17663
12 B
8/62.

LUDWIK ANTONI BIRKENMAJER

O POSTACIACH MASY PŁYNNEJ

OŻYWIONEJ JEDNOSTAJNYM RUCHEM OBROTOWYM

W KRAKOWIE
NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ
1913

56

LUDWIK ANTONI BIRKENMAJER

O POSTACIACH MASY PŁYNNEJ

OŻYWIONEJ JEDNOSTAJNYM RUCHEM OBROTOWYM

17.663 B
XII

W KRAKOWIE
NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ
1913

Osobne odbicie z T. LIII. Ser. A. Rozpraw Wydziału mat.-przyr.
Akademii Umiejętności w Krakowie.

32 16026
643333 III

B 1862

Biblioteka Śląska

21

P 533.51
II k

Kraków 1913. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem Józefa Filipowskiego.

O postaciach masy płynnej, ożywionej jednostajnym ruchem obrotowym.

Przez

Ludwika Antoniego Birkenmajera.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydziału matem.-przyrodniczego w dniu 3-im Marca 1913 roku.

I.

1. Ważna i ciekawa kwestya hydrokinetyki: znalezienia postaci, jaką przybrać może lub musi masa płynna, zostająca pod wpływem wzajemnej grawitacyi swych cząstek jakoteż pod wpływem siły odśrodkowej, wywołanej przez jednostajny obrót tej masy dokoła pewnej osi, zaprzątała uwagę fizyków i geometrów od lat przeszło dwustu. Nasamprzód Newton (1642—1727) w swych *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687), wiedziony bardziej intuicyą aniżeli ścisłą w tej mierze dedukcyą, wypowiedział mimochodem mniemanie, że szukanym tym kształtem może być elipsoida obrotowa spłaszczona[1]), wszelako dopiero Colin Maclau-

[1]) W Lib. III, part. 2, propos. 38, oraz wśród rozdziału *De fluxu et refluxu maris* (ibid.), z czem w związku pozostają hydrostatyczne rozważania w Lib. II, propos. 21—23, tudzież 42. Nie bez wpływu na dalsze wyjaśnianie się i ustalanie naukowych pod tym względem wyobrażeń były również genialne spekulacye Christiana Huyghens'a (1629—1695) odnoszące się do geometrycznej postaci ziemi, a zawierające wyraźne przewidywania elipsoidalnego jej kształtu. Myśli te i dedukcye wypowiedział jednak wielki uczony holenderski tylko przygodnie, w traktacie o podwójnem załamywaniu się światła (Leyde 1690), gdzie zapewne najmniej moglibyśmy tego oczekiwać. Traktat, o którym mówimy, wydany został bezimiennie p. t. Traité de la Lumière avec un Discours de la Cause de la Pesanteur, par C. H. D. Z. (= Christian Huyghens De Zuylichem), A Leyde 1690. Rzecz o sile ciężkości i o kształcie ziemi rozpoczyna się na str. 125.

rin (1698—1746), przeszło pół wieku później, udowodnił twierdzenie to z rygorem matematycznym w pięknej pracy (poświęconej innemu zresztą przedmiotowi): O przypływie i odpływie morza, uwieńczonej (w r. 1740) przez paryską Akademię Umiejętności [1]). W trudnej kwestyi przyciągania elipsoid praca ta zaznaczyła się niemal epokowo i zdaniem Lagrange'a „należy do najprzedniejszych dzieł w dziedzinie geometryi starożytnych, godna porównania z najgłębiej pomyślanymi utworami Archimedesa".

Nie mamy obecnie zamiaru ani potrzeby zapuszczania się w historyczne przedstawianie rozwoju badań geometrów owoczesnych i późniejszych, tudzież w ocenę ich usiłowań, zmierzających do lepszego poznania warunków równowagi rzeczonej elipsoidy i do wyśledzenia innych jeszcze możliwych postaci, różnych od powierzchni stopnia 2-go. Jako zagajenie wywodów, tworzących osnowę pracy niniejszej wystarczy, jeżeli streścimy jak najkrócej główniejsze zdobycze, które w tej mierze już osiągnięte zostały, a wskazawszy niedostatki dotychczasowych wyników, wymienimy najpilniejsze dezyderata w tej części fizyki teoretycznej.

W trzy lata po ogłoszeniu pracy Maclaurina wystąpił Alexis Clairaut (1713—1765) z przedziwną swoją teoryą kształtu ziemi, opartą na prawach hydrostatyki [2]). W traktacie tym, dającym więcej aniżeli tytuł jego oznajmia, oprócz słynnego twierdzenia, noszącego nazwę Clairaut'a, a będącego jedną z podstaw geodezyi nowoczesnej, znajdujemy — o ile nam wiadomo — po raz pierwszy wypowiedziane i dowiedzione zdanie, że dla małych chyżości kątowych, oprócz postaci elipsoidalnych, także sferoidy, na ogół biorąc zbliżone do kuli, krzywizną swą jednak różne od elipsoid, mogą być postaciami ruchomej równowagi płynu wirującego, znajdujemy wreszcie pierwszy zawiązek późniejszego, bardzo ważnego działu fizyki matematycznej, teoryi t. zw. funkcyj kulistych.

Następnie Laplace (1749—1827) w III-cim tomie swej Mechaniki niebios, zastąpiwszy syntetyczne wywody Maclaurina bardziej przejrzystym rachunkiem analitycznym, wykazał konieczność wprowadzenia pewnych ważnych ograniczeń odnoszących się do kształtu owej elipsoidy obrotowej spłaszczonej, a zarazem

---

[1]) De causa physica fluxus et refluxus maris, praca zamieszczona w Pièces de prix de l'Académie des Sciences de Paris, T. IV, pour 1740.

[2]) Théorie de la figure de la Terre, tirée des lois de l'hydrostatique, Paris 1743.

do kresu wzrastania chyżości kątowej w jej ruchu obrotowym. O tych ograniczeniach i zastrzeżeniach będzie sposobność mówienia poniżej szczegółowo. Już jednak D'Alembert (1717—1783) zauważył, czego Maclaurin nie dostrzegł, a Laplace nie docenił, że dla miernych wartości chyżości kątowej ω, nie jedna, ale dwie różne elipsoidy obrotowe spłaszczone mogą być postaciami kinetycznej równowagi masy płynnej jednostajnie wirującej [1]).

2. Spostrzeżenie to, samo przez się ciekawe, było ważne z tego względu, że po raz pierwszy zachwiało ustalające się wówczas poniekąd mniemanie, jakoby elipsoida obrotowa spłaszczona musiała być — przynajmniej dla mniejszych chyżości kątowych — jedyną rzekomo postacią równowagi kinetycznej. Okoliczność, że dla ω dążącego do zera jedna z owych dwóch elipsoid zbliża się — co można było przewidzieć — do kuli, natomiast druga staje się równocześnie w tym stopniu spłaszczoną, że przeradza się niemal w krążek kołowy, okoliczność ta była pewną niespodzianką dla geometrów. Miało jednak znowu przeminąć więcej aniżeli pół wieku, zanim kwestya ta postawiona została ogólnie i jasno sformułowana [2]) w następującem zadaniu: znaleźć wszystkie postaci, jakie przybrać może albo musi płyn nieściśliwy poddany jednostajnemu ruchowi obrotowemu, tudzież wzajemnemu przyciąganiu się jego cząstek, odbywającemu się według prawa Newtona.

W obecnym stanie nauki zadanie to przedstawia niezwyczajne trudności, które niewiele zmniejszają się nawet wówczas, gdybyśmy, zniewoleni koniecznością praktycznych zastosowań, zechcieli poprzestać na przybliżonych jego rozwiązaniach. Trudność, o której wspomnieliśmy, tkwi w tem przedewszystkiem, że, mając pewną powierzchnię, możliwie z kilku odrębnych części złożoną, ale skończoną i zamkniętą

$$f(x, y, z) = 0,$$

---

[1]) Najpierw mimochodem w traktacie p. t. Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, Paris 1744, bardziej szczegółowo jednak dopiero w pracy p. t. Sur l'attraction des sphéroides elliptiques, w Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris pour 1774. Co do szczegółów tu należących zob. F. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, T. II, Paris 1891, p. 87.

[2]) Przez Lorda Kelvina w r. 1868. Wyniki jego badań ukazały się dopiero w r. 1883. Zob. w ciągu dalszym pracy niniejszej.

a tworzącą osłonę zewnętrzną uważanej masy płynnej, nie potrafimy funkcyi potencyalnej U tej masy w danym punkcie (ξ, η, ζ) wyrazić w wyraźnej zależności od funkcyi f, pomimo pewności, jaką mamy, że taka zależność rzeczywiście istnieje. Nawet po wprowadzeniu ograniczeń tego rodzaju, jak uważanie punktu (ξ, η, ζ) za leżący na powierzchni f, co dla celu niniejszego zadania byłoby wystarczające, albo też apriorystyczne przyjęcie powierzchni f za obrotową — co wprawdzie jest możliwe, jednak bynajmniej nie jest konieczne — rzecz nie przedstawia się pomyślniej. I wówczas wszystkie znane metody rachunku całkowego, gdy zostaną użyte do przedstawienia funkcyi U w zawisłości wyraźnej od ogólnie pojętej funkcyi $f(x, y, z)$, okazują się bezsilne [1]).

3. Niedostępność omawianej kwestyi na drodze bezpośredniej stała się dla Laplace'a podnietą wstąpienia na drogę pośrednią, ażeby dotrzeć przynajmniej do przybliżonej wartości funkcyi potencyalnej U, oraz do zależnych od nich kształtów płynu nieściśliwego. Ten sposób pośredni polega na rozwinięciach — o ile one są zbieżne — zarówno funkcyi U jak i równania szukanego sferoidu na nieskończone szeregi postępujące według funkcyj kulistych [2]), funkcyj, które niebawem miały znaleźć wielorakie i płodne zastosowania w teoryi grawitacyi, w hydrodynamice, w nauce o elektryczności i magnetyzmie, wreszcie w teoryi sprężystości. Podwaliny teoryi tych funkcyj i rozwinięć rzucił był wielki geometra francuski w celu stosunkowo bardzo specyalnym, mianowicie zamierzając ją zastosować do badań kształtu ciał niebieskich: planet, a przedewszystkiem ziemi. Dla sferoidów o tak małem spłaszcze-

---

[1]) Zob. w tej mierze krótki artykuł p. Paul Appell p. t. Équation fonctionnelle pour l'équilibre relatif d'un liquide homogène en rotation sous l'attraction newtonienne de ses parties, w C. R. de l'Acad. d. Sc. Paris 1913, T. 156, p. 587—589. Równanie funkcyjne (1) lub (3), o którem autor w tytule nadmienia, pojawia się u niego w kształcie bardzo zawiłej całki podwójnej, w której budowę równanie powierzchni (tworzącej, czy też osłaniającej) wcale nie wchodzi. Jasną jest więc rzeczą, że w tej formie owo równanie funkcyjne nie może żadnego przynieść pożytku omawianemu tu problematowi hydrokinetyki. Przy tej sposobności wspomina autor, że poprzednio podał był (w *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, T. 30, ex 1910) w tym samym celu „une équation fonctionnelle dépendant d'une intégrale triple, ou même quadruple, et d'une fonction de trois variables".

[2]) Zwanych pierwotnie współczynnikami Laplace'a.

niu jak ziemia, wspomniane rozwinięcia zarówno funkcyi potencyalnej w punkcie uważanym, jak i poszukiwanego równania samego sferoidu, przedstawiają się w postaci szeregów nieskończonych, niewątpliwie zbieżnych, a to właśnie dzięki bardzo małemu odstępstwu sferoidu od kształtu kuli. Szeregi te, które bywają urywane zazwyczaj już na pierwszych dwóch wyrazach, doprowadzają wprawdzie do rozwiązań, które w konkretnych zastosowaniach mechaniki niebios do geodezyi praktycznej mogą być wystarczające, które jednak teoretyka niezupełnie zaspakajają. Dla możliwie istniejących postaci równowagi nie elipsoidalnych, a znacznie różniących się od kuli (np. pierścień itp.), ważność rzeczonych rozwinięć, wyprowadzonych w przypuszczeniu małego tylko odstępstwa od kształtu kulistego, staje się conajmniej wątpliwa, a zbieżność ich również niepewna. Był czas (około r. 1830), w którym zdawało się, że oprócz sferoidów bardzo mało różnych od kuli, które można otrzymać zbieżnem rozwinięciem funkcyi potencyalnej na szereg postępujący według funkcyj kulistych, tudzież oprócz elipsoidy obrotowej dowolnie spłaszczonej, niepodobna jest podać żadnej innej postaci analitycznie określonej skończonem równaniem

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

powierzchni, tworzącej zewnętrzną osłonę tej postaci. Nawet poważnym uczonym[1]) wydawało się „oczywistym postulatem“, jakoby wszelka postać płynu będącego w omawianej równowadze musiała być zawsze obrotową powierzchnią. Pod tym względem miały niebawem wyjść na jaw fakta zgoła nieoczekiwane.

4. W r. 1834 C. G. J. Jacobi, pobudzony, jak sam się wyraził, „duchem sprzeciwieństwa“, wpadł na pomysł wykonania w tej mierze próby z najprostszą zamkniętą powierzchnią nieobrotową i wykazał, że także elipsoida różnoosiowa, a więc nieobrotowa, może być powierzchnią równowagi kinetycznej[2]). To niespodziewane odkrycie ogłosił Jacobi w rodzaju wyzwania, skiero-

---

[1]) Tak m. i. utrzymywał Jean Plana, niepospolity matematyk i astronom, żyjący i działający w Turynie w 1-szej połowie XIX-go stulecia.

[2]) Najpierw p. t. Über die Figur des Gleichgewichts w 33-im tomie roczników Poggendorffa, z r. 1834 (p. 229—233), skąd dopełnione dowodem J. Liouville'a w Journal de l'Ecole Polytechnique, cahier XXIII, przypisek do str. 290, tudzież w Journal d. Math. pures et appliq., Vol. IV, p. 169 seq.

wanego do owoczesnych matematyków francuskich i podał rzecz bez uzasadnienia. Dowodów, zresztą niezmiernie prostych, możliwości istnienia także i takiej figury równowagi kinetycznej, dostarczyli wkrótce potem C. O. Meyer, J. Liouville, Archibald Smith i inni, a zarazem ustalili graniczne na chyżość kątową ω wartości, w których obrębie postać taka jest jeszcze możebna [1]).

W obydwóch razach, zarówno elipsoidy obrotowej spłaszczonej, jak i różnoosiowej, hydrokinetyczny problemat został swojego czasu postawiony w tym sensie, że dla danych: masy płynu, jego gęstości ϱ i chyżości kątowej ω ruchu obrotowego, żąda się wyznaczenia postaci (mimośrodów) i rozmiarów tej czy tamtej figury równowagi. Już jednak Laplace był świadom okoliczności, że omawiane hydrokinetyczne zjawiska przedstawiają się różnie, stosownie do tego, które ilości w zadaniu zechcielibyśmy uważać za dane określniki, a które za szukane, że w szczególności trudna kwestya trwałości lub nietrwałości tych figur równowagi [2]) jest w znacznym stopniu zależna także od wyboru owych określników. Interesująca, a dla Mechaniki niebios ważna odmiana tego samego zagadnienia, gdzie zamiast chyżości kątowej ω dany jest moment obrotu [3]) uważanej masy płynnej, którą to kwestyą La-

---

[1]) Szczegółowo, acz niewyczerpująco zbadał tę rzecz najpierw C. Otto Meyer w pracy p. t. De Aequilibrii formis ellipsoidicis, zamieszczonej w 24-tym tomie publikacyi A. L. Crelle, Journal f. die reine u. angew. Mathem. (Berlin 1842), p. 44—59; kilku potrzebnych tam jeszcze uzupełnień dostarczył Liouville w Journ. d. Math. pures et appl. (1), T. 16. Jego to sposób przedstawienia rzeczy przyjął Tisserand, l. c., II, pag. 97 seq. W przytoczonej pracy C. O. Meyera spotykamy się po raz pierwszy z badaniem związku, zachodzącego pomiędzy obydwiema postaciami równowagi, tj. pomiędzy elipsoidą Maclaurin'a a Jacobi'ego. Wykazał on m. i. (l. c., pag. 56), że dla chyżości kątowej ω, nie przekraczającej pewnej oznaczonej granicy, istnieje tylko jedna elipsoida nieobrotowa, a równocześnie z nią dwie różne obrotowe i że dla wzrastającego ω elipsoida Jacobi'ego zbliża się coraz bardziej do obrotowej. Natomiast usiłowania, zarówno C. O. Meyera (l. c., zaś pełniej w Monatsberichte der Berliner Akademie 1870, p. 116), jak i J. Plana (w Astron. Nachr., Altona 1853, p. 851 seq.), ustalenia funkcyjnego związku pomiędzy obydwoma mimośrodami elipsoidy nieobrotowej pozostały na razie bezowocne.

[2]) Wyraz *stability* angielskich autorów możnaby oddać wybornym terminem polskim: *trwałość* (równowagi), wzgl. *nietrwałość*. Zwrócenie uwagi na te wyrazy zawdzięczam prof. Wł. Natansonowi.

[3]) *Drehungsmoment* niemieckich, zaś *moment of momentum* angielskich autorów.

place również zajmował się szczegółowo, świadczy o tem dostatecznie. Jakoż istotnie, wobec tak postawionego zadania, odpada, jak wiadomo, zachodząca poprzednio kłopotliwa dwoistość rozwiązania: dla wszelkich bowiem wartości na masę płynu oraz na jego moment obrotu znajduje się zawsze jedna, i tylko jedna, postać elipsoidy obrotowej spłaszczonej [1]). Analogiczny problemat dla różnoosiowej elipsoidy Jacobi'ego, nie załatwiony, o ile nam wiadomo, dotychczas jeszcze w zupełności, doprowadziłby prawdopodobnie do takiego samego wyniku [2]).

Nie jest więc dla przebiegu poszukiwania rzeczą obojętną, która, oprócz masy płynu, z pośród trzech ilości: chyżość kątowa, mimośród, wreszcie moment obrotu, będzie z góry dana, a które dwie pozostałe będą szukane. Zarówno sam rachunek, jak i ostateczne jego wyniki, określające jakość równowagi, tudzież okoliczności jej towarzyszące przedstawiają się, stosownie do rozmaitości owego wyboru danych, bardzo odmiennie.

5. Po odkryciu Jacobi'ego poszukiwanie możliwych innych jeszcze postaci równowagi kinetycznej popadło na dłuższy czas w zastój i zaniedbanie. Co prawda, trudna i egzotyczna ta kwestya zajmowała zawsze, i przedtem i potem, nielicznych tylko badaczów. Ogłoszone w połowie ubiegłego stulecia interesujące prace E. de Roché'go [3]) i Vaughan'a [4]) o „księżycowych" postaciach równowagi i o trabantach głównych mas ciekłych, były przecież, skutkiem szczególniejszych warunków przyjętych apriorystycznie, już odleglejsze od właściwego problematu, pojętego w sensie pierwotnym, „klasycznym". Ta sama uwaga stosuje się w znacznej części także do prac L. Matthiessen'a (* 1830), o czem do pewnego

---

[1]) Zob. np. cytowane przez nas poniżej dzieło Sir W. Thomsona i P. G. Taita, T. I-go część 2-gą, § 776, także Tisserand, l. c., T. II, p. 95—96.

[2]) Piękna analiza Tisseranda, l. c., T. II, p. 105, pozostała niezupełnie wykończona. — Kwestyą tą zajmuje się również S. Krüger w niedostępnej dla mnie pracy p. t. Ellipsoidale Evenwichtsvormen etc., Leiden 1896, a znanej mi tylko z krótkiego streszczenia u Sir G. H. Darwina, The Tides and kindred phenomena in the Solar System, London 1898, pag. 301.

[3]) Mém. sur les figures ellipsoidales qui conviennent à l'équilibre d'une masse fluide sans mouvement de rotation, attirée par un point fixe très éloigné (L'Institut, Paris 1849, p. 187 et 193, 1850, p. 117 et 321).

[4]) On the form of satellites revolving at small distances from their primaries, Philos. Magaz. XX (1860), p. 409, XXI (1861), pag. 263.

stopnia świadczą same ich nagłówki [1]). Wprowadzone przez autora, gwoli ułatwienia rachunku, różne przypuszczenia, nie zawsze przekonywające, a przytem dość obce istocie przedmiotu, jakoteż wieloraka niejednostajność operowania przybliżeniami, musiały znacznie osłabić zaufanie do prawdziwości otrzymanych przez tego autora rezultatów [2]). W ogóle, jego spekulacye, można to wyrzec śmiało, nie zbliżyły nas do rozwiązania zasadniczej, a wyłącznie interesującej nas tutaj kwestyi hydrokinetycznej, w jej rozumieniu podanem przez nas powyżej (§ 2). Dopiero w r. 1883, po 15-tu, jak czytamy [3]), latach rozmyślań nad tym przedmiotem, Sir William

---

[1]) Über die Gleichgewichtsfiguren homogener, frei rotierender Flüssigkeiten. Kiel 1857. — Neue Untersuchungen über frei rotierende Flüssigkeiten, Schriften der Kieler Universität, 1859, nr. 15, rozszerzone w Annali di matematica pura ed applicata, pubblic. da Barnaba Tortolini, III (1869), p. 84—111. Dochodzi do wniosku prawdopodobnego istnienia pierścieniowatych figur równowagi bez sferoidu centralnego, czego zresztą już Laplace się domyślał To samo w VI-tym tomie Zeitschr. f. Math. u. Phys. (Leipzig 1861) wyd. przez O. Schlömilch'a (pag. 68), oraz X-tym tomie tej samej publikacyi (1865), p. 59—73, gdzie autor rozważa możliwość (słabo przez się uzasadnioną) układu kilku pierścieni współśrodkowych „kosmicznych". Tutaj wyznaje, że pobudką tych jego spekulacyj były z jednej strony rozmyślania nad układem pierścieni Saturna, a z drugiej znów wspomniane wyżej prace Vaughan'a. — Jeszcze bardziej mgliste wyobrażenia rozwija autor w ostatniej swej pracy p. t. Über die Gesetze der Bewegung u. Abplattung im Gleichgewichte befindlicher homogener Ellipsoide und die Veränderung derselben durch Expansion und Condensation, ogł. w XVI-tym tomie wspomnianej wyżej publikacyi (Leipzig 1871), p. 290—323, gdzie już elementa obce właściwej hydrokinetyce (np. temperatura, kurczliwość mas, promieniowanie itp.) zostały wprowadzone.

