypadku przyjmuje się w pierwszym przybliżeniu, że spółrzędne obserwowane określają prawdziwy kierunek ku planecie w epoce obserwacji $t + \theta$. Hipoteza ta prowadzi do wyznaczenia przybliżonych elementów drogi planety i przybliżonej jej odległości od obserwatora w epoce $t + \theta$. Stąd zaś wypływa też przybliżona wartość czasu aberacji (θ). Wartość ta jest podstawą drugiego przybliżenia, w którym przyjmuje się, że obserwowane spółrzędne są prawdziwymi dla epoki $t + \theta - (\theta)$, która od epoki t już bardzo mało się różni. Drugie przybliżenie z dostateczną dokładnością określa czas aberacji θ i epokę t .

Zastosujmy rozważania powyższe do słońca. W przypadku tym aberacja roczna określona była przez wzór (188), mianowicie

$$\odot' - \odot = -20''.47 + 0''.343 \cos(\odot - \omega).$$

Według zasady, na której opiera się aberacja planetarna, długość pozorna słońca \odot' w epoce obserwacji $t + \theta$ równa się długości prawdziwej słońca w epoce t . Odległość słońca w chwili obserwacji można uważać zawsze za wiadomą. Oznaczmy ją przez r , to $\theta = 498^s.58 r$ jest czasem aberacji słońca, i tem samem jest też określona epoka t , w której długość prawdziwa równa się obserwowanej pozornej.

Długość \odot' we wzorze (188) jest to długość słońca w epoce t , widziana ze stanowiska obserwatora w epoce $t + \theta$; ale ponieważ słońce niema innego ruchu, tylko paralaktyczny, i tem różni się od planet, które prócz ruchu paralaktycznego mają także ruch własny, więc położenie słońca w czasie t i $t + \theta$ jest jednakowe. Wynika stąd, że \odot jest też prawdziwą długością słońca w epoce $t + \theta$ i że luk

$$\odot - \odot' = 20''.47 - 0''.343 \cos(\odot - \omega) \quad (\text{af})$$

stanowi geocentryczną zmianę długości słońca w czasie aberacji słońca.

Wynik powyższy możemy łatwo sprawdzić. Gdy ψ jest prawdziwą anomalją ziemi, to jest, jak widzieliśmy,

$$\psi = 180^\circ + \odot - \omega, \quad d\odot = d\psi.$$

Oznaczmy przez k średnią prędkość ziemi, przyjmując za jednostkę czasu dzień średni, to mamy według 2-go prawa Keplera

$$r^2 \frac{d\psi}{dt} = k \sqrt{1 - e^2},$$

a więc

$$\frac{d\odot}{dt} = \frac{k \sqrt{1 - e^2}}{r^2}. \quad (\text{ag})$$

Według wzoru (n) jest

$$r = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \psi} = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos (\odot - \omega)},$$

a więc po podstawieniu we wzorze (ag):

$$\frac{d\odot}{dt} = \frac{k}{r\sqrt{1 - e^2}} [1 - e \cos (\odot - \omega)].$$

Oznaczmy, jak poprzednio, równanie światła przez μ , to $\theta = \mu r$ jest czasem aberacji słońca i w czasie tym zmiana długości słońca wynosi $\frac{d\odot}{dt} \mu r$. Jest zatem

$$\frac{d\odot}{dt} \mu r = \frac{k\mu}{\sqrt{1 - e^2}} [1 - e \cos (\odot - \omega)]. \quad (\text{ah})$$

Podstawiając w powyższym wzorze

$$e = 0.0168, \quad k = 3548''.193, \quad \mu = 0.0057706,$$

otrzymamy

$$\frac{d\odot}{dt} \theta = 20''47 - 0''.343 \cos (\odot - \omega) = \frac{k_1}{r}.$$

Porównyując ten wzór ze wzorem (af), widzimy, że w istocie prawa strona tego ostatniego wyraża zmianę długości słońca w czasie aberacji μr , a jest ona oczywiście identyczna z heljocentrycznym łukiem, zakreślonym przez ziemię w tym czasie.

83. Uwagi, dotyczące obliczania aberacji. Aberacja wiekowa w praktyce nie bywa obliczaną tak ze względu na to, iż ani stała aberacji wiekowej, ani współrzędne apeksu przestrzennego ruchu słońca nie są dokładnie znane, jak również dlatego, że znajomość odchylenia aberacyjnego wiekowego nie przedstawia interesu przyrodniczego.

Aberację planetarną uwzględnia się przez zmianę epoki

obserwacji. Bliższe szczegóły, dotyczące tej kwestji, możemy tu pominąć, gdyż tylko w zagadnieniu obliczania dróg planet i komet ma ona znaczenie praktyczne. To też szczegółowiej jest ona omawiana w dziełach, zagadnieniu wyznaczania dróg poświęconych.

Do obliczenia aberacji rocznej służą wzory (184)—(187), a w praktyce właściwie tylko wzory (186) i (187), gdyż ekliptyczne spółrzedne gwiazd stałych tylko wyjątkowo bywają stosowane. W tych ostatnich wzorach wyrazy mało zmienne, zależne od ω , nie mają okresu rocznego; w wartościach spółrzednych średnich gwiazd wyrazy te zazwyczaj są już uwzględnione. Aberację roczną stanowią tylko wyrazy zależne od \odot , i one tylko brane być muszą w rachubę, gdy należy obliczyć wartość spółrzednych pozornych gwiazdy.

Gdy wszakże wyznacza się spółrzedne planety przez wyznaczenie różnicy spółrzednych planety i gwiazdy porównywanej, to, aby pozycję planety oczyścić całkiem od wpływu aberacji gwiazdowej, należy także uwzględnić drugie wyrazy wzorów wyprowadzonych.

Nie przytaczamy tu przykładu liczbowego, gdyż obliczenie aberacji łączy się w praktyce zawsze z obliczeniem innych poprawek spółrzednych gwiazd, o których będzie mowa w następnych rozdziałach. Do tej sprawy wrócimy w rozdziale XI.

Wreszcie aberację dzienną w praktyce uwzględnia się w ten sposób, że łączy się ją z tak zwanym błędem kolimacyjnym, ponieważ wpływa ona na spółrzedne gwiazd w sposób podobny, jak ten błąd. Jest to sprawa, wchodząca w zakres astronomji praktycznej, tu zatem obliczenie przykładu liczbowego również pominięte być może.

ROZDZIAŁ VIII.

PRECESJA I NUTACJA.

84. Ekliptyka epoki *t*. Widzieliśmy w ustępach poprzednich, że spólrzędne gwiazd ulegają rozmaitym zmianom pozornym; przyczyną tych zmian są warunki, w których znajduje się obserwator, wyznaczający te spólrzędne. Analizując źródła tych zmian oraz ich przebieg i wielkość, nie zastanawialiśmy się nad pytaniem, czy spólrzędne nie ulegałyby zmianom, gdyby nie istniało to źródło, którego wpływem na spólrzędne właśnie się zajmowaliśmy. Można było tak postępować, ponieważ ewentualne zmiany wartości spólrzędnych, z innych źródeł pochodzące, nie mogłyby wpłynąć na badane zmiany w ten sposób, aby zmienić ich charakter lub przybliżoną wielkość.

Obecnie zajmijmy się pytaniem, czy spólrzędne gwiazd miałyby wartość stałą, gdyby nie istniały te przyczyny zmian, którymi zajmowaliśmy się w rozdziałach V, VI i VII.

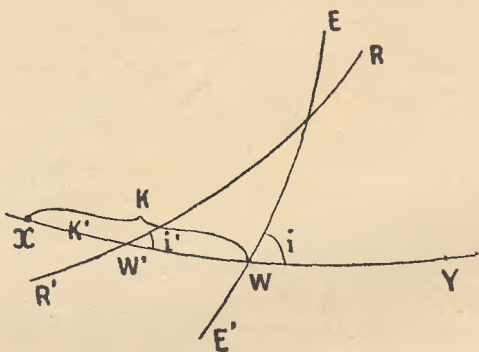
W założeniu, że gwiazdy w przestworzu zajmują położenie niezmiennie, warunkiem koniecznym niezmienności spólrzędnych gwiazd, odniesionych do danego układu, byłby ten, aby także układ spólrzędnych co do swego położenia był niezmienny.

Jednakże już w ust. 27 było zaznaczone, że układy spólrzędnych, stosowane w astronomji, zmieniają swe położenie, co pociąga za sobą zmianę spólrzędnych gwiazd. Sprawa ta będzie przedmiotem rozważań niniejszego rozdziału.

Ziemia podlega przyciąganiu przez wszystkie masy układu planetarnego według prawa Newtona. Przyciąganie to powoduje perturbacje w ruchu jej dokoła słońca, które polegają na tem, że elementy drogi ziemskiej ulegają zmianie. Zmieniają

się też oczywiście te elementy, które określają położenie płaszczyzny drogi ziemskiej w przestrzeni, a to pociąga za sobą zmianę wielkiego koła na niebie, określonego przez tę płaszczyznę, t. j. ekliptyki. Zmianę tę można badać, odnosząc położenie ekliptyki do jakiegoś niezmiennego układu współrzędnych.

Wyobraźmy sobie, że takim układem niezmiennym jest układ prostokątny (xyz), którego początkiem jest środek sfery niebieskiej. Niechaj będą X i Y (ryc. 66) punkty przecięcia się osi x -ów i y -ów ze sklepieniem niebieskim, a XY wielkiem kołem, określonym na niebie przez płaszczyznę (xy). W pewnej określonej epoce t niechaj ekliptyka ma na niebie położenie $E'E$, a punkt W niechaj będzie w epoce t węzłem wstępującym ekliptyki



Rycina 66.

tyki $E'E$ na kole XY . Położenie koła $E'E$ określone jest przez nachylenie jego i oraz przez odległość węzła W od punktu X , t. j. $XW = K$. Układ (xyz) można zawsze obrać w ten sposób, aby wartość kąta i przypadła w pierwszej ćwiartce koła.

Wielkości K i i , określające położenie ekliptyki, są, jak wspomnieliśmy, zmienne; są one funkcjami czasu, a wartości ich w dowolnej epoce t wypływają z teorii ruchu ziemi.

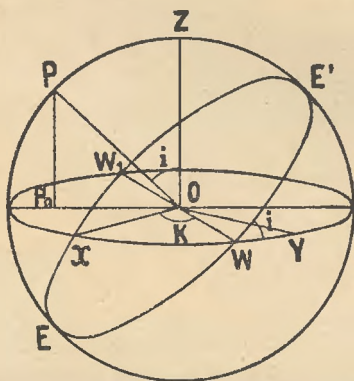
Nazywać będziemy *prawdziwą ekliptyką epoki t* wielkie koło na niebie, określone przez momentalną płaszczyznę drogi ziemi w epoce t . Określona jest ona przez wartości kątów K i i w epoce t .

Aby wyznaczyć wartości kątów K i i w epoce t , należy

je przedstawić, jako funkcje czasu. Postępujemy w sposób następujący.

Niechaj płaszczyzna rysunku przedstawia płaszczyznę, przechodzącą przez oś z -ów układu niezmiennego (xyz) oraz przez oś ekliptyki epoki t . Rycina 67 niechaj wyobraża sferę niebieską, którą osi układu niezmiennego przecinają w punktach X, Y, Z, a oś ekliptyki epoki t w punkcie P. Ekliptyka ta przecina koło XY w punktach W i W₁; punkt W jest węzłem wstępującym ekliptyki EE' na kole XY.

Według poprzedniego określenia jest $\sphericalangle XOW = K$, $\sphericalangle YWE' = \sphericalangle POZ = i$. Za pomocą tych dwóch kątów możemy



Rycina 67.

wyrazić współrzędne prostokątne bieguna ekliptyki P, które zatem równie dobrze określają położenie płaszczyzny ekliptyki.

Niechaj będzie P₀ rzut punktu P na płaszczyznę (xy), to jest

$$\sphericalangle P_0OP = 90^\circ - i, \quad \sphericalangle XOP_0 = 90^\circ - K.$$

Gdy więc przyjmiemy $OP = 1$, a więc $OP_0 = \sin i$, to współrzędne prostokątne punktu P mają wartości następujące:

$$x = \sin i \sin K, \quad y = -\sin i \cos K, \quad z = \cos i.$$

Przypuśćmy, że x_0, y_0, z_0, i_0, K_0 są wartości znane, odnoszące się do jakiegoś znanej epoki początkowej t_0 . Zmiany, jakim

ulegają wartości x, y, z w czasie od t_0 do t , mogą być wypro-
wadzone z teorii ruchu ziemi. Pociągają one oczywiście za sobą
odpowiednie zmiany kątów K i i . Pisząc więc

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin i \sin K), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{d}{dt}(\sin i \cos K), \quad (a)$$

i uważając, że $\frac{dx}{dt}$ i $\frac{dy}{dt}$ znane są z teorii, otrzymamy

$$\sin i \sin K = \int_{t_0}^t \left(\frac{dx}{dt} \right) dt, \quad \sin i \cos K = - \int_{t_0}^t \left(\frac{dy}{dt} \right) dt, \quad (b)$$

a stąd obliczyć można zmiany, jakim uległy wielkości K i i
w czasie od epoki t_0 do t .

Z teorii wynika, że wartość iloczynów $\sin i \sin K$ i $\sin i \cos K$
w epoce t można przedstawić w postaci następującej:

$$\begin{aligned} \sin i \sin K &= a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \dots + p_1 + p_2 + p_3 + \dots \\ \sin i \cos K &= b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 + \dots + q_1 + q_2 + q_3 + \dots \end{aligned} \quad (c)$$

W tych wzorach a_0, a_1, a_2, \dots oraz b_0, b_1, b_2, \dots mają
wartość stałą. Spółczynniki a_x i b_x ($x=1, 2, 3 \dots$) są małe,
a więc wyrazy postaci $a_x(t - t_0)^x$ i $b_x(t - t_0)^x$ wzrastają powoli
wraz z t . Są to wyrazy *wiekowe* czyli *sekularne*. Wyrazy p_x i q_x
są okresowe i wartość ich zawarta jest zawsze w określonych
granicach.

Wartości K i i , wypływające ze wzoru (c), określają, jak
już wspomnieliśmy wyżej, prawdziwą ekliptykę epoki t . Gdy
zaś ograniczymy się tylko do wyrazów wiekowych, t. j. okre-
ślimy wartości K_m i i_m ze wzorów

$$\begin{aligned} \sin i_m \sin K_m &= a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 \dots \\ \sin i_m \cos K_m &= b_0 + a_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 \dots \end{aligned} \quad (d)$$

to koło, określone przez kąty i_m i K_m nazywa się *średnią ekliptyką epoki t* .

Widzimy z powyższych określeń, że prawdziwa ekliptyka w stosunku do średniej wykonywa wahania, wskutek wyrazów p_x i q_x .

Jak wykazują rachunki, wyrazy perjodyczne w wyrażeniach (c) mają zawsze wartość bardzo małą, a więc i średnia ekliptyka bardzo mało różni się od prawdziwej. Także współczynniki a_x i b_x dla $x > 2$ mają wartości znikome. W praktyce można wyrazy perjodyczne całkowicie pominąć, skutkiem czego nie zachodzi potrzeba rozróżniania pomiędzy ekliptyką prawdziwą a średnią. Gdy zaś z wyrazów wiekowych opuścimy wszystkie, począwszy od wyrazów 3-go stopnia, to otrzymamy wprost

$$\begin{aligned}\sin i \sin K &= a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2, \\ \sin i \cos K &= b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2;\end{aligned}\tag{e}$$

ekliptykę, określoną przez wartości K i i , wypływające ze wzorów powyższych, będziemy uważali za ekliptykę epoki t . Oczywiście ekliptykę epoki t_0 określa wartości K_0 i i_0 , wypływające ze wzorów

$$\sin i_0 \sin K_0 = a_0, \quad \sin i_0 \cos K_0 = b_0.$$

85. Równik prawdziwy i średni. Płaszczyzna równika świata jest to, jak wiemy, płaszczyzna, przechodząca przez środek sfery niebieskiej i prostopadła do osi obrotu ziemi. Należy tu oczywiście rozumieć oś momentalną obrotu, której położenie w stosunku do stałych punktów bryły ziemskiej ulega nieznacznym zmianom (ust. 26). Zmiany te, jak widzieliśmy, objawiają się w danym miejscu powierzchni ziemi, jako wahania wysokości biegunów i płaszczyzny południka. Mają one charakter perjodyczny, zresztą dosyć nieregularny i dotąd jeszcze nie dosyć dokładnie zbadany.

Gdy pominiemy te drobne wahania, to za oś obrotu ziemi przyjmiemy małą oś sferoidy ziemskiej, a współrzędne geograficzne jakiegoś miejsca na ziemi uważać będziemy za niezmiennie, równe ich średnim wartościom. W tem założeniu zatem też za płaszczyznę równika świata przyjmiemy płaszczyznę, przechodzącą przez środek sfery niebieskiej i prostopadłą do malej osi sferoidy ziemskiej.

Prócz wspomnianych wahań oś momentalna obrotu ziemi wykonywa jeszcze ruchy inne, przy których położenie jej w stosunku do punktów bryły ziemskiej jest niezmiennie, w których więc uczestniczą wszystkie punkty ziemi, z wyjątkiem jej środka.

Ponieważ ziemia nie jest kulą, lecz pod działaniem siły odśrodkowej przybrała postać sferoidy, której oś mała schodzi się prawie z kierunkiem osi obrotu, i ta wirująca sferoida znajduje się stale pod działaniem mas słońca i księżyca, więc ruch jej wirowy podlega znacznym perturbacjom,

Nie będziemy tu wnikać w szczegóły teorii ruchu wirowego ziemi, która wchodzi w zakres mechaniki niebieskiej; wynik tych badań, stwierdzonych całkowicie obserwacją, jest w zasadzie ten, że oś obrotu ziemi zakreśla powierzchnię stożkową dookoła pewnego kierunku, który zresztą nie jest w zupełności stały.

Skoro więc płaszczyzna równika zawsze jest prostopadła do kierunku osi obrotu ziemi, więc położenie tej płaszczyzny ulega zmianom wraz z kierunkiem osi.

Nazywać będziemy *prawdziwym równikiem epoki t* koło na niebie, określone przez płaszczyznę, przechodzącą przez środek sfery niebieskiej i prostopadłą do kierunku momentalnej osi obrotu ziemi w epoce t .

Położenie tego koła możemy określić w odniesieniu do koła XY (ryc. 66) w sposób podobny, jak położenie ekliptyki. Niechaj na tej rycinie koło R'R przedstawia prawdziwy równik epoki t , a W' niech będzie węzłem wstępującym tego równika na kole XY. Położenie jego jest określone przez nachylenie $YW'R = i'$ i odległość węzła W' od punktu X, t. j. $XW' = K'$.

Z teorii wynika, że wartości K' i i' w jakiejś epoce t dadzą się obliczyć za pomocą wzorów postaci następującej:

$$\begin{aligned} K' &= a_0' + a_1'(t - t_0) + a_2'(t - t_0)^2 + \dots + p_1' + p_2' + p_3' + \dots \\ i' &= b_0' + b_1'(t - t_0) + b_2'(t - t_0)^2 + \dots + q_1' + q_2' + q_3' + \dots \end{aligned} \quad (f)$$

We wzorach (f), współczynniki a_x' i b_x' są stałe, wyrazy postaci $a_x'(t - t_0)^x$ i $b_x'(t - t_0)^x$ są wiekowe, a wyrazy p_x' i q_x' są perijodyczne.

Gdy pominiemy wyrazy perjodyczne i określimy K_m' i i_m' w sposób następujący:

$$\begin{aligned} K_m' &= a_0' + a_1'(t - t_0) + a_2'(t - t_0)^2 + \dots \\ i_m' &= b_0' + b_1'(t - t_0) + b_1'(t - t_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (g)$$

to koło, którego nachylenie do koła XY jest i_m' i którego węzeł W' znajduje się w odległości K_m' od punktu X, nazywa się *średnim równikiem epoki t*. Oczywiście a_0' i b_0' są odpowiednio wartościami kątów K_m' i i_m' w epoce t_0 , a zatem określają średni równik epoki t_0 .

Wyrazy perjodyczne mają w ogólności postać następującą:

$$p_z' = A_z \frac{\sin}{\cos} m_z [\mu_z(t - t_0) + \alpha_z],$$

$$q_z' = B_z \frac{\sin}{\cos} n_z [\nu_z(t - t_0) + \beta_z].$$

W tych wyrażeniach A_z , B_z , μ_z , ν_z , α_z , β_z mają wartości stałe, a m_z i n_z oznaczają liczby całkowite. Wartość tych wyrazów zawarta jest zawsze w granicach od $-A_z$ do $+A_z$, względnie od $-B_z$ do $+B_z$. Okresem, w którym się wartość danego wyrazu powtarza, jest oczywiście odstęp czasu, w którym argument funkcji trygonometrycznej wzrasta o 360° .

Niech będzie P_z okres wyrazów p_z' , a Q_z okres wyrazów q_z' , to mamy

$$m_z [\mu_z(t - t_0 + P_z) + \alpha_z] = m_z [\mu_z(t - t_0) + \alpha_z] + 360^\circ,$$

skąd wypływa

$$P_z = \frac{360^\circ}{m_z \mu_z},$$

i podobnie jest

$$Q_z = \frac{360^\circ}{n_z \nu_z}.$$

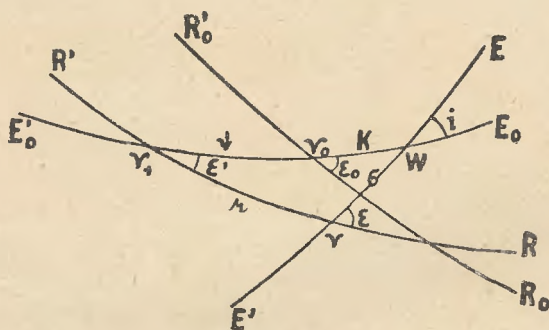
Podstawiając we wzorach (f) także w wyrazach perjo-
dycznych $t = t_0$, otrzymamy

$$K'_0 = \alpha'_0 + \Sigma A_z \frac{\sin}{\cos} m_z \alpha_z,$$

$$i'_0 = b'_0 + \Sigma B_x \frac{\sin}{\cos} n_x \beta_x.$$

Kąty K'_0 i i'_0 określają prawdziwy równik epoki t_0 .

86. Wielkości, określające położenie ekliptyki i równika epoki t względem ekliptyki epoki t_0 . Układ (xyz) obraliśmy całkiem do-



Rycina 68.

wolnie; jedyny warunek, któremu ma czynić zadość, jest ten, że ma być niezmienny. Możemy więc obrać za płaszczyznę (xy) płaszczyznę ekliptyki jakiejś dowolnie obranej epoki t_0 , a zatem ekliptykę tej epoki za koło XY .

Niechaj na ryc. 68 koło $E'_0 E_0$ przedstawia ekliptykę epoki t_0 . Za oś x w obranym układzie przyjmujemy prostą, według której płaszczyzna równika średniego epoki t_0 przecina się z płaszczyzną ekliptyki tejże epoki. Niechaj ta oś x przecina niebo w punkcie γ_0 ; jest to oczywiście węzeł średniego równika epoki t_0 , oznaczonego na rycinie przez $R'_0 R_0$, na ekliptyce $E'_0 E_0$. Punkt γ_0 nazywamy *średnim punktem wiosennym*, albo krócej *średnią równonocą epoki t_0* . Od tego punktu będziemy liczyli na ekliptyce kąty K i K' .

Niechaj będzie dalej $E'E$ ekliptyka epoki t , która z ekliptyką epoki t_0 przecina się w punkcie W . Mamy więc obecnie

$$\sphericalangle E_0WE = i, \quad \gamma_0W = K.$$

Podobnie niechaj będzie $R'R$ prawdziwy równik epoki t , który przecina ekliptykę epoki t_0 w punkcie γ_1 . Jest więc

$$\sphericalangle E_0\gamma_1R = i', \quad \gamma_0\gamma_1 = 360^\circ - K'.$$

Przy tym wyborze układu współrzędnych w epoce t_0 oczywiście $i=0$, a więc też $a_0=0$, $b_0=0$; wskutek tego wzory (e) otrzymują postać następującą:

$$\sin i \sin K = a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + a_3(t-t_0)^3 + \dots \quad (192)$$

$$\sin i \cos K = b_1(t-t_0) + b_2(t-t_0)^2 + b_3(t-t_0)^3 + \dots$$

Również w epoce t_0 jest $K'_0=0$, skąd wypływa też $a'_0=0$. Kąt $-i'$ jest w tym przypadku pochyłością ekliptyki epoki t_0 względem równika epoki t ; oznaczmy $i'=-\epsilon'$. Podobnie jest $-i'_0$ pochyłością ekliptyki epoki t_0 względem średniego równika epoki t_0 ; oznaczmy więc $i'_0=b'_0=-\epsilon_0$.

Uwzględniając powyższe oznaczenia i kładąc jeszcze $-K'=\psi$, możemy wzory (f) pisać w postaci następującej:

$$\psi = c_1(t-t_0) + c_2(t-t_0)^2 + \dots + \Sigma p, \quad (193)$$

$$\epsilon' = \epsilon_0 + d_1(t-t_0) + d_2(t-t_0)^2 + \dots + \Sigma q.$$

Wartości współczynników c_x i d_x , które znajdują się w prostym związku z poprzednimi współczynnikami a'_x i b'_x , wypływają z teorii ruchu wirowego ziemi; tu zwracamy uwagę na wypływające z teorii związku następujące:

$$d_1=0, \quad 2d_2=a_1c_1. \quad (h)$$

Ponieważ także postać wyrazów perjdycznych wypływa z teorii, więc wzory (192) i (193) pozwalają dla jakiegokolwiek epoki t obliczyć wartości i , K , ψ i ϵ' .

87. Zmiany położenia równonocy i pochyłości ekliptyki. *Równonocą prawdziwą epoki t* nazywa się węzeł wstępujący Υ (ryc. 68) ekliptyki epoki t , t. j. $E'E$, na równiku prawdziwym epoki t , t. j. $R'R$. *Równonocą średnią epoki t* nazywa się węzeł wstępujący tejże ekliptyki na równiku średnim epoki t . Podobnie jest *pochyłość ekliptyki epoki t prawdziwą* lub *średnią*, zależnie od tego, czy liczona jest od równika prawdziwego, czy średniego epoki t . Pochyłość prawdziwa nazywana także bywa *pochyłością pozorną*.

Rycina 68 wyjaśnia, w jaki sposób położenie prawdziwej równonocy epoki t , t. j. punktu Υ , zmienione jest w stosunku do średniej równonocy epoki t_0 , t. j. punktu Υ_0 . Widzimy również, w jaki sposób pochyłość średnia epoki t_0 , t. j. ε_0 , zmieniła się na pochyłość prawdziwą epoki t , t. j. ε . Zmiany te dadzą się obliczyć, gdy znane są wyżej podane wartości z , K , ψ i ε' .

Przesunięcie punktu Υ względem Υ_0 uważać można za wynik dwóch ruchów: 1) przesunięcia punktu Υ_0 do Υ_1 na ekliptyce E'_0E_0 z powodu przejścia równika od położenia R'_0R_0 do położenia $R'R$, 2) przesunięcia punktu Υ_1 do Υ na równiku $R'R$ z powodu przejścia ekliptyki od położenia E'_0E_0 do położenia $E'E$.

Zmiana położenia równika jest skutkiem działania księżyca i słońca na sferoidalną ziemię, zmiana zaś położenia ekliptyki jest skutkiem działania planet. Dlatego pierwsze z wymienionych przesunięć dla krótkości nazywać będziemy *przesunięciem księżycowo-słonecznem* (*lunisolaris*), drugie zaś — *przesunięciem przez planety*.

Podobnie też zmianę pochyłości od ε_0 do ε' nazywać będziemy *zmianą pochyłości księżycowo-słoneczną*, zmianę zaś od ε' do ε *zmianą pochyłości przez planety*.

Gdy weźmiemy pod uwagę jakiś stały punkt na ekliptyce, np. punkt W , w którym ekliptyka epoki t przecina się z ekliptyką epoki t_0 , to widzimy, że odległość równonocy od punktu W w czasie $t - t_0$ wzrosła od Υ_0W do ΥW , wskutek czego równonoc na ekliptyce ruchomej oddaliła się od punktu W o łuk $\Upsilon W - \Upsilon_0W$. Oznaczmy

$$\Upsilon W = \sigma, \quad \Upsilon W - \Upsilon_0W = \sigma - K = \chi,$$

to χ jest przesunięciem wypadkowym dwóch wyżej wspomnianych przesunięć; nazywamy je *przesunięciem ogólnem*. Oznaczmy jeszcze przesunięcie przez planety $\Upsilon_1 \Upsilon = \mu$.

Gdy wartości i , K , ψ i ϵ' są znane, to można też obliczyć μ , σ , χ oraz ϵ .

Z trójkąta WV_1V , w którym bok $WV_1 = K + \psi$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sin \mu \sin \epsilon &= \sin i \sin (K + \psi), \\ \cos \epsilon &= \cos \epsilon' \cos i - \sin \epsilon' \sin i \cos (K + \psi).\end{aligned}\quad (i)$$

Ponieważ i jest zawsze małym kątem, więc możemy pisać z dostatecznem przybliżeniem

$$\sin i = i \sin 1'', \quad \cos i = 1 - \frac{1}{2} i^2 \sin^2 1'';$$

z drugiego wzoru (i) otrzymujemy więc

$$\cos \epsilon - \cos \epsilon' = -i \sin \epsilon' \cos (K + \psi) \sin 1'' - \frac{1}{2} i^2 \cos \epsilon' \sin^2 1''. \quad (j)$$

Pisząc

$$\epsilon = \epsilon' + (\epsilon - \epsilon'),$$

mamy

$$\cos \epsilon = \cos \epsilon' \cos (\epsilon - \epsilon') - \sin \epsilon' \sin (\epsilon - \epsilon'),$$

a że $\epsilon - \epsilon'$ jest tego samego rzędu co i , więc przyjmując

$$\sin (\epsilon - \epsilon') = (\epsilon - \epsilon') \sin 1'', \quad \cos (\epsilon - \epsilon') = 1 - \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon')^2 \sin^2 1'',$$

otrzymamy z dostatecznem przybliżeniem

$$\cos \epsilon - \cos \epsilon' = -\sin \epsilon' (\epsilon - \epsilon') \sin 1'' - \frac{1}{2} \cos \epsilon' (\epsilon - \epsilon')^2 \sin^2 1''; \quad (j')$$

przez porównanie tego wzoru ze wzorem (j) znajdujemy

$$\begin{aligned}\sin \epsilon' (\epsilon - \epsilon') + \frac{1}{2} \cos \epsilon' (\epsilon - \epsilon')^2 \sin 1'' &= \\ &= i \sin \epsilon' \cos (K + \psi) + \frac{1}{2} i^2 \cos \epsilon' \sin 1'',\end{aligned}\quad (k)$$

skąd, gdy ograniczymy się do wyrazów 1-go stopnia, wynika

$$\epsilon - \epsilon' = i \cos (K + \psi). \quad (l)$$

Gdy tę wartość przybliżoną podstawimy w drugim wyrazie wzoru (k), otrzymamy po łatwej redukcji

$$\epsilon = \epsilon' + i \cos (K + \psi) + \frac{1}{2} i^2 \cotg \epsilon' \sin^2 (K + \psi) \sin 1''. \quad (194)$$

Z pierwszego wzoru (i), gdy w nim przyjmiemy

$$\sin \mu = \mu \sin 1'', \quad \sin i = i \sin 1'',$$

$$\sin \varepsilon = \sin \varepsilon' + \cos \varepsilon' (\varepsilon - \varepsilon') \sin 1'' - \frac{1}{2} \sin \varepsilon' (\varepsilon - \varepsilon')^2 \sin^2 1'',$$

i opuścimy mały wyraz $\frac{1}{2} \mu \sin \varepsilon' (\varepsilon - \varepsilon')^2 \sin^2 1''$, wynika

$$\mu [\sin \varepsilon' + \cos \varepsilon' (\varepsilon - \varepsilon') \sin 1''] = i \sin (K + \psi),$$

a po podstawieniu wartości $\varepsilon - \varepsilon'$ według (l) otrzymuje się

$$\mu = \frac{i \sin (K + \psi)}{\sin \varepsilon' + i \cos \varepsilon' \cos (K + \psi) \sin 1''}$$

Rozwijając po prawej stronie na szereg i ograniczając się do dwóch pierwszych wyrazów, otrzymujemy wreszcie

$$\mu = i \frac{\sin (K + \psi)}{\sin \varepsilon'} - i^2 \frac{\cos \varepsilon'}{\sin^2 \varepsilon'} \sin (K + \psi) \cos (K + \psi) \sin 1''. \quad (195)$$

Wzór do obliczenia kąta χ uzyskujemy, stosując 1-szą z analogij Napiera (wzory 7). Jest

$$\operatorname{tang} \frac{\sigma - K - \psi}{2} = \operatorname{tang} \frac{\mu}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\varepsilon' - 180^\circ + \varepsilon}{2}}{\sin \frac{\varepsilon' + 180^\circ - \varepsilon}{2}},$$

a więc też

$$\operatorname{tang} \frac{\chi - \psi}{2} = - \operatorname{tang} \frac{\mu}{2} \frac{\cos \frac{\varepsilon' + \varepsilon}{2}}{\cos \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2}};$$

a ponieważ μ i $\varepsilon - \varepsilon'$ są małemi kątami, więc jest z dostateczną dokładnością

$$\chi - \psi = - \mu \cos \varepsilon',$$

a po wprowadzeniu na μ wartości według wzoru (195),

$$\chi = \psi - i \cotg \varepsilon' \sin(K + \psi) + \\ + i^2 \cotg^2 \varepsilon' \sin(K + \psi) \cos(K + \psi) \sin 1''. \quad (196)$$

Obliczywszy z tego wzoru χ , otrzymujemy też $\sigma = K + \chi$.

Wzory (194), (195) i (196) rozwiązują zagadnienie, dotyczące zmiany położenia równonocy oraz zmiany pochyłości ekliptyki.

88. Inna postać wzorów na ε , μ i χ . Precesja i nutacja. Wzorom (194)—(196) możemy nadać inną postać, gdy w nich na miejsce i , K , ε' i ψ wprowadzimy wartości, określone przez wzory (192) i (193), i zamiast $\sin i$ pisać będziemy $i \sin 1''$. Ponieważ epokę t_0 możemy obrać zawsze tak, aby odstęp czasu $t - t_0$, a więc i kąt ψ , nie był wielkim, więc możemy też przyjąć z dostateczną dokładnością

$$i \sin(K + \psi) = i \sin K + i \cos K \cdot \psi \sin 1'', \\ i \cos(K + \psi) = i \cos K - i \sin K \cdot \psi \sin 1'', \\ i^2 \sin^2(K + \psi) = i^2 \sin^2 K, \quad i^2 \cos^2(K + \psi) = i^2 \cos^2 K, \\ i^2 \sin(K + \psi) \cos(K + \psi) = i^2 \sin K \cos K.$$

Gdy zaś wprowadzimy wartości, określone przez wzory (192) i (193), to możemy w iloczynach ograniczyć się do wyrazów drugiego stopnia i opuścić wszystkie te wyrazy, w których występują iloczyny dwóch wyrazów perjodycznych, albo też iloczyny wyrazów perjodycznych i wyrazów wiekowych wyższego rzędu niż pierwszy; otrzymamy w ten sposób

$$i \sin(K + \psi) = a_1(t - t_0) + (b_1 c_1 \sin 1'' + a_2)(t - t_0)^2 + \\ + b_1 \Sigma p(t - t_0) \sin 1'', \\ i \cos(K + \psi) = b_1(t - t_0) + (b_1 - a_1 c_1 \sin 1'')(t - t_0)^2 - \\ - a_1 \Sigma p(t - t_0) \sin 1'', \\ i^2 \sin^2(K + \psi) = a_1^2(t - t_0)^2 \sin 1'', \quad i^2 \cos^2(K + \psi) = b_1^2(t - t_0)^2 \sin 1'', \\ i^2 \sin(K + \psi) \cos(K + \psi) = a_1 b_1(t - t_0)^2 \sin 1''.$$

Dalej, ponieważ jest $d_1 = 0$, a więc

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + d_2(t - t_0)^2 + \Sigma q,$$

możemy w wyrazach, w których występuje czynnik i , przyjąć

$$\frac{1}{\sin \varepsilon'} = \frac{1}{\sin \varepsilon_0} - \frac{[d_2(t - t_0) + \Sigma q] \cos \varepsilon_0}{\sin^2 \varepsilon_0},$$

$$\cotg \varepsilon' = \cotg \varepsilon_0 - \frac{d_2(t - t_0)^2 + \Sigma q}{\sin^2 \varepsilon_0},$$

w wyrazach zaś, w których występuje czynnik i^2 , przyjąć wprost $\varepsilon' = \varepsilon_0$.

Podstawiając we wzorach (194)–(196) wartości powyższe i porządkując, otrzymujemy

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + b_1(t - t_0) + (b_2 - d_2 + \frac{1}{2} a_1^2 \cotg \varepsilon_0 \sin 1'')(t - t_0)^2 + \dots + \Sigma q - a_1 \Sigma p(t - t_0) \sin 1'', \quad (194')$$

$$\begin{aligned} \mu &= a_1 \operatorname{cosec} \varepsilon_0 (t - t_0) + \\ &+ (b_1 c_1 \sin 1'' - a_1 b_1 \cotg \varepsilon_0 \sin 1'' + a_2) \operatorname{cosec} \varepsilon_0 (t - t_0)^2 + \dots + \\ &+ (b_1 \Sigma p - a_1 \cotg \varepsilon_0 \Sigma q) \operatorname{cosec} \varepsilon_0 (t - t_0) \sin 1'', \quad (195') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi &= (c_1 - a_1 \cotg \varepsilon_0)(t - t_0) + \\ &+ [c_2 - (b_1 c_1 \sin 1'' + a_2) \cotg \varepsilon_0 + a_1 b_1 \cotg^2 \varepsilon_0 \sin 1''](t - t_0)^2 + \dots \\ &+ \Sigma p + (a_1 \Sigma q \operatorname{cosec}^2 \varepsilon_0 - b_1 \Sigma p \cotg \varepsilon_0)(t - t_0) \sin 1''. \quad (196') \end{aligned}$$

Gdy współczynniki a , b , c , d są wyrażone w sekundach łukowych, to także wyrazy po prawej stronie wzorów powyższych otrzymuje się w sekundach łukowych.

Oznaczmy dla krótkości:

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= b_1, \\ \beta_2 &= b_2 - d_2 + \frac{1}{2} a_1^2 \cotg \varepsilon_0 \sin 1'', \\ B &= \Sigma q - a_1 \Sigma p(t - t_0) \sin 1'', \\ \gamma_1 &= a_1 \operatorname{cosec} \varepsilon_0, \\ \gamma_2 &= [a_2 + (b_1 c_1 - a_1 b_1 \cotg \varepsilon_0) \sin 1''] \operatorname{cosec} \varepsilon_0, \\ G &= (b_1 \Sigma p - a_1 \Sigma q \cotg \varepsilon_0) \operatorname{cosec} \varepsilon_0 (t - t_0) \sin 1'', \\ \delta_1 &= c_1 - a_1 \cotg \varepsilon_0, \\ \delta_2 &= c_2 - a_2 \cotg \varepsilon_0 - (b_1 c_1 - a_1 b_1 \cotg \varepsilon_0) \cotg \varepsilon_0 \sin 1'', \\ D &= \Sigma p + (a_1 \Sigma q \operatorname{cosec}^2 \varepsilon_0 - b_1 \Sigma p \cotg \varepsilon_0)(t - t_0) \sin 1'', \end{aligned} \right\} \quad (197)$$

to otrzymamy

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 + \beta_1(t - t_0) + \beta_2(t - t_0)^2 + \dots + B, \\ \mu &= \gamma_1(t - t_0) + \gamma_2(t - t_0)^2 + \dots + G, \\ \chi &= \delta_1(t - t_0) + \delta_2(t - t_0)^2 + \dots + D.\end{aligned}\quad (198)$$

Oznaczając jeszcze

$$\begin{aligned}\varepsilon'_m &= \varepsilon^0_m + d_2(t - t_0)^2 + \dots, \\ \psi_m &= c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)^2 + \dots, \\ \varepsilon_m &= \varepsilon^0_m + \beta_1(t - t_0) + \beta_2(t - t_0)^2 + \dots, \\ \mu_m &= \gamma_1(t - t_0) + \gamma_2(t - t_0)^2 + \dots, \\ \chi_m &= \delta_1(t - t_0) + \delta_2(t - t_0)^2 + \dots,\end{aligned}\quad (199)$$

otrzymamy wzory

$$\begin{aligned}\varepsilon' &= \varepsilon'_m + \Sigma q, \\ \psi &= \psi_m + \Sigma p, \\ \varepsilon &= \varepsilon_m + B, \\ \mu &= \mu_m + G, \\ \chi &= \chi_m + D.\end{aligned}\quad (200)$$

Wartości ε' i ε są to prawdziwe pochyłości ekliptyki epok t_0 i t względem równika epoki t , a ε'_m i ε_m są to średnie wartości tych pochyłości. Różnicę pochyłości średnich i prawdziwych stanowią wyrazy perjodyczne. Podobnie ψ , μ i χ są prawdziwymi wartościami przesunięć punktu wiosennego, wyżej wyjaśnionych, a ψ_m , μ_m i χ_m są ich wartościami średnimi, t. j. obejmującymi tylko wyrazy wiekowe w wyrażeniach, określających te przesunięcia.

Te wartości średnie stanowią *precesję* punktów równonocnych, a mianowicie, zgodnie z wyjaśnieniem wyżej podanem, jest: 1) ψ_m *precesja księżycowo-słoneczna*, 2) μ_m *precesja planetarna* i 3) χ_m *precesja ogólna*. Wyrazy perjodyczne wzorów (200), t. j. Σq , Σp , B , G i D , nazywają się *wyrazami nutacyjnymi*, specjalnie zaś wyrazy Σp i Σq stanowią *nutację księ-*

żykowo-słoneczną. Wyrazy Σp określają zmianę położenia punktu wiosennego na ekliptyce, od którego liczy się długość astronomiczną; stanowią one więc *mutację w długości*. Wyrazy Σq określają zmianę pochyłości ekliptyki, stanowią więc *mutację w pochyłości*, która też nazywana bywa *mutacją w szerokości*.

Pochyłość ekliptyki epoki t_0 względem równika epoki t , oznaczona przez ϵ' , nazywana także bywa *pochyłością księżycowo-słoneczną*, a to dlatego, że zmiany, którym ona podlega, wynikają tylko ze zmiennego położenia równika wskutek działania księżyca i słońca; stosownie do tego część wiekowa wyrażenia na ϵ' , mianowicie ϵ'_m , nazywa się *średnią pochyłością księżycowo-słoneczną*.

89. Ogólniejsza postać szeregów, postępujących według potęg czasu. Stosowane w poprzednich ustępach szeregi, postępujące według potęg różnicy $t - t_0$, mają współczynniki stałe. Jednakże wartość tych współczynników ulega zmianie, gdy zmienia się epoka początkowa t_0 .

W praktyce zachodzi potrzeba stosowania różnych epok początkowych i należy w tym celu wyprowadzić wzory ogólne, pozwalające na przechodzenie z dowolnej epoki na dowolną inną. Zajmijmy się tem zadaniem.

Niechaj będzie $F(t)$ pewna funkcja czasu, która może być rozwinięta według potęg odstepu czasu, liczonego od jakiejś dowolnej epoki początkowej. Obierzmy t_1 i t_2 za takie epoki początkowe i niechaj będą $F_1(t)$ i $F_2(t)$ wartości funkcji $F(t)$ dla tej samej epoki t , ale liczonej od dwóch wyżej podanych epok początkowych; gdy przyjmiemy

$$F_1(t) = a_0 + a_1(t - t_1) + a_2(t - t_1)^2 + a_3(t - t_1)^3 + \dots$$

$$F_2(t) = b_0 + b_1(t - t_2) + b_2(t - t_2)^2 + b_3(t - t_2)^3 + \dots$$

i zważywszy, że wartości funkcji $F(t)$ dla danego t są niezależne od epoki początkowej, to jest także

$$F_1(t) = F_2(t), \quad F_1'(t) = F_2'(t), \quad F_1''(t) = F_2''(t), \quad \dots \quad (I)$$

Pochodne powyższe wyrażają się przez następujące szeregi:

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= a_1 + 2a_2(t-t_1) + 3a_3(t-t_1)^2 + \dots \\ F_2'(t) &= b_1 + 2b_2(t-t_2) + 3b_3(t-t_2)^2 + \dots \\ F_1''(t) &= 2a_2 + 6a_3(t-t_1) + \dots \\ F_2''(t) &= 2b_2 + 6b_3(t-t_2) + \dots \\ F_1'''(t) &= 6a_3 + \dots \\ F_2'''(t) &= 6b_3 + \dots \\ &\dots \end{aligned} \quad (m)$$

Kładąc $t=t_2$ i uwzględniając równania (l) i (m), znajdziemy

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 + a_1(t_2-t_1) + a_2(t_2-t_1)^2 + a_3(t_2-t_1)^3 + \dots \\ b_1 &= a_1 + 2a_2(t_2-t_1) + 3a_3(t_2-t_1)^2 + \dots \\ 2!b_2 &= 2!a_2 + 3!a_3(t_2-t_1) + \dots \\ 3!b_3 &= 3!a_3 + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Z równań powyższych wynikają związki, jakie zachodzą między współczynnikami a_x i b_x . Oznaczmy jeszcze $t_2-t_1=\tau$, to jest

$$\begin{aligned} b_0 &= F_1(t_2) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + \dots \\ b_1 &= F_1'(t_2) = a_1 + 2a_2\tau + 3a_3\tau^2 + \dots \\ b_2 &= \frac{1}{2!} F_1''(t_2) = a_2 + 3a_3\tau + \dots \\ b_3 &= \frac{1}{3!} F_1'''(t_2) = a_3 + \dots \\ &\dots \\ b_n &= \frac{1}{n!} F_1^{(n)}(t_2). \end{aligned}$$

Jeżeli więc epoką początkową jest t_1 , a współczynnikami szeregu, za pomocą którego oblicza się funkcję $F(t)$, są a_0, a_1, a_2, \dots , to gdy obierzemy t_2 za nową epokę początkową i oznaczymy $t_2-t_1=\tau$, otrzymamy wzór ogólny następujący:

$$\begin{aligned} F(t) &= a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + \dots + \\ &+ (a_1 + 2a_2\tau + 3a_3\tau^2 + \dots)(t-t_2) + (a_2 + 3a_3\tau + \dots)(t-t_2)^2 + \\ &\quad + (a_3 + \dots)(t-t_2)^3 + \dots \end{aligned} \quad (201)$$

Wartość współczynników a_x naturalnie zależy też od wyboru jednostki czasu, za pomocą której wyraża się odstęp czasu $t - t_1$. Oznaczając przez ω_1 i ω_2 dwie różne jednostki czasu, przypuśćmy, że jest

$$t - t_1 = \mu_1 \omega_1 = \mu_2 \omega_2, \quad (n)$$

co znaczy, że w odstępzie czasu $t - t_1$ jednostka czasu ω_1 mieści się μ_1 razy, a jednostka czasu ω_2 mieści się μ_2 razy. Niechaj współczynniki a_x odpowiadają jednostce ω_1 , to jednostce ω_2 odpowiadają inne współczynniki, które oznaczmy odpowiednio przez α_x . Jest zatem

$$\begin{aligned} F(t) &= a_0 + a_1 \mu_1 + a_2 \mu_1^2 + a_3 \mu_1^3 + \dots \\ F(t) &= \alpha_0 + \alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_2^2 + \alpha_3 \mu_2^3 + \dots \end{aligned} \quad (n)$$

Pomiędzy współczynnikami a_x i α_x zachodzą związki, zależne od sposobu określenia jednostki ω_2 .

Przypuśćmy, że g jest pewnym kątem, którego wartość w epoce t określona jest przez szereg

$$g = g_0 + g_1 (t - t_1) + g_2 (t - t_1)^2 + g_3 (t - t_1)^3 + \dots$$

w założeniu, że odstęp czasu $t - t_1$ wyrażony jest w jednostkach czasu ω_1 . Jeżeli nową jednostkę czasu ω_2 określimy w ten sposób, że jest to okres czasu, w którym kąt g wzrasta o 360° , to wzór

$$360^\circ \vartheta_2 = g_1 \vartheta_1 + g_2 \vartheta_1^2 + g_3 \vartheta_1^3 + \dots \quad (o)$$

określa, w jaki sposób ϑ_2 jednostek czasu ω_2 wyraża się przez jednostki czasu ω_1 .

Naturalnie analogicznym wzorem wyraża się ϑ_1 jednostek czasu ω_1 przez jednostki ω_2 i niechaj będzie

$$\vartheta_1 = \gamma_1 \vartheta_2 + \gamma_2 \vartheta_2^2 + \gamma_3 \vartheta_2^3 + \dots \quad (p)$$

Z równań (o) i (p) wypływają związki pomiędzy współczynnikami g_x i γ_x . Aby te związki otrzymać, podstawiamy wartość ϑ_1 według wzoru (p) w równaniu (o) i porównujemy współczynniki

przy jednakowych potęgach ϑ_2 po obu stronach równania. Po podstawieniu jest

$$\begin{aligned} 360^0 \vartheta_2 = & g_1 (\gamma_1 \vartheta_2 + \gamma_2 \vartheta_2^2 + \gamma_3 \vartheta_2^3 + \dots) + \\ & + g_2 (\gamma_1 \vartheta_2 + \gamma_2 \vartheta_2^2 + \gamma_3 \vartheta_2^3 + \dots)^2 + \\ & + g_3 (\gamma_1 \vartheta_2 + \gamma_2 \vartheta_2^2 + \gamma_3 \vartheta_2^3 + \dots)^3 + \dots, \end{aligned}$$

a stąd wynika

$$\begin{aligned} g_1 \gamma_1 &= 360^0, \\ g_1 \gamma_2 + g_2 \gamma_1^2 &= 0, \\ g_1 \gamma_3 + 2 g_2 \gamma_1 \gamma_2 + g_3 \gamma_1^3 &= 0, \\ &\text{i t. d.} \end{aligned}$$

Z tych wzorów otrzymujemy z jednej strony

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{360^0}{\gamma_1}, \\ g_2 &= -\frac{360^0}{\gamma_1^3} \gamma_2, \\ g_3 &= -\frac{360^0}{\gamma_1^5} (\gamma_1 \gamma_3 - 2 \gamma_2^2), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (202)$$

oraz z drugiej strony

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{360^0}{g_1}, \\ \gamma_2 &= -\left(\frac{360^0}{g_1}\right)^2 \frac{g_2}{g_1}, \\ \gamma_3 &= \left(\frac{360^0}{g_1}\right)^3 \left[2 \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^2 - \frac{g_3}{g_1}\right], \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (202')$$

Ponieważ wzory (o) i (p) ważne są dla jakiejkolwiek wartości ϑ_2 , więc stosując je do funkcji $F(t)$, określonej przez wzory (ń), otrzymujemy też

$$\begin{aligned} 360^0 \mu_2 &= g_1 \mu_1 + g_2 \mu_1^2 + g_3 \mu_1^3 + \dots \\ \mu_1 &= \gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_2^2 + \gamma_3 \mu_2^3 + \dots \end{aligned} \quad (q)$$

Skoro zaś jest

$$a_0 + a_1 \mu_1 + a_2 \mu_1^2 + a_3 \mu_1^3 + \dots = \alpha_0 + \alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_2^2 + \alpha_3 \mu_2^3 + \dots, \quad (r)$$

więc podstawiając tu po prawej stronie wartość μ_2 według pierwszego ze wzorów (q), otrzymamy

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 \mu_1 + a_2 \mu_1^2 + a_3 \mu_1^3 + \dots = \\ & = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{360^0} (g_1 \mu_1 + g_2 \mu_1^2 + g_3 \mu_1^3 + \dots) + \\ & + \frac{\alpha_2}{360^{0^2}} (g_1 \mu_1 + g_2 \mu_1^2 + g_3 \mu_1^3 + \dots)^2 + \\ & + \frac{\alpha_3}{360^{0^3}} (g_1 \mu_1 + g_2 \mu_1^2 + g_3 \mu_1^3 + \dots)^3 + \dots; \quad (s) \end{aligned}$$

podobnie podstawiając po lewej stronie równania (r) wartość μ_1 według drugiego ze wzorów (q), znajdujemy

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 (\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_2^2 + \gamma_3 \mu_2^3 + \dots) + \\ & + a_2 (\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_2^2 + \gamma_3 \mu_2^3 + \dots)^2 + \\ & + a_3 (\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_2^2 + \gamma_3 \mu_2^3 + \dots)^3 + \dots = \\ & = \alpha_0 + \alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_2^2 + \alpha_3 \mu_2^3 + \dots \end{aligned} \quad (s)$$

Przez przyrównanie współczynników jednakowych potęg μ_1 w równaniu (s) wynikają wzory

$$a_0 = \alpha_0,$$

$$a_1 = \alpha_1 \cdot \frac{g_1}{360^0},$$

$$a_2 = \alpha_1 \cdot \frac{g_2}{360^0} + \alpha_2 \left(\frac{g_1}{360^0} \right)^2, \quad (203)$$

$$a_3 = \alpha_1 \cdot \frac{g_3}{360^0} + 2\alpha_2 \left(\frac{g_1}{360^0} \right) \left(\frac{g_2}{360^0} \right) + \alpha_3 \left(\frac{g_1}{360^0} \right)^3,$$

i t. d.;

w sposób podobny z równania (ś) wynikają wzory:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= a_0, \\ \alpha_1 &= a_1 \gamma_1, \\ \alpha_2 &= a_1 \gamma_2 + a_2 \gamma_1^2, \\ \alpha_3 &= a_1 \gamma_3 + 2 a_2 \gamma_1 \gamma_2 + a_3 \gamma_1^3, \\ &\text{i t. d.}\end{aligned}\tag{204}$$

Wzory te, jak łatwo sprawdzić, pisać też można w postaci następującej:

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{\alpha_1}{\gamma_1}, \\ a_2 &= -\frac{1}{\gamma_1^3}(\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1), \\ a_3 &= -\frac{1}{\gamma_1^5}[(\gamma_1 \gamma_3 - 2 \gamma_2^2) \alpha_1 + 2 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 - \alpha_3 \gamma_1^2], \\ &\dots\end{aligned}\tag{203'}$$

oraz

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \left(\frac{360^\circ}{g_1}\right) a_1, \\ \alpha_2 &= \left(\frac{360^\circ}{g_1}\right)^2 \left(a_2 - a_1 \frac{g_2}{g_1}\right), \\ \alpha_3 &= \left(\frac{360^\circ}{g_1}\right)^3 \left[a_1 \left(2 \frac{g_2^2}{g_1^2} - \frac{g_3}{g_1}\right) - 2 a_2 \frac{g_2}{g_1} + a_3\right], \\ &\dots\end{aligned}\tag{204'}$$

Zastosujmy te wzory w specjalnym przypadku, gdy

$$g_2 = g_3 = \dots = 0;$$

wówczas, jak wskazują wzory (202'), jest także $\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = 0$, a zatem też wprost

$$\begin{aligned}g_1 \vartheta_1 &= 360^\circ \vartheta_2, \quad \vartheta_1 = \gamma_1 \vartheta_2 = \frac{360^\circ}{g_1} \vartheta_2, \\ \alpha_1 &= a_1 \gamma_1, \quad \alpha_2 = a_2 \gamma_1^2, \quad \alpha_3 = a_3 \gamma_1^3,\end{aligned}$$

Ponieważ między ϑ_1 i ϑ_2 zachodzi w tym przypadku prosta proporcjonalność, więc zachodzi też stały stosunek między jednostkami czasu ω_1 i ω_2 . Gdy więc napiszemy

$$\vartheta_1 \omega_1 = \vartheta_2 \omega_2,$$

to widzimy, że jest $\gamma_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ oraz

$$\begin{aligned} F(t) &= a_0 + a_1 \mu_1 + a_2 \mu_1^2 + a_3 \mu_1^3 + \dots \\ &= a_0 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) a_1 \mu_2 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 a_2 \mu_2^2 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3 a_3 \mu_2^3 + \dots \end{aligned} \quad (t)$$

Ten specjalny przypadek ma w praktyce najczęstsze zastosowanie.

W najogólniejszym przypadku przedstawienia funkcji $F(t)$ przyjmujemy, że zmienia się jednocześnie epoka początkowa i jednostka czasu. Gdy początek rachuby czasu t_1 zmienia się na t_2 , to wyrażenie funkcji $F(t)$ przyjmuje postać, określoną przez wzór (201). Oznaczmy odstęp czasu $t_2 - t_1$, wyrażony w jednostkach czasu ω_1 , przez τ_1 , a wyrażony w jednostkach ω_2 przez τ_2 ; oznaczmy dalej odstęp czasu $t - t_2$, wyrażony w jednostkach ω_1 i ω_2 , odpowiednio przez ϑ_1 i ϑ_2 , to otrzymamy

$$\begin{aligned} F_1(t) &= a_0 + a_1 \tau_1 + a_2 \tau_1^2 + a_3 \tau_1^3 + \dots + \\ &+ (a_1 + 2 a_2 \tau_1 + 3 a_3 \tau_1^2 + \dots) \vartheta_1 + (a_2 + 3 a_3 \tau_1 + \dots) \vartheta_1^2 + \\ &+ (a_3 + \dots) \vartheta_1^3 + \dots, \end{aligned} \quad (205)$$

$$\begin{aligned} F_2(t) &= \alpha_0 + \alpha_1 \tau_2 + \alpha_2 \tau_2^2 + \alpha_3 \tau_2^3 + \dots + \\ &+ (\alpha_1 + 2 \alpha_2 \tau_2 + 3 \alpha_3 \tau_2^2 + \dots) \vartheta_2 + (\alpha_2 + 3 \alpha_3 \tau_2 + \dots) \vartheta_2^2 + \\ &+ (\alpha_3 + \dots) \vartheta_2^3 + \dots, \end{aligned}$$

i związek między współczynnikami a_x i α_x tych wzorów określony jest przy znanych wartościach γ_x przez wzory (203') i (204'). W specjalnym zaś przypadku, gdy jednostki czasu ω_1 i ω_2 mają wartość stałą, jest wprost:

$$F_2(t) = a_0 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) a_1 \tau_2 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 a_2 \tau_2^2 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3 a_3 \tau_2^3 + \dots +$$

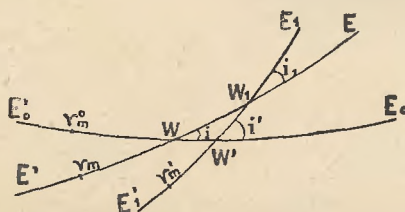
$$+ \left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) a_1 + 2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 a_2 \tau_2 + 3 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3 a_3 \tau_2^2 + \dots \right] \vartheta_2 + \quad (206)$$

$$+ \left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 a_2 + 3 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3 a_3 \tau_2 + \dots \right] \vartheta_2^2 + \left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3 a_3 + \dots \right] \vartheta_2^3 + \dots$$

90. Ogólna postać wzorów precesji. W związku z powyższymi wywodami wyprowadzić możemy wzory ogólne, służące do obliczenia precesji. Zajmijmy się najprzód wzorami, określającymi położenie ekliptyki epoki t . Wartości i i K w dwóch dowolnych epokach t i t' , odniesione do ekliptyki i równonocy epoki t_0 , obliczamy według wzorów (192):

$$\sin i \sin K = a_1 (t - t_0) + a_2 (t - t_0)^2 + \dots$$

$$\sin i' \sin K' = a_1 (t' - t_0) + a_2 (t' - t_0)^2 + \dots$$



Rycina 69.

Odnieśmy teraz położenie ekliptyki epoki t' do ekliptyki epoki t i niechaj będą i_1 i K_1 wielkości, określające to położenie. Pomiędzy i_1 i K_1 z jednej strony a i , K , i' i K' z drugiej strony zachodzi związek, który służy za podstawę do wyprowadzenia ogólnych wzorów na i_1 i K_1 . Zajmijmy się tą sprawą.

Niechaj na rycinie 69 łuk $E'_0 E_0$ wyobraża ekliptykę epoki t_0 , łuk $E'E$ ekliptykę epoki t , a łuk $E'E_1$ ekliptykę epoki t' . Punkty γ_m^0 , γ_m i γ_m' niech oznaczają odpowiednio położenie średniej równonocy w tych trzech epokach. Według poprzednich określeń jest

$$\gamma_m^0 W = K, \quad \gamma_m^0 W' = K', \quad \gamma_m W_1 = K_1, \quad \gamma_m W = \sigma_m = K + \gamma_m,$$

$$\sphericalangle E_0 W E = i, \quad \sphericalangle E_0 W' E_1 = i', \quad \sphericalangle E W_1 E_1 = i_1,$$

a stąd wynika

$$WW' = K' - K, \quad WW_1 = K_1 - K - \chi_m.$$

Z trójkąta $WW'W_1$ otrzymujemy zatem wzory następujące:

$$\sin i_1 \sin(K_1 - K - \chi_m) = \sin i' \sin(K' - K),$$

$$\sin i_1 \cos(K_1 - K - \chi_m) = -\cos i' \sin i + \sin i' \cos i \cos(K' - K).$$

Gdy pierwsze z tych równań pomnożymy przez $\cos(K + \chi_m)$, a drugie przez $\sin(K + \chi_m)$ i dodamy; gdy następnie pomnożymy pierwsze z tych równań przez $-\sin(K + \chi_m)$, a drugie przez $\cos(K + \chi_m)$ i dodamy — to otrzymamy dwa następujące równania:

$$\sin i_1 \sin K_1 = \sin i' \sin(K' - K) \cos(K + \chi_m) + \\ + [-\cos i' \sin i + \sin i' \cos i \cos(K' - K)] \sin(K + \chi_m),$$

$$\sin i_1 \cos K_1 = -\sin i' \sin(K' - K) \sin(K + \chi_m) + \\ + [-\cos i' \sin i + \sin i' \cos i \cos(K' - K)] \cos(K + \chi_m).$$

Kładąc tu z dostatecznem przybliżeniem

$$\sin i = i \sin 1'', \quad \cos i = 1,$$

znajdziemy

$$i_1 \sin K_1 = i' \sin(K' + \chi_m) - i \sin(K + \chi_m),$$

$$i_1 \cos K_1 = i' \cos(K' + \chi_m) - i \cos(K + \chi_m);$$

albo też

$$i_1 \sin K_1 = (i' \sin K' - i \sin K) \cos \chi_m + (i' \cos K' - i \cos K) \sin \chi_m, \quad (u)$$

$$i_1 \cos K_1 = (i' \cos K' - i \cos K) \cos \chi_m - (i' \sin K' - i \sin K) \sin \chi_m.$$

Tu podstawiamy wartości $i \sin K$, $i \cos K$ i χ_m według wzorów (192) i (199). Oznaczając dla krótkości

$$t' - t = \tau, \quad \text{a więc } t' - t_0 = t - t_0 + \tau,$$

otrzymujemy

$$(i' \sin K' - i \sin K) \sin 1'' = a_1 \tau + a_2 [(t - t_0 + \tau)^2 - (t - t_0)^2] + \\ + a_3 [(t - t_0 + \tau)^3 - (t - t_0)^3],$$

$$(i' \cos K' - i \cos K) \sin 1'' = b_1 \tau + b_2 [(t - t_0 + \tau)^2 - (t - t_0)^2] + \\ + b_3 [(t - t_0 + \tau)^3 - (t - t_0)^3],$$

lub po rozwinięciu

$$(i' \sin K' - i \sin K) \sin 1'' = a_1 \tau + 2 a_2 (t - t_0) \tau + a_2 \tau^2 + \\ + 3 a_3 (t - t_0)^2 \tau + 3 a_3 (t - t_0) \tau^2 + a_3 \tau^3, \quad (v)$$

$$(i' \cos K' - i \cos K) \sin 1'' = b_1 \tau + 2 b_2 (t - t_0) \tau + b_2 \tau^2 + \\ + 3 b_3 (t - t_0)^2 \tau + 3 b_3 (t - t_0) \tau^2 + b_3 \tau^3.$$

Dalej można z dostateczną dokładnością przyjąć

$$\sin \chi_m = \chi_m \sin 1'', \quad \cos \chi_m = 1 - \frac{1}{2} \chi_m^2 \sin^2 1'',$$

a więc zgodnie z określeniem χ_m według wzorów (199) jest

$$\sin \chi_m = [\delta_1 (t - t_0) + \delta_2 (t - t_0)^2 + \dots] \sin 1'', \quad (w)$$

$$\cos \chi_m = 1 - \frac{1}{2} \delta_1^2 (t - t_0)^2 \sin^2 1'' + \dots$$

Wartości według wzorów (v) i (w) podstawiamy we wzorach (u). Ograniczając się do wyrazów trzeciego stopnia znajdujemy najprzód

$$(i' \sin K' - i \sin K) \sin \chi_m = \\ = [a_1 \delta_1 (t - t_0) + 2 a_2 \delta_1 (t - t_0)^2 + a_1 \delta_2 (t - t_0)^2] \tau + \\ + a_2 \delta_1 (t - t_0) \tau^2,$$

$$(i' \sin K' - i \sin K) \cos \chi_m \sin 1'' = \\ = [a_1 - \frac{1}{2} a_1 \delta_1^2 (t - t_0)^2 \sin^2 1'' + 2 a_2 (t - t_0) + 3 a_3 (t - t_0)^2] \tau + \\ + [a_2 + 3 a_3 (t - t_0)] \tau^2 + a_3 \tau^3,$$

i podobnie

$$\begin{aligned}
 & (i' \cos K' - i \cos K) \sin \chi_m = \\
 & = [b_1 \delta_1 (t - t_0) + 2 b_2 \delta_1 (t - t_0)^2 + b_1 \delta_2 (t - t_0)^2] \tau + \\
 & \quad + b_2 \delta_1 (t - t_0) \tau^2, \\
 & (i' \cos K' - i \cos K) \cos \chi_m \sin 1'' = \\
 & = [b_1 - \frac{1}{2} b_1 \delta_1^2 (t - t_0)^2 \sin^2 1'' + 2 b_2 (t - t_0) + 3 b_3 (t - t_0)^2] \tau + \\
 & \quad + [b_2 + 3 b_3 (t - t_0)] \tau^2 + b_3 \tau^3.
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu i uporządkowaniu otrzymuje się wreszcie wzory następujące:

$$\begin{aligned}
 i_1 \sin 1'' \sin K_1 = & [a_1 + (2 a_2 + b_1 \delta_1 \sin 1'') (t - t_0) + \\
 & + [(2 b_2 \delta_1 - \frac{1}{2} a_1 \delta_1^2 \sin 1'' + b_1 \delta_2) \sin 1'' + 3 a_3] (t - t_0)^2] \tau + \\
 & + [a_2 + (3 a_3 + b_2 \delta_1 \sin 1'') (t - t_0)] \tau^2 + a_3 \tau^3, \quad (207)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i_1 \sin 1'' \cos K_1 = & [b_1 + (2 b_2 - a_1 \delta_1 \sin 1'') (t - t_0) - \\
 & - [(2 a_2 \delta_1 + \frac{1}{2} b_1 \delta_1^2 \sin 1'' + a_1 \delta_2) \sin 1'' - 3 b_3] (t - t_0)^2] \tau + \\
 & + [b_2 + (3 b_3 - a_2 \delta_1 \sin 1'') (t - t_0)] \tau^2 + b_3 \tau^3. \quad (208)
 \end{aligned}$$

Są to poszukiwane wzory ogólne na $i \sin K$ i $i \cos K$.

Znajdźmy teraz wzory ogólne na ε_m' , ε_m , ψ_m , μ_m i χ_m . W tym celu posługujemy się ryciną 70. Na rycinie tej $E'_0 E_0$, $E' E$ i $E'_1 E_1$ są to odpowiednio ekliptyki epok t_0 , t i t' , a $R'_0 R_0$, $R' R$ i $R'_1 R_1$ są to średnie równiki tych trzech epok. Punkty γ_m^0 , γ_m , γ_m' są to więc średnie równonocę, a kąty ε_m^0 , ε_m i $(\varepsilon_m)'$ — średnie pochyłości ekliptyki w tych trzech epokach. Ryciny 68 i 69 wyjaśniają znaczenie innych łuków i kątów ryciny 70.