[2]) Wywody autora, odnoszące się do pierścienia z kołowym przekrojem, jako rzekomej figury ruchomej równowagi cieczy, zamieszczone w Schlömilcha Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. VI, p. 68, są najwidoczniej błędne. M. i. wynikałoby z nich niemożliwe twierdzenie, że postać pierścieniowata miałaby istnieć dla wszelkiej chyżości kątowej. — Do złudzeń należy zaliczyć mniemane istnienie walcowych postaci równowagi płynu, czy to pełnych, czy też wydrążonych (Mathiessen, Neue Untersuchungen, 1859, § 9 i § 11): tu i tam spełniają się wprawdzie równania hydrostatyczne, atoli pod warunkiem że walec jest nieskończenie długi. Por. Tisserand, l. c., II. pag. 107—108, także Jeans w Philos. Trans. *A*, Vol. 200 (1902), p. 67, gdzie obok cylindrycznych postaci rozważane są jeszcze zadania dwuwymiarowe.

[3]) Oto miejsce odnośne: „During the fifteen years which have passed since the publication of our first edition we have never abandoned the problem of the equilibrium of a finite mass of rotating incompressible fluid. Year after year, questions of the multiplicity of possible figures of equilibrium have been almost incessantly before us, and yet...", w dziele, które niżej cytujemy, na str. 332.

Thomson (* 1824, od r. 1892 lord Kelvin) ogłosił, bardzo treściwie i bez dowodów, szereg twierdzeń w tym przedmiocie[1]), gdzie m. i. zapowiada istnienie dwóch nowych postaci równowagi: pierścienia, tudzież masy rozpadłej na dwie części odrębne, sferoidalne albo pierścieniowate, gdzie jednak, poza tem, kwestya warunków trwałości lub nietrwałości równowagi elipsoid Maclaurina i Jacobi'ego zajmuje, już prawie wyłącznie, uwagę znakomitego profesora glasgowskiego. Na jakiej drodze zostały osiągnięte te rezultaty? o tem nie można dowiedzieć się z treści tej pracy: pod tym względem brak tam wskazówek. Wnosząc z krótkiego artykułu, pomieszczonego przezeń rok później w *Philosophical Transactions*, wydaje się pewnem, że posługiwał się rozwinięciami funkcyi U na szereg nieskończony postępujący według funkcyj kulistych. Co do jakości metody użytej w badaniu owych figur tyle różnych od kuli, jak np. pierścień, trudno dziś podać chociażby prawdopodobny domysł w tej mierze, te bowiem jego rachunki nie zostały, o ile nam wiadomo, dotychczas ogłoszone.

6. W dwa lata później (1885) Henryk Poincaré (1854—1912), któremu matematyka zarówno czysta jak i zastosowana tyle ma do zawdzięczenia, ogłosił obszerną pracę[2]) wywołaną najoczywiściej przez owe „rewelacye" lorda Kelvina[3]), a przedewszystkiem przez zamiar dostarczenia brakujących tam dowodów, tudzież wypracowania ogólniejszej metody, któraby mogła być zastosowana do wszelkich tego rodzaju zagadnień hydrokinetyki. W pracy tej znakomity uczony francuski, wyszedłszy z pewnych bardzo ogólnych pojęć mechaniki rozumowej, rozpatruje nasamprzód warunki ruchomej równowagi idealnego zbiorowiska odosobnionych

---

[1]) W dziele: W. Thomson and P. G. Tait, Treatise on Natural Philosophy, new Edition, Vol. I, Part II, Cambridge 1883, § 778", pag. 332—335, pod nagłówkiem: General problem of rotating liquid mass. — W pierwszem wydaniu tego dzieła (1868), jakoteż w niemieckiem jego tłómaczeniu (Braunschweig 1871—1874) dokonanem przez Helmholtza i Wertheima, niema jeszcze tych twierdzeń.

[2]) Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, w Acta mathematica, réd. par G. Mittag-Leffler, Vol. 7, Stockholm 1885, pag. 259—380.

[3]) A przyspieszoną, jak sam autor to oznajmia (l. c., pag. 261) przez ogłoszenie pracy p. Zofii Kowalewskiej (1850—1891) p. t. Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchungen über die Gestalt der Saturnringe, w peryodycznej publikacyi Astronomische Nachrichten, Bd. 111, Nr. 2643, Kiel 1885.

punktów materyalnych uważanych w pewnej oznaczonej mnogości skończonej. Następnie przypuszczając tę mnogość nieskończenie wielką, przechodzi do przypadku bardziej konkretnego, gdyż dającego się przystosować, jakkolwiek nie bez pewnego przymusu, do aktualnej kwestyi hydrokinetycznej, szkicuje metodę, która może służyć do wynajdywania równań powierzchni osłaniających masę płynną, będącą w równowadze; wreszcie podaje ogólne, lubo nie zawsze bezpieczne kryterya, rozstrzygające o jakości zachodzącej w danym razie równowagi: trwałej, obojętnej, albo nietrwałej. Umieszczone pod koniec szczegółowe badania wibracyi płynnej elipsoidy, wywołanych przez możliwe istnienie drobnych sił perturbujących, które prócz grawitacyi i siły odśrodkowej działają odkształcająco na masę płynu, badania te (pag. 347 seq.), lubo pozostające w pewnym związku z kwestyą trwałości lub nietrwałości form równowagi, są przecież już odleglejsze od właściwej kwestyi: znalezienia jakości owych postaci równowagi bez uczestnictwa jakichkolwiek sił wichrzących, a w zależności jedynie od każdorazowej chyżości kątowej.

Wszystkich tych głębokich poszukiwań dokonywa znakomity uczony za użyciem dość złożonego aparatu matematycznego, w którym, oprócz funkcyj kulistych, zwłaszcza krzywolinijne współrzędne Lamé'go ważniejszą odgrywają rolę (pag. 299 seq.). Otrzymane wyniki, pomimo wielorakich zastrzeżeń i ograniczeń nałożonych problematowi, bądź przez samą naturę przedmiotu, bądź też przez niepodobieństwo utrzymania całego poszukiwania trwale na stopniu zamierzonej pierwotnie ogólności, należą dziś niewątpliwie do najprzedniejszych zdobyczy, jakie hydrokinetyka teoretyczna może wykazać w kilku ostatnich dziesięcioleciach. Znaczna część podanych wpierw, bez dowodu, twierdzeń Thomson'owskich została w pracy tej Poincaré'go uzasadniona ścisłą dedukcyą; z pośród nich tylko niektóre pozostały i nadal jeszcze „w zawieszeniu". Po raz pierwszy, o ile nam wiadomo, zostały przy tej sposobności wprowadzone do nauki dwa ważne w tego rodzaju kwestyach pojęcia: postaci granicznej (*forme limite*), tudzież t. zw. przez autora: *figure*, wzgl. *équilibre de bifurcation*, co w polskim języku możnaby oddać przez wyrażenia: postać, wzgl. równowaga rozdwojenia.

Ta ważna i prawie podstawowa praca Poincaré'go stała się rychło podnietą do szczegółowych w tej mierze badań, angielskich

zwłaszcza uczonych, z pomiędzy których należy wymienić Dyson'a, Basset'a, Jeans'a, Bryan'a, Hough'a, a przedewszystkiem Sir George Howard Darwina. Wprawdzie, o ile nam wiadomo (nie wszystkie bowiem te prace były nam dostępne), nie wykryły one nowych, wpierw jeszcze nieznanych postaci równowagi kinetycznej, niemniej jednak uchyliły niektóre wątpliwości, tkwiące jeszcze w ogólnej teoryi, określiły dokładniej warunki równowagi i podały bezpieczniejsze niż wpierw znamiona trwałości lub nietrwałości poszczególnych figur, że pominiemy już odleglejsze temata takie, jak wytwarzanie się fal na powierzchni elipsoid ciekłych, wibracye mas płynnych, oraz inne jeszcze tego rodzaju zagadnienia hydrodynamiki teoretycznej [1]).

7. Pomimo to wszystko, sądzę że nie uchybię pamięci genialnego geometry francuskiego († 1912), ani też wartości przepięknej jego tu omawianej pracy, jeżeli zwrócę uwagę na nietajne samemu jej autorowi pewne w niej luki i nieścisłości. Oprócz nierzadkich tego rodzaju miejsc, zaznaczonych na różnych kartach rzetelnie już przez samego autora [2]), a polegających głównie na pro-

[1]) Z pośród dość licznych tych prac, a bliższych naszemu przedmiotowi, wymienimy tylko ważniejsze nowszych autorów: Dyson w Philos. Transact. of the R. Society, *A* 1893 (ring-figures). — Basset w Proceed. Cambr. Phil. Soc. VIII (1892), p. 23. — Bryan w Proceed. of the R. Soc., Vol. 47 (1890). — Hough w Philos. Transactions, *A*, Vol. 186 (1895) i Vol. 189 (1897). — G. H. Darwin, On Jacobi's Figure of Equilibrium w Proceed. of the R. Soc. of London, Vol. 41 (1886), pag. 319. — Tenże, Figures of Equilibrium of Rotating Masses of Fluid, w Phil. Trans., *A*, Vol. 178 (ex 1887). p. 379, czego uzupełnienia w tej samej publik., Vol. 198 (1901), p. 301, tudzież Vol. 200 (1902), p. 251—314). Zupełną niemal literaturę (sięgającą po r. 1890) podaje Tisserand, l. c., II, p. 80 seq. Wiele także pouczenia przynosi piękna książeczka: G. H. Darwin, The Tides and kindred phenomena in the Solar System, London 1898, gdzie w nader szczęśliwy sposób potrafił autor pogodzić przystępny wykład trudnego przedmiotu z rygorem matematycznym. Najbardziej interesujące nas tutaj miejsca znajdują się na str. 295, 297 (t. zw. *Hour-glass figure of Equilibrium*, ogólnie biorąc postaci nieobrotowe, nie różne od „gruszki" Poincaré'go), a wreszcie str. 299, gdzie znakomity uczony odpiera zarzut, jakoby tego rodzaju poszukiwania, które są „of a very abstract character, and seem at first sight remote from practical conclusions, yet they have some very interesting applications", co wielorako uzasadnia. Ostatnia jego krótka praca: Note on the Stability of Jacobi's Ellipsoid, w Proceed. of the Roy. Soc., Vol. 82, Lond. 1909, pag. 188—9, mimo, że jest raczej polemicznej treści (z p. Liapounoff) zawiera ważne wskazówki odnoszące się do uproszczenia metod badania trwałości figur równowagi.

[2]) Oraz wyrazy końcowe „...résultats de ce long mémoire et ...les lacunes que j'y ai laissé subsister" (l. c., pag. 380).

wadzeniu rachunku wyłącznie przybliżeniami, i to bardzo rozmaitemi, gdzie jeden raz już kwadraty pewnych „małych“ ilości bywają pomijane, drugi raz dopiero ich sześciany, albo nawet jeszcze wyższe potęgi, oprócz takich niejednostajności wątku metodycznego i rachunkowego, oraz słabszego miejscami rygoru rozumowania [1]), jest do zaznaczenia inna jeszcze okoliczność, która musi cośkolwiek osłabić nasze zaufanie do jednej części otrzymanych tam rezultatów. Takie skrupuły obudza operowanie, prawie wyłączne, nieskończonymi szeregami, których zbieżność nie tylko nie jest *a priori* widoczna, ale pozostawiona bez szczegółowego zbadania, wydaje się niekiedy dosyć problematyczną. Ograniczając się tutaj do jednego tylko, wielce znamiennego szczegółu, warto zaznaczyć, że w pracy p. Poincaré, z wyjątkiem dwóch znanych już dawniej postaci równowagi, mianowicie elipsoidy Maclaurina tudzież różnoosiowej Jacobi'ego, dla wszystkich innych rozpatrywanych tam powierzchni [2]). równania analityczne mogą być podane

---

[1]) Do takich miejsc m. i. należą: pag. 277, 279 i 285, gdzie autor w rozwinięciach swych opuszcza sześciany różnych małych ilości; str. 286 ilości r i R są „provisoirement regardés comme constants“, a jednak następnie odgrywają one rolę zmiennych. Że chyżość kątowa ω uważana jest tam stale za „très petite“, przypomina autor wielokrotnie (pag. 285 lin. 9; 287 lin. 20; 288 lin. 10 i 16; 289 lin. 14...), większemi jej wartościami nie zajmuje się (pag. 301). Obiedwie hypotezy (podane bez uzasadnienia) pag. 279 i 312 lin. 23, pierwsza o skończonej rzekomo mnogości dodatnich współczynników w pewnem nieskończonem rozwinięciu, druga o mało przekonywającej kompozycyi sił perturbacyjnych, wytwarzających drobne odkształcenie figury równowagi, nie wzniecają zaufania. Także rezultaty odnoszące się do specyalnych postaci równowagi, na str. 331, a zwłaszcza p. 346—347 (figura „gruszkowata“) są nieco wątpliwe, czego świadom jest autor skoro pisze: „Cela n'est vrai, bien entendu, qu'approximativement et en négligeant le carré de θ...“. Również na innem znów miejscu (p. 281—282) przyznaje: „Il y aurait bien des objections à faire, mais on ne saurait exiger en mécanique la même rigueur qu'en analyse pure pour ce qui concerne l'infini...“, a nieco dalej: „Je ne crois pas qu'on puisse le (tj. pewną wyrażoną tam hypotezę) mettre sérieusement en doute, malgré les objections dont je viens de parler...“ (l. c., pag. 282). Jakoż istotnie Schwarzschild wykazał (Jahrb. d. Sternwarte zu München, Bd. III, 1896), że podane przez P. znamiona trwałości równowagi nie całkiem są bezpieczne, do którego to zdania przyłącza się G. H. Darwin nadmieniając, iż „...Poincaré's proof of the stability of his figure is not absolutely conclusive“ (The Tides and kindred phenomena..., London 1898, p. 301).

[2]) Tak m. i. dla pierścienia, albo dla owej szczególniejszej postaci gruszkowatej.

tylko w kształcie szeregów nieskończonych, niewiadomo ażali zbieżnych, że więc, prócz tamtych dwóch, żadna inna postać nie została tam scharakteryzowana analitycznem równaniem w kształcie skończonym [1]).

8. Z najbardziej jednak zagadkowej strony przedstawia się omawiana tu kwestya skutkiem znacznego ograniczenia, jakiego doznaje we wszystkich dotychczasowych poszukiwaniach, przyjmowana tam, z konieczności, wartość na chyżość kątową ω ruchu obrotowego. Wszystko bowiem, co wiemy obecnie o jakościach owych postaci ruchomej równowagi, obowiązuje jedynie dla małych, a co najwyżej dla „umiarkowanych" tylko chyżości kątowych [2]). Postąpimy jednak stosowniej, jeżeli chwiejne tego rodzaju określenie napotykane u różnych autorów, zastąpimy ilościowem. Wiadomo, że, gdy wartość ilorazu

$$\omega^2 : 2\pi\varrho = \Omega,$$

gdzie ϱ oznacza gęstość płynu, jest mniejsza od 0·2247 [3]), istnieją dwie różne elipsoidy obrotowe spłaszczone, dogadzające warunkom kinetycznej równowagi; dalej że, gdy Ω jest równe wartości 0·2247, obiedwie rzeczone elipsoidy przeobrażają się w jedyną, że wreszcie, gdy Ω staje się większem od 0·2247, a więc za jeszcze dalszym wzrostem chyżości kątowej ω, równowaga płynu w postaci elipsoidy obrotowej spłaszczonej staje się niemożebną. Co się stanie z płynem natenczas, gdy, przy niezmienionej jego masie, chyżość kątowa ruchu obrotowego wzrośnie jeszcze bardziej, tak mianowi-

---

[1]) Druga praca p. Poincaré, odnosząca się do tego samego przedmiotu p. t. Figures d'équilibre d'une masse fluide, Paris (C. Naud, Editeur) 1903, różni się od wyżej omawianej układem, większą zwięzłością i nieco odmiennem przedstawieniem dedukcyj, nie przysparza jednak już nowych dla właściwej kwestyi szczegółów. Rzecz powstała z cyklu wykładów autora w Sorbonnie w ciągu 1900 r.

[2]) W pracy p. H. Poincaré chyżość ta jest stale przyjmowana jako „très petite". Zob. jeden z poprzednich przypisków. Jeszcze dalej posuwa się autor w drugiej swej pracy (1903), wyżej wspomnianej Figures d'équilibre etc., skoro kwadrat chyżości kątowej ω^2 uważa tam za ilość nieskończenie małą „...le carré de la vitesse de rotation ω^2 sera considéré comme un infiniment petit du premier ordre" (pag. 59). Takie przypuszczenie stawałoby się jednak prawie identycznem z nieruchomością masy płynu, z jego zupełną martwotą.

[3]) Dokładniej rzecz biorąc: mniejszą od 0·2246656. Zob. wywody nasze w ciągu dalszym.

cie, że Ω przekroczy podaną wyżej wartość 0·2247?, na zapytanie to nauka obecnie nie ma jeszcze odpowiedzi. Domysł, jaki mógłby się tutaj nasuwać, jakoby wobec niemożliwości elipsoidy obrotowej spłaszczonej, różnoosiowa elipsoida Jacobi'ego mogła być wówczas figurą równowagi, domysł taki, po bliższem rozpatrzeniu, okazuje się jednak nietrafnym, skoro, jak wiemy to dziś doskonale, sferoid ten już dla wartości na Ω przekraczających 0·18709 [1]), a więc jeszcze mniejszych od 0·2247, przestaje być możliwym. Sprawy nie uratuje również hypoteza, jakoby dla takich znaczniejszych na ω, a więc i na Ω wartości należało myśleć o równowadze w kształcie czy to pierścienia, czy też np. owej, wspomnianej już raz „gruszki", tak ta bowiem postać jak i tamta może, lubo nie musi wystąpić, według badań W. Thomson'a i H. Poincaré'go, tylko dla małych chyżości kątowych [2]). Tak więc wszystko, cokolwiek wiemy dotychczas w przedmiocie omawianych tu figur równowagi, wpada w obręb „miernych" na ω wartości, spełniających mianowicie podwójną nierówność

$$0 \leqq \Omega \leqq +0{\cdot}2247\,.$$

Dla chyżości kątowych przekraczających ten obszar zmienności ilorazu Ω, kwestya przedstawia się nieco zagadkowo. Nie dość bowiem, że nie potrafimy określić natury postaci, jaką przybrałby w takich warunkach płyn w stanie równowagi, ale nawet nie wiemy, czy w ogóle jaka jego postać będzie wówczas istniała i czy płyn, właśnie za sprawą nadmiernej siły odśrodkowej, nie porozrywałby się może na rozmaite części odrębne, albo nawet nie „rozpłynąłby się" może w nieskończonej przestrzeni wzdłuż pewnych oznaczonych kierunków, a pozbawiony w ten sposób osłony geometrycznie określonej, nie stawałby się w końcu masą niejako bez-

---

[1]) Wartość 0·18709 wynikła z obliczeń Liouville'a; tyleż znalazł Tisserand (l. c. II, p. 104). Częściej przytaczaną, acz mniej dokładną jest wartość 0·1872.

[2]) W. Thomson, l. c. § 778'', lit. *b, c* i *d*; H. Poincaré, l. c. (1885), pag. 289 i 345–347. Zwrócę uwagę, że to, co czytamy u Thomsona (ibid. lit. *b*), iż pierścień płynny może być figurą równowagi „*for large enough moment of momentum*" nie musi być następstwem znaczniejszej chyżości kątowej, skoro dla należycie wielkiej masy M moment obrotu (tj. ów Thomson'owski *moment of momentum*) $M\omega$ może przybrać wartość „dość znaczną" nawet wobec małych chyżości kątowych ω.

postaciową?... Takie to, dość skrajne i nieco mgliste wyobrażenia mogą nasuwać się mimowoli na myśl w tej ciemnej kwestyi hydrokinetyki. Za niemi zdawałaby się przemawiać m. i. niejaka analogia do „mechanizmu“ mgławicowej teoryi Laplace'a, albo też do znanych doświadczeń p. Plateau[1]) z masami ciekłemi wyjętemi z pod działania siły ciężkości. Analogia taka jest jednak tylko pozorna, a już co najmniej — niezupełna. Należy bowiem pamiętać, że Laplace'owska teorya jest, bądź co bądź, tylko hypotezą, uchylającą się z pod kontroli i rygoru rachunku, a w pewnych punktach nawet zawodną; że z drugiej strony w pięknych eksperymentach głośnego fizyka belgijskiego ważną odgrywała rolę lepkość (*viscosity*) rzeczywistych cieczy, własność, nie istniejąca jednak dla idealnych, a właśnie uważanych w zajmującym nas tutaj problemacie hydrokinetyki teoretycznej.

9. Praca niniejsza zamierza dać odpowiedź na jedną część pytań postawionych w nauce już oddawna, a wymienionych przez nas powyżej. Okaże się mianowicie, że nawet dla przeszło cztery razy tak wielkich wartości na Ω, jak owa dotychczasowa, graniczna i ostateczna (tj. 0·2246656), istnieje jeszcze niewątpliwie postać równowagi, różna od elipsoidy, dalej, że powłoka osłaniająca w takich razach płynną masę jest, bardzo prawdopodobnie, powierzchnią stopnia 4-go, a wreszcie że dla wszelkiej, byle zamkniętej w obrębie

$$0{\cdot}2246656 < \Omega < +1{\cdot}0$$

na Ω wartości otrzymuje się jednoznaczną na poszukiwany ów kształt odpowiedź, pod warunkiem jednak, że ograniczymy się jedynie do figur obrotowych. Prawdopodobieństwo tylko, acz bardzo znaczne, drugiego z pośród trzech przytoczonych wyników, może, wobec zupełnej pewności dwóch pozostałych, nieco nas zastanawiać. Geneza tego objawu znajdzie uzasadnienie w miejscu właściwem pracy niniejszej.

W zadaniu, jakie postawiłem sobie obecnie, ograniczam się jedynie do wykazania istnienia nowych figur równowagi dla większych chyżości kątowych; badanie trwałości lub

[1]) Ogłosz. w publikacyi Mémoires de l'Académie royale de Belgique, Vol. XVI (1843).

nietrwałości ich równowagi wykluczam na razie z obrębu niniejszego poszukiwania. Chciałbym jeszcze zaakcentować, że jakkolwiek za punkt wyjścia poniższych rozważań obrałem Maclaurin'owską elipsoidę obrotową spłaszczoną, nie znaczy to bynajmniej, iżby wybór ten miał być koniecznością. Owszem, uprzedzając późniejsze wywody, mogę już teraz zapowiedzieć, że, wychodząc znów od nieobrotowej elipsoidy Jacobi'ego, dałaby się zbudować analogiczna do naszej teorya, która pozwoliłaby rozstrzygnąć kwestyę istnienia lub nieistnienia nieobrotowych figur równowagi wobec wartości na Ω większych aniżeli 0·18709, zupełnie tak samo, jak to się okaże dla obrotowych figur, odpowiadających większym niż 0·2246656 wartościom na Ω. Badanie form nieobrotowych wymagałoby jednak wprowadzenia do analogicznego rachunku wielorakich całek eliptycznych o zmiennych modułach i argumentach, podczas gdy przy postaciach obrotowych wystarczają już nieporównanie prostsze od tamtych funkcye logarytmowe i cyklometryczne. Zarówno więc znaczniejsza w tym ostatnim razie prostota rachunku, jakoteż większe bezsprzecznie zainteresowanie, przywiązane do drugiej z tych możliwości: kiedy zmienna Ω przekracza nie tylko wartość 0·18709, ale nawet większą od niej 0·2246656, obiedwie te okoliczności razem wzięte motywują dostatecznie nasz wybór przyjętego obecnie przez nas punktu wyjścia[1]).

Pierwsze myśli, zmierzające do wykonania pracy niniejszej, polegające na usiłowaniu interpretacyi „urojonych" a wogóle zespolonych rozwiązań pewnego równania przestępnego, będącego warunkiem równowagi ruchomej, powziąłem był i w szkic ująłem jeszcze w r. 1881, a więc lat temu przeszło trzydzieści. Istotę poglądów swych w tej mierze wypowiedziałem pokrótce w odczycie p. t. *O kinetycznej równowadze płynu nieściśliwego pod wpływem grawitacyi i siły odśrodkowej*, wygłoszonym na posiedzeniu publicznem

---

[1]) Dla chyżości kątowych ω sprawiających, że Ω leży pomiędzy 0·18709 a 0·2246656, równowaga płynu w postaci elipsoidy różnoosiowej jest wprawdzie już niemożebna, niemniej jednak jest ona jeszcze bardzo dobrze możliwa w postaci obrotowej elipsoidy i to nawet dwojakiej. Tak więc dla Ω większego niż 0·18709 (byle mniejszego od 0·2246656) kształt płynu można bądź co bądź jeszcze podać; natomiast dla $\Omega > 0{\cdot}2246656$ już nic pewniejszego o jego postaci powiedzieć nie potrafimy.

sekcyi fizycznej III-go Zjazdu lekarzy i przyrodników polskich w Krakowie, dnia 21 lipca 1881 roku [1]). W innej pracy o podobnym tytule [2]), którą ośm lat później ogłosiłem w pismach Akademii Umiejętności w Krakowie, a na którą wypadnie mi się w dalszym ciągu tutaj powołać, mogłem, wobec bardzo szczegółowego jej przeznaczenia, przeprowadzić wywody z ominięciem głównej myśli, tworzącej istotę pracy niniejszej. Dedukcye i wyniki, które poniżej nastąpią, ogłaszam obecnie po raz pierwszy.

---

10. Jak wiadomo, elipsoida obrotowa spłaszczona

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

może być powierzchnią równowagi kinetycznej płynu tylko tak długo, dopóki chyżość kątowa ω ruchu obrotowego nie przekroczy wartości danej przez równość

$$\Omega=\frac{\omega}{2\pi\varrho}=0{\cdot}2246656, \tag{2}$$

gdzie głoska Ω służy tylko do skrócenia, zaś ϱ oznacza stałą gęstość masy płynnej, wyrażoną w pewnych szczególniejszych jednostkach, nad czem jednakowoż obecnie się nie zatrzymujemy [3]). Mimośród e rzeczonej elipsoidy przynależny pewnej przyjętej na ω, a więc i na Ω wartości, znajduje się ze związku

$$e^2=\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}, \quad \text{skąd naodwrót} \quad \varepsilon^2=\frac{e^2}{1-e^2}, \tag{3}$$

---

[1]) Zob. Dziennik III-go Zjazdu lekarzy i przyrodników polskich, wyd. pod redakcyą Dra K. Grabowskiego, Kraków, 1881, Nr. 3, str. 28, col. 2.

[2]) O równowadze kinetycznej płynu nieściśliwego, ogłosz. w XIX-tym tomie Rozpraw Wydziału matemat.-przyrodn. Akademii Umiejętn., Kraków 1889.

[3]) Zob. pod tym względem np. dzieło wyżej wspomniane W. Thomson and P. G. Tait, l. c. § 770—774, tak pierwszego jak i drugiego wydania. Wartość 0·2246656, co tylko podaną, wyznaczamy troskliwie w ciągu dalszym, u starszych autorów (także u W. Thomsona) przytaczana bywa ona tylko w zaokrągleniu na 0·2247. Zob. w ciągu dalszym str. 218, oraz Dodatek II-gi.

gdzie znowu ilość ε, zwana niekiedy zmienną Laplace'a, wyznacza się z równania przestępnego

$$\Omega = \frac{3+\varepsilon^2}{\varepsilon^3} \operatorname{arctang} \varepsilon - \frac{3}{\varepsilon^2}. \tag{4}$$

Tutaj funkcya cyklometryczna arctang ε ma oznaczać, jak się to okazuje w teoryi przyciągania mas elipsoidalnych, najmniejszy łuk dodatni, którego styczną goniometryczną jest ε, tak że tę funkcyę, a z nią i całą prawą stronę ostatniego równania należy uważać za jednowartościową.

Dla wszelkiego, w granicach $0 < e < +1$ dowolnie obranego mimośrodu e otrzymujemy z powyższych związków każdym razem jedyną, tak na ε (> 0) jak i na Ω wartość. Rzecz ta nie daje się jednak odwrócić. Wiadomo bowiem już zdawna, że dla wszelkiego Ω mniejszego od 0·2246656 ostatnie równanie dopuszcza dwie i tylko dwie różne na ε, a więc i na e wartości, że więc doprowadza do dwóch różnych elipsoid obrotowych spłaszczonych. Rozmiary, a więc półosi a i c każdej z tak otrzymanych postaci wyznaczają się następnie, i to jednoznacznie, z wiadomego już mimośrodu, oraz ze znanej masy, wzgl. z objętości uważanego płynu.

Co się jednak stanie, gdy Ω przekroczy „kresową" swą wartość, tj. 0·2246656?.... Wówczas równanie (4) nie posiada pierwiastka na ε rzeczywistego, co wskazuje, że, poczynając od tego kresu, elipsoida (1) nie może już być nadal szukaną powierzchnią równowagi. Może się jednak zdarzyć, że związek (4) będzie natenczas posiadał pierwiastek zespolony

$$\varepsilon = p + q\sqrt{-1}$$

tego rodzaju, że skutkiem stosownego wyboru obydwóch ilości rzeczywistych p, q, zarówno Ω jak i sama chyżość kątowa ω przybrałyby nietylko rzeczywiste, ale i dodatnie wartości, co, gdyby zaszło, świadczyłoby o niewątpliwem istnieniu przeobrażonych z elipsoidy, nowych jakichciś postaci równowagi, a to dla większych, aniżeli tam, chyżości kątowych ω.

11. Snując dalej tę myśl, połóżmy najpierw ogólnie

$$\varepsilon = p + qi, \quad i = \sqrt{-1} \tag{5}$$

i wyobraźmy sobie zespolony ten dwumian wstawiony w równanie (4). Po wykonaniu naznaczonych tam działań i po usunięciu wyrazów urojonych z mianowników, doszlibyśmy do związku

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = \Omega_1 + \Omega_2 i, \tag{6}$$

gdzie zarówno Ω_1 jak i Ω_2 będą jakiemiś rzeczywistemi funkcyami obydwóch zmiennych parametrów p, q. Stąd widać, że nawet w razie zespolonego na ε pierwiastka, tak Ω jak i ω będą ilościami rzeczywistemi, jeżeli tylko spełnią się następujące dwa warunki, konieczne i dostateczne:

1. jeżeli dla wszelkich dopuszczalnych na p, q wartości spełni się związek

$$\Omega_2 = 0; \tag{7}$$

2. jeżeli ponadto, dla wartości p, q już spełniających równanie (7), funkcya Ω_1 przybierze wartość nietylko rzeczywistą, ale zarazem dodatnią[1]).

Jeżeli obydwom tym postulatom stanie się zadość, to widoczna, że elipsoida obrotowa spłaszczona o mimośrodzie zespolonym będzie także, formalnie rzecz biorąc, postacią równowagi kinetycznej, a byłoby tylko rzeczą osobnego rozważania podać geometryczne i fizyczne znaczenie takiej elipsoidy.

Podstawiając zespoloną wartość (5) do równania warunkowego (4) i zważając, że dla dowolnych p, q mamy ogólnie[2]):

$$\text{arctang}\,(p + qi) = \tag{8}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\text{arctang}\left(\frac{2p}{1 - p^2 - q^2}\right) + \tfrac{1}{4}\,\text{lognat}\left[\frac{p^2 + (q+1)^2}{p^2 + (q-1)^2}\right] i,$$

z uwagi na tożsamość

$$(p^3 - 3pq^2)^2 + (3p^2q - q^3)^2 = (p^2 + q^2)^3, \tag{9}$$

---

[1]) Rzeczywista, ale ujemna wartość na Ω_1 dawałaby bowiem na ω wartość urojoną.

[2]) Zob. Dodatek I-szy.

po obustronnem przyrównaniu tak rzeczywistych jak i urojonych wyrazów, otrzymamy dwa związki

$$(10)\quad \left.\begin{aligned} &\frac{p\,[(3+p^2-q^2)(p^2-3q^2)+2q^2(3p^2-q^2)]}{(p^2+q^2)^3}\,.\\ &\qquad\qquad .\,\tfrac{1}{4}\,\mathrm{lognat}\left[\frac{p^2+(q+1)^2}{p^2+(q-1)^2}\right]\\ &+\frac{q\,[2p^2(p^2-3q^2)-(3+p^2-q^2)(3p^2-q^2)]}{(p^2+q^2)^3}\,.\\ &\qquad\qquad .\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{arctang}\left(\frac{2p}{1-p^2-q^2}\right)+\frac{6pq}{(p^2+q^2)^2}\end{aligned}\right\}=0,$$

tudzież

$$(11)\quad \Omega=\left\{\begin{aligned} &\frac{p\,[(3+p^2-q^2)(p^2-3q^2)+2q^2(3p^2-q^2)]}{(p^2+q^2)^3}\,.\\ &\qquad\qquad .\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{arctang}\left(\frac{2p}{1-p^2-q^2}\right)\\ &+\frac{q\,[(3+p^2-q^2)(3p^2-q^2)-2p^2(p^2-3q^2)]}{(p^2+q^2)^3}\,.\\ &\qquad\qquad .\,\tfrac{1}{4}\,\mathrm{lognat}\left[\frac{p^2+(q+1)^2}{p^2+(q-1)^2}\right]-\frac{3(p^2-q^2)}{(p^2+q^2)^2}\end{aligned}\right.,$$

których bliższem zbadaniem zaraz się zajmiemy. Występujące w tych wzorach logarytmy są naturalne.

Równanie (10) jest związkiem koniecznym, zachodzącym pomiędzy parametrami p, q. Dla pewnej przyjętej na p wartości równanie to daje przynależną wartość, jednę lub może kilka, na q, jakoteż i naodwrót. Drugie równanie, tj. (11), daje natenczas odpowiadającą im wartość ilości Ω, a więc i samej chyżości kątowej ω, o której co prawda *a priori* niewiadomo, czy okaże się rzeczywistą.

Należy już teraz zaznaczyć, że w logarytmowym wyrazie równania tak (10) jak (11), iloraz znajdujący się wewnątrz klamry jest dodatni dla wszelkich rzeczywistych wartości na p, q, że więc np. dla lim p = zeru wyrazu

$$\tfrac{1}{4}\log\frac{(q+1)^2}{(q-1)^2}$$

nie wolno zastąpić przez pozornie równoważny mu wyraz

$$\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{q+1}{q-1}\right).$$

Nietożsamość obydwóch staje się oczywistą dla dowolnej na $q > 0$ wartości, byle mniejszej od jednostki dodatniej.

Pisząc związek (10) krótko

$$F(p, q) = 0, \tag{10'}$$

możemy go uważać za równanie pewnej krzywej płaskiej pomiędzy współrzędnemi p, q. Budowa tego równania jest jednak tak zawiła, że usiłowanie przedstawienia ilości q jako wyraźnej *(explicit)* funkcyi ilości p, albo naodwrót, nie rokuje żadnego powodzenia. Również daremnym okazał się zamiar eliminacyi jednego z dwóch zmiennych parametrów p albo q pomiędzy obydwoma równaniami (10) i (11), a to w tym celu, ażeby ilość Ω przedstawić jako wyraźną funkcyę jednej tylko zmiennej niezależnej, np. p.

Wobec tego nie pozostawało nic innego, jak tylko zająć się sporządzeniem tablicy, która dla różnych wartości liczbowych na p dostarczałaby wprost odpowiadających im wartości na q. Wprawdzie z góry przewidywałem, że obliczanie takiej tablicy, polegające na rozwiązywaniu licznych i dość zawiłych równań przestępnych, będzie mozolne, nie mając jednak w tej mierze wyboru, musiałem się na te rachunki zdecydować, ażeby w ten sposób wzajemną zależność trzech zmiennych ilości p, q, Ω pod względem ilościowym lepiej wyświetlić. Jak pokierowałem rachunkiem, zmierzającym do sporządzenia wspomnianej tablicy, okażę niebawem, wpierw jednak poddam bliższemu zbadaniu funkcyę $F(p, q)$ na obydwóch granicach, w obrębie których obadwa parametry p, q mogą się zmieniać.

Badanie równania $F(p, q) = 0$.

12. Równanie (10) lub (10') spełnia się identycznie tak dla $q = 0$, jak i dla $p = 0$, to drugie jednak pod warunkiem że

$$1 - p^2 - q^2 > 0.$$

że więc q^2 jest wówczas mniejsze od dodatniej jednostki. Znaczy to, że (10) jest podzielne przez iloczyn pq.

Dla q równego zeru otrzymalibyśmy widocznie elipsoidę obrotową spłaszczoną jako szukane rozwiązanie. Blizkiem będzie więc przypuszczenie, że dla q różnego wprawdzie od zera, ale bardzo małego, znajdzie się może jakaś nowa postać równowagi, wprawdzie już nieco różna od elipsoidy obrotowej spłaszczonej, niemniej jednak będąca jakąś powierzchnią do tej ostatniej bardzo zbliżoną.

Ażeby tę myśl poddać sprawdzeniu, obierzmy ilość q tak małą, że wolno będzie pominąć wszystkie jej potęgi wyższe ponad trzecią. Rozwijając w tem przypuszczeniu poszczególne wyrazy równania $F(p, q) = 0$ i zastrzegając na razie, że wówczas wartość parametru p nie leży nazbyt blizko dodatniej jednostki[1]), otrzymamy po należytych uproszczeniach związek następujący

$$(12) \quad q^2 = 3p^2(p^2+1)^2 \cdot \frac{p(7p^2+9) - (p^2+1)(p^2+9)\operatorname{arctang} p}{3(p^2+1)^3(2p^2-3)\operatorname{arctang} p - p(18p^6+p^4-18p^2-9)}.$$

Stąd widać, że q będzie, jak sobie tego życzymy, ilością bardzo małą tylko wówczas, jeżeli prawa strona tego równania będzie się stawała na wszelki możebny sposób ilością blizką zera, a zarazem dodatnią. To zaś mogłoby nastąpić jedynie w trzech dających się tutaj pomyśleć przypadkach:

1. Jeżeliby licznik $f(p)$ ostatniego ułamka był blizki zera, albo
2. Jeżeliby mianownik jego $\psi(p)$ stawał się ilością bardzo wielką, albo wreszcie
3. Jeżeliby czynnik stojący przed ułamkiem stawał się blizki zera.

Łatwo jednak zobaczyć, że przypuszczenia przypadku zarówno 2-go, jak i 3-go doprowadzają do sprzeczności.

Jakoż w istocie, gdy p zdąża do nieskończoności, prawa strona ostatniego równania ma również nieskończoność za granicę, nie może więc być równą lewej q^2, która według założenia ma stać się ilością bardzo małą, dążącą do zera.

W przypadku 3-cim należałoby oczywiście przyjąć p bardzo

---

[1]) Zobaczymy w ciągu dalszym, że zastrzeżenie to okaże się zbyteczne.

małem, dodatniem albo ujemnem. Atoli wówczas, rozwijając funkcyę arctang p z dokładnością po siódmą potęgę ilości p włącznie i podstawiając

$$(13) \qquad \text{arctang}\, p = p\,(1 - \tfrac{1}{3}p^2 + \tfrac{1}{5}p^4 - \tfrac{1}{7}p^6)$$

zarówno w liczniku jak i w mianowniku równania (12), otrzymalibyśmy po należytych redukcyach

$$(14) \qquad q^2 = -\tfrac{1}{3}p^2\,(p^2+1)^2 \cdot \frac{7-5p^2}{7+13p^2},$$

w czem zawiera się widoczna sprzeczność, gdyż lewa strona jest ilością dodatnią, podczas gdy prawa, dla wartości na p poblizkich zera, przybiera wartości stale ujemne.

Tak więc pozostaje tylko przypadek 1-szy, jako jedynie tutaj możliwy. Należy więc znaleźć wszystkie takie na p wartości, któreby licznik $f(p)$ równania (12) zamieniały na ilość blizką zera.

Równanie

$$(15) \quad f(p) = p\,(7p^2+9) - (p^2+1)(p^2+9)\ \text{arctang}\, p = 0,$$

oprócz pięciokrotnego pierwiastka równego zeru posiada tylko jeden jedyny pierwiastek rzeczywisty i dodatni [1]), równy 2·529308. Przy tej sposobności zwrócę uwagę na to, że na dokładnie takie samo równanie warunkowe natrafia się, szukając *maximum* ilości Ω, uważanej, według równania (4), za funkcyę zmiennej rzeczywistej ε, a więc i samego mimośrodu elipsoidy obrotowej [2]).

Dla p równego 2·529308 mianownik $\psi(p)$ po prawej stronie równania (12) przybiera wartość różną od zera i dodatnią [3]), a licznik $f(p)$ staje się zerem, skutkiem czego znika wówczas prawa strona tego równania, a więc i samo q staje się zerem. Przyjmując zatem p bardzo blizkiem wartości 2·529308, sprawimy, że dzięki

---

[1]) Zob. Dodatek II-gi.

[2]) O istnieniu takiego *maximum* wiedział już Laplace (l. c.). Duhamel dla jedynego owego pierwiastka znalazł wartość 2·5293 (Lehrbuch der analyt. Mechanik, II, pag. 186). Mniej dokładną 2·5292 podaje Cauchy w Oeuvres compl. de Cauchy, II Série, T. VI, Paris 1887, pag. 390.

[3]) Obliczona przez nas ta wartość wynosi + 2496·03.

ciągłości wszystkich występujących tu funkcyj [1]), q będzie ilością blizką zera, rzeczywistą lub urojoną, stosownie do tego, czy prawa strona równania (12) będzie dodatnia, czy też ujemna.