Wyprowadźmy przedewszystkiem wzór na precesję ogólną χ_m . Znaczek (t) u góry służy do oznaczenia, że epoka t jest epoką początkową. Jest zatem

$$\begin{aligned}
 \chi_m = W \gamma_m - W \gamma_m^0, \quad \chi_m' = W' \gamma_m' - W' \gamma_m^0, \\
 \chi_m^{(t)} = W^{(t)} \gamma_m' - W^{(t)} \gamma_m, \quad (x)
 \end{aligned}$$

albo, gdy napiszemy

$$W^{(t)} \gamma_m' = W' \gamma_m' - W^{(t)} W', \quad W^{(t)} \gamma_m = \gamma_m W - W^{(t)} W,$$

to jest też

$$\chi_m^{(t)} = (W' \gamma_m' - W^{(t)} W') - (W \gamma_m - W^{(t)} W). \quad (y)$$

Przechodzimy do wyprowadzenia wzoru na $\mu_m^{(t)}$. Widzimy z ryciny, że jest

$$\mu_m^{(t)} = \gamma_2 \gamma_m' - \gamma_2 \gamma_m^{(t)} = \mu_m' - \gamma_2 \gamma_m^{(t)}. \quad (z)$$

Łuk $\gamma_2 \gamma_m^{(t)}$ różni się tem od μ_m' , że liczony jest od punktu γ_2 do ekliptyki epoki t zamiast do ekliptyki epoki t' . Otrzymamy zatem wartość na $\gamma_2 \gamma_m^{(t)}$, gdy we wzorze (195) po prawej stronie przyjmiemy dla i i K wartości, odpowiadające epoce t , a dla wszystkich innych występujących tam wielkości — wartości odpowiadające epoce t' . Ponieważ chodzi tu tylko o różnicę $\mu_m' - \gamma_2 \gamma_m^{(t)}$, więc drugi wyraz wzoru (195) można opuścić i przyjąć z dostateczną dokładnością

$$\begin{aligned} \mu_m - \gamma_2 \gamma_m^{(t)} &= \frac{1}{\sin \varepsilon_0} [i \sin (K + \psi) - i \sin (K + \psi')] = \\ &= \frac{i \cos K}{\sin \varepsilon_0} (\psi - \psi') \sin 1''; \end{aligned}$$

podstawiając we wzorze (z), znajdujemy

$$\mu_m^{(t)} = \mu_m' - \mu_m - \frac{i \cos K}{\sin \varepsilon_0} (\psi' - \psi) \sin 1''. \quad (ż)$$

Gdy napiszemy tu najprzód, zgodnie ze wzorem (201),

$$\begin{aligned} \mu_m' - \mu_m &= [\gamma_1 + 2\gamma_2(t - t_0) + 3\gamma_3(t - t_0)^3 + \dots] \tau + \\ &+ [\gamma_2 + 3\gamma_3(t - t_0) + \dots] \tau^2 + (\gamma_3 + \dots) \tau^3 + \dots, \quad (aa) \end{aligned}$$

rzyjmiemy

$$\psi' - \psi = [c_1 + 2c_2(t - t_0) + \dots] \tau + (c_2 + \dots) \tau^2 + \dots, \quad (ab)$$

$$i \cos K \sin 1'' = b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 + \dots,$$

a więc z dostatecznem przybliżeniem

$$\begin{aligned} i \cos K (\psi' - \psi) \sin 1'' &= [b_1 c_1(t - t_0) + (b_2 c_1 + 2b_1 c_2)(t - t_0)^2 + \dots] \tau + \\ &+ [b_1 c_2(t - t_0) + \dots] \tau^2 + \dots, \quad (ac) \end{aligned}$$

to po podstawieniu i uporządkowaniu, wzór (ż) otrzymuje postać następującą:

$$\begin{aligned} \mu_m^{(t)} = & [\gamma_1 + (2\gamma_2 - b_1 c_1 \operatorname{cosec} \varepsilon_0 \sin 1'') (t - t_0) + \\ & + [3\gamma_3 - (b_2 c_1 + 2b_1 c_2) \operatorname{cosec} \varepsilon_0 \sin 1''] (t - t_0)^2 + \dots] (t' - t) + \\ & + [\gamma_2 + (3\gamma_3 - b_1 c_2 \operatorname{cosec} \varepsilon_0 \sin 1'') (t - t_0) + \dots] (t' - t)^2 + \\ & + (\gamma_3 + \dots) (t' - t)^3 + \dots \end{aligned} \quad (210)$$

Celem wyznaczenia $\psi_m^{(t)}$ jest, jak wynika z ryciny,

$$\psi_m^{(t)} = \gamma_m \gamma_m^{(t)} = W \gamma_m^{(t)} - W \gamma_m = W \gamma_m^{(t)} - K - \chi_m.$$

Gdyby równikiem epoki t był równik $R_1 R_4$, określony przez ψ' , to wtedy wartość $K + \chi_m$ odpowiadałaby wielkości łuku $W \gamma_m^{(t)}$; chcąc więc znaleźć ten łuk, należy w wyrażeniu na $K + \chi_m$ zamiast ψ przyjąć ψ' . Jest zatem z uwzględnieniem wzoru (196)

$$\begin{aligned} W \gamma_m^{(t)} = & K + \psi' - i \cotg \varepsilon' \sin (K + \psi') + \\ & + i^2 \cotg^2 \varepsilon' \sin (K + \psi') \cos (K + \psi') \sin 1'', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K + \chi_m = & K + \psi - i \cotg \varepsilon' \sin (K + \psi) + \\ & + i^2 \cotg^2 \varepsilon' \sin (K + \psi) \cos (K + \psi) \sin 1'', \end{aligned}$$

Gdy odejmiemy drugie z powyższych równań od pierwszego, to po zastosowaniu dozwolonych uproszczeń otrzymamy

$$\psi_m^{(t)} = W \gamma_m^{(t)} - K - \chi_m = \psi' - \psi - i \cos K (\psi' - \psi) \cotg \varepsilon_0 \sin 1'',$$

a po podstawieniu wartości według wzorów (ab) i (ac) i uporządkowaniu, otrzymujemy wzór

$$\begin{aligned} \psi_m^{(t)} = & [c_1 + (2c_2 - b_1 c_1 \cotg \varepsilon_0 \sin 1'') (t - t_0) + \\ & + [3c_3 - (b_2 c_1 + 2b_1 c_2) \cotg \varepsilon_0 \sin 1''] (t - t_0)^2 + \dots] (t' - t) + \\ & + [c_2 + (3c_3 - b_1 c_2 \cotg \varepsilon_0 \sin 1'') (t - t_0) + \dots] (t' - t)^2 + \\ & + (c_3 + \dots) (t' - t)^3 + \dots \end{aligned} \quad (211)$$

Kąt $\varepsilon_m^{(t)}$ jest pochyłością ekliptyki epoki t' , jest on więc identyczny z kątem $(\varepsilon_m)'$. Gdy więc oznaczymy

$$\varepsilon_m = E(t - t_0), \quad \varepsilon_m^{(t)} = E(t - t_0 + \tau),$$

a zatem też

$$\varepsilon_m^{(t)} = E(t - t_0) + E'(t - t_0)\tau + \frac{1}{2}E''(t - t_0)^2\tau^2 + \\ + \frac{1}{6}E'''(t - t_0)^3\tau^3 + \dots,$$

to po podstawieniu wartości ε_m według wzorów (199) otrzymamy, jak łatwo sprawdzić:

$$\varepsilon_m^{(t)} = \varepsilon_m + [\beta_1 + 2\beta_2(t - t_0) + 3\beta_3(t - t_0)^2 + \dots](t' - t) + \\ + [\beta_2 + 3\beta_3(t - t_0) + \dots](t' - t_0)^2 + (\beta_3 + \dots)(t' - t)^3 + \dots \quad (212)$$

Pozostaje nam jeszcze tylko znaleźć wzór ogólny na $(\varepsilon_m')^{(t)}$, t. j. pochyłość ekliptyki epoki t względem równika epoki t' .

Kąty ε_m i $(\varepsilon_m')^{(t)}$ oznaczają pochyłość tej samej ekliptyki względem dwóch rozmaitych równików, mianowicie równika epoki t i epoki t' . We wzorze (194), w którym ε i ε' oznaczają w istocie ε_m i ε_m' , od równika epoki t zależą wartości ψ i ε' . Otrzymamy z tego wzoru wartość $(\varepsilon_m')^{(t)}$, gdy zastąpimy ψ przez ψ' , a ε_m' przez ε_m'' . Jest zatem

$$(\varepsilon_m')^{(t)} = \varepsilon_m'' + i \cos(K + \psi') + \frac{1}{2}i^2 \cotg \varepsilon_m'' \sin^2(K + \psi') \sin 1'', \quad (\text{ad})$$

gdzie oznacza

$$\varepsilon_m'' = \varepsilon_0 + d_2(t' - t_0) + d_3(t' - t_0)^3 + \dots \quad (\text{ae})$$

Gdy wzór (194) odejmiemy od wzoru (ad), to otrzymamy z dostatecznem przybliżeniem

$$(\varepsilon_m')^{(t)} - \varepsilon_m = \varepsilon_m'' - \varepsilon_m' - i \sin K(\psi' - \psi) \sin 1''. \quad (\text{af})$$

Oznaczmy

$$\varepsilon_m' = \varepsilon_0 + d_2(t - t_0)^2 + d_3(t - t_0)^3 + \dots = E_1(t - t_0),$$

to jest oczywiście

$$\varepsilon_m'' = E_1(t - t_0 + \tau) = E_1(t - t_0) + E_1'(t - t_0)\tau + \\ + \frac{1}{2}E_1''(t - t_0)^2\tau^2 + \dots,$$

czyli

$$\varepsilon_m'' - \varepsilon_m' = [2d_2(t - t_0) + 3d_3(t - t_0)^2 + \dots] \tau + [d_2 + 3d_3(t - t_0) + \dots] \tau^2 + \dots \quad (\text{ag})$$

Następnie jest analogicznie do wzoru (ac)

$$i \sin K(\psi' - \psi) = [a_1 c_1(t - t_0) + (a_2 c_1 + 2a_1 c_2)(t - t_0)^2 + \dots] \tau + [a_1 c_2(t - t_0) + \dots] \tau^2 + \dots \quad (\text{ah})$$

Podstawiając wartości według wzorów (ag) i (ah) we wzorze (af) i uwzględniając, że według (h) jest $d_1 = 0$, $2d_2 = a_1 c_1$, znajdziemy

$$(\varepsilon_m')^{(t)} = \varepsilon_m + \{[3d_3 - (a_2 c_1 + 2a_1 c_2) \sin 1''] (t - t_0)^2 + \dots\} (t' - t) + [d_2 + (3d_3 - a_1 c_2 \sin 1'') (t - t_0) + \dots] \tau^2 + (d_3 + \dots) \tau^3 + \dots \quad (213)$$

91. Wartości liczbowe współczynników wzorów precesyjnych.

Stała precesji. Wartości współczynników wzorów precesyjnych, jak wiemy, zależą od epoki i od jednostki, zapomocą której wyrażamy odstęp czasu. Ponieważ wartość niektórych współczynników jest bardzo mała, więc chcąc, aby wzory wyprowadzone zachowywały dostateczną dokładność dla bardzo długich okresów czasu, jest rzeczą praktyczną stosować jednostkę czasu bardzo dużą. Za taką jednostkę przyjmujemy stulecie juljańskie (ust. 42).

Za epokę t_0 przyjmujemy rok 1850.0, t. j. początek roku astronomicznego 1850 według późniejszego określenia (p. rozdz. X). Dla krótkości będziemy odstęp czasu, który upłynął od tej epoki początkowej, wyrażony w stuleciach juljańskich, oznaczali przez t ; oznaczać też będziemy $t' - t = \tau$.

Wartości współczynników, które niżej podajemy, zostały zestawione przez Newcomb'a w pracy p. t. *A new determination of the precessional motion*, ogłoszonej w czasopiśmie *Astronomical Journal*, t. XVII, p. 161; na konferencji międzynarodowej gwiazd fundamentalnych w Paryżu r. 1896 zostały one uznane za ogólnie obowiązujące.

Spółczynniki szeregów (192) mają wartości następujące:

$$\begin{aligned} a_1 &= 5''.341 \sin 1'', \quad a_2 = 0''.1935 \sin 1'', \quad a_3 = -0''.00017 \sin 1'', \\ b_1 &= -46''.838 \sin 1'', \quad b_2 = 0''.0562 \sin 1'', \quad b_3 = +0''.00035 \sin 1'', \end{aligned} \quad (\text{ai})$$

wobec czego do obliczenia kątów i i K służą następujące wzory:

$$\begin{aligned} i &= 47''.142 t - 0''.034 t^2 + \dots \\ K &= 173^\circ 29' 40''.7 - 869''.0 t - 0''.07 t^2 + \dots \end{aligned} \quad (214)$$

Dalej przyjmując

$$\begin{aligned} \varepsilon_m^0 &= 23^\circ 27' 31''.68, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 0''.065, \quad d_3 = -0''.008, \\ c_1 &= 5036''.95, \quad c_2 = -1''.071, \quad c_3 = -0''.002, \end{aligned} \quad (\text{aj})$$

otrzymuje się następujące wartości współczynników szeregów na ε_m , μ_m i χ_m :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -46''.838, \quad \beta_2 = -0''.009, \quad \beta_3 = 0''.001; \\ \gamma_1 &= 13''.417, \quad \gamma_2 = -2''.380, \quad \gamma_3 = -0''.001; \\ \delta_1 &= 5024''.64, \quad \delta_2 = +1''.112, \quad \delta_3 = -0''.001. \end{aligned} \quad (\text{ak})$$

Wprowadzając te wartości we wzorach (199), otrzymuje się:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_m' &= 23^\circ 27' 31''.68 + 0''.065 t^2 - 0''.008 t^3 + \dots, \\ \psi_m &= 5036''.95 t + 1''.071 t^2 - 0''.002 t^3 + \dots, \\ \varepsilon_m &= 23^\circ 27' 31''.68 - 46''.838 t - 0''.009 t^2 + 0''.001 t^3 + \dots, \\ \mu_m &= 13''.417 t - 2''.380 t^2 - 0''.001 t^3 + \dots, \\ \chi_m &= 5024''.64 t + 1''.112 t^2 - 0''.001 t^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (215)$$

Wzory ogólne są następujące:

$$\left. \begin{aligned} i^{(t)} \sin K^{(t)} &= (5''.341 - 0''.754 t + 0''.000 t^2 + \dots) \tau + \\ &\quad + (0''.1935 + 0''.008 t + \dots) \tau^2 + \dots, \\ i^{(t)} \cos K^{(t)} &= (-46''.838 - 0''.017 t + 0''.005 t^2 + \dots) \tau + \\ &\quad + (0''.056 - 0''.004 t + \dots) \tau^2 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (216)$$

$$\left. \begin{aligned} K^{(t)} &= 173^{\circ} 29' 40''.7 + 3286''.6 t + 0''.27 t^2 + \dots + \\ &+ (-869''.0 - 8''.84 t + \dots) \tau - (0''.07 + \dots) \tau^2 + \dots, \\ i^{(t)} &= (47''.142 - 0''.068 t) \tau - 0''.034 \tau^2 + \dots, \end{aligned} \right\} (217)$$

$$\psi_m^{(t)} = (5036''.95 + 0''.494 t - 0''.001 t^2 + \dots) \tau + \\ + (-1''.071 - 0''.003 t + \dots) \tau^2 - (0''.002 + \dots) \tau^3 + \dots, \quad (218)$$

$$(\varepsilon_m')^{(t)} = 23^{\circ} 27' 31''.68 - 46''.838 t - 0''.009 t^2 + 0''.001 t^3 + \dots + \\ + (-0''.029 t^2 + \dots) \tau + (0''.065 - 0''.024 t + \dots) \tau^2 + \\ + (-0''.008 + \dots) \tau^3 + \dots, \quad (219)$$

$$\varepsilon_m^{(t)} = 23^{\circ} 27' 31''.68 - 46''.838 - 0''.009 t^2 + 0''.001 t^3 + \dots + \\ + (-46''.838 - 0''.018 t + 0''.003 t^2 + \dots) \tau + \\ + (-0''.009 + 0''.003 t + \dots) \tau^2 + (0''.001 + \dots) \tau^3 + \dots, \quad (220)$$

$$\mu_m^{(t)} = (13''.417 - 1''.887 t - 0''.008 t^2 + \dots) \tau + (-2''.380 - \\ - 0''.004 t + \dots) \tau^2 + (-0''.001 + \dots) \tau^3 + \dots, \quad (221)$$

$$\chi_m^{(t)} = (5024''.64 + 2''.224 t - 0''.003 t^2 + \dots) \tau + (1''.112 - \\ - 0''.003 t + \dots) \tau^2 + (-0''.001 + \dots) \tau^3 + \dots \quad (222)$$

Wzory powyższe, jak już wspomnieliśmy, zostały uznane za ogólnie obowiązujące na konferencji paryskiej r. 1896. W ostatnich latach Andoyer podjął się ponownego obliczenia współczynników przytoczonych szeregów. Obliczał on z większą liczbą znaków dziesiętnych i zastosował przy obliczeniu różne sposoby kontroli, dzięki czemu mogły być usunięte niektóre drobne pomyłki obliczeń Newcomba. Celem uniknięcia wielkiej liczby zer początkowych obrał Andoyer za jednostkę czasu *tysiąclecie zwrotnikowe*. Wzory Andoyera zostały ogłoszone w pracy p. t. *Les formules de la précession d'après S. Newcomb* w *Bulletin Astronomique*, t. XXVIII, p. 67. Można je uważać za zgodne z uchwałami konferencji paryskiej r. 1896, a przytem według dzisiejszego stanu nauki za najdokładniejsze. Wzory Andoyera są następujące:

$$\left. \begin{aligned} i^{(t)} \sin K^{(t)} &= (53''.41 - 75''.39 t + 0''.34 t^2) \tau + \\ &\quad + (19''.35 + 0''.80 t) \tau^2 - 0''.19 \tau^3, \\ i^{(t)} \cos K^{(t)} &= (-468''.37 - 1''.75 t + 5''.49 t^2) \tau + \\ &\quad + (5''.63 - 3''.66 t) \tau^2 + 0''.35 \tau^3, \end{aligned} \right\} \quad (216')$$

$$\left. \begin{aligned} K^{(t)} &= 173^\circ 29' 40'' + 32863'' t + 56'' t^2 + \\ &\quad + (-8691'' - 55'' t) \tau + 3'' \tau^2, \\ i^{(t)} &= (471''.41 - 6''.80 t + 0''.57 t^2) \tau + \\ &\quad + (-3''.40 + 0''.57 t) \tau^2 + 0''.05 \tau^3, \end{aligned} \right\} \quad (217')$$

$$\psi_m^{(t)} = (50368''.38 + 49''.30 t - 0''.04 t^2) \tau + (-107''.13 - 1''.48 t) \tau^2 - 1''.53 \tau^3, \quad (218')$$

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon_m')^{(t)} &= 23^\circ 27' 31''.68 - 468''.37 t - 0''.88 t^2 + 1''.83 t^3 + \\ &\quad + (6''.52 - 9''.20 t) \tau^2 - 7''.73 \tau^3, \end{aligned} \right\} \quad (219')$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_m^{(t)} &= 23^\circ 27' 31''.68 - 468''.37 t - 0''.88 t^2 + 1''.83 t^3 + \\ &\quad + (-468''.37 - 1''.75 t + 5''.49 t^2) \tau + (-0''.88 + 5''.49 t) \tau^2 + \\ &\quad + 1''.83 \tau^3, \end{aligned} \right\} \quad (220')$$

$$\mu_m^{(t)} = (134''.17 - 188''.69 t - 0''.14 t^2) \tau + (-237''.99 - 1''.57 t) \tau^2 - 1''.66 \tau^3, \quad (221')$$

$$\chi_m^{(t)} = (50245''.30 + 222''.27 t + 0''.26 t^2) \tau + (111''.13 + 0''.26 t) \tau^2 + 0''.10 \tau^3. \quad (222')$$

Wzory Andoyera poczynając od rocznika 1916 są przyjęte przez B. A. J. za podstawę obliczeń precesji. Zwracamy raz jeszcze uwagę, że we wzorach Newcomba za jednostkę czasu obrane jest stulecie *jułjańskie*, a we wzorach Andoyera — tysiąclecie *zwrotnikowe*. Celem więc porównania współczynników tych wzorów należy sprowadzić je do tej samej jednostki czasu, według wskazówek ustępu 89.

Gdy we wzorach na $\psi_m^{(t)}$, $\mu_m^{(t)}$ i $\chi_m^{(t)}$ za jednostkę czasu obierzemy rok, to współczynnik przy τ nazywa się *stałą precesji*,

i to odpowiednio stałą precesji księżycowo-słonecznej, precesji planetarnej i precesji ogólnej. Z postaci tych współczynników widzimy, że stałe precesji nie są w istocie wielkościami bezwzględnie stałymi, ale powoli zmieniają się wraz z epoką początkową. Wartości tych stałych różnią się też nieco zależnie od tego, czy za jednostkę czasu obrany został rok juljański, czy też zwrotnikowy.

Zestawiamy wartości tych trzech stałych precesji dla dwóch różnych epok początkowych i przy zastosowaniu za jednostkę czasu raz roku juljańskiego i drugi raz roku zwrotnikowego.

Epoka początkowa	1850.0		1900.0	
Jednostka czasu	Rok julj.	Rok zwr.	Rok julj.	Rok zwr.
Stała precesji księż.-słon. (ψ_m)	50".3695	50".3684	50".3720	50".3709
Stała precesji przez plan. (μ)	0".1342	0".1342	0".1247	0".1247
Stała precesji ogólnej (χ_m)	50".2464	50".2453	50".2575	50".2564

92. Wartości liczbowe współczynników wyrazów periodycznych.

Stała nutacji. Wyrazy periodyczne, oznaczone przez Σp i Σq we wzorach (200), zesumowane określają wartości nutacji księżycowo-słonecznej odpowiednio w długości i pochyłości. Wyrazy te zależą od następujących argumentów: 1) średniej długości węzła wstępującego drogi księżyca Ω , 2) średniej długości słońca L_\odot , 3) średniej długości księżyca L_\oplus , 4) długości punktu przyziemnego drogi słońca Π_\odot , 5) długości punktu przyziemnego drogi księżyca Π_\oplus . Różnica $L_\odot - \Pi_\odot = M_\odot$ jest to anomalja średnia słońca, różnica $L_\oplus - \Pi_\oplus = M_\oplus$ jest to anomalja średnia księżyca.

Podajemy wyrazy nutacji według pracy S. Newcoma p. t. *Sur les formules de nutation, basées sur les décisions de la conférence de 1896*, ogłoszonej w *Bull. Astr.* t. XV, str. 241. Argumenty wyrazów oznaczone są sposobem, przyjętym przez B. A. J. począwszy od r. 1916.

Wartości współczynników odnoszą się do epoki 1900.0; występująca we wzorach litera t oznacza liczbę stuleci juljańskich, która upłynęło od epoki 1900 styczeń 0.0 czasu średniego greenwich'skiego.

Według cytowanej pracy jest:

$$\begin{aligned}
 \Sigma p = & -(17''.234 + 0''.017 t) \sin \Omega + 0''.209 \sin 2 \Omega - 0''.204 \sin 2 L_{\oplus} + \\
 & + 0''.068 \sin M_{\oplus} - 0''.034 \sin (2 L_{\oplus} - \Omega) - 0''.026 \sin (2 L_{\oplus} + M_{\oplus}) + \\
 & + 0''.015 \sin (2 L_{\oplus} - 2 L_{\odot} - M_{\oplus}) + 0''.012 \sin (2 L_{\odot} - \Omega) + \\
 & + 0''.011 \sin (2 L_{\oplus} - M_{\oplus}) + 0''.006 \sin 2 (L_{\oplus} - L_{\odot}) + \\
 & + 0''.006 \sin (M_{\oplus} + \Omega) + 0''.006 \sin (M_{\oplus} - \Omega) + \\
 & + 0''.005 \sin (2 L_{\oplus} - 2 M_{\oplus} - \Omega) - 0''.005 \sin (4 L_{\oplus} - 2 L_{\odot} - M_{\oplus}) + \\
 & + 0''.004 \sin 2 (L_{\odot} - L_{\oplus} + M_{\oplus}) - 0''.004 \sin (2 L_{\oplus} + M_{\oplus} - \Omega) - \\
 & - 0''.003 \sin 2 (2 L_{\oplus} - L_{\odot}) + 0''.003 \sin 2 M_{\oplus} - \\
 & - 0''.003 \sin 2 (L_{\oplus} + M_{\oplus}) + 0''.003 \sin (2 L_{\odot} + M_{\oplus}) + \\
 & + 0''.002 \sin 2 (L_{\oplus} - \Omega) - 0''.002 \sin 2 (L_{\odot} - \Omega) - 1''.272 \sin 2 L_{\odot} + \\
 & + 0''.126 \sin M_{\odot} - 0''.050 \sin (2 L_{\odot} + M_{\odot}) + \\
 & + 0''.021 \sin (2 L_{\odot} - M_{\odot}), \quad (223)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma q = & + (9''.210 + 0''.0009 t) \cos \Omega - 0''.090 \cos 2 \Omega + \\
 & + 0''.089 \cos 2 L_{\oplus} + 0''.018 \cos (2 L_{\oplus} - \Omega) + 0''.011 \cos (2 L_{\oplus} + M_{\oplus}) - \\
 & - 0''.007 \cos (2 L_{\odot} - \Omega) - 0''.005 \cos (2 L_{\oplus} - M_{\oplus}) - \\
 & - 0''.003 \cos (M_{\oplus} + \Omega) - 0''.003 \cos (M_{\oplus} - \Omega) - \\
 & - 0''.003 \cos (2 L_{\oplus} - 2 M_{\oplus} - \Omega) + 0''.002 \cos (4 L_{\oplus} - 2 L_{\odot} - M_{\oplus}) + \\
 & + 0''.002 \cos (2 L_{\oplus} + M_{\oplus} - \Omega) + 0''.551 \cos 2 L_{\odot} + \\
 & + 0''.022 \cos (2 L_{\odot} + M_{\odot}) - 0''.009 \cos (2 L_{\odot} - M_{\odot}). \quad (224)
 \end{aligned}$$

We wzorach powyższych wszystkie wyrazy aż do kreski pionowej pochodzą od działania księżyca, dalsze zaś od działania słońca.

Podajemy jeszcze wartości argumentów, występujących w wyrazach nutacyjnych, według Hansena względnie Newcomba (p. B. A. J. 1916, str. 7).

$$\begin{aligned}
 \Omega &= 259^{\circ} 10' 50''.37 - 6962923''.21 t + 8''.21 t^2 + 0''.01 t^3, \\
 M_{\oplus} &= 296^{\circ} 7' 6''.30 + 1717915936''.17 t + 49''.59 t^2 + 0''.05 t^3, \\
 L_{\oplus} &= 270^{\circ} 26' 44''.59 + 1732564446''.25 t + 13''.35 t^2 + 0''.02 t^3, \\
 M_{\odot} &= 358^{\circ} 28' 33''.0 + 129596579''.10 t - 0''.54 t^2, \\
 L_{\odot} &= 279^{\circ} 41' 48''.04 + 129602768''.13 t + 1''.09 t^2. \quad (225)
 \end{aligned}$$

We wzorach (225) t ma to samo znaczenie, co we wzorach (223) i (224).

Pośród wyrazów wzorów (223) i (224) rozróżniamy wyrazy długookresowe i krótkookresowe. W tych ostatnich argumentami są L_{\oplus} i M_{\oplus} , których okresami są odpowiednio miesiąc zwrotnikowy i miesiąc anomalistyczny (p. rozdz. X). Wyrazy, których współczynniki nie przekraczają 0".005 w praktyce zazwyczaj bywają pomijane, o ile nie chodzi specjalnie o największą dającą się osiągnąć dokładność. Opuszczając więc te małe wyrazy, przyjmujemy

$$\begin{aligned}\Sigma p &= d\psi = \Delta\psi + \Delta\psi', \\ \Sigma q &= d\varepsilon = \Delta\varepsilon + \Delta\varepsilon',\end{aligned}\tag{226}$$

rozumiejąc przez $\Delta\psi$ i $\Delta\varepsilon$ sumy wyrazów długookresowych, a przez $\Delta\psi'$ i $\Delta\varepsilon'$ sumy wyrazów krótkookresowych, zależnych od długości księżyca. Sumy te są następujące:

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= -(17''.234 + 0''.017 t) \sin \Omega + 0''.209 \sin 2\Omega - \\ &- 1''.272 \sin 2L_{\odot} + 0''.126 \sin M_{\odot} - 0''.050 \sin (2L_{\odot} + M_{\odot}) + \\ &+ 0''.021 \sin (2L_{\odot} - M_{\odot}) + 0''.012 \sin (2L_{\odot} - \Omega),\end{aligned}\tag{227}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon &= (9''.210 + 0''.0009 t) \cos \Omega - 0''.090 \cos 2\Omega + 0''.551 \cos 2L_{\odot} + \\ &+ 0''.022 \cos (2L_{\odot} + M_{\odot}) - 0''.009 \cos (2L_{\odot} - M_{\odot}) - \\ &- 0''.007 \cos (2L_{\odot} - \Omega),\end{aligned}\tag{228}$$

$$\begin{aligned}\Delta\psi' &= -0''.204 \sin 2L_{\oplus} + 0''.068 \sin M_{\oplus} - 0''.034 \sin (2L_{\oplus} - \Omega) - \\ &- 0''.026 \sin (2L_{\oplus} + M_{\oplus}) + 0''.015 \sin (2L_{\oplus} - 2L_{\odot} - M_{\oplus}) + \\ &+ 0''.011 \sin (2L_{\oplus} - M_{\oplus}) + 0''.006 \sin (2L_{\oplus} - 2L_{\odot}),\end{aligned}\tag{229}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon' &= 0''.089 \cos 2L_{\oplus} + 0''.018 \cos (2L_{\oplus} - \Omega) + \\ &+ 0''.011 \cos (2L_{\oplus} + M_{\oplus}) - 0''.005 \cos (2L_{\oplus} - M_{\oplus}).\end{aligned}\tag{230}$$

Gdy znane są wartości Σp i Σq , to można też obliczyć części perjodyczne wzorów (198), t. j. wielkości B , G , D , określone przez wzory (197); w tych wyrazach, w których sumy Σp i Σq pomnożone są przez $\sin 1''$, przy obliczeniu powyższych wielkości można te sumy zastąpić pierwszymi wyrazami wzorów (223) i (224), które znacznie większe są od wszystkich innych, t. j. można przyjąć

$$\begin{aligned}B &= \Sigma q + 17''.23 (t - t_0) a_1 \sin \Omega \sin 1'', \\ G &= (-17''.23 b_1 \sin \Omega - 9''.21 a_1 \cos \Omega \cotg \varepsilon_0) (t - t_0) \operatorname{cosec} \varepsilon_0 \sin 1'', \\ D &= \Sigma p + (9''.21 a_1 \cos \Omega \operatorname{cosec}^2 \varepsilon_0 + 17''.23 b_1 \sin \Omega \cotg \varepsilon_0) (t - t_0) \sin 1''.\end{aligned}\tag{a1}$$

Po przeliczeniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} B &= \Sigma q + 0''.0004(t - t_0), \\ G &= (0''.0098 \sin \Omega - 0''.0014 \cos \Omega)(t - t_0), \\ D &= \Sigma p + (0''.0015 \cos \Omega - 0''.0090 \sin \Omega)(t - t_0), \end{aligned} \quad (ad)$$

i widzimy, że gdy epoka początkowa nie jest nazbyt odległa, a więc w praktyce zawsze, przyjąć można wprost

$$B = \Sigma q, \quad G = 0, \quad D = \Sigma p. \quad (am)$$

Skutkiem tego trzy ostatnie ze wzorów (200) przyjmują postać

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \Sigma q, \quad \mu = \mu_m, \quad \chi = \chi_m + \Sigma p. \quad (200')$$

Znaczy to, że praktycznie nutacja ogólna pochyłości i długości nie różni się od nutacji księżycowo-słonecznej, a w wyrażeniu przesunięcia przez planety wyrazy perjodyczne nie wchodzi w rachubę.

Wartości $\Sigma p = d\psi$ i $\Sigma q = d\varepsilon$ podawane są w rocznikach astronomicznych. Tak np. w B. A. J. do r. 1915 włącznie znajdujemy $\Delta\psi$ w tablicy na początku książki, zatytułowanej *Reductions-elemente* w rubryce *nutacja w długości*, a wartości $\log(-\Delta\varepsilon)$ w tablicach *Reductionstafeln* w rubryce $\log B''$. Wartości te obliczone są w odstępach 10-dniowych. Nadto w tablicach, zawierających spólrzędne słońca, podane są wartości części krótkookresowych $\Delta\psi'$ i $\Delta\varepsilon'$ dla każdego średniego południa. Począwszy od rocznika 1916 wartości $\Delta\psi$, $\Delta\psi'$, $\Delta\varepsilon$ i $\Delta\varepsilon'$ podawane są w tablicach wielkości redukcyjnych dla każdej średniej północy greenwich'skiej.

Spółczynnik przy $\cos \Omega$ we wzorze (224), wyrażającym nutację w pochyłości, nazywa się *stałą nutacji*. «Stala» ta, jak widzimy zmienia się powoli z czasem. Wartość $k = 9''.21$ przyjęta została na konferencjach paryskich r. 1896 i 1916, jako ogólnie jeszcze i obecnie obowiązująca wartość stałej nutacji.

93. Ruch średniego bieguna świata. Położenie płaszczyzny średniego równika świata w epoce t określone jest względem niezmienniej ekliptyki t_0 przez średnią pochyłość księżycowo-

słoneczną ε_m' oraz przez precesję księżycowo-słoneczną ψ_m . Zmiany wartości tych dwóch wielkości określają ruch płaszczyzny średniego równika.

W ścisłym związku z położeniem płaszczyzny równika znajduje się położenie osi świata, która do płaszczyzny równika jest prostopadła. Punkty przecięcia się tej osi ze sklepieniem niebieskim są to bieguny świata. Zmieniają one oczywiście swe położenie pośród gwiazd w związku z ruchem równika i osi świata.

Zastanówmy się, jakiego rodzaju jest ten ruch. Jak widzimy ze wzorów (199), ε_m' różni się od ε_m^0 tylko o drobne wyrazy, proporcjonalne do drugiej i wyższych potęg czasu; tak samo w wyrażeniu na ψ_m dalsze wyrazy są bardzo małe w porównaniu z pierwszym, proporcjonalnym do czasu. Otrzymamy więc obraz ruchu bardzo mało różny od prawdziwego, gdy przyjmiemy, że położenie płaszczyzny średniego równika epoki t określone jest zamiast przez ε_m' i ψ_m , przez wartości

$$(\varepsilon_m') = \varepsilon_m^0, \quad (\psi_m) = c_1 (t - t_0). \quad (\text{an})$$

Ruch płaszczyzny średniego równika przy powyższych uproszczeniach odbywa się w ten sposób, że nachylenie jej do płaszczyzny ekliptyki epoki t_0 nie ulega zmianie, a równonoc średnia cofa się na tej niezmienniej ekliptyce z prędkością stałą $50''.3695$ rocznie.

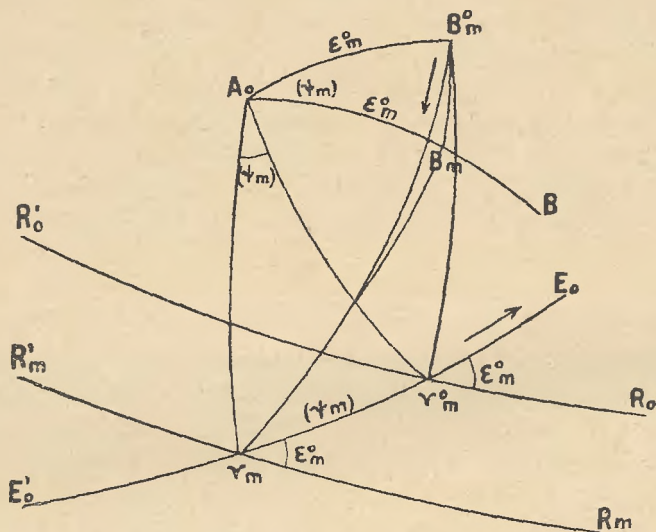
Ruch osi i biegunów świata, odpowiadający wyżej określonemu ruchowi płaszczyzny równika, wyjaśnia rycina 71. Niechaj będzie $E'_0 E_0$ ekliptyka epoki t_0 , a punkt A_0 niech będzie jej biegunem północnym. Podobnie $R'_0 R_0$ niech wyobraża średni równik epoki t_0 , a punkt B_m^0 — północny biegun świata w tej epoce. Punkt \mathcal{V}_m^0 jest średnią równonocą epoki t_0 , a kąt $R_0 \mathcal{V}_m^0 E_0 = \varepsilon_m^0$ średnią pochyłością ekliptyki w tej epoce.

Koło $A_0 B_m^0$, przechodzące przez biegun ekliptyki i biegun świata, jest to kolur stanowisk epoki t_0 , którego biegunami są punkty równonocne. Kąty $\mathcal{V}_m^0 A_0 B_m^0$ i $\mathcal{V}_m^0 B_m^0 A_0$ są więc proste, a łuk $A_0 B_m^0 = \varepsilon_m^0$.

W epoce t równik, określony przez hipotezę (an), zajmuje położenie $R_m' R_m$; nachylenie do ekliptyki pozostało niezmienione,

a równonoc średnia γ_m przesunięta jest na ekliptyce o łuk (ψ_m) w kierunku, przeciwnym wzrastającym długościom, który wskazuje strzałka.

Ponieważ punkt γ_m jest biegunem koła E'_0E_0 , więc jest także $\angle \gamma_m^0 A_0 \gamma_m = (\psi_m)$. Kolurem stanowisk w epoce t jest koło A_0B , którego biegunem jest punkt γ_m , a na tem kole w odległości ε_m^0 od punktu A_0 znajduje się północny biegun świata epoki t , oznaczony przez B_m . Oczywiście kąt $B_m^0 A_0 B_m$ i kąt $\gamma_m^0 A_0 \gamma_m$ są sobie równe, gdyż pierwszy z nich jest utworzony



Rycina 71.

przez kolury stanowisk epoki t_0 i t , a drugi przez prostopadłe do poprzednich kolury równonocy. Jest zatem

$$\angle B_m^0 A_0 B_m = \angle \gamma_m^0 A_0 \gamma_m = (\psi_m).$$

Gdy więc średnia równonoc przesuwa się na ekliptyce epoki t , to z tą samą prędkością kątową zakreśla średni biegun świata dokoła bieguna ekliptyki epoki t_0 koło o promieniu ε_m^0 . Kierunek ruchu bieguna jest wsteczny, podobnie jak kierunek przesuwania się średniej równonocy. Oś świata, która przypada

zawsze w płaszczyźnie koluru stanowisk i tworzy z osią ekliptyki epoki t_0 stały kąt ε_m^0 , zakreśla wskutek obrotu koluru powierzchnię stożkową dokoła osi ekliptyki epoki t_0 . Okres tego obrotu wynosi oczywiście $P = \frac{360^0}{c_1} = 257.3$ stuleci juljańskich.

Gdybyśmy odnieśli położenie średniego bieguna świata do bieguna ekliptyki tej samej epoki, to ruch bieguna byłby bardziej skomplikowany. Odległość bieguna świata epoki t od bieguna ekliptyki tejże epoki wynosi ε_m , a kąt, zakreślony przez biegun świata dokoła bieguna ekliptyki, wynosi χ_m . Gdy zamiast ε_m i χ_m przyjmiemy wartości przybliżone

$$(\varepsilon_m) = \varepsilon_m^0 + \beta_1 (t - t_0), \quad (\chi_m) = \delta_1 (t - t_0), \quad (ao)$$

to widzimy, że biegun średni świata dokoła bieguna ekliptyki zakreśla w ciągu stulecia juljańskiego kąt $\delta_1 = 5024''.64$, i w tym samym czasie zbliża się do bieguna ekliptyki o kąt $\beta_1 = 46''.84$.

Okres obiegu bieguna jest w tym przypadku $P' = \frac{360^0}{\delta_1} = 257.9$ stuleci juljańskich.

Przyjmując, że w ciągu całego okresu P' współczynnik β_1 zachowuje wartość stałą, znaleźlibyśmy, że w okresie tym bieguny A i B zbliżyły się do siebie o przeszło 3^0 . Nie jest to zgodne z teorią, która wykazuje, że wzór na ε_m nie posiada ważności na nieograniczone okresy czasu. Ta sama uwaga dotyczy wszystkich wzorów, postępujących według potęg czasu.

Okres P nazywany bywa często *wielkim rokiem Platona*.

94. Ruch prawdziwego bieguna świata. Położenie płaszczyzny prawdziwego równika świata w epoce t określone jest przez wzory (200), mianowicie

$$\varepsilon' = \varepsilon_m' + \Sigma q, \quad \psi = \psi_m + \Sigma p.$$

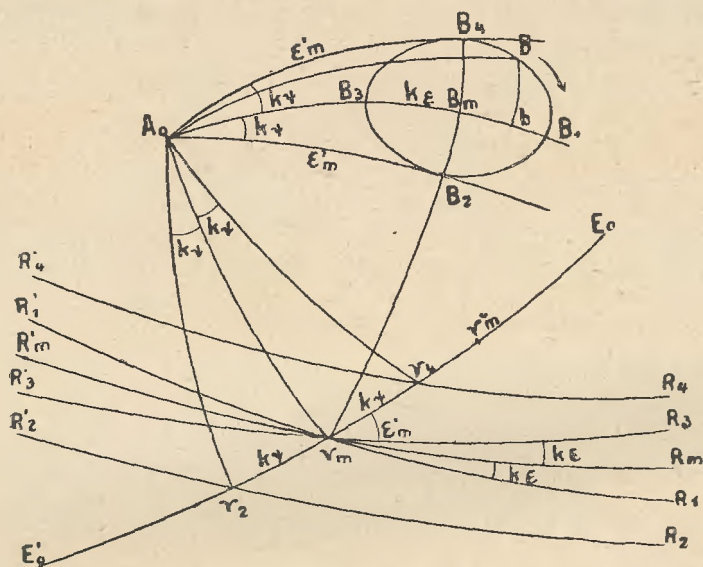
Najistotniejszą część wyrażeń na Σp i Σq , określonych przez wzory (223) i (224), stanowią pierwsze ich wyrazy. Oznaczmy dla krótkości

$$9''.210 = k_\varepsilon, \quad -17''.234 = k_\psi, \quad (ap)$$

oraz położmy

$$(\varepsilon') = \varepsilon_m' + k_\varepsilon \cos \Omega, \quad (\psi) = \psi_m + k_\psi \sin \Omega; \quad (\text{aq})$$

wartości (ε') i (ψ) dają bardzo zbliżone do rzeczywistości określenie położenia płaszczyzny prawdziwego równika świata, a przez nią też prawdziwej osi świata i prawdziwych biegunów świata.



Rycina 72.

W jaki sposób prawdziwy biegun świata zmienia swe położenie wraz z wartością Ω , wyjaśnia rycina 72. Oznacza na niej łuk $E'_0 E_0$ ekliptykę epoki t , łuk $R_m' R_m$ średni równik epoki t , a punkt V_m średnią równonoc tejże epoki. Punkt A_0 jest biegunem ekliptyki epoki t_0 , punkt zaś B_m jest średnim biegunem świata epoki t . Gdy dalej punkt V_m^0 jest średnią równonocą epoki t_0 , od której liczy się kąty ψ , to oczywiście jest $V_m^0 V_m = \psi_m$, a kąt $R_m V_m E_0 = \varepsilon_m'$ jest średnią pochyłością księżycowo-słoneczną epoki t , a więc również $A_0 B_m = \varepsilon_m'$.

Celem określenia położenia prawdziwego bieguna świata, odpowiadającego danej wartości Ω , weźmy pod uwagę położenia,

odpowiadające czterem wartościom Ω , różniącym się o 90° . Wynikają one z niżej załączonej tabelki.

- | | | |
|---------------------------|---|--------------------------------|
| 1. $\Omega = 0^\circ$, | $(\varepsilon')_1 = \varepsilon_m' + k_\varepsilon$, | $(\psi)_1 = \psi_m$, |
| 2. $\Omega = 90^\circ$, | $(\varepsilon')_2 = \varepsilon_m'$, | $(\psi)_2 = \psi_m - k_\psi$, |
| 3. $\Omega = 180^\circ$, | $(\varepsilon')_3 = \varepsilon_m' - k_\varepsilon$, | $(\psi)_3 = \psi_m$, |
| 4. $\Omega = 270^\circ$, | $(\varepsilon')_4 = \varepsilon_m'$, | $(\psi)_4 = \psi_m + k_\psi$. |

Z tabelki tej widzimy, że w położeniach 1. i 3. prawdziwa równonoc schodzi się ze średnią równonocą, a bieguny prawdziwe świata przypadają na kole $A_0 B_m$ w punktach B_1 i B_3 . Jednakże w pierwszym z tych położen pochyłość prawdziwa ekliptyki jest o kąt k_ε większa od średniej, w drugim zaś jest o ten sam kąt mniejsza od średniej. Jest zatem

$$A_0 B_1 = A_0 B_m + k_\varepsilon, \quad A_0 B_3 = A_0 B_m - k_\varepsilon. \quad (\text{ar})$$

W położeniach 2. i 4. pochyłość prawdziwa ekliptyki równa się średniej, a więc też bieguny prawdziwe w tych położeniach, mianowicie B_2 i B_4 znajdują się w tej samej odległości od bieguna A_0 , co biegun średni B_m . Jest zatem

$$A_0 B_2 = A_0 B_4 = A_0 B_m = \varepsilon_m'.$$

Ale w położeniu 2. równonoc prawdziwa przesunięta jest ku punktowi \mathcal{V}_2 o łuk $\mathcal{V}_m \mathcal{V}_2$ w kierunku wzrastających ψ , w położeniu zaś 4. równonoc ta przesunięta jest do punktu \mathcal{V}_4 o takiż kąt, ale w kierunku przeciwnym. Kolury prawdziwe $A_0 B_2$ i $A_0 B_4$ tworzą więc z kolurem średnim kąty $B_m A_0 B_2 = B_m A_0 B_4 = k_\psi$, ale kolur $A_0 B_2$, jak widzimy, odchylony jest od koluru średniego w kierunku wstecznym, kolur zaś $A_0 B_4$ odchylony jest w kierunku prostym. Oczywiście bieguny B_2 , B_4 i B_m leżą na jednym kole, zakreślonym z bieguna ekliptyki A_0 promieniem ε_m' .

Z rozważania powyższego wynika, że w czasie, gdy długość węzła księżycy Ω zmienia swe wartości od 0° do 360° , biegun prawdziwy świata zakreśla dokoła bieguna średniego, uważanego za nieruchomy, krzywą zamkniętą $B_1 B_2 B_3 B_4 B_1$ w kierunku wstecznym.

W celu wyznaczenia kształtu tej krzywej, którą ze względu na jej małe rozmiary można uważać za płaską, obierzmy układ współrzędnych w płaszczyźnie stycznej do sfery niebieskiej w punkcie B_m . Punkt B_m przyjmujemy za początek układu prostokątnego, którego osią y jest prosta, według której płaszczyzna koła szerokości punktu B_m przecina się z płaszczyzną układu, a osią x prosta, do osi y prostopadła. Dodatni kierunek na osi x niechaj odpowiada kierunkowi wzrastania długości astronomicznych, a dodatni kierunek osi y niechaj będzie zwrócony ku biegunowi A_0 .

Gdy biegun prawdziwy świata znajduje się w punkcie B , współrzędne jego mają wartości

$$x = bB, \quad y = B_m b;$$

ponieważ przyjąć możemy

$$bB = bA_0B \sin(\varepsilon'), \quad B_m b = A_0B - A_0B_m,$$

więc, uwzględniając wzory (aq), mamy też z dostateczną dokładnością

$$x = k_\psi \sin \Omega \sin \varepsilon_m', \quad y = k_\varepsilon \cos \Omega.$$

Gdy więc napiszemy

$$\frac{x}{k_\psi \sin \varepsilon_m'} = \sin \Omega, \quad \frac{y}{k_\varepsilon} = \cos \Omega,$$

to podnosząc te równania do kwadratu i dodając, otrzymamy

$$\frac{x^2}{k_\psi^2 \sin^2 \varepsilon_m'} + \frac{y^2}{k_\varepsilon^2} = 1. \quad (\text{as})$$

To znaczy, że skutek nutacji prawdziwy biegun świata zakreśla dokoła bieguna średniego elipsę, której jedna oś przypada na kole szerokości, druga zaś na równoleżniku ekliptyki. Oznaczmy połowę pierwszej z tych osi przez a , drugiej przez b , to jest

$$a = k_\varepsilon, \quad b = |k_\psi \sin \varepsilon_m'|.$$

Ponieważ $k_e = 9''.21$ i, jak łatwo obliczyć, $|k_\downarrow \sin \varepsilon_m'| = 6''.85$, więc widzimy, że ta elipsa nutacyjna wydłużona jest w kierunku ku biegunowi A_0 ; połowa wielkiej osi tej elipsy przyjętą została za stałą nutacji.

Ruchowi bieguna prawdziwego odpowiada ruch stożkowy osi prawdziwej świata, która dokoła osi średniej zakresła powierzchnię stożka eliptycznego.

Okres czasu, w którym biegun zakresła elipsę nutacyjną, jest to okres, w którym kąt Ω zmienia się od 360° do 0° , a więc węzeł księżyca ruchem wstecznym przebiega całą ekliptykę. Długość tego okresu wypływa z pierwszego ze wzorów (225). Uwzględniając tylko pierwszy wyraz tego wzoru, otrzymamy jako przybliżoną wartość okresu nutacji 6798.4 dni (p. też rozdz. X).

Ponieważ biegun średni z powodu ruchu precesyjnego zakresła dokoła bieguna A_0 koło o promieniu ε_m' w okresie około 257 stuleci juljańskich, więc krzywa, którą zakresła biegun prawdziwy, t. j. wypadkowa jego ruchu precesyjnego i nutacyjnego, jest krzywą falistą.

95. Średnie i prawdziwe współrzędne gwiazd. Zmiana średnich współrzędnych ekliptycznych. W związku ze zmiennem położeniem płaszczyzn ekliptyki i równika ulegać też muszą zmianie współrzędne ekliptyczne i równikowe gwiazd. Współrzędne te zatem tylko wtedy określają położenie gwiazd, gdy oprócz wartości współrzędnych podana jest jeszcze epoka, określająca ekliptykę i równonoc, do których współrzędne gwiazdy są odniesione.

Gdy współrzędne odniesione są do średniego równika i średniej równonocy, nazywają się one *współrzędnymi średnimi*; gdy zaś odniesione są do prawdziwego równika i prawdziwej równonocy, nazywają się *współrzędnymi prawdziwymi*. Współrzędne średnie podlegają zmianom wiekowym, powodowanym przez precesję, współrzędne prawdziwe podlegają zmianom perijodycznym, powodowanym przez nutację.

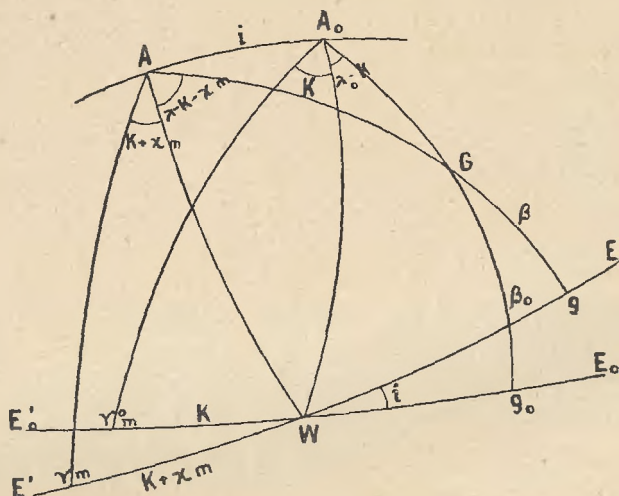
Zajmijmy się najprzód zmianą współrzędnych średnich. W najprostszej postaci zmiany te występują w współrzędnych ekliptycznych, jak to wynika z następujących rozważań. Niech oznacza na ryc. 73 łuk E'_0E_0 ekliptykę epoki 0, A_0 jej biegun, a punkt V_m^0 średnią równonoc epoki 0. Łuk $E'E$ niech będzie

ekliptyką epoki t , punkt A jej biegunem, a punkt γ_m średnią równonocą epoki t . Przecinają się te dwie ekliptyki w punkcie W , i zatem zgodnie z oznaczeniami ustępów 86 i 87 jest

$$\angle E_0 W E = i, \quad \gamma_m^0 W = K, \quad \gamma_m W = K + \chi_m;$$

prócz tego jest także

$$A A_0 = i, \quad \angle \gamma_m^0 A_0 W = K, \quad \angle \gamma_m A W = K + \chi_m.$$



Rycina 73.

Weźmy pod uwagę jakąś gwiazdę G . Kołem szerokości tej gwiazdy w epoce 0 jest $A_0 G$, które ekliptykę epoki 0 przecina w punkcie g_0 ; podobnie w epoce t kołem szerokości tej gwiazdy jest $A G$, które ekliptykę epoki t przecina w punkcie g . Spółrzedne średnie ekliptyczne tej gwiazdy są zatem

1. w epoce 0: $\angle \gamma_m^0 A_0 G = \lambda_0, \quad g_0 G = \beta_0;$
2. w epoce t : $\angle \gamma_m A G = \lambda, \quad g G = \beta;$

Zależność pomiędzy spółrzednemi λ i β z jednej strony, a λ_0 i β_0 z drugiej strony wypływa z trójkąta sferycznego $A A_0 G$.

Ponieważ koło AA_0 jest kołem głównem punktu W, więc $\sphericalangle WAA_0 = \sphericalangle WA_0A = 90^\circ$. Że zaś $\sphericalangle WAG = \lambda - K - \chi_m$, a $\sphericalangle WA_0G = \lambda - K$, więc w trójkącie AA_0G kąty przy A i A_0 oraz jego boki mają wartości następujące:

$$\begin{aligned} \sphericalangle AA_0G &= 90^\circ + (\lambda_0 - K), \quad \sphericalangle A_0AG = 90^\circ - (\lambda - K - \chi_m); \\ AA_0 &= i, \quad A_0G = 90^\circ - \beta_0, \quad AG = 90^\circ - \beta. \end{aligned}$$

Wypływają więc z powyższego trójkąta wzory:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin \beta_0 \cos i - \cos \beta_0 \sin i \sin (\lambda_0 - K), \\ \cos \beta \sin (\lambda - K - \chi_m) &= \sin \beta_0 \sin i + \cos \beta_0 \cos i \sin (\lambda_0 - K), \quad (229) \\ \cos \beta \cos (\lambda - K - \chi_m) &= \cos \beta_0 \cos (\lambda_0 - K). \end{aligned}$$

Wzory powyższe są zupełnie ściśle; podstawiając w nich wartości λ_0 i β_0 , które uważamy za znane, oraz wartości i , K i χ_m , obliczone według wzorów (217) i (222), znajdujemy współrzędne gwiazd λ i β w epoce t .

Wzory te jednakże w tej postaci nie mają zastosowania w praktyce. Nadaje się im postać taką, ażeby od wzorów ścisłych z łatwością można było przejść do przybliżonych, które w praktyce najczęściej wystarczają. Z wzorów (229) z łatwością wyprowadzić można wzory na różnice $\lambda - \lambda_0$ i $\beta - \beta_0$. W tym celu mnożymy drugi z tych wzorów przez $\cos (\lambda_0 - K)$, a trzeci przez $\sin (\lambda_0 - K)$, i odejmujemy drugi od trzeciego. Otrzymujemy w ten sposób

$$\begin{aligned} \cos \beta \sin (\lambda - \lambda_0 - \chi_m) &= \sin \beta_0 \sin i \cos (\lambda_0 - K) - \\ &- \cos \beta_0 \sin (\lambda_0 - K) \cos (\lambda_0 - K) (1 - \cos i); \quad (at) \end{aligned}$$

gdy zaś napiszemy

$$\frac{1 - \cos i}{\sin i} = \tan^2 \frac{i}{2},$$

to wzór (at) przyjmuje postać następującą:

$$\begin{aligned} \cos \beta \sin (\lambda - \lambda_0 - \chi_m) &= \\ &= \cos \beta_0 \cos (\lambda_0 - K) \sin i \left[\tan \beta_0 - \sin (\lambda_0 - K) \tan \frac{i}{2} \right]. \quad (au) \end{aligned}$$

Mnożąc drugi ze wzorów (229) przez $\sin(\lambda_0 - K)$, a trzeci przez $\cos(\lambda_0 - K)$, i dodając, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos(\lambda - \lambda_0 - \chi_m) &= \cos \beta \cos^2(\lambda_0 - K) + \\ &+ \sin \beta_0 \sin i \sin(\lambda_0 - K) + \cos \beta_0 \cos i \sin^2(\lambda_0 - K), \end{aligned}$$

a stąd po łatwych przekształceniach wynika

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos(\lambda - \lambda_0 - K) &= \quad \quad \quad (aw) \\ = \cos \beta_0 \left\{ 1 + \sin(\lambda_0 - K) \sin i \left[\tan \beta_0 - \sin(\lambda_0 - K) \tan \frac{i}{2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Oznaczmy dla krótkości

$$\sin i \left[\tan \beta_0 - \sin(\lambda_0 - K) \tan \frac{i}{2} \right] = p, \quad (230)$$

to jest, zgodnie ze wzorami (au) i (aw),

$$\cos \beta \sin(\lambda - \lambda_0 - \chi_m) = p \cos \beta_0 \cos(\lambda_0 - K), \quad (ax)$$

$$\cos \beta \cos(\lambda - \lambda_0 - \chi_m) = \cos \beta_0 [1 + p \sin(\lambda_0 - K)], \quad (ay)$$

oraz

$$\tan(\lambda - \lambda_0 - \chi_m) = \frac{p \cos(\lambda_0 - K)}{1 + p \sin(\lambda_0 - K)}. \quad (231)$$

Gdy więc na podstawie wartości K i i , obliczonych dla epoki t , znajdziemy wartość p według wzoru (230), to wzór (231) pozwala obliczyć kąt $\lambda - \lambda_0 - \chi_m$, a więc też różnicę $\lambda - \lambda_0$, skoro wartość χ_m jest znana.

Aby znaleźć wzór na różnicę szerokości $\beta - \beta_0$, stosujemy do boków AG i A_0G trójkąta sferycznego AA_0G analogię Napiera, mianowicie pierwszy ze wzorów (7); otrzymujemy w ten sposób

$$\tan \frac{\beta - \beta_0}{2} = - \tan \frac{i}{2} \frac{\sin \left(\frac{\lambda + \lambda_0 - \chi_m - K}{2} \right)}{\cos \frac{\lambda - \lambda_0 - \chi_m}{2}}. \quad (232)$$

Gdy λ zostało już wyznaczone zapomocą wzoru (231), to wszystkie wielkości, stojące po prawej stronie wzoru (232), są znane, a zatem i różnica $\beta - \beta_0$ może być według tego wzoru obliczona.

Wzory (231) i (232) określają różnice $\lambda - \lambda_0$ i $\beta - \beta_0$ z całą ścisłością. Z dowolnym też stopniem dokładności obliczyć można $\lambda - \lambda_0$ za pomocą szeregu, na który rozwinąć można $\lambda - \lambda_0 - \chi_m$. Stosując w tym celu pierwszy wzór (26'') na str. 46, znajdujemy:

$$\lambda = \lambda_0 + \chi_m + \{p \cos(\lambda_0 - K) - \frac{1}{2}p^2 \sin 2(\lambda_0 - K) - \frac{1}{8}p^3 \cos 3(\lambda_0 - K) + \frac{1}{4}p^4 \sin 4(\lambda_0 - K) + \dots\} \operatorname{cosec} 1''. \quad (231')$$

Liczba wyrazów, które w tym szeregu uwzględnić trzeba, zależy od wartości p . Ponieważ kąt i jest zawsze bardzo mały, gdyż nawet przy stuletniej precesji wynosi dopiero 47'', więc p tylko wtedy ma wartość znaczną, gdy β_0 mało się różni od $\pm 90^\circ$, t. j. gdy gwiazda znajduje się w bliskości jednego z biegunów ekliptyki. W tym przypadku w szeregu (231') wypadnie uwzględnić większą liczbę wyrazów. Co się tyczy $\beta - \beta_0$, to, jak wskazuje wzór (232), różnica ta jest zawsze tego samego rzędu co i , a więc zamiast wzoru (232) można zawsze, nie wyłączając przypadku, gdy β_0 jest bliskie $\pm 90^\circ$, stosować wzór przybliżony

$$\beta = \beta_0 + i \frac{\sin \left(K - \frac{\lambda + \lambda_0 - \chi_m}{2} \right)}{\cos \frac{\lambda - \lambda_0 - \chi_m}{2}}. \quad (232')$$

Gdy gwiazda nie leży w bliskości jednego z biegunów ekliptyki, wzory (231) i (232) upraszczają się znacznie. Opuuszczając we wzorze (230) drugi wyraz, który jest rzędu $\sin^2 i$, a więc zawsze bardzo mały, można zazwyczaj przyjąć z dostateczną dokładnością

$$p = i \tan \beta_0 \sin 1'', \quad (230')$$

a we wzorze (231') ograniczyć się do pierwszego wyrazu rozwinięcia. Jest wtedy

$$\lambda = \lambda_0 + \chi_m + i \cos(K - \lambda_0) \tan \beta_0. \quad (231'')$$

Jak wynika z tego wzoru, λ różni się w tym przypadku od $\lambda_0 + \chi_m$ tylko o mały wyraz rzędu i . Przyjmując tę wartość na λ znajdujemy

$$\frac{\lambda + \lambda_0 - \chi_m}{2} = \lambda_0 + \frac{i}{2} \cos(\lambda_0 - K) \tan \beta_0,$$

$$\frac{\lambda - \lambda_0 - \chi_m}{2} = \frac{i}{2} \cos(\lambda_0 - K) \tan \beta_0.$$

Gdy wartości te podstawimy we wzorze (232') i uwzględnimy małą wartość kąta i , to z dostateczną dokładnością można przyjąć wprost

$$\beta = \beta_0 + i \sin(K - \lambda_0). \quad (232'')$$

Przybliżone wzory (231'') i (232'') są dostatecznie dokładne zawsze, gdy β_0 nie jest kątem bliskim $\pm 90^\circ$.

Oczywiście za epokę 0 przyjmujemy zawsze tę epokę, do której odnoszą się dane wartości współrzędnych λ_0 i β_0 . Do obliczenia odpowiadających epokom 0 i t wartości i , K i χ_m służą wzory (217) i (222). Jeżeli t i τ wyrażone są nie w stuleciach juljańskich lub w tysiącletniach zwrotnikowych, jak w wymienionych wzorach, lecz w innych jednostkach czasu, to należy uwzględnić wyjaśnienia ustępu 89 i wzory (201) lub (205).

W przypadkach, gdy wzory przybliżone prowadzą do wyników dostatecznie dokładnych, można unikać obliczania wielkości i , K i χ_m . Należy w tym celu nadać wzorom taką postać, aby przy rachunku można było korzystać z wielkości, dla których obliczone są specjalne tablice.

Celem wyprowadzenia takich wzorów przypuśćmy, że dla dwóch danych epok t i t' wartości λ i λ' wypływają z dostateczną dokładnością ze wzoru (231''), że więc jest

$$\lambda' = \lambda_0 + \chi_m' + i' \cos(\lambda_0 - K') \tan \beta_0,$$

$$\lambda = \lambda_0 + \chi_m + i \cos(\lambda_0 - K) \tan \beta_0;$$

odejmując drugie z tych równań od pierwszego i dzieląc różnicę przez $t' - t$, znajdujemy

$$\frac{\lambda' - \lambda}{t' - t} = \frac{\chi_m' - \chi_m}{t' - t} + \tan \beta_0 \frac{i' \cos(\lambda_0 - K') - i \cos(\lambda_0 - K)}{t' - t}.$$

Tu $\frac{\lambda' - \lambda}{t' - t}$ przedstawia średnią wartość zmiany długości w jednostce czasu. Przechodząc do granicy, otrzymujemy

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\chi_m}{dt} + \tan \beta_0 \frac{d[i \cos(K - \lambda_0)]}{dt}; \quad (az)$$

w podobny sposób ze wzoru (232'') wypływa

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d[i \sin(K - \lambda_0)]}{dt}. \quad (a\acute{z})$$

Wykonując różniczkowanie, otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}[i \cos(K - \lambda_0)] = \frac{di}{dt} \cos(K - \lambda_0) - i \sin(K - \lambda_0) \cdot \frac{dK}{dt}, \quad (ba)$$

$$\frac{d}{dt}[i \sin(K - \lambda_0)] = \frac{di}{dt} \sin(K - \lambda_0) + i \cos(K - \lambda_0) \cdot \frac{dK}{dt};$$

Gdy przez $\frac{di}{dt}$ rozumiemy zmianę kąta i w jednostce czasu, to $i = \frac{di}{dt} \cdot t$, wobec czego wzory (ba) zastąpić możemy przez następujące:

$$\frac{d}{dt}[i \cos(K - \lambda_0)] = \left[\cos(K - \lambda_0) - \sin(K - \lambda_0) \frac{dK}{dt} \cdot t \right] \frac{di}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[i \sin(K - \lambda_0)] = \left[\sin(K - \lambda_0) + \cos(K - \lambda_0) \frac{dK}{dt} \cdot t \right] \frac{di}{dt};$$

a ponieważ $\frac{dK}{dt} \cdot t$ nawet przy znacznych wartościach t jest kątem małym, więc można też przyjąć

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[i \cos(K - \lambda_0)] &= \cos\left(K - \lambda_0 + \frac{dK}{dt} \cdot t\right) \frac{di}{dt}, \\ \frac{d}{dt}[i \sin(K - \lambda_0)] &= \sin\left(K - \lambda_0 + \frac{dK}{dt} \cdot t\right) \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (\text{bb})$$

Dalej ponieważ, jak widzieliśmy, λ różni się od $\lambda_0 + \chi_m$, a β od β_0 tylko o małe wielkości rzędu i , więc możemy we wzorze (bb) przyjąć

$$K - \lambda_0 + \frac{dK}{dt} \cdot t = K + \frac{dK}{dt} \cdot t + \chi_m - \lambda,$$

a we wzorze (az) pisać $\tan \beta$ zamiast $\tan \beta_0$; wreszcie oznaczmy dla krótkości

$$K + \frac{dK}{dt} \cdot t + \chi_m = I, \quad (233)$$

i zastanówmy się nad znaczeniem tak określonego kąta I . Przez K rozumiemy tu długość węzła ekliptyki epoki 0 na ekliptyce epoki 1850.0, liczoną od średniej równonocy epoki 1850.0. Wobec tego $K + \frac{dK}{dt} \cdot t$ jest długością węzła ekliptyki epoki t , liczoną na ekliptyce epoki 1850.0. Gdy więc przez χ_m rozumieć należy precesję ogólną od epoki 1850.0 do epoki t , to $K + \frac{dK}{dt} \cdot t + \chi_m = I$ jest odległością średniej równonocy epoki t od węzła ekliptyki epoki t na ekliptyce epoki 1850.0. Innemi słowy kąt I jest to długość węzła ekliptyki epoki 1850.0 na ekliptyce epoki t , liczona od średniej równonocy epoki t .

Wprowadzając I , mamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[i \cos(K - \lambda_0)] &= \cos(I - \lambda) \frac{di}{dt}, \\ \frac{d}{dt}[i \sin(K - \lambda_0)] &= \sin(I - \lambda) \frac{di}{dt}, \end{aligned} \quad (\text{bc})$$

wskutek czego wzory (az) i (aź) przyjmują postać następującą:

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{d\chi_m}{dt} + \tan \beta \cos(I - \lambda) \frac{di}{dt}, \\ \frac{d\beta}{dt} &= \sin(I - \lambda) \frac{di}{dt}.\end{aligned}\tag{bd}$$

Gdy wykonamy całkowanie w granicach od 0 do t , otrzymamy:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \int_0^t \left(\frac{d\chi_m}{dt} \right) dt + \int_0^t \left[\tan \beta \cos(I - \lambda) \frac{di}{dt} \right] dt, \\ \beta &= \beta_0 + \int_0^t \left[\sin(I - \lambda) \frac{di}{dt} \right] dt.\end{aligned}\tag{be}$$

Widzimy, że zadanie znalezienia wartości λ i β sprowadza się do obliczenia wartości całek określonych, występujących we wzorach (be). Zbytecznem jest tu jednakże całkowanie w postaci ścisłej, gdyż chodzi tylko o otrzymanie liczbowych wartości tych całek z dokładnością dostatecznie przybliżoną. Ten ostatni cel osiągnąć można w sposób następujący.

Oznaczmy na przykład

$$\int \left(\frac{d\chi_m}{dt} \right) dt = f(t),$$

to jest oczywiście

$$\int_0^t \left(\frac{d\chi_m}{dt} \right) dt = f(t) - f(0).$$

Pisząc $t = \frac{t}{2} + \frac{t}{2}$ i $0 = \frac{t}{2} - \frac{t}{2}$, możemy $f(t)$ i $f(0)$ rozwinąć na następujące szeregi:

$$f(t) = f\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{t}{2}\right) + f'\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \frac{t}{2} + \frac{1}{2!} f''\left(\frac{t}{2}\right) \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \\ + \frac{1}{3!} f'''\left(\frac{t}{2}\right) \left(\frac{t}{2}\right)^3 + \dots$$

$$f(0) = f\left(\frac{t}{2} - \frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{t}{2}\right) - f'\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \frac{t}{2} + \frac{1}{2!} f''\left(\frac{t}{2}\right) \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \\ - \frac{1}{3!} f'''\left(\frac{t}{2}\right) \left(\frac{t}{2}\right)^3 + \dots$$

Przez odejmowanie znajdujemy

$$f(t) - f(0) = f'\left(\frac{t}{2}\right) \cdot t + \frac{1}{24} f'''\left(\frac{t}{2}\right) t^3 + \dots,$$

a gdy pominąć można wyrazy trzeciego i wyższych rzędów, to z dokładnością do wyrazów drugiego rzędu jest wprost

$$f(t) - f(0) = f'\left(\frac{t}{2}\right) \cdot t.$$

Stosując ten wynik do całek wzorów (be), otrzymujemy wzory

$$\lambda = \lambda_0 + \left[\frac{d\chi_m}{dt} + \tan \beta \cos (I - \lambda) \frac{d\lambda}{dt} \right]_{\frac{t}{2}} \cdot t, \quad (234)$$

$$\beta = \beta_0 + \left[\sin (I - \lambda) \frac{d\lambda}{dt} \right]_{\frac{t}{2}} \cdot t,$$

w których $\frac{t}{2}$ stojące u dołu za nawiasem, oznacza, że wszystkie wielkości, objęte nawiasem, mają być obliczone dla epoki $\frac{t}{2}$. Gdyby więc np. trzeba było z ekliptyki i średniej równonocy epoki t przejść na ekliptykę i średnią równonoc epoki t' , to należałoby obliczyć wartości nawiasów dla epoki $\frac{t+t'}{2}$ i następnie pomnożyć je przez $(t' - t)$.

Obierając za jednostkę czasu rok zwrotnikowy i wartości stałych dla epoki 1850.0, przyjęte przez Andoyera, otrzymamy, kładąc we wzorach (217') i (222') $t=0$ i $\tau=t$, następujące wartości na K , i i χ_m w epoce 1850 $+t$:

$$\begin{aligned} K &= 173^{\circ} 29' 40'' - 8''.691 t + 0''.000003 t^2, \\ i &= 0''.47141 t - 0''.0000034 t^2, \\ \chi_m &= 50''.24530 t + 0''.00011113 t^2; \end{aligned}$$

oraz wartości zmian rocznych tych kątów:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= -8''.691 + 0''.000006 t, \\ \frac{di}{dt} &= 0''.47141 - 0''.0000068 t, \\ \frac{d\chi_m}{dt} &= 50''.24530 + 0''.0002226 t. \end{aligned}$$

Kładąc zaś te same wartości na t i τ we wzorze (233), otrzymujemy, że w epoce 1850.0 $+t$

$$I = 173^{\circ} 29' 40'' + 32''.863 t.$$

Wartości $\frac{d\chi_m}{dt}$, $\log \frac{di}{dt}$ i I zawarte są w tablicy VII dla epok od r. 1600.0 do 2000.0 w odstępach 10-letnich. Gdy więc chcemy przejść z jakiejś epoki t na t' , to należy zużytkować przy rachunku wartości K , i i χ_m dla epoki $\frac{t+t'}{2}$. Wartości te otrzymujemy z tablicy wyżej wymienionej, a następnie stosujemy wzory (234). Co się tyczy wartości β i λ , występujących w tych wzorach, to w pierwszym przybliżeniu, o ileby skąd inąd przybliżone wartości na β i λ nie były znane, należy zastosować β_0 i λ_0 , a w drugim przybliżone wartości $\frac{\beta_0 + (\beta)}{2}$ i $\frac{\lambda_0 + (\lambda)}{2}$, gdzie (β) i (λ) oznaczają wartości β i λ , uzyskane w pierwszym przybliżeniu.