Biorąc więc

$$p = 2{\cdot}529308 - \eta, \tag{16}$$

gdzie η wyobraża bardzo małą ilość dodatnią albo ujemną, wstawiając tę wartość do (12), po pominięciu kwadratów i wyższych potęg malutkiej ilości η, otrzymamy

$$q^2 = \frac{3r^2(r^2+1)^2 . 4r[(r^2+5)\operatorname{arctang} r - 5r]}{3(r^2+1)^3(2r^2-3)\operatorname{arctang} r - r(18r^6+r^4-18r^2-9)} . \eta, \tag{17}$$

gdzie gwoli zwięzłości położyliśmy $2{\cdot}529308 = r$.

Rzeczywiste wyliczenie doprowadza do równania

$$q^2 = +4{\cdot}1091094 . \eta,$$

tj.

$$q^2 = +4{\cdot}1091094\ (2{\cdot}529308 - p), \tag{18}$$

skąd

$$p = 2{\cdot}529308 - 0{\cdot}2433617 . q^2, \tag{19}$$

który to związek ustala obopólną zależność obydwóch zmiennych p, q w najbliższem sąsiedztwie wartości $2{\cdot}529308$ parametru p. Widać stąd dostatecznie, że rzeczywiste na q wartości mogą obecnie istnieć tylko dla wartości na p mniejszych od r, tj. mniejszych od $2{\cdot}529308$, w przeciwnym bowiem razie q stawałoby się urojone, co jest niedopuszczalne [2]).

---

[1]) Ciągłość ta zachodzi przynajmniej na badanym tu obszarze zmienności zmiennej niezależnej p. Prawa strona równania (12) posiada zresztą, jak łatwo zobaczyć, tylko jeden punkt osobliwy, w którym następuje zerwanie ciągłości. Dzieje się to mianowicie dla wartości p równej $+2{\cdot}08912$ sprowadzającej mianownik $\psi(p)$ owego równania do zera. Wówczas wartość prawej strony przeskakuje nagle z $-\infty$ do $+\infty$. Zob. w tej mierze Dodatek III-ci.

[2]) Zob. powyżej definicyę zmiennej ε jako zespolonego dwumianu $(p+qi)$, gdzie p i q należy uważać za ilości rzeczywiste.

Należy jeszcze wspomnieć, że zastrzeżenie, jakie z konieczności uczyniliśmy powyżej wśród rozwijania funkcyi $F(p, q)$, ażeby ilość p nie była zbyt blizka dodatniej jednostki, po szczegółowem zbadaniu okazuje się zbytecznem. Rzeczywistem obliczeniem można bowiem przekonać się z łatwością, że naodwrót, dla wartości na p poblizkich jednostce, ilość q nie może być blizka zera[1]).

13. Ważne będzie teraz zapytanie, jaką wartość, dodatnią czy też ujemną, ma ilość

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$$

wówczas, gdy p jest bardzo mało mniejsze od 2·529308, tj. gdy q jest bardzo małe.

Wprowadzając znów tymczasowe skrócenie $0{\cdot}2433617 = s$, tak że podług (19) byłoby

$$p = r - sq^2, \tag{20}$$

rozwijając wyrażenie (11) na Ω w przypuszczeniu, że q jest tak małe, iż kwadraty i wyższe potęgi tej ilości będzie wolno pominąć oraz zważając, że wówczas

$$\tfrac{1}{2} \,.\, \text{arctang}\left(\frac{2p}{1 - p^2 - q^2}\right) = \text{arctang}\, p + \frac{p}{(p^2 + 1)^2} \cdot q^2, \tag{21}$$

tudzież

$$\tfrac{1}{4} \,.\, \text{lognat}\left[\frac{p^2 + (q+1)^2}{p^2 + (q-1)^2}\right] = \frac{q}{p^2 + 1}, \tag{22}$$

otrzymamy po należytych redukcyach

---

[1]) Pomijamy ten łatwy, acz nieco dłuższy rachunek. Kładąc w równaniu (10) p równem $+1{\cdot}00$, znajdujemy jedyny jego dodatni na q pierwiastek równym blizko $+1{\cdot}922$, co zresztą można już na pierwszy rzut oka stwierdzić w przybliżeniu zapomocą umieszczonej w ciągu dalszym (§ 19) tablicy liczbowych na p i q wartości.

$$(23)\quad \Omega = \left(\frac{3+r^2}{r^3}\operatorname{arctang} r - \frac{3}{r^2}\right)$$
$$- \frac{s}{r^4(r^2+1)} \cdot \left[r(7r^2+9) - (r^2+1)(r^2+9)\operatorname{arctang} r\right] . q^2$$
$$+ r^{-5}\left[(2r^2-9)\operatorname{arctang} r + \frac{r(2r^4+13r^2+9)}{(r^2+1)^2}\right] . q^2$$
$$- 3r^{-2}\left[\frac{3+r^2}{r^3}\operatorname{arctang} r - \frac{3}{r^2}\right] . q^2 .$$

Otóż zważając nasamprzód, że równanie

$$(24)\qquad u(7u^2+9) - (u^2+1)(u^2+9)\operatorname{arctang} u = 0$$

ma właśnie za pierwiastek wartość $u = 2{\cdot}529308$ $(= r)$, że więc wyraz mnożony przez s jest zerem, zważając dalej, że dla $r = 2{\cdot}529308$ mamy na podstawie bezpośredniego wyliczenia [1]):

$$(25)\qquad \frac{3+r^2}{r^3}\operatorname{arctang} r - \frac{3}{r^2} = +0{\cdot}2246656,$$

otrzymamy najpierw

$$(26)\quad \frac{\Omega - 0{\cdot}2246656}{q^2} =$$
$$= r^{-5}\left[(2r^2-9)\operatorname{arctang} r + \frac{r(2r^4+13r^2+9)}{(r^2+1)^2}\right] - 0{\cdot}6739968 . r^{-2};$$

podstawiając tutaj za r wartość 2·529308, znajdziemy wartość prawej strony tego równania równą $+0{\cdot}016129$, tak że ostatecznie

$$(27)\qquad \Omega = \frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = 0{\cdot}2246656 + 0{\cdot}016129 . q^2,$$

związek dający wartość na Ω, a więc i na samą chyżość kątową ω wówczas, gdy q jest bardzo małe, gdy więc p jest ilością bardzo mało mniejszą od 2·529308.

---

[1]) Zob. w tej mierze Dodatek II-gi.

Już z dotychczasowych rezultatów rachunku widać zatem, że w rozważanym obecnie przypadku będzie istniała postać równowagi, pomimo że, skutkiem zwiększonej nadmiernie chyżości kątowej ω, ilość Ω przekroczy już „graniczną“ dla elipsoidy wartość 0·2246656. Widać dalej, że natenczas owa postać nie będzie już wprawdzie elipsoidą obrotową spłaszczoną, że jednak skutkiem przyjętej małości parametru q, oraz skutkiem ciągłości wszystkich występujących tu funkcyj, będzie się tylko nieznacznie różniła od tej powierzchni. Widać wreszcie, że przeradzanie się jednej z tych powierzchni w drugą dokonywa się przy obrotowej elipsoidzie „granicznej“ bardzo już spłaszczonej, gdyż cechującej się wartością $\varepsilon = 2{\cdot}529308$, a więc mimośrodem e już tak blizkim jednostki, jak 0·9343.

14. Przybliżony rachunek, użyty powyżej w przypuszczeniu q bardzo małego, okazuje się jednak niedostatecznym na pewnym jeszcze nierozpatrywanym przez nas dotychczas obszarze zmienności parametru p. Powiemy z góry, że odnosi się to do wartości na p nieco odleglejszych, w prawo lub w lewo, od owej niejako granicznej wartości 2·529308, tj. r, w razie, gdy będzie chodziło o poznanie wzajemnej zależności parametrów p, q na wspomnianym obszarze. W tym celu będzie rzeczą wskazaną przysposobić sobie teraz potrzebne rozwinięcia.

Równanie $F(p, q) = 0$ jest widocznie podzielne tak przez p jak i przez q (jeżeli tylko $q < +1$), spełnia się bowiem identycznie zarówno dla p równego zeru, wobec dowolnego q byle mniejszego od jednostki, jak również i dla q równego zeru, a przytem p całkiem dowolnego. Jednak być może, że np. wartość $p = 0$ będzie w rzeczywistości dwukrotnym, albo trzykrotnym itd. owego równania pierwiastkiem, a podobnie $q = 0$ może być wielokrotnym jego pierwiastkiem: rzecz pozostająca oczywiście w najbliższym związku z naturą funkcyjnej zależności obydwóch zmiennych parametrów p, q. Rozpoczniemy od zbadania pod tym względem ilości q.

Dla q równego zeru funkcya

$$(28)\quad \tfrac{1}{2}\operatorname{arctang}\left(\frac{2p}{1-p^2-q^2}\right) =$$

$$= \operatorname{arctang}\left[\frac{\sqrt{(1-p^2-q^2)^2+4p^2}+p^2+q^2-1}{2p}\right],$$

Biblioteka Okeronska

krótko A, staje się po prostu równą arctang p; dla małych na q wartości, dodatnich lub ujemnych, będzie więc ona małoco różna od arctang p. Rozwijając ją na szereg zbieżny, postępujący według potęg ilości q, w przypuszczeniu, że dopiero q^8 i jeszcze wyższe potęgi wolno pominąć, otrzymamy [1])

$$(29)\quad A = \operatorname{arctang} p + \frac{p}{(p^2+1)^2}\cdot q^2 - \frac{p\,(p^2-1)}{(p^2+1)^4}\cdot q^4 + \\ + \frac{p\,(p^2-3)\,(3p^2-1)}{3\,(p^2+1)^6}\cdot q^6 - \ldots$$

szereg, jak łatwo zobaczyć, zbieżny nawet jeszcze dla $q^2 < 2$, tem bardziej więc dla przyjętych powyżej wartości na q blizkich zera.

Postępując w podobny sposób z wyrazem logarytmowym L, figurującym w równaniu (10), znajdziemy [2])

$$(30)\quad L = \tfrac{1}{4}\operatorname{lognat}\left[\frac{p^2+(q+1)^2}{p^2+(q-1)}\right] = \\ = \frac{q}{r}\left[1 - \frac{(3\tau-4)}{3\tau^2}\cdot q^2 + \frac{(5\tau^2-20\tau+16)}{5\tau^4}\cdot q^4 - \right. \\ \left. - \frac{(7\tau^3-56\tau^2+112\tau-64)}{7\tau^6}\cdot q^6 + \ldots\right],$$

szereg również zbieżny dla wszelkich na q wartości leżących w obrębie

$$-\sqrt{2} < q < +\sqrt{2}.$$

Głoską τ oznaczyliśmy chwilowo, gwoli zwięzłości, powtarzający się tutaj nieustannie dwumian (p^2+1).

Jeżeli teraz obiedwie wartości, na A i na L, podstawimy do równania (10) i pomnożymy je obustronnie przez $(p^2+q^2)^3$, ilość zawsze różną od zera, otrzymamy nasamprzód

$$(31)\quad p\,[p^2(p^2+3)+(2p^2-9)\,q^2+q^4]\,.\,L \\ - q\,[p^2(p^2+9)+(2p^2-3)\,q^2+q^4]\,.\,A + 6pq(p^2+q^2) = 0;$$

---

[1]) Zob. Dodatek IV, na końcu tej pracy.

[2]) Co do tego rozwinięcia zob. ten sam Dodatek IV.

wstawiwszy tutaj powyższe na A, L wartości, po wykonaniu działań, po opuszczeniu potęg małej ilości q wyższych od siódmej i po uporządkowaniu, otrzymamy związek w postaci następującej

$$(32) \qquad q\,[M_0 + M_1 q^2 + M_2 q^4 + M_3 q^6] = 0,$$

gdzie cztery współczynniki M, będące funkcyami zmiennego parametru p, posiadają następujące wartości

$$(33\,\mathrm{a}) \quad M_0 = \frac{p^2}{p^2+1}\,[p\,(7\,p^2+9) - (p^2+1)\,(p^2+9)\,\mathrm{arctang}\,p],$$

$$(33\,\mathrm{b}) \quad M_1 = \frac{p\,(18p^6+p^4-18\,p^2-9) - 3\,(p^2+1)^3(2p^2-3)\,\mathrm{arctang}\,p}{3\,(p^2+1)^3},$$

$$(33\,\mathrm{c}) \quad M_2 =$$

$$= \frac{p\,(-15\,p^8+250\,p^6+248\,p^4+94\,p^2+15) - 15\,(p^2+1)^5\,\mathrm{arctang}\,p}{15\,(p^2+1)^5},$$

$$(33\,\mathrm{d}) \quad M_3 = \frac{p\,(-2240\,p^8+952\,p^6+1800\,p^4+584\,p^2+56)}{105\,(p^2+1)^7}.$$

Równanie (32), wspólnie ze związkami (33) pozwoli, stosownie do swej genezy, dla wszelkiego p, nie nazbyt odległego od wartości granicznej 2·529308, znaleźć odpowiadającą mu wartość, czy może wartości, na q, nie przesądzając bynajmniej, czy będą one rzeczywiste, czy może tylko zespolone sprzężone, a więc dla aktualnej kwestyi nieprzydatne. Dla wartości na p nieco większych od 2·529308 pozostajemy bowiem pod tym względem w niepewności. Wprawdzie równanie (32), przypuszczając q najpierw różne od zera, jest co do q^2 stopnia 3-go, musi więc posiadać przynajmniej jeden rzeczywisty pierwiastek, atoli niewiadomo *a priori*, czy, na badanym obszarze zmienności parametru p, będzie on dodatni, co jest bezwarunkowo konieczne, ażeby samo q mogło przybrać wartość rzeczywistą.

15. Zobaczymy niebawem, że dla wszelkiej dodatniej wartości zmiennego parametru p leżącej pomiędzy zerem a 2·529308, istnieją dwie, ale tylko dwie należące do niej wartości zmiennej q, że jedna z nich, odpowiadająca elipsoidzie obrotowej spłaszczonej, jest stale zerem, druga zaś odpowiadająca postaciom równowagi różnym od elipsoidy, jest różna od zera i zmienna w granicach dość

rozległych. Co jednak będzie działo się wówczas, gdy p stanie się większe od wartości 2·529308? Czy w takim razie ilość q musi być równa zeru[1]), czy też może ogólnemu równaniu $F(p, q) = 0$ nie można natenczas dogodzić inną jeszcze jakąś na q wartością, więc różną od zera?

Ażeby wyjaśnić tę kwestyę, przyjmijmy najpierw, że p jest wogóle dość wielką ilością dodatnią, taką mianowicie, iżby w pierwszem przybliżeniu wolno było opuścić odwrotność wyższych jej potęg poczynając od p^{-4} i rozwińmy w tem przypuszczeniu równanie $F(p, q) = 0$. Mnożąc je nasamprzód po obydwóch stronach przez iloraz

$$\frac{4(p^2+q^2)^2}{pq},$$

zawsze różny od zera, napiszemy

$$(34)\quad \left.\begin{aligned} &\frac{p^4+(3+2q^2)p^2+q^2(q^2-9)}{q(p^2+q^2)}\operatorname{lognat}\left[\frac{1+(q+1)^2p^{-2}}{1+(q-1)^2p^{-2}}\right] \\ &-\frac{2[p^4+(2q^2+9)p^2+q^2(q^2-3)]}{p(p^2+q^2)}\operatorname{arctang}\left(\frac{-2p}{p^2+q^2-1}\right)+24 \end{aligned}\right\}=0,$$

a rozwijając logarytm jakoteż funkcyę cyklometryczną według wzorów

$$(35)\qquad \operatorname{lognat}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots,$$

$$(36)\quad \operatorname{arctang}(-u) = \pi - \operatorname{arctang} u = \pi - \left(u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \ldots\right),$$

po wykonaniu naznaczonych działań, po opuszczeniu wyrazów zawierających p^{-4} oraz wyższe potęgi ilorazu $1:p$ i po uporządkowaniu znajdziemy

$$(37)\qquad 64p^{-3} - 3\pi(q^2+9).p^{-2} + 48p^{-1} - 3\pi = 0,$$

---

[1]) Por. zachowanie się równań (10), a wzgl. (32) wobec przypuszczenia $q = 0$ nie skrępowanego żadnem zastrzeżeniem co do wartości parametru p. Obadwa równania spełniają się wówczas tożsamościowo.

skąd

$$(38) \qquad q^2 = \frac{64 - 27\pi p + 48 p^2 - 3\pi p^3}{3\pi p} = \frac{\varphi(p)}{3\pi p},$$

gdzie znaczenie symbolu funkcyjnego $\varphi(p)$ jest widoczne. Przypominamy, że przybliżony ten wzór może być ważny jedynie dla dodatnich i „dość wielkich“ wartości na p.

Równanie $\varphi(p) = 0$, co do p stopnia 3-go, posiada tylko jeden pierwiastek rzeczywisty bardzo blizki wartości $+2{\cdot}672$; dwa inne jego pierwiastki są zespolone sprzężone. Stąd wynika, że dla rzeczywistych i dodatnich wartości na p funkcya $\varphi(p)$ raz tylko znak zmienia. Jakoż w istocie znajdujemy bezpośrednim rachunkiem

$$\varphi(1{\cdot}0) = +17{\cdot}75,\ \varphi(2{\cdot}0) = +11{\cdot}07,\ \varphi(2{\cdot}5) = +4{\cdot}68,\ \varphi(2{\cdot}672) = 0,$$
$$\varphi(3{\cdot}0) = -12{\cdot}94,\ \varphi(4{\cdot}0) = -110{\cdot}5,\ \varphi(5{\cdot}0) = -338{\cdot}2,\ \varphi(\infty) = -\infty,$$

a zestawienie to poucza [1]), że, aby wartość na q była rzeczywista, a więc na q^2 dodatnia, musi być $p \leqq 2{\cdot}672$, że więc dla wartości p większych od $+2{\cdot}672$, nie istnieje w pierwotnem równaniu (10) rzeczywista wartość na q, któraby była różna od zera.

Stąd wynika, że wobec dostatecznie wielkich na p wartości równanie (10) spełnia się tylko dla q równego zeru, że jednak mały obszar zmienności parametru p leżący pomiędzy 2·529 a 2·672 wymyka się nam jeszcze z pod rozpoznania. Do niewiadomości pod tym względem przyłącza się nadto niejaka wątpliwość, czy dla wartości na p niewiele różnych od 2·672, przybliżony rachunek, jakiego użyliśmy, dostarcza bezpiecznej rękojmi prawdziwości wyprowadzonego przed chwilą wniosku. Pojęcie „p dostatecznie wielkiego“ jest bowiem bądź co bądź bardzo względne. To też niewiadomo *a priori*, czy powyższy przybliżony rachunek wolno już stosować do średnio wielkich wartości parametru p, leżących np. pomiędzy 2·672 a 3·000 itp.

Wprawdzie nie dające się zaprzeczyć zbliżenie się wzajemne obydwóch wartości 2·529308 i 2·672, wespół z zachowywaniem się

---

[1]) W powyższem zestawieniu wystarczyłoby oczywiście wyjść od $\varphi(2{\cdot}529308)$, gdyż już z poprzedzającego wiemy, że dla dodatniego p mniejszego od 2·529308 istnieje, oprócz zera, jeszcze druga rzeczywista i dodatnia wartość na q.

funkcyi F dla q bardzo małego, nie wydaje się przypadkowem, lecz owszem wygląda na oznakę, że równanie (10) spełnia się jedynie dla $q=0$ nie tylko wobec bardzo wielkich na p wartości, ale nawet wobec wszelkich wartości p większych od 2·529308; jednakowoż samo prawdopodobieństwo takiego stanu rzeczy nie może nas jeszcze zaspakajać. Zobaczymy zaraz, że za użyciem wzorów bardziej przybliżonych zdołamy uchylić także i tę, pozostałą jeszcze wątpliwość.

16. Posuwając dokładność w rozwinięciach wzoru (34) o jeden, wzgl. dwa wyrazy dalej, a mianowicie pozwalając sobie opuścić nie, jak powyżej, wyrazy mnożone już przez p^{-4}, ale dopiero mnożone przez p^{-6}, otrzymalibyśmy z (34) po nieco rozwlekłych, ale łatwych redukcyach związek

$$(40)\quad \left.\begin{aligned} &4\left[1+2p^{-2}-\tfrac{2}{3}(19q^2+3)p^{-4}\right] \\ &-2p\left[\pi-2p^{-1}+\pi(q^2+9)p^{-2}-\frac{52}{3}p^{-3}-12\pi q^2p^{-4}+\right. \\ &\qquad\left.+\frac{4}{15}(145q^2+21)p^{-5}\right]+24 \end{aligned}\right\}=0.$$

Usunąwszy tutaj potęgi o wykładnikach ujemnych, rozwiążmy to równanie względem q^2, a otrzymamy bez dwuznaczności

$$(41)\quad q^2=\frac{-15\pi p^5+240p^4-135\pi p^3+320p^2-144}{15(\pi p^3-12\pi p+64)}=\frac{L(p)}{M(p)},$$

gdzie znaki funkcyjne L i M służą tylko do skrócenia.

Dla $p>0$ mianownik $M(p)$ tego wyrażenia pozostaje stale dodatni, gdyż nawet *minimum* jego (wydarzające się dla p równego $+2$) wynosi $+206{\cdot}02$, skąd wnosimy, że równanie (41) nie będzie zawierało oczywistej sprzeczności tylko wówczas, gdy licznik $L(p)$ przybierać będzie wartości wyłącznie dodatnie.

Równanie

$$(42)\quad L(p)=-15\pi p^5+240p^4-135\pi p^3+320p^2-144=0,$$

będące co do p stopnia 5-go, posiada trzy rzeczywiste pierwiastki, a dwa zespolone sprzężone, które jednak tutaj nas nie obcho-

dzą [1]). Z pośród trzech rzeczywistych jeden leży pomiędzy $-0{\cdot}50$ a $-0{\cdot}49$, drugi pomiędzy $+1{\cdot}0$ a $+2{\cdot}0$, trzeci wreszcie pomiędzy $+2{\cdot}50$ a $+2{\cdot}53$. Obadwa odstępy: $(-0{\cdot}50, -0{\cdot}49)$, tudzież $(+1{\cdot}0, +2{\cdot}0)$ odpadają jednak w kwestyi aktualnie nas zajmującej, pierwszy z nich jest bowiem sprzeczny z zastrzeżeniem $p > 0$, drugi zaś przypada na obszar zmienności parametru p (od p równego zeru, do p równego $2{\cdot}529308$) nie przedstawiający, jak zobaczymy to poniżej, żadnych wątpliwości co do jakości funkcyjnej zależności zmiennych parametrów p i q.

Pozostaje więc jedynie pierwiastek dodatni leżący pomiędzy $+2{\cdot}50$ a $+2{\cdot}53$, a że funkcya $L(p)$ przy przejściu od $2{\cdot}50$ do $2{\cdot}53$ z dodatniej staje się ujemną [2]) i dla rosnących coraz bardziej wartości na p już więcej znaku nie zmienia, zatem, zważając na ponowne, od poprzedniego jeszcze znaczniejsze zbliżenie się pierwiastka $2{\cdot}5\ldots$ do granicznej wartości $2{\cdot}529308$, dochodzimy do przekonania, że dla wszelkich na p wartości większych od $2{\cdot}529308$ warunkowe równanie (10) może być spełnione nie inaczej, jak tylko, gdy przyjmiemy q równe zeru.

Z kolei rzeczy należałoby się zająć zbadaniem drugiego skrajnego przypadku, przypuszczając mianowicie parametr p blizkim zera i zapytując, jakie natenczas wartości może lub musi przybrać parametr q. Ponieważ sprawa przedstawia się nieco odmiennie, stosownie do tego, czy q będzie większe czy też mniejsze od dodatniej jednostki, będzie rzeczą stosowną załatwić się nasamprzód z hypotezą q równego $+1$, a więc z możliwością rozgraniczającą obiedwie co tylko wspomniane alternatywy. Twierdzimy mianowicie, że przypuszczenie p blizkiego zera, a równocześnie q bardzo blizkiego dodatniej jedności, jest niemożliwe, doprowadza bowiem do oczywistej sprzeczności.

Jakoż w istocie, przyjmując w (10) q równe $+1$, otrzymalibyśmy warunkowe równanie

---

[1]) Bieg funkcyi $L(p)$ na interesującej nas tutaj przestrzeni przedstawia się w sposób następujący $L(-1{\cdot}0) = +887{\cdot}2$, $L(-0{\cdot}638) = +141{\cdot}2$, $L(-0{\cdot}5) = +5{\cdot}49$, $L(-0{\cdot}4) = -59{\cdot}8$, $L(-0{\cdot}3) = -101{\cdot}7$, $L(0{\cdot}0) = -144{\cdot}0$, $L(+0{\cdot}5) = -103{\cdot}5$, $L(+1{\cdot}0) = -55{\cdot}2$, $L(+2{\cdot}0) = +75{\cdot}1$, $L(+2{\cdot}5) = +2{\cdot}260$, $L(+2{\cdot}53) = -15{\cdot}543$, $L(+3{\cdot}0) = -726{\cdot}2$, $L(+4{\cdot}0) = -9085{\cdot}5$.

[2]) Jest mianowicie $L(+2{\cdot}50) = +2{\cdot}260$, $L(+2{\cdot}53) = -15{\cdot}543$; zob. poprzedzający przypisek.

$$(43)\quad \left.\begin{aligned} &\frac{p\,[(p^2+2)(p^2-3)+2(3p^2-1)]}{(p^2+1)^3}\,.\\ &\qquad\qquad .\,\tfrac{1}{4}\,[\text{lognat}\,(p^2+4)-\log(p^2)]\\ &+\frac{[2p^2(p^2-3)-(p^2+2)(3p^2-1)]}{(p^2+1)^3}\,.\\ &\qquad\qquad .\,\tfrac{1}{2}\,\text{arctang}\left(-\frac{2}{p}\right)+\frac{6p}{(p^2+1)^2}\end{aligned}\right\}=0,$$

które, rozwiązane próbami, oraz ścieśnianiem granic przybliżenia, okazuje jeden jedyny dodatni pierwiastek $p = +2{\cdot}26542$, bardzo więc odległy od zera. Gdybyśmy jednak mimo to pozwolili dodatniemu p w tem równaniu zbliżać się nieograniczenie do zera, lewa jego strona zdążałaby do wartości

$$(44)\qquad 4p\,.\,\text{lognat}\,p + \text{arctang}\,(-\infty),\ \lim p = 0,$$

równej $\frac{\pi}{2}$, zatem różnej od zera znajdującego się po stronie prawej [1]). Przypuszczenie nasze doprowadza więc do sprzeczności, skąd wnosimy, że dla bardzo małych dodatnich wartości na p parametr q posiada wartości znacznie różniące się od jednostki dodatniej.

17. Tem poprzedziwszy, możemy już teraz przystąpić do zbadania drugiego z pośród wspomnianych skrajnych przypadków.

Równanie warunkowe (10) spełnia się identycznie dla q równego zeru, jakiekolwiek byłoby równocześnie p. Możliwość ta odpowiada oczywiście elipsoidzie obrotowej spłaszczonej jako figurze równowagi płynu. Na pierwszy rzut oka zdawałoby się, jakoby spełniało się ono identycznie także dla p równego zeru i to wobec dowolnych wartości na q: nie trudno jednak spostrzedz, że pod tym względem sprawa ma się nieco odmiennie i że zachowywanie się w tej mierze równania (10) zależy od znaku, z jakim trójmian $(1-p^2-q^2)$ występuje w rzeczonem równaniu. Jakoż w istocie, dla znikającego η funkcya arctang η może stawać się równą zeru, albo π, stosownie do tego, czy η zbliża się do zera od strony dodatnich, czy też ujemnych na η wartości. Pozostając więc, jak

---

[1]) Wyraz pierwszy, tj. $4p$ lognat p, równy ilorazowi 4 lognat $p : p^{-1}$, przybiera wprawdzie dla $\lim p = 0$ wartość pozornie nieoznaczoną w kształcie $\infty : \infty$, ta jednak za użyciem zwykłych metod rachunku różniczkowego okazuje się równą zeru.

stale dotychczas, przy dodatnich na p i q wartościach, zera nie wykluczając, widzimy, że funkcya

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{arctang}\left(\frac{2p}{1-p^2-q^2}\right)$$

dla p nieograniczenie malejącego sama będzie zdążała do zera, pod warunkiem, że

$$1-p^2-q^2>0,$$

który to warunek, w razie znikania ilości p, sprowadza się po prostu do $q<+1$. Jeżeli więc spełnia się ten warunek, w takim razie równanie (10) spełnione zostanie identycznie, gdy położymy $p=0$, dla wszelkich na q wartości dodatnich, byle mniejszych od $+1$. W przeciwnym razie, tj. dla wartości na q większych od dodatniej jednostki, równanie (10) dla p równego zeru nie spełnia się, biorąc na ogół, identycznie, co zresztą nie wyklucza jeszcze możebności spełnienia się jego dla pewnej oznaczonej, ewent. dla pewnych oznaczonych na q wartości. Rzeczywiście, zobaczymy niebawem, że może się to wydarzyć, ale tylko w jednym razie, a to dla $q^2=+3$, tj. dla $q=1{\cdot}73205\ldots$; mianowicie wówczas, i tylko wówczas, równość (10) może się ostać wobec dwóch naraz postulatów: $p=0$, a równocześnie $q>+1$.

Uważając p za bardzo małą ilość dodatnią, znajdziemy dla logarytmowego wyrazu L' w równaniu (10) wartość następującą

$$(45)\quad 4L'=\mathrm{lognat}\left[\frac{p^2+(q+1)^2}{p^2+(q-1)^2}\right]=\mathrm{lognat}\left(\frac{q+1}{q-1}\right)^2+$$
$$+\mathrm{lognat}\left[1+\frac{p^2}{(q+1)^2}\right]-\mathrm{lognat}\left[1+\frac{p^2}{(q-1)^2}\right],$$

gdzie głoska L' służy tymczasowo do skrócenia. Ponieważ dla p blizkiego zera, parametr $q>0$ nie może być, jak to okazaliśmy przed chwilą, poblizkim dodatniej jednostki, przeto obadwa ostatnie wyrażenia logarytmowe będzie wolno rozwinąć na zbieżne szeregi postępujące według maleńkiej ilości

$$\left(\frac{p}{q+1}\right)^2,\ \text{wzgl.}\ \left(\frac{p}{q-1}\right)^2.$$

Poprzestając na pierwszem przybliżeniu, po opuszczeniu wyrazów zawierających potęgi wyższe nad p^3, otrzymamy

$$(46) \qquad 4L' = \text{lognat}\left(\frac{q+1}{q-1}\right)^2 + \left(\frac{p}{q+1}\right)^2 - \left(\frac{p}{q-1}\right)^2,$$

skąd

$$(47) \qquad L' = \tfrac{1}{4}\,\text{lognat}\left(\frac{q+1}{q-1}\right)^2 - \frac{p^2 q}{(q^2-1)^2}.$$

Teraz należy odróżnić dwie alternatywy, według tego, czy q jest mniejsze, czy też większe od dodatniej jednostki.

A. Jeżeli $q < +1$, to dla bardzo małych dodatnich wartości na p, ułamek

$$\frac{2p}{1-p^2-q^2} = u$$

posiada również bardzo małą wartość dodatnią, a funkcyę cyklometryczną występującą w równaniu (10) można rozwinąć podług wzoru

$$(48) \qquad \text{arctang}\, u = u - \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5 - \ldots$$

Ograniczając dokładność tego rozwinięcia i następujących po sześcian maleńkiej ilości p włącznie, znajdujemy nasamprzód

$$(49) \qquad \tfrac{1}{2}\,\text{arctang}\left(\frac{2p}{1-p^2-q^2}\right) = \frac{p}{(1-q^2)}\left[1 - p^2 \cdot \frac{3q^2+1}{3(1-q^2)^2}\right].$$

Jeżeli teraz tę wartość, oraz powyższą na L' podstawimy do równania (10), pomnożywszy je wpierw, celem pozbycia się ułamków, przez ilość $(p^2+q^2)^3$ zawsze dodatnią, jeżeli dalej wykonamy naznaczone tam działania i otrzymaną równość pomnożymy przez $3(1-q^2)^3$, a więc przez ilość, która stosownie do uczynionych zastrzeżeń, jest różna obecnie od zera, to po opuszczeniu wyrazów zawierających p^4, tudzież wyższe potęgi malutkiej ilości p, otrzymamy rezultat w kształcie

$$(50) \qquad p\,(H - K \cdot p^2) = 0,$$

gdzie gwoli krótkości położyliśmy

$$(51) \qquad H = 3\,q^2\,(1-q^2)^2\,[q\,(9-7\,q^2)-(9-q^2)\,(1-q^2)\,L],$$

$$(52) \qquad K = q\,(18\,q^6-q^4-18\,q^2+9)-3\,(2\,q^2+3)\,(1-q^2)^3\,L,$$

$$(53) \qquad L = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{lognat}\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^2,\ q<+1.$$

Równanie (50) przedstawia wzajemną zależność funkcyjną obydwóch zmiennych parametrów p, q, w razie, jeżeli czynią one zadość uczynionym zastrzeżeniom: bardzo małych dodatnich wartości na p, a równocześnie q mniejszego od dodatniej jednostki. Widzimy nasamprzód, że równanie (50), a więc i (10) spełni się wówczas dla p równego zeru bez względu na równoczesną wartość parametru q, byle tylko mniejszą od $+1$, co zresztą było do przewidzenia już z pierwotnego związku (10).

18. Byłoby jednak przedwczesnem upatrywać w tym objawie oznakę istnienia nowych figur równowagi, występujących jakoby na tym obszarze zmienności parametrów p i q, pomimo, że analogiczny, a rozważany już przez nas odwrotny przypadek: q równego zeru, a p dowolnego, zdawałby się za tem przemawiać. Należy bowiem pamiętać, że samo pojawianie się rzeczywistych i dodatnich na p, q pierwiastków w równaniu (10) jest wprawdzie koniecznym, ale jeszcze niedostatecznym warunkiem istnienia takich figur równowagi i że dopiero spełnienie się drugiego warunku: dodatnich na Ω wartości, z równania (11) płynących, może ich istnienie zapewnić. Otóż ten drugi warunek nie spełnia się obecnie, jak to zaraz zobaczymy.

Dla p znikającego, a q równocześnie nie przekraczającego dodatniej jednostki, otrzymujemy z (11) bezpośrednio

$$(54) \qquad \Omega = \frac{(q^2-3)}{q^3}\cdot\tfrac{1}{4}\,\mathrm{lognat}\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^2+\frac{3}{q^2} = \Phi\,(q),$$

a nie trudno wykazać, że funkcya $\Phi\,(q)$ na rozważanym tutaj obszarze zmienności parametru q przybiera tylko ujemne wartości.

Rozwinąwszy naturalny logarytm na szereg postępujący według potęg zmiennej q, a zawsze, jak wiadomo, zbieżny dla $q<+1$, otrzymamy po uproszczeniach

$$(55) \qquad \Omega = -[(\tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{3})\, q^2 + (\tfrac{3}{7} - \tfrac{1}{5})\, q^4 + (\tfrac{3}{9} - \tfrac{1}{7})\, q^6 + \ldots];$$

tutaj każdy współczynnik, np. potęgi q^{2m}, ma postać

$$\left(\frac{3}{2m+3} - \frac{1}{2m+1}\right), \text{ tj. } + \frac{4m}{(2m+1)\,(2m+3)},$$

jest więc stale dodatni, cała więc prawa strona ostatniej równości jest ujemna, co dostatecznie świadczy o niemożliwości istnienia figur równowagi w rozpatrywanym tu przypadku szczegółowym.

Powracając do warunkowego równania (50), możnaby jednak oczekiwać, że stałoby mu się zadość, gdybyśmy przyjęli drugi czynnik, tj. $(H - K \,.\, p^2)$ równym zeru i dobrali wartość zmiennej q w taki sposób, iżby wynikająca z takiego przypuszczenia wartość

$$(56) \quad p^2 = \frac{H}{K} = \frac{3\,q^2\,(1-q^2)^2 . [q\,(9-7\,q^2) - (9-q^2)\,(1-q^2)\,L]}{q\,(18\,q^6 - q^4 - 18\,q^2 + 9) - 3\,(2\,q^2 + 3)(1-q^2)^3 L}$$

okazała się nietylko bardzo małą, ale także dodatnią. Zobaczymy jednak zaraz, że owa przypuszczalna — rzeczywista i dodatnia — wartość na q, która czyniłaby zadość takim dwom wymaganiom — wcale nie istnieje.

Jakoż w istocie budowa funkcyi ułamkowej, znajdującej się po prawej stronie ostatniego równania, jest tego rodzaju, że nieograniczone zbliżanie się jej do zera, a wreszcie zniknięcie jej możnaby sobie wyobrazić w dwojaki tylko sposób: albo za sprawą czynnika $3\,q^2\,(1-q^2)^2$ jako następstwo zdążania także i samejże zmiennej q do zera, albo też skutkiem znikania drugiego czynnika znajdującego się w liczniku, a ujętego w nawias kwadratowy. Nietrudno jednak okazać, że każde z tych dwóch przypuszczeń doprowadza do sprzeczności z uczynionemi zastrzeżeniami [1]).

---

[1]) Wydawałoby się z pozoru, że w inny jeszcze sposób możnaby prawą stronę równania (56) przymusić do zniknięcia, mianowicie dozwalając parametrowi q, a tem samem i mianownikowi owego wyrażenia wzrastać do nieskończoności. Przypuszczenie takie jest jednak niedozwolone, jako sprzeczne z koniecznym tutaj warunkiem $q < +1$. Zresztą dla lim $q = \infty$ prawa strona równania (56) nietylko nie staje się blizką zera, lecz owszem przybiera wartość nieskończenie wielką ujemną. — Przypominamy, że licznik H nie może stawać się zerem skutkiem znikania czynnika $(1-q^2)^2$, gdyż dodatnia wartość parametru q nie może być obecnie równa $+1$. Zob. ust. 16 pod koniec.

W pierwszym razie, przyjmując także i dla q bardzo małą wartość dodatnią, mielibyśmy najpierw

$$(57) \qquad L = \tfrac{1}{4} \operatorname{lognat} \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^2 = q\,(1 + \tfrac{1}{3} q^2 + \tfrac{1}{5} q^4 + \ldots);$$

urywając ten szereg na trzecim wyrazie, podstawiając tę wartość po prawej stronie równania (56), po redukcyach i po opuszczeniu potęg maleńkiej rzekomo ilości q wyższych ponad 5-tą, otrzymalibyśmy

$$p^2 = -\tfrac{1}{3} q^2 (1 - q^2)^2,$$

a więc związek niemożliwy, gdyż ilość dodatnia p^2 nie może być równa ujemnej, jaką jest tutaj prawa strona.

W drugim razie możnaby się oddawać nadziei, że w najbliższem sąsiedztwie — na prawo albo na lewo — tych wartości na q, które spełniają równanie

$$(58) \quad f(q) = q\,(9 - 7q^2) - (9 - q^2)(1 - q^2) . \tfrac{1}{4} \operatorname{lognat} \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^2 = 0,$$

licznik H prawej strony równania (56) będzie przybierał bardzo małe wartości, skutkiem czego także cała prawa jego strona stawać się będzie ilością blizką zera dodatnią.

Szczegółowe badanie okazuje[1]), że równanie (58), oprócz pięciokrotnego pierwiastka równego zeru, posiada tylko jeden rzeczywisty dodatni pierwiastek, mianowicie $q = +1{\cdot}37597\ldots$; wynik ten stoi jednak w oczywistej sprzecznosci z postulatem $q < +1$, bez którego spełnienia się poprzednie nasze rozwinięcia, a w szczególności funkcyi arctang, byłyby nieważne. Tak więc odpada całkiem pierwsza alternatywa, a pozostaje jeszcze do rozważenia druga.

B. Jeżeli powtóre przyjęlibyśmy $q > +1$, to wzór (47) nie przestałby wprawdzie obowiązywać, natomiast wzór (48), a więc także (49) musiałby uledz zmianie, argument

---

[1]) Znajduje się m. i. z łatwością $f(0) = 0$; $f(q) = +\frac{8}{15} q^5$, gdy q jest ilością bardzo małą; $f(0{\cdot}5) = +0{\cdot}02018$; $f(0{\cdot}75) = +0{\cdot}21897$; $f(\frac{9}{7}) = +0{\cdot}494$; $f(1{\cdot}0) = +2{\cdot}000$; $f(2{\cdot}0) = -29{\cdot}76$. Wobec obowiązującego tutaj warunku $q < +1$ nie zachodzi zresztą potrzeba badania zachowywania się funkcyi $f(q)$ dla wartości q przekraczających jednostkę dodatnią.

$$\frac{2p}{1-p^2-q^2} = -v$$

funkcyi cyklometrycznej staje się bowiem wówczas ujemnym. Ponieważ, zawsze w przypuszczeniu bardzo małych dodatnich wartości na p, a tem samem na v, mamy

$$(59) \qquad \operatorname{arctang}(-v) = \pi - \operatorname{arctang} v = \pi - (v - \tfrac{1}{3}v^3 + \ldots),$$

przeto, ograniczając, jak poprzednio, dokładność rozwinięć po trzecią potęgę maleńkiej ilości p włącznie, będziemy mieli najpierw

$$(60) \qquad \tfrac{1}{2}\operatorname{arctang}\left(\frac{2p}{1-p^2-q^2}\right) = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctang}\left(-\frac{2p}{(q^2-1)+p^2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{p}{(q^2-1)}\left[1 - p^2 \cdot \frac{3q^2+1}{3(q^2-1)^2}\right],$$

gdzie wyraz proporcyonalny do p^3 okaże się nawet zbytecznym.

Podstawiając tę wartość, jakoteż daną związkiem (47) w równanie (10) pomnożone wprzód przez $(p^2+q^2)^3$, po opuszczeniu już drugiej [1]) i wyższych potęg bardzo małej ilości p i po łatwych redukcyach otrzymamy

$$p\,[q(7q^2-9) + (q^2-1)(q^2-9)L] - \frac{\pi}{2}q(q^2-1)(q^2-3) = 0,$$

skąd

$$(61) \qquad p = \frac{q(q^2-1)(q^2-3)}{q(7q^2-9)+(q^2-1)(q^2-9)L} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad q > +1.$$

Ażeby z tego równania wypadła na p wartość bardzo mała a zarazem dodatnia (jak sobie tego życzymy) musiałby licznik stawać się ilością bardzo blizką zera, a że w obecnym przypadku q jest większe od $+1$, więc mogłoby to nastąpić tylko wówczas, gdy q będzie blizkie wartości $\sqrt{3}$, tj. 1·73205... pod warunkiem jednak,

---

[1]) Zachowywanie się ilości p i q na granicy ich znikania jest o tyle odmienne, że w odpowiednich wzorach przybliżonych najniższą potęgą bardzo małej ilości q jest druga, podczas gdy obecnie najniższą potęgą ilości p dążącej do zera jest już pierwsza.