96. Przykłady do ustępu 95.

Przykład 1. W epoce 1700.0 spólrzędne ekliptyczne gwiazdy były:

$$\lambda_0 = 215^\circ, \quad \beta_0 = 89^\circ 20';$$

znaleźć wartości spólrzędnych λ i β w epoce 1950.0.

Wobec tego, że β_0 ma wartość bliską 90° , stosujemy wzory (231) i (232). Celem ich zastosowania przedewszystkiem obliczamy wartości K , i i χ_m według wzorów (217') i (222'). Kładąc w nich

$$t = \frac{1700 - 1850}{1000} = -0.15, \quad \tau = \frac{1950 - 1700}{1000} = 0.25,$$

znajdujemy:

$$\begin{aligned} K &= 173^\circ 29' 40'' - 32863'' \times 0.15 + 0.0225 \times 56'' - \\ &\quad - (8691'' - 0.15 \times 55'') 0.25 + \dots = \\ &= 173^\circ 29' 40'' - 1^\circ 22' 9'' + 1'' - 36' 11'' = 171^\circ 31' 21'', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i &= 471''.41 + 6''.80 \times 0.15 + 0''.57 \times 0.0225 0.25 + \\ &\quad + (-3''.40 - 0''.57 \times 0.15) 0.0625 = \\ &= (471''.41 + 1''.02 + 0''.01) 0.25 - 0''.21 = 117''.90, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_m &= (50245''.30 - 222''.27 \times 0.15 + 0''.26 \times 0.0225) 0.25 + \\ &\quad + (111''.13 - 0''.261 \times 0.15) 0.0625 = \\ &= (50245''.30 - 33''.34 + 0''.01) 0.25 + 6''.94 = \\ &= 12559''.93 = 3^\circ 29' 19''.93. \end{aligned}$$

Teraz obliczamy p według wzoru (230); ograniczamy się do pierwszego wyrazu tego wzoru, ponieważ drugi jest znikomy. Mając p , znajdujemy kolejne wyrazy szeregu (231'), które oznaczamy przez W_x .

i	2.07151	p	8.81622
$\sin 1''$	4.68557	$\cos (\lambda_0 - K)$	9.86068
$\text{tang } \beta_0$	2.05914	$\text{cosec } 1''$	5.31443
p	8.81622	W_1	3.99133
		$W_1 =$	9802".4

$\lambda_0 - K =$	43° 29'	p^2	7.63244
$2 (\lambda_0 - K) =$	86° 58'	$\frac{1}{2}$	9.69897
$3 (\lambda_0 - K) =$	130° 27'	$\sin 2 (\lambda_0 - K)$	9.99939
$4 (\lambda_0 - K) =$	173° 56'	W_2	2.64623 n
		$W_2 =$	- 442".8

	p^3	6.44866
	$\frac{1}{3}$	9.52288
$\cos 3 (\lambda_0 - K)$		9.81210 n
	W_3	1.09807
	W_3	12".5

	p^4	5.26488
	$\frac{1}{4}$	9.39794
$\sin 4 (\lambda_0 - K)$		9.02402
	W_4	9.00127
	$W_4 =$	0".1.

Jest zatem

$$\lambda = 215^\circ + 12559''.9 + 9802''.4 - 442.8 + 12''.5 + 0''.1 = 21932''.1 = \\ = 215^\circ + 6^\circ 5' 32''.1 = \underline{221^\circ 5' 32''.1}.$$

Wyznaczywszy λ , znajdujemy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\lambda + \lambda_0 - \chi_m) &= 216^\circ 18' 6''.1 \\ K - \frac{1}{2} (\lambda + \lambda_0 - \chi_m) &= - 44^\circ 46' 45'' \\ \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0 - \chi_m) &= 1^\circ 18' 6''.1 \\ \sin [K - \frac{1}{2} (\lambda + \lambda_0 - \chi_m)] &9.84781 \, n \\ \sec \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0 - \chi_m) &0.00011 \\ i &2.07151 \\ \beta - \beta_0 &1.91943 \, n \\ \beta - \beta_0 &= - 83''.1 = - 1' 23''.1. \end{aligned}$$

$$\beta = 89^\circ 30' - 1' 23''.1 = \underline{89^\circ 28' 36''.9}.$$

Przykład 2. Niechaj będzie $\beta_0 = 25^\circ$, a wszystkie inne dane te same co w poprzednim przykładzie. Znaleźć β i λ .

Wobec tego, że β_0 nie jest bliskie 90° , możemy zastosować wzory przybliżone (231'') i (232''), lub też wzory (234).

a) Obliczenie według wzorów (231'') i (232'').

Wartości K , i i χ_m dla epoki t zostały obliczone w poprzednim przykładzie, możemy je więc tu wprost zastosować.

$$\left\{ \begin{array}{llll} i & 2.07151 & \sin(K - \lambda_0) & 9.83768 n \\ \cos(K - \lambda_0) & 9.86068 & i \sin(K - \lambda_0) & 1.90919 n \\ \text{tang } \beta_0 & 9.66867 & i \sin(K - \lambda_0) & = -81''.1 = -1' 21''.1 \\ \Pi & 1.60066 & & \\ \Pi & = 39''.9 & & \end{array} \right.$$

$$\lambda = 215^\circ + 3^\circ 29' 19''.9 + 39''.9 = \underline{218^\circ 29' 59''.8},$$

$$\beta = 25^\circ - 1' 21''.1 = \underline{24^\circ 58' 38''.9}.$$

b) Obliczenie według wzorów (234).

$$t = 1950.0 - 1700.0 = 250, \quad \frac{1}{2}(1700.0 + 1950.0) = 1825.0.$$

Dla epoki 1825.0 otrzymujemy z tablicy VII:

$$\frac{d\chi_m}{dt} = 50''.2397, \quad \log \frac{di}{dt} = 9.67355, \quad I = 173^\circ 15'.8,$$

i w pierwszym przybliżeniu przyjmujemy

$$\beta = \beta_0, \quad \lambda = \lambda_0, \quad I - \lambda_0 = 173^\circ 15'.8 - 215^\circ = -41^\circ 44'.2.$$

Rachunek jest następujący:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{tang } \beta_0 & 9.66867 & \frac{d\chi_m}{dt} = 50''.2397 \\ \cos(I - \lambda_0) & 9.87286 & \\ \frac{di}{dt} & 9.67355 & \Pi + \frac{d\chi_m}{dt} = 50''.4038 \\ \Pi & 9.11508 & \\ \Pi & = 0''.1641 & \left(\Pi + \frac{d\chi_m}{dt} \right) t = 12600''.9 = 3^\circ 30' 0''.9. \end{array} \right.$$

Dodając połowę otrzymanej różnicy do λ_0 , znajdujemy dla epoki 1825.0 wartość przybliżoną $\lambda_{\frac{t}{2}} = 216^\circ 45'.0$.

Z tą wartością $\lambda_{\frac{t}{2}}$ obliczamy drugie przybliżenie. Przede wszystkim znajdujemy β , ponieważ we wzorze na β po prawej stronie przybliżona wartość na β nie jest potrzebna; gdy zaś wyznaczymy β , to obliczymy następnie λ , przyjmując na λ i β wartości $\lambda_{\frac{t}{2}}$ i $\beta_{\frac{t}{2}}$.

$$\begin{array}{rcl}
 I - \lambda_{\frac{t}{2}} & = & -43^\circ 29'.2 \\
 \sin(I - \lambda_{\frac{t}{2}}) & & 9.83771 \, n \\
 \frac{d\lambda}{dt} & & 9.67355 \\
 t & & 2.39794 \\
 \beta - \beta_0 & & 1.90920 \, n \\
 \beta - \beta_0 & = & -81''.1 = -1' 21''.1 \\
 \beta & = & 24^\circ 58' 38''.9. \\
 \beta_{\frac{t}{2}} & = & 24^\circ 59'.3 \\
 \cos(I - \lambda_{\frac{t}{2}}) & & 9.86066 \\
 \frac{d\beta}{dt} & & 9.67355 \\
 \tan \beta_{\frac{t}{2}} & & 9.66844 \\
 \Pi & & 9.20265 \\
 \Pi & = & 0''.1595 \\
 \Pi + \frac{d\lambda_m}{dt} & = & 50''.3992 \\
 50''.3992 \cdot t & = & 12599''.8 = 3^\circ 29' 59''.8 \\
 \lambda & = & 218^\circ 29' 59''.8.
 \end{array}$$

Jak widzimy, wyniki, otrzymane dwoma różnemi sposobami, są jednakowe, pomimo że odstęp czasu, wynoszący 250 lat, jest znaczny.

97. Zmiana średnich spółrzędnych równikowych. Rozwiążmy teraz zadanie następujące. Dane są średnie spółrzędne równikowe gwiazdy w epoce 0: α_0 i δ_0 ; znaleźć średnie spółrzędne równikowe tejże gwiazdy w epoce t : α i δ .

Rozwiązanie zadania wynika z ryciny 74. Łuki $E'_0 E_0$ i $E' E$ oznaczają na niej odpowiednio ekliptykę epoki 0 i ekliptykę epoki t . Podobnie łuki $R'_0 R_0$ i $R' R$ oznaczają odpowiednio równiki epok 0 i t ; przecinają się te dwa równiki w punkcie M , tworząc ze sobą kąt θ . Równonocą średnią epoki 0 jest punkt \mathcal{V}_m^0 , a równonocą średnią epoki t jest punkt \mathcal{V}_m .

Niechaj G oznacza gwiazdę, której koła godzinne w epo-

kach 0 i t przecinają równiki, należące do tych samych epok, odpowiednio w punktach g_0 i g . Według zadania jest zatem

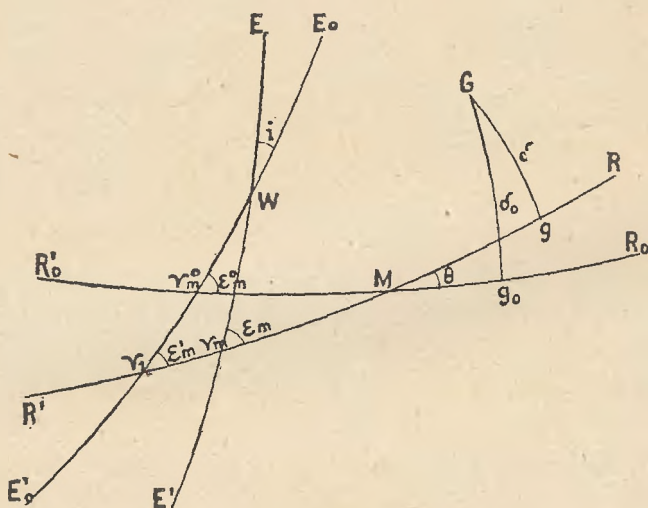
$$g_0 G = \delta_0, \quad \gamma_m^0 g = \alpha_0,$$

$$g G = \delta, \quad \gamma_m g = \alpha,$$

Ponieważ ε_m^0 mało różni się od ε_m' , więc łuki $\gamma_m^0 M$ i $\gamma_1 M$ mało różnią się od 90° . Gdy więc położymy

$$\gamma_m^0 M = 90^\circ - \zeta_0, \quad \gamma_m M = 90^\circ + z,$$

to ζ_0 i z są małemi kątami.



Rycina 74.

Wartości kątów ζ_0 , z i θ wypływają z trójkąta sferycznego $\gamma_m^0 \gamma_1 M$, w którym boki mają wartości

$$\gamma_m^0 M = 90^\circ - \zeta_0, \quad \gamma_1 M = 90^\circ + z + \mu, \quad \gamma_m^0 \gamma_1 = \psi_m,$$

a przeciwległe im kąty wartości:

$$\sphericalangle \gamma_m^0 \gamma_1 M = \varepsilon_m', \quad \sphericalangle \gamma_1 \gamma_m^0 M = 180^\circ - \varepsilon_m^0, \quad \sphericalangle \gamma_m^0 M \gamma_1 = \theta.$$

Stosując wzory Delambre'a (6), znajdujemy związki następujące:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\mu + z - \zeta_0}{2} &= \sin \frac{\psi_m}{2} \sin \frac{\varepsilon_m^0 + \varepsilon_m'}{2}, \\ -\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\mu + z - \zeta_0}{2} &= \cos \frac{\psi_m}{2} \sin \frac{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_m'}{2}, \\ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\mu + z + \zeta_0}{2} &= \sin \frac{\psi_m}{2} \cos \frac{\varepsilon_m^0 + \varepsilon_m'}{2}, \\ \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\mu + z + \zeta_0}{2} &= \cos \frac{\psi_m}{2} \cos \frac{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_m'}{2};\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} \frac{\mu + z - \zeta_0}{2} &= -\operatorname{cotg} \frac{\psi_m}{2} \frac{\sin \frac{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_m'}{2}}{\sin \frac{\varepsilon_m^0 + \varepsilon_m'}{2}}, \\ \operatorname{tang} \frac{\mu + z + \zeta_0}{2} &= \operatorname{tang} \frac{\psi_m}{2} \frac{\cos \frac{\varepsilon_m^0 + \varepsilon_m'}{2}}{\cos \frac{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_m'}{2}}, \\ \sin \frac{\theta}{2} &= \sin \frac{\psi_m}{2} \frac{\sin \frac{\varepsilon_m^0 + \varepsilon_m'}{2}}{\cos \frac{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_m'}{2}}.\end{aligned}\tag{235}$$

Pierwsze dwa ze wzorów (235) określają wartości kątów z i ζ_0 , trzeci zaś wartość kąta θ . Ponieważ jednakże ε_m^0 od ε_m' różni się tylko o wyrazy wyższego rzędu, niż pierwszy, więc zawsze można przyjąć z dostatecznem przybliżeniem

$$\sin \frac{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_m'}{2} = \frac{1}{2} (\varepsilon_m^0 - \varepsilon_m') \sin 1'', \quad \cos \frac{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_m'}{2} = 1,$$

$$\sin \frac{\varepsilon_m^0 + \varepsilon_m'}{2} = \sin \varepsilon_m^0, \quad \cos \frac{\varepsilon_m^0 + \varepsilon_m'}{2} = \cos \varepsilon_m^0,$$

i zatem zamiast wzorów (235) stosować wzory uproszczone:

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} \frac{\mu + z - \zeta_0}{2} &= -\frac{1}{2} \frac{\cotg \frac{\psi_m}{2}}{\sin \varepsilon_m^0} (\varepsilon_m^0 - \varepsilon_m') \sin 1'', \\ \operatorname{tang} \frac{\mu + z + \zeta_0}{2} &= \operatorname{tang} \frac{\psi_m}{2} \cos \varepsilon_m^0, \\ \sin \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin \frac{\psi_m}{2} \sin \varepsilon_m^0}{\cos \frac{\mu + z - \zeta_0}{2}}.\end{aligned}\quad (235')$$

Gdy zaś odstęp czasu $t - t_0$ nie jest bardzo wielki, co w praktyce jest przypadkiem najczęstszym, to wystarczają jeszcze bardziej uproszczone wzory następujące:

$$\begin{aligned}\mu + z - \zeta_0 &= -2 \frac{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_m'}{\psi_m \sin \varepsilon_m^0 \sin 1''}, \\ \mu + z + \zeta_0 &= \psi_m \cos \varepsilon_m^0, \\ \theta &= \psi_m \sin \varepsilon_m^0.\end{aligned}\quad (235'')$$

Podstawiając tu wartości na $\mu^{(t)}$, $\psi_m^{(t)}$ i $(\varepsilon_m')^{(t)}$ według wzorów (218') (219') i (221'), otrzymamy następujące wzory ogólne:

$$(z + \zeta_0)^{(t)} = (46071''.09 + 279''.44 t + 0''.12 t^2) \tau + (139''.72 + 0''.12 t) \tau^2 + 36''.32 \tau^3, \quad (\text{bf})$$

$$(z - \zeta_0)^{(t)} = (79''.24 + 0''.66 t) \tau^2 + 0''.33 \tau^3; \quad (\text{bg})$$

oraz

$$z^{(t)} = (23035''.55 + 139''.72 t + 0''.06 t^2) \tau + (109''.48 + 0''.39 t) \tau^2 + 18''.33 \tau^3, \quad (236)$$

$$\zeta_0^{(t)} = (23035''.55 + 139''.72 t + 0''.06 t^2) \tau + (30''.24 - 0''.27 t) \tau^2 + 18''.00 \tau^3, \quad (237)$$

$$\theta^{(t)} = (20051''.12 - 85''.39 t - 0''.37 t^2) \tau + (-42''.65 - 0''.37 t) \tau^2 - 41''.80 \tau^3. \quad (238)$$

Celem znalezienia wartości α i δ postępujemy zupełnie podobnie, jak w ustępie 95, gdy należało znaleźć współrzędne ekliptyczne gwiazdy dla epoki t . Oznaczmy tu dla krótkości

$$\alpha_0 + \zeta_0 = a_0, \quad \alpha - a_0 - z = \Delta a, \quad (239)$$

to wzory ściśle mają postać następującą:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \delta_0 \cos \theta + \cos \delta_0 \sin \theta \cos a_0, \\ \cos \delta \cos(a_0 + \Delta a) &= -\sin \delta_0 \sin \theta + \cos \delta_0 \cos \theta \cos a_0, \\ \cos \delta \sin(a_0 + \Delta a) &= \cos \delta_0 \sin a_0. \end{aligned} \quad (240)$$

Gdy zaś oznaczymy

$$\sin \theta \left(\tan \delta_0 + \cos a_0 \tan \frac{\theta}{2} \right) = q, \quad (241)$$

to jest też

$$\tan \Delta a = \frac{q \sin a_0}{1 - q \cos a_0}, \quad (242)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{1}{2}(\delta - \delta_0) &= \tan \frac{\theta}{2} \cos \left(a_0 + \frac{\Delta a}{2} \right) \sec \frac{\Delta a}{2}, \\ \alpha &= a_0 + z + \Delta a. \end{aligned} \right\} \quad (243)$$

Rozwijając Δa na szereg według trzeciego ze wzorów (26'') na str. 46, otrzymamy

$$\Delta a \sin 1'' = q \sin a_0 + \frac{1}{2} q^2 \sin 2 a_0 + \frac{1}{3} q^3 \sin 3 a_0 + \dots \quad (242')$$

Wzory ściśle (242) i (242') muszą być stosowane tylko wówczas, gdy $\delta_0 > |80^\circ|$; zresztą wzór (242') jest mało praktyczny, gdyż jest powoli zbieżny, szczególnie wtedy, gdy odstęp czasu jest znaczny. Zastosowanie powyższych wzorów ułatwiają specjalne tablice, corocznie ogłaszane w B. A. J., w których podawane są wartości ζ_0 , z i θ dla przejścia z jakiegokolwiek epoki, począwszy od 1755.0, na epokę rocznika.

Gdy odstęp czasu jest nie bardzo wielki i $\delta_0 < |80^\circ|$, wystarczają wzory przybliżone. Można wtedy przyjąć

$$q = \theta \tan \delta_0 \sin 1'', \quad (241')$$

oraz

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + z + \zeta_0 + \theta \tan \delta_0 \sin (\alpha_0 + \zeta_0), \\ \delta &= \delta_0 + \theta \cos (\alpha_0 + \zeta_0). \end{aligned} \quad (243')$$

Wzory (243') w praktyce jednakże bardzo rzadko bywają stosowane; najczęściej, mianowicie, gdy wartości spółrzędnych dla epoki $\frac{t}{2}$ w przybliżeniu są znane, stosuje się, zgodnie z wyjaśnieniami ustępu 95, wzór

$$f(t) = f(0) + f' \left(\frac{t}{2} \right) \cdot t,$$

pomijając zatem wyrazy, począwszy od rzędu trzeciego.

Gdy zaś nie znamy wartości przybliżonych spółrzędnych dla epoki $\frac{t}{2}$, lub gdy wyrazów rzędu trzeciego pominąć nie można, albo też wreszcie gdy wchodzą w rachubę względy praktyczne, o których nieco dalej wspomnimy, to korzystnie jest stosować wprost szereg potęgowy

$$f(t) = f(0) + f'(0) \cdot t + \frac{1}{2} f''(0) \cdot t^2 + \frac{1}{6} f'''(0) \cdot t^3 + \dots$$

Obliczamy zatem albo według wzorów

$$\alpha = \alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_{\frac{t}{2}} \cdot t, \quad \delta = \delta_0 + \left(\frac{d\delta}{dt} \right)_{\frac{t}{2}} \cdot t; \quad (bh)$$

albo też według wzorów

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_0 \cdot t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2} \right)_0 \cdot t^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3\alpha}{dt^3} \right)_0 \cdot t^3 + \dots, \\ \delta &= \delta_0 + \left(\frac{d\delta}{dt} \right)_0 \cdot t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\delta}{dt^2} \right)_0 \cdot t^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3\delta}{dt^3} \right)_0 \cdot t^3 + \dots \end{aligned} \quad (bi)$$

Celem zastosowania wzorów (bh) tworzymy pierwsze pochodne $\frac{d\alpha}{dt}$ i $\frac{d\delta}{dt}$, przyjmując na α i δ wartości według wzorów (243'). Wartości tych pochodnych są następujące:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d(\varepsilon + \zeta_0)}{dt} + \tan \delta_0 \left[\frac{d\theta}{dt} \sin(\alpha_0 + \zeta_0) + \theta \cos(\alpha_0 + \zeta_0) \frac{d\zeta_0}{dt} \right], \quad (bj)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cos(\alpha_0 + \zeta_0) - \theta \sin(\alpha_0 + \zeta_0) \frac{d\zeta_0}{dt}.$$

Obierzmy za jednostkę czasu rok zwrotnikowy i oznaczmy przy wyborze tej jednostki

$$\frac{d(\varepsilon + \zeta_0)}{dt} = m, \quad \frac{d\theta}{dt} = n. \quad (244)$$

Wartości liczbowe pochodnych m i n wynikają ze wzorów (bf) i (238). Gdy t liczymy od epoki 1850.0, to wartości na m i n są następujące:

$$m = 46''.07109 + 0''.00027944 t = 3^s.07141 + 0^s.00001863 t, \quad (244')$$

$$n = 20''.05112 - 0''.00008530 t = 1^s.33674 - 0^s.00000569 t.$$

Ponieważ wzory (bj) ważne są dla jakiejkolwiek epoki 0, więc są ważne też dla $\tau = 0$. Wtedy jest $\theta = 0$, $\zeta_0 = 0$, a wartości współrzędnych gwiazdy są α i δ . Podstawiając te wartości we wzorach (bj) i uwzględniając wzory (244), znajdujemy

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \sin \alpha \tan \delta, \quad \frac{d\delta}{dt} = n \cos \alpha, \quad (245)$$

oraz zgodnie ze wzorami (bh)

$$\alpha = \alpha_0 + (m + n \sin \alpha \tan \delta) \frac{t}{2} \cdot t, \quad (246)$$

$$\delta = \delta_0 + (n \cos \alpha) \frac{t}{2} \cdot t.$$

Aby zastosować wzory (bi), musimy utworzyć pochodne wyższych rzędów współrzędnych względem czasu. Wyrażenia tych pochodnych po łatwych redukcjach są następujące:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= \frac{dm}{dt} + \frac{1}{2} n^2 \sin 2\alpha + \left(\frac{dn}{dt} \sin \alpha + mn \cos \alpha \right) \tan \delta + \\ &\quad + n^2 \sin 2\alpha \tan^2 \delta, \\ \frac{d^2 \delta}{dt^2} &= \frac{dn}{dt} \cos \alpha - mn \sin \alpha - n^2 \sin \alpha \tan \delta; \end{aligned} \right\} (247)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3 \alpha}{dt^3} &= \frac{d^2 m}{dt^2} + \frac{3}{2} n \frac{dn}{dt} \sin 2\alpha + mn^2 \cos 2\alpha + m(n \cos \alpha)^2 + \\ &\quad + \left(n^3 \sin 3\alpha + 2n^3 \sin \alpha - 2n^3 \sin^3 \alpha + 2m \frac{dn}{dt} \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2 n}{dt^2} \sin \alpha + n \frac{dm}{dt} \cos \alpha - m^2 n \sin \alpha \right) \tan \delta + \\ &\quad + \left(3n \frac{dn}{dt} \sin 2\alpha + 3mn^3 \cos 2\alpha \right) \tan^2 \delta + \\ &\quad + 2n^3 \sin 3\alpha \tan^3 \delta, \end{aligned} \right\} (248)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3 \delta}{dt^3} &= \frac{d^2 n}{dt^2} \cos \alpha - 2m \frac{dn}{dt} \sin \alpha - n \frac{dm}{dt} \sin \alpha - \\ &\quad - m^2 n \cos \alpha - n^3 \cos \alpha + n^3 \cos^3 \alpha - \\ &\quad - 3 \left(n \frac{dn}{dt} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} mn^2 \sin 2\alpha \right) \tan \delta - \\ &\quad - 3(n^3 \cos \alpha - n^3 \cos^3 \alpha) \tan^2 \delta. \end{aligned} \right\}$$

Oznaczmy jeszcze

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_0 &= P_\alpha, & \left(\frac{d\delta}{dt} \right)_0 &= P_\delta, \\ 100 \left(\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right)_0 &= V_\alpha, & 100 \left(\frac{d^2 \delta}{dt^2} \right)_0 &= V_\delta, \\ \frac{100^3}{6} \left(\frac{d^3 \alpha}{dt^3} \right)_0 &= C_\alpha, & \frac{100^3}{6} \left(\frac{d^3 \delta}{dt^3} \right)_0 &= C_\delta, \end{aligned} \quad (249)$$

to wzory (bi) otrzymują postać

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 + P_\alpha t + \frac{1}{2} V_\alpha \cdot \frac{t^2}{100} + C_\alpha \left(\frac{t}{100} \right)^3, \\ \delta &= \delta_0 + P_\delta t + \frac{1}{2} V_\delta \cdot \frac{t^2}{100} + C_\delta \left(\frac{t}{100} \right)^3.\end{aligned}\tag{250}$$

Spółczynniki P_α i P_δ stanowią wartość *precesji rocznej* odpowiednio we wznoszeniu prostem i zboczeniu w epoce 0, współczynniki V_α i V_δ noszą nazwę *warjacji wiekowej* (*variatio saecularis*), wreszcie C_α i C_δ są to współczynniki *wyrazów trzecich* precesji.

W katalogach gwiazd podawane są, obok współrzędnych gwiazdy dla epoki katalogu, także wartości współczynników P , V i C dla tejże epoki. Obliczenie więc współrzędnych gwiazdy dla dowolnej epoki t według wzorów (250) nie przedstawia żadnych trudności. Główny trud obliczenia wykonany być musi przy opracowaniu katalogu, który ułatwiony jest przez specjalne do tego celu służące tablice. Poświęćmy tym tablicom kilka słów.

W wyrażeniach precesji rocznej występują iloczyny $n \cos \alpha$ i $n \sin \alpha$, które dla danego n mogą być zestawione w tablicach z argumentem α . Pozatem P_α i P_δ zmieniają się nieznacznie wraz z epoką, gdyż od epoki zależą wartości m i n . Celem uwzględnienia tych zmian w tablicach na $n \sin \alpha$ i $n \cos \alpha$ obok wartości tych iloczynów podawane są zmiany, jakim one ulegają z powodu zmian n , na przykład w odstępach stuletnich. Co się tyczy wartości m i n to można je obliczyć według wzorów (244'), lub też wypisać z tablicy VII, w której są podane dla epok od r. 1600 do r. 2100.

Celem ułożenia tablic, ułatwiających obliczenie warjacji wiekowej, połączmy

$$100 \left(\frac{dm}{dt} + \frac{1}{2} n^2 \sin 2\alpha \right) = A,$$

$$100 \left(\frac{dn}{dt} \sin \alpha + mn \cos \alpha \right) = B,$$

$$100 n^2 \sin 2 \alpha = C,$$

$$100 \left(\frac{dn}{dt} \cos \alpha - m n \sin \alpha \right) = A',$$

$$- 100 n^2 \sin^2 \alpha = B'.$$

Gdy dla wielkości A , B , C , A' i B' obliczone są tablice z argumentem α , to z ich pomocą łatwo obliczyć dla danego α wartości warjacji wiekowej według wzorów

$$\begin{aligned} V_{\alpha} &= A + B \tan \delta + C \tan^2 \delta, \\ V_{\delta} &= A' + B' \tan \delta. \end{aligned} \tag{bk}$$

W podobny sposób można obliczyć współczynniki wyrazów trzecich precesji za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} C_{\alpha} &= P + P_1 \tan \delta + P_2 \tan^2 \delta + P_3 \tan^3 \delta, \\ C_{\delta} &= Q + Q_1 \tan \delta + Q_2 \tan^2 \delta, \end{aligned}$$

w których znaczenie współczynników jest następujące:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \left(\frac{d^2 m}{dt^2} + \frac{3}{2} n \frac{dn}{dt} \sin \alpha + m n^2 \cos 2 \alpha + m n^3 \cos^3 \alpha \right) &= P, \\ \frac{1}{6} \left(n^3 \sin 3 \alpha + 2 n^3 \sin \alpha - 2 n^3 \sin^3 \alpha + 2 m \frac{dn}{dt} \cos \alpha + \frac{d^2 n}{dt^2} \sin \alpha + \right. \\ &\quad \left. + n \frac{dm}{dt} \cos \alpha - m^2 n \sin \alpha \right) = P_1, \\ \frac{1}{2} \left(n \frac{dn}{dt} \sin 2 \alpha + m n^2 \cos \alpha \right) &= P_2, \\ \frac{1}{3} n^3 \sin 3 \alpha &= P_3, \end{aligned} \tag{bl}$$

$$\frac{1}{6} \left[\left(\frac{d^2 n}{dt^2} - m^2 n - n^3 \right) \cos \alpha - \left(2m \frac{dn}{dt} + n \frac{dm}{dt} \right) \sin \alpha + n^3 \sin^3 \alpha \right] = Q,$$

$$- \frac{1}{2} \left(n \frac{dn}{dt} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} m n^2 \sin 2\alpha \right) = Q_1,$$

$$\frac{1}{2} (n^3 \cos \alpha - n^3 \cos^3 \alpha) = Q_2.$$

Przy obliczaniu tablic współczynników wzorów (bk) i (bl) oczywiście ułatwienie duże stanowią gotowe tablice iloczynów $n \cos \alpha$ i $n \sin \alpha$.

Wymieniamy tu kilka tablic, służących do obliczania poszczególnych wyrazów precesji.

1. *Downing. Precessional tables.* Edinbourg 1899.

2. *Tafeln zur Berechnung der Präzession.* Strassburg, Annalen. Band II, Annex C.

3. *Ausführliche Tafeln zur Berechnung von A, B C etc.* Veröffentlichungen des Rechen-Instituts, Heft 22.

Gdy chodzi tylko o przybliżone wartości precesji, które zazwyczaj też wystarczają wówczas, gdy celem zastosowania wzorów (246) potrzebna jest znajomość przybliżonych wartości współrzędnych gwiazdy dla epoki $\frac{t}{2}$, można przyjąć jako precesję roczną w α i δ wartości, określone przez wzory (245). Przyjmując wartości m i n , odpowiadające pewnej danej epoce, można z łatwością dla $\frac{d\alpha}{dt}$ i $\frac{d\delta}{dt}$ obliczyć tablice, z których otrzymuje się

wartości $\frac{d\delta}{dt}$ z argumentem α , a wartości $\frac{d\alpha}{dt}$ z argumentami α i δ . Dodatkowe tablice pozwalają znaleźć poprawki wartości precesji np. na 100 lat wskutek zmian m i n . Takimi są tablice VIII a i VIII b tej książki.

98. Przykłady do poprzedniego ustępu.

Przykład 1. Spółrzedne średnie równikowe gwiazdy α *Ursae minoris* w epoce 1914.0 są: $\alpha_0 = 1^h 28^m 47^s.18$, $\delta_0 = 88^\circ 50' 47''.8$. Znaleźć średnie spółrzedne równikowe tej gwiazdy w epoce 2000.0 bez uwzględnienia jej ruchu własnego.

Ponieważ δ_0 ma wartość bliską 90° , więc stosujemy wzory ściśle (241)–(243). Przedewszystkiem jednakże należy obliczyć występujące w tych wzorach wartości z , ζ_0 i θ według wzorów (236)–(238). Ponieważ jest w podanym przykładzie

$$t = 1914 - 1850 = 64, \quad \tau = 2000 - 1914 = 86,$$

czyli w tysiącletniach zwrotnikowych

$$\begin{aligned} t &= 0.064, & \tau &= 0.086, \\ t^2 &= 0.0041, & \tau^2 &= 0.0074, \\ t^3 &= 0.0002, & \tau^3 &= 0.0006, \end{aligned}$$

otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} z &= (23035''.55 + 139''.72 \times 0.064 = 0''.06 \times 0.0041) \times 0.086 + \\ &+ (109''.48 + 0''.39 \times 0.064) \times 0.0074 + 18''.33 \times 0.0006 = \\ &= (23035''.55 + 8''.94) \times 0.086 + (109''.48 + 0''.02) \times 0.0074 + \\ &+ 0''.01 = 1982''62 = 2^m 12^s.17, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= 1981''.81 + (30''.24 - 0''.27 \times 0.064) \times 0.0074 + 0''.01 = \\ &= 1982''.04 = 2^m 12^s.14. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= (20051''.12 - 85''.29 \times 0.064 - 0''.27 \times 0.004) \times 0.086 - \\ &- (42''.65 + 0''.37 \times 0.064) \times 0.0074 - 41''.80 \times 0.0006 = \\ &= (20051''.12 - 5''.45) \times 0.086 - (42''.65 + 0''.02) \times 0.0074 - 0''.02 = \\ &= 1723''.59 = 28' 43''.59, \end{aligned}$$

$$a_0 = \alpha_0 + \zeta_0 = 1^h 28^m 47^s.18 + 2^m 12^s.14 = 1^h 30^m 59^s.32.$$

Z temi wartościami obliczamy q według wzoru (241) i Δa według wzoru (242); znając już Δa , znajdujemy $\delta - \delta_0$, według wzorów (243), i wreszcie δ oraz $\alpha = a_0 + z + \Delta a$.

	$\frac{\theta}{2} = 14' 21''.8$	$\sin \alpha_0$	9.58734
		q	9.61815
	$\text{tang} \frac{\theta}{2}$	$\cos \alpha_0$	9.96484
		$q \cos \alpha_0$	9.58299
	$\cos \alpha_0$	B	0.41701
		A	0.20742
1	$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_0 \text{ tang} \frac{\theta}{2} \\ \text{tang} \delta_0 \end{array} \right.$	$1 - q \cos \alpha_0$	9.79041
		$q \sin \alpha_0$	9.20549
	A	$\text{tang} \Delta a$	9.41508
	B	$\Delta a =$	$58^m 18^s.62$
	Σ_1	$\alpha_0 =$	$1^h 30^m 59^s.32$
	$\sin \theta$	$\varepsilon =$	$2^m 12^s.17$
	q	$\alpha =$	$2^h 21^m 30^s.11$

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= 1^h 30^m 59^s.32 \\
 \frac{\Delta a}{2} &= 29^m 9^s.31 \\
 \alpha_0 + \frac{\Delta a}{2} &= 2^h 0^m 8^s.63 \\
 \text{tang} \frac{\theta}{2} & 7.62098 \\
 \cos \left(\alpha_0 + \frac{\Delta a}{2} \right) & 9.93737 \\
 \sec \frac{\Delta a}{2} & 0.00352 \\
 \text{tang} \frac{1}{2} (\delta - \delta_0) & 7.56187 \\
 \frac{1}{2} (\delta - \delta_0) &= 12' 32''.12 \\
 \delta - \delta_0 &= 25' 4''.2 \\
 \delta_0 &= 88^\circ 50' 47''.8 \\
 \delta &= 89^\circ 15' 52''.0.
 \end{aligned}$$

Przykład 2. Średnie współrzędne równikowe gwiazdy β *Ursae minoris* są według katalogu *A. G. Kasan* Nr. 2545 dla epoki 1875.0:

$$\alpha_0 = 14^h 51^m 5^s.42, \quad \delta_0 = 74^\circ 39' 58''.9.$$

Znaleźć średnie współrzędne równikowe tej gwiazdy w epoce 1920.0.

Wykonamy rachunek najprzód według wzorów (246), przyjmując, że nieznane nam są przybliżone wartości precesji rocznej, a więc też przybliżone wartości współrzędnych gwiazdy

w epoce $\frac{1}{2}(1875.0 + 1920.0) = 1897.5$. Dla tej ostatniej epoki obliczamy wartości m i n według wzorów (244'); znajdujemy

$$m = 3^s.07141 + 0^s.00001863 \times 47.5 = 3^s.07229,$$

$$n = 20''.05112 - 0''.00008530 \times 47.5 = 20''.04707 = 1^s.33647.$$

Oczywiście możnaby sobie oszczędzić tego rachunku, korzystając z tablicy VII.

Obliczenie precesji wykonamy zapomocą przybliżeń, przyjmując w pierwszym przybliżeniu $\alpha_{\frac{t}{2}} = \alpha_0$, $\delta_{\frac{t}{2}} = \delta_0$.

1 przybliżenie:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{ll} \text{tang } \delta_0 & 0.56194 \\ \sin \alpha_0 & 9.83193 \, n \\ n^s & 0.12596 \\ \Pi & 0.51983 \, n \\ m^s & 0.48746 \\ B & 0.03237 \\ A & 8.88840 \end{array} \right. \\ m + \Pi & 9.37586 \, n \\ t & 1.65321 \\ (\Delta\alpha) & 1.02907 \, n \\ (\Delta\alpha) & = -10^s.69 \\ \alpha_{\frac{t}{2}} & = 14^h 51^m 0^s. \end{aligned}$$

2 przybliżenie:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{ll} n'' & 1.30205 \\ \cos \alpha_{\frac{t}{2}} & 9.86589 \, n \\ t & 1.65321 \\ \Delta\delta & 2.82115 \, n \\ \Delta\delta & = -662''.4 \\ & = -11' 2''.4 \\ \delta & = 74^\circ 28' 56''.5 \end{array} \right. \\ \frac{1}{2} \Delta\delta & = -331''.2 \\ \delta_{\frac{t}{2}} & = 74^\circ 34'.5 \\ \left\{ \begin{array}{ll} n^s & 0.12596 \\ \sin \alpha_{\frac{t}{2}} & 9.83174 \, n \\ \text{tang } \delta_{\frac{t}{2}} & 0.55922 \\ \Pi & 0.51692 \, n \\ m^s & 0.48746 \\ B & 0.02946 \\ A & 8.84629 \end{array} \right. \\ m + \Pi & 9.33375 \, n \\ \Delta\alpha & 0.98696 \, n \\ \Delta\alpha & = -9^s.70 \\ \alpha & = 14^h 50^m 55^s.72. \end{aligned}$$

Jeżeli posiadamy tablice, z których otrzymać można przybliżone wartości precesji, jak np. tablica VIII *a*, to z pomocą tej tablicy można wypisać przybliżone wartości współrzędnych gwiazdy dla epoki $\frac{t}{2}$, tak że rachunek pierwszego przybliżenia jest zbyteczny. W naszym przykładzie otrzymujemy z tablicy

$$P_\alpha = -0^s.30, \quad P_\delta = -14''.5$$

i obliczamy

$$\alpha_{\frac{t}{2}} = \alpha_0 - 0^s.30 \times 22.5 = 14^h 50^m 58^s,$$

$$\delta_{\frac{t}{2}} = \delta_0 - 14''.5 \times 22.5 = 74^\circ 34'.7;$$

z temi wartościami otrzymuje się dokładne wartości $\Delta\alpha$ i $\Delta\delta$ jak poprzednio.

Gdy mamy do dyspozycji B. A. J. dla epoki t , to rachunek jest jeszcze bardziej uproszczony dzięki tabliczce, która zawiera wartości $m^s(t-t_0)$ oraz $\log[m^s(t-t_0)]$ i $\log[n''(t-t_0)]$ dla wszystkich epok t_0 począwszy od 1755.0. Tak na przykład w roczniku na r. 1920 tabelka wspomniana znajduje się na str. 371 i z niej dla epoki $t_0=1875.0$ otrzymujemy

$$m^s(t-t_0)=2^m 18^s.253,$$

$$\log[m^s(t-t_0)]=1.77917, \quad \log[n''(t-t_0)]=2.95526.$$

Przyjmując wartości $\alpha_{\frac{t}{2}}$ i $\delta_{\frac{t}{2}}$, wynikające z zastosowania tablicy VIII a, liczymy dalej, jak następuje:

$$\left\{ \begin{array}{ll} n^s(t-t_0) & 1.77917 \\ \sin \alpha_{\frac{t}{2}} & 9.83174 n \\ \text{tang } \delta_{\frac{t}{2}} & 0.55922 \\ \Pi & 2.17013 n \\ \Pi & = -2^m 27^s.95 \\ m^s(t-t_0) & = +2^m 18^s.25 \\ \Delta\alpha & = -9^s.70. \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} n''(t-t_0) & 2.95526 \\ \cos \alpha_{\frac{t}{2}} & 9.86589 n \\ \Delta\delta & 2.82115 n \\ \Delta\delta & = -662''.4 \\ & = -11' 2''.4. \end{array}$$

Wyniki otrzymane są zupełnie zgodne z poprzednimi.

Ponieważ w katalogu *A. G. Kasan* obok współrzędnych gwiazd podane są też współczynniki wyrazów precesji P , V i C , więc o wiele prędzej dochodzimy do celu, stosując wzory (250).

W katalogu dla gwiazdy Nr. 2545 znajdujemy:

$$\begin{array}{lll} P_\alpha = -0^s.2389, & V_\alpha = +0^s.1022, & C_\alpha = -0^s.130, \\ P_\delta = -14''.721, & V_\delta = -0''.017, & C_\delta = +0''.17. \end{array}$$

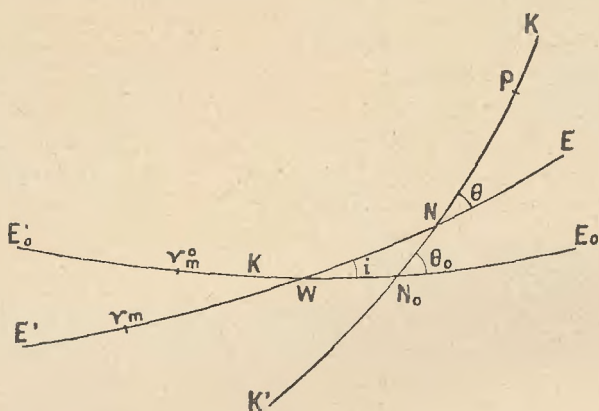
Jest zatem

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= -0^s.2389 \times 45 + 0^s.0511 \times \frac{45^2}{100} - 0^s.130 \times \left(\frac{45}{100}\right)^3 = \\ &= -10^s.716 + 1^s.035 - 0^s.012 = -9^s.73, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\delta &= -14''.721 \times 45 - 0''.009 \times \frac{45^2}{100} + 0''.17 \times \left(\frac{45}{100}\right)^3 = \\ &= -662''.45 - 0''.18 + 0''.02 = -662''.6 = -11' 2''.6. \end{aligned}$$

W porównaniu z poprzednimi wynikami, otrzymane poprawki różnią się tylko w ostatnich miejscach dziesiętnych.

99. Zmiany, którym ulegają wskutek precesji elementy, określające położenie jakiegoś koła na niebie oraz danego punktu na tem kole. Wiemy (ust. 39), że położenie jakiegoś wielkiego koła na niebie względem ekliptyki jest określone, gdy znany jest kąt θ , który ono tworzy z ekliptyką, oraz długość astronomiczna węzła wstępującego tego koła na ekliptyce, którą oznaczamy przez Ω . Położenie zaś jakiegoś punktu na tem kole określone jest przez odległość u tego punktu od węzła wstępującego, czyli t. zw. *argument szerokości*. Oczywiście gdy nawet koło to i punkt na niem zachowują na sklepieniu niebieskiem położenie nie-



Rycina 75.

zmienne, to jednakże z powodu zmiennego położenia ekliptyki oraz równonocy elementy θ , Ω i u także ulegać muszą zmianom. Gdy więc dla jakiegoś koła i punktu na niem podaje się elementy, to celem dokładnego określenia koła i punktu, musi prócz tego podaną być epoka, określająca dokładnie ekliptykę i równonoc, do których odnoszą się elementy.

Gdy znane są elementy θ_0 , Ω_0 i u_0 , odnoszące się do ekliptyki i równonocy epoki t_0 , to można obliczyć wartości tych elementów θ , Ω i u , odnoszące się do ekliptyki i równonocy jakiegokolwiek innej epoki t .

Niechaj będzie (rycina 75) E'_0E_0 ekliptyka epoki t_0 i γ_m^0 średnia równonoc epoki t_0 . Koło $K'K$, którego węzłem

wstępującym na ekliptyce $E'_0 E_0$ jest punkt N_0 , określone jest przez elementy

$$\sphericalangle E_0 N_0 K = \theta_0, \quad \gamma_m^0 N_0 = \Omega_0,$$

a punkt P na kole $K'K$ określony jest przez łuk $N_0 P = u_0$.

Gdy zaś w epoce t ekliptyka ma położenie $E'E$, a równonoc średnia znajduje się w punkcie γ_m , to węzłem wstępującym koła $K'K$ jest punkt N i elementy, określające koło $K'K$ i punkt P , są:

$$\sphericalangle ENK = \theta, \quad \gamma_m N = \Omega, \quad NP = u.$$

Ponieważ (ust. 91)

$$\gamma_m^0 W = K, \quad \sphericalangle E_0 W E = i, \quad \gamma_m W = K + \chi_m,$$

więc w trójkącie $N_0 W N$ boki i kąty mają znaczenie następujące:

$$\begin{aligned} W N_0 &= \gamma_m^0 N_0 - \gamma_m^0 W = \Omega_0 - K, & \sphericalangle W N N_0 &= \theta; \\ W N &= \gamma_m N - \gamma_m W = \Omega - K - \chi_m, & \sphericalangle W N_0 N &= 180^\circ - \theta_0; \\ N_0 N &= N_0 P - N P = u_0 - u, & \sphericalangle N W N_0 &= i. \end{aligned}$$

Stosując wzory N a p i e r a (7), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{\Omega - K - \chi_m + (u_0 - u)}{2} &= \operatorname{tang} \frac{\Omega_0 - K}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\theta_0 + i}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}}, \\ \operatorname{tang} \frac{\Omega - K - \chi_m - (u_0 - u)}{2} &= \operatorname{tang} \frac{\Omega_0 - K}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\theta_0 + i}{2}}{\cos \frac{\theta_0 - i}{2}}, \quad (251) \\ \operatorname{cotg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} &= \operatorname{cotg} \frac{i}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\Omega_0 - \Omega + \chi_m}{2}}{\cos \left(\frac{\Omega_0 + \Omega - \chi_m - K}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Gdy K , χ_m i i są obliczone zapomocą wzorów (217') i (222'), to wzory powyższe określają w sposób zupełnie ścisły niewia-

dome θ , Ω i u . Ale ściśle te wzory stosowane być muszą tylko w przypadkach wyjątkowych, z reguły zaś wystarczają wzory przybliżone.

Zastosujmy mianowicie wzory różniczkowe (8) i (9) do boków WN i N_0N trójkąta WN_0N oraz do kąta WNN_0 . Biorąc pod uwagę wyżej podane znaczenie wymienionych elementów trójkąta i zważywszy, że θ_0 jest wielkością stałą, znajdujemy

$$\begin{aligned} d(\Omega - K - \chi_m) &= -\cos \theta du - \cos i dK, \\ d\theta &= -\cos(\Omega - K - \chi_m) di - \sin \theta_0 \sin(u_0 - u) dK, \\ du &= -\cos \theta_0 dK - \cos \theta d(\Omega - K - \chi_m) - \\ &\quad - \sin(\Omega_0 - K) \sin \theta_0 di. \end{aligned} \quad (bl)$$

We wzorach tych możemy po prawej stronie pisać θ zamiast θ_0 i położyć $\cos i = 1$; dalej w wyrazach, pomnożonych przez di , można pisać $\Omega - K - \chi_m$ zamiast $\Omega - K$ i przyjąć $\Omega - K - \chi_m = \Omega - I$; wreszcie we wzorze na $d\theta$ można opuścić ostatni wyraz, gdyż $u_0 - u$ jest zawsze bardzo małym kątem. Po wprowadzeniu tych uproszczeń i odpowiedniej redukcji wzory (bl) przechodzą w następujące

$$\begin{aligned} d\Omega &= d\chi_m - \cos \theta du, \\ d\theta &= -\cos(\Omega - I) di, \\ du &= -\frac{\sin(\Omega - I)}{\sin \theta} di. \end{aligned} \quad (bm)$$

Podstawmy jeszcze w pierwszym z powyższych wzorów zamiast du wartość według drugiego z tych wzorów i podzielmy na obu stronach przez dt , to otrzymamy wyrażenia pochodnych elementów Ω , θ i u względem czasu, mianowicie:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{d\chi_m}{dt} + \cotg \theta \sin(\Omega - K) \frac{di}{dt}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\cos(\Omega - K) \frac{di}{dt}, \\ \frac{du}{dt} &= -\operatorname{cosec} \theta \sin(\Omega - K) \frac{di}{dt}. \end{aligned} \quad (bn)$$

Całkując według reguły, wyprowadzonej w ustępie 95, znajdujemy następujące wzory:

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_0 + \left[\frac{d\chi_m}{dt} + \cotg \theta \sin (\Omega - I) \frac{di}{dt} \right]_{\frac{t}{2}} \cdot (t - t_0), \\ \theta &= \theta_0 - \left[\cos (\Omega - I) \frac{di}{dt} \right]_{\frac{t}{2}} \cdot (t - t_0), \\ u &= u_0 - \left[\operatorname{cosec} \theta \sin (\Omega - I) \frac{di}{dt} \right]_{\frac{t}{2}} \cdot (t - t_0),\end{aligned}\tag{252}$$

Wartości I , $\frac{d\chi_m}{dt}$ i $\frac{di}{dt}$ dla epoki $\frac{t+t_0}{2}$ wypisuje się z tablicy VII; następnie, przyjmując w pierwszym przybliżeniu $\theta_{\frac{t}{2}} = \theta_0$, znajdujemy według powyższych wzorów najprzód przybliżone wartości przyrostów $(\Delta\Omega)$ i $(\Delta\theta)$; w drugim przybliżeniu przyjmujemy

$$\Omega_{\frac{t}{2}} = \Omega_0 + \frac{1}{2}(\Delta\Omega), \quad \theta_{\frac{t}{2}} = \theta_0 + \frac{1}{2}(\Delta\theta),$$

i powtarzamy rachunek dla otrzymania $\Delta\Omega$ i $\Delta\theta$; wreszcie obliczamy Δu . Na tem przybliżeniu prawie zawsze można poprzestać.

Jeżeli położenie danego koła i punktu na niem określone jest nie względem ekliptyki, lecz względem równika, to zmiany, którym podlegają elementy wskutek precesji, obliczają się za pomocą wzorów, zupełnie analogicznych do wzorów (251) i (252), które też w sposób podobny się wyprowadza.

Niechaj będzie na rycinie 76 R'_0R_0 równik epoki t_0 , γ_m^0 równonoc epoki t_0 , a N_0' węzeł wstępujący koła $K'K$ na równiku epoki t_0 . Oznaczmy

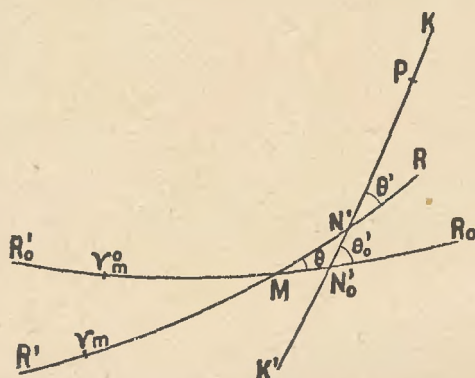
$$\angle R_0 N_0' K = \theta_0', \quad \gamma_m^0 N_0' = \Omega_0', \quad N_0' P = u_0'.$$

W epoce t równik ma położenie $R'R$, równonoc średnia znajduje się w punkcie γ_m , a punkt N' jest węzłem wstępującym koła $K'K$ na równiku epoki t . Kładziemy

$$\angle R N' K = \theta', \quad \gamma_m N' = \Omega', \quad N' P = u'.$$

Różnice $\Omega' - \Omega_0'$, $\theta' - \theta_0'$ i $u' - u_0'$ są to zmiany, jakim uległy elementy w czasie $t - t_0$. Wzory, określające te zmiany, wypływają z trójkąta $MN_0'N'$, w którym boki i przeciwległe im kąty mają znaczenie następujące (ust. 97):

$$\begin{aligned} MN_0' &= \gamma_m^0 N_0' - \gamma_m^0 M = \Omega_0' + \zeta_0 - 90^\circ, & \sphericalangle MN'N_0' &= \theta', \\ MN' &= \gamma_m N' - \gamma_m M = \Omega' - z - 90^\circ, & \sphericalangle MN_0'N' &= 180^\circ - \theta_0', \\ N_0'N' &= u_0' - u', & \sphericalangle N_0'MN' &= 0. \end{aligned}$$



Rycina 76.

Stosując wzory (7), otrzymujemy:

$$\operatorname{tang} \left[\frac{\Omega' - z - (u_0' - u')}{2} - 45^\circ \right] = \operatorname{tang} \left(\frac{\Omega_0' + \zeta_0}{2} - 45^\circ \right) \frac{\cos \frac{\theta_0' + \theta}{2}}{\cos \frac{\theta_0' - \theta}{2}},$$

$$\operatorname{tang} \left[\frac{\Omega' - z + (u_0' - u')}{2} - 45^\circ \right] = \operatorname{tang} \left(\frac{\Omega_0' + \zeta_0}{2} - 45^\circ \right) \frac{\sin \frac{\theta_0' + \theta}{2}}{\sin \frac{\theta_0' - \theta}{2}}, \quad (253)$$

$$\cotg \frac{\theta_0' - \theta'}{2} = \cotg \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\Omega_0' - \Omega' + \zeta_0 + z}{2}}{\sin \frac{\Omega_0' + \Omega' + \zeta_0 - z}{2}}.$$

Zamiast powyższych wzorów ścisłych wystarczają zazwyczaj wzory różniczkowe. Stosując wzory (8) i (9), znajdujemy

$$\begin{aligned}d(\Omega' - \varepsilon) &= -\cos \theta' du' + \cos \theta d\zeta_0, \\d\theta' &= -\sin(\Omega' - \varepsilon) d\theta - \sin \theta \cos(\Omega' - \varepsilon) d\zeta_0, \\du' &= \cos \theta_0' d\zeta_0 - \cos \theta' d(\Omega' - \varepsilon) + \sin \theta_0' \cos(\Omega_0' + \zeta_0) d\theta,\end{aligned}$$

albo z dostatecznem przybliżeniem, kładąc $\cos \theta = 1$ i redukując:

$$\begin{aligned}d\Omega' &= -\cos \theta' du' + d(\zeta_0 + \varepsilon), \\d\theta' &= -\sin \Omega' d\theta, \\du' &= \operatorname{cosec} \theta' \cos \Omega' d\theta.\end{aligned}\tag{bo}$$

Wprowadzając wartość na du' według drugiego z powyższych wzorów do wzoru na $d\Omega'$ i dzieląc na obu stronach przez $d\theta$, otrzymujemy wyrażenia pochodnych elementów Ω' , θ' i u' . Pisząc w tych wyrażeniach (ust. 97)

$$\frac{d(\zeta_0 + \varepsilon)}{dt} = m, \quad \frac{d\theta}{dt} = n,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega'}{dt} &= -n \cotg \theta' \cos \Omega' + m, \\\frac{d\theta'}{dt} &= -n \sin \Omega', \\\frac{du'}{dt} &= n \operatorname{cosec} \theta' \cos \Omega',\end{aligned}\tag{bp}$$

a po scałkowaniu

$$\begin{aligned}\Omega' &= \Omega_0' + (m - n \cotg \theta' \cos \Omega')_{\frac{t}{2}} \cdot (t - t_0), \\\theta' &= \theta_0' - (n \sin \Omega')_{\frac{t}{2}} \cdot (t - t_0), \\u' &= u_0' + (n \operatorname{cosec} \theta' \cos \Omega')_{\frac{t}{2}} \cdot (t - t_0).\end{aligned}\tag{254}$$

Wartość m i n dla epoki $\frac{t+t_0}{2}$ należy wypisać z tablicy VII; pozatem do wzorów powyższych stosując się te same uwagi, które uczyniliśmy przy wzorach (252).

100. Przykłady do poprzedniego ustępu.

Przykład 1. W epoce 1700.0 koło względem ekliptyki i średniej równonocy tej epoki oraz punkt na niem określone są przez następujące elementy:

$$\theta_0 = 25^\circ, \quad \Omega_0 = 200^\circ, \quad u_0 = 95^\circ;$$

znaleźć wartości tych elementów θ , Ω i u w epoce 1950.0.

Zastosujmy najprzód wzory ścisłe (251) i oznaczmy dla krótkości $u - u_0 = \Delta u$, $\Omega = K - \chi_m = R$. Jak w przykładach ustępu 96, jest też w tym przypadku

$$K = 171^\circ 31' 21'', \quad \chi_m = 3^\circ 29' 19''.9, \quad i = 1^\circ 57''.9.$$

Rachunek według wzorów ścisłych jest następujący:

$$\Omega_0 - K = 28^\circ 28' 39''.0, \quad \theta_0 + i = 25^\circ 1' 57''.9, \quad \theta_0 - i = 24^\circ 58' 2''.1$$

$$\frac{\Omega_0 - K}{2} = 14^\circ 14' 19''.5, \quad \frac{\theta_0 + i}{2} = 12^\circ 30' 59''.0, \quad \frac{\theta_0 - i}{2} = 12^\circ 29' 1''.1$$

$$\sin \frac{\theta_0 + i}{2} \quad 9.335897$$

$$\cos \frac{\theta_0 + i}{2} \quad 9.989553$$

$$\operatorname{cosec} \frac{\theta_0 - i}{2} \quad 0.665223$$

$$\sec \frac{\theta_0 - i}{2} \quad 0.010391$$

$$\operatorname{tang} \frac{\Omega_0 - K}{2} \quad 9.404421$$

$$\operatorname{tang} \frac{\Omega_0 - K}{2} \quad 9.404421$$

$$\operatorname{tang} \frac{R - \Delta u}{2} \quad 9.405541$$

$$\operatorname{tang} \frac{R + \Delta u}{2} \quad 9.404365$$

$$\frac{R - \Delta u}{2} = 14^\circ 16' 26''.5$$

$$\frac{R + \Delta u}{2} = 14^\circ 14' 13''.2$$

$$R - \Delta u = 28^\circ 32' 53''.0$$

$$R + \Delta u = 28^\circ 28' 26''.4$$

$$R = 28^\circ 30' 39''.7$$

$$\Delta u = -2^\circ 13''.3$$

$$K + \chi_m = 175^\circ 0' 40''.9$$

$$\Omega = 203^\circ 31' 20''.6$$

$$u = 94^\circ 57' 46''.7$$

$$\Omega_0 + \chi_m = 203^\circ 29' 19''.9$$

$$\Omega_0 - \chi_m = 196^\circ 30' 40''.1$$

$$\Omega_0 - \Omega + \chi_m = -2' 0''.7$$

$$\Omega_0 + \Omega - \chi_m = 400^\circ 2' 0''.7$$

$$\frac{1}{2}(\Omega_0 - \Omega + \chi_m) = -1' 0''.4$$

$$\frac{1}{2}(\Omega_0 + \Omega - \chi_m) = 200^\circ 1' 0''.4$$

$$\frac{i}{2} =$$

$$0' 59''.0 \quad \frac{1}{2}(\Omega_0 + \Omega - \chi_m) - K = 28^\circ 29' 39''.4$$

$$\begin{aligned}\cotg \frac{i}{2} & 3.543573 \\ \cos \frac{\Omega_0 - \Omega + \chi_m}{2} & 0.000000 \\ \sec \left(\frac{\Omega_0 + \Omega - \chi_m}{2} - K \right) & 0.056077 \\ \cotg \frac{\theta_0 - \theta}{2} & 3.599650 \\ \frac{\theta_0 - \theta}{2} & = 0' 51''.9 \\ \theta_0 - \theta & = 1' 43''.8, \quad \underline{\theta = 24^\circ 58' 16''.2}.\end{aligned}$$

Zastosujmy teraz do tego samego przykładu wzory (252).
Mamy tu

$$t - t_0 = 250, \quad \frac{1}{2}(t + t_0) = 1825.$$

Dla epoki 1825.0 z tablicy VII wypisujemy wartości I , $\frac{d\chi_m}{dt}$ i $\log \frac{di}{dt}$. Wartości te są:

$$I = 173^\circ 16' 0'', \quad \frac{d\chi_m}{dt} = 50''.2397, \quad \log \frac{di}{dt} = 9.67355.$$

Obliczenie wykonywamy zapomocą dwóch przybliżeń w sposób następujący.

1 przybliżenie:

$\Omega_0 - I = 26^\circ 44'.0$	$(\Delta\Omega)$	4.10290
$\cotg \theta_0$	$\frac{1}{2}(\Delta\Omega)$	3.80187
$\sin(\Omega_0 - I)$	$\frac{1}{2}(\Delta\Omega) = 6337'' = 105'.6$	
$\frac{di}{dt}$	$\Omega_{\frac{t}{2}} = 201^\circ 45'.6$	
Π	$(\Omega - I)_{\frac{t}{2}} = 28^\circ 29'.6$	
$\frac{d\chi_m}{dt}$	$\cos(\Omega_0 - I)$	9.95090
A	$\frac{di}{dt}$	9.67355
B	$t - t_0$	2.39794
$\frac{d\chi_m}{dt} + \Pi$	$(\Delta\theta)$	2.02239 <i>n</i>
$t - t_0$	$\frac{1}{2}(\Delta\theta)$	1.72136 <i>n</i>
	$\frac{1}{2}(\Delta\theta)$	$-53'' = -0'.9$
	$\theta_{\frac{t}{2}}$	$24^\circ 59'.1$

2 przybliżenie:

{	$\cotg \theta \frac{t}{2}$	0.33163	$\cos (\Omega - I) \frac{t}{2}$	9.94393
	$\sin (\Omega - I) \frac{t}{2}$	9.67857	$\frac{d\dot{z}}{dt}$	9.67355
	$\frac{d\dot{z}}{dt}$	9.67355	$t - t_0$	2.39794
	Π	9.68375	$\Delta \theta$	2.01542 <i>n</i>
	$\frac{d\chi_m}{dt}$	1.70105	$\Delta \theta = -103''.6$	$= -1' 43''.6$
	<i>A</i>	7.98270		
	<i>B</i>	0.00415	$\operatorname{cosec} \theta \frac{t}{2}$	0.37429
	$\frac{d\chi_m}{dt} + \Pi$	1.70520	$\sin (\Omega - I) \frac{t}{2}$	9.67857
	$t - t_0$	2.39794	$\frac{d\dot{z}}{dt}$	9.67355
	$\Delta \Omega$	4.10314	$t - t_0$	2.39794
	$\Delta \Omega = 12680''.6$		Δu	2.12435 <i>n</i>
	$= 3^\circ 31' 20''.6$		$\Delta u = -133''.2$	$= -2' 13''.2$

Wyniki zgodne są z otrzymaniami za pomocą wzorów ścisłych.

Przykład 2. Dane koło i punkt na niem określone są w odniesieniu do średniego równika i średniej równonocy epoki 1914.0 przez następujące elementy:

$$\theta_0' = 80^\circ, \quad \Omega_0' = 310^\circ = 20^h 40^m, \quad u_0' = 295^\circ.$$

Znaleźć wartość tych elementów w odniesieniu do równika średniego i średniej równonocy epoki 2000.0.

Celem zastosowania wzorów ścisłych (253) należy przedewszystkiem obliczyć wartości ζ_0 , z i θ . W przykładzie 1 ust. 98 znaleźliśmy dla przejścia z epoki 1914.0 na epokę 2000.0

$$z = 2^m 12^s.17, \quad \zeta_0 = 2^m 12^s.14, \quad \theta = 28' 43''.6.$$

Wobec tego jest:

$$\Omega_0' + \zeta_0 = 20^h 42^m 12^s.14, \quad \theta_0' + \theta = 80^\circ 28' 43''.6, \quad \theta_0' - \theta = 79^\circ 31' 16''.4$$

$$\frac{\Omega_0' + \zeta_0}{2} = 10^h 21^m 6^s.07, \quad \frac{\theta_0' + \theta}{2} = 40^\circ 14' 21''.8, \quad \frac{\theta_0' - \theta}{2} = 39^\circ 45' 38''.2$$

Oznaczmy dla krótkości

$$\frac{\Omega' - z - (u' - u_0')}{2} - 45^\circ = Q_1, \quad \frac{\Omega' - z + (u' - u_0')}{2} - 45^\circ = Q_2.$$

Rachunek jest następujący:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta_0' + \theta}{2} & 9.882725 \\ \sec \frac{\theta_0' - \theta}{2} & 0.114230 \\ \text{tang} \left(\frac{\Omega_0' + \zeta_0}{2} - 45^\circ \right) & 0.432478 \, n \\ \text{tang } Q_1 & 0.429433 \, n \\ Q_1 = & 7^h 21^m 37^s.50 \\ \Omega' - z + \Delta u' = & 20^h 43^m 15^s.00 \\ \Omega' - z = & 20^h 41^m 59^s.22 \\ \Omega' = & 20^h 44^m 11^s.39 \\ \hline \frac{\Omega' - z}{2} = & 10^h 20^m 59^s.61 \\ \frac{\Omega_0' + \zeta_0 + (\Omega' - z)}{2} = & 20^h 42^m 5^s.68 \\ \frac{\Omega_0' + \zeta_0 - (\Omega' - z)}{2} = & 6^s.46 \\ \frac{\theta}{2} = & 14' 21''.8 \\ \sin \frac{\theta_0' + \theta}{2} & 9.810221 \\ \text{cosec} \frac{\theta_0' - \theta}{2} & 0.194104 \\ \text{tang} \left(\frac{\Omega_0' + \zeta_0}{2} - 45^\circ \right) & 0.432478 \, n \\ \text{tang } Q_2 & 0.436903 \, n \\ Q_2 = & 7^h 20^m 21^s.72 \\ \Omega' - z - \Delta u' = & 20^h 40^m 43^s.44 \\ \Delta u' = & 1^m 15^s.78 = 18' 56''.7 \\ \underline{u' = 295^\circ 18' 56''.7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{\Omega_0' - \Omega' + \zeta_0 + z}{2} & 0.000000 \\
 \operatorname{cosec} \frac{\Omega_0' + \Omega' + \zeta_0 - z}{2} & 0.119094 n \\
 \cotg \frac{0}{2} & 1.379016 \\
 \cotg \frac{\theta_0' - \theta'}{2} & 2.498110 n \\
 \frac{\theta' - \theta_0'}{2} = & 10' 55''.1 \\
 \theta' - \theta_0' = & 21' 50''.2 \\
 \theta' = & \underline{80^\circ 21' 50''.2}
 \end{aligned}$$

Teraz zastosujmy do tego przykładu wzory przybliżone (254).

Mamy

$$t - t_0 = 2000 - 1914 = 86, \quad \frac{1}{2}(1914 + 2000) = 1957,$$

Dla epoki 1957.0 otrzymujemy z tablicy VII

$$m = 3^s.0734, \quad \log n^s = 0.12585, \quad \log n'' = 1.30194.$$

1 przybliżenie:

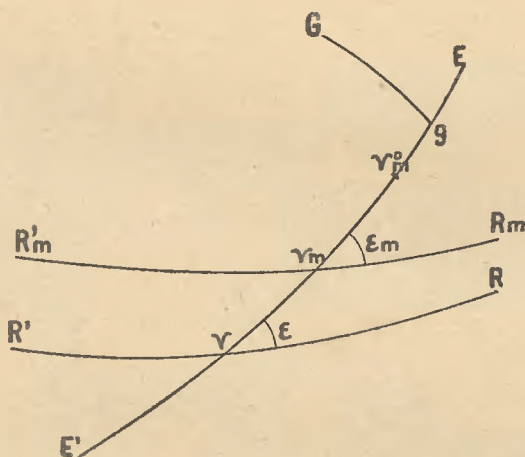
2 przybliżenie:

n	0.12585	$\Omega'_{\frac{t}{2}} = 20^h 42^m 6^s$	n''	1.30194	
$\cotg \theta_0'$	9.24632	$\theta'_{\frac{t}{2}} = 80^\circ 11'$	$\sin \Omega'$	9.88088 n	
$\cos \Omega_0'$	9.80807	n	0.12585	$\Delta \theta'$	3.11732
Π	9.18094	$\cotg \theta'_{\frac{t}{2}}$	9.23812	$\Delta \theta' =$	1310''.2
m	0.48762	$\cos \Omega'_{\frac{t}{2}}$	9.81277	$=$	21' 50''.2
B	1.30738	Π	9.17674		
A	1.28543	m	0.48762	$\operatorname{cosec} \theta'$	0.00641
$m - \Pi$	0.46567	B	1.31088	$\cos \Omega'$	9.81277
$t - t_0$	1.93450	A	1.28912	n''	1.30194
$(\Delta \Omega')$	2.40017	$m - \Pi$	0.46586	$t - t_0$	1.93450
$(\Delta \Omega') = 4^m 11^s.29$		$t - t_0$	1.93450	$\Delta u'$	3.05562
n''	1.30194	$\Delta \Omega'$	2.40036	$\Delta u' =$	1136''.6
$\sin \Omega_0'$	9.88425 n	$\Delta \Omega' = 4^m 11^s.39$		$=$	18' 56''.6
$(\Delta \theta')$	3.12069				
$(\Delta \theta') = 1320''$					
$= 22'$					

Widzimy, że wyniki, otrzymane zapomocą wzorów (253) i (254), są jednakowe.