że mianownik ostatniego wyrażenia przybierze równocześnie wartość różną od zera. Warunek ten spełnia się, bezpośredni bowiem rachunek przekonywa, że dla $q = +1{\cdot}73205$ mianownik rzeczonego ilorazu jest dodatni i wynosi bardzo blizko $+12{\cdot}88$. Stąd wnosimy, że parametr p będzie rzeczywiście bardzo małą ilością dodatnią, jeżeli q przybierać będzie wartości leżące w pobliżu $\sqrt{3} = 1{\cdot}73205$, a mianowicie od tej ilości cośkolwiek większe. W granicznym przypadku $p = 0$ otrzymuje się jednoznacznie $q^2 = 3$.

Dla bardzo małych dodatnich wartości na p mamy więc $q = \sqrt{3} + \eta$, gdzie η jest bardzo małą ilością dodatnią, której kwadraty i wyższe potęgi będzie wolno opuścić. Po wstawieniu wartości równanie (61) dostarczy natenczas $p = +1{\cdot}119758 \,.\, \eta$, skąd

$$q = \sqrt{3} + \eta = 1{\cdot}73205 + 0{\cdot}89305 \,.\, p, \tag{62}$$

pod warunkiem, że dodatnia ilość p będzie zdążała do zera.

19. Następująca poniżej gotowa tabelka liczbowa, będąca wynikiem długotrwałych, mozolnych rachunków [1]), podaje obok liczby porządkowej wiersza poziomego wzajemną zależność obydwóch zmiennych parametrów p, q, tudzież (w ostatniej kolumnie) zależną od nich, a najważniejszą dla nas ilość Ω, proporcyonalną do kwadratu chyżości kątowej. Uprzedzić jednak musimy, że tablica ta, we wszystkich jej wierszach, z wyjątkiem ostatniego, podaje tylko jednę wartość, a mianowicie różną od zera, funkcyi dwuwartościowej $q = \psi(p)$, druga bowiem jej wartość, odpowiadająca, jak wiemy, elipsoidzie obrotowej spłaszczonej, jest stale zerem, dla wszelkich dodatnich na p wartości. Wspomnianą dwuwartościowość funkcyi q możnaby zresztą uwydatnić pisząc

$$q \,.\, [q - \psi(p)] = 0, \tag{63}$$

gdzie symbol $\psi(p)$ oznaczałby teraz już tylko jednowartościową funkcyę, tę mianowicie, której kolejne wartości liczbowe zestawiliśmy w 3-ciej kolumnie naszej tablicy, a która odpowiada postaciom równowagi różnym od elipsoidy.

---

[1]) Rozpoczętych jeszcze w 1881 r., wykonanych przeważnie w latach 1902 i 1908, a kontrolowanych w roku ubiegłym.

TABLICA

podająca wzajemną zależność zmiennych p, q i Ω dla większych chyżości kątowych.

	p	$q = \psi(p)$	$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$
1.	0·000000	1·732051	+ 1·000000
2.	0·020000	1·745812	0·970018
3.	0·089357	1·787134	0·880777
4.	0·200000	1·841814	0 769740
5.	0·500000	1·929709	0·578790
6.	0·778432	1·946080	0·473131
7.	0·964739	1·929478	0·422247
8.	1·241908	1·862862	0·364527
9.	1·430054	1·787568	0·333801
10.	1·658824	1·658824	0·302941
11.	2·000000	1·368036	0·266403
12.	2·205740	1·102870	0·248421
13.	2·370675	0·790225	0·235699
14.	2·487379	0·414563	0·227504
15.	2·529308	0·000000	0·2246656

Konstrukcyę tej tabelki oparłem na kolejnem rozwiązywaniu dość licznych równań przestępnych typu (10), posługując się przygodnie w tym celu d w o m a nieco różnymi sposobami, według tego, który z nich w danym razie zalecał się większą prostotą.

Z nich pierwszy, bardziej bezpośredni, polegał na przyjmowaniu już z góry pewnej oznaczonej wartości liczbowej na p (np. $p = 0{\cdot}5$), a następnie na rozwiązywaniu zapomocą kolejnych prób, wspartych dwojaką interpolacyą, przestępnego równania (10), zawierającego skutkiem tego już tylko jednę niewiadomą ilość $q = \psi(p)$ i na poszukiwaniu, w przypuszczeniu wielowartościowości funkcyi ψ, możliwie istniejących kilku na q pierwiastków owego równania. Sposobu tego użyłem zresztą tylko w czterech razach, mianowicie dla wartości (przyjmowanych kolejno *a priori*) na p wynoszących 0·02, 0·20, 0·50 i 2·00, uwidocznionych wśród tabelki w wierszach 2-gim, 4-tym, 5-tym i 11-tym.

Drugi ze wspomnianych sposobów, co do skuteczności tam-

temu równoważny, a często od niego dogodniejszy, zasadzał się na przyjęciu, zaraz z góry, wartości stosunku $\frac{q}{p} = m$ obydwóch zmiennych, równym pewnej „okrągłej“ liczbie m, całkowitej lub ułamkowej, takiej jak np. 2, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$ itp. Wówczas ustalony taki związek, czy to $q = m.p$, czy też, stosownie do dogodności rachunku, $p = \frac{1}{m} q$ (gdzie m jest znane), pozwalał na usunięcie w równaniu (10) jednej z dwóch niewiadomych p albo q, poczem samo rozwiązywanie jego odbywało się dalej już zwyczajnym trybem. Najważniejsze stadya tych rozwlekłych, ale nieuniknionych obliczeń podaję jak najzwięźlej w osobnym dodatku, ażeby właściwego przedmiotu naszych rozważań nie wikłać drugorzędnymi wywodami [1]). Tutaj zauważę tylko, że niejednostajne wzrastanie w tabelce parametru p, uważanego przecież za zmienną niezależną, jest tylko prostem następstwem używania dwóch różnych, wyżej wyłuszczonych metod rozwiązywania kolejnych równań przestępnych typu (10).

Po wyznaczeniu liczbowych wartości q jako funkcyi zmiennej niezależnej p, kolumna czwarta naszej tabelki, podająca odpowiednie wartości na Ω, a więc i na każdorazową chyżość kątową ω, została obliczona już bezpośrednim rachunkiem według wzoru (11). Widać stamtąd, że obszar zmienności funkcyi Ω, który dla elipsoidy obrotowej spłaszczonej sięgał od zera tylko po 0·2246656, a po jeszcze mniejszą wartość graniczną (0·18709) dla elipsoidy nieobrotowej Jacobi'ego, jakoteż dla figur wykrytych przez lorda Kelvin'a i przez Henryka Poincaré, że ten obszar zmienności rozszerzony został tu na przestrzeń od zera aż po + 1·00, a więc przeszło w czwórnasób.

20. Na zapytanie, czy i jakie wartości parametrów p, q odpowiadają jeszcze większym niż 1·00 wartościom ilości Ω, nie umiemy w tej chwili odpowiedzieć z całą stanowczością. Jest jednak rzeczą możliwą, że analogiczne do niniejszego poszukiwanie, przeprowadzone dla różnoosiowej elipsoidy Jacobi'ego, zdołałoby ciemną tę kwestyę choć w części rozjaśnić.

Z późniejszych poszukiwań Poincaré'go [2]) zdawałoby się

---

[1]) Zob. Dodatek V-ty.

[2]) H. Poincaré w Bulletin astronomique, T. II, p. 117, reprodukowane

wprawdzie wynikać, że dla tak wielkich chyżości kątowych względna równowaga płynu staje się niemożebną, i to jakąkolwiek postać zechcielibyśmy mu nadać, wszelako — jak słusznie ostrzega Tisserand[1]) — należy w trudnych tych dociekaniach zachować znaczną powściągliwość w wyciąganiu daleko sięgających wniosków z przesłanek nie całkiem jeszcze bezpiecznych. Gdybyśmy wspomnianemu co dopiero twierdzeniu Poincaré'go w zupełności zaufać mogli, to, wobec wyników otrzymanych w tej tu naszej pracy, mielibyśmy może niejakie prawo, ażeby momenta negacyi, zawartej w twierdzeniu znakomitego uczonego francuskiego, uzupełnić elementami affirmacyi. Zbierzmy w tym celu jak najkrócej ustalone dotychczas wyniki.

a. Gdy $\Omega > 0$ jest bardzo małe, istnieją rozmaite figury równowagi, takie jak dwie różne elipsoidy obrotowe, oraz jedna nieobrotowa, dalej figury pierścieniowate, tudzież postaci nieobrotowe podobne do biszkoptu, albo nawet do gruszki. Kres chyżości kątowej, dla której istnienie tych figur jest jeszcze możliwe, nie został — z wyjątkiem elipsoid — dotychczas jeszcze należycie zbadany.

b. Gdy $0 < \Omega < 0{\cdot}18709$, uważany płyn może pozostawać w równowadze, przybierając postać jednej z trzech wspomnianych elipsoid.

c. Gdy $0{\cdot}18709 < \Omega < 0{\cdot}2246656$, równowaga płynu w postaci elipsoidy nieobrotowej staje się już niemożebną, natomiast jest ona jeszcze możebna w postaci jednej z dwóch elipsoid obrotowych, Maclaurin'a lub d'Alembert'a.

d. Nierównością $\Omega > 0{\cdot}2246656$ cechujący się obszar zmienności znaczniejszych już chyżości kątowych ω nie został dotychczas zbadany, skutkiem czego nie można było powiedzieć, ażali wówczas wogóle istnieją lub nie istnieją jakie postaci równowagi.

---

u Tisserand'a, l. c. II, § 60, p. 100—109. Dowód opiera się na twierdzeniu Green'a.

[1]) Tisserand (l. c.), zwróciwszy uwagę, że już dla $\Omega > 0{\cdot}5$ eliptyczny cylinder (nieskończenie długi, a więc tylko fikcyjny) przestaje być możliwą postacią równowagi, dodaje co następuje: „M. Poincaré a réussi à prouver d'une manière générale que l'équilibre relatif est impossible avec une figure quelconque, si l'on a $\omega^2/2\pi\varrho > 1$, ou, du moins, il a fait voir que dans ce cas la résultante des forces, supposée être partout normale à la surface du fluide, serait en certains points dirigée, non pas vers l'intérieur, mais vers l'extérieur de la surface, de sorte que le fluide y serait projeté en dehors...".

Wprawdzie ta kwestya została z jednej strony wyjaśniona ważnem odkryciem Poincaré'go, tem mianowicie że

e. dla $\Omega > +1$ nie istnieje żadna wogóle postać równowagi płynu, to jednak zachowywanie się jego wewnątrz interwalu $0{\cdot}2246656 < \Omega < +1$ pozostawało mimo to i nadal jeszcze nierozświetlone.

Ten właśnie obszar zmienności (*d*), tworzący, jak widać, jedyną lukę w dającym się pomyśleć nieograniczonym pochodzie zmienności funkcyi Ω od zera do $+\infty$, stanowi przedmiot naszych

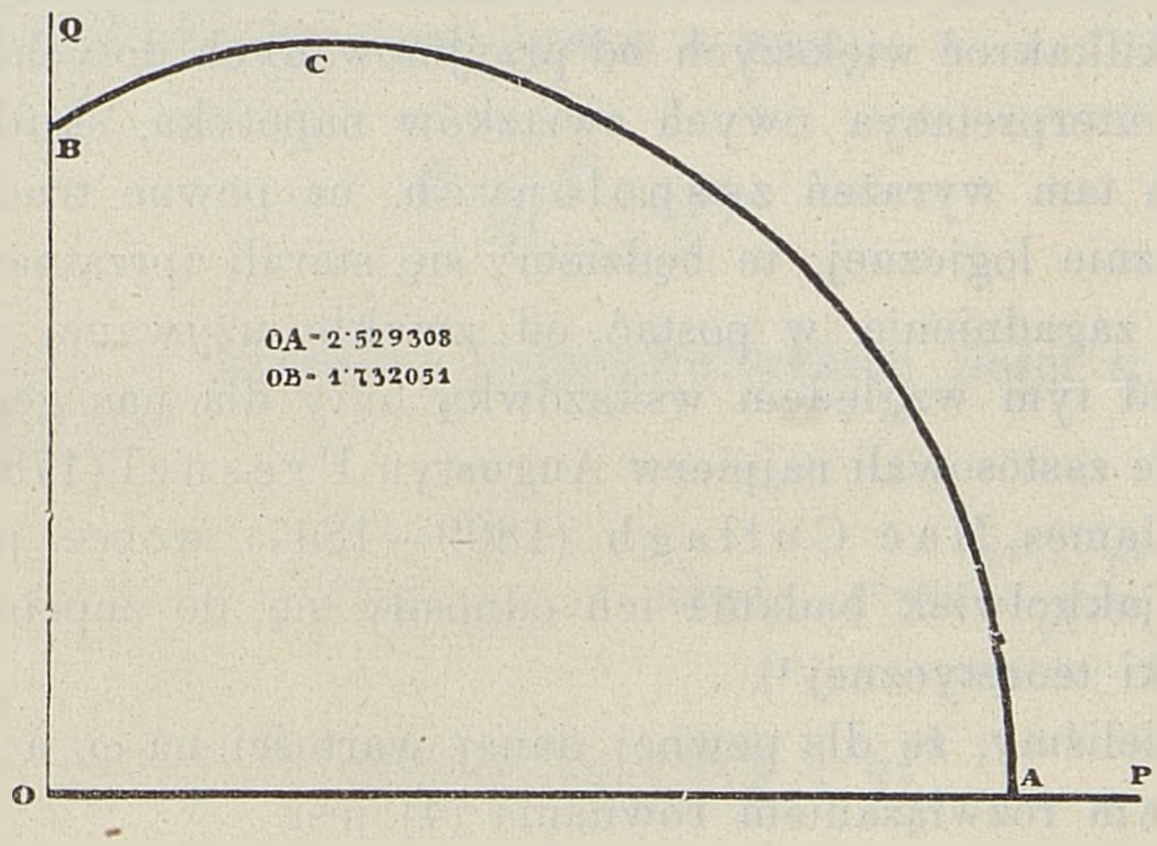

Fig. 1.

poszukiwań. Lukę tę zdołaliśmy, jak nam się zdaje, wypełnić, okazując mianowicie, że na owej wspomnianej przestrzeni ($0{\cdot}2246656 < \Omega < +1$) istnieją nieznane dotychczas postaci równowagi kinetycznej. Zobaczymy poniżej, że powierzchnie odpowiadające tym nowym postaciom są, biorąc ogólnie, stopnia czwartego.

Wartości na q i Ω odpowiadające nieuwidocznionym w tabelce wartościom na p, jak np. 0·3, 0·4 itp. możnaby było, gdyby o nie chodziło, wynaleźć łatwo zapomocą często tu używanej t. zw. parabolicznej interpolacyi, polegającej na przesunięciu ogólnej paraboli przez trzy sąsiednie punkty krzywej $q = \psi(p)$, gdzie zmiennym parametrom p, q nadane zostało znaczenie współrzędnych prostokątnych. Tak też pojęty został na obocznej figurze szlak grubszy, złożony z dwóch części odrębnych: z nieograniczonej linii prostej

OP, oraz z niedomkniętej linii krzywej ACB. Pierwsza z nich, nacechowana warunkiem $q = 0$ dla wszelkich na p wartości, odpowiada obydwom elipsoidom obrotowym spłaszczonym, t. j. Maclaurina i D'Alembert'a, natomiast druga, odpowiadająca tabelarycznym wartościom zmiennych parametrów p i q, charakteryzuje nowe postaci równowagi, wprawdzie obrotowe, ale różne od elipsoidy.

21. Pozostaje jeszcze ustalić geometryczne znaczenie równań, a wzgl. nierówności, przedstawiających te nowe postaci kinetycznej równowagi, których istnienie wykazaliśmy powyżej dla chyżości kątowych kilkakroć większych od przyjmowanych dotychczas. Bezpośrednia interpretacya owych związków napotyka, skutkiem występujących tam wyrażeń zespolonych, na pewne trudności natury wyłącznie logicznej: te będziemy się starali uprzątnąć ujęciem warunków zagadnienia w postać od zwykle używanej nieco odmienną. Pod tym względem wskazówką były dla nas genialne pomysły, jakie zastosowali najpierw Augustyn Fresnel (1788—1827), a po nim James Mac Cullagh (1809—1847) wobec podobnych trudności, jakkolwiek badania ich odnosiły się do zupełnie innego działu fizyki teoretycznej [1]).

Widzieliśmy, że dla pewnej danej wartości na ω, a więc i na Ω, ogólnem rozwiązaniem równania (4) jest

$$\varepsilon = p + qi, \tag{5}$$

[1]) Mam tu na myśli niezmiernie pomysłową interpretacyę wyrażeń urojonych, wzgl. zespolonych, jakie napotkał Fresnel w swej teoryi zupełnego odbicia się spolaryzowanego światła na granicy dwóch środowisk o różnej gęstości optycznej, podaną nasamprzód (r. 1818) w Annales de Chimie et de Physique (2), Vol. XXIX, pag. 175, a przedrukowaną w Oeuvres complètes de Fresnel, I, p. 253 seq. Pomysł kapitalny, który następnie z takiem powodzeniem zastosował Mac Cullagh do zjawisk spolaryzowanego światła odbitego od powierzchni metalów, najpierw w dwóch artykułach p. t. On the Metallic Reflexion, ogłosz. (1834 r.) w Proceed. of the Irish Acad. I, 2, pag. 159 i II, p. 375, następnie w pracy On the Laws of Metallic Reflexion and Refraction, publ. w Transactions of the Irish Acad. Vol. XVIII' p. 1 (Dublin 1837). Te i tamte streszcza E. Verdet, Leçons d'optique physique, T. II, Paris 1870, pag. 432—435 i 564—570. Podobne wyobrażenia nasuwały się zresztą także przy sposobności pojawiania się wartości urojonych nie tylko dla określników przestrzeni, ale nawet dla bardziej od nich abstrakcyjnych określników czasu. Por. w tej mierze rozprawkę: Appell Paul, Interprétation des valeurs imaginaires du temps en mécanique, zamieszczoną w T. 87 Compt. rend. de l'Acad. d. Sciences.

gdzie każda z ilości q lub p może znikać z osobna, albo też obie będą posiadały wartości różne od zera. Tutaj interesuje nas właśnie ten ostatni, t. j. trzeci przypadek. Możliwość q równego zeru odpowiada bowiem dobrze znanej elipsoidzie, znikanie zaś parametru p jest tylko granicznym przypadkiem tamtego ($p < 0$, $q < 0$), zaczem nie wywołuje potrzeby wyróżniania jeszcze innej, a więc jakoby trzeciej jakiejś rzekomo istniejącej kategoryi badanych tu figur równowagi [1]).

Punktem wyjścia była dla nas elipsoida obrotowa spłaszczona o półosiach a i c, przyczem $a > c$, zaś $2c$ jest osią obrotu. Jeżeli mimośrodem elipsy tworzącej jest e, a więc

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} = e^2,$$

to, pamiętając o znaczeniu Laplace'owskich ilości ε, będziemy mieli według (3)

$$(64) \qquad \frac{c^2}{a^2} = 1 - e^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}, \quad \text{skąd} \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2},$$

zatem dla zespolonych wartości na $\varepsilon = p + qi$

$$(65) \qquad \frac{a^2}{c^2} = 1 + \varepsilon^2 = 1 + (p + qi)^2 = (1 + p^2 - q^2) + 2pqi,$$

jakoteż równanie elipsoidy w dogodniejszej niźli (1) postaci

$$(66) \qquad \frac{x^2 + y^2}{c^2(1 + \varepsilon^2)} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Wyciągając pierwiastek po obydwóch stronach równania (65), otrzymalibyśmy

$$(67) \qquad \frac{a}{c} = \alpha + \beta i,$$

---

[1]) Podkreślamy raz jeszcze znaczną różnicę pomiędzy możliwością znikania bądź to parametru q, bądź też p. Ilość q może stawać się, jak to widzieliśmy, zerem dla wszelkich wartości na p; natomiast p może znikać tylko dla jednej jedynej na q wartości, a mianowicie dla $q = \sqrt{3}$.

gdzie ilości α, β, zawsze rzeczywiste, wyznaczają się z równań

$$(68)\qquad \begin{aligned} 2\alpha^2 &= \sqrt{(1+p^2-q^2)^2+4p^2q^2}+(1+p^2-q^2),\\ 2\beta^2 &= \sqrt{(1+p^2-q^2)^2+4p^2q^2}-(1+p^2-q^2). \end{aligned}$$

Ponieważ obecnie iloraz $\frac{a}{c}$ jest, biorąc w ogólności, nierzeczywisty (równ. 67), przeto przynajmniej jedna z dwóch ilości a, c musi być zespolona, a ponieważ nie istnieje przyczyna, dla której należałoby tej albo tamtej ilości dawać pod tym względem pierwszeństwo, przeto celem nieuszczuplania ogólności rzeczy, należy przyjąć równocześnie obiedwie ilości a, c zespolonemi, t. j. położyć

$$(69)\qquad a = a_1 + a_2 i, \qquad c = c_1 + c_2 i.$$

To ustaliwszy, otrzymamy podług (67)

$$(70)\qquad \frac{a_1 + a_2 i}{c_1 + c_2 i} = \alpha + \beta i;$$

mnożąc po lewej stronie licznik i mianownik przez $(c_1 - c_2 i)$ a następnie przyrównywając osobno części rzeczywiste, a osobno urojone, napiszemy

$$(71)\qquad \alpha = \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2}{c_1^2 + c_2^2}, \qquad \beta = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{c_1^2 + c_2^2},$$

skąd jeszcze wyprowadzamy po łatwej przeróbce

$$(72)\qquad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2}{c_1^2 + c_2^2}, \quad \alpha^2 - \beta^2 = \frac{(a_1^2 - a_2^2)(c_1^2 - c_2^2) + 4 a_1 a_2 c_1 c_2}{(c_1^2 + c_2^2)^2}.$$

22. Analityczne oznaczenie jakiejkolwiek postaci równowagi wymaga podania miejsca wszystkich tych punktów nieograniczonej przestrzeni, w których masa płynu będącego w równowadze się znajduje i wyróżnienia ich od wszystkich pozostałych obszarów przestrzeni trójwymiarowej. Otóż do tego celu nadają się warunki graniczne w postaci nierówności o wiele lepiej, aniżeli używane pospolicie równania analityczne powierzchni osłaniającej daną masę. Nie dość bowiem, że masa taka może składać się z kilku części odrębnych, a więc być osłonięta kilku różnemi

powierzchniami, ale nadto z samego równania pewnej krzywej powierzchni, możliwie np. antyklastycznej[1]), nie można jeszcze powziąć wyobrażenia, po której jej stronie masa uważana ma się znajdować.

Takim warunkiem granicznym dla masy płynnej, posiadającej kształt pełnej elipsoidy obrotowej spłaszczonej, może być — ale nie musi być — podwójna nierówność

$$0 < g < +1, \tag{73}$$

gdzie krótko oznaczyliśmy

$$g = \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}. \tag{74}$$

W powyższej nierówności nie wolno opuścić granicy dolnej jakoby zbytecznej, z powodu, że wyrażenie g dla wszelkich rzeczywistych na x, y, z wartości posiada zawsze wartość dodatnią. Sama druga część owej nierówności, tj. $g < +1$, bez żadnego ponadto zastrzeżenia, mogłaby bowiem charakteryzować tylko niektóre partye znajdujące się wewnątrz uważanej powierzchni, a więc np. elipsoidę współogniskowo wydrążoną, o której nietrudno udowodnić, że nie może być postacią równowagi kinetycznej[2]). Jest jednak widoczne, że pojedyncza nierówność, taka jak $g < +1$, wystarczyłaby do wspomnianego celu, jeżelibyśmy wiedzieli już z góry, że g nie może być ujemne, a nadto, gdybyśmy dołączyli zastrzeżenie, że masa płynu ma być umieszczona we wszystkich punktach przestrzeni, dla których spełnia się owa nierówność.

Warunek graniczny w rodzaju (73), który dla rzeczywistych na g wartości może być bardzo dogodny, traci jednakże swoje zalety w razie zespolonych wartości tej zmiennej, a to z powodu niedostatecznie natenczas określonego pojęcia nierówności pomiędzy ilościami zespolonemi. Wprawdzie bliski jest domysł, że w aktual-

---

[1]) T. j. powierzchni, u której dwa główne promienie krzywizny (maxim. i minim.) są skierowane w strony przeciwne, jak np. u paraboloidy hyperbolicznej czyli powierzchni siodłowatej, albo w marynarskim pierścieniu po wewnętrznej jego stronie. Zob. Thomson, l. c. I, § 128.

[2]) Dowód na tę rzecz, będącą w związku z powinowatemi poszukiwaniami, zamierzam podać przy innej sposobności.

nej tu kwestyi nierówność taką jak np. $h + ki < m + ni$ należałoby interpretować w sensie mod $(h + ki) <$ mod $(m + ni)$, a więc jako $h^2 + k^2 < m^2 + n^2$, wszelako przypuszczenie to, acz wielce prawdopodobne [1]), pozostawia przecież niejaką niepewność. Uchylimy, jak mniemam, wszelką w tej mierze wątpliwość, wprowadzając stosowniejszy od (73) warunek graniczny.

23. Jakoż w istocie nic nas do tego nie zmusza, ażeby przedstawiać postać uważanej masy właśnie nierównością (73): owszem, wszelki równoważny z (73) warunek będzie się tak samo do tego celu nadawał. Za taki równoważny warunek możemy wziąć np. postanowioną apriorystycznie zbieżność nieskończonego szeregu

$$S = 1 + g + g^2 + g^3 + g^4 + \ldots \tag{75}$$

i to dla wszelkich możliwych, dodatnich na g wartości. Ponieważ dla $0 < g < +1$ szereg ten jest zbieżny i daje na sumę $\frac{1}{1-g}$, lecz i naodwrót, jeżeli ma być on zbieżnym, to dodatnia ilość g musi być mniejszą od dodatniej jednostki, przeto rzeczywiście obadwa wspomniane warunki są równoważne. To nam pozwoli uniknąć dochodzeń znaczenia nierówności pomiędzy występującemi tu ilościami zespolonemi i sprowadza rzecz naszą do kwestyi o wiele konkretniejszej, mianowicie do zbadania warunków zbieżności dwóch nieskończonych szeregów.

Jeżeli zmienna g jest zdolna przybierać zespolone wartości natenczas, kładąc w (75)

$$g = g_1 + i g_2 = \gamma (\cos \theta + i \sin \theta) = \gamma e^{\theta i}, \tag{76}$$

gdzie, biorąc bezwzględnie

$$\gamma = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$$

jest modułem, zaś θ argumentem ilości zespolonej $g_1 + i g_2$, a wreszcie e zasadą logarytmów naturalnych, to szereg (75) rozpadnie się na agregat dwóch nieskończonych szeregów

---

[1]) Wywód ten odpowiada w zupełności Fresnel'owskiej interpretacyi znaczenia „zespolonej amplitudy“ spolaryzowanego światła, o czem wspomnieliśmy już poprzednio.

$$(78)\qquad S=(1+\gamma\cos\theta+\gamma^2\cos 2\theta+\ldots)+i(\gamma\sin\theta+\gamma^2\sin 2\theta+\ldots)$$
$$=S_1+iS_2.$$

Jest rzeczą widoczną, że S będzie ilością skończoną wówczas i tylko wówczas, kiedy obadwa szeregi S_1 i S_2 będą zbieżne. Chodzi teraz właśnie o warunki konieczne i dostateczne takiej zbieżności.

Dla skończonego szeregu mamy tożsamość

$$(79)\qquad 1+g+g^2+\ldots+g^{n-1}=\frac{1-g^n}{1-g};$$

jeżeli położymy tutaj $g=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$, będzie kolejno

$$(79')\qquad \begin{aligned}&[1+\gamma\cos\theta+\gamma^2\cos 2\theta+\ldots+\gamma^{n-1}\cos(n-1)\theta]\\&+i[\gamma\sin\theta+\gamma^2\sin 2\theta+\ldots+\gamma^{n-1}\sin(n-1)\theta]\end{aligned}$$

$$=\frac{1-\gamma^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)}{1-\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{(1-\gamma^n\cos n\theta)-i\gamma^n\sin n\theta}{(1-\gamma\cos\theta)-i\gamma\sin\theta},$$

które to wyrażenie, po usunięciu wyrazu urojonego z mianownika, przybiera postać następującą

$$=\frac{1-\gamma\cos\theta-\gamma^n\cos n\theta+\gamma^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1-2\gamma\cos\theta+\gamma^2}$$
$$+i\frac{\gamma\sin\theta-\gamma^n\sin n\theta+\gamma^{n+1}\sin(n-1)\theta}{1-2\gamma\cos\theta+\gamma^2}.$$

Równość ta, jako oparta na identyczności (79), nie przestaje być prawdziwa dla wszelkich wartości na γ, θ oraz dla wszelkiej całkowitej i dodatniej wartości na n. Jeżeli więc n będzie zdążać do nieskończoności, obadwa szeregi (79′) stają się nieskończone i zamieniają się na S_1, a wzgl. na S_2, tak że

$$\left.\begin{aligned}S_1&=\frac{1-\gamma\cos\theta-\gamma^n\cos n\theta+\gamma^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1-2\gamma\cos\theta+\gamma^2}\\S_2&=\frac{\gamma\sin\theta-\gamma^n\sin n\theta+\gamma^{n+1}\sin(n-1)\theta}{1-2\gamma\cos\theta+\gamma^2}\end{aligned}\right\}\text{ dla }\lim n=\infty.$$

Stąd widać, że szeregom S_1 i S_2 zapewnimy zbieżność tylko wtedy, jeżeli stosownym doborem modułu $\gamma>0$ sprawimy, że dla n

nieograniczenie wzrastającego liczniki obydwóch ostatnich ułamków przybiorą wartości skończone[1]), co może i musi nastąpić tylko dla $\gamma \leqq +1$, bez względu na równoczesną wartość kąta θ, gdyż niepodobna dobrać takiej jego wartości, ażeby $\cos n\theta$ i $\sin n\theta$ stawały się równocześnie zerem. Domysł powyżej wyrażony doznaje więc potwierdzenia, a warunek graniczny (73) dla zespolonych na g wartości sprowadza się poprostu do zastrzeżenia, ażeby moduł ilości g nie przekraczał jednostki dodatniej, tj. aby było

$$g_1^2 + g_2^2 \leqq +1. \tag{81}$$

24. Jeżeli teraz w równaniu (74) za a, c podstawimy wartości (69), a otrzymane wyrażenie sprowadzimy do typowej postaci wyrażeń zespolonych, będzie najpierw

$$\begin{aligned} g = &\left[\frac{a_1^2 - a_2^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2}(x^2 + y^2) + \frac{c_1^2 - c_2^2}{(c_1^2 + c_2^2)^2} z^2\right] \\ &- 2i\left[\frac{a_1 a_2}{(a_1^2 + a_2^2)^2}(x^2 + y^2) + \frac{c_1 c_2}{(c_1^2 + c_2^2)^2} z^2\right], \end{aligned} \tag{82}$$

albo krótko

$$g = g_1 + i g_2, \tag{76}$$

gdzie ilości rzeczywiste g_1, g_2 mają widoczne znaczenie. Podstawiając następnie te wartości do nierówności (81), po należytych redukcyach otrzymamy szukany warunek graniczny w następującej postaci

$$\begin{aligned} &\frac{(x^2 + y^2)^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2} + 2\,\frac{(a_1^2 - a_2^2)(c_1^2 - c_2^2) + 4 a_1 a_2 c_1 c_2}{(a_1^2 + a_2^2)^2 (c_1^2 + c_2^2)^2}(x^2 + y^2) z^2 \\ &\qquad + \frac{z^4}{(c_1^2 + c_2^2)^2} \leqq +1; \end{aligned} \tag{83}$$

zaznaczanie, że lewa strona tej nierówności ma być $\geqq 0$, byłoby tutaj zbyteczne wobec tego, że $g_1^2 + g_1^2$ jest zawsze dodatnią ilością. Zastrzedz jednak należy, że współrzędne x, y, z mają przybierać kolejno wszystkie dające się pomyśleć wartości, byle tylko spełniające powyższą nierówność (83).

---

[1]) Mianowniki ich bowiem, dla rzeczywistych wartości na γ, $\theta > 0$ nie mogą nigdy stawać się zerem.

Kładąc jeszcze dla krótkości

$$a_1^2 + a_2^2 = h^2, \tag{84}$$

oraz zważając na związki (72), otrzymamy ostatecznie

$$\frac{(x^2+y^2)^2}{h^4} + 2(\alpha^2-\beta^2)\frac{(x^2+y^2)z^2}{h^4} + (\alpha^2+\beta^2)^2\frac{z^4}{h^4} \leqq +1, \tag{85}$$

co oznajmia, że dla znaczniejszych chyżości kątowych, kiedy tak p jak i q są różne od zera, postacią płynu znajdującego się w kinetycznej równowadze może być, biorąc w ogólności, powierzchnia obrotowa stopnia czwartego[1]).

Szczegółowa dyskusya warunku granicznego (85) doprowadza do wniosku, że w pewnych razach płyn będący w równowadze znajdzie się w przestrzeni zamkniętej powierzchnią ciągłą o jednej tylko powłoce, że w innych razach zewnętrzną jego osłoną będzie powierzchnia o dwóch powłokach. Nierówność (85) rozpada się w takich razach na dwie nierówności odrębne, przedstawiające podwójny warunek: istnienia płynu tylko wewnątrz jednej, a zarazem tylko na zewnątrz drugiej powłoki. Nie zatrzymując się obecnie nad wyróżnianiem obydwóch przypadków, zauważymy jedynie, że w bardzo szczegółowym przypadku q równego zeru, znika również β, a nierówność powyższa staje się wówczas

$$\left(\frac{x^2+y^2}{h^2} + \alpha^2\frac{z^2}{h^2}\right)^2 \leqq 1, \quad \text{albo wprost} \quad \frac{x^2+y^2}{h^2} + \alpha^2\frac{z^2}{h^2} \leqq +1,$$

(gdyż lewa strona nie może się stawać ujemną), cechuje więc tylko elipsoidę obrotową spłaszczoną, jak tego już z góry oczekiwaliśmy.

Dla małych wartości na q, a więc wartości na Ω mało co

---

[1]) W pracy p. t. O równowadze kinetycznej płynu nieściśliwego, ogłoszonej (1889 r.) w XIX tomie Rozpraw Wydziału matem.-przyrodn. Akademii Umiejętności w Krakowie, wykazałem, że z pomiędzy wszystkich dających się pomyśleć powierzchni zamkniętych, mających tę własność, że wszelka prosta przecina się z niemi jedynie w dwóch punktach, jedna tylko elipsoida (obrotowa albo nieobrotowa) może być powierzchnią równowagi pod wpływem grawitacyi i siły odśrodkowej. Pośrednio stąd można było wyprowadzić przynajmniej domysł, że dla większych chyżości kątowych należałoby figur równowagi poszukiwać pomiędzy powierzchniami wyższych stopni parzystych, a więc 4-go, 6-go itd., nieparzyste bowiem są niezamknięte.

większych od 0·2246656, postaci (85) różnią się bardzo niewiele od elipsoid obrotowych, jak o tem przekonywa rzeczywiste wykreślenie krzywych tworzących, które możnaby nazwać południkami. W miarę dalszego wzrostu ilości Ω postaci te oddalają się coraz bardziej od elipsoid, wypukłości ich na „równiku“ i po końcach osi obrotu wypłaszczają się stopniowo, a dla większych chyżości kątowych ω ruchu obrotowego przekształcają się w miseczkowate zagłębienia na obywóch „biegunach“, zaś w rodzaj rynienki obiegającej równik dokoła uważanej postaci. Figury 2 i 3 przedstawiają krzywe tworzące swym obrotem dwie z pośród takich powierzchni. Pierwsza z nich odpowiada wartości Ω równej 0·47313 (zatem wartościom na p i q równym 0·77843, a wzgl. 1·94608).

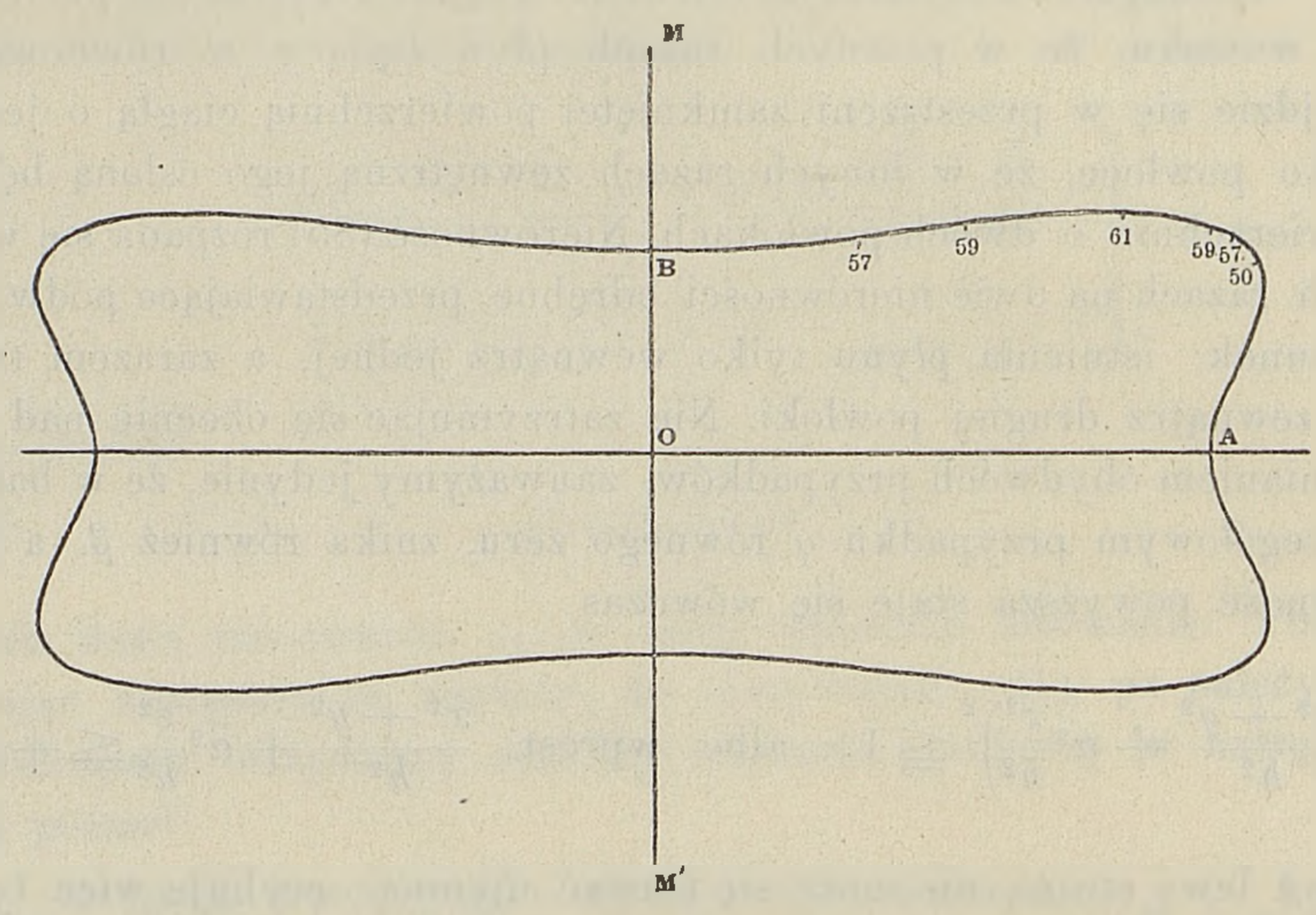

Fig. 2.

zaś druga, kształtem swym bardzo już oddalona od elipsoidy, należy do wartości Ω równej 0·76974, a więc do bardzo już znacznej chyżości kątowej [1]).

Zauważymy jeszcze, że parametr h w nierówności (85), decydujący o rozmiarach badanych tu figur równowagi, wyznacza

[1]) Wykreślenie takich krzywych tworzących, dla różnych, dowolnie obranych wartości na p i zależnych odeń wartości na q i Ω, uskutecznia się najdogodniej za użyciem współrzędnych biegunowych r, φ, θ.

się z warunku, ażeby masa płynu, bez względu na różność postaci, jakie może przybierać dla różnych na Ω wartości, posiadała zawsze tę samą, daną objętość V. Z uwagi, że w niniejszem poszukiwaniu ograniczyliśmy się do figur obrotowych, rzeczony warunek przedstawi się analitycznie jako równanie

$$2\pi \int (x^2 + y^2)\, dz = V,$$

gdzie całkowanie ma się rozciągać do wszelkich punktów przestrzeni, płynną masą objętych, ma więc na wszelki możliwy sposób spełniać graniczny warunek (85).

Na zakończenie jeszcze jedna uwaga. Interpretacya nierówności

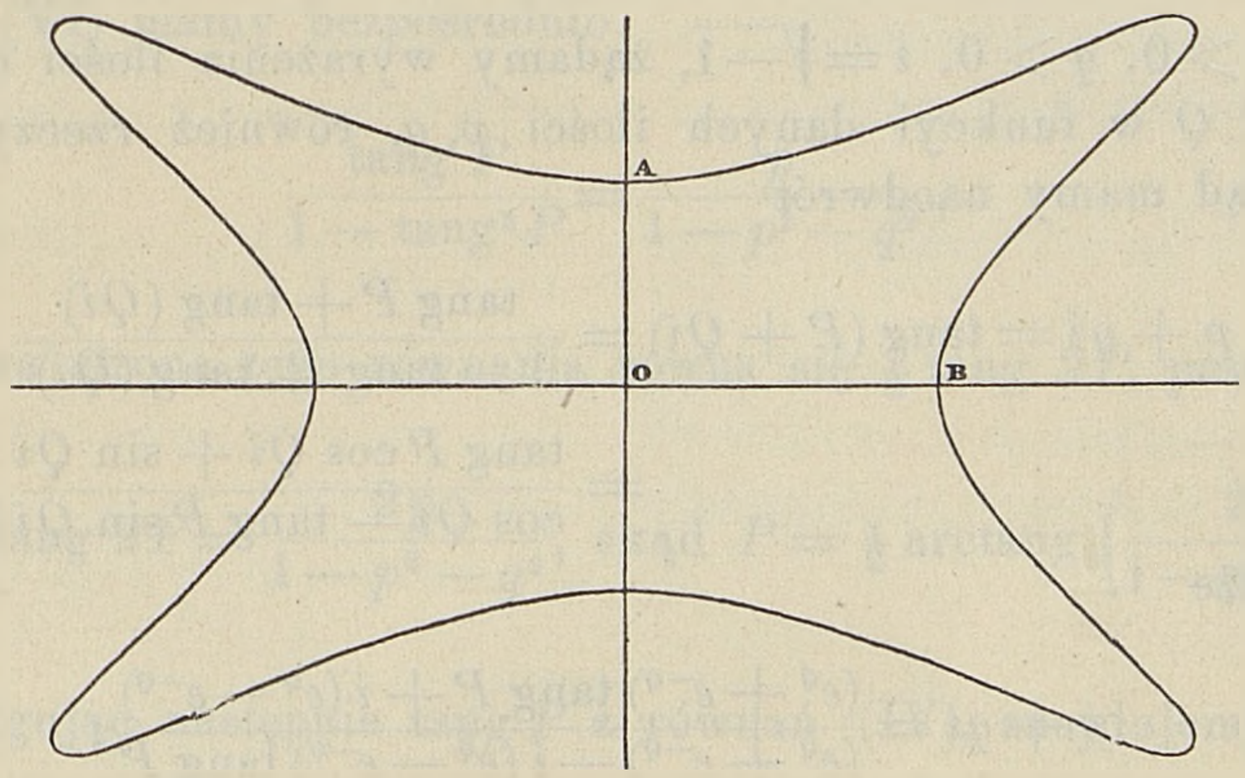

Fig 3.

zawierającej wyrażenie zespolone $g_1 + ig_2$, jako symbolu równoważnego modułowi tego wyrażenia, pozostawia resztkę jakiejś wątpliwości, pomimo że postępowanie tego rodzaju znajduje, jak to widzieliśmy, precedens i niejako sankcyę w innych działach fizyki matematycznej. Nie myślimy temu zaprzeczać, jakkolwiek sama istota fortelu, użytego przez nas we wzorach (75)—(81), pod względem logicznym wydaje się nam bez zarzutu.