101. Zmiany współrzędnych, powodowane przez nutację. Wynikiem nutacji jest, jak wiemy, to, że prawdziwe współrzędne gwiazd różnią się od ich współrzędnych średnich. Zajmijmy się ilościowym wyznaczeniem zmian, którym ulegają współrzędne prawdziwe. Zadanie to rozwiążemy z pomocą ryciny 77.

Na rycinie tej łuk $E'E$ wyobraża ekliptykę epoki t , łuk $R_m'R_m$ oznacza średni równik epoki t , a łuk $R'R$ prawdziwy



Rycina 77.

równik tej samej epoki. Punkt γ_m jest więc średnią równonocą epoki t , a punkt γ równonocą prawdziwą tej epoki; podobnie kąty $E\gamma_m R_m = \epsilon_m$ i $E\gamma R = \epsilon$ są odpowiednio średnią i prawdziwą pochyłością ekliptyki w epoce t .

Zbadajmy najprzód, w jaki sposób zmieniają się wskutek nutacji współrzędne ekliptyczne. Weźmy pod uwagę gwiazdę G i poprowadźmy jej koło szerokości Gg , które z ekliptyką epoki t przecina się w punkcie g ; łuk gG jest miarą szerokości gwiazdy. Ponieważ ekliptyka wskutek nutacji się nie zmienia, więc nie różnią się też między sobą szerokość średnia i prawdziwa w danej epoce; gdy oznaczymy przez λ_m, β_m współrzędne średnie eklipty-

tyczne gwiazdy, a przez λ , β jej współrzędne prawdziwe w tym czasie, to jest $\beta = \beta_m$.

Co się tyczy długości gwiazdy, to miarą długości średniej jest odległość punktu g od średniej równonocy \mathcal{V}_m , a miarą długości prawdziwej odległość tegoż punktu od prawdziwej równonocy \mathcal{V} . To znaczy, że

$$\mathcal{V}_m g = \lambda_m, \quad \mathcal{V} g = \lambda.$$

Niechaj będzie jeszcze punkt \mathcal{V}_m^0 średnią równonocą epoki t_0 , to (ust. 88) jest

$$\mathcal{V}_m^0 \mathcal{V}_m = \chi_m, \quad \mathcal{V}_m^0 \mathcal{V} = \chi_m + \Sigma p, \quad \varepsilon = \varepsilon_m + \Sigma q,$$

a więc także

$$\lambda = \lambda_m + \Sigma p, \tag{255}$$

i na miejsce Σp należy tu podstawić wartość wypływającą dla epoki t ze wzorów (223) i (224).

Nieco bardziej skomplikowany jest wpływ nutacji na współrzędne równikowe, ponieważ wchodzi tu w rachubę także nutacja w pochyłości. Prawdziwe współrzędne równikowe wypływają ze wzorów (78'), gdy w nich po prawej stronie jako wartość λ i β przyjmiemy odpowiednio prawdziwą długość gwiazdy, obliczoną według wzoru (255) i prawdziwą pochyłość ekliptyki $\varepsilon = \varepsilon_m + \Sigma q$.

Oznaczmy dla krótkości

$$\Sigma p = \bar{p}, \quad \Sigma q = \bar{q}, \tag{bq}$$

to otrzymamy

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \beta \cos (\varepsilon_m + \bar{q}) + \cos \beta \sin (\varepsilon_m + \bar{q}) \sin (\lambda_m + \bar{p}), \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos (\lambda_m + \bar{p}), \\ \cos \delta \sin \alpha &= - \sin \beta \sin (\varepsilon_m + \bar{q}) + \cos \beta \cos (\varepsilon_m + \bar{q}) \sin (\lambda_m + \bar{p}). \end{aligned} \tag{br}$$

Rozwijając te wzory i wprowadzając na miejsce β i λ_m wartości średnich współrzędnych równikowych, wypływające ze wzo-

rów (78'), znajdujemy po łatwych redukcjach wzory następujące:

$$\begin{aligned}\sin \delta &= (\sin \delta_m \cos \varepsilon_m - \cos \delta_m \sin \varepsilon_m \sin \alpha_m) \cos (\varepsilon_m + \bar{q}) + \\ &+ [\cos \delta_m \cos \alpha_m \sin \bar{p} + (\sin \delta_m \sin \varepsilon_m + \\ &+ \cos \delta_m \cos \varepsilon_m \sin \alpha_m) \cos \bar{p}] \sin (\varepsilon_m + \bar{q}), \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos \delta_m \cos \alpha_m \cos \bar{p} - \\ &- (\sin \delta_m \sin \varepsilon_m + \cos \delta_m \cos \varepsilon_m \sin \alpha_m) \sin \bar{p}, \\ \cos \delta \sin \alpha &= -(\sin \delta_m \cos \varepsilon_m - \cos \delta_m \sin \varepsilon_m \sin \alpha_m) \sin (\varepsilon_m + \bar{q}) + \\ &+ [\cos \delta_m \cos \alpha_m \sin \bar{p} + (\sin \delta_m \sin \varepsilon_m + \\ &+ \cos \delta_m \cos \varepsilon_m \sin \alpha_m) \cos \bar{p}] \cos (\varepsilon_m + \bar{q}).\end{aligned}\quad (256)$$

Wzory powyższe określają wartość współrzędnych prawdziwych w epoce t z całą ścisłością, gdy dane są wartości współrzędnych średnich w tej epoce. Przez wprowadzenie kątów pomocniczych można im nadać postać dogodniejszą do logarytmowego obliczenia.

Jednakże wzory te w praktyce nie znajdują zastosowania, zawsze bowiem wystarczają wzory przybliżone na różnice $\alpha - \alpha_m$ i $\delta - \delta_m$. Są to szeregi, postępujące według potęg kątów \bar{p} i \bar{q} , w których ograniczyć się można najczęściej do wyrazów pierwszego rzędu, a w rzadszych przypadkach do wyrazów pierwszego i drugiego rzędu.

Ogólną postać takich szeregów znajdujemy we wzorach (14) i (15); w zastosowaniu do danego przypadku należy tylko wykonać pewne podstawienia. W niżej podanem zestawieniu po lewej stronie stoją wielkości, występujące we wzorach (14) i (15), a po prawej stronie wielkości, występujące w naszym zadaniu, mianowicie:

$$\begin{aligned}q &= \beta, & p &= \lambda_m, & q' &= \delta_m, & p' &= \alpha_m, & \psi &= \chi = 0, & i &= -\varepsilon_m, \\ \alpha &= 0, & \beta &= \bar{p}, & \gamma &= -\bar{q}, & \alpha' &= \delta - \delta_m, & \beta' &= \alpha - \alpha_m.\end{aligned}$$

Po podstawieniu tych wartości we wzorze (14), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\delta - \delta_m &= \cos \alpha_m \sin \varepsilon_m \bar{p} + \sin \alpha_m \bar{q} - \\ &- \frac{1}{2} \sin \alpha_m \sin^2 \varepsilon_m (\cotg \varepsilon_m + \sin \alpha_m \tang \delta_m) \bar{p}^2 - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha_m \tang \delta_m \bar{q}^2 + \\ &+ \cos \alpha_m \sin \varepsilon_m (\cotg \varepsilon_m + \sin \alpha_m \tang \delta_m) \bar{p} \bar{q}.\end{aligned}\quad (257)$$

Celem otrzymania wzoru na $\alpha - \alpha_m'$ tworzymy

$$\alpha_0' = \cos \alpha_m \sin \varepsilon_m \bar{p} + \sin \alpha_m \bar{q}, \quad (\text{bs})$$

$$\beta_0' = (\cos \varepsilon_m + \sin \alpha_m \tan \delta_m \sin \varepsilon_m) \bar{p} - \cos \alpha_m \tan \delta_m \bar{q},$$

oraz

$$\alpha_0'^2 = \cos^2 \alpha_m \sin^2 \varepsilon_m \bar{p}^2 + \sin^2 \alpha_m \bar{q}^2 + 2 \sin \alpha_m \cos \alpha_m \sin \varepsilon_m \bar{p} \bar{q},$$

$$\beta_0'^2 = (\cos \varepsilon_m + \sin \alpha_m \tan \delta_m \sin \varepsilon_m)^2 \bar{p}^2 + \cos^2 \alpha_m \tan^2 \delta_m \bar{q}^2 - 2 \cos \alpha_m \tan \delta_m (\cos \varepsilon_m + \sin \alpha_m \tan \delta_m \sin \varepsilon_m) \bar{p} \bar{q}, \quad (\text{bt})$$

$$\alpha_0' \beta_0' = \cos \alpha_m \sin \varepsilon_m (\cos \varepsilon_m + \sin \alpha_m \tan \delta_m \sin \varepsilon_m) \bar{p}^2 - \sin \alpha_m \cos \alpha_m \tan \delta_m \bar{q}^2 + (\sin \alpha_m \cos \varepsilon_m - \cos 2 \alpha_m \tan \delta_m \sin \varepsilon_m) \bar{p} \bar{q}.$$

Wartości (bs) i (bt) podstawiamy we wzorze (15) i po redukcjach, nie następujących trudności, znajdujemy

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_m = & (\cos \varepsilon_m + \sin \alpha_m \tan \delta_m \sin \varepsilon_m) \bar{p} - \cos \alpha_m \tan \delta_m \bar{q} + \\ & + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \sin 2 \alpha_m + \cos \alpha_m \tan \delta_m \cot \varepsilon_m + \sin 2 \alpha_m \tan^2 \delta_m) \sin^2 \varepsilon_m \bar{p}^2 - \\ & - \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \sin 2 \alpha_m + \sin 2 \alpha_m \tan^2 \delta_m) \bar{q}^2 - \\ & - (\cos^2 \alpha_m - \sin \alpha_m \tan \delta_m \cot \varepsilon_m + \cos 2 \alpha_m \tan^2 \delta_m) \sin \varepsilon_m \bar{p} \bar{q}. \end{aligned} \quad (258)$$

Wzory (257) i (258) należy stosować tylko wtedy, gdy $\delta > |80^\circ|$. Przy zboczeniach mniejszych wyrazy drugiego rzędu mają wartość znikomą i można je opuścić. Oczywiście rachunek według wzorów uproszczonych, w których wyrazy drugiego rzędu są pominięte, jest znacznie krótszy. Wzory te, najczęściej stosowane, można też otrzymać wprost, podstawiając we wzorach różniczkowych (h) ustępu 38

$$d\beta = 0, \quad d\lambda = \bar{p}, \quad d\varepsilon = \bar{q},$$

i uwzględniając wzory (j) tegoż ustępu. Znajdujemy

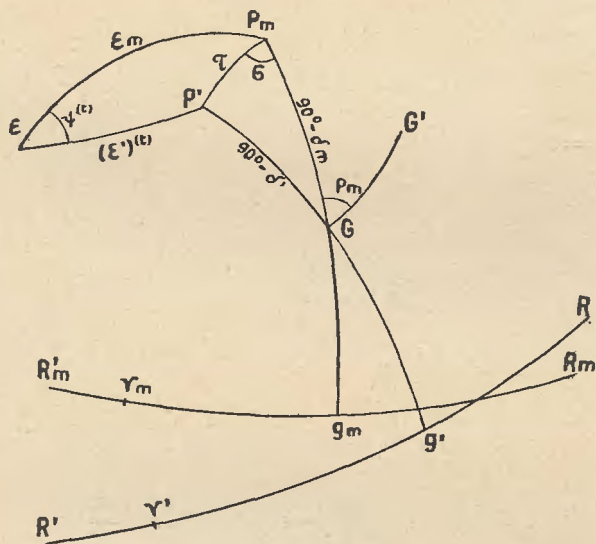
$$\delta - \delta_m = \cos \alpha_m \sin \varepsilon_m \bar{p} + \sin \alpha_m \bar{q}, \quad (259)$$

$$\alpha - \alpha_m = (\cos \varepsilon_m + \sin \alpha_m \tan \delta_m \sin \varepsilon_m) \bar{p} - \cos \alpha_m \tan \delta_m \bar{q},$$

zgodnie ze wzorami (257) i (258).

W przypadkach, gdy wyrazy drugiego rzędu pominięte być nie mogą, a przybliżone wartości $\alpha - \alpha_m$ i $\delta - \delta_m$ obliczone zostały zapomocą wzorów (259), można też zamiast wzorów (257) i (258) stosować wzory *Fabritiusa* (1) ustępu 38. Wzory te prowadzą do wyników równie dokładnych, jak wzory (257) i (258).

102. Wpływ precesji i nutacji na kąt pozycyjny łuku, łączącego dwa punkty na niebie. Rozwiążmy zadanie następujące. Spółrzędne średnie gwiazdy G w epoce t są α_m i δ_m , a kąt



Rycina 78.

pozycyjny średni gwiazdy G' , t. j. kąt pozycyjny, liczony od średniego koła godzinowego gwiazdy G w epoce t , jest p_m . Znaleźć prawdziwy kąt pozycyjny gwiazdy G' w epoce t' .

Niechaj oznacza na rycinie 78 łuk $R'_m R_m$ średni równik epoki t , a punkty P_m i γ_m odpowiednio średni biegun i średnią równonoc epoki t . Gdy więc poprowadzimy koło godzinne gwiazdy, które przecina się ze średnim równikiem w punkcie g_m , to jest

$$P_m G = 90^\circ - \delta_m, \quad \gamma_m g_m = \alpha_m, \quad \angle P_m G G' = p_m.$$

Gdy dalej łuk $R'R$ oznacza prawdziwy równik epoki t' , a punkty P' i γ' oznaczają odpowiednio prawdziwy biegun

świata i prawdziwą równonoc epoki t' , to kąt $P'GG' = p'$ jest prawdziwym kątem pozycyjnym gwiazdy G' w epoce t' . Oznaczmy w trójkącie $P_mP'G$

$$P_mP' = \tau, \quad \sphericalangle P'P_mG = \sigma,$$

to, gdy przez α', δ' oznaczymy prawdziwe współrzędne równikowe gwiazdy G w epoce t' , z trójkąta $P'P_mG$ wypływa:

$$\cos \delta' \sin(p' - p_m) = \sin \tau \sin \sigma. \quad (\text{bu})$$

Aby więc znaleźć $p' - p_m$, należy znać τ i σ . Kąty te wyznaczymy, biorąc pod uwagę trójkąt EP_mP' , w którym punkt E oznacza biegun ekliptyki epoki t . W tym trójkącie bok $EP_m = \varepsilon_m$ jest średnią pochyłości ekliptyki epoki t , bok zaś EP' równa się nachyleniu prawdziwego równika epoki t' do ekliptyki epoki t ; nachylenie to oznaczaliśmy przez $(\varepsilon')^{(t)}$. Kąt P_mEP' tego trójkąta równa się łukowi, o który węzeł prawdziwego równika epoki t' przesunięty jest na ekliptyce epoki t względem równonocy \mathcal{V}_m ; przesunięcie to oznaczaliśmy przez $\psi^{(t)}$. Wreszcie, ponieważ wznoszenie proste bieguna E wynosi -90° , więc $\sphericalangle EP_mG = 90^\circ + \alpha_m$.

Znaczenie boków i przeciwległych kątów trójkąta EP_mP' jest zatem następujące:

$$\begin{aligned} EP_m &= \varepsilon_m, & EP' &= (\varepsilon')^{(t)}, & PP' &= \tau; \\ \sphericalangle EP_mP' &= 90^\circ + \alpha_m - \sigma, & \sphericalangle P_mEP' &= \psi^{(t)}. \end{aligned}$$

Według znanych wzorów otrzymujemy z tego trójkąta:

$$\begin{aligned} \sin \tau \cos(\alpha_m - \sigma) &= \sin(\varepsilon')^{(t)} \sin \psi^{(t)}, & (\text{bw}) \\ \sin \tau \sin(\alpha_m - \sigma) &= -\cos(\varepsilon')^{(t)} \sin \varepsilon_m + \sin(\varepsilon')^{(t)} \cos \varepsilon_m \cos \psi^{(t)}. \end{aligned}$$

Celem porównania ze wzorem (bu) wyprowadzimy stąd wartość na $\sin \tau \sin \sigma$; pisząc

$$\begin{aligned} \sin \tau \cos(\alpha_m - \sigma) &= \sin \tau (\cos \alpha_m \cos \sigma + \sin \alpha_m \sin \sigma), \\ \sin \tau \sin(\alpha_m - \sigma) &= \sin \tau (\sin \alpha_m \cos \sigma - \cos \alpha_m \sin \sigma), \end{aligned}$$

mnożymy pierwszy z tych wzorów przez $\sin \alpha_m$, a drugi przez $\cos \alpha_m$ i odejmujemy drugi od pierwszego; znajdujemy

$$\sin \tau \cos (\alpha_m - \sigma) \sin \alpha_m - \sin \tau \sin (\alpha_m - \sigma) \cos \alpha_m = \sin \tau \sin \sigma. \quad (\text{bx})$$

Podstawiając tu po lewej stronie wartości według wzoru (bw) i przyrównując do siebie lewe strony wzorów (bu) i (bx), otrzymamy

$$\begin{aligned} \cos \delta' \sin (p' - p_m) &= \sin (\epsilon')^{(t)} \sin \psi^{(t)} \sin \alpha_m + \\ &+ [\cos (\epsilon')^{(t)} \sin \epsilon_m - \sin (\epsilon')^{(t)} \cos \epsilon_m \cos \psi^{(t)}] \cos \alpha_m, \end{aligned} \quad (260)$$

lub też z dostatecznem we wszystkich przypadkach przybliżeniem

$$(p' - p_m) \cos \delta_m = \psi^{(t)} \sin \epsilon_m \sin \alpha_m + [\epsilon_m - (\epsilon')^{(t)}] \cos \alpha_m. \quad (261)$$

W wyrażeniach. $\psi^{(t)}$ i $(\epsilon')^{(t)}$ występują wyrazy wiekowe i perjodyczne. Oddzielając część wiekową od perjodycznej, piszemy

$$\psi^{(t)} = \psi_m^{(t)} + \bar{p}, \quad (\epsilon')^{(t)} = (\epsilon')_m^{(t)} + \bar{q}, \quad p' = p_m + \bar{r}, \quad (\text{by})$$

i otrzymujemy

$$p_m' = p_m + \{\psi_m^{(t)} \sin \epsilon_m \sin \alpha_m + [\epsilon_m - (\epsilon')_m^{(t)}] \cos \alpha_m\} \sec \delta_m, \quad (262)$$

$$\bar{r} = (\bar{p} \sin \epsilon_m \sin \alpha_m - \bar{q} \cos \alpha_m) \sec \delta_m. \quad (263)$$

Na p' otrzymamy wzór dostatecznie przybliżony w sposób następujący. Różniczkujemy wzór (262) względem czasu; ponieważ jest

$$\psi_m \sin \epsilon_m = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = n,$$

więc można też przyjąć, gdy drugi wyraz wzoru (262), jako bardzo mały, opuścimy

$$\frac{dp_m}{dt} = n \sin \alpha_m \sec \delta_m, \quad (264)$$

a po scałkowaniu w granicach od t do t' stosowanym poprzednio sposobem

$$p_m' = p_m + (n \sin \alpha_m \sec \delta_m) \frac{t}{2} \cdot (t' - t). \quad (265)$$

Część perjodyczna \bar{r} wyrażenia kąta pozycyjnego, określona przez wzór (263), wyraża nutację kąta pozycyjnego. Ograniczając się do pierwszych wyrazów wzorów (223) i (224), t. j. przyjmując

$$\bar{p} = -17''.23 \sin \Omega, \quad \bar{q} = 9''.21 \cos \Omega, \quad \bar{p} \sin \epsilon_m = -6''.85 \sin \Omega,$$

otrzymamy na nutację kąta pozycyjnego następujący dostatecznie dokładny wzór:

$$\bar{r} = - (6''.85 \sin \Omega \sin \alpha_m + 9''.21 \cos \Omega \cos \alpha_m) \sec \delta_m. \quad (266)$$

ROZDZIAŁ IX.

RUCH WŁASNY GWIAZD.

103. Ruch własny, ruch paralaktyczny i ruch swoisty. W rozdziałach VI—VIII zajmowaliśmy się wyjaśnieniem zmian, jakim ulegają spólrzędne gwiazd, pomimo że same gwiazdy w przestrzeni zachowują położenie niezmiennie. Wzory, wyprowadzone w wymienionych rozdziałach, pozwalają na podstawie obserwowanych spólrzędnych geocentrycznych obliczyć spólrzędne heljocentryczne, t. j. wolne od paralaksy rocznej i aberacji rocznej, a dalej odnieść położenie gwiazdy na sklepieniu niebieskiem do średniego równika lub ekliptyki i średniej równonocy dowolnej epoki.

Gdyby heljocentryczne spólrzędne gwiazdy, otrzymane z obserwacyj w różnych czasach i odniesione do średniego równika i średniej równonocy pewnej danej epoki t , miały wartość stałą, znaczyłoby to oczywiście, że położenie słońca względem gwiazd nie ulega zmianie, że zatem albo słońce i gwiazdy są nieruchome, albo też, że gwiazdy i słońce mają ruch wspólny. W rzeczywistości tak nie jest.

Przypuśćmy, że spostrzeżenia są bezbłędne i że zrobione zostały w czasach t_1, t_2, t_3, \dots . Spólrzędne heljocentryczne danej gwiazdy, wypływające z tych spostrzeżeń, odniesione do średniego równika i średniej równonocy epoki t_0 , niechaj w wymienionych epokach mają wartości odpowiednio

$$\alpha_1, \delta_1; \alpha_2, \delta_2; \alpha_3, \delta_3; \dots$$

Gdy jeszcze α_t, δ_t są wartościami spólrzędnych tej samej gwiazdy w epoce t , odniesionych również do średniego równika i średniej równonocy epoki t_0 , to jest ogólnie

$$\alpha_x = \alpha_t + \Delta\alpha_x, \quad \delta_x = \delta_t + \Delta\delta_x \quad (a)$$

Spółrzędne α_x, δ_x nie określają ściśle kierunku ku gwieździe z powodu aberacji wiekowej. Przesunięcie aberacyjne, wyrażone przez wzory (181) i (182), nie może być ściśle wyznaczone z powodu niedokładnej znajomości kierunku biegu słońca i jego prędkości. Wpływ aberacji wiekowej na spółrzędne gwiazdy, nawet gdyby spółrzędne apeksu ruchu słońca A, D były niezmiennie i gdyby ruch słońca w przestrzeni był jednostajny, nie może być uważany za niezmienny, gdyż wartość przesunięcia aberacyjnego zależy też od spółrzędnych gwiazdy, które, jak widzieliśmy, stale ulegają zmianom, choćby tylko pozornym. Zmiany wartości aberacji wiekowej w ogólności praktycznie uważane być mogą za znikome, jednakże u gwiazd, położonych w bliskości biegunów zmiany zboczenia, zachodzące w ciągu długich odstępów czasu, pociągnąć mogą za sobą zmianę wartości przesunięcia aberacyjnego we wznoszeniu prostem.

Gdy wzór (181)

$$\alpha' - \alpha = k_s \cos D \sin (A - \alpha) \sec \delta$$

zróżniczkujemy względem δ , to jest

$$\begin{aligned} d(\alpha' - \alpha) &= k_s \cos D \sin (A - \alpha) \tan \delta \sec \delta d\delta = \\ &= (\alpha' - \alpha) \tan \delta d\delta \sin 1'', \end{aligned}$$

i łatwo sprawdzić, że dla $\delta > |89^\circ|$ i $d\delta = 1'$ może $d(\alpha' - \alpha)$ osiągnąć wartość, dochodzącą do $10''$. Możemy więc przyjąć, że w ogólności ulegają zmianie spółrzędne gwiazd z powodu zmian wartości aberacji wiekowej. Oznaczmy zmiany spółrzędnych, pochodzące z tego źródła przez $\Delta\alpha_a$ i $\Delta\delta_a$; gdy więc $\Delta\alpha$ i $\Delta\delta$ mają to samo znaczenie, co $\Delta\alpha_x$ i $\Delta\delta_x$ we wzorach (a), różnice $\Delta\alpha - \Delta\alpha_a$, $\Delta\delta - \Delta\delta_a$ wyrażają rzeczywiste zmiany spółrzędnych gwiazdy w czasie $t_x - t$.

Ruch gwiazdy, który objawia się w wyżej wyjaśnionej zmianie spółrzędnych, nazywa się *ruchem własnym* gwiazdy, czyli *motus proprius*.

W tym ruchu własnym jedną część składową stanowi *ruch paralaktyczny*, czyli *motus parallacticus*, określony przez wzory (171) i (172). Oznaczmy zmiany spółrzędnych, określone przez

te wzory przez $\Delta\alpha_p$ i $\Delta\delta_p$. Tych wartości również dokładnie wyznaczyć nie możemy, wiemy jednakże (ust. 72), że wiekowy ruch paralaktyczny zachodzi na łuku wielkiego koła, przechodzącego przez miejsce gwiazdy i apeks ruchu słońca.

Gdyby ruch własny gwiazd był tylko ruchem paralaktycznym, to wszystkie wielkie koła, określone przez ruchy własne gwiazd, przecinałyby się w dwóch przeciwnych punktach nieba, apeksie i antyapeksie, i w tym przypadku spólrzędne A , D dałyby się dokładnie wyznaczyć. Prócz tego znajomość paralaksy rocznej jednej jakiegokolwiek gwiazdy w połączeniu z wielkością jej ruchu własnego określałaby prędkość ruchu układu słonecznego; gdyby zaś ta ostatnia raz została wyznaczona, to z ruchu własnego każdej gwiazdy wypływałaby też wartość jej paralaksy rocznej i odległość.

W rzeczywistości kierunki ruchów własnych gwiazd nie wykazują takiej prawidłowości. Wynika stąd, że w ruchach własnych gwiazd prócz ruchu paralaktycznego tkwi także druga składowa, stanowiąca t. zw. *ruch swoisty*, czyli *motus peculiaris*.

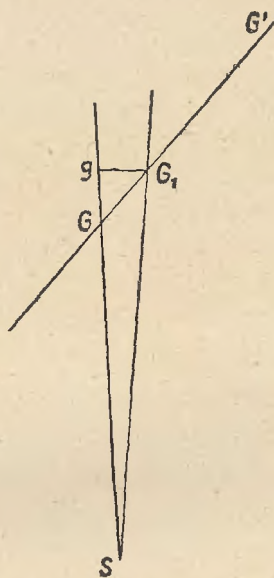
Oznaczmy zmiany spólrzędnych, spowodowane ruchem swoim gwiazdy, przez $\Delta\alpha_q$ i $\Delta\delta_q$, to jest

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \Delta\alpha_a + \Delta\alpha_p + \Delta\alpha_q \\ \Delta\delta &= \Delta\delta_a + \Delta\delta_p + \Delta\delta_q\end{aligned}\tag{b}$$

Jako znane uważać można tylko wartości $\Delta\alpha$ i $\Delta\delta$, które z wartości spólrzędnych obserwowanych po uwzględnieniu wszystkich znanych czynników, wpływających na te wartości, wyznaczyć się dadzą. Wydzieleniem składowych $\Delta\alpha_a + \Delta\alpha_p$ i $\Delta\delta_a + \Delta\delta_p$ zajmuje się zagadnienie wyznaczenia elementów ruchu układu słonecznego w przestrzeni. Zagadnienie to, jak też zagadnienia, odnoszące się do wyznaczenia wartości stałych, występujących we wzorach astronomji sferycznej, wchodzi w zakres astronomji praktycznej. Specjalnie badania, odnoszące się do zagadnienia ruchu słońca w przestrzeni, są tak wielostronne, że same stanowią obszerny dział astronomji.

104. Ruch gwiazd w przestrzeni. Ruch kątowy i ruch w promieniu widzenia. Rozważając ruch układu słonecznego w przestrzeni, czynimy założenie, że odbywa się on po linii prostej ze

stałą prędkością. Założenie to ma uzasadnienie w charakterze zmian, jakim z biegiem czasu ulegają wartości $\Delta\alpha$ i $\Delta\delta$. Zmiany te odpowiadają wprawdzie ruchowi względnemu gwiazdy w stosunku do słońca, uważanego za nieruchome, czyli wypadkowej ruchu słońca i gwiazdy; ale skoro o tym ruchu wypadkowym wnioskować można, że zachodzi on po linii prostej z prędkością stałą, to wniosek ten z wielkiem prawdopodobieństwem odnosić się będzie także do każdej ze składowych tego ruchu. To znaczy



Rycina 79.

że gdy za prostolinijny i jednostajny uważać można ruch słońca w przestrzeni, to za taki sam należy uważać ruch gwiazd w przestrzeni.

Rozważmy, czy takie założenie w istocie znajduje się w zgodzie ze spostrzeżeniami. Uważajmy słońce, oznaczone przez punkt S na ryc. 79, za nieruchome, a GG_1 niech będzie kierunkiem, w którym biegnie gwiazda G ze stałą prędkością v . Niechaj będzie GG_1 droga, którą przebiega gwiazda w elemencie czasu dt , to jest

$$GG_1 = v dt.$$

Tę drogę możemy rozłożyć na dwie składowe: 1) na składową Gg , przypadającą na prostej SG , i 2) na składową gG_1 , prostopadłą do kierunku SG . Pierwsza z tych składowych jest miarą wzrostu odległości gwiazdy od słońca w czasie dt , druga z nich stanowi miarę zmiany kierunku, w którym gwiazda z punktu S jest widzialną, również w czasie dt .

Gdy wyobrazimy sobie, że w punkcie S znajduje się obserwator, to składowa Gg jest miarą *ruchu w promieniu widzenia*, a składowa gG_1 miarą *ruchu kąтового*. Tylko ten ostatni ruch objawia się w zmianie współrzędnych sferycznych.

Przypuścmy, że ruch gwiazdy w przestrzeni odbywa się po linii prostej z prędkością stałą i zastanówmy się, jaki ruch kątowy odpowiada takiemu ruchowi przestrzennemu. Oznaczmy przez n składową prędkości linjowej gwiazdy w promieniu widzenia, przez m składową prędkości linjowej w kierunku, prostopadłym do promienia widzenia, a przez μ prędkość ruchu kąтового; jest więc

$$Gg = n dt, \quad gG_1 = m dt, \quad \angle GSG_1 = \mu dt. \quad (c)$$

Oznaczmy jeszcze

$$SG = \Delta, \quad \angle SGG' = \gamma, \quad \angle SG_1G' = \gamma + d\gamma, \quad (d)$$

to z trójkąta SGG_1 wypływa

$$d\gamma = \mu dt, \quad (e)$$

a z trójkąta GgG_1 :

$$m = v \sin \gamma, \quad n = -v \cos \gamma. \quad (f)$$

Różniczkując wzory (f), znajdujemy

$$\frac{dm}{dt} = v \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt}, \quad \frac{dn}{dt} = v \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt},$$

albo

$$\frac{dm}{dt} = -n \mu, \quad \frac{dn}{dt} = m \mu;$$

a ponieważ jest także

$$m = \Delta \mu, \quad n = \frac{d\Delta}{dt},$$

więc wynika

$$\frac{dm}{dt} = \mu \frac{d\Delta}{dt} + \Delta \frac{d\mu}{dt} = n\mu + \Delta \frac{d\mu}{dt} = -n\mu,$$

oraz

$$\frac{d\mu}{dt} = -2 \frac{n\mu}{\Delta}. \quad (g)$$

Przyjmując $n = 100$ km/sek, $\Delta = 206265$ jednostek planetarnych, a więc $\pi = 1''$, oraz $\mu = 10''$ rocznie, wartości zatem większe, aniżeli w praktyce spotykane, otrzymamy ze wzoru (g) $\frac{d\mu}{dt} = |0''.002|$. Przyspieszenie ruchu kąтового, które przy tych założeniach miałoby miejsce, jest tak małe, że dopiero po 50 latach wartość μ zmieniłaby się o $0''.1$.

Z rozważań powyższych wnioskujemy, że gdy z obserwacji ruchu kąтового gwiazdy wynika, że $\mu = \text{const.}$, to wynik ten należy uważać za zgodny z założeniem, że ruch gwiazd w przestrzeni można w ciągu znacznych okresów czasu uważać za prostoliniowy i jednostajny.

U niektórych gwiazd zauważono, że w ruchu swym odchylają się one od wielkiego koła i że prędkość ruchu jest zmienna. W przypadkach takich jednakże zawsze tak odchylenia, jak i zmiany prędkości mają charakter perjodyczny; przyczyną ich jest ruch orbitalny dokoła środka ciężkości układu dwóch lub większej liczby mas, z których widzialną jest tylko jedna. Obserwacja dokładniejsza takich gwiazd wykazuje, że średnia ich droga jest wielkiem kołem, a średnia prędkość ma wartość stałą; wypływa stąd, że gdy gwiazda należy do układu kilku ciał, to środek ciężkości takiego układu ma ruch prostoliniowy i jednostajny, zgodnie z zasadami mechaniki niebios.

Pisząc $\Delta = \frac{1}{\pi}$, gdzie π jest paralaksą roczną gwiazdy, wi-

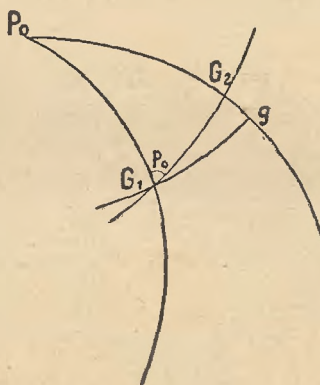
dzimy, że $m = \frac{\mu}{\pi}$, skąd wypływa, że składowa prędkości, prosto-

padła do promienia widzenia, może być wyznaczona, gdy znany jest ruch kątowy gwiazdy i jej paralaksa roczna. Oczywiście, gdy μ oznacza ruch kątowy w roku, to m oznacza wyrażony w jednostkach planetarnych rzut drogi, przebytej przez gwiazdę w ciągu roku, na płaszczyznę, prostopadłą do promienia widzenia.

Składową n , przypadającą w promieniu widzenia, otrzymuje się z obserwacji przesunięcia linii widmowych, którego wielkość jest od odległości niezależna. Znając prędkość w km/sek, która ze zmian długości fali linii widmowych wypływa, można też z łatwością obliczyć rzut na promień widzenia drogi, przebytej przez gwiazdę w ciągu roku.

Gdy znane są wartości obu składowych m i n , to z pomocą wzorów (f) można obliczyć także prędkość przestrzenną v i kąt γ , który tworzy kierunek ruchu gwiazdy z promieniem widzenia.

105. Składowe ruchu kąowego gwiazdy w dwóch spólrzędnych sferycznych i zmiany ich wartości. Niechaj będą G_1 i G_2 (ryc. 80) pozycje gwiazdy G , w epokach t_1 i t_2 , odniesione do średniego



Rycina 80.

równika i średniej równonocy epoki t_0 . Ruch gwiazdy zachodzi na wielkiem kole G_1G_2 . Gdy przez P_0 oznaczymy średni biegun świata w epoce t_0 i poprowadzimy przez G_1 i G_2 koła godzinne oraz równoleżnik G_1g , to koło G_1G_2 określone będzie przez kąt pozycyjny $P_0G_1G_2 = p_0$.

Drogę gwiazdy $G_1G_2 = s$ rozkładamy na dwie składowe, z których jedna G_1g przypada na równoleżniku, a druga gG_2 na kole godzinne. Ponieważ s jest małym łukiem, więc z dostateczną dokładnością możemy trójkąt G_1G_2g uważać za prostoliniowy i prostokątny przy g . W tem założeniu składowe mają wartości następujące:

$$G_1g = s \sin p_0, \quad gG_2 = s \cos p_0. \quad (h)$$

Gdy δ_1 jest zboczeniem punktu G_1 , to łukowi G_1g odpowiada na równiku łuk, którego długość jest $G_1g \sec \delta_1$. Łuk ten jest miarą zmiany wznoszenia prostego gwiazdy w czasie $t_2 - t_1$, łuk zaś gG_2 jest miarą zmiany zboczenia gwiazdy w tym samym czasie.

Gdy jeszcze prędkość ruchu własnego gwiazdy oznaczmy przez μ , to jest

$$s = \mu (t_2 - t_1). \quad (i)$$

Oznaczmy przez α_1, δ_1 oraz α_2, δ_2 odpowiednio spólrzędne równikowe gwiazdy w epokach t_1 i t_2 , to po uwzględnieniu wzorów (h) i (i) otrzymamy

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= \mu (t_2 - t_1) \sin p_0 \sec \delta_1, \\ \delta_2 - \delta_1 &= \mu (t_2 - t_1) \cos p_0. \end{aligned} \quad (j)$$

Jako prędkość zmiany obu spólrzędnych, wypływa ze wzorów (j)

$$\frac{d\alpha}{dt} = \mu \sin p_0 \sec \delta_1, \quad \frac{d\delta}{dt} = \mu \cos p_0;$$

albo, gdy odniesiemy te zmiany ogólnie do równika i równonocy epoki t , to wartość ich w epoce t wyrażają wzory

$$\frac{d\alpha}{dt} = \mu \sin p \sec \delta, \quad \frac{d\delta}{dt} = \mu \cos p. \quad (267)$$

Jak widzimy z tych wzorów, $\frac{d\alpha}{dt}$ i $\frac{d\delta}{dt}$ są funkcjami kąta pozycyjnego p i zboczenia δ . Obie te wielkości zmieniają się

z powodu precesji i ruchu własnego gwiazdy; prócz tego zmieniają się one z powodu nutacji, ale zmiany te ostatnie zawarte są w granicach bardzo małych i nie wpływają na miejsce średnie, mogą więc być pominięte.

Gdy znane są wartości $\frac{d\alpha}{dt}$ i $\frac{d\delta}{dt}$ dla takiejś epoki t , to możemy też znaleźć ich wartości dla innej epoki t' . Oznaczmy $t' - t = \tau$, to jest ogólnie

$$\varphi(t') = \varphi(t) + \varphi'(t)\tau + \frac{1}{2}\varphi''(t)\tau^2 + \dots$$

Gdy dalej we wzorach (267) oznaczmy

$$\frac{d\alpha}{dt} = \varphi_\alpha(t) = \mu_\alpha, \quad \frac{d\delta}{dt} = \varphi_\delta(t) = \mu_\delta, \quad (k)$$

to jest

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha'(t) &= \mu \sin p \sec \delta \operatorname{tang} \delta \frac{d\delta}{dt} + \mu \cos p \sec \delta \frac{dp}{dt} = \\ &= \mu_\alpha \frac{d\delta}{dt} \operatorname{tang} \delta + \mu_\delta \frac{dp}{dt} \sec \delta, \end{aligned} \quad (l)$$

$$\varphi_\delta'(t) = -\mu \sin p \frac{dp}{dt} = -\mu_\alpha \frac{dp}{dt} \cos \delta.$$

Ponieważ wartości δ i p zmieniają się wskutek precesji i wskutek ruchu własnego, więc połączmy po prawej stronie wzorów (l)

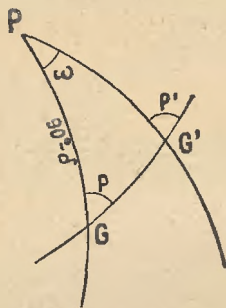
$$\frac{d\delta}{dt} = \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_1 + \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_2, \quad \frac{dp}{dt} = \left(\frac{dp}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dp}{dt}\right)_2, \quad (m)$$

gdzie pierwsze składniki stanowią część zmiany współrzędnych, spowodowaną przez precesję, drugie zaś część zmiany, wynikającą z ruchu własnego. Pierwsze składniki określone są przez wzory (245) i (264), mianowicie:

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_1 = n \cos \alpha, \quad \left(\frac{dp}{dt}\right)_1 = n \sin \alpha \sec \delta; \quad (n)$$

składnik $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_2$ stanowi składową prędkości ruchu własnego gwiazdy w zboczeniu, oznaczoną przez μ_δ we wzorach (k) i stojącą po lewej stronie drugiego ze wzorów (267); pozostaje jeszcze podać wartość składnika $\left(\frac{dp}{dt}\right)_2$, oznaczającego zmianę kąta pozycyjnego p , spowodowaną jedynie ruchem własnym.

Weźmy w tym celu pod uwagę rycinę 81, na której punkt P oznacza średni biegun świata w epoce t . Uważamy go za nieruchomy w czasie $t' - t$; gdy więc punkt G oznacza położenie gwiazdy w epoce t , a punkt G' położenie jej w epoce t' , to GG' jest drogą, przebytą przez gwiazdę w czasie $t' - t = \tau$



Rycina 81.

jedynie wskutek ruchu własnego. Oznaczmy przez p i p' kąty, utworzone przez koło GG' z kołami godzinnymi PG i PG'; $p' - p$ wyraża oczywiście zmianę kąta pozycyjnego kierunku ruchu gwiazdy, spowodowaną jej ruchem własnym w czasie τ .

Ponieważ $PG = 90^\circ - \delta$, więc oznaczając $\angle GPG' = \omega$, otrzymujemy z trójkąta GPG'

$$-\cos p' = -\cos p \cos \omega + \sin p \sin \omega \sin \delta.$$

W tym wzorze wielkościami zmiennymi są tylko p' i ω . Różniczkując więc względem czasu po obu stronach, znajdujemy

$$\sin p' \frac{dp'}{dt} = (\cos p' \sin \omega + \sin p \cos \omega \sin \delta) \frac{d\omega}{dt}. \quad (o)$$

Wzór powyższy ważny jest ogólnie, a więc też dla $\lim \tau = 0$. Wtedy jest $p' = p$ i $\omega = 0$. Podstawiając te wartości we wzorze (o), otrzymujemy

$$\frac{dp}{dt} = \sin \delta \frac{d\omega}{dt}.$$

Gdy zaś jeszcze uwzględnimy, że $\frac{d\omega}{dt}$ oznacza prędkość zmiany wznoszenia prostego α z powodu ruchu własnego gwiazdy, t. j. że $\frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_z$, to wynika

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_z = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_z \sin \delta = \mu_\alpha \sin \delta. \quad (p)$$

Podstawiając we wzorach (m) wartości według wzorów (k), (n) i (p), otrzymamy wzory następujące:

$$\frac{d\delta}{dt} = n \cos \alpha + \mu_\delta, \quad (q)$$

$$\frac{dp}{dt} = n \sin \alpha \sec \delta + \mu_\alpha \sin \delta.$$

Wartości powyższe podstawiamy we wzorach (l) i znajdujemy

$$\varphi_\alpha'(t) = \mu_\alpha (n \cos \alpha + \mu_\delta) \tan \delta + \mu_\delta (n \sin \alpha \sec \delta + \mu_\alpha \sin \delta) \sec \delta,$$

$$\varphi_\delta'(t) = -\mu_\alpha (n \sin \alpha \sec \delta + \mu_\alpha \sin \delta) \cos \delta;$$

albo też

$$\varphi_\alpha'(t) = n (\mu_\alpha \cos \alpha \tan \delta + \mu_\delta \sin \alpha \sec^2 \delta) + 2 \mu_\alpha \mu_\delta \tan \delta, \quad (268)$$

$$\varphi_\delta'(t) = -n \mu_\alpha \sin \alpha - \mu_\alpha^2 \sin \delta \cos \delta.$$

Gdy więc oznaczymy

$$\mu_{\alpha}' = \varphi_{\alpha}(t'), \quad \mu_{\delta}' = \varphi_{\delta}(t'), \quad (r)$$

i gdy w rozwinięciu funkcji $\varphi(t')$ ograniczymy się do pierwszej potęgi przyrostu τ , to otrzymamy ostatecznie:

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha}' = & \mu_{\alpha} + [n(\mu_{\alpha} \cos \alpha \tan \delta + \mu_{\delta} \sin \alpha \sec^2 \delta) + \\ & + 2 \mu_{\alpha} \mu_{\delta} \tan \delta] \sin 1'' \cdot \tau, \end{aligned} \quad (268)$$

$$\mu_{\delta}' = \mu_{\delta} - \mu_{\alpha} (n \sin \alpha + \mu_{\alpha} \sin \delta \cos \delta) \sin 1'' \cdot \tau.$$

Wzory (268) wyrażają zmianę, jakiej ulegają składowe ruchu własnego gwiazdy wskutek precesji i ruchu własnego. Wzory (269) wyznaczają wartość składowych ruchu własnego w epoce t' , odniesionych do równika i równonocy epoki t' , gdy dane są wartości składowych ruchu oraz współrzędne gwiazdy dla epoki t , odniesione do równika i równonocy epoki t .

Jeżeli jednakże składowe ruchu własnego w epokach t i t' odniesiemy do równika i równonocy epoki t_0 , to oczywiście zmiany, jakim ulegają wartości tych składowych, zależą tylko od ruchu własnego gwiazdy. Oznaczając przez μ_{α}^0 i μ_{δ}^0 wartości składowych w epoce t_0 , znajdziemy, opuszczając wyrazy zależne od precesji, wzory następujące:

$$\begin{aligned} (\mu_{\alpha})_0 = & \mu_{\alpha}^0 + 2 \mu_{\alpha}^0 \mu_{\delta}^0 \tan \delta_0 \sin 1'' (t - t_0), \\ (\mu_{\delta})_0 = & \mu_{\delta}^0 - \mu_{\alpha}^{0^2} \sin \delta_0 \cos \delta_0 \sin 1'' (t - t_0). \end{aligned} \quad (270)$$

Wartości $(\mu_{\alpha})_0$ i $(\mu_{\delta})_0$ są to wartości składowych ruchu własnego w epoce t , odniesione do równika i równonocy epoki t_0 .

106. Zmiana współrzędnych gwiazdy wskutek jej ruchu własnego.

Oznaczmy przez α_0 , δ_0 współrzędne gwiazdy w epoce t_0 , odniesione do średniego równika i średniej równonocy epoki t_0 , a przez $(\alpha)_0$, $(\delta)_0$ współrzędne tejże gwiazdy w epoce t , odniesione do równika i równonocy epoki t_0 , a więc zmienione tylko przez ruch własny. Ponieważ składowe prędkości ruchu własnego

są funkcjami czasu, określonymi w tym przypadku przez wzory (270), więc jest

$$(\alpha)_0 = \alpha_0 + \int_{t_0}^t (\mu_\alpha^0 + 2 \mu_\alpha^0 \mu_\delta^0 \tan \delta_0 \sin 1'' \cdot t) dt,$$

$$(\delta)_0 = \delta_0 + \int_{t_0}^t (\mu_\delta^0 - \mu_\alpha^0 \sin \delta_0 \cos \delta_0 \sin 1'' \cdot t) dt;$$

a po scałkowaniu

$$(\alpha)_0 - \alpha_0 = \mu_\alpha^0 (t - t_0) + \mu_\alpha^0 \mu_\delta^0 \tan \delta_0 \sin 1'' (t - t_0)^2, \quad (271)$$

$$(\delta)_0 - \delta_0 = \mu_\delta^0 (t - t_0) - \frac{1}{2} \mu_\alpha^0 \sin \delta_0 \cos \delta_0 \sin 1'' (t - t_0)^2.$$

Jeżeli dalej przez α , δ oznaczymy spólrzędne gwiazdy w epoce t , odniesione do średniego równika i średniej równonocy epoki t , a przez α' , δ' spólrzędne tej samej gwiazdy w epoce t' , odniesione do średniego równika i średniej równonocy epoki t' , to różnice $\alpha' - \alpha$ i $\delta' - \delta$ składają się z dwóch części: z części, spowodowanej przez precesję, i części, spowodowanej przez ruch własny. Oznaczmy

$$\alpha' - \alpha = P_\alpha + \Delta\alpha, \quad \delta' - \delta = P_\delta + \Delta\delta,$$

rozumiejąc przez P_α i P_δ pierwsze ze wspomnianych części, a przez $\Delta\alpha$ i $\Delta\delta$ drugie.

Pierwsze części uważamy za znane, gdyż w rozdziale o precesji podane zostały wzory, służące do ich obliczenia. Co się tyczy drugich części, to, ponieważ składowe prędkości ruchu własnego są funkcjami czasu, określonymi przez wzory (269), więc jest

$$\Delta\alpha = \int_t^{t'} \mu_\alpha' dt, \quad \Delta\delta = \int_t^{t'} \mu_\delta' dt,$$

a po scałkowaniu

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \mu_\alpha (t' - t) + \\ &+ \left[\frac{n}{2} (\mu_\alpha \cos \alpha \tan \delta + \mu_\delta \sin \alpha \sec^2 \delta) + \mu_\alpha \mu_\delta \tan \delta \right] \sin 1'' (t' - t)^2, \end{aligned} \quad (272)$$

$$\Delta\delta = \mu_\delta (t' - t) - \frac{1}{2} \mu_\alpha (n \sin \alpha + \mu_\alpha \sin \delta \cos \delta) \sin 1'' (t' - t)^2.$$

Wartości zmiennych, występujących w tych wzorach, które mają być użyte w rachunku, są to oczywiście wartości ich w epoce t .

Dokładniejszymi byłyby wzory, gdyby zastosować sposób całkowania wyjaśniony w ust (95) i potem niejednokrotnie stosowany. Wzory te, jak łatwo sprawdzić, są:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \{\mu_\alpha + [n(\mu_\alpha \cos \alpha \tan \delta + \mu_\delta \sin \alpha \sec^2 \delta) + \\ &\quad + 2\mu_\alpha \mu_\delta \tan \delta] \sin 1'' (t' - t)\}_{\frac{t}{2}} (t' - t), \\ \Delta\delta &= \{\mu_\delta - \mu_\alpha (n \sin \alpha + \mu_\alpha \sin \delta \cos \delta) \sin 1'' (t' - t)\}_{\frac{t}{2}} (t' - t).\end{aligned}\quad (272')$$

W podobny sposób zamiast wzorów (271) można stosować wzory dokładniejsze

$$\begin{aligned}(\alpha)_0 - \alpha_0 &= [\mu_\alpha + 2\mu_\alpha \mu_\delta \tan \delta \sin 1'' (t - t_0)]_{\frac{t}{2}} (t - t_0), \\ (\delta)_0 - \delta_0 &= [\mu_\delta - \mu_\alpha^2 \sin \delta \cos \delta \sin 1'' (t - t_0)]_{\frac{t}{2}} (t - t_0).\end{aligned}\quad (271')$$

W tych ostatnich wzorach, jak wiadomo, liczba $\frac{t}{2}$, stojąca za klamrą u dołu, oznacza, że wartości zmiennych, stojących w klamrze, odnoszą się do epoki $\frac{t+t'}{2}$, względnie $\frac{t_0+t}{2}$.

Wyrazy drugie we wzorach (271) i (272) są w ogólności bardzo małe i tylko w przypadku, gdy δ jest bliskiem $\pm 90^\circ$, osiągają znaczącą wartość. Gdy więc bez uszczerbku dokładności można je opuścić, jest wprost

$$\Delta\alpha = \mu_\alpha (t' - t), \quad \Delta\delta = \mu_\delta (t' - t). \quad (273)$$

Jako zasadę ogólną, dotyczącą stosowania tych ostatnich wzorów przybliżonych, można przyjąć, że wystarczają one zawsze wtedy, gdy w obliczeniu wartości precesji pominąć można *variatio saecularis*, oraz zawsze wtedy, gdy odstęp czasu $t' - t$ zawarty jest w granicach jednego roku.

ROZDZIAŁ X.

ASTRONOMICZNA RACHUBA CZASU.

107. Uwagi wstępne. Rozdziały poprzednie pouczają nas, że wielkości, z którymi spotykamy się w astronomji sferycznej, z nielicznymi wyjątkami zmieniają się z biegiem czasu, są więc funkcjami czasu. Wobec tego liczba, określająca wartość którejś z tych wielkości, tylko wtedy w istocie ją określa, gdy obok wartości podany też jest moment w czasie, w którym ta wartość zachodzi, czyli, gdy dana też jest, jak się często wyrażaliśmy, *epoka*. Tak na przykład, gdy mówimy, że ε jest pochyłością ekliptyki, mamy na myśli pewną określoną funkcję czasu, której dana wartość specjalna jest jej wartością w określonej epoce. Albo gdy w katalogu gwiazd podane są spółrzędne gwiazdy, to musi też być podana epoka, w której spółrzędne mają podaną w katalogu wartość. Epoką tą jest epoka katalogu, przez którą określona jest ekliptyka i równik, a więc też układ spółrzędnych równikowych, do którego spółrzędne gwiazd, objętych katalogiem, są odniesione.

Widzieliśmy, jakimi funkcjami czasu są różne wielkości, występujące w zagadnieniach astronomji sferycznej. Gdy jeszcze znana jest wartość tych funkcji w danej epoce, to można obliczyć ich wartość także dla jakiejś innej epoki, dokładnie określonej.

Zachodzi tu przede wszystkim potrzeba ścisłego określenia odstępu czasu, jaki dzieli obie wspomniane epoki, t. j. wyrażenia go w liczbach, które są dokładną jego miarą i pozwalają go porównać co do wielkości z innymi odstępami czasu, uważanymi za znane, które przyjmuje się za *jednostki czasu*.

Widzimy więc, że pierwszym warunkiem dokładnego określenia odstępu czasu jest dokładne określenie jednostek czasu, w których dany odstęp czasu może być wyrażony. A dalej, gdy długość dwóch odstępów ma znajdować się ściśle w tym samym stosunku, co liczby, wyrażające ich długość w tych samych jednostkach czasu, to jednostki czasu muszą mieć wartość zupełnie stałą, albo też przynajmniej zmieniać się tak nieznacznie, ażeby zmiany te na wartość wspomnianego stosunku nie wpływały w stopniu, przekraczającym granice błędów spostrzeżenia lub obliczenia.

Widzimy z tych uwag, jak pierwszorzędne i zasadnicze znaczenie w badaniach astronomicznych posiada dokładna definicja jednostek czasu i krytyczne zbadanie ich stałości, albo też stopnia ich prawdopodobnej lub też faktycznej zmienności. Że pomiar czasu nie tylko w badaniach astronomicznych ma znaczenie zasadnicze, o tem niema potrzeby szerzej się rozwodzić. Specjalne znaczenie, jakie sprawa ta posiada dla astronomji, wynika stąd, że zjawiska astronomiczne uznano za najbardziej nadające się do dokładnej definicji jednostek czasu i badania ich zmienności, a co za tem idzie, też do pomiaru czasu i ścisłej definicji epok.

Epokę jakąś w astronomji określa się zazwyczaj przez podanie odstępu czasu, wyrażonego w znanych jednostkach czasu, który ją dzieli od innej jakiejś epoki, ściśle zdefiniowanej. Oczywiście punktem wyjścia musi tu być jakiś moment, określony niezależnie od pomiaru odstępu czasu, np. chwila, w których szereg wielkości, zmiennych w sposób określony, posiada pewną, stwierdzoną przez obserwację, wartość. Takie fakta astronomiczne są podstawą chronologii astronomicznej; stanowią one jakby rusztowanie, wewnątrz którego w odpowiednich miejscach grupują się zdarzenia historyczne, albo pewne epoki, astronomicznie wyznaczone.

W rozdziale niniejszym zajmiemy się rozważaniem wszystkich tych okoliczności, z któremi związana jest sprawa dokładnej definicji epoki oraz pomiaru czasu.

108. Okres obrotu ziemi dokoła osi. Jednostki czasu wyprowadza astronomja ze zjawisk, powtarzających się perjodycznie.

Aby jednakże okres, w ciągu którego powtarza się pewne zjawisko, mógł być obrany za jednostkę czasu, muszą być spełnione warunki następujące: 1) musi być dany dowód jego niezmienności, lub też muszą istnieć dane, wystarczające do poznania charakteru i stopnia jego zmienności, 2) musi zachodzić możliwość wyznaczenia go przez obserwacje z dokładnością dowolną.

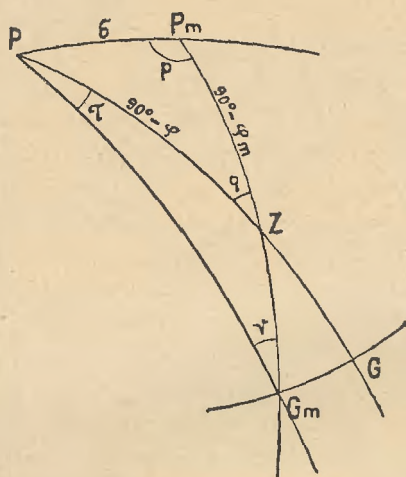
Pierwszy z tych warunków spełnia okres obrotu ziemi dookoła jej momentalnej osi obrotu. Badania teoretyczne wykazują, że okres ten odznacza się wielką stałością, a zmiany, o których z tych badań wnioskować można, są tak powolne, że dopiero po upływie bardzo długiego czasu przez obserwację stwierdzoneby być mogły. Praktycznie więc bardzo długo okres ten uważać można za niezmienny.

Zastanówmy się teraz nad tem, czy okres ten spełnia także drugi z wymienionych wyżej warunków. Wiadomo (ust. 26), że oś momentalna obrotu ziemi zmienia swe położenie wewnątrz ziemi, skutkiem czego momentalne bieguny zmieniają swe położenie na powierzchni ziemi. Należy zatem odróżniać momentalny równik ziemski oraz momentalne południki miejsc obserwacji, a zatem też momentalne szerokości i długości geograficzne, od tych wartości, które wypływają ze spostrzeżeń i mogą być zdefiniowane, jako wartości średnie.

Te ostatnie odpowiadają prawie dokładnie (pewne minimalne odchylenia spowodowane są ruchami głównego momentu bezwładności wewnątrz ziemi) średniemu położeniu osi momentalnej, zgodnemu z położeniem małej osi sferoidy ziemskiej. Wniosek ten wynika ze sposobów, stosowanych w praktyce do wyznaczenia południka i szerokości geograficznej miejsca obserwacji. Wyznacza się mianowicie wymienione elementy miejsca spostrzeżeń przez wielokrotne obserwacje, robione w mniejszych lub większych odstępach czasu. Niezgodność poszczególnych określeń przypisuje się błędom spostrzeżeń i wyrównywa się je według zasad teorii błędów. W rzeczywistości jednakże niezgodności te mają swe źródło częściowo także w istotnie zachodzących wahaniach bieguna nad poziomem miejsca obserwacji; ale, wobec perjodycznego charakteru tych wahań, przyjąć można, że w wynikach średnich z dłuższych okresów czasu

odchylenia od średniego położenia momentalnego bieguna znoszą się prawie w zupełności.

Jeżeli więc obserwujemy przejście gwiazdy przez południk, to jest to obserwacja przejścia przez jedynie znany nam, wyznaczony przez obserwacje południk średni; obserwacje takie nie określają nam okresu stałego, którym jest okres obrotu ziemi dookoła osi momentalnej, ale okres nieco różny od tego ostatniego i co do długości nieco zmienny. W jakich granicach zawarte są te zmiany możemy z łatwością obliczyć.



Rycina 82.

Niechaj oznacza na rycinie 82 P_m średni biegun świata, Z zenit miejsca obserwacji, a koło P_mZ średni południk tego miejsca; niech oznacza dalej punkt P momentalny biegun świata w chwili obserwacji, a więc koło PZ momentalny południk. Jeżeli przez φ_m i φ oznaczmy odpowiednio średnią i momentalną szerokość miejsca obserwacji, to jest

$$P_mZ = 90^\circ - \varphi_m, \quad PZ = 90^\circ - \varphi.$$

Pewna gwiazda przechodzi przez południk momentalny w punkcie G , a przez południk średni w punkcie G_m . W chwili przejścia tej gwiazdy przez południk średni, prawdziwym jej

kątem godzinnym, t. j. liczonym od południka momentalnego, jest kąt $PG_m = \tau$; o tyle więc obserwacja kulminacji zrobiona została później, aniżeli kulminacja w istocie zaszła. Oznaczmy

$$P_m P = \sigma, \quad \sphericalangle ZP_m P = p, \quad \sphericalangle P_m ZP = q,$$

i niechaj jeszcze oznacza δ_m zboczenie gwiazdy, liczone od średniego równika, a δ zboczenie jej liczone od momentalnego równika, to jest

$$P_m G_m = 90^\circ - \delta_m, \quad PG_m = 90^\circ - \delta.$$

Zbadajmy, o ile się różnią wartości φ i δ odpowiednio od φ_m i δ_m , i jaką wartość osiągać może kąt τ .

Z trójkąta $P_m PZ$ wynikają wzory następujące:

$$\begin{aligned} \cos \varphi \sin q &= \sin \sigma \sin p, \\ \cos \varphi \cos q &= \cos \sigma \cos \varphi_m - \sin \sigma \sin \varphi_m \cos p. \end{aligned} \quad (a)$$

Podobnie, gdy oznaczmy $\sphericalangle ZG_m P = r$, z trójkąta $PP_m G_m$ otrzymujemy wzory

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin r &= \sin \sigma \sin p, \\ \cos \delta \cos r &= \cos \sigma \cos \delta_m - \sin \sigma \sin \delta_m \cos p. \end{aligned} \quad (b)$$

Weźmy następnie pod uwagę trójkąt PZG_m . Jest w nim:

$$ZG_m = P_m G_m - P_m Z = \varphi_m - \delta_m, \quad PG_m = PG = 90^\circ - \delta;$$

wypływa więc z niego

$$\cos \delta \sin \tau = \sin (\varphi_m - \delta_m) \sin q. \quad (c)$$

Jak widzieliśmy w ustępie 26, kąt σ jest bardzo mały; wynosi on co najwyżej $0''.2$. Gdy więc δ i φ nie mają wartości bliskich $\pm 90^\circ$, to wzory (a) z dostateczną dokładnością można pisać, jak następuje:

$$\begin{aligned} q &= \sigma \sin p \sec \varphi_m, \\ \cos \varphi_m - \cos \varphi &= \sin \sigma \sin \varphi_m \cos p. \end{aligned} \quad (d)$$

Że zaś można też pisać

$$2 \sin \frac{\varphi_m + \varphi}{2} \sin \frac{\varphi_m - \varphi}{2} = -\sin \sigma \sin \varphi_m \cos p, \quad (e)$$

więc, przyjmując we wzorze (e) $\sin \frac{\varphi_m + \varphi}{2} = \sin \varphi_m$ oraz zastępując w nim wstawy małych kątów przez kąty, znajdujemy

$$\varphi = \varphi_m + \sigma \cos p. \quad (f)$$

Podobnie przez uproszczenia ze wzorów (b) wypływają wzory

$$r = \sigma \sin p \sec \delta_m, \quad \delta = \delta_m + \sigma \cos p; \quad (g)$$

wreszcie, gdy we wzorze (c) podstawimy na q wartość według wzorów (d), otrzymamy

$$\tau = \sigma \sin p \frac{\sin (\varphi_m - \delta_m)}{\cos \varphi_m \cos \delta_m}. \quad (h)$$

Ze wzorów (f) i (g) widzimy, że szerokość geograficzna i zboczenia gwiazd ulegają zmianom jednakowym. Obszar zmian tych wielkości wynosi 2σ i jest jednakowy dla wszystkich szerokości; ale w danej chwili wartości różnic $\varphi_m - \varphi$ i $\delta_m - \delta$ zależą od kąta p , a więc od długości geograficznej miejsca obserwacji. Oznaczmy tę długość przez λ , a przez l długość geograficzną prawdziwego bieguna w danej chwili, to jest

$$p = l - \lambda,$$

oraz

$$\varphi - \varphi_m = \sigma \cos l \cos \lambda + \sigma \sin l \sin \lambda.$$

Gdy oznaczymy

$$\sigma \cos l = x, \quad \sigma \sin l = y,$$

to otrzymamy

$$\varphi - \varphi_m = x \cos \lambda + y \sin \lambda.$$

Jest to wzór, różniący się od wzoru, podanego w ustępie 26, tylko o wyraz Kimury, który od spólrzędnych geograficznych jest niezależny.

Naturalnie $\sigma \cos p$ posiada w danej chwili wartości bezwzględnie równe, lecz z przeciwnymi znakami, w miejscach, których długości różnią się o 180° , a równa się zero, gdy długość $\lambda = l \pm 90^\circ$. Ta zależność odchyień od długości geograficznej jest dowodem, że zmiany szerokości i zboczeń są skutkiem ruchu osi momentalnej obrotu ziemi wewnątrz ziemi. Że zależność taka istnieje, wpływa to ze spostrzeżeń, dokonywanych na stosownie obranych stacjach.

Wzór (h) określa kąt godzinny gwiazdy w chwili prawdziwej kulminacji, liczony od średniego południka. Oznaczmy przez ω_0 okres czasu, który upływa między dwoma kolejnymi przejściami gwiazdy przez południk momentalny, a przez ω_1 okres czasu, upływający między dwoma kolejnymi przejściami gwiazdy przez południk średni; jeżeli jeszcze przez $d\tau$ rozumieć będziemy zmianę wartości kąta τ w czasie ω_0 , to jest

$$\omega_0 = \omega_1 + d\tau.$$

Z badań teoretycznych wynika, że ω_0 jest okresem stałym ¹⁾; wzór powyższy wyraża zatem, że okres $\omega_0 = \omega_1 + d\tau$ podlega takim samym zmianom jak $d\tau$. Przyjmując wartość σ w okresie ω_0 za stałą, otrzymujemy ze wzoru (h)

$$d\tau = \sigma \cos p \frac{\sin(\varphi_m - \delta_m)}{\cos \varphi_m \sin \delta_m} dp, \quad (i)$$

gdzie dp oznacza zmianę kąta p w czasie ω_0 .

Zorientujmy się co do wartości tej zmiany $d\tau$. Według Chandra'a okres wahań osi momentalnej wynosi około 14 miesięcy, czyli w przybliżeniu $420 \omega_0$ (ust. 26), a że największa wartość σ wynosi $0''.2$, więc $dp = \frac{2\pi}{420} = \frac{1}{67}$ oraz

$$d\tau = 0''.0002 \cos p \frac{\sin(\varphi_m - \delta_m)}{\cos \varphi_m \cos \delta_m}. \quad (j)$$

¹⁾ Pomijamy w tem rozważaniu wnioski, wpływające z wiekowego przyspieszenia księżyca.

Widzimy stąd, że tylko w bezpośredniej bliskości biegunów $d\tau$ osiągnąć może wartość, dochodzącą do 1^s , ale w każdym razie średnia wartość $d\tau$ w okresie 14-miesięcznym zbliża się do zera. Praktycznie więc wahania długości okresu ω_1 mogą nie być brane w rachubę i możemy z dostateczną dokładnością przyjąć $\omega_1 = \omega_0$. W ten sposób identyfikujemy okres, w którym kąt godzinny gwiazdy, liczony od średniego południka, wzrasta o 360° , z okresem obrotu ziemi dookoła momentalnej osi, i również średni południk identyfikujemy z południkiem momentalnym.

Dokładne wyznaczenie długości okresu ω_1 utrudnia okoliczność, że współrzędne gwiazd stałych ulegają zmianie z powodu ich ruchu własnego, który dla każdej gwiazdy oddzielnie wyznaczony być musi. Wskutek tego okres ten nie został obrany za jednostkę czasu, mającą zastosowanie w astronomji.

109. Doba stellarna i doba gwiazdowa. W ustępie 32 określiliśmy dobę gwiazdową, jako okres czasu, w którym kąt godzinny jakiejś gwiazdy, nie zmieniającej położenia na niebie, wzrasta o 360° , a w ustępie 37 zidentyfikowaliśmy ten okres z okresem, w którym kąt godzinny punktu wiosennego θ wzrasta o 360° .

W rzeczywistości są to dwa okresy różne, a i sama poprzednio podana definicja doby gwiazdowej jest nieścisła. Okres, który w ustępie 32 nazwany został dobą gwiazdową, jest w istocie okresem ω_1 , o którym była mowa w ustępie poprzednim. Ponieważ dla każdej gwiazdy jest zawsze $t = \theta - \alpha$, więc kąt godzinny t wzrasta o 360° , gdy różnica $\theta - \alpha$ wzrasta o 360° . Gdyby α miało wartość stałą, to okres wzrostu t i θ o 360° byłby jednakowy. Ale wiemy, że α ulega zmianie z rozmaitych powodów, przede wszystkim zaś wskutek precesji, nutacji i ruchu własnego.

Wobec tego musimy rozróżniać okres, w ciągu którego t wzrasta o 360° w istocie, od okresu, w którymby t wzrastało o 360° , gdyby α miało stałą wartość. Nazwijmy pierwszy z tych okresów *dobą stellarną*, to z uwag powyższych wynika, że okres ten ma długość zmienną. Wpływ ruchu własnego, który w ciągu doby jest znikomy, praktycznie nie wchodzi w rachubę. Zmiany α ,

spowodowane przez precesję, sprawiają, że doba stellarna podlega nie tylko zmianom wiekowym, ale i perjodycznym; co więcej, ponieważ wartość zmiany α , spowodowanej przez precesję, zmienia się wraz z δ , więc widzimy, że długość doby stellarnej zależy też od współrzędnych gwiazdy, któraby celem wyznaczenia długości tej doby była obserwowana.

Z tych powodów doba stellarna nie została obrana za jednostkę czasu, jakkolwiek w praktyce identyfikuje się ją często z dobą gwiazdową, od której tylko bardzo mało się różni. Za jednostkę czasu przyjętą została doba gwiazdowa, której ścisłą definicję obecnie podać możemy.

Kąt godzinny θ punktu wiosennego wzrasta w sposób, niezależny od współrzędnych gwiazd. Gdyby punkt wiosenny nie zmieniał swego położenia na niebie, to kąt θ wzrastałby z taką samą prędkością, z jaką odbywa się obrót ziemi dookoła osi. W rzeczywistości zaś punkt wiosenny przesuwają się na równiku i ruch jego składa się z dwóch części: 1) z części, wzrastającej proporcjonalnie do czasu, t. j. precesyjnej, i 2) z części perjodycznej, t. j. nutacyjnej. Wskutek tego kąt godzinny punktu wiosennego θ nie wzrasta proporcjonalnie do czasu. Znajdźmy ogólny wzór na θ .

Gdy oznaczymy $\varphi_{\omega_0} = 360^\circ$, znaczy to, że w jednostce czasu ziemia obraca się dookoła swej osi o kąt φ , i że w takich jednostkach wyrażony jest okres ω_0 . Oznaczmy przez θ_0 kąt godzinny punktu wiosennego w epoce t_0 i znajdziemy jego wartość θ w epoce t .

Gdy wyrazimy odstęp czasu $t - t_0$ w tych samych jednostkach czasu, co ω_0 , to oczywiście kąt godzinny punktu wiosennego wzrasta przede wszystkim o kąt $\varphi(t - t_0)$ wskutek obrotu ziemi; dalej wiemy z ustępu 97, że wzrasta on w tym samym czasie o kąt $\varepsilon + \zeta_0$ z powodu precesji; wreszcie wartość jego zmienia się w tym czasie także wskutek nutacji. Wartość przesunięcia nutacyjnego otrzymamy, gdy w drugim ze wzorów (259) położymy $\delta = 0^\circ$; wynosi ono $\bar{p} \cos \varepsilon_m$, gdzie przez ε_m należy rozumieć średnią pochyłość ekliptyki w epoce t , a \bar{p} oznacza sumę wyrazów Σp , obliczoną według wzoru (223) dla epoki t . Jest zatem

$$\theta = \theta_0 + \varphi(t - t_0) + \varepsilon + \zeta_0 + \bar{p} \cos \varepsilon_m. \quad (274)$$

Oznaczmy jeszcze średnią wartość kąta θ w epoce t przez θ_m , to gdy uwzględnimy postać wyrażenia na $z + \zeta_0$ według wzoru (bf) ustępu 97, będzie

$$\theta_m = \theta_0 + \varphi(t - t_0) + f_1(t - t_0) + f_2(t - t_0)^2. \quad (k)$$

Otóż, według ścisłej definicji, dobą gwiazdową jest okres czasu, w którym wartość kąta θ_m wzrasta o 360° .

Prędkość zmiany kąta θ_m wyraża się przez wzór

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \varphi + f_1 + 2f_2(t - t_0); \quad (l)$$

oznaczymy więc przez ω dobę gwiazdową, wyrażoną w tych samych jednostkach czasu, co okres ω_0 , to jest

$$\omega = \frac{360^\circ}{\varphi + f_1 + 2f_2(t - t_0)} = \frac{360^\circ}{\varphi} \frac{1}{1 + \frac{f_1}{\varphi} + \frac{2f_2}{\varphi}(t - t_0)}. \quad (m)$$

A że współczynniki f_1 i f_2 mają wartości małe w porównaniu z φ , więc z dostatecznem przybliżeniem przyjąć możemy

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \frac{f_1}{\varphi} - \frac{2f_2}{\varphi}(t - t_0) \right]. \quad (275)$$

Spółczynniki f_1 i f_2 mają wartość dodatnią, więc wzór (275) wskazuje, że doba gwiazdowa jest nieco krótsza od okresu obrotu ziemi dokoła osi i że długość jej powoli się zmniejsza.

Z określenia wyżej podanego widzimy, że nazwa doby gwiazdowej dla okresu ω nie jest zupełnie stosowną, nazwą właściwą byłaby doba zwrotnikowa. Dobą gwiazdową powinienby nazywać się okres, który nazwaliśmy wyżej dobą stellarną, zniwoleni do przyjęcia tej nazwy właśnie tą okolicznością, że dla doby zwrotnikowej przyjętą została nieodpowiednia nazwa doby gwiazdowej, utarta przez długotrwałe jej stosowanie.

Ponieważ z powodu wyrazów perjodycznych kąt θ , określony przez wzór (274), t. j. czas gwiazdowy, nie wzrasta pro-

porcjonalnie do czasu, więc też okres czasu, upływający pomiędzy dwoma kolejnymi górowaniami punktu wiosennego, nie jest równy dobie gwiazdowej i ulega drobnym wahaniom. Co do wielkości tych wahań z łatwością możemy się zorientować.

Praktycznie wchodzić może w rachubę tylko pierwszy wyraz wyrażenia na \bar{p} , t. j. możemy przyjąć

$$\bar{p} \cos \varepsilon = -17''.2 \cos \Omega \quad \cos \varepsilon = -1^s.052 \cos \Omega,$$

$$\frac{d(\bar{p} \cos \varepsilon)}{dt} = 1^s.052 \sin \Omega \frac{d\Omega}{dt}.$$

Ponieważ okres, w którym Ω zmienia się o 360° , wynosi w przybliżeniu $6800 \omega_0$ (ust. 94), więc $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{2\pi}{6800} = \frac{1}{1083}$, a zatem

$$\frac{d(\bar{p} \cos \varepsilon)}{dt} = 0^s.00092 \sin \Omega.$$

To znaczy, że różnica dwóch po sobie następujących okresów, w których θ wzrasta o 360° , waha się w granicach $\pm 0^s.001$; takim więc też co najwyżej może być błąd wyznaczenia doby gwiazdowej, gdyby wpływ nutacji nie został uwzględniony. Natomiast czas gwiazdowy względem czasu absolutnie jednostajnego waha się z powodu pierwszego wyrazu nutacji w granicach $\pm 1^s.052$ w okresie 18 $\frac{1}{2}$ -letnim i z powodu drugiego wyrazu w granicach $0^s.08$ w okresie półrocznym.

110. Czas słoneczny prawdziwy i średni. W ustępie 42 nazwaliśmy prawdziwym czasem słonecznym przeciąg czasu, który do danej chwili upłynął od prawdziwego południa, mierzony kątem godzinnym słońca. Określenie to nie jest zupełnie dokładne i wymaga uzupełnienia.

Z rozdziałów poprzednich wynika, że rozróżniać musimy prawdziwe spółrzedne słońca od spółrzednych pozornych, t. j. obarczonych aberacją, i geocentryczne od topocentrycznych, t. j. obarczonych paralaksą dzienną.

Ze wzorów (142) widzimy, że w chwili górowania słońca, t. j. dla $t=0$, wpływ paralaksy dziennej na kąt godzinny słońca również jest zerem; znaczy to, że topocentryczne południe co do czasu nie różni się od geocentrycznego. Jednakże gdy mowa jest o kącie godzinnym słońca, który jest miarą prawdziwego czasu słonecznego, to należy rozumieć kąt godzinny geocentryczny słońca, który się różni od kąta godzinnego topocentrycznego.

Z powodu aberacji rocznej rozróżniać musimy pomiędzy prawdziwym południem a pozornym, zależnie od tego, czy równym zeru staje się prawdziwy kąt godzinny słońca, czy też kąt pozorny. Otóż chwilą, od której liczy się prawdziwy czas słoneczny, nie jest południe prawdziwe, ale południe pozorne według powyższego określenia, a miarą czasu prawdziwego słonecznego jest pozorny kąt godzinny słońca, liczony od pozornego południa.

Gdy więc w czasie gwiazdowym θ pozorne wznoszenie proste słońca oznaczmy przez α_{\odot}' , to kąt ϑ , określony przez wzór

$$\vartheta = \theta - \alpha_{\odot}', \quad (276)$$

jest pozornym kątem godzinnym słońca, a więc, stosownie do podanego wyżej określenia, *prawdziwym czasem słonecznym* w tej chwili.

Wiemy, że ani θ ani α_{\odot} nie wzrasta jednostajnie, a więc też i czas prawdziwy słoneczny ϑ nie wzrasta proporcjonalnie do czasu. Aby bliżej zbadać, w jaki sposób zmienia się wartość ϑ , rozbijmy wyrażenie ϑ na dwie części, mianowicie na część, wzrastającą stale (choć nie jednostajnie) z czasem, oraz na część, złożoną z wyrazów perijodycznych.

Podstawmy w tym celu we wzorze (276) najprzód na miejsce θ wartość tego kąta według wzoru (274) z uwzględnieniem postaci wyrazów $z + \zeta_0$, zastosowanej we wzorze (k), to jest

$$\vartheta = \theta_0 - \alpha_{\odot}' + (\varphi + f_1)(t - t_0) + f_2(t - t_0)^2 + \bar{p} \cos \varepsilon. \quad (276')$$

Oznaczmy przez \odot' pozorną długość słońca oraz

$$\alpha_{\odot}' = \odot' + E', \quad (n)$$

to porównując ten ostatni wzór ze wzorem (80''), widzimy, że jest

$$E' = -\tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2 \odot' + \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\varepsilon}{2} \sin 4 \odot' - \\ - \frac{1}{3} \tan^6 \frac{\varepsilon}{2} \sin 6 \odot' + \dots \quad (\text{n})$$

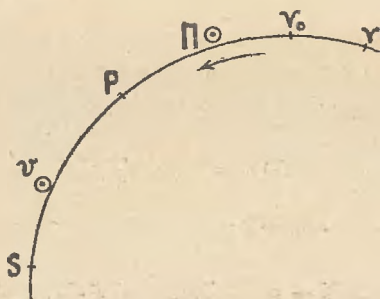
E' nazywa się *redukcją słońca na równik*; jak widzimy, wyrażenie na E' składa się z samych wyrazów perjodycznych. Ale i druga część wyrażenia (n) oprócz wyrazów, wzrastających stale z czasem, zawiera jeszcze i wyrazy perjodyczne.

Oznaczmy przez \odot prawdziwą geocentryczną długość słońca, to według wzoru (188) jest

$$\odot' = \odot - k_1 + k_1' \cos (\odot - \omega),$$

gdzie $k_1 = 20''.47$, $k_1' = 0''.343$, a ω oznacza długość punktu przysłonecznego ziemi. Jest zatem

$$\alpha_{\odot}' = \odot - k_1 + E' + k_1' \cos (\odot - \omega). \quad (\text{o})$$



Rycina 83.

Z prawdziwej długości słońca również jeszcze wydzielić można część perjodyczną. Niechaj na ryc. 83 γS będzie łukiem ekliptyki epoki t , na którym punkt γ jest równonocą epoki t , a P i S oznaczają odpowiednio położenie punktu przyziemnego słońca i słońca w tej samej epoce. Jest zatem $\gamma P = \Pi_{\odot}$ długością punktu przyziemnego, $\gamma S = \odot$ długością słońca, a $PS = v_{\odot}$

anomalją prawdziwą słońca. Niechaj w tym samym czasie M_{\odot} będzie anomalją średnią słońca i oznaczmy

$$v_{\odot} - M_{\odot} = F, \quad (p)$$

to z ryciny wypływa

$$\odot = \Pi_{\odot} + M_{\odot} + F. \quad (q)$$

Funkcja F nosi nazwę *równania środka* i postać jej wypływa z teorii ruchu eliptycznego. Gdy przez e oznaczymy mimośród drogi ziemskiej, to wzór na F ma postać następującą:

$$F = \left(2e - \frac{e^3}{2}\right) \sin M_{\odot} + \frac{1}{4}e^2 \sin 2M_{\odot} + \frac{1}{8}e^3 \sin 3M_{\odot} + \dots \quad (r)$$

Widzimy, że funkcja F składa się z samych wyrazów perijodycznych. Opuszczając we wzorze (q) ostatni wyraz, oznaczmy

$$\odot_m = \Pi_{\odot} + M_{\odot}; \quad (s)$$

w ten sposób określona długość słońca \odot_m nazywa się *średnią długością*.

Długość słońca zmienia się wskutek ruchu słońca, oraz wskutek precesji i nutacji. Oznaczmy przez (\odot_m) średnią długość słońca liczoną od stałej równonocy epoki t , to jest

$$\odot_m = (\odot_m) + \chi, \quad (t)$$

gdzie χ ma postać, określoną przez wzory (199) i (200), mianowicie

$$\chi = \delta_1(t - t_0) + \delta_2(t - t_0)^2 + \dots + \bar{p}.$$

Niechaj będzie jeszcze \odot_m^0 średnia długość słońca w epoce t_0 , liczona od średniej równonocy epoki t_0 , a φ' niech będzie kąt, o który średnia długość słońca, liczona od tegoż punktu, wzrasta w jednostce czasu. Powyższy wzrost średniej długości podlega perturbacji, którą można przedstawić w postaci

$$v = g_1(t - t_0) + g_2(t - t_0)^2 + \bar{p}_1, \quad (u)$$

gdzie g_1 i g_2 są stałymi współczynnikami, a \bar{p}_1 jest sumą wyrazów perjodycznych. Wobec tego jest

$$(\odot_m) = \odot_m^0 + (\varphi' + g_1)(t - t_0) + g_2(t - t_0)^2 + \bar{p}_1, \quad (v)$$

$$\odot_m = \odot_m^0 + (\varphi' + g_1 + \delta_1)(t - t_0) + (\delta_2 + g_2)(t - t_0)^2 + \bar{p} + \bar{p}_1. \quad (w)$$

Podstawiając tę ostatnią wartość na \odot_m we wzorze (o), po uwzględnieniu (q) i (s) znajdujemy:

$$\alpha_{\odot}' = \odot_m^0 - k_1 + (\varphi' + g_1 + \delta_1)(t - t_0) + (\delta_2 + g_2)(t - t_0)^2 + F + E' + k_1' \cos(\odot - \omega) + \bar{p} + \bar{p}_1. \quad (x)$$

Wzór (276') po podstawieniu na miejscu α_{\odot}' wartości według wzoru (x) otrzymuje postać następującą:

$$\begin{aligned} \vartheta = \vartheta_0 - \odot_m^0 + k_1 + (\varphi + f_1 - \varphi' - g_1 - \delta_1)(t - t_0) + \\ + (f_2 - \delta_2 - g_2)(t - t_0)^2 + \bar{p}(\cos \varepsilon - 1) - \bar{p}_1 - F - E' - \\ - k_1' \cos(\odot - \omega). \end{aligned} \quad (276'')$$

Oznaczmy jeszcze w tem wyrażeniu

$$\begin{aligned} \vartheta_0 - (\odot_m^0 - k_1) = \vartheta_0, \quad \varphi + f_1 - \varphi' - g_1 - \delta_1 = \vartheta_1, \\ f_2 - \delta_2 - g_2 = \vartheta_2, \\ \bar{p}(\cos \varepsilon - 1) - \bar{p}_1 - E' - F - k_1' \cos(\odot - \omega) = R, \end{aligned} \quad (277)$$

to możemy też pisać

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1(t - t_0) + \vartheta_2(t - t_0)^2 + R, \quad (276''')$$

gdzie ϑ_0 , ϑ_1 i ϑ_2 są współczynnikami stałymi, których wartość zmienia się tylko nieznacznie z epoką t_0 , a R jest sumą wszystkich wyrazów perjodycznych.

Czas prawdziwy słoneczny nie wzrasta proporcjonalnie do czasu z powodu występującego w wyrażeniu jego wyrazu kwadratowego oraz wyrazów perjodycznych. Proporcjonalnie do czasu zmienia się kąt η , określony w sposób następujący:

$$\eta = \vartheta_0 + \vartheta_1(t - t_0). \quad (278)$$

Gdy wzór na η napiszemy w postaci

$$\eta = \theta - \alpha_m', \quad (278')$$

to możemy powiedzieć, że η jest kątem godzinnym pewnego punktu na niebie, którego wznoszenie proste jest α_m' . Otóż tak określony kąt godzinny nazywa się *czasem średnim słonecznym*, a chwila, w której $\eta = 0^0$, określa się jako *średnie południe*. Z porównania wzorów (278) i (276''') przy uwzględnieniu wzoru (278') wynika, że jest

$$\alpha_m' = \alpha_{\odot}' + \vartheta_2 (t - t_0)^2 + R, \quad (y)$$

albo

$$\alpha_m' = \odot_m^0 - k_1 + (\varphi' + g_1 + \delta_1)(t - t_0) + f_2 (t - t_0)^2 + \bar{p} \cos \varepsilon. \quad (279)$$

Gdy jeszcze $\delta_m' = 0$, to punkt, określony przez współrzędne α_m' i δ_m' , nazywa się *słońcem średnim*. Możemy więc teraz powiedzieć, że średnim południem jest chwila górowania średniego słońca, a czas średni słoneczny równa się kątowi godzinnemu średniego słońca.

Widzimy ze wzoru (279), że wznoszenie proste średniego słońca nie wzrasta proporcjonalnie do czasu z powodu wyrazu drugiego stopnia i wyrazów perjodycznych; pomimo to różnica $\theta - \alpha_m'$, t. j. η , ma postać, określoną przez wzór (278).

Oznaczmy jeszcze

$$\vartheta_2 (t - t_0) + R = -Z, \quad (280)$$

to jest

$$\alpha_{\odot}' = \alpha_m' + Z, \quad \eta = \vartheta + Z. \quad (281)$$

Funkcja Z , określona przez wzór (280), nazywa się *równaniem czasu* (ust. 42). Gdy wartość tej funkcji w czasie t jest znana, to według wzoru (281) można też znaleźć η , gdy znane jest ϑ , lub też znaleźć ϑ , gdy znane jest η .

111. Doba słoneczna prawdziwa i średnia. Okres czasu, w którym kąt ϑ wzrasta o 360^0 , nazywa się *prawdziwą dobą słoneczną*.

Ze wzoru (276''') otrzymujemy

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \vartheta_1 + 2\vartheta_2(t - t_0) + \frac{dR}{dt}.$$

To znaczy, że prędkość zmiany kąta ϑ , oprócz zmiany, proporcjonalnej do czasu, ulega także jeszcze wahaniom periodycznym. Skutkiem tego prawdziwa doba słoneczna ω_\odot , której długość określona jest przez wzór

$$\omega_\odot = \frac{360^\circ}{\vartheta_1 + 2\vartheta_2(t - t_0) + \frac{dR}{dt}}, \quad (282)$$

jest okresem, ulegającym zmianom wiekowym i periodycznym. W jakich granicach zawarte są periodyczne zmiany długości prawdziwej doby słonecznej, zobaczymy później.

Okres czasu, w którym kąt η wzrasta o 360° , nazywa się *dobą słoneczną średnią*. Ze wzoru (278) wypływa $\frac{d\eta}{dt} = \vartheta_1$. Gdy więc przez ω_m oznaczymy średnią dobę słoneczną, to jest

$$\omega_m = \frac{360^\circ}{\vartheta_1}. \quad (283)$$

W tym wzorze ϑ_1 jest współczynnikiem, zależnym od składników f_1 , g_1 , δ_1 , które ulegają nieznacznym zmianom w zależności od epoki; stąd też i wartość ω_m zmienia się wraz z epoką. Ale zmiany te są tak małe, że w ciągu bardzo długich okresów czasu można okres ω_m praktycznie uważać za stały.

Wyznaczenie długości doby średniej słonecznej wymaga tylko znajomości ϑ_1 , a więc według wzorów (277) wartości φ , f_1 , φ' , g_1 i δ_1 . Wartości te, jak zobaczymy, w istocie znane są z wielką dokładnością, wobec czego wyznaczenie ω_m nie przedstawia trudności zasadniczych.

Widzimy, że doba średnia słoneczna czyni zadość tym warunkom, które wymienione były w ustępie 108, jako konieczne aby jakiś okres mógł być obrany za jednostkę czasu. Spełnia

ona te warunki w stopniu znacznie wyższym, aniżeli okresy ω_0 , ω_1 , ω i ω_\odot , o których wyżej była mowa. Dlatego też doba średnia słoneczna przyjęta została za podstawową jednostkę czasu i wszystkie inne jednostki czasu, mniejsze lub większe, określane bywają w stosunku do tej jednostki.

Oczywiście δ_1 oraz φ , φ' , f_1 , g_1 i δ_1 zależą od obranej jednostki czasu. Gdy za jednostkę czasu przyjmiemy średnią dobę słoneczną, to jest $\omega_m = 1$, a więc $\delta_1 = 360^\circ$, albo też

$$\varphi - \varphi' + f_1 - g_1 - \delta_1 = 360^\circ. \quad (z)$$

Możemy zatem też powiedzieć, że doba średnia słoneczna jest taką jednostką czasu, iż gdy wartości φ , φ' , f_1 , g_1 i δ_1 odnoszą się do tej jednostki, to spełniony jest wzór (z).

112. Rok gwiazdowy, zwrotnikowy i anomalistyczny. *Dobami*, jak to widzieliśmy w poprzednich ustępach, nazywają się ogólnie okresy, których podstawą jest okres obrotu ziemi dookoła osi; od tego ostatniego różne doby różnią się tylko nieznacznie. Podobnie *rokiem* ogólnie nazywa się każdy okres, mający za podstawę okres obiegu ziemi dookoła słońca i różniący się od tego ostatniego tylko nieznacznie.

Dotąd, mianowicie w ustępie 42, podane było tylko określenie roku zwrotnikowego; według tego określenia rokiem zwrotnikowym nazywa się okres czasu, w ciągu którego długość lub wznoszenie proste słońca wzrasta o 360° . Określenie to jednakże nie jest dostatecznie dokładne. Ścisłą definicję roku zwrotnikowego i innych okresów, z obiegiem ziemi związanych, możemy podać dopiero obecnie.

W wyrażeniach długości słońca i wznoszenia prostego słońca, jak widzieliśmy, występują wyrazy perjodyczne o różnych okresach. Wynika stąd, że rok zwrotnikowy, według określenia, danego w ust. 42, podlegałby musiał wahaniom, zależnym od tych wyrazów perjodycznych. Celem uniknięcia tej niedogodności za podstawę ścisłego określenia roku zwrotnikowego przyjmuje się średnią długość słońca.

Rozróżnialiśmy w ustępie 110 średnią długość słońca, liczoną od stałej równonocy epoki t_0 , i średnią długość słońca, liczoną od

prawdziwej równonocy epoki t . Nazwijmy pierwszą z tych długości *długością gwiazdową*, a drugą — *długością zwrotnikową*. Wartości obu tych długości określone są przez wzory (v) i (w); wyrażenia ich składają się z części nieperjodycznych oraz z wyrazów perjodycznych.

Stosownie do tych dwóch różnych długości rozróżniamy rok gwiazdowy i rok zwrotnikowy. *Rokiem gwiazdowym* nazywamy okres czasu, w którym część nieperjodyczna wyrażenia gwiazdowej długości słońca według powyższego określenia wzrasta o 360° . Podobnie *rokiem zwrotnikowym* nazywa się okres czasu, w którym część nieperjodyczna wyrażenia średniej zwrotnikowej długości słońca wzrasta o 360° .

Gdy więc stosownie do wzorów (v) i (w) napiszemy

$$(\varphi' + g_1)(t - t_0) + g_2(t - t_0)^2 = 360^\circ \vartheta_g, \quad (\text{aa})$$

$$(\varphi' + g_1 + \delta_1)(t - t_0) + (g_2 + \delta_2)(t - t_0)^2 = 360^\circ \vartheta_z, \quad (\text{ab})$$

to ϑ_g oznacza liczbę lat gwiazdowych, zawartą w odstępie czasu $t - t_0$, a ϑ_z oznacza liczbę lat zwrotnikowych, zawartą w tymże odstępie czasu.

Ze wzorów (v) i (w) wynika

$$\frac{d(\odot_m)}{dt} = \varphi' + g_1 + 2g_2(t - t_0),$$

$$\frac{d\odot_m}{dt} = \varphi' + g_1 + \delta_1 + 2(g_2 + \delta_2)(t - t_0).$$

Są to wartości zmian długości (\odot_m) i \odot_m w jednostce czasu, do której odnoszą się także współczynniki wyrazów wzorów (v) i (w). Oznaczmy więc przez R_g rok gwiazdowy, a przez R_z rok zwrotnikowy, to jest

$$R_g = \frac{360^\circ}{\varphi' + g_1 + 2g_2(t - t_0)},$$

$$R_z = \frac{360^\circ}{\varphi' + g_1 + \delta_1 + 2(g_2 + \delta_2)(t - t_0)};$$

albo, ponieważ współczynniki g_2 i δ_2 są małe w stosunku do φ' , jest też z dostatecznem przybliżeniem

$$R_g = \frac{360^\circ}{\varphi' + g_1} \left[1 - \frac{2g_2}{\varphi' + g_1} (t - t_0) + \frac{2g_2^2}{(\varphi' + g_1)^2} (t - t_0)^2 \right], \quad (284)$$

$$R_s = \frac{360^\circ}{\varphi' + g_1 + \delta_1} \left[1 - \frac{2(g_2 + \delta_2)}{\varphi' + g_1 + \delta_1} (t - t_0) + \frac{2(g_2 + \delta_2)^2}{(\varphi' + g_1 + \delta_1)^2} (t - t_0)^2 \right]. \quad (285)$$

Prócz dwóch powyższych okresów, z ruchem ziemi dookoła słońca związany jest jeszcze t. zw. *rok anomalistyczny*. Tak nazywa się okres czasu, w którym nieperjodyczna część wyrażenia anomalji średniej słońca wzrasta o 360° . Według wzoru (s) jest w epokach t_0 i t

$$\odot_m^0 = \Pi_\odot^0 + M_\odot^0, \quad \odot_m = \Pi_\odot + M_\odot,$$

skąd wypływa

$$M_\odot = M_\odot^0 + \odot_m - \odot_m^0 - (\Pi_\odot - \Pi_\odot^0). \quad (ac)$$

Oznaczmy przez (Π_\odot) długość punktu przyziemnego słońca, liczoną od stałej równonocy epoki t_0 , to jest

$$(\Pi_\odot) = \Pi_\odot^0 + j_1 (t - t_0) + j_2 (t - t_0)^2 + \bar{p}_2,$$

i \bar{p}_2 oznacza tu sumę wyrazów perjodycznych. Gdy zaś długość punktu przyziemnego liczona jest od epoki t , to różni się ona od poprzedniej o wyrazy, wyrażające wpływ precesji i nutacji; jest zatem

$$\Pi_\odot = \Pi_\odot^0 + (j_1 + \delta_1)(t - t_0) + (j_2 + \delta_2)(t - t_0)^2 + \bar{p} + \bar{p}_2. \quad (ad)$$

Gdy więc we wzorze (ac) podstawimy na miejsce $\Pi_\odot - \Pi_\odot^0$ wartość, wypływającą ze wzoru (ad), a na miejsce $\odot_m - \odot_m^0$ wartość wypływającą ze wzoru (w), to znajdziemy:

$$M_\odot = M_\odot^0 + (\varphi' + g_1 - j_1)(t - t_0) + (g_2 - j_2)(t - t_0)^2 + \bar{p}_1 - \bar{p}_2. \quad (ae)$$

Gdy przez ϑ_a oznaczymy liczbę lat anomalistycznych, przypadających na przeciąg czasu $t - t_0$, to według określenia roku anomalistycznego jest

$$(\varphi' + g_1 - j_1)(t - t_0) + (g_2 - j_2)(t - t_0)^2 = 360^\circ \vartheta_a. \quad (\text{af})$$

Zmiana anomalji średniej słońca w jednostce czasu wynosi

$$\frac{dM_\odot}{dt} = (\varphi' + g_1 - j_1) + 2(g_2 - j_2)(t - t_0);$$

gdy więc przez R_a oznaczymy rok anomalistyczny, to jest

$$R_a = \frac{360^\circ}{\varphi' + g_1 - j_1 + 2(g_2 - j_2)(t - t_0)},$$

albo też z dostatecznem przybliżeniem

$$R_a = \frac{360^\circ}{\varphi' + g_1 - j_1} \left[1 - \frac{2(g_2 - j_2)}{\varphi' + g_1 - j_1} (t - t_0) + \frac{2(g_2 - j_2)^2}{(\varphi' + g_1 - j_1)^2} (t - t_0)^2 \right]. \quad (286)$$

113. Wartości liczbowe do ustępów 110—112. Obierzmy za epokę t_0 rok 1900, styczeń 0.0 czasu średniego greenwich'skiego, a za jednostkę czasu stulecie juljańskie. Długość L_\odot , której wartość jest podana w szóstym ze wzorów (225), jest identyczna z długością średnią zwrotnikową słońca. Jest więc

$$\odot_m = 279^\circ 41' 48''.04 + 129602768''.13(t - t_0) + 1''.09(t - t_0)^2.$$

Gdy wzór ten porównamy ze wzorem (w), to wynika

$$\varphi' + g_1 + \delta_1 = 129602768''.13, \quad g_2 + \delta_2 = 1''.09.$$

Dalej wypływa ze wzoru (bf) ustępu 97 dla przyjętej epoki t oraz stulecia juljańskiego, jako jednostki czasu,

$$f_1 = 4608''.606, \quad f_2 = 1''.3972.$$

Możemy teraz określić wartość kąta φ według wzoru (z), a mianowicie

$$\begin{aligned}\varphi &= 360^\circ + \frac{129602768''.13 - 4608''.61}{36525} = 360^\circ + 3548''.2042 \\ &= 1299548''.2042.\end{aligned}$$

Kąt φ jest to, jak wiemy, kąt, o który obraca się ziemia dokoła osi momentalnej w ciągu średniej doby słonecznej. Okres obrotu ziemi dokoła tej osi, wyrażony w dniach średnich słonecznych, otrzymamy, dzieląc 360° przez ten kąt. Jest zatem

$$\omega_0 = \frac{360^\circ}{360^\circ + 3548''.2042} = \frac{1}{1.002737812},$$

albo też

$$\begin{aligned}1.002737812 \omega_0 &= \omega_m, \\ 0.997269664 \omega_m &= \omega_0.\end{aligned}\tag{287}$$

Długość doby gwiazdowej wypływa ze wzoru (275), mianowicie

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 \left[1 - \frac{4608''.606}{36525 \times 1299548''.2042} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2''.7944}{36525 \times 1299548''.2042} (t - t_0) \right],\end{aligned}\tag{ag}$$

czyli po wykonaniu działań

$$\omega = \omega_0 [0.99999990264 - 0.000000000059 (t - t_0)].\tag{ah}$$

Gdy zaś podstawimy wartość na ω_0 według wzorów (287), jest także

$$\omega = \omega_m [0.997269567 - 0.000000000059 (t - t_0)].\tag{ai}$$

Mały wyraz, proporcjonalny do czasu, występujący w powyższych wzorach, spowodować może skrócenie doby gwia-

zdowej o 1 sekundę dopiero po upływie 20 milionów lat, można go więc nie brać w rachubę i praktycznie uważać dobę gwiazdową za niezmienną jednostkę czasu. Pomijając więc we wzorze (ai) drugi wyraz, znajdujemy

$$\begin{aligned} 1.002737909 \omega &= \omega_m, \\ 0.997269567 \omega_m &= \omega. \end{aligned} \quad (288)$$

Wartości tych trzech okresów w jednostkach czasu średnich słonecznych są następujące:

$$\begin{aligned} \omega_m &= 86400 & \text{sek.} &= 24^h, \\ \omega_0 &= 86164.09897 & \text{«} &= 23^h 56^m 4^s.09897, \\ \omega &= 86164.09058 & \text{«} &= 23^h 56^m 4^s.09058, \end{aligned} \quad (\text{aj})$$

a w jednostkach gwiazdowych

$$\begin{aligned} \omega_m &= 86636.55536 \text{ sek.} = 24^h 3^m 56^s.55536, \\ \omega_0 &= 86400.00840 & \text{«} &= 24^h 0^m 0^s.00840, \\ \omega &= 86400 & \text{«} &= 24^h. \end{aligned} \quad (\text{ak})$$

Widzimy, że okres obrotu ziemi dłuższy jest od doby gwiazdowej zaledwie o $0^s.0084$; jednakże i ta mała różnica w ciągu jednego stulecia uczyniłaby już z górą 5 minut. Dwóch tych okresów zatem ani teoretycznie ani praktycznie identyfikować nie można.

Zależność pomiędzy rokiem gwiazdowym a stuleciem juljańskim wyraża wzór (aa), gdy odstęp czasu $t - t_0$ wyrażony jest w stuleciach juljańskich. Dla tej jednostki czasu i epoki t_0 , poprzednio przyjętej, wypływają ze wzoru (222') następujące wartości współczynników:

$$\delta_1 = 5025''.751, \quad \delta_2 = 1''.111.$$

Biorąc pod uwagę wyżej podane wartości sum $\varphi' + g_1 + \delta_1$ i $g_2 + \delta_2$, znajdujemy

$$\varphi' + g_1 = 129597742''.38, \quad g_2 = -0''.021.$$

Jest zatem

$$129597742''.38(t-t_0) - 0''.021(t-t_0)^2 = 360^\circ \vartheta_g,$$

oraz według wzoru (284)

$$R_g = \frac{360^\circ}{129597742''.38} \left[1 + \frac{0''.042}{129597742''.38} (t-t_0) + \dots \right].$$

Po wykonaniu działań otrzymuje się

$$R_g = 0.010000174202 + 0.00000000000032(t-t_0), \quad (\text{aI})$$

albo w jednostkach mniejszych czasu

$$R_g = 365^d.2563627 + 0^d.000000011688(t-t_0) \quad (\text{aI})$$

$$= 365^d 6^h 9^m 9^s.73728 + 0^s.0101(t-t_0). \quad (\text{aII})$$

Widzimy z powyższych wzorów, że rok gwiazdowy odznacza się wielką stałością, wzrasta on o 1 sekundę na 10000 lat.

Dla roku zwrotnikowego otrzymujemy według wzoru (ab)

$$129602768''.13(t-t_0) + 1''.09(t-t_0)^2 = 360^\circ \vartheta_z,$$

a gdy przez ϑ_j oznaczymy liczbę stuleci juljańskich, zawartych w odstępnie czasu $t-t_0$, i przyjmiemy

$$\vartheta_j = \gamma_1 \vartheta_z + \gamma_2 \vartheta_z^2 + \gamma_3 \vartheta_z^3 + \dots,$$

to według wzorów (202') jest

$$\gamma_1 = \frac{360^\circ}{129602768''.13} = 0.0099997837, \quad (\text{aII})$$

$$\gamma_2 = - (0.0099997837)^2 \cdot \frac{1''.09}{129602768''.13} = - 0.000000000000084,$$

$$\gamma_3 = - 0.0000 \dots$$

Gdy więc w równaniach (n) ust. 89 współczynniki a odnoszą się do stulecia juljańskiego, jako jednostki czasu, a współczynniki α

do roku zwrotnikowego, to znajdziemy wartości α , przyjmując we wzorach (204) wyżej obliczone wartości γ .

Dla przykładu obliczmy współczynniki wzoru na $\chi_m^{(t)}$ dla roku zwrotnikowego, jako jednostki czasu. Dla roku juljańskiego mieliśmy wprost, kładąc $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 0.01$,

$$\chi_m^{(t)} = (50''.2464 + 0''.0002224 t - 0.000000003 t^2) \tau + \\ + (0''.0001112 - 0''.000000003 t) \tau^2 - 0''.000000001 \tau^3.$$

Gdy za jednostkę czasu przyjmiemy rok zwrotnikowy, to zachodzi w porównaniu z powyższym wzorem różnica tylko w pierwszym wyrazie, który ma wartość $50''.2453$, pozostałe współczynniki mają wartość jednakową.

Przy przejściu z roku juljańskiego na zwrotnikowy i odwrotnie jest oczywiście

$$\gamma_1 = 0.9997837, \quad \gamma_2 = -0.000000000084, \quad \dots,$$

a więc współczynniki według wzorów (203) i (204) mają wartości następujące:

$$\alpha_1 = 0.9997837 a, \\ \alpha_2 = -0.000000000084 a_1 + 0.99995663 a_2,$$

i odwrotnie

$$a_1 = 1.00002143 \alpha_1, \\ a_2 = 0.000000000084 \alpha_1 + 1.00004322 \alpha_2.$$

Długość roku zwrotnikowego jest według wzoru (285)

$$R_z = 0.009997837 [1 - 0.00000001682 (t - t_0)], \quad (ao)$$

albo w mniejszych jednostkach czasu, mianowicie w dniach, minutach i sekundach średnich,

$$R_z = 365^d.24219879 - 0^d.00000614 (t - t_0) \\ = 365^d 5^h 48^m 45^s.974592 - 0^s.5305 (t - t_0). \quad (ap)$$

Z powyższych wzorów wynika, że rok zwrotnikowy zmniejsza się o 1 sekundę na 190 lat.

Długość roku anomalistycznego dana jest przez wzór (286). Jest tu, jak poprzednio,

$$\varphi' + g_1 = 129597742''.38, \quad g_2 = -0''.021;$$

a ponieważ według czwartego ze wzorów (225)

$$M_{\odot} = 358^{\circ} 28' 33''.0 + 129596579''.10 (t - t_0) - 0''.54 (t - t_0)^2,$$

więc z porównania ze wzorem (ac) wypływa

$$\varphi' + g_1 - j_1 = 129596579''.10, \quad g_2 - j_2 = -0''.54.$$

Wobec tego jest

$$R_a = \frac{360^{\circ}}{129596579''.10} \left[1 + \frac{1''.08}{129596579''.10} (t - t_0) \right],$$

a po wykonaniu rachunku

$$\dot{R}_a = 0.010000263965 [1 + 0.0000000083 (t - t_0)], \quad (\text{aq})$$

lub w dniach, minutach i sekundach średnich

$$\begin{aligned} R_a &= 365^d.25964134 + 0^d.00000304 (t - t_0) \\ &= 365^d 6^h 13^m 53^s.011776 + 0^s.26266 (t - t_0). \end{aligned} \quad (\text{ar})$$

Rok anomalistyczny wzrasta o 1^s na 380 lat.

Dodajmy tu jeszcze w związku ze wzorem na M_{\odot} wyrażenie długości punktu przyziemnego słońca. Dla epoki 1900.0 jest $\Pi_{\odot}^0 = 281^{\circ} 13' 15''.0$; pozatem jest

$$j_1 = -(\varphi' + g_1 - j_1) + \varphi' + g_1 = 129597742''.38 - 129596579''.10 = 1163''.28,$$

$$j_2 = g_2 - (g_2 - j_2) = -0''.021 + 0''.540 = 0''.519.$$

Wobec tego średnia długość punktu przyziemnego słońca w epoce t , liczona od średniej równonocy epoki 1900.0, ma wartość

$$(\Pi_{\odot}) = 281^{\circ} 13' 15''.0 + 1163''.28 (t - t_0) + 0''.519 (t - t_0)^2. \quad (\text{as})$$

Dalej znajdujemy

$$\begin{aligned} j_1 + \delta_1 &= 1163''.28 + 5025''.75 = 6189''.03, \\ j_2 + \delta_2 &= 0''.519 + 1''.111 = 1''.630; \end{aligned}$$

a zatem średnia długość punktu przyziemnego w epoce t , liczona od średniej równonocy tejże epoki, gdy $t_0 = 1900.0$, jest

$$\Pi_{\odot} = 281^{\circ} 13' 15''.0 + 6189''.03 (t - t_0) + 1''.63 (t - t_0)^2. \quad (\text{at})$$

Odstęp czasu tu, jak wszędzie poprzednio, wyrażony jest w stuleciach juljańskich.

114. Miesiąc gwiazdowy, zwrotnikowy, anomalistyczny, smoczy i synodyczny. Okresy czasu, których podstawą jest obieg księżyca dokoła ziemi, nazywają się ogólnie *miesiącami*. Jako jednostki czasu nie mają one takiego znaczenia, jak doba lub rok. lecz mają dosyć duże zastosowanie w chronologii; poza tem zaś zasługują na uwagę, jako ważne okresy astronomiczne. Zajmijmy się dokładną definicją tych okresów.

Oznaczmy przez \mathfrak{C}_m^0 średnią długość księżyca w epoce t_0 , przez $\varphi_{\mathfrak{C}}$ kąt, o który średnia długość księżyca, liczona od stałej równonocy epoki t_0 , wzrasta w jednostce czasu, a przez (\mathfrak{C}_m) średnią długość księżyca w epoce t , liczoną od średniej równonocy epoki t_0 ; jest więc, podobnie jak dla słońca,

$$(\mathfrak{C}_m) = \mathfrak{C}_m^0 + (\varphi_{\mathfrak{C}} + h_1)(t - t_0) + h_2(t - t_0)^2 + P. \quad (\text{au})$$

W tym wzorze h_1 i h_2 są stałemi współczynnikami, a P oznacza ogół wyrazów periodycznych, występujących w wyrażeniu długości (\mathfrak{C}_m) .

Oznaczmy dalej przez \mathfrak{C}_m średnią długość księżyca w epoce t , liczoną od równonocy epoki t , to jest

$$\mathfrak{C}_m = \mathfrak{C}_m^0 + (\varphi_{\mathfrak{C}} + h_1 + \delta_1)(t - t_0) + (h_2 + \delta_2)(t - t_0)^2 + P'. \quad (\text{aw})$$

Tu współczynniki δ_1 i δ_2 należą do precesji, a P' oznacza ogół wyrazów perjodycznych wyrażenia długości \mathfrak{E}_m .

Okres czasu, w którym część nieperjodyczna wyrażenia długości (\mathfrak{E}_m) wzrasta o 360° , nazywa się *miesiącem gwiazdowym*; okres czasu, w którym część nieperjodyczna wyrażenia długości \mathfrak{E}_m wzrasta o 360° , nazywa się *miesiącem zwrotnikowym*.

Porównując wzór (aw) z wartością na $L_{\mathfrak{E}}$, podaną w trzecim ze wzorów (225), która właśnie oznacza część nieperjodyczną wyrażenia długości \mathfrak{E}_m , widzimy, że jest

$$\varphi_{\mathfrak{E}} + h_1 + \delta_1 = 1732564446''.25, \quad h_2 + \delta_2 = 13''.35;$$

a że w epoce 1900.0 jest

$$\delta_1 = 5025''.75, \quad \delta_2 = 1''.11,$$

więc znajdujemy też

$$\varphi_{\mathfrak{E}} + h_1 = 1732559420''.50, \quad h_2 = 12''.24.$$

Ponieważ zmiany wartości nieperjodycznych części wyrażen na (\mathfrak{E}_m) i \mathfrak{E}_m w jednostce czasu wynoszą odpowiednio

$$\frac{d(\mathfrak{E}_m)}{dt} = (\varphi_{\mathfrak{E}} + h_1) + 2 h_2 (t - t_0),$$

$$\frac{d\mathfrak{E}_m}{dt} = (\varphi_{\mathfrak{E}} + h_1 + \delta_1) + 2 (h_2 + \delta_2) (t - t_0),$$

więc, oznaczając przez M_g i M_z odpowiednio miesiąc gwiazdowy i miesiąc zwrotnikowy i obierając za jednostkę czasu dzień średni, otrzymujemy z dostateczną dokładnością następujące wartości tych okresów:

$$M_g = \frac{360^\circ \times 36525}{1732559420''.50} \left[1 - \frac{24''.48}{1732559420''.50} (t - t_0) \right], \quad (289)$$

$$M_z = \frac{360^\circ \times 36525}{1732564446''.25} \left[1 - \frac{26''.70}{1732564446''.25} (t - t_0) \right]. \quad (290)$$

Po wykonaniu rachunku znajdujemy w jednostkach średnich słonecznych

$$\begin{aligned} M_g &= 27^d.32166033668 - 0^d.00000038523(t - t_0) \\ &= 27^d.7^h.43^m.11^s.453 - 0^s.03328(t - t_0), \end{aligned} \quad (\text{ax})$$

$$\begin{aligned} M_z &= 27^d.3215810832 - 0^d.00000041802(t - t_0) \\ &= 27^d.7^h.43^m.4^s.6055 - 0^s.03602(t - t_0). \end{aligned} \quad (\text{ay})$$

Miesiącem anomalistycznym nazywa się okres czasu, w którym część nieperjodyczna wyrażenia średniej anomalji księżyca wzrasta o 360° . Oznaczmy przez $M_{\mathfrak{E}}$ średnią anomalję księżyca, a przez $\Pi_{\mathfrak{E}}$ długość punktu przyziemnego drogi księżyca, to jest

$$M_{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}_m - \Pi_{\mathfrak{E}}.$$

Gdy zaś przyjmujemy

$$\Pi_{\mathfrak{E}} = \Pi_{\mathfrak{E}}^0 + (k_1 + \delta_1)(t - t_0) + (k_2 + \delta_2)(t - t_0)^2 + q,$$

to wynika

$$\begin{aligned} M_{\mathfrak{E}} &= \mathfrak{E}_m^0 - \Pi_{\mathfrak{E}}^0 + (\varphi_{\mathfrak{E}} + h_1 - k_1)(t - t_0) + \\ &\quad + (h_2 - k_2)(t - t_0)^2 + q'. \end{aligned} \quad (\text{az})$$

We wzorze tym k_1 i k_2 oraz h_1 i h_2 są stałymi współczynnikami, a przez q i q' oznaczony został ogół wyrazów perjodycznych wyrażen na $\Pi_{\mathfrak{E}}$ i $M_{\mathfrak{E}}$. Z porównania wzoru (az) z wartością na $M_{\mathfrak{E}}$ według drugiego ze wzorów (225) wynika

$$\begin{aligned} M_{\mathfrak{E}}^0 &= \mathfrak{E}_m^0 - \Pi_{\mathfrak{E}}^0 = & 296^\circ 7' 6''.30, & \Pi_{\mathfrak{E}}^0 = 334^\circ 19' 28''.29, \\ \varphi_{\mathfrak{E}} + h_1 - k_1 &= 1717915936''.17, & k_1 = 14643484''.33, \\ h_2 - k_2 &= & 49''.59, & k_2 = -37''.35, \end{aligned}$$

oraz średnia długość perigeum księżyca

$$(\Pi_{\mathfrak{E}})_m = 334^\circ 19' 28''.29 + 14648510''.08(t - t_0) - 36''.24(t - t_0)^2. \quad (291)$$

Dalej, ponieważ

$$\frac{dM_{\odot}}{dt} = \varphi_{\odot} + h_1 - k_1 + 2(h_2 - k_2)(t - t_0),$$

więc, gdy przez M_a oznaczymy miesiąc anomalistyczny, jest z dostatecznem przybliżeniem

$$M_a = \frac{360^{\circ} \times 36525}{1717915936''.17} \left[1 - \frac{99''.18}{1717915936''.17} (t - t_0) \right], \quad (292)$$

a po wykonaniu rachunku, w jednostkach średnich

$$\begin{aligned} M_a &= 27^d.5545496742629 - 0^d.00000159078 (t - t_0) \\ &= 27^d 13^h 18^m 33^s.092 - 0^s.13744 (t - t_0). \end{aligned} \quad (ba)$$

Gdy długość perigeum drogi księżyca liczona jest od stałej równonocy epoki t_0 , to $P_g = \frac{360^{\circ}}{k_1}$ oznacza okres gwiazdowy obiegu perigeum, a $P_z = \frac{360^{\circ}}{k_1 + \delta_1}$ okres zwrotnikowy obiegu tegoż perigeum. Po podstawieniu wartości na k_1 i δ_1 wynika z rachunku

$$P_g = 3232.591 \text{ dni } \text{śr.}, \quad P_z = 3231.482 \text{ dni } \text{śr.} \quad (bb)$$

Miesiącem smoczym czyli *drakonicznym* nazywa się okres czasu, w którym część nieperjodyczna odległości księżyca od węzła wstępującego jego drogi wzrasta o 360° . Oznaczmy przez (Ω_m) średnią długość węzła wstępującego, liczoną od stałej równonocy epoki t_0 , a przez Ω_m średnią długość tegoż węzła, liczoną od średniej równonocy epoki t , i niechaj będzie

$$(\Omega_m) = \Omega_m^0 + l_1(t - t_0) + l_2(t - t_0)^2,$$

to jest

$$\Omega_m = \Omega_m^0 + (l_1 + \delta_1)(t - t_0) + (l_2 + \delta_2)(t - t_0)^2;$$

a ponieważ

$$\mathbb{C}_m = \mathbb{C}_m^0 + (\varphi_{\odot} + h_1 + \delta_1)(t - t_0) + (h_2 + \delta_2)(t - t_0)^2,$$

więc

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_m - \mathfrak{L}_m = \mathfrak{E}_m^0 - \mathfrak{L}_m^0 + (\varphi_{\mathfrak{E}} + h_1 - l_1)(t - t_0) + \\ + (h_2 - l_2)(t - t_0)^2. \end{aligned} \quad (\text{bc})$$

Według wzorów (225) jest

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_m = 270^\circ 26' 44''.59 + 1732564446''.25(t - t_0) + 13''.35(t - t_0)^2, \\ \mathfrak{L}_m = 259^\circ 10' 50''.37 - 6962923''.21(t - t_0) + 8''.21(t - t_0)^2, \end{aligned}$$

skąd wypływa

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_m^0 - \mathfrak{L}_m^0 = 11^\circ 15' 54''.22, \\ l_1 + \delta_1 = -6962923''.21, \quad l_2 + \delta_2 = 8''.21, \\ l_1 = -6967948''.96, \quad l_2 = 7''.10, \\ \varphi_{\mathfrak{E}} + h_1 - l_1 = 1739527399''.46, \quad h_2 - l_2 = 5''.14. \end{aligned}$$

Zmiana różnicy $\mathfrak{E}_m - \mathfrak{L}_m$ w jednostce czasu jest

$$\frac{d(\mathfrak{E}_m - \mathfrak{L}_m)}{dt} = \varphi + h_1 - l_1 + 2(h_2 - l_2)(t - t_0).$$

Gdy więc przez M_d oznaczmy miesiąc drakoniczny, to otrzymamy, wyrażając $t - t_0$ w dniach średnich,

$$M_d = \frac{360^\circ \times 36525}{1739527399''.46} \left[1 - \frac{10''.28}{1739527399''.46} (t - t_0) \right], \quad (293)$$

a po wykonaniu rachunku

$$\begin{aligned} M_d = 27^d.2122191528 - 0^d.00000016081(t - t_0) \\ = 27^d.5^h.5^m.35^s.7346 - 0^s.01389(t - t_0). \end{aligned} \quad (\text{bd})$$

$Q_g = \frac{360^\circ}{l_1}$ i $Q_z = \frac{360^\circ}{h_1 + \varepsilon_1}$ są to odpowiednio gwiazdowy i zwrotnikowy okres obiegu węzłów księżyca; wartości ich są:

$$Q_g = 6793.45 \text{ dni } \text{śr.}, \quad Q_z = 6798.35 \text{ dni } \text{śr.} \quad (\text{be})$$

Wreszcie *miesiącem synodycznym* nazywa się okres czasu, w którym część nieperjodyczna różnicy $\odot_m - \odot_m$ wzrasta o 360° . Ze wzorów (w) i (aw) wypływa

$$\odot_m - \odot_m = \odot_m^0 - \odot_m^0 + (\varphi_\odot + h_1 - \varphi' - g_1)(t - t_0) + (h_2 - g_2)(t - t_0)^2 + R, \quad (\text{bf})$$

oraz

$$\frac{d(\odot_m - \odot_m)}{dt} = (\varphi_\odot + h_1 - \varphi' - g_1) + 2(h_2 - g_2)(t - t_0).$$

Poprzednio mieliśmy

$$\begin{aligned} \varphi_\odot + h_1 &= 1732559420''.50, & h_2 &= 12''.24, \\ \varphi' + g_1 &= 129597742''.38, & g_2 &= -0''.02; \end{aligned}$$

wobec tego

$$\varphi_\odot + h_1 - \varphi' - g_1 = 1602961678''.12, \quad h_2 - g_2 = 12''.26.$$

Gdy więc przez M_s oznaczymy miesiąc synodyczny, to z dostateczną dokładnością, wyrażając $t - t_0$ w dniach średnich, otrzymamy

$$M_s = \frac{360^\circ \times 36525}{1602961678''.12} \left[1 - \frac{24''.52}{1602961678''.12} (t - t_0) \right], \quad (294)$$

a po obliczeniu

$$\begin{aligned} M_s &= 29^d 5305874471 - 0^d.00000045170 (t - t_0) \\ &= 29^d 12^h 44^m 2^s.7554 - 0^s.039026 (t - t_0). \end{aligned} \quad (\text{bg})$$

115. Okres juljański. Ponieważ dobę słoneczną średnią określiliśmy w ten sposób, że w ciągu wielkich okresów czasu uważać ją można praktycznie za niezmienną, więc okresy czasu, wyrażone w dobach średnich słonecznych, możemy co do długości uważać za proporcjonalne do liczby tych jednostek, okresami danymi objętych. Inne okresy astronomiczne, związane z obrotem ziemi dokoła osi lub biegiem jej dokoła słońca, jak również okresy, związane z ruchem księżyca dokoła ziemi, jak widzieliśmy, są niewspółmierne z dobą średnią słoneczną i są co do długości swej mniej lub więcej zmienne.

Epokę jakiegoś zdarzenia możnaby najprościej określić w ten sposób, że podanymby był czas średni tego zdarzenia dla pewnego określonego południka, oraz dzień, scharakteryzowany przez liczbę, w szeregu dni, liczonych od pewnego dnia, przyjętego za początek rachuby. Początek ten mógłby na przykład być określony przez wartości spółrzędnych kilku wielkich planet, księżyca i słońca, gdyż wiadomo, że praktycznie taka sama kombinacja wartości tych spółrzędnych nie powtórzy się nigdy.

Ten sam cel miano na oku, gdy czas zdarzeń dziejowych określano przez lata jakiejś ery chronologicznej, o czym już była mowa w ustępie 42. Liczba takich er, które przez różne narody w różnych czasach były stosowane, jest znaczna.

Najbardziej warunkom prostoty odpowiada rachuba według lat i dni t. zw. *okresu juljańskiego*. Początek okresu juljańskiego nie jest wprawdzie określony astronomicznie, pomimo to jest on określony tak dokładnie, że okres ten w zupełności odpowiada swemu przeznaczeniu.

Ograniczymy się w tej sprawie do krótkiego wyjaśnienia. Okres ten został zaproponowany przez Józefa Scaligera w dziele p. t. *De emendatione temporum*, wydanem w r. 1629, i nazwany przez autora juljańskim na cześć jego ojca Juliana. Obejmuje on liczbę lat 7980, która jest iloczynem liczb 28, 19 i 15. Liczby te oznaczają liczbę lat w trzech cyklach, mających rozległe zastosowanie w kalendarjografji, mianowicie w *cyklu słonecznym*, *cyklu Metona* oraz *cyklu rzymskim*. Lata w okresie juljańskim są takie same, jak w kalendarzu juljańskim, t. j. po trzech latach zwyczajnych, mających 365 dni, następuje rok przestępny, mający 366 dni. W ten sposób stulecie juljańskie ma 36525 dni, a cały okres juljański obejmuje 2914695 dni.

Jak wiadomo, dany rok kalendarzowy charakteryzuje się trzema liczbami, wskazującemi miejsce, które on zajmuje w każdym z trzech wspomnianych cyklów. Dana kombinacja tych trzech liczb zajść może tylko raz jeden w okresie juljańskim, raz więc też może zajść tylko ta kombinacja, że każda z tych trzech liczb jest jednością. Otóż ten rok przyjął Scaliger za pierwszy rok okresu juljańskiego. Jak wynika z rachunku, rokiem tym jest rok 4713 przed N. Chr.; ostatnim rokiem tego

okresu juljańskiego będzie rok 3267 po N. Chr., po którym nastąpi pierwszy rok następnego okresu.

Ponieważ rok 4713 przed N. Chr., czyli rok — 4712 według rachuby astronomicznej, jest według kalendarza juljańskiego przestępny, więc data — 4712 styczeń 1.0 cz. śr. Gr. stanowi początek okresu juljańskiego (ust. 42). Astronomicznie za początek ery chrześcijańskiej przyjmujemy

rok 0, styczeń 1.0 cz. śr. Gr.

Jest to, jak łatwo sprawdzić, dzień 1721057 okresu juljańskiego i początek 4713-go roku tego okresu.

W podobny sposób można dla jakiejkolwiek ery określić dzień juljański jej początku, a co więcej, można dla daty, określonej przez jakikolwiek kalendarz, znaleźć odpowiedni dzień okresu juljańskiego.

Badaniami tego rodzaju zajmuje się chronologja. Wynikiem tych badań są między innymi tablice, które ułatwiają znalezienie dnia juljańskiego jakiejkolwiek daty. Wymienię tu tylko opracowane przez Schrama *Kalendariographische und chronologische Tafeln*. Lipsk, 1908.

Jedną z zalet okresu juljańskiego stanowi okoliczność, że początki prawie wszystkich er, używanych w różnych czasach, i wszystkie zdarzenia historyczne przypadają w ramach tego okresu; z drugiej zaś strony sięga on daleko w przyszłość.

Wyrażanie epok przez dni okresu juljańskiego znajduje zastosowanie w astronomji zawsze wtedy, gdy należy stwierdzić okresowość jakiegoś zjawiska astronomicznego, lub zbadać, w jaki sposób jakaś wielkość, stanowiąca przedmiot badań astronomicznych, zmienia się z biegiem czasu. Stosunkowo rzadkie są przypadki, gdy wchodzi w rachubę jakieś bardzo odległe czasy, lub nieużywane obecnie kalendarze, i w tych razach należy posługiwać się tablicami chronologicznymi, np. wspomnianymi wyżej tablicami Schrama. Często natomiast zachodzi potrzeba znalezienia dnia juljańskiego jakiejś daty, wyrażonej według kalendarza gregorjańskiego lub juljańskiego w okresie czasu od r. 1700 do 2100.

Do tego celu służy tablica IX. Składa się ona z trzech części. W części I podana jest w odstępach 20-letnich liczba dni

okresu juljańskiego, która upłynęła do 1 marca roku, wymienionego w kolumnie R. W części II, w kolumnie, oznaczonej przez L.d., podana jest liczba dni, które upłynęły od początku dwudziestolecia, zaczynającego się w dniu 1 marca, do 1 marca roku, wymienionego w kolumnie R. D. Wreszcie w części III podana jest liczba dni, które upływają od 1 marca do 1, 11 i 21 każdego miesiąca. Zastosowanie tablicy ilustruje następujący przykład:

Znaleźć dzień juljański dla daty 25 lipca 1987 r.

Znajdujemy:

w części I dla R 1980	2444300
w części II dla R.D. 7	2556
w części III dla 21. VII	142
dla 25 lipca dodatkowo	4
21 lipca 1981 = D. J.	2447002

Można też odwrotnie za pomocą tej tablicy znaleźć datę według kalendarza gregoriańskiego dla jakiegokolwiek dnia okresu juljańskiego. Znajdźmy na przykład datę, odpowiadającą liczbie juljańskiej 2408764.

Dzień ten, jak widać z części I tablicy IX, przypada w dwudziestolecu, którego początkiem jest rok 1880 i któremu odpowiada dzień juljański 2407776. Od tego dnia do daty poszukiwanej upływa 988 dni. W części II znajdujemy dla liczby 730 liczbę lat 2 oraz $988 - 730 = 258$ dni. W części III znajdujemy dla daty 11 listopada liczbę dni 255, skąd wypływa dla liczby 258 data 14 listopada. Jest zatem

$$D. J. 2408764 = 14 \text{ listopada } 1882 \text{ r.}$$

Dni okresu juljańskiego zaczynają się w średnie południe greenwich'skie. Przez wprowadzenie do rachuby astronomicznej czasu uniwersalnego, w którym dni liczą się od średniej północy greenwich'skiej, zaszła pewna komplikacja w stosowaniu dni juljańskich. Pewną niedogodność stanowią też siedmiocyfrowe liczby dni okresu juljańskiego, odpowiadające datom historycznym i współczesnym. Celem uniknięcia powyższych niedogodności zaproponował prof. Banachiewicz stosowanie *nowej ery astronomicznej*, rozpoczynającej się z dniem 1 stycznia 1801 r., której dni liczą się od średniej północy greenwich'skiej, jak

w czasie uniwersalnym. Ponieważ pierwszy dzień nowej ery jest 2378862-im dniem okresu juljańskiego, więc przejście z ery juljańskiej na nową erę astronomiczną nie przedstawia trudności. Tak np. dzień 25 lipca 1987 r., który jest 2447002-im dniem okresu juljańskiego, jest dniem 68141-ym według nowej ery astronomicznej. Dni nowej ery wyrażają się obecnie przez liczby pięciocyfrowe.

116. Noworoczna długość słońca. Rok kalendarzowy, składający się z całkowitej liczby dni i rozpoczynający się na każdym południku w chwili, gdy na nim jest średnie południe d. 31 grudnia, jest rokiem ruchomym, ponieważ ma początek, zależny od długości geograficznej miejsca obserwacji. Zresztą, gdybyśmy nawet ustalili początek roku wspólny dla całej ziemi, np. w ten sposób, że zaczynałby się on w średnie południe 31 grudnia południka głównego, to pomimo to początek roku musiałby się przesuwać w roku zwrotnikowym, który z dobą średnią słoneczną nie jest współmierny.

Miejsce jakiejś epoki w roku zwrotnikowym określić można np. przez długość słońca, przypadającą w tej epoce. Wobec niewspółmierności roku zwrotnikowego z dobą średnią w chwili rozpoczynania się roku kalendarzowego na danym południku długość słońca w różnych latach musi być inną. Długość słońca, przypadająca w chwili rozpoczynania się roku kalendarzowego na danym południku, nazywa się *noworoczną długością słońca* na tym południku.

Ze względów chronologicznych oraz praktyczno-życiowych jest rzeczą ważną, aby długość słońca, przypadająca na daną datę ruchomego roku kalendarzowego, obejmującego całkowitą liczbę dni, zawartą była w niezbyt rozległych granicach. To samo dotyczy oczywiście noworocznej długości słońca. Skoro zaś z natury rzeczy wynika, że w wyrażeniu noworocznej długości słońca występować musi wyraz wiekowy, to jest rzeczą pożądaną, aby ten wyraz wiekowy był jaknajmniejszy.

To są zasady, na których opierać się musi każda racjonalna rachuba kalendarzowa. Zobaczmy, w jakich granicach zmienia się noworoczna długość słońca w kalendarzu juljańskim i gregorjańskim.

Jako epokę 0, od której liczyć będziemy lata, przyjmujemy rok 1900. Gdy dalej przez t rozumieć będziemy liczbę dni średnich słonecznych, które upłynęły od epoki

1900 styczeń 0.0 czasu śr. greenwich'skiego,

to średnia długość słońca w epoce t po opuszczeniu wyrazu drugiego stopnia wynosi według piątego ze wzorów (225)

$$L_{\odot} = 279^{\circ} 41' 48''.04 + 3548''.33 t.$$

Kładąc odpowiednio $t = 0$ i $t = 12$, otrzymamy dla roku 1900 gregorjańską i juljańską długość noworoczną słońca w Greenwich. Gdy oznaczymy pierwszą przez $L_g^{(0)}$, a drugą przez $L_j^{(0)}$, to jest

$$L_g^{(0)} = 279^{\circ} 41' 48''.04,$$

$$L_j^{(0)} = 291^{\circ} 31' 28''.00.$$

Weźmy najprzód pod uwagę noworoczną długość juljańską. W kalendarzu juljańskim lata, których liczba nie jest podzielna przez 4, mają po 365 dni, lata zaś, których liczba jest podzielna przez 4, mają po 366 dni. Ponieważ jest

$$3548''.33 \times 365 = 1295140''.61 = 360^{\circ} - 859''.39,$$

$$\begin{aligned} 3548''.33 \times 366 &= 1298688''.94 = 360^{\circ} + 2688''.94 = \\ &= 360^{\circ} - 859''.39 + 3548''.33, \end{aligned}$$

więc w okresie czteroletnim wzrasta juljańska noworoczna długość słońca o $3548''.33 - 4 \times 859''.39 = 110''.77$.

Gdy przez s oznaczymy liczbę roku, liczoną od r. 1900, to długość noworoczna juljańska w Greenwich dla roku $1900 + s$ wyrazi się przez wzór

$$L_j^{(s)} = 291^{\circ} 31' 28''.00 - 859''.39 s + 3548''.33 \left[\frac{s+3}{4} \right], \quad (295)$$

w którym $\left[\frac{s+3}{4} \right]$ oznacza liczbę całkowitą, co do wartości najbliższą ułamkowi $\frac{s+3}{4}$ i mniejszą od niego. Wzór ten uwzględ-

nia także tę okoliczność, że rok 1900 według kalendarza juljańskiego jest przestępny.

Ponieważ przestępnymi są lata, dla których $s = 4n$, gdy n oznacza jakąś liczbę całkowitą lub 0, więc różnica

$$L^{(4n+1)} - L_j^{(4n)} = 2688''.94$$

stanowi największą różnicę, jaka zachodzić może między długościami noworocznymi słońca w okresie czteroletnim. Pozatem przyrost długości noworocznej słońca w okresie czteroletnim o $110''.77$ powoduje, że nowy rok średnio corocznie o $\frac{110''.77}{4 \times 3548''.33} = 0.0078$ doby średniej cofa się w stosunku do roku zwrotnikowego. Czylni to 1 dzień na 128 lat.

W kalendarzu gregorjańskim z lat, których liczba kończy się dwoma zerami, przestępnymi są tylko te, których liczba podzielna jest przez 400. Ażeby więc otrzymać wzór na noworoczną długość słońca gregorjańską, należy w trzecim wyrazie wzoru (295) liczbę lat przestępnych zmniejszyć o te lata, których liczba podzielna jest przez 100, i powiększyć o te lata, których liczba jest podzielna przez 400. Stosownie do tego noworoczna długość słońca gregorjańska w Greenwich dla roku 1900 + s wyrazi się przez wzór

$$L_g^{(s)} = 279^\circ 41' 48''.04 - 859''.39 s + \\ + 3548''.33 \left\{ \left[\frac{s+3}{4} \right] - \left[\frac{s+99}{100} \right] + \left[\frac{s+299}{400} \right] \right\}, \quad (296)$$

w którym wyrażenia, zawarte w klamrach, oznaczają największe liczby całkowite, mniejsze co do wartości od wartości ułamków, zawartych w klamrach.

Oznaczmy $s = 400n$, gdzie n jest liczbą całkowitą lub zerem, to jest

$$L_g^{(400n)} = 279^\circ 41' 48''.04 - 859''.39 \times 400n + 3548''.33 (100 - 4 + 1)n \\ = 279^\circ 41' 48''.04 + 412''.01 n.$$

Liczba $412''.01$ stanowi przyrost noworocznej gregorjańskiej długości słońca w okresie 400-letnim. Średni przyrost wy-

nosi więc $\frac{412''.01}{400} = 1''.03$, skąd wynika, że $\frac{3548''.33}{1''.03} = 3445$ lat wynosi okres czasu, w którym data gregorjańska w roku zwrotnikowym cofa się o jeden dzień.

Pod tym względem, jak widzimy, kalendarz gregorjański ma dużą wyższość nad juljańskim. Zato różnice gregorjańskich noworocznych długości słońca (według cywilnej rachuby początku roku) w okresie 400-letnim mogą być większe, niż juljańskich. Zachodzi to mianowicie w tych latach, gdy po roku przestępnym następuje 7 lat zwyczajnych na końcu i początku stuleci. Tak np. dla $s = 197$ i $s = 204$ otrzymujemy

$$L_g^{(204)} - L_g^{(197)} = -859''.39 \times 7 = -1^\circ 40' 15''.73.$$

117. Annus fictus. Rok astronomiczny Bessla. Południk normalny. Dzień zredukowany. Pomimo dogodności, wynikających z zastosowania lat kalendarzowych, składających się z całkowitej liczby dni średnich słonecznych, jest w pewnych przypadkach rzeczą dogodniejszą wyrażać daty w postaci ułamka roku zwrotnikowego, którego długość, wobec bardzo powolnej zmienności, w ciągu długich okresów czasu można uważać za stałą. Zazwyczaj w ten sposób określa się daty obserwacji gwiazd stałych, podawane w katalogach, daty obserwacji gwiazd podwójnych i t. p.

Chodzi o to, aby danej dacie odpowiadało zawsze jednakowe położenie słońca; wobec tego także początek roku zwrotnikowego musi być związany z pewnem określonym położeniem słońca. W odróżnieniu od lat ruchomych, zaczynających się na każdym południku w innym momencie i mających długość zmienną, rok taki, mający długość stałą i rozpoczynający się w ściśle określonym momencie czasu, niezależnym od długości geograficznej miejsca na ziemi, nazywa się *rokiem ustalonym* czyli *annus fictus*.

Oczywiście początek takiego roku ustalonego możnaby przyjąć dowolnie; jednakże względy praktyczne przemawiają za tem, aby początek jego nie był nazbyt oddalony od początku ruchomego roku kalendarzowego, mianowicie astronomicznego początku roku gregorjańskiego. Wskutek tego Bessel za początek

roku ustalonego przyjął chwilę, w której średnie wznoszenie proste średniego słońca, wraz ze stałą częścią wyrażenia aberacji rocznej, wynosi $280^0 = 18^h 40^m$.

W ten sposób określony ustalony rok Bessla jest to okres czasu, w którym średnie wznoszenie proste średniego słońca wzrasta o 360^0 . Jest on nieco różny od roku zwrotnikowego, gdyż średnie wznoszenie proste średniego słońca nie jest ściśle równe nieperjodycznej części średniej zwrotnikowej długości słońca (ust. 110). Gdy od tej ostatniej, której wartość określona jest przez czwarty ze wzorów (225), odejmiemy stałą aberacji rocznej $k_1 = 20''.47$, i tak zmniejszoną długość (t. j. długość pozorną) oznaczmy przez L' , to, wyrażając t w dniach, otrzymamy

$$L' = 279^0 41' 27''.57 + 3548''.33043 t + \frac{1''.089}{(36525)^2} t^2.$$

Gdy zaś przez A_m' oznaczmy średnie wznoszenie proste średniego słońca wraz ze stałą częścią aberacji rocznej, otrzymamy wartość A_m' , opuszczając w wyrażeniu wzoru (279) wyrazy perjodyczne. Wprowadzając wartości liczbowe współczynników, znajdujemy

$$A_m' = 279^0 41' 27''.57 + 3548''.33043 t + \frac{1''.394}{(36525)^2} t^2.$$

Wartość A_m' różni się od wartości L' tylko wyrazem drugiego stopnia, skutkiem czego w wyrażeniu długości roku Bessla wystąpi nieco inny wyraz wiekowy, aniżeli w wyrażeniu długości roku zwrotnikowego. Gdy oznaczmy rok Bessla przez R_B i obliczymy jego długość w sposób podobny, jak obliczaliśmy inne okresy roczne w ustępie 111, to, wyrażając odstęp czasu $t - t_0$ w stuleciach juljańskich, otrzymamy:

$$R_B = 365^d.24219879 - 0^d.00000786 (t - t_0), \quad (bh)$$

gdy rok zwrotnikowy według wzoru (ap) ma długość

$$R_z = 365^d.24219879 - 0^d.00000614 (t - t_0).$$

Rok Bessla staje się co 650 lat o 1^s krótszym od roku zwrotnikoweno.

Ten rok Bessla oznacza się jako *rok astronomiczny*; w praktyce można go zawsze identyfikować z rokiem zwrotnikowym, rozpoczynającym się w chwili, gdy średnie wznoszenie proste średniego słońca wraz ze stałą częścią aberacji rocznej wynosi 280°.