Decydującym probierzem prawdziwości drugiej części

otrzymanego wyniku, tj. jakości samej powierzchni masy płynnej, byłoby oczywiście sprawdzenie *a posteriori*, ażali postać scharakteryzowana geometrycznie nierównością (85) czyni zadość warunkom równowagi, mającej nastąpić pod wpływem wzajemnej grawitacyi cząstek płynu, oraz siły odśrodkowej, wywołanej jednostajnym jego obrotem. Ponieważ jednak analityczne przedstawienie niezbędnej do tego celu funkcyi potencyalnej w dowolnym punkcie zewnętrznej osłony (85) owej masy natrafia na szczególniejsze trudności, przeto niepodobna na razie podjąć się takiego sprawdzenia.

Dodatek I (do ustępu 11-go).

Mając równanie

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{arctang}(p+qi) = P + Qi,$$

gdzie $p > 0$, $q > 0$, $i = \sqrt{-1}$, żądamy wyrażenia ilości rzeczywistych P, Q w funkcyi danych ilości p, q, również rzeczywistych.

Stąd mamy naodwrót

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} p + qi = \operatorname{tang}(P+Qi) &= \frac{\operatorname{tang} P + \operatorname{tang}(Qi)}{1 - \operatorname{tang} P \,.\, \operatorname{tang}(Qi)} \\ &= \frac{\operatorname{tang} P \cos Qi + \sin Qi}{\cos Qi - \operatorname{tang} P \sin Qi}, \end{aligned}$$

albo także

$$\text{(III)} \qquad p + qi = \frac{(e^{Q} + e^{-Q}) \operatorname{tang} P + i\,(e^{Q} - e^{-Q})}{(e^{Q} + e^{-Q}) - i\,(e^{Q} - e^{-Q}) \operatorname{tang} P};$$

mnożąc tę równość przez mianownik ostatniego ułamka, zawsze różny od zera, po przyrównaniu osobno części rzeczywistych, a osobno części urojonych, otrzymamy

$$\text{(IV)} \qquad \begin{aligned} p\,(e^{Q} + e^{-Q}) + q\,(e^{Q} - e^{-Q}) \operatorname{tang} P &= (e^{Q} + e^{-Q}) \operatorname{tang} P, \\ q\,(e^{Q} + e^{-Q}) - p\,(e^{Q} - e^{-Q}) \operatorname{tang} P &= (e^{Q} - e^{-Q}). \end{aligned}$$

Te dwa równania wyznaczają P, Q w funkcyi obydwóch ilości p, q; wyznaczą je jednoznacznie, jak to zaraz zobaczymy.

Napisane w postaci

$$\text{(V)} \qquad \begin{aligned} (e^Q + e^{-Q})(\operatorname{tang} P - p) &= q(e^Q - e^{-Q}) \operatorname{tang} P, \\ (e^Q - e^{-Q})(1 + p \operatorname{tang} P) &= q(e^Q + e^{-Q}), \end{aligned}$$

po pomnożeniu ich stronami i po skróceniu przez iloczyn

$$(e^Q - e^{-Q})\ (e^Q + e^{-Q})$$

zawsze różny od zera (gdyż inaczej zarówno Q jak i q musiałyby być równe zeru) równania te doprowadzają do związku

$$\text{(VI)} \qquad (\operatorname{tang} P - p)(1 + p \operatorname{tang} P) = q^2 \operatorname{tang} P,$$

który wyznacza ilość $\operatorname{tang} P$ w funkcyi obu danych parametrów p, q. Zauważymy, że równość ta nie przestaje być prawdziwa, chociażbyśmy p przyjęli nawet równem zeru.

Z (VI) mamy bezpośrednio

$$\text{(VII)} \qquad \frac{\operatorname{tang} P}{1 - \operatorname{tang}^2 P} = \frac{p}{1 - p^2 - q^2},$$

a że lewa strona tego równania równa się $\frac{1}{2} \operatorname{tang} 2P$, przeto

$$\text{(VIII)} \quad \operatorname{tang} 2P = \frac{2p}{1 - p^2 - q^2}, \text{ skąd } P = \tfrac{1}{2} \operatorname{arctang} \left(\frac{2p}{1 - p^2 - q^2}\right).$$

Rugując następnie $\operatorname{tang} P$ z równań (IV), znajdujemy

$$\text{(IX)} \qquad e^{4Q} = \frac{p^2 + (q+1)^2}{p^2 + (q-1)^2},$$

a że e^Q jest zawsze dodatnie, przeto tylko

$$\text{(X)} \qquad Q = \tfrac{1}{4} \operatorname{lognat} \left[\frac{p^2 + (q+1)^2}{p^2 + (q-1)^2}\right].$$

Wyrażenia (VIII) i (X) są więc, jak widzimy, zgodne z występującemi w równaniu (8) ustępu 11-go.

Dodatek II (do ustępu 12-go i 13-go).

Równanie przestępne

$$f(p) = p(7p^2 + 9) - (p^2 + 1)(p^2 + 9) \operatorname{arctang} p = 0,$$

oprócz pięciokrotnego pierwiastka równego zeru, posiada tylko jeden jedyny dodatni pierwiastek. Znajdujemy mianowicie rzeczywistym rachunkiem

$$f(0) = 0,\ f(p) = +\tfrac{8}{15}p^5 \text{ gdy } p \text{ jest bardzo małe},\ f(0{\cdot}2) = +0{\cdot}0017,$$
$$f(0{\cdot}5) = +0{\cdot}014,\ f(1{\cdot}0) = +0{\cdot}292,\ f(1{\cdot}5) = +1{\cdot}192,\ f(2{\cdot}0) = +2{\cdot}036,$$
$$f(2{\cdot}529) = +0{\cdot}002995,$$
$$f(2{\cdot}52930) = +0{\cdot}000111,\ f(2{\cdot}52931) = -0{\cdot}000019.$$

Z trzech ostatnich wartości znajdujemy interpolacyą paraboliczną z wielką dokładnością $p = 2{\cdot}529308$, a że funkcya $f(p)$ dla wzrastających dalej wartości na p powtórnie już znaku nie zmienia,

$$f(2{\cdot}53) = -0{\cdot}0084,\ f(3{\cdot}0) = -8{\cdot}829,\ f(4{\cdot}0) = -79{\cdot}47 \text{ itd.},$$

przeto oprócz $p = 2{\cdot}529308$ nie istnieje jeszcze drugi rzeczywisty dodatni pierwiastek [1]).

Dla tej wartości parametru p funkcya

$$\Omega = \frac{3 + p^2}{p^3} \operatorname{arctang} p - \frac{3}{p^2}$$

przybiera wartość „graniczną“, równą $+0{\cdot}2246656$.

Dodatek III-ci (do ustępu 12-go).

Równanie przestępne

$$\psi(p) = 3(p^2 + 1)^3 (2p^2 - 3) \operatorname{arctang} p - p(18p^6 + p^4 - 18p^2 - 9) = 0'$$

---

[1]) Cauchy, l. c., podaje 2·5292, Duhamel, l. c., II, pag. 186 dokła-

(porówn. mianowniki wzorów 12 i 17), oprócz pięciokrotnego pierwiastka równego zeru posiada tylko jeden dodatni pierwiastek, jak świadczą faktyczne obliczenia

$$\psi(0) = 0,\ \psi(p) = -\frac{168}{35}p^5 \text{ dla } p \text{ bardzo małego},\ \psi(1{\cdot}0) = -10{\cdot}85,$$
$$\psi(2{\cdot}0) = -98{\cdot}09,\ \psi(2{\cdot}07) = -26{\cdot}74,\ \psi(2{\cdot}0892) = +0{\cdot}111,$$
$$\psi(2{\cdot}09) = +1{\cdot}237,\ \psi(3{\cdot}0) = +17111{\cdot}2,\ \psi(\infty) = +\infty,$$

a dalsze ścieśnianie granic przybliżonego już pierwiastka (2·09) doprowadza do dokładnej jego wartości $= +2{\cdot}08912$.

Dodatek IV (do ustępu 14-go).

Chodzi o rozwinięcie występujących tam dwóch funkcyj: cyklometrycznej A i logarytmicznej L ze znaczniejszą dokładnością, w przypuszczeniu małych wartości zmiennego parametru q. Zastrzegamy na wstępie, że opuścimy dopiero wyrazy mnożone przez 8-mą potęgę małej ilości q.

Rozwijając nasamprzód z tą dokładnością pierwiastek

$$\sqrt{(1-p^2-q^2)^2+4p^2} = (1+p^2)\left[1+\frac{2p^2-2+q^2}{(1+p^2)^2}\cdot q^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

według twierdzenia o potęgach dwumianu (dla wykładnika równego $\frac{1}{2}$) i podstawiając takie rozwinięcie do wyrażenia A, znajdujemy najpierw bez dwuznaczności

$$A = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctang}\left(\frac{2p}{1-p^2-q^2}\right) =$$
$$= \operatorname{arctang}\left(\frac{\sqrt{(1-p^2-q^2)^2+4p^2}+p^2+q^2-1}{2p}\right) =$$
$$= \operatorname{arctang}\left[p+\frac{pq^2}{\tau}+\frac{pq^4}{\tau^3}-\frac{p(p^2-1)q^6}{\tau^5}+\ldots\right],$$

gdzie dla krótkości położyliśmy $p^2+1=\tau$. Jeżeli dalej do ostatniego wyrażenia, napisanego krótko $A = \operatorname{arctang}(p+\xi)$, gdzie

dniej 2·5293. Wartość 2·5304, jaką znajdujemy u W. Thomsona, (l. c., II, pag. 327) jest o 0·0011 za wielka.

$$\xi = \frac{pq^2}{\tau}\left(1 + \frac{q^2}{\tau^2} - \frac{(p^2-1)\,q^4}{\tau^4} + \ldots\right)$$

jest ilością bardzo małą, zastosujemy twierdzenie Taylor'a, napiszemy najpierw

$$A = \operatorname{arctang} p + \frac{\xi}{1}\cdot\frac{1}{\tau} - \frac{\xi^2}{1.2}\cdot\frac{2p}{\tau^2} + \frac{\xi^3}{1.2.3}\cdot 2\cdot\frac{3p^2-1}{\tau^3} - \ldots,$$

a wstawiając tu powyższą wartość na ξ, rozwijając pojedyncze wyrazy z ograniczoną wyżej dokładnością i porządkując według potęg q, otrzymamy

$$A = \operatorname{arctang} p + \frac{p}{\tau^2}\cdot q^2 - \frac{p\,(p^2-1)}{\tau^4}\cdot q^4 + \\ + \frac{p\,(p^2-3)(3p^2-1)}{3\,\tau^6}\cdot q^6 - \ldots,$$

szereg zawsze zbieżny, byle tylko było

$$\frac{2p^2-2+q^2}{(1+p^2)^2}\cdot q^2 < +1,$$

gdyż inaczej rozwinięcie pierwiastka, od którego wyszliśmy, byłoby nieważne. Warunek co tylko napisany przybiera kształt podwójnej nierówności

$$(1-p^2) - \sqrt{2\,(p^4+1)} < q^2 < (1-p^2) + \sqrt{2\,(p^4+1)};$$

przednia jej część jest zbyteczna, lewa jej strona jest bowiem zawsze ujemna (nawet dla p równego zeru), zatem tylko

$$q^2 < (1-p^2) + \sqrt{2p^4+2}.$$

Tutaj prawa strona osiąga *minimum* dla $p = +1$; to minimum wynosi $+2$, zatem warunkowi temu stanie się zawsze zadość, jeżeli q^2 będzie mniejsze nawet od tego minimum, tj. jeżeli będzie $q^2 < 2$, co się zawsze spełnia, gdyż z góry już zastrzegliśmy, że q jest dość małe, tak, że q^8 i wyższe jej potęgi wolno już opuścić. A więc nasze rozwinięcie jest zawsze zbieżne i dozwolone.

Zwracamy się teraz do drugiej z owych dwóch funkcyj, mianowicie do wyrażenia L. Jeżeli w znanem rozwinięciu

$$\text{lognat}\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + \ldots\right),$$

gdzie u musi być mniejsze od jednostki, położymy

$$u = \frac{2q}{D}$$

i równość otrzymaną podzielimy obustronnie przez 4, to będzie nasamprzód

$$\tfrac{1}{4}\,\text{lognat}\left(\frac{D+2q}{D-2q}\right) = \frac{q}{D}\left[1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{q^2}{D^2} + \frac{16}{5}\cdot\frac{q^4}{D^4} + \frac{64}{7}\cdot\frac{q^6}{D^6} + \ldots\right],$$

gdzie D wyobraża dowolną ilość dodatnią byle większą od $2q$. Kładąc więc teraz

$$D = p^2 + q^2 + 1 = \tau + q^2 = \tau\left(1 + \frac{q^2}{\tau}\right)$$

podstawiając tę wartość wewnątrz klamry w wyrażeniu

$$L = \tfrac{1}{4}\,\text{lognat}\left[\frac{p^2+(q+1)^2}{p^2+(q-1)^2}\right] = \tfrac{1}{4}\,\text{lognat}\left[\frac{(p^2+q^2+1)+2q}{(p^2+q^2+1)-2q}\right] =$$
$$= \tfrac{1}{4}\,\text{lognat}\left(\frac{D+2q}{D-2q}\right),$$

po odrzuceniu wyrazów zawierających $q^8, q^{10}, \ldots$ otrzymamy

$$L = \tfrac{1}{4}\,\text{lognat}\left[\frac{p^2+(q+1)^2}{p^2+(q-1)^2}\right] =$$
$$= \frac{q}{r}\cdot\left[1 - \frac{(3\tau-4)}{3\tau^2}\cdot q^2 + \frac{(5\tau^2-20\tau+16)}{5\tau^4}\cdot q^4 - \right.$$
$$\left. - \frac{(7\tau^3-56\tau^2+112\tau-64)}{7\tau^6}\cdot q^6 + \ldots\right],$$

gdzie, jak poprzednio, $\tau = p^2 + 1$. Także i obecnie warunek zbieżności otrzymanego szeregu jest podwójny, a mianowicie

$$\frac{2+q}{\tau} \cdot q < +1, \quad \text{oraz} \frac{2-q}{\tau} \cdot q < +1.$$

Z pierwszej nierówności wynika $q < -1 + \sqrt{p^2+2}$, a że *minimum* prawej strony wynosi $\sqrt{2} - 1 = +0{\cdot}414$, więc warunkowi owemu dogodzimy zawsze, biorąc $q < 0{\cdot}414$. Druga część warunku zbieżności przedstawia się jako nierówność $p^2 + (q-1)^2 > 0$, co się zawsze spełnia, tj. dla wszelkich na p i q wartości, jest więc całkiem zbyteczna.

Otrzymane tu rozwinięcia na A i na L nie różnią się od użytych przez nas w ustępie 14-tym.

Dodatek V (do ustępu 20-go).

Rozwiązywanie równania przestępnego (10) dla danych wartości na p, albo dla przyjętej wartości stosunku $q:p$.

Najgłówniejsze stadya tych mozolnych obliczeń podajemy tutaj już uporządkowane według wielkości parametru p.

1. Rozważania umieszczone wśród tekstu tej pracy pod l. (61) i (62) doprowadziły do wniosku, że dla $\lim p = 0$ może być tylko $\lim q = \sqrt{3} = 1{\cdot}73205\ldots$ Dla tych wartości równanie (11), albo równoważne mu wówczas (55) daje po prostu $\Omega = +1{\cdot}000$. Jest to największa dotychczas otrzymana wartość zmiennej Ω, której tem samem odpowiada *maximum* chyżości kątowej ω ruchu obrotowego masy płynu, będącego w stanie ruchomej równowagi.

2. Przyjmujemy następnie $p = 0{\cdot}02$, a więc wartość bardzo już małą. Wówczas wzór (11), który zamiast $F(0{\cdot}02, q) = 0$ piszemy krócej $f(q) = 0$, daje kolejno

$$f(0{\cdot}2) = +0{\cdot}00229,\ f(0{\cdot}5) = +0{\cdot}00807,\ f(1{\cdot}0) = +1{\cdot}32745,$$
$$f(1{\cdot}3) = +0{\cdot}91922,\ f(1{\cdot}74) = +0{\cdot}00328048,$$
$$f(1{\cdot}75) = -0{\cdot}00460696,$$

co świadczy, że pomiędzy 1·74 a 1·75 istnieje poszukiwany pierwiastek. Interpolacya liniowa pomiędzy $f(1{\cdot}74)$ a $f(1{\cdot}75)$ daje bar-

dziej przybliżoną wartość na q, mianowicie 1·74416. Dalej obliczamy $f(1{\cdot}744) = +0{\cdot}00141087$, poczem z trzech wartości 1·740, 1·744 i 1·750 paraboliczną interpolacyą znajdujemy szukany pierwiastek ze znaczną już dokładnością $q = 1{\cdot}745812$.

Dla większych od tej wartości na q otrzymujemy rzeczywistem obliczeniem

$$f(2{\cdot}0) = -0{\cdot}184,\ f(3{\cdot}0) = -0{\cdot}344,\ f(4{\cdot}0) = -0{\cdot}317,$$
$$f(5{\cdot}0) = -0{\cdot}275,$$
$$f(6{\cdot}0) = -0{\cdot}240,\ f(10) = -0{\cdot}152,\ f(20) = -0{\cdot}078,$$
$$f(60) = -0{\cdot}026,$$
$$f(100) = -0{\cdot}015,\ f(200) = -0{\cdot}007,\ \lim f(\infty) = 0;$$

funkcya f nie zmienia już znaku powtórnie, a stąd wnosimy, że prócz znalezionego już nie istnieje tutaj drugi rzeczywisty pierwiastek.

3. Żądamy, aby było $q = 20p$. Równanie warunkowe (11) przybiera wówczas postać do obliczeń dogodną

$$\left.\begin{aligned} f(p) = \frac{160801\,p^2 - 3597}{2406\,p} \cdot \tfrac{1}{4}\,\text{lognat}\left[\frac{p^2 + (20\,p + 1)^2}{p^2 + (20\,p - 1)^2}\right] \\ - \frac{20\,(160801\,p^2 - 1191)}{2406\,p} \cdot \tfrac{1}{2}\,\text{arctang}\left(\frac{2p}{1 - 401\,p^2}\right) + 20 \end{aligned}\right\} = 0\ ;$$

i daje kolejno

$$f(0) = 0,\ f(p) = +\frac{2572816}{9} \cdot p^4,$$

dla bardzo małych wartości na p,

$$f(0{\cdot}06) = +117{\cdot}38,\ f(0\,0893) = +0{\cdot}209430,\ f(0{\cdot}09) = -2{\cdot}370206,$$

co świadczy o istnieniu pierwiastka pomiędzy 0·0893 a 0·09. Interpolacya paraboliczna oparta na trzech ostatnich wartościach doprowadza do wartości szukanego pierwiastka $p = +0{\cdot}0893567$, poczem odpowiadająca mu wartość na $q = 20p$ znajduje się równą 1·787134.

Dla większych od ostatniej na p wartości otrzymuje się np. $f(0{\cdot}10) = -37{\cdot}823, \ldots$, wyłącznie ujemne, szybko wzrastające war-

tości funkcyi $f(p)$, która powtórnie nie zmienia już znaku, znowu na dowód, że znaleziony pierwiastek 0·0893567 jest jedyny.

4. Przypuszczając w równaniu (11) stale $p = 0{\cdot}20$ i pisząc krótko $f(q)$ zamiast $F(0{\cdot}2, q)$, znajdziemy kolejno

$$f(0) = 0,\ f(q) = +\,0{\cdot}0969\,.\,q \text{ dla bardzo małych wartości na } q,$$
$$f(0{\cdot}1) = +\,0{\cdot}01013,\ f(1{\cdot}0) = +\,0{\cdot}66684,\ f(1{\cdot}5) = +\,0{\cdot}35586,$$
$$f(1{\cdot}80) = +\,0{\cdot}03145605,\