Gdy oznaczymy przez x jakąkolwiek liczbę z szeregu liczb naturalnych, dodatnich lub ujemnych, to, zgodnie z powyższem określeniem roku astronomicznego, równanie

$$279^{\circ} 41' 27''.57 + 3548''.33043 t + \frac{1''.394}{(36525)^2} t^2 = 280^{\circ} + 360^{\circ} x$$

pozwała wyznaczyć tę liczbę dni k , która upływa od początku roku astronomicznego $1900 + x$ do astronomicznego początku tego samego roku gregorjańskiego w Greenwich. Jeżeli mianowicie w czasie od roku 1900 do roku $1900 + x$ przypada y lat przestępnych, to od początku roku ruchomego 1900 do początku takiegoż roku $1900 + x$ upływa $t = 365x + y$ dni. Skoro rok astronomiczny $1900 + x$ rozpoczyna się o k dni wcześniej, niż rok ruchomy, to jest

$$279^{\circ} 41' 27''.57 + 3548''.33043 (365x + y) + \frac{1''.394}{(36525)^2} (365x + y)^2 = \\ = 280^{\circ} + 360^{\circ} \cdot x + 3548''.33043 k.$$

Opuszczając w wyrazach drugiego stopnia y , co na dokładność wyniku nie wpływa, i obliczając, znajdujemy

$$k = -0^d.313581 - 0.242199 x + 0.0000000393 x^2 + y. \quad (297)$$

Gdy rok $1900 + x$ jest rokiem przestępnym, to wlicza się go również do liczby lat przestępnych y , chociaż dzień 366-ty tego roku dopiero jako 29 lutego, a więc po nowym roku, wchodzi w rachubę. Wskutek tego otrzymuje się wtedy wartość k o 1 dzień za wielką, a więc liczbę dni, o którą początek roku astronomicznego wyprzedza datę styczeń 1.0 roku $1900 + x$. Dlatego też ten ostatni moment przyjmuje się za początek astronomiczny kalendarzowego roku przestępnego (ust. 42).

Wzór (297) określa wartość k dla południka greenwich'skiego. Z określenia wielkości k wypływa, że $-k$ jest to wyrażony jako ułamek dnia czas średni słoneczny greenwich'ski daty styczni 0 w latach zwykłych, a daty styczni 1 w latach przestępnych w tej chwili, gdy zaczyna się rok astronomiczny. Ponieważ w miejscu, którego długość od Greenwich jest λ , pomiędzy czasem średnim lokalnym τ , a czasem greenwich'skim τ_0 w tej samej chwili zachodzi związek

$$\tau + \lambda = \tau_0,$$

więc także gdy $\tau_0 = -k$, jest

$$\tau = -k - \lambda;$$

a zatem $-(k + \lambda)$ jest czasem średnim słonecznym początku roku astronomicznego w miejscu, którego długość, liczona od Greenwich, wynosi λ , przeciwnie zaś $k + \lambda$ jest to czas, o który początek roku astronomicznego wyprzedza astronomiczny początek roku gregorjańskiego na tym południku.

Jeżeli jest

$$k + \lambda = 0,$$

to równanie to określa długość geograficzną tego południka, na którym początek roku astronomicznego schodzi się z astronomicznym początkiem roku gregorjańskiego. Południk ten, dla którego w danym roku z powyższego warunku wypływa $\lambda = -k$, nazywa się *południkiem normalnym* tego roku. Ponieważ wzniesienie proste średniego słońca pozorne w chwili górowania na tym południku wynosi $18^h 40^m$, a tyleż wynosi w tej chwili czas gwiazdowy, więc można południk normalny określić także jako ten południk, na którym astronomiczny początek roku gregorjańskiego przypada na czas gwiazdowy $18^h 40^m$.

Jeżeli ogólnie przez p oznaczymy odstęp czasu pomiędzy początkiem astronomicznym roku ruchomego gregorjańskiego w miejscu, którego długość astronomiczna od Greenwich jest λ , a jakimś momentem, określonym przez datę tego roku, to ponieważ rok astronomiczny na tym południku rozpoczął się o $k + \lambda$ wcześniej, znajdziemy, że odstęp czasu p' pomiędzy początkiem

roku astronomicznego, a tym samym momentem określony jest przez wzór

$$p' = p + k + \lambda. \quad (298)$$

Data p' , wyrażona jako ułamek roku astronomicznego, nazywa się *dnieniem zredukowanym* czyli *dies reductus*. Znając k i λ , można dla danego p zawsze znaleźć p' , i odwrotnie, dla danego dnia zredukowanego wyznaczyć odpowiednią datę gregorjańską.

Ułatwiają to przejście tablice X i XI. W tablicy X podane są wartości k dla każdego roku od 1800 do 2000, wyrażone jako ułamki dnia średniego słonecznego; określają one długość geograficzną normalnego południka każdego roku, liczoną od Greenwich. W tablicy XI podany jest dla każdego średniego południa daty gregorjańskiej ułamek roku zwrotnikowego, który upłynął od jego astronomicznego początku. Do zamiany godzin, minut i sekund na ułamek dnia służy tabelka IV; ułamek dnia zamienia się na ułamek roku zwrotnikowego, mnożąc go przez

$$\frac{1}{365.2422} = 0.0027379.$$

Przykład 1. Znaleźć dzień zredukowany, odpowiadający dacie astronomicznej: 1921 luty 21, $9^h 35^m 26^s$ cz. śr. lwowskiego.

Z tablicy X dla roku 1921 otrzymujemy $k = -0.3999$. Długość Lwowa $\lambda = -1^h 36^m 4^s = -0^d.0667$.

Dla średniego południa 21 lutego z tablicy XI w roku zwykłym otrzymujemy $p = 0.1424$. Jest zatem $k + \lambda = -0.4666$, oraz

$$p' = 0.1424 - 0.4666 \times 0.0027 = 0.1424 - 0.0012 = 0.1412.$$

Wynik jest następujący:

$$1921 \text{ luty } 21, 9^h 35^m 26^s \text{ cz. śr. lwowskiego} = 1921.1412.$$

Przykład 2. Znaleźć datę astronomiczną we Lwowie, odpowiadającą dacie zredukowanej 1880.9872.

Z tablicy X znajdujemy dla roku 1880 $k = 0.5302$; jest więc $k + \lambda = 0.4635$, oraz

$$p = 0.9872 - 0.4635 \times 0.0027 = 0.9860.$$

Z tablicy XI znajdujemy dla daty grudzień 26.0 $p = 0.9856$ i obliczamy

$$0.9860 - 0.9856 = 0.0004 = 3^h 30^m 23^s.$$

Jest zatem

$$1880.9872 = 1880 \text{ grudzień } 26, 3^h 30^m 23^s \text{ cz. śr. lwowskiego.}$$

118. Wzór liczbowy na czas gwiazdowy. Związek między czasem gwiazdowym a czasem średnim słonecznym. Wyrażenie pozornego wznoszenia prostego średniego słońca daje wzór (279). Po wprowadzeniu wartości liczbowych, gdy za jednostkę czasu przyjmiemy dobę średnią słoneczną, a za epokę początkową początek astronomiczny gregorjańskiego roku 1900 w Greenwich, otrzymuje się

$$\alpha_m' = 279^\circ 41' 27''.57 + 3548''.33043 t + \frac{1''.394}{(36525)^2} t^2 + \bar{p} \cos \epsilon, \quad (\text{bi})$$

albo w jednostkach czasu

$$\alpha_m' = 18^h 38^m 45^s.838 + 3^m 56^s.55536 t + 0^s.0000000006966 t^2 + \bar{p} \cos \epsilon. \quad (\text{bj})$$

Stała część tego wzoru jest to zarazem czas gwiazdowy w epoce 0. Gdy więc zważymy, że we wzorze (274) współczynnik $\varphi + f_1 = \varphi' + g_1 + \delta_1 + 360^\circ$, więc wprowadzając wartość liczbową tego współczynnika i f_2 według ustępu 113, otrzymamy

$$\theta = 18^h 38^m 45^s.838 + 24^h 3^m 56^s.55536 t + 0^s.0000000006966 t^2 + \bar{p} \cos \epsilon. \quad (\text{bk})$$

Niechaj będzie $t = \kappa + \nu$, gdzie κ jest liczbą całkowitą, a ν ułamkiem właściwym; oznaczmy przez α_κ' i θ_κ wartości, które otrzymują α_m' i θ dla $t = \kappa$, to jest

$$\alpha_\kappa' = \theta_\kappa = 18^h 38^m 45^s.838 + 3^m 56^s.55536 \kappa + 0^s.0000000006966 \kappa^2 + \bar{p} \cos \epsilon. \quad (299)$$

Gdy po podstawieniu $t = \kappa + \nu$ we wzorze (bj) opuścimy wyrazy, zawierające $\kappa \nu$ i ν^2 , oraz przyjmiemy, że $\bar{p} \cos \varepsilon_m = = (\bar{p} \cos \varepsilon)_\kappa$, co na dokładność nie ma żadnego wpływu, to znajdziemy

$$\alpha_m' = \alpha_\kappa' + 3^m 56^s.55536 \nu,$$

$$\theta = \theta_\kappa + 24^h \cdot \nu + 3^m 56^s.55536 \nu. \quad (300)$$

Wzór (299) określa czas gwiazdowy w średnie południe greenwich'skie dla κ -tego dnia od epoki 0. Wartość tę, lub też obecnie czas gwiazdowy w średnią północ greenwich'ską, dla każdego κ podają roczniki astronomiczne. Wzór (300), gdy znane jest θ_κ , pozwala znaleźć czas gwiazdowy w Greenwich dla epoki $t = \kappa + \nu$.

Iloczyn $24^h \cdot \nu$ jest to czas, który upłynął od κ -tego średniego południa greenwich'skiego, wyrażony jako ułamek doby średniej. Niechaj η_0 będzie ten sam czas, wyrażony w godzinach, minutach i sekundach średnich, to $\nu = \frac{\eta_0}{24^h}$. Oznaczmy jeszcze dla krótkości

$$\frac{3^m 56^s.55536}{24^h} = 0.002737909 = s, \quad (b1)$$

to możemy też pisać

$$\alpha_m' = \alpha_\kappa + s \eta_0,$$

$$\theta = \theta_\kappa + (1 + s) \eta_0. \quad (300')$$

Oczywiście $(1 + s) \eta_0 = 1.002737909 \eta_0$ jest to liczba godzin gwiazdowych, odpowiadająca liczbie η_0 godzin średnich słonecznych.

Jeżeli chcemy znaleźć czas gwiazdowy θ_λ w miejscu, którego długość od Greenwich wynosi λ , w chwili, gdy czas średni słoneczny jest η , to jest przedewszystkiem według wzoru (71)

$$\eta + \lambda = \eta_0, \quad \theta_\lambda + \lambda = \theta.$$

Podstawiając tu na θ wartość według wzoru (300'), znajdujemy

$$\theta_{\lambda} + \lambda = \theta_z + (1 + s)(\eta + \lambda),$$

skąd wypływa

$$\theta_{\lambda} = \theta_z + s\lambda + \eta + s\eta. \quad (301)$$

Kładąc $\eta = 0$ i oznaczając przez θ_{λ}^0 odpowiednią wartość θ_{λ} , otrzymamy

$$\theta_{\lambda}^0 = \theta_z + s\lambda; \quad (b1)$$

wzór ten określa w miejscu, którego długość jest λ , czas gwiazdowy w średnie południe tego dnia, w którym czas gwiazdowy w średnie południe greenwisch'skie jest θ_z . Wielkość $s\lambda$, stanowiąca różnicę $\theta_{\lambda}^0 - \theta_z$, nazywa się *poprawką czasu gwiazdowego*. W danem miejscu obserwacji poprawka ta ma wartość stałą; roczniki astronomiczne podają tę wartość dla poszczególnych obserwatorów wraz z ich spólrzędniemi geograficznemi.

Gdy odwrotnie z równania (301) wyrazimy η przez θ_{λ} , to znajdziemy wzór, służący do zamiany czasu gwiazdowego na czas średni słoneczny. Jest mianowicie

$$\eta = \frac{\theta_{\lambda} - (\theta_z + s\lambda)}{1 + s}. \quad (bm)$$

Gdy położymy

$$\frac{1}{1 + s} = 1 - \sigma, \quad (bn)$$

skąd wypływa

$$\sigma = \frac{s}{1 + s} = 0.002730433; \quad (bo)$$

to jest

$$\eta = [\theta_{\lambda} - (\theta_z + s\lambda)](1 - \sigma) = (\theta_{\lambda} - \theta_z - s\lambda) - (\theta_{\lambda} - \theta_z - s\lambda)\sigma. \quad (302)$$

Oczywiście η jest to liczba godzin średnich, odpowiadająca liczbie godzin gwiazdowych $\theta_{\lambda} - (\theta_z + s\lambda)$, które upłynęły od średniego południa do czasu gwiazdowego θ_{λ} .

Do zamiany godzin gwiazdowych na średnie i odwrotnie, średnich na gwiazdowe, służą tablice XII *a* i XII *b*, z których pierwsza dla czasu, obejmującego *i* godzin średnich, daje poprawkę *si*, druga zaś dla czasu, obejmującego *i* godzin gwiazdowych, daje poprawkę *oi*.

Przykład 1. Znaleźć czas gwiazdowy we Lwowie dla epoki:

1921, marzec 15, $15^h 25^m 36^s.70$ czasu śr. lw.

W roczniku B. A. J. na rok 1921 znajdujemy dla 15 marca

$$\theta_x = 23^h 30^m 11^s.10;$$

ponieważ dla Lwowa jest $\lambda = -1^h 36^m 4^s$, więc według tabl. XII *a* jest $s\lambda = -15^s.78$, zgodnie z wartością tej poprawki, podaną w roczniku na str. 442.

Stosujemy wzór (301):

$$\begin{array}{r} \theta_z = 23^h 30^m 11^s.10 \\ s\lambda = \quad \quad -15^s.78 \\ \eta = 15^h 25^m 36^s.70 \\ s\eta = \quad \quad 2^m 32^s.06 \\ \hline \theta_\lambda = 14^h 58^m 4^s.08 \end{array}$$

Przykład 2. Znaleźć, jaki był czas średni słoneczny we Lwowie dnia 10 lipca 1916 w chwili, gdy czas gwiazdowy wynosił $15^h 35^m 46^s.76$.

Znajdujemy, zgodnie z poprzednio stosowanymi oznaczeniami:

$$\begin{array}{r} \theta_\lambda = 15^h 35^m 46^s.76 \\ \theta_z = 7^h 12^m 18^s.39 \\ s\lambda = \quad \quad -15^s.78 \\ \hline \theta_\lambda - \theta_z - s\lambda = 8^h 23^m 44^s.15 \\ (\theta_\lambda - \theta_z - s\lambda)\sigma = \quad \quad 1^m 22^s.53 \\ \hline \eta = 8^h 22^m 21^s.62 \end{array}$$

Ponieważ z obserwacji gwiazd można wyznaczać tylko czas gwiazdowy, więc przejście z czasu gwiazdowego na średni musi być uskuteczniane zawsze drogą rachunkową.

119. Związek między czasem słonecznym prawdziwym a średnim. Szczegóły, dotyczące równania czasu. Jeżeli z obserwacji słońca określony został jego kąt godzinny, czyli prawdziwy czas słoneczny, to zachodzi potrzeba zamiany czasu prawdziwego na czas średni słoneczny. Zamiana ta skutecznia się w sposób bardzo prosty według wzoru (281) przez dodanie do czasu prawdziwego wartości funkcji Z , zwanej równaniem czasu, obliczonej dla czasu prawdziwego ϑ . W praktyce korzysta się w tym celu z obliczonych z góry wartości Z , które w rocznikach astronomicznych podawane są dla każdego średniego południa greenwich'skiego.

Niechaj będą λ , τ , ϑ i Z odpowiednio długość geograficzna miejsca obserwacji, czas średni słoneczny, czas prawdziwy i równanie czasu w pewnej chwili. Według wzoru (281) zachodzi związek

$$\tau = \vartheta + Z.$$

W tym samym momencie jest w Greenwich czas średni $\tau_0 = \tau + \lambda$. Oznaczmy przez Z_0 wartość równania czasu w średnie południe greenwich'skie tego dnia, podane w roczniku, a przez ΔZ zmianę równania czasu w ciągu następnej doby, to w czasie średnim τ_0 , wyrażonym w godzinach, jest

$$Z = Z_0 + \frac{\tau_0}{24} \Delta Z = Z_0 + \frac{1}{24} (\tau + \lambda) \Delta Z.$$

Gdy więc oznaczmy $\frac{\Delta Z}{24^h} = v$, to

$$\tau = \vartheta + Z_0 + (\tau + \lambda) v. \quad (\text{bp})$$

Rozwiązując to równanie względem ϑ , otrzymujemy

$$\vartheta = \tau - Z_0 - (\tau + \lambda) v, \quad (303)$$

rozwiązując je zaś względem τ , z dostatecznem przybliżeniem znajdujemy

$$\tau = \vartheta + Z_0 + (\vartheta + Z_0 + \lambda) v. \quad (304)$$

Z pierwszego z powyższych wzorów znajduje się czas prawdziwy, gdy dany jest średni, z drugiego przeciwnie, znajduje się czas średni, gdy dany jest czas prawdziwy.

Przykład 1. Znaleźć czas prawdziwy we Lwowie dnia 3 marca 1921 w czasie średnim $6^h 52^m 35^s.70$.

W roczniku znajdujemy

$$Z_0 = + 12^m 8^s.85, \quad \Delta Z = - 12^s.84,$$

jest więc

$$\nu = - \frac{12^s.84}{86400^s} = - 0.000149.$$

Ponieważ $\eta = 6^h 52^m 35^s.70$, $\lambda = - 1^h 36^m 4^s$, więc

$$\begin{aligned} \eta + \lambda &= 5^h 16^m 31^s.70 \\ (\eta + \lambda) \nu &= - 2^s.82 \end{aligned}$$

oraz według wzoru (303)

$$\vartheta = 6^h 52^m 35^s.70 - 12^m 8^s.85 + 2^s.82 = 6^h 40^m 29^s.67.$$

Przykład 2. Znaleźć czas średni lwowski d. 3 marca 1921 r., gdy czas prawdziwy był $6^h 40^m 29^s.67$.

Stosujemy wzór (304).

$$\begin{array}{rcl} \vartheta & = & 6^h 40^m 29^s.67 \\ Z_0 & = & 12^m 8^s.85 \\ \lambda & = & - 1^h 36^m 4^s \\ \hline \vartheta + Z_0 + \lambda & = & 5^h 16^m 34^s.52 \\ (\vartheta + Z_0 + \lambda) \nu & = & - 2^s.82 \\ \vartheta + Z_0 & = & 6^h 52^m 38^s.52 \\ \eta & = & 6^h 52^m 35^s.70 \end{array}$$

Widzimy, że wyniki przykładu pierwszego i drugiego zgadzają się odpowiednio z danymi przykładu drugiego i pierwszego.

Zajmijmy się obecnie nieco szczegółowiej funkcją Z . Określona jest ona przez wzory (277) i (280) w sposób następujący:

$$Z = -(f_2 - \delta_2 - g_2)(t - t_0)^2 + E' + F + k_1' \cos(\odot - \omega) + \bar{p} - \bar{p}_1 (\cos \varepsilon - 1); \quad (\text{bq})$$

występujące tu funkcje E' i F są określone przez wzory (n') i (r), a \bar{p} i \bar{p}_1 są sumami małych wyrazów perjdycznych.

Widzimy, że funkcja Z jest bardzo skomplikowaną funkcją czasu, której obliczenie dla danej wartości t wymaga obliczenia wszystkich poszczególnych wyrazów wyrażenia (bq).

Wyraz wiekowy tego wyrażenia jest bardzo mały: współczynnik jego wynosi zaledwie $-0''.3$, gdy stulecie juljańskie jest jednostką czasu. Pomijając ten mały wyraz, który powoduje zmniejszenie się równania czasu o 1^s dopiero po upływie 700 lat, powiedzieć możemy, że funkcja Z jest sumą samych wyrazów perjdycznych.

Te wyrazy perjdyczne mają różne okresy i różne współczynniki. Gdy przy obliczeniu ograniczymy się do tej dokładności, jaka jest praktycznie wystarczająca, t. j. do $0^s.01$, to można pominąć znaczną część wyrazów, występujących w sumach \bar{p} i \bar{p}_1 ; uwzględnić wypadnie tylko pierwsze wyrazy nutacji, które powodują wahania Z w granicach $\pm 0^s.14$ w okresie 19-letnim. Ale gdyby chodziło tylko o zbadanie przebiegu funkcji Z , to otrzymamy obraz mało różny od rzeczywistego, opuszczając wszystkie wyrazy sum \bar{p} i \bar{p}_1 oraz wyraz perjdyczny aberacji rocznej, który powoduje wahania w granicach $\pm 0^s.02$, — to znaczy, przyjmując wprost

$$Z = E' + F,$$

albo po podstawieniu wartości według wzorów (n') i (r):

$$Z = -\tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2 \odot' + \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\varepsilon}{2} \sin 4 \odot' - \frac{1}{3} \tan^6 \frac{\varepsilon}{2} \sin 6 \odot' + \dots + \left(2e - \frac{e^2}{4}\right) \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \frac{1}{2} e^3 \sin 3M + \dots \quad (\text{br})$$

Badając przebieg funkcji Z , ograniczymy się do tych wyrazów, które mogą uczynić 1^s w wartości funkcji, t. j. tych,

których współczynniki mają conajmniej wartość 15". Obliczmy współczynniki wzoru (br).

Przyjmujemy

$$\varepsilon = 23^{\circ} 28', \quad e = 0.0167448, \quad \log e = 8.22388,$$

i obliczamy:

$$\tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \quad 9.31743 \quad \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \quad 8.63486 \quad \tan^4 \frac{\varepsilon}{2} \quad 7.26972$$

$$\left(\tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \right)'' \quad 3.94929 \quad \frac{1}{2} \left(\tan^4 \frac{\varepsilon}{2} \right)'' \quad 2.28312$$

$$\left(\tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \right)'' = 8898'' \quad \frac{1}{2} \left(\tan^4 \frac{\varepsilon}{2} \right)'' = 192''$$

$$\tan^6 \frac{\varepsilon}{2} \quad 5.90458$$

$$\frac{1}{3} \left(\tan^6 \frac{\varepsilon}{2} \right)'' \quad 0.74189$$

$$\frac{1}{3} \left(\tan^6 \frac{\varepsilon}{2} \right)'' = 5''$$

$$2e = 0.0334896 \quad e^2 \quad 6.44776 \quad e^3 \quad 4.67164$$

$$\frac{1}{4} e^3 = 0.0000012 \quad \frac{5}{4} \quad 0.09691 \quad \frac{1}{4} \frac{3}{2} \quad 0.03476$$

$$2e - \frac{e^3}{4} = 0.0334884 \quad \left(\frac{5}{4} e^2 \right)'' \quad 1.85910 \quad \left(\frac{1}{4} \frac{3}{2} e^3 \right)'' \quad 0.02083$$

$$\left(\frac{5}{4} e^2 \right)'' = 72'' \quad \left(\frac{1}{4} \frac{3}{2} e^3 \right)'' = 1''$$

$$\left(2e - \frac{e^3}{4} \right) \quad 8.52489$$

$$\left(2e - \frac{e^3}{4} \right)'' \quad 3.83912$$

$$\left(2e - \frac{e^3}{4} \right)'' = 6904''$$

Otrzymujemy zatem, zgodnie z uwagą, dotyczącą dokładności obliczenia:

$$Z = -8898'' \sin 2 \odot' + 192'' \sin 4 \odot' + 6904'' \sin M + 72'' \sin 2M. \quad (\text{bs})$$

Wartość argumentów wystarczy podać z dokładnością do 1'; wobec tego możemy przyjąć przedewszystkiem

$$\odot' = \odot = \Pi + M + F,$$

a dalej

$$\begin{aligned}\sin 2 \odot' &= \sin (2 \Pi + 2 M + 2 F) = \\ &= \sin 2 \Pi \cos (2 M + 2 F) + \cos 2 \Pi \sin (2 M + 2 F), \\ \sin 4 \odot' &= \sin (4 \Pi + 4 M + 4 F) = \\ &= \sin 4 \Pi \cos (4 M + 4 F) + \cos 4 \Pi \sin (4 M + 4 F).\end{aligned}$$

Zastosujemy wzór (bs) celem zbadania przebiegu funkcji Z w roku 1917. Dla epoki 1917.0 jest według wzoru (at) $\Pi = 281^{\circ} 30'$. Stosując tę wartość i podstawiając wartości powyższe na $\sin 2 \odot'$ i $\sin 4 \odot'$ we wzorze (bs), otrzymujemy po obliczeniu:

$$\begin{aligned}-8898'' \sin 2 \Pi &= 3471'', & -8898'' \cos 2 \Pi &= 8191'', \\ 192'' \sin 4 \Pi &= 138'', & 192'' \cos 4 \Pi &= 133'',\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}Z &= 3471'' \cos (2 M + 2 F) + 8191'' \sin (2 M + 2 F) + \\ &+ 138'' \cos (4 M + 4 F) + 133'' \sin (4 M + 4 F) + 6904'' \sin M + \\ &\quad + 72'' \sin 2 M.\end{aligned}\tag{bt}$$

Przy wyżej określonym stopniu dokładności można poczynić jeszcze dalsze uproszczenia. Można mianowicie w rozwinięciach wyrazów z argumentem $(2 M + 2 F)$ opuścić kwadraty i wyższe potęgi F , a w wyrazach z argumentem $(4 M + 4 F)$ opuścić wogóle F . Co więcej, można zawsze zamiast wartości F , obliczonej według wzoru (r), ograniczyć się do pierwszego wyrazu tego wyrażenia, t. j. przyjąć

$$F = 0.03349 \sin M = 6904'' \sin M.$$

Kładąc więc

$$\begin{aligned}\sin (2 M + 2 F) &= \sin 2 M + 0.06698 \sin M \cos 2 M, \\ \cos (2 M + 2 F) &= \cos 2 M - 0.06698 \sin M \sin 2 M,\end{aligned}$$

i podstawiając w (bt), znajdujemy

$$\begin{aligned}Z &= 3471'' \cos 2 M - 232'' \sin M \sin 2 M + 8191'' \sin 2 M + \\ &+ 548'' \sin M \cos 2 M + 138'' \cos 4 M + 133'' \sin 4 M + \\ &\quad + 6904'' \sin M + 72'' \sin 2 M,\end{aligned}\tag{bu}$$

oraz ostatecznie po dalszem przekształceniu

$$Z = 6902'' \sin M + 8263'' \sin 2M + 3471'' \cos 2M + 133'' \sin 4M + \\ + 138'' \cos 4M + \sin M(548'' \cos 2M - 232'' \sin 2M), \quad (\text{bw})$$

lub w sekundach czasu

$$Z = 460^s \sin M + 551^s \sin 2M + 231^s \cos 2M + 9^s \sin 4M + \\ + 9^s \cos 4M + \sin M(37^s \cos 2M - 15^s \sin 2M). \quad (\text{bx})$$

Widzimy z tego wzoru, że najważniejszymi wyrazami równania czasu są wyrazy z okresem, równym okresowi M , oraz z okresami, wynoszącymi połowę i ćwiartkę powyższego okresu.

Celem zbadania funkcji Z ważnem jest przedewszystkiem znalezienie jej miejsc zerowych oraz jej wartości maksymalnych i minimalnych. Pierwsze znajdujemy, kładąc $Z=0$, drugie zaś — kładąc $\frac{dZ}{dM} = 0$, i rozwiązując tak uzyskane równania ze względu na M . Miejsca zerowe wypływają więc z równania

$$460^s \sin M + 231^s \cos 2M + 551^s \sin 2M + 9^s \sin 4M + 9^s \cos 4M + \\ + \sin M(37^s \cos 2M - 15^s \sin 2M) = 0, \quad (\text{by})$$

a maxima i minima z równania

$$460^s \cos M + 1102^s \cos 2M - 463^s \sin 2M + 35^s \cos 4M - \\ - 37^s \sin 4M + \cos M(37^s \cos 2M - 15^s \sin 2M) - \\ - \sin M(73^s \sin 2M + 31^s \cos 2M) = 0. \quad (\text{bz})$$

Równanie (by) spełnione jest dla czterech następujących wartości M : $102^\circ 4'$, $161^\circ 5'$, $238^\circ 50'$ i $351^\circ 54'$; równanie (bz) spełnione jest dla wartości M : $39^\circ 42'$, $130^\circ 48'$, $202^\circ 41'$ i $300^\circ 53'$. Podstawiając te ostatnie wartości we wzorze (bx), otrzymuje się następujące wartości maksymalne i minimalne na Z :

$$14^m 24^s, \quad - 3^m 48^s, \quad 6^m 20^s, \quad - 16^m 22^s.$$

Znajdźmy jeszcze długości słońca, odpowiadające powyższym 8 wartościom M ; wynikają one ze wzoru (q)

$$\Pi + M + F = \odot.$$

Przyjmując $\Pi = 281^{\circ} 30'$ (r. 1917), otrzymujemy następujące daty, w których $Z=0$, oraz odpowiednie długości słońca:

15 kwietnia,	$\odot = 25^{\circ} 26'$,
1 września,	$= 158^{\circ} 43'$,
14 czerwca,	$= 83^{\circ} 11'$,
24 grudnia,	$= 273^{\circ} 7'$.

Podobnie znajdujemy, że pierwsze maximum równania czasu zachodzi, gdy $\odot = 322^{\circ} 27'$, dnia 12 lutego, pierwsze minimum, gdy $\odot = 53^{\circ} 44'$, dnia 15 maja, drugie maximum, gdy $\odot = 123^{\circ} 27'$, dnia 26 lipca, wreszcie drugie minimum, gdy $\odot = 220^{\circ} 43'$, dnia 3 listopada. Daty wymienione zmieniają się powoli wiekowo z powodu zmiany wartości Π , a prócz tego wahają się w niewielkich granicach z powodu zmian noworocznej długości słońca. Odpowiednie daty roku Bessla podlegają tylko zmianom wiekowym. Wartości, wynikające z równania (bz), różnią się nieco od ścisłych, ponieważ wskutek różniczkowania błędy współczynników występują w tem równaniu w podwójnej lub poczwórnej wielkości.

Gdy chodzi o dokładne wartości Z , to ulegają one zmianom wiekowym nie tylko w zależności od Π , t. j. skutkiem precesji i ruchu punktu przysłonecznego drogi ziemskiej, ale też skutkiem zmian wiekowych pochyłości ekliptyki i mimośrodu drogi ziemskiej, a prócz tego, jak wiemy, zachodzą też zmiany wskutek nutacji i innych perturbacyj perijodycznych. Odpowiednim zmianom oczywiście ulegają też daty roku Bessla, w których Z ma pewną określoną wartość.

120. Poprawka południa. Środek dnia. Zmiany długości prawdziwej doby słonecznej. Czas średni wschodu i zachodu słońca. Gdy jako dzień prawdziwy słoneczny określimy odstęp czasu pomiędzy chwilą wschodu a chwilą zachodu słońca, to wiemy (ust. 45), że z powodu ruchu własnego słońca chwila przejścia słońca przez południk, t. j. prawdziwe południe, nie przypada ściśle na środek tego odstępu, a chwila górowania słońca nie schodzi się ani ze środkiem dnia ani z chwilą przejścia słońca przez południk. Wogóle dwie jakieś równe wysokości słońca po dwóch

stronach południka przypadają przy kątach godzinnych ϑ_1 i ϑ_2 , których wartości bezwzględne nie są sobie równe.

Niechaj będą odpowiednio δ_1 i δ_2 zboczenia słońca w chwilach, gdy zachodzą powyższe kąty godzinne; oznaczmy przez h wysokość słońca w tych chwilach, to jest

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin \varphi \sin \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos \vartheta_1, \\ \sin h &= \sin \varphi \sin \delta_2 + \cos \varphi \cos \delta_2 \cos \vartheta_2,\end{aligned}$$

a więc też

$$\sin \varphi \sin \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos \vartheta_1 = \sin \varphi \sin \delta_2 + \cos \varphi \cos \delta_2 \cos \vartheta_2. \quad (ca)$$

Oznaczmy przez δ_0 zboczenie słońca w prawdziwe południe i niech będzie

$$\delta_1 = \delta_0 + x_1, \quad \delta_2 = \delta_0 + x_2. \quad (cb)$$

Ponieważ x_1 i x_2 są małymi kątami, więc w rozwinięciach $\sin \delta$ i $\cos \delta$ można się ograniczyć do pierwszych potęg x ; jest zatem z dostateczną dokładnością

$$\begin{aligned}& \sin \varphi \sin \delta_0 + \cos \varphi \cos \delta_0 \cos \vartheta_1 + x_1 \sin \varphi \cos \delta_0 - \\ & \quad - x_1 \cos \varphi \sin \delta_0 \cos \vartheta_1 = \\ &= \sin \varphi \sin \delta_0 + \cos \varphi \cos \delta_0 \cos \vartheta_2 + x_2 \sin \varphi \cos \delta_0 - \\ & \quad - x_2 \cos \varphi \sin \delta_0 \cos \vartheta_2,\end{aligned}$$

albo

$$\begin{aligned}\sin \varphi \cos \delta_0 (x_2 - x_1) - \cos \varphi \sin \delta_0 (x_2 \cos \vartheta_2 - x_1 \cos \vartheta_1) + \\ + \cos \varphi \cos \delta_0 (\cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_1) = 0.\end{aligned} \quad (cc)$$

Oznaczmy jeszcze

$$- \vartheta_1 - 2y = \vartheta_2, \quad (cd)$$

to y jest małym kątem, i można przyjąć

$$\cos \vartheta_2 = \cos \vartheta_1 - 2y \sin \vartheta_1.$$

Podstawiając tę wartość w równaniu (cc) i rozwiązując je względem y , znajdujemy

$$2y = \frac{\sin \varphi \cos \delta_0 - \cos \varphi \sin \delta_0 \cos \vartheta_1}{-x_2 \cos \varphi \sin \delta_0 \cos \vartheta_1 + \cos \varphi \cos \delta_0 \sin \vartheta_1} (x_2 - x_1),$$

albo, gdy w mianowniku opuścimy mały wyraz, zawierający czynnik x_2 , jest też

$$2y = \left(\frac{\tan \varphi}{\sin \vartheta_1} - \frac{\tan \delta_0}{\tan \vartheta_1} \right) (x_2 - x_1). \quad (\text{ce})$$

Oczywiście $-y = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$ jest to kąt godzinny słońca w chwili, gdy znajduje się ono w środku pomiędzy punktami, w których wysokość jego jest h , a kąty godzinne mają wartość ϑ_1 i ϑ_2 . Niechaj jeszcze będą τ_1 i τ_2 czasy średnie, w których kąty godzinne słońca mają powyższą wartość, to $\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$ jest czasem średnim w chwili, gdy kąt godzinny słońca wynosi $-y$, a

$$\tau_0 = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} + y \quad (\text{cf})$$

jest czasem średnim w prawdziwe południe. Dlatego też y nazywa się *poprawką południa*.

Wzorowi (ce) można nadać postać dogodniejszą w zastosowaniu praktycznem. Czas, który upływa, gdy kąt godzinny słońca wzrasta od ϑ_1 do 0, wynosi

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{2} + y - \tau_1 = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} + y;$$

czas zaś, w którym kąt godzinny słońca wzrasta od 0 do ϑ_2 , wynosi

$$\tau_2 - \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} - y = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} - y.$$

Oznaczmy

$$\frac{\eta_2 - \eta_1}{2} = \tau, \quad (\text{cg})$$

to w przybliżeniu jest też $-\vartheta_1 = \tau + y$; a że y jest małym kątem, więc możemy we wzorze (ce) pisać $-\tau$ zamiast ϑ_1 ; będzie więc też

$$2y = - \left(\frac{\tan \varphi}{\sin \tau} - \frac{\tan \delta_0}{\tan \tau} \right) (x_2 - x_1). \quad (\text{ch})$$

Gdy przyjmiemy dalej, że zboczenie słońca w czasie od η_1 do η_2 zmienia się jednostajnie, i oznaczmy $-x_1 = x_2 = \Delta\delta$, to $x_2 - x_1 = 2\Delta\delta$. Dostatecznie dokładną wartość na $\Delta\delta$ otrzymuje się w sposób następujący.

Niech będą δ_{-1} i δ_{+1} zboczenia słońca w średnie południe dnia, poprzedzającego ten dzień, dla którego określa się poprawkę południa, i dnia następującego po nim. Gdy oznaczmy $\mu = \delta_{+1} - \delta_{-1}$, to $\frac{\mu}{48}$ oznacza wartość średnią zmiany zboczenia słońca na godzinę w okresie czasu dwudniowym; środkiem tego okresu jest południe, którego poprawkę określamy. Ponieważ zmiana zboczenia w czasie τ wynosi $\frac{\mu}{48} \tau$, więc $x_2 - x_1 = 2\Delta\delta = 2 \frac{\mu}{48} \tau$. Podstawiając tę wartość we wzorze (ch) i dzieląc po prawej stronie przez 15, otrzymujemy y w sekundach czasu ze wzoru:

$$y = - \frac{\mu}{720} \left(\frac{\tau}{\sin \tau} \tan \varphi - \frac{\tau}{\tan \tau} \tan \delta_0 \right). \quad (\text{ci})$$

Gdy oznaczmy

$$\frac{\tau}{720 \sin \tau} = A, \quad \frac{\tau}{720 \tan \tau} = B, \quad (305)$$

to jest ostatecznie

$$y = -A \mu \tan \varphi + B \mu \tan \delta_0. \quad (306)$$

Ułatwiają rachunek tablice, które podają z argumentem τ wartości $\log A$ i $\log B$.

Gdy przez η_w i η_z oznaczymy odpowiednio czas średni wschodu i zachodu słońca, to środkiem dnia oczywiście jest chwila, gdy czas średni jest $\eta_m = \frac{\eta_w + \eta_z}{2}$. Wyznaczając y dla $\tau = \frac{\eta_z - \eta_w}{2}$ i pisząc

$$s_1 = \frac{\eta_z - \eta_w}{2} + y, \quad s_2 = \frac{\eta_z - \eta_w}{2} - y, \quad (\text{cj})$$

oznaczamy przez s_1 czas średni, który upływa od wschodu słońca do prawdziwego południa, a przez s_2 czas, który upływa od prawdziwego południa do zachodu słońca. Różnica $s_1 - s_2 = 2y$ wyraża, o ile prawdziwe przedpołudnie jest dłuższe od prawdziwego popołudnia. Ponieważ y może być dodatnie lub ujemne, więc w pierwszym przypadku przedpołudnie jest dłuższe od popołudnia, w drugim zaś przypadku krótsze; pozatem ponieważ y , jak wskazuje wzór (306), jest proporcjonalne do μ , więc największe różnice $s_1 - s_2$ zachodzą w epokach bliskich równonocy, a w czasie stanowisk są one zerami.

W życiu cywilnem za środek dnia przyjmuje się średnie południe. Różnica długości pomiędzy średnim przedpołudniem a średnim popołudniem jest jeszcze większa, aniżeli pomiędzy prawdziwym przedpołudniem a prawdziwym popołudniem z powodu równania czasu. Wiemy, że $\eta_0 = \frac{\eta_w + \eta_z}{2} + y$ jest czasem średnim w prawdziwe południe. Z drugiej strony, ponieważ $\eta = \vartheta + Z$, więc dla $\vartheta = 0$ jest też $\eta = Z$; to znaczy, że w prawdziwe południe czasem średnim jest równanie czasu. Wynika stąd

$$\frac{\eta_w + \eta_z}{2} = \eta_m = Z - y.$$

t. j. że środek dnia przypada w czasie średnim $Z - y$.

Ponieważ w średnie południe $\eta = 0$, więc widzimy, że średnie przedpołudnie jest o $Z - y$ krótsze od połowy dnia, a średnie popołudnie o tyleż dłuższe od tej połowy; $2(Z - y)$ wyraża zatem różnicę pomiędzy średnim popołudniem a średnim przed-

południem. Pomijając y , widzimy, że średnie popołudnie jest dłuższe od średniego przedpołudnia wtedy, gdy $Z > 0$, a krótsze wtedy, gdy $Z < 0$. Dnia 11 lutego, gdy $Z = 14^m 24^s$, popołudnie jest prawie o pół godziny dłuższe od przedpołudnia, a w pierwszych dniach listopada przeciwnie, przedpołudnie jest przeszło o pół godziny dłuższe od popołudnia. Są to krańcowe wartości różnic.

Większe jeszcze różnice w podziale dnia powstają stąd, że prawie w powszechnem zastosowaniu znajduje się obecnie nie czas miejscowy, lecz strefowy.

Oznaczmy czas strefowy przez $\tilde{\eta}$, a czas strefowy w średnie południe lokalne przez $\tilde{\eta}_0$; zgodnie z wywodami poprzednimi, czas strefowy środka dnia jest $\tilde{\eta}_m = Z - y + \tilde{\eta}_0$, a $z = 2(Z - y + \tilde{\eta}_0)$ wyraża liczbę godzin, o którą popołudnie, liczone według czasu strefowego, jest dłuższe od przedpołudnia. Wynika stąd, że gdy $\tilde{\eta}_0 > 0$, przedłuża się popołudnie, gdy zaś $\tilde{\eta}_0 < 0$, przeluzza się przedpołudnie.

W Polsce ustawowym (ustawa z d. 11 maja 1922) jest czas środkowo-europejski, wyprzedzający czas greenwich'ski o jedną godzinę; jest więc

$$\tilde{\eta} = \eta + \lambda + 1^h, \quad \tilde{\eta}_0 = \lambda + 1^h.$$

W granicach Polski jest wszędzie $\tilde{\eta}_0 < 0$, wobec czego z wszędzie jest zmniejszone. Tak np. dla $Z = -16^m$ i $\tilde{\eta}_0 = -44^m$ jest (pomijając y) $z = 2^h$; a więc przedpołudnie ustawowe jest o 2 godziny dłuższe od popołudnia, gdy według czasu lokalnego przedpołudnie tylko o 32 minuty byłoby dłuższe od popołudnia. Wogóle w całej Polsce, bez względu na wartość Z , jest zawsze $z < 0$, a więc przedpołudnie ustawowe jest dłuższe od popołudnia.

Długość doby prawdziwej zmienia się skutkiem zmiany równania czasu. Ponieważ jest $\eta = \vartheta + Z$, więc w prawdziwe południe jest $\eta = Z$. Gdyby Z miało wartość stałą, to i następne południe prawdziwe zaszłoby w czasie średnim Z , w rzeczywistości zaś zajdzie ono w czasie średnim $\eta = Z + dZ$, gdzie dZ oznacza zmianę równania czasu w ciągu doby prawdziwej. Identyfikując tę ostatnią ze zmianą w ciągu doby średniej i oznaczając dobę prawdziwą przez ω_v , mamy

$$\omega_v = \omega_m + dZ. \quad (307)$$

Doba prawdziwa jest zatem krótsza lub dłuższa od doby średniej, zależnie od tego, czy $dZ > 0$, czy też $dZ < 0$. Krańcowe długości doby prawdziwej przypadają w epokach, gdy pochodne $\frac{dZ}{dM}$ osiągają maximum lub minimum, t. j. gdy $\frac{d^2 Z}{dM^2} = 0$. Największa wartość ujemna zmiany dziennej dZ wynosi $-21^s.2$, największa zaś dodatnia $+29^s.9$; przypadają one odpowiednio w dniach 17 września i 22 grudnia. Pierwszej z tych wartości odpowiada najkrótsza doba prawdziwa $\omega_e = 23^h 59^m 38^s.8$, drugiej zaś najdłuższa doba prawdziwa $\omega_e = 24^h 0^m 29^s.9$. W dniach, gdy $dZ = 0$, a więc gdy Z osiąga swą wartość maksymalną lub minimalną, doba prawdziwa równa się średniej; w innych epokach różni się ona od średniej, ale zawsze długość jej zawarta jest w granicach wyżej podanych. Różnica między najdłuższą a najkrótszą dobą prawdziwą wynosi $51^s.1$.

W związku ze zmianą równania czasu znajduje się też zjawisko, że w pewnych okolicznościach przy wzrastającym dniu może czas średni wschodu słońca być późniejszy, niż dnia poprzedniego, albo też czas zachodu słońca wcześniejszy; odwrotne stosunki zachodzić mogą przy malejącym dniu. Wyjaśnia się to w sposób następujący.

Ponieważ w czasie wschodu i zachodu słońca kąt godzinny słońca wypływa ze wzoru

$$\cos t_{\odot} = -\tan \varphi \tan \delta_{\odot},$$

więc w zależności od zmiany zboczenia słońca $d\delta_{\odot}$ jest

$$dt_{\odot} = \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \delta_{\odot} \sin t_{\odot}} d\delta_{\odot}.$$

Oznaczmy $\frac{\tan \varphi}{\cos^2 \delta_{\odot}} d\delta_{\odot} = D$, to $dt_{\odot} = \frac{D}{\sin t_{\odot}}$. Z tego wzoru wynika, że D na półkuli północnej ma znak taki sam, jak $d\delta_{\odot}$, na półkuli południowej zaś znaki $d\delta_{\odot}$ i D są przeciwne.

Wartości t_{\odot} są w tym przypadku czasami prawdziwemi wschodu i zachodu słońca, które oznaczamy przez ϑ ; ponieważ

$$\eta = \vartheta + Z,$$

więc też

$$d\eta = d\vartheta + dZ;$$

gdy więc ogólnie przez ϑ_h i η_h oznaczymy czas prawdziwy i średni w chwili, gdy słońce przechodzi przez horyzont, to jest też

$$d\vartheta_h = (d\eta_h - dZ) = \frac{D}{\sin \vartheta_h}.$$

Gdy zaś oznaczymy $\vartheta_w = -\tau$, $\vartheta_z = +\tau$, to przyjmując, że wartość dZ w czasie od wschodu do zachodu słońca się nie zmienia, mamy też

$$\begin{aligned} d\eta_w &= -\frac{D}{\sin \tau} + dZ, \\ d\eta_z &= \frac{D}{\sin \tau} + dZ. \end{aligned} \tag{ck}$$

Wzory te, w związku z wyżej podanem znaczeniem licznika D , wyjaśniają np. fakt, że w naszych szerokościach słońce po stanowisku zimowem wschodzi coraz później jeszcze do końca grudnia według czasu średniego, a już od 15 grudnia, więc jeszcze w czasie malejącego δ_{\odot} , zachodzi coraz później. Skutkiem tego w czasie od 15 grudnia do końca roku wschód słońca opóźnia się ogółem o 8 minut, a zachód słońca o 9 minut; przeciwnie w czasie od 6 do 19 grudnia czas zachodu słońca pozostaje w granicach jednej minuty, gdy czas wschodu w tym samym czasie opóźnia się o 12 minut.

ROZDZIAŁ XI.

REDUKCJA GWIAZD.

121. Katalogi gwiazd. Mapy nieba. Spółrzędne średnie ciał niebieskich są funkcjami czasu, których wartość w pewnej epoce t można obliczyć, gdy znana jest ich wartość w jakiejś epoce t_0 . Wartości spółrzędnych średnich heljocentrycznych gwiazd stałych w pewnej epoce zawierają *katalogi gwiazd*. Epoka t_0 , dla której ważne są podane w katalogu spółrzędne gwiazd, nazywa się *epoką katalogu*. Określa ona średnią równonoc i średnią¹ pochyłość ekliptyki, a więc układ spółrzędnych równikowych, w którym pozycje gwiazd są określone.

Katalogi gwiazd mają dla badań astronomicznych znaczenie podstawowe, dlatego też pierwsze w tej dziedzinie prace podejmowane już były w czasach bardzo dawnych. Najdawniejszym katalogiem, o którym mamy wiadomość, jest katalog Eudoxusa z IV wieku przed N. Chr; najstarszym katalogiem, który zachował się do dzisiaj, jest katalog Hipparcha, zamieszczony w *Almageście* Ptolemeusza. W czasach późniejszych, głównie zaś w dwóch ostatnich stuleciach, opracowano i wydano bardzo wiele katalogów, których liczba wynosi kilkaset.

Cel i znaczenie katalogów jest dwojakie. Przedewszystkiem obserwacje, których wyniki zestawione są w katalogu, określają obraz nieba w danej epoce; porównanie z wynikami spostrzeżeń innej epoki prowadzi do wykrycia zmian w tym obrazie, które zaszły w przedziale czasu pomiędzy temi epokami. W ten sposób tylko stwierdzone mogły być zmiany spółrzędnych oraz wyjaśnione różne ich przyczyny. Drugiem przeznaczeniem katalogów jest podanie dużej ilości punktów na niebie dokładnie okre-

ślonych, do których odnieść można położenie innych ciał, zmieniających szybko swe współrzędne, np. planet lub komet. Wyprobowane w ten sposób współrzędne tych ciał są podstawą wyznaczania elementów ich dróg i wogóle badania ich ruchów.

Pozatem dane, zawarte w katalogach, stanowią materiał, na którym opierają się badania, dotyczące bardzo różnorodnych zagadnień astronomicznych.

Katalogi różnią się między sobą tak pod względem materiału w nich zawartego, jak też szczególnie pod względem dokładności zawartych w nich pozycji. Pod tym ostatnim względem z pośród innych wyróżnić należy t. zw. *katalogi fundamentalne*. Są to katalogi, opierające się na takich obserwacjach, które jednocześnie ze współzrędnymi gwiazd pozwalają określić położenie punktów równonocnych na ekliptyce oraz pochyłość ekliptyki. Wielka ilość takich obserwacji, systematycznie w ciągu długich okresów czasu robionych, stanowi podstawę wyznaczenia współrzędnych t. zw. *gwiazd fundamentalnych*, których położenie wyznacza się przez równoczesne obserwacje słońca; są to więc wszystko gwiazdy jaśniejsze, które w dzień obserwowane być mogą. Liczba gwiazd fundamentalnych wynosi kilka tysięcy.

Obserwacje gwiazd fundamentalnych, odniesione do pewnego, z tych spostrzeżeń również wypływającego, układu współrzędnych, określają kompleks wartości współrzędnych, które tworzą pewien *system fundamentalny*. Współrzędne tych samych gwiazd w różnych systemach fundamentalnych wykazują pewne nieznaczne różnice, których źródło leży przedewszystkiem w niezbadanych bliżej ruchach własnych gwiazd, a także oczywiście w błędach spostrzeżeń. Ponieważ źródło tych różnic ściśle zbadaniem być nie może, więc trudno też orzec, który z systemów fundamentalnych uważać należy za dokładniejszy.

Obecnie z różnych systemów fundamentalnych w powszechnem użyciu są trzy: 1) system Newcoma, 2) system Towarzystwa Astronomicznego (A. G.) czyli Auwersa, i 3) system Bossa. Przejście z jednego systemu na drugi wykonywa się przez dodanie różnic, które wypływają z porównania współrzędnych gwiazd fundamentalnych, wspólnych katalogom fundamentalnym Newcoma, Auwersa i Bossa. Z badań Bossa

wypływają następujące redukcje (według *Astr. Jahresbericht*, t. V, 331):

Boss — Auwers:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= + 0^s.0270 - 0^s.0051 \sin \alpha + 0^s.0002 \cos \alpha, \\ \Delta\delta &= - 0''.041 \sin \alpha + 0''.075 \cos \alpha.\end{aligned}$$

Boss — Newcomb:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= 0^s.000 - 0^s.0039 \sin \alpha - 0^s.0020 \cos \alpha, \\ \Delta\delta &= + 0''.022 \sin \alpha + 0''.024 \cos \alpha.\end{aligned}$$

Z porównania powyższych różnic wynika też redukcja

Auwers — Newcomb:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= - 0^s.0270 + 0^s.0012 \sin \alpha - 0^s.0022 \cos \alpha, \\ \Delta\delta &= + 0''.063 \sin \alpha - 0''.051 \cos \alpha.\end{aligned}$$

Gwiazdy fundamentalne tworzą podstawę, na której opiera się wyznaczanie współrzędnych innych gwiazd, niefundamentalnych. Zależnie od tego, który z systemów fundamentalnych użyty został za podstawę, katalogi należą też do rozmaitych systemów, a katalogi najnowsze do jednego z trzech wymienionych.

Gdy gwiazdy, zawarte w katalogu, obserwowane są strefami tak, jak kolejno przechodzą przez pole widzenia lunety południkowej, to katalog nazywa się *strefowym*. Pierwszem obszernem przedsięwzięciem tego rodzaju jest zapoczątkowany przez Bessla i dokończony przez Argelandera katalog, znany pod nazwą *Bonner Durchmusterung* (*B. D.*). Jest to właściwie tylko orientacyjny spis gwiazd do 9 wielkości w liczbie 324188, w którym zboczenia podane są tylko z dokładnością do 0.1. Później Towarzystwo Astronomiczne (*A. G.*) podjęło się organizacji spostrzeżeń, mających na celu dokładne określenie współrzędnych gwiazd *B. D.* Wyniki tych spostrzeżeń tworzą katalogi Towarzystwa Astronomicznego (*A. G.*), z których każdy obejmuje gwiazdy, zawarte w pewnych określonych granicach zboczenia. Wszystkie katalogi *A. G.* mają za podstawę system fundamentalny Auwersa.

Katalogi poszczególne różnią się między sobą bardzo pod względem dokładności zawartych w nich pozycji. Badania specjalne pozwalają określić prawdopodobną poprawkę pozycji, podanej w katalogu, oraz wagę katalogu. Gdy wypada porównać ze sobą pozycje jakiejś gwiazdy, podane w różnych katalogach, to należy je sprowadzić do wspólnego systemu fundamentalnego przez uwzględnienie odpowiednich redukcji i wag. W tomach 134, 143, 145 i 162 *A. N.* podane są tablice, służące do redukcji wielkiej liczby katalogów na system fundamentalny *A. G.*, a w tomie 151 *A. N.* podane są wagi różnych katalogów. Z pomocą danych tam zawartych redukcja dokonywa się z łatwością.

Spółrzędne, podawane w katalogach, oparte są na obserwacjach, robionych w różnych epokach, określonych przez rok i ułamek roku astronomicznego Bessla; epoką, dla której wprowadzone zostały spółrzędne danej gwiazdy, zamieszczonej w katalogu, jest średnia z poszczególnych epok obserwacji, która różni się od epoki katalogu. Wartości spółrzędnych, podane w katalogu, otrzymuje się, wykonywując redukcję z epoki obserwacji na epokę katalogu.

Orientowanie się pośród gwiazd i wyszukiwanie na niebie tych gwiazd, których spółrzędne podane są w katalogu, ułatwiają *mapy nieba*. Mapy te są zaopatrzone w siatkę, która pozwala spółrzędne każdego punktu mapy wyznaczyć. Gdy więc przez porównanie z niebem zidentyfikujemy gwiazdę obserwowaną z gwiazdą, umieszczoną na mapie, to według spółrzędnych przybliżonych, odczytanych z mapy, można też wyszukać gwiazdę w katalogu, gdzie też podane są dokładne wartości jej spółrzędnych.

Oczywiście spółrzędne, które gwiazda posiada na mapie, są również ważne tylko dla pewnej określonej epoki, mianowicie dla epoki mapy. Chcąc więc na podstawie spółrzędnych mapy znaleźć gwiazdę w katalogu, trzeba zredukować pozycję mapy na epokę katalogu. Także odwrotnie, gdy chcemy znaleźć na mapie gwiazdę na podstawie jej spółrzędnych katalogowych, aby ją potem odszukać na niebie, trzeba z epoki katalogu przejść na epokę mapy.

Istnieje wielka ilość map nieba, zastosowanych do bardzo różnych celów. Wymienię z nich tylko wielki atlas Argelan-

dera, w którym umieszczone są wszystkie gwiazdy *Bonner Durchmusterung*, oraz atlas części nieba między stopniem 1 a 23 zboczenia południowego, opracowany przez Schönfelda, który stanowi uzupełnienie atlasu Argelander'a. Epoką obu tych atlasów jest rok 1855.0.

122. Roczniki astronomiczne. Efemerydy. Ułatwienie wielkie w codziennej praktyce astronomicznej stanowią roczniki astronomiczne, wydawane przez różne państwa corocznie, przeważnie na dwa lata naprzód. Najważniejszymi są 4 roczniki następujące:

1. *Connaissance des Temps (C. T.)*, wychodzi w Paryżu począwszy od r. 1679; od r. 1797 wydaje go paryskie Biuro długości, «Bureau des Longitudes».

2. *The Nautical Almanac and astronomical ephemeris (N. A.)*, wychodzi w Londynie od r. 1767; wydaje go obecnie specjalne biuro »the Nautical Almanac Office«.

3. *Berliner astronomisches Jahrbuch (B. A. J.)*, wychodzi od r. 1776 w Berlinie, wydawany obecnie przez biuro «Berliner astronomisches Rechen-Institut».

4. *The American Ephemeris and Nautical Almanac (A. E.)*, wychodzi w Washingtonie od r. 1855, wydawany przez biuro «Nautical Almanac Office of Washington».

W rocznikach tych dla każdego roku podawane są wartości wielu podstawowych stałych astronomicznych, różne tablice pomocnicze, a przede wszystkim efemerydy słońca, księżyca, wielkich planet i gwiazd fundamentalnych, oraz szczegóły, dotyczące ciekawych z różnych względów zjawisk astronomicznych. Aż do roku 1916 wszelkie dane roczników odnoszone były do południków własnych, mianowicie *C. T.* do paryskiego, *N. A.* do greenwich'skiego, *B. A. J.* do berlińskiego i wreszcie *A. E.* do washingtonskiego. Dopiero na konferencji paryskiej r. 1911 zgodzono się celem uniknięcia niepotrzebnych komplikacyj na południk greenwich'ski, jako wspólny południk wszystkich roczników.

Wszystkie roczniki są w obliczeniach od siebie niezależne i opierają się też przeważnie na danych, niezależnie osiągniętych. W ten sposób podawane w efemerydach wyniki rachunkowe kontrolują się wzajemnie. Jednakże różnice, wynikające stąd, że

w rocznikach za podstawę brane były nieco różne od siebie wartości niektórych stałych, a przedewszystkiem różne systemy gwiazd fundamentalnych, utrudniały kontrolę i korzystanie jednocześnie z danych różnych roczników.

Celem uzgodnienia podstaw roczników zwołaną została konferencja międzynarodowa, która pod nazwą *Conférence internationale des étoiles fondamentales* obradowała w Paryżu w dniach 18—21 maja 1896 r. Na tej konferencji ustalono wartość stałej nutacji $9''.21$, stałej aberacji $20''.47$ i stałej paralaksy słońca $8''.80$. Poza tem polecono Newcombowi przedłożenie wyrażen precesji i nutacji oraz opracowanie katalogu fundamentalnego gwiazd. Wzory precesji i nutacji Newcomba podane zostały w ustępie 91, a o jego katalogu gwiazd fundamentalnych wspomnieliśmy wyżej.

Jednakże nie wszystkie uchwały konferencji r. 1896 weszły w życie. Tak na przykład *A. E.* zachowała niektóre poprzednio stosowane wartości stałych, a *B. A. J.* pozostał przy systemie gwiazd fundamentalnych *A. G.*

Dalszym wyrazem dążenia nie tylko do unifikacji podstaw, ale też do podziału pracy między biura roczników astronomicznych, był zjazd w Paryżu, który jako *Congrès international des éphémérides astronomiques* obradował w dniach 23—26 października 1911. Ponieważ uchwały tego kongresu dotąd ogólnie obowiązują, więc podajemy najważniejsze z nich.

1. Kongres wyraził życzenie, aby jako wspólny południk wszystkich efemeryd przyjęty został południk greenwich'ski.

2. Również jako życzenie wyraził Kongres, aby na przyszłość w katalogach, efemerydach etc. nie używano zamiast zboczenia gwiazdy jej odległości biegunowej.

3. Jako wartość splaszczczenia ziemi przyjęto $\frac{1}{297.0}$, a jako kątową wielkość promienia słońca $15'59''.63$.

Dalsze uchwały są następujące:

4. a) *C. T.* obliczać będzie efemerydy słońca i wielkich planet według tablic Leverriera i Gaillota, efemerydy zaś księżyca według tablic Radau'a, opartych na teorii Delaunay'a;

b) *N. A.* obliczać będzie efemerydy słońca i wielkich pla-

net, z wyjątkiem Merkurego, na podstawie tablic Newcoma i Hilla, a efemerydy księżyca według tablic Hansena z poprawkami Newcoma do czasu, póki te ostatnie nie będą zastąpione przez nowe tablice Browna;

c) *B. A. J.* obliczać będzie efemerydy Merkurego na podstawie tablic Newcoma i Hilla.

5. Kompleks gwiazd fundamentalnych w liczbie 3064, złożony z gwiazd katalogów fundamentalnych Auwersa, Bossa i Newcoma, przedłożony przez *C. T.*, oznacza się literami *ABN*. Listę około 1800 gwiazd fundamentalnych, przedłożoną przez Backlunda i Hougha, oznacza się literami *BH*. Dla każdej gwiazdy w katalogach podaje się typ widmowy według oznaczeń Pickeringa.

6. Dla gwiazd biegunowych listy *ABN* będą obliczane efemerydy, a mianowicie dla zboczeń od 80° do 83° co dwa dni, a dla większych zboczeń na każdy dzień; wyrazy krótkookresowe podawane będą osobno.

7. Dla szeregu gwiazd fundamentalnych, mianowicie głównie gwiazd fundamentalnych Maskelyne'a i Bessla, obliczane będą efemerydy na każdy dzień z uwzględnieniem małych wyrazów księżycowych; dla pozostałych gwiazd *ABN* będą obliczane efemerydy w odstępach 10-dniowych. Małe wyrazy księżycowe nie będą tu uwzględniane, ale mają być podawane wszystkie dane, potrzebne do obliczenia tych wyrazów. Dla gwiazd listy *BH* efemerydy będą obliczane tylko na ten czas, gdy kulminacja górna gwiazdy danej przypada w nocy.

8. Wszystkie efemerydy będą obliczane dla δ z dokładnością do $0''.01$, dla α zaś z dokładnością do $0^s.001$, gdy $\delta < 60^{\circ}$, a z dokładnością do $0^s.01$, gdy $\delta > 60^{\circ}$.

9. Efemerydy gwiazd biegunowych obliczać i ogłaszać będzie *C. T.*; efemerydy gwiazd fundamentalnych Auwersa, z wyjątkiem gwiazd biegunowych i 350 gwiazd, zamieszczonych w nawiasach, obliczać będzie Biuro berlińskie i ogłaszać w *B. A. J.*; dla gwiazd fundamentalnych Auwersa, zamieszczonych w nawiasach, obliczać będzie efemerydy i ogłaszać je *Almanaque Nautico de San Fernando*; efemerydy pozostałych gwiazd listy *ABN* obliczać i ogłaszać będzie obserwatorium w Turynie; efemerydy głównych gwiazd fundamentalnych dla każdego dnia oraz

efemerydy gwiazd listy *BH* obliczać będzie N. A. Office, a drukować obserwatorium w Pułkowie.

10. Obliczaniem elementów zaćmień i zakryć zajmą się *A. E.* i *C. T.*; obliczenia specjalne pozostawia się innym biurom, według ich uznania.

11. Efemerydy 4 starych księżyców Jowisza według tablic *Sampsona* oraz zjawiska w układzie Jowisza obliczać będzie *C. T.*, efemerydy zaś 8 księżyców Saturna, zjawiska w układzie tych księżyców oraz zjawiska, dotyczące pierścienia Saturna, obliczać będzie *B. A. J.*; efemerydy pozostałych księżyców obliczać będzie *A. E.*

12. Efemerydę krateru Mösting A nadal obliczać będzie *B. A. J.*; wszystkie inne dane, odnoszące się do fizycznych obserwacji słońca, księżyca, Marsa, Jowisza i Saturna, obliczać będzie *A. E.*

13. Prace systematyczne, odnoszące się do małych planet, pozostawiono nadal pod kierownictwem Biura berlińskiego.

Jako ostateczny termin wprowadzenia w życie powyższych uchwał, przyjęto rok 1917.

123. Redukcja gwiazd. Jak było powiedziane, w katalogach podawane są średnie spólrzędne heljocentryczne gwiazd dla epoki katalogu. Spólrzędne, które bezpośrednio wyznaczać możemy obserwacją, są to pozorne spólrzędne geocentryczne (gdyż paralaksa dzienna gwiazd nie wchodzi w rachubę) w chwili obserwacji. Spólrzędne katalogowe zatem i obserwowane nie są ze sobą bezpośrednio porównywalne. Również nie są ze sobą bezpośrednio porównywalne spólrzędne katalogowe tej samej gwiazdy, gdy katalogi, w których spólrzędne są podane, opierają się na różnych systemach fundamentalnych i gdy epoki tych katalogów są różne; z drugiej strony nie są ze sobą bezpośrednio porównywalne spólrzędne tej samej gwiazdy, obserwowane w różnych miejscach i epokach.

Można jednakże, znając spólrzędne pozorne gwiazdy w danej chwili, obliczyć jej spólrzędne prawdziwe w tej chwili, lub też znaleźć jej spólrzędne średnie w jakiegokolwiek innej epoce. Z drugiej strony, znając spólrzędne średnie gwiazdy w jakiejś epoce, można obliczyć wartości jej spólrzędnych prawdziwych

lub też pozornych w jakiegokolwiek innej epoce. Rachunki wymienione w ogólności noszą nazwę *rachunków redukcyjnych*, albo wprost *redukcji gwiazd*.

O redukcji katalogów na pewien wspólny układ fundamentalny była mowa w poprzednim ustępie. Inne redukcje, które wchodzą w rachubę najczęściej, są następujące: 1. Redukcja z miejsca średniego epoki t_0 na miejsce średnie epoki t , lub odwrotnie. 2. Redukcja z miejsca średniego epoki t na miejsce prawdziwe tejże epoki, lub też innej epoki t' , oraz odwrotnie, redukcja z miejsca prawdziwego epoki t na miejsce średnie tejże epoki. 3. Redukcja z miejsca prawdziwego epoki t na miejsce pozorne tejże epoki, lub odwrotnie.

Wszystkie zasadnicze wzory, potrzebne do redukcji, wyprowadzone zostały w poprzednich rozdziałach tej książki. W praktyce nadaje się rachunkom redukcyjnym postać jednolitą, której celem jest osiągnięcie jaknajwiększej dokładności przy najmniejszym nakładzie pracy. Ta jednolitość umożliwia też obliczanie z góry wartości pewnych wielkości zmiennych, które jako t. zw. *wielkości redukcyjne* podawane są w rocznikach astronomicznych. Gdy wartość takich wielkości redukcyjnych jest znana, rachunek redukcji jest już bardzo prosty.

Weźmy pod uwagę najważniejsze przypadki rachunków redukcyjnych.

124. Redukcja z miejsca średniego epoki t_0 na miejsce średnie lub prawdziwe epoki t . Przy redukcji z miejsca średniego epoki t_0 na miejsce średnie epoki t (*reductio ad locum medium*) wchodzi w rachubę tylko precesja i ruch własny gwiazdy w czasie $t - t_0$. W rozdziałach VIII i IX wyprowadzone zostały wszystkie wzory, potrzebne do tej redukcji. Gdy połączymy ze sobą zmiany współrzędnych z powodu precesji, określone przez wzory (250), i zmiany z powodu ruchu własnego, określone przez wzory (272), to otrzymamy najogólniejsze wzory redukcji z miejsca średniego epoki t_0 na miejsce średnie epoki t .

Uważając epokę t_0 za 0 i oznaczając przez t odstęp czasu pomiędzy przyjętą epoką 0 a epoką, na którą wykonywa się redukcja, oznaczając dalej przez μ_α^0 i μ_δ^0 składowe rocznego

ruchu własnego gwiazdy w spólrzędnych α i δ w epoce 0, wyrażone w sekundach łukowych, znajdujemy:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 + P_\alpha t + \frac{1}{2} V_\alpha \frac{t^2}{100} + C_\alpha \left(\frac{t}{100} \right)^3 + \\ &+ \mu_\alpha^0 t + \frac{1}{15.206265} \left[\frac{\eta^0}{2} (\mu_\alpha^0 \cos \alpha_0 \tan \delta_0 + \mu_\delta^0 \sin \alpha_0 \sec^2 \delta_0) + \right. \\ &\quad \left. + \mu_\alpha^0 \mu_\delta^0 \tan \delta_0 \right] t^2, \\ \delta &= \delta_0 + P_\delta t + \frac{1}{2} V_\delta \frac{t^2}{100} + C_\delta \left(\frac{t}{100} \right)^3 + \\ &+ \mu_\delta^0 t - \frac{1}{2.206265} \mu_\alpha^0 (\eta^0 \sin \alpha_0 + \mu_\alpha^0 \sin \delta_0 \cos \delta_0) t^2.\end{aligned}\tag{308}$$

Stopień dokładności, jaki w danym przypadku może lub ma być osiągnięty, rozstrzyga o tem, które z wyrazów powyższych wzorów muszą być uwzględnione, a które mogą być opuszczone.

Jeżeli epoka, na którą redukujemy, nie schodzi się z początkiem roku astronomicznego, to zazwyczaj postępuje się w ten sposób, że redukuje się najprzód na początek roku, stosując wzory powyższe, a następnie przechodzi się z początku roku na epokę t . Oznaczmy $t = T + \tau$, gdzie T jest odstępem czasu od epoki 0 do początku roku, w którym przypada epoka t , a τ ułamkiem roku od początku roku do epoki t ; dalej oznaczmy przez α_1 i δ_1 wartości spólrzędnych, obliczone według wzorów (308) dla epoki $t = T$, to wartości α , δ dla epoki t otrzymuje się, dodając do wartości α_1 , δ_1 precesję i ruch własny od początku roku, obliczone z pominięciem wyrazów wyższych rzędów. Jest zatem

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 + (m + n \sin \alpha_1 \tan \delta_1) \tau + \mu_\alpha' \tau, \\ \delta &= \delta_1 + n \cos \alpha_1 \cdot \tau + \mu_\delta' \tau.\end{aligned}\tag{309}$$

Tu μ_α' i μ_δ' są wartościami składowych ruchu własnego w epoce T , obliczonymi według wzorów (269).

Jak zobaczymy, precesję od początku roku uwzględnia się

zazwyczaj jednocześnie z redukcją na miejsce prawdziwe lub pozorne.

Gdy chodzi o samą tylko precesję, to prócz wzorów (250) można też stosować wzory (246), a w przypadku gwiazd biegunowych należy stosować wzory (242) i (243). W ustępie 98 podane są przykłady, jak obliczenia takie należy wykonywać, i tam też wskazane są ułatwienia, z których przy rachunku korzystać można. Tu jeszcze dodamy, że w rocznikach astronomicznych podawany jest ułamek roku dla każdego średniego południa oraz dla pewnych epok czasu gwiazdowego, tak że potrzebną do redukcji wartość τ otrzymuje się przez łatwą interpolację.

Zupełnie podobnie wykonywa się redukcję z miejsca średniego epoki t na miejsce średnie epoki 0. Gdy bowiem epokę t przyjmiemy za epokę 0, to epoka 0 będzie epoką — t . Otrzymamy więc potrzebne wartości redukcyjne, przyjmując we wzorach wyżej podanych — t zamiast t .

Redukcję z miejsca średniego epoki t na miejsce prawdziwe tej epoki (*reductio ad locum verum*) wykonywa się przez dodanie do spółrzędnych średnich wyrazów nutacyjnych. Wzorami redukcji, wystarczającymi we wszystkich przypadkach, są wzory (257) i (258). Jednakże wyrazy drugiego rzędu są w ogólności bardzo małe i osiągają tylko znaczniejszą wartość dla gwiazd, bliskich biegunów. Oczywiście znaczniejszą wartość mogą mieć tylko te wyrazy, w których występuje czynnik $\tan \delta$, wszystkie więc wyrazy drugiego rzędu, w których czynnik ten nie występuje, można opuścić. Prócz tego w wyrazach tych zamiast sum \bar{p} i \bar{q} można ograniczyć się do największych wyrazów tych sum, t. j. zastąpić je odpowiednio wyrazami — $17''.234 \sin \Omega$ i $9''.210 \cos \Omega$. Oznaczmy

$$\begin{aligned} - 17''.234 \sin \epsilon \sin \Omega &= - 6''.859 \sin \Omega = a \sin \Omega, \\ 9''.210 \cos \Omega &= b \cos \Omega, \end{aligned} \quad (a)$$

i podstawmy te wartości w wyrazach drugiego rzędu; gdy jeszcze napiszemy w nich

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \Omega &= 1 + \cos 2 \Omega, \\ 2 \sin^2 \Omega &= 1 - \cos 2 \Omega, \end{aligned}$$

to oprócz wyrazów, zależnych od Ω , wystąpią jeszcze pewne wyrazy stałe, które wpływają tylko na średnią wartość współrzędnych, a więc w wartościach współrzędnych średnich są już zawarte. Opuszczając więc powyższe wyrazy, nadajemy wzorom redukcji na miejsce prawdziwe następującą uproszczoną postać:

$$\begin{aligned} \alpha_v - \alpha_m &= (\cos \varepsilon_m + \sin \alpha_m \tan \delta_m \sin \varepsilon_m) \bar{p} - \cos \alpha_m \tan \delta_m \bar{q} - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{2} \cos \alpha_m \cos 2\Omega - a b \sin \alpha_m \sin 2\Omega \right) \cot \varepsilon_m \tan \delta_m \sin 1'' - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \sin 2\alpha_m \cos 2\Omega - a b \cos 2\alpha_m \sin 2\Omega \right) \tan^2 \delta_m \sin 1''. \end{aligned} \quad (310)$$

$$\begin{aligned} \delta_v - \delta_m &= \cos \alpha_m \sin \varepsilon_m \bar{p} + \sin \alpha_m \bar{q} + \\ &+ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{a^2 - b^2}{2} - \frac{a^2 + b^2}{2} \cos 2\alpha_m \right) \cos 2\Omega + \right. \\ &\left. + a b \sin 2\alpha_m \sin 2\Omega \right] \tan \delta_m \sin 1''. \end{aligned}$$

Wprowadzając wartości liczbowe, znajdujemy, że największy wyraz drugiego rzędu w wyrażeniu na α_v ma wartość $0^s.00008 \sin 2\alpha_m \tan^2 \delta_m$, a w wyrażeniu na δ_v wartość $0^s.0001 \cos 2\alpha_m \tan \delta_m$. Pierwszy z nich osiąga wartość $0^s.01$ dopiero dla $\delta = 88^\circ$, drugi zaś wartość $0''.1$ dopiero dla $\delta = 89^\circ 25'$. Uwzględnianie zatem wyrazów drugiego rzędu ogranicza się do gwiazd bardzo bliskich bieguna, a więc do przypadków wyjątkowych; normalnie wystarczają wyrazy pierwszego rzędu.

Rachunek nutacji w praktyce łączy się z rachunkiem precesji od początku roku epoki t . Zgodnie ze wzorami (309) i (310), gdy w tych ostatnich uwzględnimy tylko wyrazy pierwszego rzędu, mamy:

$$\begin{aligned} \alpha_v &= \alpha_1 + \mu_\alpha' \tau + (m + \frac{1}{15} n \sin \alpha_1 \tan \delta_1) \tau + \\ &+ \frac{1}{15} [(\cos \varepsilon_m + \sin \alpha_m \tan \delta_m \sin \varepsilon_m) \bar{p} - \cos \alpha_m \tan \delta_m \bar{q}], \\ \delta_v &= \delta_1 + \mu_\delta' \tau + n \cos \alpha_1 \tau + \cos \alpha_m \sin \varepsilon_m \bar{p} + \sin \alpha_m \bar{q}; \end{aligned} \quad (b)$$

czynnik $\frac{1}{15}$ we wzorze na α_v został wprowadzony w tym celu, aby wyrazy redukcyjne wyrażone były w sekundach czasu.

Wobec małych współczynników wyrazów \bar{p} i \bar{q} można w tych wzorach też zamiast α_m, δ_m i ε_m przyjąć α_1, δ_1 i ε_1 , rozumiejąc przez ε_1 średnią pochyłość ekliptyki na początku roku. Gdy oznaczymy, uwzględniając uwagę powyższą,

$$\begin{aligned} m + \frac{1}{15} n \sin \alpha_1 \tan \delta_1 &= a, & \frac{1}{15} \cos \alpha_1 \tan \delta_1 &= b, \\ n \cos \alpha_1 &= a', & -\sin \alpha_1 &= b', \end{aligned} \quad (311)$$

skąd wypływa

$$\sin \alpha_1 \tan \delta_1 = 15 \frac{a - m}{n}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{a'}{n}, \quad (c)$$

to podstawiając te wartości we wzorach (b), otrzymamy

$$\alpha_v = \alpha_1 + \mu_{\alpha}' \tau + a \left(\tau + \frac{\bar{p}}{n} \sin \varepsilon_1 \right) - b \bar{q} + \bar{p} \left(\frac{1}{15} \cos \varepsilon_1 - \frac{m}{n} \sin \varepsilon_1 \right), \quad (d)$$

$$\delta_v = \delta_1 + \mu_{\delta}' \tau + a' \left(\tau + \frac{\bar{p}}{n} \sin \varepsilon_1 \right) - b' \bar{q}.$$

Wielkości a, b, a' i b' , jako zależne tylko od współrzędnych gwiazdy oraz od mało zmiennych wartości m i n , można przez dłuższy czas uważać za stałe, a przynajmniej zawsze wtedy, gdy chodzi o redukcję danej gwiazdy na różne daty jednego roku.

Obliczmy teraz wartości wyrażen $\frac{\bar{p}}{n} \sin \varepsilon_1$ i $\bar{p} \left(\frac{1}{15} \cos \varepsilon_1 - \frac{m}{n} \sin \varepsilon_1 \right)$.

Ponieważ według wzorów (235'') i (244) jest

$$\begin{aligned} n &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\psi_m}{dt} \sin \varepsilon, \\ m &= \frac{d(z + \zeta_0)}{dt} = \frac{d\psi_m}{dt} \cos \varepsilon - \frac{d\mu}{dt}, \end{aligned}$$

więc, przyjmując tu $\varepsilon = \varepsilon_1$, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{p}}{n} \sin \varepsilon_1 &= \bar{p} : \frac{d\psi_m}{dt}, \\ \bar{p} \left(\cos \varepsilon_1 - \frac{m}{n} \sin \varepsilon_1 \right) &= \frac{\bar{p}}{15} \left(\frac{d\mu}{dt} : \frac{d\psi_m}{dt} \right) \end{aligned}$$

Według wzorów (218') i (222') otrzymujemy, gdy t liczone jest od epoki 1900.0 w stuleciach:

$$\frac{d\psi_m}{dt} = 5037''.09 + 0''.49 t, \quad \frac{d\mu}{dt} = 12''.47 - 1''.89 t; \quad (e)$$

jest zatem

$$\frac{d\mu}{dt} : \frac{d\psi_m}{dt} = \frac{12''.47 - 1''.89 t}{5037''.09 + 0''.49 t} = 0.00248 - 0.00375 t. \quad (f)$$

Wobec małej wartości tego ilorazu możemy ograniczyć się do pierwszego wyrazu sumy \bar{p} i przyjąć

$$\begin{aligned} \bar{p} \left(\frac{d\mu}{dt} : \frac{d\psi_m}{dt} \right) &= -(17''.234 + 0''.017 t) \sin \Omega (0.00248 - 0.000375 t) = \\ &= -(0''.0427 - 0''.0064 t) \sin \Omega. \end{aligned}$$

Oznaczamy

$$\frac{\bar{p}}{15} \left(\frac{d\mu}{dt} : \frac{d\psi_m}{dt} \right) = -(0^s.0029 - 0^s.0004 t) \sin \Omega = E. \quad (g)$$

Z wyrazów wyrażenia $\frac{\bar{p}}{n} \sin \varepsilon_1 = \bar{p} : \frac{d\psi_m}{dt}$ opuścimy wszystkie te wyrazy, których wartość jest mniejsza niż 0.0001; jest zatem

$$\begin{aligned} \frac{P}{n} \sin \varepsilon_1 &= -(0.34215 + 0.00031 t) \sin \Omega + 0.00415 \sin 2 \Omega - \\ &- 0.02526 \sin 2 L_{\odot} + 0.00251 \sin M_{\odot} - 0.00099 \sin (2 L_{\odot} + M_{\odot}) + \\ &+ 0.00042 \sin (2 L_{\odot} - M_{\odot}) + 0.00025 \sin (2 L_{\odot} - \Omega) - \\ &- 0.00405 \sin 2 L_{\oplus} + 0.00135 \sin M_{\oplus} - 0.00068 \sin (2 L_{\oplus} - \Omega) + \\ &+ 0.00052 \sin (2 L_{\oplus} + M_{\oplus}) + 0.00030 \sin (2 L_{\oplus} - 2 L_{\odot} - M_{\oplus}) + \\ &+ 0.00023 \sin (2 L_{\oplus} - M_{\oplus}) + 0.00012 \sin (2 L_{\oplus} - 2 L_{\odot}). \quad (h) \end{aligned}$$

Gdy w tem wyrażeniu oddzielimy wyrazy długookresowe od krótkookresowych, zależnych od długości księżyca, i oznaczmy

$$\begin{aligned} A &= \tau - (0.34215 + 0.00031 t) \sin \Omega + 0.00415 \sin 2 \Omega - \\ &- 0.02526 \sin 2 L_{\odot} + 0.00251 \sin M_{\odot} - 0.00099 \sin (2 L_{\odot} + M_{\odot}) + \\ &+ 0.00042 \sin (2 L_{\odot} - M_{\odot}) + 0.00025 \sin (2 L_{\odot} - \Omega), \quad (i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A' &= -0.00405 \sin 2 L_{\oplus} + 0.00135 \sin M_{\oplus} - 0.00068 \sin (2 L_{\oplus} - \Omega) + \\ &+ 0.00052 \sin (2 L_{\oplus} + M_{\oplus}) + 0.00030 \sin (2 L_{\oplus} - 2 L_{\odot} - M_{\oplus}) + \\ &+ 0.00023 \sin (2 L_{\oplus} - M_{\oplus}) + 0.00012 \sin (2 L_{\oplus} - 2 L_{\odot}), \quad (j) \end{aligned}$$

to jest

$$\tau + \frac{\bar{p}}{n} \sin \varepsilon_1 = A + A'. \quad (\text{k})$$

Podobnie oddzielamy w sumie \bar{q} wyrazy długookresowe od krótkookresowych i kładziemy

$$B = - (9''.210 + 0''.001 t) \cos \Omega - 0''.551 \cos 2 L_{\odot} + 0''.090 \cos 2 \Omega - \\ - 0''.022 \cos (2 L_{\odot} + M_{\odot}) + 0''.009 \cos (2 L_{\odot} - M_{\oplus}) + \\ + 0''.007 \cos (2 L_{\odot} - \Omega), \quad (\text{l})$$

$$B' = - 0''.089 \cos 2 L_{\oplus} - 0''.018 \cos (2 L_{\oplus} - \Omega) - \\ - 0''.011 \cos (2 L_{\oplus} + M_{\oplus}) + 0''.005 \cos (2 L_{\oplus} - M_{\oplus}). \quad (\text{l})$$

Podstawiając te wartości we wzorach (d), znajdujemy:

$$\alpha_v = \alpha_1 + \mu_{\alpha}' \tau + a A + b B + E + a A' + b B', \quad (\text{312})$$

$$\delta_v = \delta_1 + \mu_{\delta}' \tau + a' A + b' B + a' A' + b' B'.$$

Wielkości A, B, E, A', B' zależą od $\tau, \Omega, L_{\odot}, L_{\oplus}, M_{\odot}$ i M_{\oplus} i mogą być obliczone dla dowolnej epoki t . Podane są one zazwyczaj w rocznikach astronomicznych dla 0^h czasu gwiazdowego w Greenwich na każdy dzień roku.

Obliczenie tych wielkości ułatwiają specjalne tablice. Mianowicie wartość każdego z wyrazów wyrażen na A, B etc. zależy przede wszystkim od argumentu, który zmienia się od 0^0 do 360^0 , można więc dla każdego wyrazu obliczyć tabelkę. Spółczynniki wyrazów podlegają tylko bardzo powolnym zmianom i mogą być w ciągu długiego czasu uważane za stałe, z wyjątkiem współczynników największych wyrazów nutacji, które zmieniają się nieco prędzej. Zazwyczaj w takich tabelkach łączy się wyrazy, zależne od tego samego argumentu. Tak np. suma wyrazów $-(0.34215 + 0.00031 t) \sin \Omega + 0.00415 \sin 2 \Omega$ we wzorze (i) może być podana w tabelce z argumentem Ω ; podobnie mogą być połączone w jednej tabelce sumy wyrazów, zależnych tylko od długości słońca, lub zależnych tylko od długości księżyca.

Gdy więc takie tabelki pomocnicze istnieją, to należy jeszcze tylko podać wartość danego argumentu dla epoki, na którą redukcję się wykonywa. Służą do tego podane w rocznikach efemerydy, albo też można je obliczyć za pomocą wzorów (225). Dla Ω istnieją zresztą specjalne tablice, które podają długość węzła dla początku roku astronomicznego efemeryd w ciągu dłuższego okresu czasu oraz zmianę długości od początku roku do każdego średniego południa danego roku. Oczywiście z ułatwień tych przede wszystkim korzystają ci, którzy efemerydy astronomiczne obliczają, w praktyce normalnie korzysta się z wartości A' , B' etc., podanych w rocznikach.

Tablice długości węzła księżyca oraz szereg tablic wielkości redukcyjnych znaleźć można np. w zbiorze tablic Bauschingera, *Hilfstafeln zur theoretischen Astronomie*.

Wzory redukcyjne (312) wtedy głównie bywają stosowane, gdy należy wykonać redukcję na miejsce prawdziwe tej samej gwiazdy dla szeregu dat niezbyt od siebie odległych. Wtedy bowiem *spółczynniki Bessla* a, b, a' i b' można dla danej gwiazdy uważać za stałe, wobec czego do wykonania redukcji pozatem potrzebna jest tylko znajomość wielkości A, B i t. d., podanych w efemerydach. Gdy jednakże chodzi o pojedynczą redukcję jakiejś gwiazdy, to nie opłaca się obliczanie współczynników Bessla i dogodniejszą jest inna postać wzorów redukcyjnych.

Napiszmy wzory (312), uwzględniając oznaczenia (311), w postaci

$$\alpha_v = \alpha_1 + \mu_{\alpha}' \tau + (m + \frac{1}{15} n \tan \delta_1 \sin \alpha_1)(A + A') + \\ + \frac{1}{15} \tan \delta_1 \cos \alpha_1 (B + B') + E,$$

$$\delta_v = \delta_1 + \mu_{\delta}' \tau + n \cos \alpha_1 (A + A') - \sin \alpha_1 (B + B'),$$

i położmy

$$\begin{aligned} m A + E &= f, & B &= g \sin G, & n A &= g \cos G, \\ m A' &= f', & B' &= g' \sin G', & n A' &= g' \cos G', \end{aligned} \quad (313)$$

to otrzymamy

$$\begin{aligned} \alpha_v &= \alpha_1 + \mu_{\alpha}' \tau + f + \frac{1}{15} g \sin (G + \alpha_1) \tan \delta_1 + \\ &\quad + \{f' + \frac{1}{15} g' \sin (G' + \alpha_1) \tan \delta_1\}, \\ \delta_v &= \delta_1 + \mu_{\delta}' \tau + g \cos (G + \alpha_1) + \{g' \cos (G' + \alpha_1)\}. \end{aligned} \quad (314)$$

W tych wzorach części, zawarte w klamrach, obejmują krótkookresowe wyrazy księżycowe; są to wszystko wyrazy małe i mogą być pominięte, gdy nie chodzi o największą dokładność.

Obliczenie prawdziwej pochyłości ekliptyki w epoce t dokonywa się w ten sposób, że do średniej pochyłości, obliczonej według wzoru (220'), dodaje się nutację ϵ , określoną przez wzory (226), (228) i (230). W praktyce jednakże korzysta się zazwyczaj z danych efemeryd. Co do średniej pochyłości ϵ_m , to np. w *B. A. J.* znajdujemy wartości ϵ_m w odstępach 10-dniowych dla całego roku, a dla każdej innej chwili otrzymuje się wartość ϵ_m przez interpolację. Wartość nutacji również podana jest w efemerydach. Mianowicie wartości $\Delta\epsilon$ i $\Delta\epsilon'$ wzorów (228) i (230) są identyczne z wartościami $-B$ i $-B'$ wzorów (I) i (I'), które dla każdego dnia są w roczniku obliczone. Prócz tego wraz z wielkościami redukcyjnymi wzorów (313) podane są wartości wszystkich wielkości nutacyjnych, t. j. $\Delta\psi$, $\Delta\psi'$, $\Delta\epsilon$, $\Delta\epsilon'$, oraz prawdziwa pochyłość ekliptyki dla każdej średniej północy greenwich'skiej.

125. Redukcja na miejsce pozorne. Obliczenie samej tylko redukcji na miejsce prawdziwe w praktyce rzadko się zdarza, zazwyczaj stanowi ona tylko krok pośredni w *redukcji na miejsce pozorne* (*reductio ad locum apparentem*). Ta redukcja jest najczęstsza, gdyż tylko współrzędne pozorne podlegają obserwacji bezpośredniej. Gdy więc obserwacja współrzędnych ma być użytą do jakiegokolwiek celu, to wykonana musi być redukcja z miejsca średniego na pozorne, lub też odwrotnie z miejsca pozornego na średnie.

Gdy znane są współrzędne prawdziwe gwiazdy w pewnej epoce, to otrzymamy jej współrzędne pozorne w tej samej epoce, gdy do wartości prawdziwych dodamy zmiany, którym one uległy z powodu paralaksy rocznej, aberacji rocznej i dziennej oraz refrakcji. Co do refrakcji, to obliczenie jej zapomocą wzorów ustępu 62, w których występują tylko współrzędne gwiazdy, nie przedstawia trudności, szczególnie, gdy korzystać można z tablic, obliczonych dla użytku lokalnego. Będziemy więc oznaczali

przez α_a i δ_a wartości współrzędnych pozornych po uwzględnieniu refrakcji.

Oznaczmy przez $\Delta\alpha^{(p)}$ i $\Delta\delta^{(p)}$ zmiany współrzędnych wskutek paralaksy rocznej, przez $\Delta\alpha_1^{(a)}$ i $\Delta\delta_1^{(a)}$ zmiany współrzędnych z powodu aberracji rocznej, a przez $\Delta\alpha_2^{(a)}$ i $\Delta\delta_2^{(a)}$ zmiany z powodu aberracji dziennej, to jest

$$\begin{aligned}\alpha_a &= \alpha_v + \Delta\alpha^{(p)} + \Delta\alpha_1^{(a)} + \Delta\alpha_2^{(a)}, \\ \delta_a &= \delta_v + \Delta\delta^{(p)} + \Delta\delta_1^{(a)} + \Delta\delta_2^{(a)},\end{aligned}\tag{m}$$

gdzie według wzorów (164) i (165)

$$\begin{aligned}\Delta\alpha^{(p)} &= \pi \cos \delta_{\odot} \sin(\alpha_{\odot} - \alpha_v) \sec \delta_v, \\ \Delta\delta^{(p)} &= \pi [\sin \delta_{\odot} \cos \delta_v - \cos \delta_{\odot} \sin \delta_v \cos(\alpha_{\odot} - \alpha_v)],\end{aligned}$$

a według wzorów (186) i (187) oraz (190) i (191)

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_1^{(a)} &= -20''.47 \sec \delta_v (\cos \odot \cos \alpha_v \cos \varepsilon_v + \sin \odot \sin \alpha_v) \\ &\quad + 10''.343 \sec \delta_v (\cos \omega \cos \alpha_v \cos \varepsilon_v + \sin \omega \sin \alpha_v), \\ \Delta\delta_1^{(a)} &= -20''.47 [(\sin \varepsilon_v \cos \delta_v - \cos \varepsilon_v \sin \delta_v \sin \alpha_v) \cos \odot + \\ &\quad + \sin \delta_v \cos \alpha_v \sin \odot] \\ &\quad + 10''.343 [(\sin \varepsilon_v \cos \delta_v - \cos \varepsilon_v \sin \delta_v \sin \alpha_v) \cos \omega + \\ &\quad + \sin \delta_v \cos \alpha_v \sin \omega]; \\ \Delta\alpha_2^{(a)} &= 0''.320 \cos \varphi \cos(\theta - \alpha_v) \sec \delta_v, \\ \Delta\delta_2^{(a)} &= 0''.320 \cos \varphi \sin(\theta - \alpha_v) \sin \delta_v.\end{aligned}$$

Zamiast wartości α_v , δ_v , ε_v , występujących w tych wzorach, można zawsze, z wyjątkiem przypadku gwiazd bardzo bliskich biegunów, stosować α_1 , δ_1 , ε_1 , t. j. wartości współrzędnych średnich oraz średniej pochyłości ekliptyki na początku roku. Gdy gwiazda znajduje się bardzo blisko jednego z biegunów, należy obliczone wartości poprawić, stosując wzory *Fabritiusa*.

Dodać należy, że rachunek aberracji dziennej staje się zbytecznym, gdy istnieje tabelka, obliczona dla argumentów $t = \theta - \alpha$ i δ , jaką posiada prawie każde obserwatorium; paralaksa roczna zaś tylko u bardzo nielicznych gwiazd wchodzi

w rachubę, a więc normalnie może być pominięta. W redukcji na miejsce pozorne zatem, jak widzimy, główną rolę odgrywa aberacja roczna.

Oznaczmy

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{15} \cos \alpha_1 \sec \delta_1, & d &= \frac{1}{15} \sin \alpha_1 \sec \delta_1, \\ c' &= \tan \varepsilon_1 \cos \delta_1 - \sin \alpha_1 \sin \delta_1, & d' &= \cos \alpha_1 \sin \delta_1; \\ C &= -20''.47 \cos \odot \cos \varepsilon_1, & D &= -20''.47 \sin \odot, \\ C_0 &= 0''.342 \cos \omega \cos \varepsilon_1, & D_0 &= 0''.343 \sin \omega, \end{aligned} \quad (315)$$

to jest

$$\begin{aligned} \alpha_a &= \alpha_v + \Delta\alpha^{(p)} + c C + d D + \{c C_0 + d D_0\} + \Delta\alpha_2^{(a)}, \\ \delta_a &= \delta_v + \Delta\delta^{(p)} + c' C + d' D + \{c' C_0 + d' D_0\} + \Delta\delta_2^{(a)}. \end{aligned} \quad (316)$$

Wyrażenia, zawarte w klamrach, jako zależne tylko od powoli zmiennej wielkości ω , w ciągu długich okresów czasu mogą być uważane za stałe; obarczają one więc tylko miejsce średnie i w wartościach współrzędnych średnich są już zawarte. Tylko wtedy muszą one być uwzględnione przy redukcji, gdy chodzi o oczyszczenie od wpływu aberacji rocznej pozycji planety, wyznaczonej przez porównanie ze współrzędnymi pozornymi gwiazdy. Przyjmując więc, zgodnie z wyżej poczynionymi uwagami,

$$\alpha_a = \alpha_v + \Delta\alpha_1^{(a)}, \quad \delta_a = \delta_v + \Delta\delta_1^{(a)},$$

znajdujemy, uwzględniając wzory (312) i (316),

$$\begin{aligned} \alpha_a &= \alpha_1 + \mu_\alpha' \tau + a A + b B + c C + d D + E + \\ &\quad + \{a A' + b B' + c C_0 + d D_0\}, \\ \delta_a &= \delta_1 + \mu_\delta' \tau + a' A + b' B + c' C + d' D + \\ &\quad + \{a' A' + b' B' + c' C_0 + d' D_0\}. \end{aligned} \quad (317)$$

Widzimy, że współczynniki c , d , c' i d' zależne są tylko od współrzędnych gwiazdy i w ciągu długiego czasu mają wartości stałe, wielkości zaś C i D z łatwością dla argumentu τ mogą być tabulowane. Znajdujemy je w rocznikach wraz z wielkościami A , B , A' , B' i E .

Wzory (317) stosowane są wtedy, gdy należy wykonać większą ilość redukcji tej samej gwiazdy. Można im też nadać postać, przystosowaną do wzorów (314). Połóżmy w tym celu

$$\begin{aligned} -20''.47 \cos \odot \cos \varepsilon_1 &= h \sin H, \\ -20''.47 \sin \odot &= h \cos H, \\ -20''.47 \cos \odot \sin \varepsilon_1 &= i, \end{aligned} \quad (318)$$

to jest

$$\begin{aligned} c C + d D &= \frac{1}{15} h \sin (H + \alpha_1) \sec \delta_1, \\ c' C + d' D &= h \cos (H + \alpha_1) \sin \delta_1 + i \cos \delta_1, \end{aligned} \quad (n)$$

i wzory redukcji z miejsca średniego początku roku na miejsce pozorne otrzymują postać następującą:

$$\begin{aligned} \alpha_a &= \alpha_1 + \mu'_\alpha \tau + f + \frac{1}{15} g \sin (G + \alpha_1) \tan \delta_1 + \\ &+ \frac{1}{15} h \sin (H + \alpha_1) \sec \delta_1 + \{f' + \frac{1}{15} g' \sin (G' + \alpha_1) \tan \delta_1\}. \end{aligned} \quad (319)$$

$$\begin{aligned} \delta_a &= \delta_1 + \mu'_\delta \tau + g \cos (G + \alpha_1) + h \cos (H + \alpha_1) \sin \delta_1 + i \cos \delta_1 + \\ &+ \{g' \cos (G' + \alpha_1)\}. \end{aligned}$$

Gdy jednakże, celem zupełnego oczyszczenia miejsca planety od wpływu aberracji rocznej, należy też uwzględnić wyrazy, zawarte w kłammerach wzoru (316), to można dla wygodniejszego rachunku nadać im postać taką samą, jak wyrazom, zależnym od \odot ; mianowicie, kładąc

$$\begin{aligned} h_0 \sin H_0 &= +0''.343 \cos \omega \cos \varepsilon_1, \\ h_0 \cos H_0 &= +0''.343 \sin \omega, \\ i_0 &= +0''.343 \cos \omega \sin \varepsilon_1, \end{aligned}$$

znajdziemy

$$\begin{aligned} c C_0 + d D_0 &= \frac{1}{15} h_0 \sin (H_0 + \alpha_1) \sec \delta_1, \\ c' C_0 + d' D_0 &= h_0 \cos (H_0 + \alpha_1) \sin \delta_1 + i_0 \cos \delta_1, \end{aligned}$$

i z wartościami ω , podanymi na str. 366, otrzymuje się tabelkę następującą:

Rok	$\log h_0$	H_0	i_0
1800	9.534	351 ^o .3	— 0''.022
1900	9.534	349 ^o .7	— 0''.026
2000	9.534	348 ^o .1	— 0''.030.

Wzory (317) i (319) służą też odwrotnie do redukcji z miejsca pozornego na miejsce średnie początku roku. Gdy bowiem napiszemy, oznaczając przez R sumę wyrazów redukcji,

$$\alpha_a = \alpha_1 + \mu_\alpha' \tau + R,$$

$$\delta_a = \delta_1 + \mu_\delta' \tau + R,$$

to jest też

$$\alpha_1 = \alpha_a - \mu_\alpha' \tau - R,$$

$$\delta_1 = \delta_a - \mu_\delta' \tau - R.$$

126. Przykłady do ustępów 124 i 125. Znaleźć spółrzedne prawdziwe i pozorne gwiazdy τ *Ceti* dla epoki: 1921, listopad 7, 10^h 30^m czasu śr. lwowskiego.

W *B. A. J.* na r. 1921 dla gwiazdy τ *Ceti* znajdujemy następujące dane:

$$\begin{aligned} \text{Ep. 1921.0, } \alpha_1 &= 1^h 40^m 23^s.869, \quad \delta_1 = -16^\circ 21' 11''.38, \\ \mu_\alpha' &= -0^s.1195, \quad \mu_\delta' = 0''.852, \quad \pi = 0''.31. \end{aligned}$$

Przeliczając na Greenwich, znajdujemy epokę: 1921, listopad 7, 8^h 54^m. Na str. 354 rocznika znajdujemy odpowiadającą tej epoce wartość $\tau = 0.8514$. Jest zatem

$$\mu_\alpha' \tau = -0^s.1017, \quad \mu_\delta' \tau = 0''.726.$$

Dla wyżej podanej epoki τ na str. 365 i 339 rocznika znajdujemy następujące wartości wielkości redukcyjnych do rachunku według wzorów (317):

$$\begin{aligned} A &= 0.92317, \quad A' = 0.00326, \quad B = 8''.907, \quad B' = -0''.009. \\ C &= 13''.297, \quad D = 14''.454, \quad E = 0^s.0008. \end{aligned}$$

Obliczamy współczynniki Bessla według wzorów (311) i (315). Najprzód w tablicy VII znajdujemy dla r. 1921

$$m = 3.0727, \quad \log n^s = 0.12592, \quad \log n'' = 1.30201.$$

Z temi wartościami wykonywamy rachunek, jak następuje:

{	n^s	0.12592		$\cos \alpha_1$	9.95692		
	$\sin \alpha_1$	9.62757		$\text{tang } \delta_1$	9.46741 n		
	$\text{tang } \delta_1$	9.46741 n		$\frac{1}{15}$	8.82391		
	Π	9.22090 n		b	8.24824 n		
	m	0.48752	$b' = -$	$\sin \alpha_1$	9.62757 n		
	B	1.26662		n''	1.30201		
	A	1.24245		$\cos \alpha_1$	9.95692		
	a	0.46335		a'	1.25893		
	$\cos \alpha_1$	9.95692		$\text{tang } \varepsilon_1$	9.63726		
	$\sec \delta_1$	0.01793		$\cos \delta_1$	9.98207		
	$\sin \alpha_1$	9.62757		$\sin \alpha_1$	9.62757		
	$\frac{1}{15}$	8.82391		$\sin \delta_1$	9.44948 n		
	c	8.79876	$\text{tang } \varepsilon_1 \cos \delta_1$		9.61933		
	d	8.46941	$\sin \alpha_1 \sin \delta_1$		9.07705 n		
	$\sin \delta_1$	9.44948 n		A	9.45772		
	d'	9.40640 n		B	0.10954		
				c'	9.72887		
a'	1.25893	b'	9.62757 n	c	8.79876	d	8.46941
A	9.96529	B	0.94973	C	1.12375	D	1.15999
$\alpha' A$	1.22422	$b' B$	0.57730 n	c'	9.72887	d'	9.40640 n
a	0.46335	b	8.24824 n	$c C$	9.92251	$d D$	9.62940
A'	7.51322	B'	7.95424 n	$c' C$	0.85262	$d' D$	0.56639 n
$a A$	0.42864	$b B$	9.19797 n				
$a A'$	7.97657	$b B'$	6.20248				
$\alpha' A'$	8.77215	$b' B'$	7.58181				

Wartości współrzędnych prawdziwych obliczamy według wzorów (312).

$\alpha_1 = 1^h 40^m 23^s.869$	$\delta_1 = -16^\circ 21' 11''.38$
$\mu_{\alpha'} \tau = -0^s.102$	$\mu_{\delta'} \tau = 0''.73$
$a A = 2^s.683$	$a' A = 16''.76$
$b B = -0^s.158$	$b' B = -3''.78$
$E = 0^s.001$	
$a A' = 0^s.009$	$a' A' = 0''.06$
$b B' = 0^s.000$	$b' B' = -0''.00$
$\alpha_v = 1^h 40^m 26^s.302$	$\delta_v = -16^\circ 20' 57''.61$

Celem otrzymania spólrzędnych pozornych, obliczamy aberację roczną, aberację dzienną i paralaksę. Jest

$$\begin{aligned} cC + dD &= 0^s.837 + 0^s.426 = 1^s.263, \\ c'C + d'D &= 7''.12 - 3''.68 = 3''.44. \end{aligned}$$

Aby obliczyć aberację dzienną, trzeba znać przybliżone wartości kąta godzinowego gwiazdy. W średnie południe dnia 7 listopada 1921 było we Lwowie $\theta = 15^h 4^m 19^s$, a więc w czasie średnim $10^h 30^m$ było $\theta = 1^h 35^m$ oraz $t = \theta - \alpha = -0^h 5^m$. Znajdujemy więc

0.32	9.505		
$\cos \varphi$	9.810		
$\cos t$	0.000	$\sin t$	8.339 <i>n</i>
$\sec \delta$	0.018	$\sin \delta$	9.449 <i>n</i>
$\Delta\alpha^{(a)}$	9.333	$\Delta\delta^{(a)}$	7.103
$\Delta\alpha^{(a)} = 0''.215$		$\Delta\delta^{(a)} = 0''.001$	

Celem obliczenia paralaksy według wzorów (164) i (165) muszą być znane spólrzędne równikowe słońca. Przybliżone ich wartości według rocznika są: $\delta_{\odot} = -16^{\circ} 15'$, $\alpha_{\odot} = 14^h 50^m$, a więc $\alpha_{\odot} - \alpha_1 = 13^h 10^m$.

Rachunek jest następujący:

π	9.491	π	9.491
$\cos \delta_{\odot}$	9.982	$\sin \delta_{\odot}$	9.447 <i>n</i>
$\sec \delta_1$	0.018	$\cos \delta_1$	9.982
$\sin(\alpha_{\odot} - \alpha_1)$	9.478 <i>n</i>	$\sin \delta_{\odot} \cos \delta_1$	9.429 <i>n</i>
$\Delta\alpha^{(p)}$	8.969 <i>n</i>	$\cos \delta_{\odot}$	9.982
$\Delta\alpha^{(p)} = -0''.093$		$\sin \delta$	9.449 <i>n</i>
		$\cos(\alpha_{\odot} - \alpha_1)$	9.979 <i>n</i>
		Π	9.410
		<i>A</i>	9.981
		<i>B</i>	0.292
		$\sin \delta_{\odot} \cos \delta - \Pi$	9.721 <i>n</i>
		$\Delta\delta^{(p)}$	9.212 <i>n</i>
		$\Delta\delta^{(p)} = -0''.163$	

Otrzymujemy więc:

$\alpha_2 = 1^h 40^m 26^s.302$ $c C + d D = 1^s.263$ $\Delta\alpha^{(a)} = 0^s.014$ $\Delta\alpha^{(p)} = -0^s.006$ <hr/> $\alpha_{app} = 1^h 40^m 27^s.573$	$\delta_2 = -16^\circ 20' 57''.61$ $c' C + d' D = 3''.44$ $\Delta\delta^{(a)} = -0''.00$ $\Delta\delta^{(p)} = -0''.16$ <hr/> $\delta_{app} = -16^\circ 20' 54''.33$
--	--

Wykonajmy teraz tę samą redukcję, stosując wzory (314) i (n). Na stronie 354 rocznika znajdujemy dla $\tau = 0.8514$ następujące wartości wielkości redukcyjnych:

$$f = 2^s.837, \quad \log g = 1.3125, \quad G = 1^h 42^m.8, \quad f' = 0^s.010, \\ g' = 0.07, \quad G' = 23^h.3, \quad \log h = 1.2931, \quad H = 2^h 50^m.5, \quad \log i = 0.7611.$$

Jest więc

$$G + \alpha = 3^h 23^m.2, \quad G' + \alpha = 1^h.0, \quad H + \alpha = 4^h 30^m.9,$$

i obliczamy jak następuje:

$\begin{array}{ll} \text{tang } \delta & 9.4674 n \\ \sin (G + \alpha) & 9.8893 \\ g & 1.3125 \\ \cos (G + \alpha) & 9.8007 \\ \sec \delta & 0.0179 \\ \sin (H + \alpha) & 9.9663 \\ h & 1.2931 \\ \cos (H + \alpha) & 9.5787 \\ \sin \delta & 9.4495 n \end{array}$	$\begin{array}{ll} \text{tang } \delta & 9.467 n \\ \sin (G' + \alpha) & 9.413 \\ g' & 8.845 \\ \cos \delta & 9.984 \\ i & 0.7611 \\ \cos \delta & 9.9821 \\ i \cos \delta & 0.7432 \\ i \cos \delta & = 5''.54 \end{array}$
$\begin{array}{ll} g \sin (G + \alpha) \text{ tang } \delta & 0.6692 n \\ \text{Num.} & = -4.67 \\ g \cos (G + \alpha) & 1.1132 \\ g \cos (G + \alpha) & = 12''.98 \end{array}$	$\begin{array}{ll} g' \sin (G' + \alpha) \text{ tang } \delta & 7.725 n \\ \text{Num.} & = -0.01 \\ g' \cos (G' + \alpha) & 8.829 \\ g' \cos (G' + \alpha) & = 0''.07 \end{array}$
$\begin{array}{ll} h \sin (H + \alpha) \sec \delta & 1.2773 \\ \text{Num.} & = 18''.94 \\ h \cos (H + \alpha) \sin \delta & 0.3213 n \\ \text{Num.} & = -2''.10 \end{array}$	

Otrzymujemy więc:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 1^h 40^m 23^s.869 \\
 \mu'_\alpha \tau &= \quad \quad \quad - 0^s.102 \\
 f &= \quad \quad \quad 2^s.837 \\
 \frac{1}{15} g \sin(G + \alpha) \tan \delta &= \quad \quad \quad - 0^s.311 \\
 f' &= \quad \quad \quad 0^s.010 \\
 \frac{1}{15} g' \sin(G' + \alpha) \tan \delta &= \quad \quad \quad - 0^s.001 \\
 \hline
 \alpha_v &= 1^h 40^m 26^s.302
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= - 16^\circ 21' 11''.38 \\
 \mu'_\delta \tau &= \quad \quad \quad 0''.73 \\
 g \cos(G + \alpha) &= \quad \quad \quad 12''.98 \\
 g' \cos(G' + \alpha) &= \quad \quad \quad 0''.07 \\
 \hline
 \delta_v &= - 16^\circ 20' 57''.60
 \end{aligned}$$

Znalezione wartości współrzędnych prawdziwych są takie same, jak otrzymane poprzednio. Gdy do nich dodamy odpowiednio

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{15} h \sin(H + \alpha) \sec \delta &= \quad 1^s.263 & h \cos(H + \alpha) \sin \delta &= - 2''.10 \\
 & & i \cos \delta &= \quad 5''.54 \\
 \Delta \alpha^{(a)} &= \quad 0^s.014 & \Delta \delta^{(a)} &= - 0''.00 \\
 \Delta \alpha^{(p)} &= - 0^s.006 & \Delta \delta^{(p)} &= - 0''.16
 \end{aligned}$$

to otrzymamy

$$\alpha_{app} = 1^h 40^m 27^s.573, \quad \delta_{app} = 16^\circ 20' 54''.32.$$

Widzimy, że rachunek według wzorów (319) jest znacznie krótszy, niż według wzorów (317). Najwięcej pracy jednakże wymagało obliczenie współczynników Bessla; gdy więc trzeba wykonać większą ilość redukcji tej samej gwiazdy na różne epoki, to, skoro wartości współczynników tych są znane, rachunek redukcji wykonywa się bardzo szybko.

TABLICE

TABLICA I.

(Str. 82).

Zestawienie ważnych liczb oraz ich logarytmów (w nawiasie).

1. Zasada logarytmów naturalnych.

$$e = 2.7182818286 = (0.4342944819).$$

2. Moduł logarytmów Briggsa.

$$M = 0.4342944819 = (9.6377843115).$$

3. Liczba Ludolpha.

$$\pi = 3.1415929536 = (0.4971498727).$$

4. Obwód koła w stopniach, minutach i sekundach łukowych.

$$P = 360^\circ = (2.5563025008);$$

$$P = 21600' = (4.3344537512);$$

$$P = 1296000'' = (6.1126050015).$$

5. Obwód koła w godzinach, minutach i sekundach (liczba godzin, minut i sekund w 1 dobie).

$$P = 24 \text{ godz.} = (1.3802112);$$

$$P = 1440 \text{ min.} = (3.1583625);$$

$$P = 86400 \text{ sek.} = (4.9365137).$$

6. Promień koła w stopniach, minutach i sekundach łukowych.

$$R = 57^\circ.2957795 = (1.7581226324);$$

$$R = 3437'.74677 = (3.5362738828);$$

$$R = 206264''.806 = (5.3144251332).$$

7. Wstawy kątów 1° , $1'$ i $1''$.

$$\sin 1^\circ = 0.0174524064 = (\overline{2.2418553184});$$

$$\sin 1' = 0.0002908882 = (\overline{4.4637261109});$$

$$\sin 1'' = 0.0000048481 = (\overline{6.6855748668}).$$

8. Elementy sferoidy ziemskiej według Hayforda, promień wodzący ziemi ρ i szerokość geocentryczna φ' w szerokości geograficznej φ .

$$a = 6378388 \text{ m} = (6.8047109);$$

$$b = 6356909 \text{ m} = (6.8032460);$$

$$s = 10002293 \text{ m} = (7.0000996);$$

$$\alpha = 1 : 297.0 = (\overline{3.5272435});$$

$$e = 0.081992 = (\overline{2.9137709}).$$

$$\log \rho = \overline{1.9992625} + 0.0007324 \cos 2\varphi - 0.0000019 \cos 4\varphi + \dots$$

$$\varphi' = \varphi - 695''.66 \sin 2\varphi + 1''.17 \sin 4\varphi - 0''.003 \sin 6\varphi + \dots$$

9. Przyspieszenie ciężkości i długość wahadła sekundowego w metrach według Helmherta (h jest wzniesieniem nad poziom morza w metrach).

$$g = 9.80632 - 0.025928 \cos 2\varphi + 0.000068 \cos^2 2\varphi \dots - \\ - 0.000003086 h;$$

$$l = 0.993588 - 0.002627 \cos 2\varphi + 0.000007 \cos^2 2\varphi \dots - \\ - 0.000006313 h.$$

10. Doba gwiazdowa i doba średnia.

$$1 \text{ doba gw.} = 0.99726957 = (\overline{1.9988126}) \text{ doby } \text{śr.};$$

$$1 \text{ doba gw.} = 23^{\circ} 56^m 4^s.091 = 86164.091 \text{ sek. } \text{śr.} = (4.9353264);$$

$$1 \text{ doba } \text{śr.} = 1.00273791 = (0.0011874) \text{ doby gw.};$$

$$1 \text{ doba } \text{śr.} = 24^{\circ} 3^m 56^s.555 = 86636.555 \text{ sek. gw.} = (4.9377012).$$

11. Prędkość światła w próżni w km/sek.

$$V = 299860 = (5.4769185).$$

12. Rok juljański.

$$R_j = 365.25 \text{ dni} = (2.5625902);$$

$$R_j = 8766.0 \text{ godzin} = (3.9428015);$$

$$R_j = 525960.0 \text{ min.} = (5.7209527);$$

$$R_j = 31557600 \text{ sek.} = (7.4991040).$$

13. Rok gwiazdowy, rok zwrotnikowy i rok anomalistyczny.

$$\begin{aligned}
R_g &= 365.25636 \text{ dni} = (2.5625978), \\
R_g &= 8766.153 \text{ godzin} = (3.9428090), \\
R_g &= 525969.16 \text{ min.} = (5.7209603), \\
R_g &= 31558149.5 \text{ sek.} = (7.4991115); \\
R_{\varepsilon} &= 365.24220 \text{ dni} = (2.5625809), \\
R_{\varepsilon} &= 8765.813 \text{ godzin} = (3.9427922), \\
R_{\varepsilon} &= 525948.77 \text{ min.} = (5.7209434), \\
R_{\varepsilon} &= 31556926.0 \text{ sek.} = (7.4990947); \\
R_a &= 365.25964 \text{ dni} = (2.5626017), \\
R_a &= 8766.231 \text{ godzin} = (3.9428129), \\
R_a &= 525973.86 \text{ min.} = (5.7209642), \\
R_a &= 31558431.6 \text{ sek.} = (7.4991154).
\end{aligned}$$

14. Stała paralaksy słońca.

$$\pi_{\odot}^0 = 8''.80 = (0.9444827); \quad \log \sin \pi_{\odot}^0 = \overline{5.6300575}.$$

15. Odległość średnia Ziemia-Słońce w promieniach równika ziemskiego (pr. r. z.) i w km według elementów Hayforda.

$$\begin{aligned}
\Delta_{\odot}^0 &= 23439.184 \text{ pr. r. z.} = (4.3699425), \\
\Delta_{\odot}^0 &= 149504200 \text{ km} = (8.1746534).
\end{aligned}$$

Δ_{\odot}^0 służy za jednostkę długości, t. zw. *jednostkę planetarną* (j. pl.).

16. Średnia prędkość ziemi w jej drodze w km/sek.

$$v_0 = 29.766 = (1.4737217).$$

17. Równanie światła.

$$\mu = 498.580 \text{ sek.} = (2.6977348).$$

18. «Rok światła» lub *jednostka świetlna* (j. św.).

$$\begin{aligned}
1 \text{ j. św.} &= 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km} = (12.9760132), \\
1 \text{ j. św.} &= 63293.6 \text{ j. pl.} = (4.8013599).
\end{aligned}$$

19. Parsek.

$$\begin{aligned}
1 \text{ parsek} &= 206264.8 \text{ j. pl.} = (5.3144251), \\
1 \text{ parsek} &= 3 \cdot 10^{13} \text{ km} = (13.4890785), \\
1 \text{ parsek} &= 3.26 \text{ j. św.} = (0.5130653).
\end{aligned}$$

20. Promień słońca w średniej odległości.

$$\rho_{\odot}^0 = 15' 59'' .63 = 959'' .64 = (2.9821038);$$

$$\log \sin \rho_{\odot}^0 = (3.6676770).$$

21. Promień słońca w promieniach równika ziemskiego i w km.

$$r_{\odot} = 109.0488 \text{ pr. r. z.} = (2.0376211),$$

$$r_{\odot} = 695555.8 \text{ km} = (5.8423320).$$

22. Masa słońca (masa ziemi = 1).

$$m_{\odot} = 333432 = (5.5230073).$$

13. Miesiąc gwiazdowy, zwrotnikowy, anomalistyczny, smoczy i synodyczny.

$$M_g = 27.3216603 \text{ dni} = (1.4365071),$$

$$M_g = 2360591.5 \text{ sek.} = (6.3730208);$$

$$M_s = 27.3215811 \text{ dni} = (1.4365059),$$

$$M_s = 2360584.6 \text{ sek.} = (6.3730196);$$

$$M_a = 27.5545497 \text{ dni} = (1.4401934),$$

$$M_a = 2380713.1 \text{ sek.} = (6.3767071);$$

$$M_d = 27.2122192 \text{ dni} = (1.4347640),$$

$$M_d = 2351135.7 \text{ sek.} = (6.3712777);$$

$$M_s = 29.5305874 \text{ dni} = (1.4702722),$$

$$M_s = 2551442.8 \text{ sek.} = (6.4067859).$$

24. Okres obiegu węzłów księżyca zwrotnikowy (okres nutacji).

$$Q = 6798.35 \text{ dni} = (3.8324035).$$

25. Stała paralaksy księżyca.

$$\pi_{\text{☾}}^0 = 57' 2'' .70 = 3422'' .70 = (3.5343815);$$

$$\log \sin \pi_{\text{☾}}^0 = (2.2199237).$$

26. Średnia odległość księżyca od ziemi w j. pl., w promieniach równika ziemskiego i w km.

$$\Delta_{\text{☾}}^0 = 0.0025712 = \frac{1}{388.92} \text{ j. pl.} = (3.4101338),$$

$$\Delta_{\text{☾}}^0 = 60.26654 \text{ pr. r. z.} = (1.7800762),$$

$$\Delta_{\text{☾}}^0 = 384403 \text{ km} = (5.5847872).$$

27. Promień księżycy w średniej odległości.

$$\rho_{\oplus}^0 = 15' 32''.59 = 932''.59 = (2.9696908). \\ \log \sin \rho_{\oplus}^0 = (3.6552641).$$

28. Promień księżycy w pr. r. z. i w km.

$$r_{\oplus} = 0.27248 = \frac{1}{3.67} \text{ pr. r. z. } = (\bar{1}.4353404), \\ r_{\oplus} = 1738.06 \text{ km} = (3.2400513).$$

29. Masa księżycy (masa ziemi = 1).

$$m_{\oplus} = 0.012277 = \frac{1}{81.45} = (\bar{2}.0891089).$$

30. Stała refrakcji (według Bauschingera).

$$\alpha'' = 60''.15 = (1.7792356).$$

31. Stała aberacji rocznej.

$$k_1 = 20''.47 = (1.3111178).$$

32. Stała aberacji dziennej.

$$k_2 = 0''.32 = (\bar{1}.5051500).$$

33. Stała precesji ogólnej.

$$p = 50''.25641 = (1.7011919).$$

34. Stała nutacji.

$$n = 9''.21 = (0.9642596).$$

35. Średnia pochyłość ekliptyki, ep. 1925.0.

$$\varepsilon_m = 23^\circ 26' 56''.55, \\ \sin \varepsilon_m = 0.3979333 = (\bar{1}.5998103), \\ \cos \varepsilon_m = 0.9174143 = (\bar{1}.9625655).$$

TABLICA II.

(Str. 75).

Spółczynniki wzoru interpolacyjnego Newtona.

m	$\binom{m}{2}$	$\binom{m}{3}$	$\binom{m}{4}$	m	$\binom{m}{2}$	$\binom{m}{3}$	$\binom{m}{4}$
0.01	-0.00495	+0.0033	-0.0024	0.51	-0.12495	+0.0621	-0.0386
0.02	0980	065	048	0.52	2480	616	382
0.03	1455	095	071	0.53	2455	610	377
0.04	1920	125	093	0.54	2420	604	372
0.05	2375	154	114	0.55	2375	598	366
0.06	2820	182	134	0.56	2320	591	361
0.07	3255	209	153	0.57	2255	584	355
0.08	3680	235	172	0.58	2180	576	349
0.09	4095	261	190	0.59	2095	568	342
0.10	4500	285	207	0.60	2000	560	336
0.11	-0.04895	+0.0308	-0.0223	0.61	-0.11895	+0.0551	-0.0329
0.12	5280	331	238	0.62	1780	542	322
0.13	5655	352	253	0.63	1655	532	315
0.14	6020	373	267	0.64	1520	522	308
0.15	6375	393	280	0.65	1375	512	301
0.16	6720	412	293	0.66	1220	501	293
0.17	7055	430	304	0.67	1055	490	285
0.18	7380	448	316	0.68	0880	479	278
0.19	7695	464	326	0.69	0695	467	270
0.20	8000	480	336	0.70	0500	455	262
0.21	-0.08295	+0.0495	-0.0345	0.71	-0.10295	+0.0443	-0.0253
0.22	8580	509	354	0.72	0080	430	245
0.23	8855	522	362	0.73	-0.09855	417	237
0.24	9120	535	369	0.74	9620	404	228
0.25	9375	547	376	0.75	9375	391	220
0.26	9620	558	382	0.76	9120	377	211
0.27	9855	568	388	0.77	8855	363	202
0.28	-0.10080	578	393	0.78	8580	349	194
0.29	0295	587	398	0.79	8295	335	185
0.30	0500	595	402	0.80	8000	320	176
0.31	-0.10695	+0.0602	-0.0405	0.81	-0.07695	+0.0305	-0.0167
0.32	0880	609	408	0.82	7380	290	158
0.33	1055	615	411	0.83	7055	275	149
0.34	1220	621	413	0.84	6720	260	140
0.35	1375	626	415	0.85	6375	244	131
0.36	1520	630	416	0.86	6020	229	122
0.37	1655	633	416	0.87	5655	213	113
0.38	1780	636	417	0.88	5280	197	104
0.39	1895	638	416	0.89	4895	181	095
0.40	2000	640	416	0.90	4500	165	087
0.41	-0.12095	+0.0641	-0.0415	0.91	-0.04095	+0.0149	-0.0078
0.42	2180	641	414	0.92	3680	132	069
0.43	2255	641	412	0.93	3255	116	060
0.44	2320	640	410	0.94	2820	100	051
0.45	2375	639	408	0.95	2375	083	043
0.46	2420	638	405	0.96	1920	067	034
0.47	2455	635	402	0.97	1455	050	025
0.48	2480	632	398	0.98	0980	033	017
0.49	2495	629	395	0.99	0495	017	008
0.50	2500	625	391				

TABLICA III.

(Str. 137).

Zamiana godzin i minut na sekundy.

<i>g.</i>	<i>s.</i>	<i>m.</i>	<i>s.</i>	<i>m.</i>	<i>s.</i>
1	3600	1	60	31	1860
2	7200	2	120	32	1920
3	10800	3	180	33	1980
4	14400	4	240	34	2040
5	18000	5	300	35	2100
6	21600	6	360	36	2160
7	25200	7	420	37	2220
8	28800	8	480	38	2280
9	32400	9	540	39	2340
10	36000	10	600	40	2400
11	39600	11	660	41	2460
12	43200	12	720	42	2520
13	46800	13	780	43	2580
14	50400	14	840	44	2640
15	54000	15	900	45	2700
16	57600	16	960	46	2760
17	61200	17	1020	47	2820
18	64800	18	1080	48	2880
19	68400	19	1140	49	2940
20	72000	20	1200	50	3000
21	75600	21	1260	51	3060
22	79200	22	1320	52	3120
23	82800	23	1380	53	3180
24	86400	24	1440	54	3240
		25	1500	55	3300
		26	1560	56	3360
		27	1620	57	3420
		28	1680	58	3480
		29	1740	59	3540
		30	1800	60	3600

TABLICA IV.

(Str. 137).

Zamiana godzin, minut i sekund na części doby i odwrotnie.

<i>g.</i>	<i>d.</i>	<i>m.</i>	<i>d.</i>	<i>m.</i>	<i>d.</i>	<i>s.</i>	<i>d.</i>	<i>s.</i>	<i>d.</i>
1	0.041667	1	0.000694	31	0.021528	1	0.000012	31	0.000359
2	0.083333	2	1389	32	2222	2	23	32	70
3	0.125000	3	2083	33	2917	3	35	33	82
4	0.166667	4	2778	34	3611	4	46	34	94
5	0.208333	5	3472	35	4306	5	58	35	0.000405
6	0.250000	6	4167	36	5000	6	69	36	17
7	0.291667	7	4861	37	5694	7	81	37	28
8	0.333333	8	5556	38	6389	8	93	38	40
9	0.375000	9	6250	39	7083	9	0.000104	39	51
10	0.416667	10	6944	40	7778	10	16	40	63
11	0.458333	11	0.007639	41	8472	11	0.000127	41	0.000475
12	0.500000	12	8333	42	9167	12	39	42	86
13	0.541667	13	9028	43	9861	13	50	43	98
14	0.583333	14	9722	44	0.030556	14	62	44	0.000509
15	0.625000	15	0.010417	45	1250	15	74	45	21
16	0.666667	16	1111	46	1944	16	85	46	32
17	0.708333	17	1806	47	2639	17	97	47	44
18	0.750000	18	2500	48	3333	18	0.000208	48	56
19	0.791667	19	3194	49	4028	19	20	49	67
20	0.833333	20	3889	50	4722	20	31	50	79
21	0.875000	21	0.014583	51	5417	21	0.000243	51	0.000590
22	0.916667	22	5278	52	6111	22	55	52	0.000602
23	0.958333	23	5972	53	6806	23	66	53	13
24	1.000000	24	6667	54	7500	24	78	54	25
		25	7361	55	8194	25	89	55	37
		26	8056	56	8889	26	0.000301	56	48
		27	8750	57	9583	27	13	57	60
		28	9444	58	0.040278	28	24	58	71
		29	0.020129	59	0972	29	36	59	83
		30	0833	60	1667	30	47	60	94

TABLICA V.

(Str. 137).

Zamiana stopni, minut i sekund łukowych na godziny, minuty i sekundy czasowe i odwrotnie.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0 0	0 4	0 8	0 12	0 16	0 20	0 24	0 28	0 32	0 36
1	0 40	0 44	0 48	0 52	0 56	1 0	1 4	1 8	1 12	1 16
2	1 20	1 24	1 28	1 32	1 36	1 40	1 44	1 48	1 52	1 56
3	2 0	2 4	2 8	2 12	2 16	2 20	2 24	2 28	2 32	2 36
4	2 40	2 44	2 48	2 52	2 56	3 0	3 4	3 8	3 12	3 16
5	3 20	3 24	3 28	3 32	3 36	3 40	3 44	3 48	3 52	3 56
6	4 0	4 4	4 8	4 12	4 16	4 20	4 24	4 28	4 32	4 36
7	4 40	4 44	4 48	4 52	4 56	5 0	5 4	5 8	5 12	5 16
8	5 20	5 24	5 28	5 32	5 36	5 40	5 44	5 48	5 52	5 56
9	6 0	6 4	6 8	6 12	6 16	6 20	6 24	6 28	6 32	6 36
10	6 40	6 44	6 48	6 52	6 56	7 0	7 4	7 8	7 12	7 16
11	7 20	7 24	7 28	7 32	7 36	7 40	7 44	7 48	7 52	7 56
12	8 0	8 4	8 8	8 12	8 16	8 20	8 24	8 28	8 32	8 36
13	8 40	8 44	8 48	8 52	8 56	9 0	9 4	9 8	9 12	9 16
14	9 20	9 24	9 28	9 32	9 36	9 40	9 44	9 48	9 52	9 56
15	10 0	10 4	10 8	10 12	10 16	10 20	10 24	10 28	10 32	10 36
16	10 40	10 44	10 48	10 52	10 56	11 0	11 4	11 8	11 12	11 16
17	11 20	11 24	11 28	11 32	11 36	11 40	11 44	11 48	11 52	11 56
18	12 0	12 4	12 8	12 12	12 16	12 20	12 24	12 28	12 32	12 36
19	12 40	12 44	12 48	12 52	12 56	13 0	13 4	13 8	13 12	13 16
20	13 20	13 24	13 28	13 32	13 36	13 40	13 44	13 48	13 52	13 56
21	14 0	14 4	14 8	14 12	14 16	14 20	14 24	14 28	14 32	14 36
22	14 40	14 44	14 48	14 52	14 56	15 0	15 4	15 8	15 12	15 16
23	15 20	15 24	15 28	15 32	15 36	15 40	15 44	15 48	15 52	15 56
24	16 0	16 4	16 8	16 12	16 16	16 20	16 24	16 28	16 32	16 36
25	16 40	16 44	16 48	16 52	16 56	17 0	17 4	17 8	17 12	17 16
26	17 20	17 24	17 28	17 32	17 36	17 40	17 44	17 48	17 52	17 56
27	18 0	18 4	18 8	18 12	18 16	18 20	18 24	18 28	18 32	18 36
28	18 40	18 44	18 48	18 52	18 56	19 0	19 4	19 8	19 12	19 16
29	19 20	19 24	19 28	19 32	19 36	19 40	19 44	19 48	19 52	19 56
30	20 0	20 4	20 8	20 12	20 16	20 20	20 24	20 28	20 32	20 36
31	20 40	20 44	20 48	20 52	20 56	21 0	21 4	21 8	21 12	21 16
32	21 20	21 24	21 28	21 32	21 36	21 40	21 44	21 48	21 52	21 56
33	22 0	22 4	22 8	22 12	22 16	22 20	22 24	22 28	22 32	22 36
34	22 40	22 44	22 48	22 52	22 56	23 0	23 4	23 8	23 12	23 16
35	23 20	23 24	23 28	23 32	23 36	23 40	23 44	23 48	23 52	23 56
0	0.000	0.067	0.133	0.200	0.267	0.333	0.400	0.467	0.533	0.600
1	0.667	0.733	0.800	0.867	0.933	1.000	1.067	1.133	1.200	1.267
2	1.333	1.400	1.467	1.533	1.600	1.667	1.733	1.800	1.867	1.933
3	2.000	2.067	2.133	2.200	2.267	2.333	2.400	2.467	2.533	2.600
4	2.667	2.733	2.800	2.867	2.933	3.000	3.067	3.133	3.200	3.267
5	3.333	3.400	3.467	3.533	3.600	3.667	3.733	3.800	3.867	3.933

Przykład użycia: Zamienić na jednostki czasu $226^{\circ} 29' 13''$.

Znajdujemy:

- 1) Na przecięciu 23-go wiersza i 7-ej kolumny $226^{\circ} = 15^h 4^m$
- 2) Na przecięciu 3-go wiersza i 10-ej kolumny $29' = 1^m 56^s$
- 3) Na przecięciu 2-go wiersza i 4-ej kolumny w dodatkowej części u dołu $13'' = 0^s.87$
- 4) Z części teże w wierszu zerowym $0''.6 = 0^s.04$

$15^h 5^m 56^s.91$.

TABLICA VI a.

(Str. 276).

Refrakcja średnia.

z	R_m	z	R_m	z	R_m	z	R_m	z	R_m	z	R_m
1°	1".0	41°	52".2	70°10'	165".3	77°10'	258".6	84° 5'	532".4	87°35'	1029"
2	2.1	42	54.1	20	66.8	20	62.0	10	38.9	40	051
3	3.2	43	56.0	30	68.3	30	65.4	15	45.6	45	073
4	4.2	44	58.0	40	69.8	40	69.0	20	52.5	50	096
5	5.3	45	60.0	50	71.4	50	72.6	25	59.4	55	120
6	6.3	46	62.2	71 0	73.0	78 0	76.3	30	66.6	88 0	145
7	7.4	47	64.4	10	74.6	10	80.2	35	74.0	5	171
8	8.4	48	66.7	20	76.3	20	84.1	40	81.5	10	198
9	9.5	49	69.1	30	77.9	30	88.1	45	89.2	15	226
10	10.6	50	71.5	40	79.6	40	92.3	50	97.0	20	255
11	11.7	51	74.1	50	81.4	50	96.5	55	605.1	25	285
12	12.8	52	76.8	72 0	83.1	79 0	300.9	85 0	13.4	30	316
13	13.9	53	79.6	10	84.9	10	05.4	5	21.9	35	349
14	15.0	54	82.6	20	86.7	20	10.0	10	30.6	40	383
15	16.1	55	85.7	30	88.6	30	14.7	15	39.5	45	418
16	17.2	56	88.9	40	90.5	40	19.6	20	48.7	50	455
17	18.4	57	92.3	50	92.4	50	24.7	25	58.1	55	494
18	19.5	58	95.9	73 0	94.4	80 0	29.9	30	67.8	89 0	534
19	20.7	59	99.7	10	96.4	10	35.2	35	77.7	5	576
20	21.9	60	103.8	20	98.4	20	40.7	40	87.9	10	620
21	23.1	60°30'	05.9	30	200.5	30	46.4	45	98.3	15	666
22	24.3	61 0	08.1	40	02.6	40	52.3	50	709.1	20	715
23	25.5	61 30	10.3	50	04.7	50	58.3	55	20.2	22	735
24	26.8	62 0	12.6	74 0	06.9	81 0	64.6	86 0	31.6	24	755
25	28.0	62 30	15.0	10	09.2	10	71.0	5	43.3	26	775
26	29.3	63 0	17.5	20	11.5	20	77.7	10	55.3	28	796
27	30.6	63 30	20.1	30	13.8	30	84.6	15	67.7	30	1818
28	32.0	64 0	22.7	40	16.2	40	91.8	20	80.5	32	839
29	33.3	64 30	25.4	50	18.6	50	99.2	25	93.7	34	861
30	34.7	65 0	28.3	75 0	21.0	82 0	406.8	30	807.2	36	884
31	36.1	65 30	31.2	10	23.6	10	14.8	35	21.2	38	907
32	37.5	66 0	34.3	20	26.1	20	23.0	40	35.6	40	931
33	39.0	66 30	37.5	30	28.8	30	31.6	45	50.5	42	955
34	40.5	67 0	40.8	40	31.5	40	40.5	50	65.8	44	979
35	42.1	67 30	44.2	50	34.2	50	49.7	55	81.7	46	2004
36	43.6	68 0	47.8	76 0	37.0	83 0	59.3	87 0	98.0	48	030
37	45.3	68 30	51.5	10	39.9	10	69.3	5	914.9	50	056
38	46.9	69 0	55.5	20	42.8	20	79.8	10	32.4	52	083
39	48.7	69 30	59.5	30	45.8	30	90.6	15	50.5	54	111
40	50.4	70 0	63.8	40	48.9	40	501.9	20	69.2	56	138
				50	52.1	50	13.7	25	88.5	58	168
				77 0	55.3	84 0	26.1	30	1009"	90 0	2194

Uwaga: Przedziały dla z są tak obrane, że w granicach przedziału wystarcza interpolacja liniowa.

TABLICA VI b.

(Str. 276).

Wartość czynnika α wzoru (112).

ΔE w mm.	$^{\circ}\text{C}$ —38°	—36°	—34°	—32°	—30°	—28°	—26°	—24°	—22°	—20°
—100	0·01021	0·00215	—0·00585	—0·01381	—0·02169	—0·02954	—0·03730	—0·04500	—0·05265	—0·06022
—90	0·02557	0·01738	0·00925	0·00116	—0·00684	—0·01481	—0·02270	—0·03052	—0·03829	—0·04597
—80	0·04093	0·03261	0·02435	0·01614	0·00801	—0·00009	—0·00809	—0·01603	—0·02392	—0·03172
—70	0·05628	0·04783	0·03945	0·03111	0·02286	0·01464	0·00651	—0·00155	—0·00956	—0·01748
—60	0·07164	0·06306	0·05455	0·04609	0·03771	0·02936	0·02112	0·01293	0·00481	—0·00323
—50	0·08700	0·07829	0·06965	0·06106	0·05255	0·04409	0·03572	0·02741	0·01917	0·01102
—40	0·10236	0·09352	0·08476	0·07604	0·06740	0·05882	0·05032	0·04190	0·03354	0·02527
—30	0·11772	0·10875	0·09986	0·09101	0·08225	0·07354	0·06493	0·05638	0·04790	0·03952
—20	0·13307	0·12397	0·11496	0·10599	0·09710	0·08827	0·07953	0·07086	0·06227	0·05376
—10	0·14843	0·13920	0·13006	0·12096	0·11195	0·10299	0·09414	0·08535	0·07663	0·06801
0	0·16379	0·15443	0·14516	0·13594	0·12680	0·11772	0·10874	0·09983	0·09100	0·08226
+10	0·17915	0·16966	0·16026	0·15092	0·14165	0·13245	0·12334	0·11431	0·10537	0·09651
+20	0·19451	0·18489	0·17536	0·16589	0·15650	0·14717	0·13795	0·12880	0·11973	0·11076
+30	0·20986	0·20011	0·19046	0·18087	0·17135	0·16190	0·15255	0·14328	0·13410	0·12500
+40	0·22522	0·21534	0·20556	0·19584	0·18620	0·17662	0·16716	0·15776	0·14846	0·13925
+50	0·24058	0·23057	0·22067	0·21082	0·20105	0·19135	0·18176	0·17225	0·16283	0·15350
+60	0·25594	0·24580	0·23577	0·22579	0·21589	0·20608	0·19636	0·18673	0·17719	0·16775
+70	0·27130	0·26103	0·25087	0·24077	0·23074	0·22080	0·21097	0·20121	0·19156	0·18200
+80	0·28665	0·27625	0·26597	0·25574	0·24559	0·23553	0·22557	0·21569	0·20592	0·19624
+90	0·30201	0·29148	0·28107	0·27072	0·26044	0·25025	0·24018	0·23018	0·22029	0·21049
+100	0·31737	0·30671	0·29617	0·28569	0·27529	0·26498	0·25478	0·24466	0·23465	0·22474

TABLICA VI b.

(Ciąg dalszy).

ΔB w mm. $t^{\circ}C$	—18°	—16°	—14°	—12°	—10°	—8°	—6°	—4°	—2°	0°
—100	—0·06772	—0·07515	—0·08251	—0·08976	—0·09696	—0·10406	—0·11108	—0·11800	—0·12484	—0·13158
—90	—0·05359	—0·06113	—0·06861	—0·07597	—0·08328	—0·09049	—0·09761	—0·10464	—0·11158	—0·11842
—80	—0·03946	—0·04711	—0·05470	—0·06217	—0·06959	—0·07691	—0·08414	—0·09127	—0·09832	—0·10526
—70	—0·02532	—0·03310	—0·04080	—0·04838	—0·05591	—0·06334	—0·07067	—0·07791	—0·08506	—0·09211
—60	—0·01119	—0·01908	—0·02689	—0·03459	—0·04222	—0·04976	—0·05720	—0·06454	—0·07180	—0·07895
—50	0·00294	0·00506	—0·01299	—0·02080	—0·02854	—0·03619	—0·04374	—0·05118	—0·05854	—0·06579
—40	0·01707	0·00896	0·00092	—0·00700	—0·01486	—0·02261	—0·03027	—0·03782	—0·04528	—0·05263
—30	0·03120	0·02298	0·01482	0·00679	—0·00117	—0·00904	—0·01680	—0·02445	—0·03202	—0·03947
—20	0·04534	0·03699	0·02873	0·02058	0·01251	0·00454	—0·00333	—0·01109	—0·01876	—0·02632
—10	0·05947	0·05101	0·04263	0·03438	0·02620	0·01811	0·01014	0·00228	—0·00550	—0·01316
0	0·07360	0·06503	0·05654	0·04817	0·03988	0·03169	0·02361	0·01564	0·00776	0·00000
+10	0·08773	0·07905	0·07045	0·06196	0·05356	0·04527	0·03708	0·02900	0·02102	0·01316
+20	0·10186	0·09307	0·08435	0·07576	0·06725	0·05884	0·05055	0·04237	0·03428	0·02632
+30	0·11600	0·10708	0·09826	0·08955	0·08093	0·07242	0·06402	0·05573	0·04754	0·03947
+40	0·13013	0·12110	0·11216	0·10334	0·09462	0·08599	0·07749	0·06910	0·06080	0·05263
+50	0·14426	0·13512	0·12607	0·11714	0·10830	0·09957	0·09096	0·08246	0·07406	0·06579
+60	0·15839	0·14914	0·13997	0·13093	0·12198	0·11314	0·10442	0·09582	0·08732	0·07895
+70	0·17252	0·16316	0·15388	0·14472	0·13567	0·12672	0·11789	0·10919	0·10058	0·09211
+80	0·18666	0·17717	0·16778	0·15851	0·14935	0·14029	0·13136	0·12255	0·11384	0·10526
+90	0·20079	0·19119	0·18169	0·17231	0·16304	0·15387	0·14483	0·13592	0·12710	0·11842
+100	0·21492	0·20521	0·19559	0·18610	0·17672	0·16744	0·15830	0·14928	0·14036	0·13158

TABLICA VI b.

(Ciąg dalszy).

ΔB w mm.	$+2^{\circ}$	$+4^{\circ}$	$+6^{\circ}$	$+8^{\circ}$	$+10^{\circ}$	$+12^{\circ}$	$+14^{\circ}$	$+16^{\circ}$	$+18^{\circ}$	$+20^{\circ}$
-100	-0.13822	-0.14479	-0.15120	-0.15754	-0.16376	-0.16988	-0.17587	-0.18177	-0.18754	-0.19318
-90	-0.12516	-0.13180	-0.13834	-0.14478	-0.15109	-0.15730	-0.16339	-0.16937	-0.17523	-0.18096
-80	-0.11210	-0.11884	-0.12548	-0.13201	-0.13842	-0.14473	-0.15090	-0.15698	-0.16292	-0.16874
-70	-0.09905	-0.10589	-0.11262	-0.11925	-0.12575	-0.13215	-0.13842	-0.14458	-0.15062	-0.15652
-60	-0.08599	-0.09293	-0.09976	-0.10648	-0.11308	-0.11957	-0.12593	-0.13219	-0.13831	-0.14430
-50	-0.07293	-0.07997	-0.08690	-0.09372	-0.10041	-0.10700	-0.11345	-0.11979	-0.12600	-0.13208
-40	-0.05987	-0.06701	-0.07403	-0.08095	-0.08774	-0.09442	-0.10096	-0.10739	-0.11369	-0.11986
-30	-0.04681	-0.05405	-0.06117	-0.06819	-0.07507	-0.08184	-0.08848	-0.09500	-0.10138	-0.10764
-20	-0.03376	-0.04110	-0.04831	-0.05542	-0.06240	-0.06926	-0.07599	-0.08260	-0.08908	-0.09542
-10	-0.02070	-0.02814	-0.03545	-0.04266	-0.04973	-0.05669	-0.06351	-0.07021	-0.07677	-0.08320
0	-0.00764	-0.01518	-0.02259	-0.02989	-0.03706	-0.04411	-0.05102	-0.05781	-0.06446	-0.07098
+10	0.00542	-0.00222	-0.00973	-0.01712	-0.02439	-0.03153	-0.03853	-0.04541	-0.05215	-0.05876
+20	0.01848	0.01074	0.00313	-0.00436	-0.01172	-0.01896	-0.02605	-0.03302	-0.03984	-0.04654
+30	0.03153	0.02369	0.01599	0.00841	0.00095	-0.00638	-0.01356	-0.02062	-0.02754	-0.03432
+40	0.04459	0.03665	0.02885	0.02117	0.01362	0.00620	-0.00108	-0.00823	-0.01523	-0.02210
+50	0.05765	0.04961	0.04172	0.03394	0.02629	0.01878	0.01141	0.00417	-0.00292	-0.00988
+60	0.07071	0.06257	0.05458	0.04670	0.03896	0.03135	0.02389	0.01657	0.00939	0.00234
+70	0.08377	0.07553	0.06744	0.05947	0.05163	0.04393	0.03638	0.02896	0.02170	0.01456
+80	0.09682	0.08848	0.08030	0.07223	0.06430	0.05651	0.04886	0.04136	0.03400	0.02678
+90	0.10988	0.10144	0.09316	0.08500	0.07697	0.06908	0.06135	0.05375	0.04631	0.03900
+100	0.12294	0.11440	0.10602	0.09776	0.08964	0.08166	0.07383	0.06615	0.05862	0.05122

TABLICA VI b.

(Ciąg dalszy).

ΔB w' mied.	$^{\circ}\text{C}$ + 22°	+ 24°	+ 26°	+ 28°	+ 30°	+ 32°	+ 34°	+ 36°	+ 38°	+ 40°
— 100	— 0·19871	— 0·20410	— 0·20936	— 0·21450	— 0·21951	— 0·22437	— 0·22911	— 0·23369	— 0·23813	— 0·24242
— 90	— 0·18658	— 0·19205	— 0·19739	— 0·20261	— 0·20770	— 0·21264	— 0·21746	— 0·22211	— 0·22662	— 0·23099
— 80	— 0·17444	— 0·18000	— 0·18542	— 0·19072	— 0·19589	— 0·20091	— 0·20580	— 0·21053	— 0·21512	— 0·21955
— 70	— 0·16231	— 0·16795	— 0·17346	— 0·17884	— 0·18408	— 0·18918	— 0·19415	— 0·19895	— 0·20361	— 0·20812
— 60	— 0·15017	— 0·15590	— 0·16149	— 0·16695	— 0·17227	— 0·17745	— 0·18249	— 0·18737	— 0·19211	— 0·19668
— 50	— 0·13804	— 0·14385	— 0·14952	— 0·15506	— 0·16047	— 0·16572	— 0·17084	— 0·17579	— 0·18060	— 0·18525
— 40	— 0·12590	— 0·13179	— 0·13755	— 0·14317	— 0·14866	— 0·15398	— 0·15918	— 0·16421	— 0·16909	— 0·17381
— 30	— 0·11377	— 0·11974	— 0·12558	— 0·13128	— 0·13685	— 0·14225	— 0·14753	— 0·15263	— 0·15759	— 0·16238
— 20	— 0·10163	— 0·10769	— 0·11362	— 0·11940	— 0·12504	— 0·13052	— 0·13587	— 0·14105	— 0·14608	— 0·15094
— 10	— 0·08950	— 0·09564	— 0·10165	— 0·10751	— 0·11323	— 0·11879	— 0·12422	— 0·12947	— 0·13458	— 0·13951
0	— 0·07736	— 0·08359	— 0·08968	— 0·09562	— 0·10142	— 0·10706	— 0·11256	— 0·11789	— 0·12307	— 0·12807
+ 10	— 0·06522	— 0·07154	— 0·07771	— 0·08373	— 0·08961	— 0·09533	— 0·10090	— 0·10631	— 0·11156	— 0·11663
+ 20	— 0·05309	— 0·05949	— 0·06574	— 0·07184	— 0·07780	— 0·08360	— 0·08925	— 0·09473	— 0·10006	— 0·10520
+ 30	— 0·04095	— 0·04744	— 0·05378	— 0·05996	— 0·06599	— 0·07187	— 0·07759	— 0·08315	— 0·08855	— 0·09376
+ 40	— 0·02882	— 0·03539	— 0·04181	— 0·04807	— 0·05418	— 0·06014	— 0·06594	— 0·07157	— 0·07705	— 0·08233
+ 50	— 0·01668	— 0·02333	— 0·02984	— 0·03618	— 0·04237	— 0·04840	— 0·05428	— 0·05999	— 0·06554	— 0·07089
+ 60	— 0·00455	— 0·01128	— 0·01787	— 0·02429	— 0·03057	— 0·03667	— 0·04263	— 0·04841	— 0·05403	— 0·05946
+ 70	0·00759	0·00077	— 0·00590	— 0·01240	— 0·01876	— 0·02494	— 0·03097	— 0·03683	— 0·04253	— 0·04802
+ 80	0·01972	0·01282	0·00606	— 0·00052	— 0·00695	— 0·01321	— 0·01932	— 0·02525	— 0·03102	— 0·03659
+ 90	0·03186	0·02487	0·01803	0·01137	0·00486	— 0·00148	— 0·00766	— 0·01367	— 0·01952	— 0·02515
+ 100	0·04399	0·03692	0·03000	0·02326	0·01667	0·01025	0·00399	— 0·00209	— 0·00801	— 0·01372

TABLICA VI c.

(Str. 277).

Wartości różnicy barometrycznej ΔB .

$\begin{matrix} b \\ B \end{matrix}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
660	— 98.06	— 98.81	— 99.56	— 100.32	— 101.07	— 101.82	— 102.57	— 103.32	— 104.08	— 104.83	— 105.58
670	88.03	88.78	89.53	90.29	91.04	91.79	92.54	93.29	94.05	94.80	95.55
680	78.00	78.75	79.50	80.26	81.01	81.76	82.51	83.26	84.02	84.77	85.52
690	67.97	68.72	69.47	70.23	70.98	71.73	72.48	73.23	73.99	74.74	75.49
700	57.94	58.69	59.44	60.20	60.95	61.70	62.45	63.20	63.96	64.71	65.46
710	47.91	48.66	49.41	50.17	50.92	51.67	52.42	53.17	53.93	54.68	55.43
720	37.88	38.63	39.38	40.14	40.89	41.64	42.39	43.14	43.90	44.65	45.40
730	27.85	28.60	29.35	30.11	30.86	31.61	32.36	33.11	33.87	34.62	35.37
740	17.82	18.57	19.32	20.08	20.83	21.58	22.33	23.08	23.84	24.59	25.34
750	— 7.79	— 8.54	— 9.29	10.05	10.80	11.55	12.30	13.05	13.81	14.56	15.31
760	+ 2.24	+ 1.49	+ 0.74	— 0.02	— 0.77	— 1.52	— 2.27	— 3.02	+ 3.78	— 4.53	— 5.28
770	12.27	11.52	10.77	+ 10.01	+ 9.26	+ 8.51	+ 7.76	+ 7.01	+ 6.25	+ 5.50	+ 4.75
780	22.30	21.55	20.80	20.04	19.29	18.54	17.79	17.04	+ 16.28	15.53	14.78
790	32.33	31.58	30.83	30.07	29.32	28.57	27.82	27.07	26.31	25.56	24.81
800	42.36	41.61	40.86	40.10	39.35	38.60	37.85	37.10	36.34	35.59	34.84
810	52.39	51.64	50.89	50.13	49.38	48.63	47.88	47.13	46.37	45.62	44.87
820	62.42	61.67	60.92	60.16	59.41	58.66	57.91	57.16	56.40	55.65	54.90
830	72.45	71.70	70.95	70.19	69.44	68.69	67.94	67.19	66.43	65.68	64.93
840	82.48	81.73	80.98	80.22	79.47	78.72	77.97	77.22	76.46	75.71	74.96
850	92.51	91.76	91.01	90.25	89.50	88.75	88.00	87.25	86.49	85.74	84.99
860	102.54	101.79	101.04	100.28	99.53	98.78	98.03	97.28	96.52	95.77	95.02

TABLICA VII.

(Str. 433)

Wielkości precesyjne.

Rok	I	$\log \frac{dz}{dt}$	$\frac{d\chi_m}{dt}$	m	$\log n''$	ε_m
1600	171° 12'.84	9.67500	50".1897	3s.06675	1.302599	23° 29' 28".69
1610	18.31	493	1919	694	580	24 .01
20	23.78	487	41	713	562	19 .34
30	29.25	480	64	731	544	14 .66
40	34.72	474	86	750	526	9 .99
50	40.20	467	2008	769	507	5 .31
60	45.67	461	30	787	489	0 .63
70	51.15	454	52	805	470	28 55 .95
80	56.62	448	75	824	452	51 .27
90	172 2.10	441	97	843	433	46 .59
1700	7.57	435	2119	861	415	41 .91
1710	13.05	428	41	880	396	37 .23
20	18.52	422	63	899	378	32 .55
30	24.00	415	86	917	359	27 .87
40	29.47	409	2208	936	341	23 .19
50	34.94	403	30	955	323	18 .51
60	40.42	396	52	973	304	13 .83
70	45.89	390	75	991	286	9 .15
80	51.37	383	97	7010	268	4 .47
90	56.84	377	2319	029	249	27 59 .79
1800	173 2.31	371	41	048	231	55 .10
1810	7.79	364	63	066	212	50 .42
20	13.26	358	85	085	194	45 .73
30	18.74	352	2408	103	175	41 .05
40	24.21	346	30	122	157	36 .96
50	29.68	340	53	141	139	31 .68
60	35.16	333	75	159	120	26 .99
70	40.63	327	97	177	102	22 .31
80	46.11	321	2519	196	084	17 .62
90	51.58	315	41	215	065	12 .94
1900	57.06	309	64	234	046	8 .26
1910	174 2.53	302	86	252	028	3 .58
20	8.01	296	2608	271	010	26 58 .89
30	13.49	290	31	289	1991	54 .21
40	18.97	284	53	308	972	49 .52
50	24.45	278	75	327	954	44 .84
60	29.93	272	97	345	935	40 .15
70	35.41	266	2719	364	917	35 .47
80	40.89	260	42	383	898	30 .78
90	46.37	254	64	401	880	26 .10
2000	174 51.85	248	86	420	862	21 .41

TABLICA VIII a.

(Str. 447).

Wartości precesji rocznej P_α i P_δ według Newcomb'a dla epoki 1925.0.

α	0 ^h 0 ^m	0 ^h 20 ^m	0 ^h 40 ^m	1 ^h 0 ^m	1 ^h 20 ^m	1 ^h 40 ^m	2 ^h 0 ^m	δ
δ	12 ^h 0 ^m	11 ^h 40 ^m	11 ^h 20 ^m	11 ^h 0 ^m	10 ^h 40 ^m	10 ^h 20 ^m	10 ^h 0 ^m	
+ 0°	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	— 0°
5		083	093	103	113	122	131	5
10		093	114	134	153	172	191	10
15		104	135	165	195	224	252	15
20		115	157	199	239	278	316	20
25		127	181	234	286	336	384	25
30		140	207	272	337	399	459	30
34		151	229	306	381	454	523	34
38		164	254	343	430	514	595	38
42		178	282	384	484	581	674	42
46		193	313	431	546	658	765	46
50		212	349	485	617	746	869	50
52		222	370	515	658	796	928	52
54		233	392	549	702	850	992	54
56		245	417	586	750	910	+ 4 .063	56
58		259	444	626	804	977	142	58
60		275	475	672	864	+ 4 .051	230	60
62		292	509	723	932	135	329	62
64		312	549	782	+ 4 .010	231	443	64
66		334	594	850	099	341	574	66
68		361	647	929	204	471	727	68
70		393	710	+ 4 .023	329	624	909	70
72		431	787	137	479	811	+ 5 .129	72
74		479	882	279	667	+ 5 .042	403	74
75		507	939	364	778	180	566	75
76		540	+ 4 .003	460	906	338	753	76
77		577	078	571	+ 5 .052	519	967	77
78		621	165	700	223	730	+ 6 .216	78
79		672	267	852	424	978	510	79
+ 80°	+ 3 ^s .073	+ 3 .733	+ 4 .389	+ 5 .034	+ 5 .665	+ 6 .276	+ 6 .862	— 80
δ	24 ^h 0 ^m	23 ^h 40 ^m	23 ^h 20 ^m	23 ^h 0 ^m	22 ^h 40 ^m	22 ^h 20 ^m	22 ^h 0 ^m	α
	12 ⁿ 0 ^m	12 ^h 20 ^m	12 ^h 40 ^m	13 ^h 0 ^m	13 ^h 20 ^m	13 ^h 40 ^m	14 ^h 0 ^m	
$P_\delta \pm 1$	20".045	19".968	19".740	19".362	18".836	18".167	17".359	$\pm P_\delta$

1) P_δ odnosi się do wartości α , podanych u góry i u dołu tablicy w dwóch wierszach: do wyższego z tych wierszy odnosi się znak +, do niższego znak —.

TABLICA VIII *a*.

(Ciąg dalszy).

α	$2h\ 20m$	$2h\ 40m$	$3h\ 0m$	$3h\ 20m$	$3h\ 40m$	$4h\ 0m$	
δ	$9h\ 40m$	$9h\ 20m$	$9h\ 0m$	$8h\ 40m$	$8h\ 20m$	$8h\ 0m$	
$+ 0^\circ$	$+ 3^s.073$	$+ 3^s.073$	$+ 3^s.073$	$+ 3^s.073$	$+ 3^s.073$	$+ 3^s.073$	$- 0^\circ$
5	140	148	155	162	169	174	5
10	208	224	239	253	266	277	10
15	278	303	326	347	366	383	15
20	252	385	417	445	471	494	20
25	430	473	513	550	583	612	25
30	515	569	618	664	705	741	30
34	590	652	710	763	811	853	34
38	672	744	811	873	928	977	38
42	763	846	924	995	$+ 4\ .058$	$+ 4\ .115$	42
46	867	962	$+ 4\ .051$	$+ 4\ .133$	206	271	46
50	986	$+ 4\ .096$	199	293	377	452	50
52	$+ 4\ .054$	172	282	383	474	554	52
54	128	255	373	482	579	666	54
56	209	346	474	590	696	789	56
58	299	447	585	711	825	925	58
60	400	561	709	846	969	$+ 5\ .077$	60
62	514	688	850	998	$+ 5\ .132$	249	62
65	644	834	$+ 5\ .010$	$+ 5\ .172$	317	446	64
66	794	$+ 5\ .002$	195	372	531	672	66
68	970	199	412	606	782	937	68
70	$+ 5\ .179$	433	669	885	$+ 6\ .080$	$+ 6\ .252$	70
72	432	716	981	$+ 6\ .223$	442	635	72
74	746	$+ 6\ .068$	$+ 6\ .368$	643	890	$+ 7\ .109$	74
75	933	279	599	893	$+ 7\ .158$	392	75
76	147	518	863	$+ 7\ .179$	463	714	76
77	$+ 6\ .393$	793	$+ 7\ .166$	507	814	$+ 8\ .086$	77
78	679	$+ 7\ .114$	518	889	$+ 8\ .223$	517	78
79	$+ 7\ .016$	492	934	$+ 8\ .339$	704	$+ 9\ .027$	79
$+ 80^\circ$	$+ 7\ .420$	$+ 7\ .944$	$+ 8\ .432$	$+ 8\ .878$	$+ 9\ .281$	$+ 9\ .636$	$- 80^\circ$
	$21h\ 40m$	$21h\ 20m$	$21h\ 0m$	$20h\ 40m$	$20h\ 20m$	$20h\ 0m$	δ
	$14h\ 20m$	$14h\ 40m$	$15h\ 0m$	$15h\ 20m$	$15h\ 40m$	$16h\ 0m$	α
$P_\delta \pm 1)$	16".420	15".355	14".174	12".884	11".497	10".022	$\pm P_\delta$

TABLICA VIII *a*.

(Ciąg dalszy).

α	4 ^h 20 ^m	4 ^h 40 ^m	5 ^h 0 ^m	5 ^h 20 ^m	5 ^h 40 ^m	6 ^h 0 ^m	
δ	7 ^h 40 ^m	7 ^h 20 ^m	7 ^h 0 ^m	6 ^h 40 ^m	6 ^h 20 ^m	6 ^h 0 ^m	
+ 0°	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	— 0°
5	179	183	186	188	189	190	5
10	286	294	300	305	308	308	10
15	397	409	419	425	430	431	15
20	514	530	543	552	557	559	20
25	638	658	675	686	694	696	25
30	772	798	818	833	841	844	30
34	890	920	943	960	971	974	34
38	+ 4 .019	+ 4 .054	+ 4 .081	+ 4 .101	+ 4 .113	+ 4 .117	38
42	163	203	235	258	271	276	42
46	327	373	409	436	451	457	46
50	516	569	611	641	659	665	50
52	623	680	725	757	777	783	52
54	740	801	849	884	905	912	54
56	868	943	986	+ 5 .024	+ 5 .046	+ 5 .054	56
58	+ 5 .011	+ 5 .082	+ 5 .138	179	203	211	58
60	171	248	308	352	379	387	60
62	351	434	500	548	576	586	62
64	556	647	719	771	802	813	64
66	793	893	972	+ 6 .029	+ 6 .063	+ 6 .074	66
68	+ 6 .070	+ 6 .181	+ 6 .268	330	368	380	68
70	400	523	619	689	730	744	70
72	800	938	+ 7 .045	+ 7 .123	+ 7 .170	+ 7 .186	72
74	+ 7 .296	+ 7 .452	574	662	715	733	74
75	593	759	890	984	+ 8 .041	+ 8 .060	75
76	930	+ 8 .109	+ 8 .250	+ 8 .351	412	432	76
77	+ 8 .319	512	664	773	839	861	77
78	771	981	+ 9 .145	+ 9 .264	+ 9 .336	+ 9 .360	78
79	+ 9 .303	+ 9 .533	173	843	921	948	79
+ 80°	+ 9 .941	+ 10 .194	+ 10 .393	+ 10 .536	+ 10 .623	+ 10 .651	— 80°
	19 ^h 40 ^m	19 ^h 20 ^m	19 ^h 0 ^m	18 ^h 40 ^m	18 ^h 20 ^m	18 ^h 0 ^m	δ
	16 ^h 20 ^m	16 ^h 40 ^m	17 ^h 0 ^m	17 ^h 20 ^m	17 ^h 40 ^m	18 ^h 0 ^m	α
$P_0^{\pm 1}$	8".471	6".856	5".188	3".481	1".747	0".000	$\pm P_0$

TABLICA VIII a.

(Dalszy ciąg).

α δ	12 ^h 0 ^m 24 ^h 0 ^m	12 ^h 20 ^m 23 ^h 40 ^m	12 ^h 40 ^m 23 ^h 20 ^m	13 ^h 0 ^m 23 ^h 0 ^m	13 ^h 20 ^m 22 ^h 40 ^m	13 ^h 40 ^m 22 ^h 20 ^m	δ
+ 0°	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	— 0°
5		063	052	043	033	023	5
10		052	032	012	+ 2 .992	+ 2 .973	10
15		042	011	+ 2 .980	950	921	15
20		030	+ 2 .988	947	906	867	20
25		018	965	912	860	809	25
30		006	939	873	809	747	30
34		+ 2 .994	916	840	765	692	34
38		982	892	803	716	632	38
42		968	864	761	661	564	42
46		952	833	715	600	488	46
50		934	796	661	528	400	50
52		924	776	630	488	350	52
54		912	753	597	444	295	54
56		900	729	560	395	236	56
58		886	701	519	341	169	58
60		871	671	474	281	095	60
62		854	636	422	213	011	62
64		834	597	364	136	+ 1 .915	64
66		811	552	296	046	804	66
68		785	498	217	+ 1 .942	675	68
70		753	435	123	817	521	70
72		714	359	008	666	335	72
74		667	264	+ 1 .867	479	103	74
75		638	207	782	367	+ 0 .965	75
76		606	142	686	240	808	76
77		568	068	575	093	627	77
78		525	+ 1 .981	446	+ 0 .923	416	78
79		474	879	293	791	+ 0 .167	79
+ 80°	+ 3 ^s .073	+ 2 .412	+ 1 .757	+ 1 .111	+ 0 .481	— 0 .130	— 80°
δ	12 ^h 0 ^m 0 ^h 0 ^m	11 ^h 40 ^m 0 ^h 20 ^m	11 ^h 20 ^m 0 ^h 40 ^m	11 ^h 0 ^m 1 ^h 0 ^m	10 ^h 40 ^m 1 ^h 20 ^m	10 ^h 20 ^m 1 ^h 40 ^m	α
$P_{\delta} \pm ^{\circ}$	20''.045	19''.968	19''.740	19''.362	18''.836	18''.167	$\pm P_{\delta}$

TABLICA VIII a.

(Dalszy ciąg).

α	14 ^h 0 ^m	14 ^h 20 ^m	14 ^h 40 ^m	15 ^h 0 ^m	15 ^h 20 ^m	15 ^h 40 ^m	
δ	22 ^h 0 ^m	21 ^h 40 ^m	21 ^h 20 ^m	21 ^h 0 ^m	20 ^h 40 ^m	20 ^h 20 ^m	
+ 0	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	— 0 ^o
5	014	006	+ 2 .998	+ 2 .990	+ 2 .983	+ 2 .977	5
10	2 .955	+ 2 .938	921	906	892	880	10
15	894	867	843	820	799	779	15
20	830	794	760	729	700	674	20
25	761	715	672	632	595	562	25
30	687	630	577	527	482	441	30
34	622	556	493	435	382	334	34
38	551	474	402	335	273	218	38
42	471	383	299	222	151	087	42
46	381	279	183	094	013	+ 1 .939	46
50	277	159	049	+ 1 .947	+ 1 .853	768	50
52	218	092	+ 1 .973	863	763	672	52
54	153	018	891	772	664	566	54
56	082	+ 1 .936	799	672	555	450	56
58	004	846	698	561	435	321	58
60	1 .916	745	585	436	300	177	60
62	816	631	457	296	148	014	62
64	703	501	312	135	+ 0 .974	+ 0 .828	64
66	572	351	144	0 .950	774	614	66
68	419	176	+ 0 .947	734	539	363	68
70	237	+ 0 .967	713	477	260	065	70
72	016	714	429	+ 0 .165	— 0 .078	— 0 .296	72
74	0 .743	400	+ 0 .077	— 0 .223	497	745	74
75	579	+ 0 .212	— 0 .133	454	748	— 1 .012	75
76	393	— 0 .001	372	717	— 1 .033	318	76
77	+ 0 .179	247	648	— 1 .020	361	669	77
78	— 0 .071	533	968	373	743	— 2 .077	78
79	.365	870	— 1 .346	788	— 2 .194	559	79
+ 80 ^o	— 0 .717	— 1 .274	— 1 .799	— 2 .286	— 2 .733	— 3 .135	— 80 ^o
	10 ^h 0 ^m	9 ^h 40 ^m	9 ^h 20 ^m	9 ^h 0 ^m	8 ^h 40 ^m	8 ^h 20 ^m	δ
	2 ^h 0 ^m	2 ^h 20 ^m	2 ^h 40 ^m	3 ^h 0 ^m	3 ^h 20 ^m	3 ^h 40 ^m	α
$P_{\delta} \pm ^1)$	17 ^h .359	16 ^h .420	15 ^h .355	14 ^h .174	12 ^h .884	11 ^h .497	$\pm P_{\delta}$

TABLICA VIII *a*.

(Dalszy ciąg).

α	16 ^h 0 ^m	16 ^h 20 ^m	16 ^h 40 ^m	17 ^h 0 ^m	17 ^h 20 ^m	17 ^h 40 ^m	18 ^h 0 ^m	
δ	20 ^h 0 ^m	19 ^h 40 ^m	19 ^h 20 ^m	19 ^h 0 ^m	18 ^h 40 ^m	18 ^h 20 ^m	18 ^h 0 ^m	
+ 0	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	+ 3 ^s .073	— 0°
5	+ 2 .972	+ 2 .967	+ 2 .963	+ 2 .960	+ 2 .958	+ 2 .956	+ 2 .956	5
10	869	859	851	845	841	838	837	10
15	763	748	736	727	720	716	715	15
20	652	632	616	603	594	588	586	20
25	533	508	487	471	459	452	450	25
30	405	374	348	328	313	304	301	30
34	292	256	226	202	185	175	171	34
38	169	127	092	064	045	033	029	38
42	031	+ 1 .982	+ 1 .942	+ 1 .910	+ 1 .888	+ 1 .874	+ 1 .870	42
46	+ 1 .874	819	772	736	710	694	689	46
50	694	629	576	535	504	486	480	50
52	592	523	466	421	388	369	362	52
54	480	406	344	296	261	241	234	54
56	357	277	211	159	122	099	092	56
58	221	135	063	007	+ 0 .967	+ 0 .942	+ 0 .934	58
60	068	+ 0 .975	898	+ 0 .837	793	767	758	60
62	+ 0 .896	795	711	645	598	569	560	62
64	700	590	498	426	375	343	333	64
66	473	353	252	174	117	083	071	66
68	208	075	— 0 .035	— 0 .122	— 0 .184	— 0 .222	— 0 .235	68
70	— 0 .107	— 0 .255	377	474	543	585	599	70
72	489	655	792	900	977	— 1 .024	— 1 .040	72
74	963	— 1 .151	— 1 .306	— 1 .429	— 1 .517	570	587	74
75	— 1 .246	447	614	744	839	895	914	75
76	569	785	964	— 2 .104	— 2 .205	— 2 .266	— 2 .287	76
77	940	— 2 .173	— 2 .366	518	627	693	715	77
78	— 2 .372	625	835	— 3 .000	— 3 .119	— 3 .190	— 3 .214	78
79	881	— 3 .158	— 3 .387	568	697	776	802	79
+ 80°	— 3 .490	— 3 .796	— 4 .049	— 4 .248	— 4 .391	— 4 .477	— 4 .506	— 80°
	8 ^h 0 ^m	7 ^h 40 ^m	7 ^h 20 ^m	7 ^h 0 ^m	6 ^h 40 ^m	6 ^h 20 ^m	6 ^h 0 ^m	δ
	4 ^h 0 ^m	4 ^h 20 ^m	4 ^h 40 ^m	5 ^h 0 ^m	5 ^h 20 ^m	5 ^h 40 ^m	6 ^h 0 ^m	α
$P_0 \pm 1$	10".022	8".471	6".856	5".188	3".481	1".747	0".00	$\pm P_0$

TABLICA VIII b.

(Str. 447).

Zmiana wartości P_α i P_δ na 100 lat.

α		$\pm 0^\circ 1)$	$\pm 30^\circ$	$\pm 50^\circ$	$\pm 70^\circ$	$\pm 80^\circ$	ΔP_δ
0^h	24^h	$+0^s.002$	$+0^s.002$	$+0^s.002$	$+0^s.002$	$+0^s.002$	$-0''.009$
2	22	2	2	2	1	0	-0.007
4	20	2	2	1	1	-0.001	-0.004
6	18	2	1	1	0	1	0.000
8	16	2	2	1	1	1	$+0.004$
10	14	2	2	2	1	0	$+0.007$
12	12	2	2	2	2	$+0.002$	$+0.009$
14	10	2	2	2	3	3	$+0.007$
16	8	2	2	2	3	5	$+0.004$
18	6	2	2	3	3	5	0.000
20	4	2	2	2	3	5	-0.004
22	2	2	2	2	3	3	-0.007
24	0	$+0^s.002$	$+0^s.002$	$+0^s.002$	$+0^s.002$	$+0^s.002$	$-0''.009$

¹⁾ Znakowi $+$ odpowiada wartość α w pierwszej kolumnie, znakowi $-$ odpowiada wartość α w drugiej kolumnie.

TABLICA IX.

(Str. 518).

Dzień okresu juljańskiego.

I		II		III			
Rok	D. j.	R. d.	L. d.	D. gr.	L. d.	D. gr.	L. d.
1700	2342032	1	365	I 1	306	VII 1	122
20	49337	2	730	11	316	11	132
40	56642	3	1095	21	326	21	142
60	63947	4	1461	II 1	337	VIII 1	153
80	71252	5	1826	11	347	11	163
1800	78556	6	2191	21	357	21	173
20	85861	7	2556	III 1	0	IX 1	184
40	93166	8	2922	11	10	11	194
60	2400471	9	3287	21	20	21	204
80	07776	10	3652	IV 1	31	X 1	214
1900	15080	11	4017	11	41	11	224
20	22385	12	4383	21	51	21	234
40	29690	13	4748	V 1	61	XI 1	245
60	36995	14	5113	11	71	11	255
80	44300	15	5478	21	81	21	265
2000	51605	16	5844	VI 1	92	XII 1	275
20	58910	17	6209	11	102	11	285
40	66215	18	6574	21	112	21	295
60	73520	19	6939				
80	80825						
2100	2488129						

TABLICA X.

(Str. 527).

Południk normalny.

Rok	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
180	— 0.0936	— 0.3358	— 0.5780	— 0.8202	— 0.0625	— 0.3047	— 0.5469	— 0.7891	— 0.0313	— 0.2735
181	— 0.5157	— 0.7579	— 0.0001	— 0.2423	— 0.4846	— 0.7268	+ 0.0310	— 0.2112	— 0.4534	— 0.6956
182	+ 0.0622	— 0.1800	— 0.4222	— 0.6644	+ 0.0934	— 0.1488	— 0.3910	— 0.6332	+ 0.1246	— 0.1176
183	— 0.3598	— 0.6020	+ 0.1558	— 0.0864	— 0.3286	— 0.5708	+ 0.1870	— 0.0552	— 0.2974	— 0.5396
184	+ 0.2182	— 0.0240	— 0.2662	— 0.5084	+ 0.2494	+ 0.0072	— 0.2350	— 0.4772	+ 0.2806	+ 0.0384
185	— 0.2038	— 0.4460	+ 0.3118	+ 0.0696	— 0.1726	— 0.4148	+ 0.3430	+ 0.1008	— 0.1414	— 0.3836
186	+ 0.3742	+ 0.1320	— 0.1102	— 0.3524	+ 0.4054	+ 0.1632	— 0.0790	— 0.3212	+ 0.4366	+ 0.1944
187	— 0.0478	— 0.2900	+ 0.4678	+ 0.2256	— 0.0166	— 0.2588	+ 0.4990	+ 0.2568	+ 0.0146	— 0.2276
188	+ 0.5302	+ 0.2880	+ 0.0458	— 0.1964	+ 0.5614	+ 0.3192	+ 0.0770	— 0.1652	+ 0.5926	+ 0.3504
189	+ 0.1082	— 0.1340	+ 0.6238	+ 0.3816	+ 0.1394	— 0.1028	+ 0.6550	+ 0.4128	+ 0.1706	— 0.0716
190	— 0.3138	— 0.5560	— 0.7982	— 1.0404	— 0.2826	0.5248	— 0.7670	— 1.0092	— 0.2514	— 0.4936
191	— 0.7358	— 0.9780	— 0.2202	— 0.4624	— 0.7046	— 0.9468	— 0.1890	— 0.4311	— 0.6733	— 0.9155
192	— 0.1577	— 0.3999	— 0.6421	— 0.8843	— 0.1265	— 0.3687	— 0.6109	— 0.8531	— 0.0953	— 0.3375
193	— 0.5797	— 0.8219	— 0.0641	— 0.3063	— 0.5485	— 0.7907	— 0.0329	— 0.2751	— 0.5173	— 0.7595
194	— 0.0017	— 0.2439	— 0.4861	— 0.7283	+ 0.0295	— 0.2127	— 0.4549	— 0.6971	+ 0.0607	— 0.1815
195	— 0.4237	— 0.6659	+ 0.0919	— 0.1503	— 0.3925	— 0.6347	+ 0.1231	— 0.1190	— 0.3612	— 0.6034
196	+ 0.1544	— 0.0878	— 0.3300	— 0.5722	+ 0.1856	— 0.0566	— 0.2988	— 0.5410	+ 0.2168	— 0.0254
197	— 0.2676	— 0.5098	+ 0.2481	+ 0.0059	— 0.2363	— 0.4785	+ 0.2793	+ 0.0371	— 0.2051	— 0.4473
198	+ 0.3105	+ 0.0683	— 0.1739	— 0.4161	+ 0.3417	+ 0.0995	— 0.1427	— 0.3849	+ 0.3729	+ 0.1307
199	— 0.1115	— 0.3537	+ 0.4042	+ 0.1620	— 0.0802	— 0.3224	+ 0.4354	+ 0.1922	— 0.0490	— 0.2912

TABLICA XI.

(Str. 527).

Ułamki roku zwrotnikowego.

Dzień miesiąca		Styczeń ¹⁾	Luty ¹⁾	Dzień mies.	Marzec	Kwiecień	Maj	Czerwiec	Lipiec	Sierpień	Wrzesień	Październik	Listopad	Grudzień
R. z.	R. p.													
0	1	0.0000	0.0849	1	0.1643	0.2492	0.3313	0.4162	0.4983	0.5832	0.6681	0.7502	0.8351	0.9172
1	2	027	876	2	670	519	340	189	0.5010	859	708	529	378	199
2	3	055	904	3	698	546	368	216	038	887	736	557	405	227
3	4	082	931	4	725	574	395	244	065	914	763	584	433	254
4	5	110	958	5	752	601	422	271	093	941	790	611	460	282
5	6	137	986	6	780	628	450	299	120	969	817	639	488	309
6	7	164	0.1013	7	807	656	477	326	147	996	845	666	515	336
7	8	192	040	8	834	683	504	353	175	0.6023	872	694	542	364
8	9	219	068	9	862	711	532	381	202	051	900	721	570	391
9	10	246	095	10	889	738	559	408	229	078	927	748	597	418
10	11	274	123	11	917	765	587	435	257	106	954	776	624	446
11	12	301	150	12	944	793	614	463	284	133	982	803	652	473
12	13	329	177	13	971	820	641	490	312	160	0.7009	830	679	501
13	14	356	205	14	999	847	669	518	339	188	036	858	707	528
14	15	383	232	15	0.2026	875	696	545	366	215	064	885	734	555
15	16	411	259	16	053	902	724	572	394	242	091	913	761	583
16	17	438	287	17	081	930	751	600	421	270	119	940	789	610
17	18	466	314	18	108	957	778	627	448	297	146	967	816	637
18	19	493	342	19	136	984	806	654	476	325	173	995	843	665
19	20	520	369	20	163	0.3012	833	682	503	352	201	0.8022	871	692
20	21	548	396	21	190	039	860	709	531	379	228	049	898	720
21	22	575	424	22	218	066	888	737	558	407	255	077	926	747
22	23	602	451	23	245	094	915	764	585	434	283	104	953	774
23	24	630	478	24	272	121	943	791	613	461	310	132	980	802
24	25	657	506	25	300	149	970	819	640	489	338	159	0.9003	829
25	26	684	533	26	327	176	997	846	667	516	365	186	035	856
26	27	712	561	27	355	203	0.4025	873	695	544	392	214	062	884
27	28	739	588	28	382	231	052	901	722	571	420	241	090	911
28	29	767	0.1615	29	409	258	079	928	750	598	447	268	117	939
29	30	794		30	437	0.3285	107	0.4956	777	626	0.7474	296	0.9145	966
30	31	821		31	0.2464		0.4134		0.5804	0.6653		0.8323		0.9993
31		0.0849												

¹⁾ Dla stycznia i lutego należy stosować dni pierwszej kolumny w latach zwyczajnych, a dni drugiej kolumny w latach przestępnych.

TABLICA XII a.

(Str. 531).

Zamiana czasu średniego na gwiazdowy.

<i>is</i>	<i>0^m</i>			<i>1^m</i>	<i>2^m</i>	<i>3^m</i>	<i>is</i>	<i>i</i>	<i>is</i>	<i>i</i>
<i>0^s</i>	<i>0^h</i>	<i>0^m</i>	<i>0^s</i>	<i>6^h 5^m 15^s</i>	<i>12^h 10^m 29^s</i>	<i>18^h 15^m 44^s</i>	<i>0^s.00</i>	<i>0^m 0^s</i>	<i>0^s.50</i>	<i>3^m 3^s</i>
1	0	6	5	6 11 20	12 16 34	18 21 49	0 .01	0 4	0 .51	3 6
2	0	12	10	6 17 25	12 22 40	18 27 54	0 .02	0 7	0 .52	3 10
3	0	18	16	6 23 30	12 28 45	18 33 59	0 .03	0 11	0 .53	3 14
4	0	24	21	6 29 36	12 34 50	18 40 5	0 .04	0 15	0 .54	3 17
5	0	30	26	6 35 41	12 40 55	18 46 10	0 .05	0 18	0 .55	3 21
6	0	36	31	6 41 46	12 47 1	18 52 15	0 .06	0 22	0 .56	3 25
7	0	42	37	6 47 51	12 53 6	18 58 20	0 .07	0 26	0 .57	3 28
8	0	48	42	6 53 56	12 59 11	19 4 26	0 .08	0 29	0 .58	3 32
9	0	54	47	7 0 2	13 5 16	19 10 31	0 .09	0 33	0 .59	3 35
10	1	0	52	7 6 7	13 11 21	19 16 36	0 .10	0 37	0 .60	3 39
11	1	6	58	7 12 12	13 17 27	19 22 41	0 .11	0 40	0 .61	3 43
12	1	13	3	7 18 17	13 23 32	19 28 47	0 .12	0 44	0 .62	3 46
13	1	19	8	7 24 23	13 29 37	19 34 52	0 .13	0 47	0 .63	3 50
14	1	25	13	7 30 28	13 35 42	19 40 57	0 .14	0 51	0 .64	3 54
15	1	31	19	7 36 33	13 41 48	19 47 2	0 .15	0 55	0 .65	3 57
16	1	37	24	7 42 38	13 47 53	19 53 7	0 .16	0 58	0 .66	4 1
17	1	43	29	7 48 44	13 53 58	19 59 13	0 .17	1 2	0 .67	4 5
18	1	49	34	7 54 49	14 0 3	20 5 18	0 .18	1 6	0 .68	4 8
19	1	55	40	8 0 54	14 6 9	20 11 23	0 .19	1 9	0 .69	4 12
20	2	1	45	8 6 59	14 12 14	20 17 28	0 .20	1 13	0 .70	4 16
21	2	7	50	8 13 5	14 18 19	20 23 34	0 .21	1 17	0 .71	4 19
22	2	13	55	8 19 10	14 24 24	20 29 39	0 .22	1 20	0 .72	4 23
23	2	20	1	8 25 15	14 30 30	20 35 44	0 .23	1 24	0 .73	4 27
24	2	26	6	8 31 20	14 36 35	20 41 49	0 .24	1 28	0 .74	4 30
25	2	32	11	8 37 26	14 42 40	20 47 55	0 .25	1 31	0 .75	4 34
26	2	38	16	8 43 31	14 48 45	20 54 0	0 .26	1 35	0 .76	4 38
27	2	44	22	8 49 36	14 54 51	21 0 5	0 .27	1 39	0 .77	4 41
28	2	50	27	8 55 41	15 0 56	21 6 10	0 .28	1 42	0 .78	4 45
29	2	56	32	9 1 47	15 7 1	21 12 16	0 .29	1 46	0 .79	4 49
30	3	2	37	9 7 52	15 13 6	21 18 21	0 .30	1 50	0 .80	4 52
31	3	8	43	9 13 57	15 19 12	21 24 26	0 .31	1 53	0 .81	4 56
32	3	14	48	9 20 2	15 25 17	21 30 31	0 .32	1 57	0 .82	4 59
33	3	20	53	9 26 8	15 31 22	21 36 37	0 .33	2 1	0 .83	5 3
34	3	26	58	9 32 13	15 37 27	21 42 42	0 .34	2 4	0 .84	5 7
35	3	33	3	9 38 18	15 43 33	21 48 47	0 .35	2 8	0 .85	5 10
36	3	39	9	9 44 23	15 49 38	21 54 52	0 .36	2 11	0 .86	5 14
37	3	45	14	9 50 28	15 55 43	22 0 58	0 .37	2 15	0 .87	5 18
38	3	51	19	9 56 34	16 1 48	22 7 3	0 .38	2 19	0 .88	5 21
39	3	57	24	10 2 39	16 7 54	22 13 8	0 .39	2 22	0 .89	5 25
40	4	3	30	10 8 44	16 13 59	22 19 13	0 .40	2 26	0 .90	5 29
41	4	9	35	10 14 49	16 20 4	22 25 19	0 .41	2 30	0 .91	5 32
42	4	15	40	10 20 55	16 26 9	22 31 24	0 .42	2 33	0 .92	5 36
43	4	21	45	10 27 0	16 32 14	22 37 29	0 .43	2 37	0 .93	5 40
44	4	27	51	10 33 5	16 38 20	22 43 34	0 .44	2 41	0 .94	5 43
45	4	33	56	10 39 10	16 44 25	22 49 39	0 .45	2 44	0 .95	5 47
46	4	40	1	10 45 16	16 50 30	22 55 45	0 .46	2 48	0 .96	5 51
47	4	46	6	10 51 21	16 56 35	23 1 50	0 .47	2 52	0 .97	5 54
48	4	52	12	10 57 26	17 2 41	23 7 55	0 .48	2 55	0 .98	5 58
49	4	58	17	11 3 31	17 8 46	23 14 0	0 .49	2 59	0 .99	6 2
50	5	4	22	11 9 37	17 14 51	23 20 6	0 .50	3 3	1 .00	6 5
51	5	10	27	11 15 42	17 20 56	23 26 11				
52	5	16	33	11 21 47	17 27 2	23 32 16				
53	5	22	38	11 27 52	17 33 7	23 38 21				
54	5	28	43	11 33 58	17 39 12	23 44 27				
55	5	34	48	11 40 3	17 45 17	23 50 32				
56	5	40	54	11 46 8	17 51 23	23 56 37				
57	5	46	59	11 52 13	17 57 28	24 2 42				
58	5	53	4	11 58 19	18 3 33	24 8 48				
59	5	59	9	12 4 24	18 9 38	24 14 53				

TABLICA XII b.

(Str. 531).

Zamiana czasu gwiazdowego na średni.

i°	0^m			1^m			2^m			3^m			i°	i	i°	i
0^s	0^h	0^m	0^s	0^h	0^m	15^s	12^h	12^m	29^s	18^h	18^m	44^s	$0^s .00$	$0^m 0^s$	$0^s .50$	$3^m 3^s$
1	0	6	6	6	12	21	12	18	35	18	24	50	0 .01	0 4	0 .51	3 7
2	0	12	12	6	18	27	12	24	42	18	30	56	0 .02	0 7	0 .52	3 10
3	0	18	19	6	24	33	12	30	48	18	37	2	0 .03	0 11	0 .53	3 14
4	0	24	25	6	30	40	12	36	54	18	43	9	0 .04	0 15	0 .54	3 18
5	0	30	31	6	36	46	12	43	0	18	49	15	0 .05	0 18	0 .55	3 21
6	0	36	37	6	42	52	12	49	7	18	55	21	0 .06	0 22	0 .56	3 25
7	0	42	44	6	48	58	12	55	13	19	1	27	0 .07	0 26	0 .57	3 29
8	0	48	50	6	55	4	13	1	19	19	7	34	0 .08	0 29	0 .58	3 32
9	0	54	56	7	1	11	13	7	25	19	13	40	0 .09	0 33	0 .59	3 36
10	1	1	2	7	7	17	13	13	31	19	19	46	0 .10	0 37	0 .60	3 40
11	1	7	9	7	13	23	13	19	38	19	25	52	0 .11	0 40	0 .61	3 43
12	1	13	15	7	19	29	13	25	44	19	31	59	0 .12	0 44	0 .62	3 47
13	1	19	21	7	25	36	13	31	50	19	38	5	0 .13	0 48	0 .63	3 51
14	1	25	27	7	31	42	13	37	56	19	44	11	0 .14	0 51	0 .64	3 54
15	1	31	34	7	37	48	13	44	3	19	50	17	0 .15	0 55	0 .65	3 58
16	1	37	50	7	43	54	13	50	9	19	56	23	0 .16	0 59	0 .66	4 2
17	1	43	46	7	50	1	13	56	15	20	2	30	0 .17	1 2	0 .67	4 5
18	1	49	52	7	56	7	14	2	21	20	8	36	0 .18	1 6	0 .68	4 9
19	1	55	59	8	2	13	14	8	28	20	14	42	0 .19	1 10	0 .69	4 13
20	2	2	5	8	8	19	14	14	34	20	20	48	0 .20	1 13	0 .70	4 16
21	2	8	11	8	14	26	14	20	40	20	26	55	0 .21	1 17	0 .71	4 20
22	2	14	17	8	20	32	14	26	46	20	33	1	0 .22	1 21	0 .72	4 24
23	2	20	24	8	26	38	14	32	53	20	39	7	0 .23	1 24	0 .73	4 27
24	2	26	30	8	32	44	14	38	59	20	45	13	0 .24	1 28	0 .74	4 31
25	2	32	36	8	38	51	14	45	5	20	51	20	0 .25	1 32	0 .75	4 35
26	2	38	42	8	44	57	14	51	11	20	57	26	0 .26	1 35	0 .76	4 38
27	2	44	49	8	51	3	14	57	18	21	3	32	0 .27	1 39	0 .77	4 42
28	2	50	55	8	57	9	15	3	24	21	9	38	0 .28	1 43	0 .78	4 46
29	2	57	1	9	3	16	15	9	30	21	15	45	0 .29	1 46	0 .79	4 49
30	3	3	7	9	9	22	15	15	36	21	21	51	0 .30	1 50	0 .80	4 53
31	3	9	14	9	15	28	15	21	43	21	27	57	0 .31	1 54	0 .81	4 57
32	3	15	20	9	21	34	15	27	49	21	34	3	0 .32	1 57	0 .82	5 0
33	3	21	26	9	27	41	15	33	55	21	40	10	0 .33	2 1	0 .83	5 4
34	3	27	32	9	33	47	15	40	1	21	46	16	0 .34	2 5	0 .84	5 8
35	3	33	38	9	39	53	15	46	8	21	52	22	0 .35	2 8	0 .85	5 11
36	3	39	45	9	45	59	15	52	14	21	58	28	0 .36	2 12	0 .86	5 15
37	3	45	51	9	52	5	15	58	20	22	4	35	0 .37	2 16	0 .87	5 19
38	3	51	57	9	58	12	16	4	26	22	10	41	0 .38	2 19	0 .88	5 22
39	3	58	3	10	4	18	16	10	33	22	16	47	0 .39	2 23	0 .89	5 26
40	4	4	10	10	10	24	16	16	39	22	22	53	0 .40	2 26	0 .90	5 30
41	4	10	16	10	16	30	16	22	45	22	29	0	0 .41	2 30	0 .91	5 33
42	4	16	22	10	22	37	16	28	51	22	35	6	0 .42	2 34	0 .92	5 37
43	4	22	28	10	28	43	16	34	57	22	41	12	0 .43	2 37	0 .93	5 41
44	4	28	35	10	34	49	16	41	4	22	47	18	0 .44	2 41	0 .94	5 44
45	4	34	41	10	40	55	16	47	10	22	53	24	0 .45	2 45	0 .95	5 48
46	4	40	47	10	47	2	16	53	16	22	59	31	0 .46	2 48	0 .96	5 52
47	4	46	53	10	53	8	16	59	22	23	5	37	0 .47	2 52	0 .97	5 55
48	4	53	0	10	59	14	17	5	29	23	11	43	0 .48	2 56	0 .98	5 59
49	4	59	6	11	5	20	17	11	35	23	17	49	0 .49	2 59	0 .99	6 3
50	5	5	12	11	11	27	17	17	41	23	23	56	0 .50	3 3	1 .00	6 6
51	5	11	18	11	17	33	17	23	47	23	30	2				
52	5	17	25	11	23	39	17	29	54	23	36	8				
53	5	23	31	11	29	45	17	36	0	23	42	14				
54	5	29	37	11	35	52	17	42	6	23	48	21				
55	5	35	43	11	41	58	17	48	12	23	54	27				
56	5	41	50	11	48	4	17	54	19	24	0	33				
57	5	47	56	11	54	10	18	0	25	24	6	39				
58	5	54	2	12	0	17	18	6	31	24	12	46				
59	6	0	8	12	6	23	18	12	37	24	18	52				

SPROSTOWANIA ZAUWAŻONYCH OMYŁEK I UZUPEŁNIENIA.

Na str. 48 liczba wzoru zamiast $(26'')$ ma być $(26''')$.

Na str. 182 na końcu ustępu 41 dodać: Z pośród kół godzinnych wyróżniają się koło godzinne, przechodzące przez punkty równonocne, i koło godzinne, przechodzące przez bieguny ekliptyki i stanowiska słońca. Pierwsze nazywa się *kolurem równonocy*, drugie *kolurem stanowisk*.

Do str. 185. Podana tu definicja średniego słońca jest nieścisła; odnosi się ona do t. zw. drugiego średniego słońca, które jednocześnie z t. zw. pierwszym średnim słońcem przechodzi przez punkt wiosenny. Ścisła definicja średniego słońca znajduje się na str. 500.

Na str. 193 w wierszu 12 od dołu zamiast $-\varepsilon$ ma być $+\varepsilon$.

Na str. 213 w wierszu 4 od dołu zamiast $(m - 1)$ ma być $(m + 1)$.

Na str. 264 w wierszu 12 od góry zamiast $U_3 = 9$ ma być $U_3 = 0$.

Na str. 345 trzykrotnie wydrukowano 206205 zamiast 206265.

WYKAZ ALFABETYCZNY NAZWISK, PRZEDMIOTÓW I SKRÓCEN.

(Liczby oznaczają strony).

Aberacja 344—378, dzienna 371—374, 378, 563, 577,
— gwiazdowa 345—356, — miesięczna 371, — planetarna 374—377,
— roczna 359—371, 378, 563—566, 577, — wiekowa 356—359.
ABN 552. Absorbcja atmosferyczna 225. A. E. = *The American Ephe-*
meris and Nautical Almanac 550, 551, 553. A. G. = *Astronomische*
Gesellschaft. A. G. Kasan Nr. 2545 449—451. *Almagest* 546. *Alma-*
naque Nautico de San Fernando 552. Almukantar 116. A. N. = *Astro-*
nomische Nachrichten. Analogje Napiera 8, 426. Andoyer 411,
412, 433. Annus fictus 523. Antares 153—156. Antiapeks 330.
Apeks ruchu rocznego ziemi 359, — układu słonecznego 330, 333, 356.
Argelander 548, 549. *The Astronomical Journal* 409. Astrono-
mische Gesellschaft 548, 549, 551. *Astronomische Nachrichten* 224, 549.
Astronomisches Rechen Institut 550. Atlasy nieba 549, 550. Atmosfera
ziemiska 208—220, 223—226, 260, 262, 265—267. Auwers 547,
548, 552. Azymut 98, 119, 298.

Backlund 552. B. A. J. = *Berliner Astronomisches Jahr-*
buch. Ball 229, 275, 276. Banachiewicz 189, 519. Baran 177.
Bauschinger 263, 561, 577. B. D. = *Bonner Durchmusterung*.
Berliner Astronomisches Jahrbuch 336, 412—414, 416, 550—553, 566.
Bessel 52, 82, 83, 235, 273—275, 523, 548, 549, 561, 570.
BH 552. Bidschhof 275. Bieguny ekliptyki 158, 416—433, — jedno-
imienne 4, — świata 116, 117, 416—433, — wielkiego koła 2,
— ziemskie 78, 111, 112, 487—492. Biuro długości 550. Bieżnięta 177.
Błąd kolimacji 378. *Bonner Durchmusterung* 548, 550. Boss 547,
548, 552. Bradley 273. Bremiker 275. Brown 552. *Bulletin*
Astronomique 411, 413. Bureau des Longitudes 550. Byk 177.

Całki 49—56. Campbell 333. α *Centauri* 343. τ *Ceti* 566—570.
Chandler 112, 491. Chauvenet 52, 274. Chronologiczne ery
188, 517. Chrześcijańska era 188. Clarke 82, 83. Conférence inter-
nationale des étoiles fondamentales 551. Congrès international des

éphémérides astronomiques 551—553. *C. T.* = *Connaissance des Temps* 550—553. Cykl Metona 517, — rzymski 517, — słoneczny 517. Czas aberacji 344, — aberacji słońca 376, — cywilny 188, — gwiazdowy 161, 528—531, — lokalny 161, — miejscowy 161, — słoneczny prawdziwy 182, 496, 532, 533, — słoneczny średni 185, 500, 532, 533, — środkowo-europejski 543, — słoneczny 543, — uniwersalny 189, — ustawowy 543. Czynniki paralaktyczne 318.

Data 186. Deklinacja 120. Delambre 289, —'a wzory 8, 168, 171, 439. Delaunay 551. Depresja horyzontu 107—111. Dies reductus 527. Długość astronomiczna 159, — dnia i nocy 194—197, 286, — doby prawdziwej słonecznej 543, 544, — geograficzna 79, 112, 134, 135, — noworoczna słońca 520, — wahadła sekundowego 93, 574. Doba 502, — gwiazdowa 136, 183, 492—495, 506, 507, 574, — słoneczna prawdziwa 182—184, 500, 501, — słoneczna średnia 184, 185, 501, 502, 506, 507, 574, — stellarna 492—494. Dołowanie 141. Downing 447. Drakoniczny miesiąc 514, 515, 576. Dygresja 139, — największa 143—145, 194. Dyspersja atmosferyczna 223. Dzień 180, — prawdziwy słoneczny 538, — zredukowany 527. Dzienny ruch nieba 113—156.

Efemerydy 550—553. Ekliptyka 157—160, 162—171, 174—182, 379—383, 386—394, 416—423. Elementy drogi ziemi 379, — sferoidy ziemskiej 81—83, 574. Elipsy na sferoidzie 93—105, e—a aberacyjna 367—368, 374, — nutacyjna 422, 423, — paralaktyczna 328—330, 368, 369, — południkowa ziemi 82, 83. Epoka 485, 546. Era chronologiczna 188, 517, — chrześcijańska 188, — nowa astronomiczna 519. Eudoxus 546. Euler 49, 104.

Fabritiusa wzory 26—28, 38, 123, 124, 165, 467, 563. Fraunhofera linje 223. Fundamentalne gwiazdy 547, 548, 551, 552, — katalogi 547, 551, 552, — systemy 547—552.

Gaillot 551. Gauss 335, 363. Gay-Lussac 233. Geocentryczne spółrzedne 300, g—a szerokość 83—87. Geodezyjny układ 297—301. Geograficzne spółrzedne 78—81. Główne koło 2, g—y południk 80. Górowanie 141. Greenwich'ski południk 80, 550. Gregorjański kalendarz 187, 522, 523. Gwiazdozbiory zwierzyńca 177. Gwiazdy fundamentalne 547, 548, 551, 552, — stałe 157. Gylden 235.

Hansen 414, 552. Harvardzka klasyfikacja 224. Hayford 82, 83, 92, 574, 575. Helmholtz 82, 83, 93, 574. Hill 552. Hipparch 546. Horyzont astronomiczny 115, — fizyczny 106—111, — geodezyjny 298. Hough 552.

Interpolacja 54—69. Ivory 236.

Jednoimienne bieguny 4. Jednostka planetarna 315, 575, — świetlna 575, — czasu 485—516. Juljański kalendarz 187, 520—522, — okres 516—519, 595, — e stulecie 188.

Kalendarz gregorjański i juljański 187, 520—523. Kamieński 224. Kardynalne punkty ekliptyki 179. Katalogi gwiazd 546—548. Kąt godzinny 120, 134, — paralaktyczny 123, — pozycyjny 39, — sferyczny 2. Kepler 376. Kimura 112, 491. Klasyfikacja harwardzka 224. Kolury 600. Koło główne 2, 15. — a biegunowe 182, — godzinne 117, — równoległe 1, — szerokości 158, — wierzchołkowe 116, 297, — wysokości 119, — zboczeń 117. Komety 157. Konferencje paryskie 80, 363, 411, 413, 551—553. Kontrolne wzory 29. Koziorożec 177, — a zwrotnik 181. Kramp 52. Krzywizna południka i pierwszego wertykułu 103. Księżyc 157, 315, 319, 324, 511—516, 576. Kulminacje 139—142, 189—194.

Lagrange 58, 59, 253. Laplace 253. Leverrier 551. Lew 117. Linja południkowa 118, — węzłów 167. Locus fictus 335. Ludolpha liczba 573. *α Lyrae* 153—156.

Łuk dzienny i nocny 146, 180, 195, 196.

Mapy nieba 549, 550. Mariotte 233. Masa księżyca 320, 577, — słońca 576. Maskelyne 552. Miejsce pozorne 294, 348, 562, 570, — prawdziwe 294, 554—562, — urojone 335, 336. Miesiąc 511, — anomalistyczny 513, 514, 576, — draconiczny 514, 515, 576, — gwiazdowy 512, 513, 576, — smoczy 514, 515, 576, — synodyczny 324, 516, 576, — zwrotnikowy 324, 512, 513, 576. Mimośród elips południkowych 82, 83, — drogi ziemskiej 361—383. Moduł logarytmów zwykłych 574. Motus paralacticus, peculiaris, proprius 472, 473.

N. A. = *The Nautical Almanac*. Nachylenie koła 4. Nadir 115. Naokołobiegunowe gwiazdy 148, 149, — słońce 196. Napiera analogje 8, 426. *Nautical Almanac* 550, 551, — Office 550, 553. — of Wasihngton 550. Neptun 374. Newcomb 320, 409, 411—414, 547, 548, 551, 552. Newton 233—236, 379, — a wzór interpolacyjny 61—69, 73—77, 578. Niedźwiadek 177. Niepokój powietrza 211. Noc 180, 195—197. Normalny południk 526, 596. Nowa era astronomiczna 519. Nutacja 393, 394, 413—416, 419—423, 463—470, 551, 556—562, 566—570, 577.

Obniżenie horyzontu 107. Obwód koła 574. Odległość księżyca 314, 315, 320, 576, — słońca 314, 315, 575, — zenitalna 119, 297, 298. Okres juljański 516—519, 595, — nutacji 423, 576, — obiegu perigeum księżyca 514, — obiegu słońca 179, 183, 502—511, — obiegu węzłów

księżycy 515, 576, — obrotu ziemi 136, 137, 486—495, 506, 507, — precesji 419, 423, — wyrównania 187, 521—523. Oppolzer 52. Oś koła 1, 3, — ziemską 78, 111, 112, 383, 384, — świata 116, 417—423.

Panna 177. Paralaksa 294—343, — dzienna 297—319, 334—342, — księżycy 314, 315, 320, 336—340, 576, — miesięczna 319—324, 340, 341, — roczna 324—330, 343, 563, 568, — słońca 315, 340—342, 575, — wiekowa 330—334. Paralaktyczne czynniki 318, 319, —y kąt 123, — ruch 295, 330—334, 472, 473, — trójkąt 123. Parsek 345, 575. Pas zwierzyńcowy (zodjakałny) 177. Perturbacje 379, 384. Pickering 552. Pierwszy wertykał 103—105, —e koło wierzchołkowe 151—153, 155, 156. Pion 84. Planetarna jednostka 315, 575, — aberacja 374—377. Planety 155, 189, 315, 374, 376. Platona rok 419. Pochyłość ekliptyki 159, 386—394, 407—413, 562, 577. Południe pozorne 496, — prawdziwe 182, 496, — średnie 185, 500. Południk astronomiczny 117, — geograficzny 79, 103, — główny 80, 135, 136, — greenwich'ski 80, 550, 551, — momentalny 488, — normalny 526, 596, — roczników 550, 551, — średni 488, — zerowy 80. Poprawka czasu gwiazdowego 530, — południa 538—542. Pory roku 180. Pozioma płaszczyzna 105. Poziom 105, 298, — morza 105. Poziomowy układ 116, 121—124, 298. Pozycyjny kąt 39, —e współrzędne 38—43, 124, 165, 166. Półkole początkowe 15. Północ 182. Precesja 393, 394, 401—413, 416—419, 423—463, 467—469, 554—556, 577, 588 595. Prędkość punktu powierzchni ziemi 372, — światła 344, 363, 574, — ziemi 361—363, 370, 371, 575. Promień koła 573, — krzywizny elipsy 98, 105, — księżycy 577, — słońca 576, — widnokregu 110, 111, 292, 293, — widzenia 294, — wzdłuż sferoidy ziemskiej 87—92, 574. Prosty kierunek 120. Przejścia przez pierwsze koło wierzchołkowe 151—153, 155, 156, 194. Przekroje sferoidy ziemskiej 93—105. Przedpołudnie i popołudnie 542, 543. Przyspieszenie ciężkości 93, 574. Punkty Barana i Wagi 177, — główne horyzontu 118, — kardynalne ekliptyki 179, 180, — p. przysłoneczny ziemi 366, 565, — przyziemny księżycy 513, 514, — przyziemny słońca 504, 510, 511, —y równonocne 180, — wschodu i zachodu 145, 196, 197. Ptolemeusz 546. Pułkowo 553.

Rachuba czasu 182—189, 485—545. **Radau** 52, 229, 236, 265, 275, 551. **Rak 177**, —a zwrotnik 181, 182. **Rayleigh** 262. **Redukcja gwiazd** 546—570, — na miejsce pozorne (ad locum apparentem) 562—570, — na miejsce prawdziwe (ad locum verum) 556—562, 566—571, — na miejsce średnie (ad locum medium) 554—556, — na miejsce urojone (ad locum fictum) 335, 336, — słońca na równik 497, — na różne systemy fundamentalne 547, 548, — na środek słońca 326—330, — na środek ziemi 300. **Redukcyjne rachunki** 554, — ta-

blice 416, 554, — wielkości 416, 554, 560. Refrakcja 110, 111, 207—293, — na horyzoncie 265, — prawdziwa 212, 265—272, — średnia 212, 260—265, — i tablice 272—277, 582—587. Rektascensja 160. Roczniki astronomiczne 550—553. Rok 502, — anomalistyczny 504, 505, 510, 575, — astronomiczny 525, — Bessla 523—527, — gregorjański 187, 188, — gwiazdowy 503, 504, 507, 508, 575, — juljański 187, 188, 574, — kalendarzowy 186—188, 520—523, — Platona 419, — światła 345, 575, — ustalony 523, 524, — zwrotnikowy 179, 183, 186—188, 503, 504, 509, 510, 575. Równanie czasu 186, 500, 532—538, — refrakcji 216—221, — środka 498, — światła 345, 370, 371, 377, 575. Równik świata 117, — prawdziwy i średni 383—386, — ziemski 78. Równoległe koła 1. Równoleżniki 118, — geograficzne 79, — ekliptyki 158. Równonoc prawdziwa i średnia 386—388. Równonocne punkty 180. Różnicowe i różniczkowe wzory 22—26, 123, 164. Różniczkowanie liczbowe 69—73, 77. Ruch dzienny nieba 113—156, — kątowny 475, — paralaktyczny 295, 472, 473, — pozorny 294, — precesyjny i nutacyjny biegunów 416—423, — radialny (w promieniu widzenia) 475, — swoisty 473, — własny 471—484, 555. Ryby 177.

Sampson 553. *α Scorpii* 153—156. Scaliger 517. Schönfeld 550. Schram 518. Siła łamiąca gazu 226. Słońca aberacja roczna 369—371, — kulminacje 189—194, — największe dygresje i przejścia przez koło wierzchołkowe 194, — paralaksa 315, 340—342, 575, — ruch 157—206, — spólrzędne ekliptyczne i równikowe 176—179, — szerokość geocentryczna 324, — wielkość kątowa promienia 551, 576, — wschód i zachód 194—203. Słońce ś ednie 500. Smoczy miesiąc p. drakoniczny. Snellius 214. Spłaszczenie ziemi 82, 83, 551, 574. Spodek 115. Spólrzędne ekliptyczne 159, 162—166, — geocentryczne 300, — geograficzne 79, 111, 487—490, — godzinne 120—124, 316—319, — poziomowe 119—124, 311—315, — pozorne i prawdziwe 207, 294, 348, 554—570, — pozycyjne 38—43, 120, 121, 124, 165, 166, — równikowe 160—166, 176—179, — sferyczne 13—38, średnie 423—451, 554—556, — topocentryczne 300. Środek dnia 538—543. Stała aberacji dziennej 372, 577, — a. rocznej 363, 551, 577, — a. wiekowej 356, — nutacji 416, 551, 577, — paralaksy księżyca 315, 576, — p. słońca 315, 364, 551, 575, — precesji 412, 413, 577, — refrakcji 225, 262, 263, 577. Stanowiska słońca 181. Strefowe czasy 543, — katalogi 548. Strefy klimatyczne 182. Strzelec 177. Stulecie juljańskie 188, 412. Światła prędkość 344, 363, 574. Synodyczny miesiąc 324, 516, 576. Systemy fundamentalne 547, 548. Szereg Taylora 58. Szeregi 44—49, 394—401. Szerokość astronomiczna 159, — geocentryczna 83—87, 574, — geograficzna 79, — słońca 324.

Taylor a szereg 58. Topocentryczne spólrzędne 300. Trójkąty sferyczne 4—13. Trygonometria sferyczna 1—13. Turyn 552. Tysiąclecie zwrotnikowe 411, 412.

Układ ekliptyczny 159, 162—166, — geodezyjny poziomy 298, — godzinny 118—121, — planetarny 330—334, — poziomy 115, 116, 119—124, — równikowy 160—166, — sferyczny 15. Uniwersalny czas 189. α *Ursae maioris* 153—155. α *Ursae minoris* 447—449. β *Ursae minoris* 449—451.

Variatio saecularis 445. **V**ega 275. **V**ital 275.

Waga 177. Wahadło sekundowe 93, 574. Wahania szerokości i długości geograficznej 111, 112, 487—492. Warjacja wiekowa 445. **W**ega 153. Węzły 167—176, 452—463, — księżyc 414—416, 419—423, 514, 515, 576. Wertykał pierwszy 103. Widnokrąg 106, 110, 111, 292, 293. Wierzchołek 115. Wierzchołkowe koła 116. **W**odnik 177. **W**schód i zachód 145—151, 194—197, 284—286. **W**steczny kierunek 120. **W**yrazy wiekowe 382, — trzeciej precesji 445. **W**yrownanie 187. **W**ysokość 119, — największa słońca i księżyca 203—206, — pozorna i prawdziwa 207. **W**ysokości koła 116. **W**zniesienie nad poziom morza 103. **W**znoszenie proste 160.

Zachód 145. **Z**asada logarytmów naturalnych 573. **Z**boczenie 120, 160. **Z**enit 115, — geocentryczny 297. **Z**enitalna odległość 119. **Z**naki zwierzyńca 177. **Z**odiakalny pas 177. **Z**wierzyńca gwiazdozbiory 177, 178. **Z**wrotniki 181, 182. **Z**wrotnikowy miesiąc, rok p. miesiąc, rok zwrotnikowy.
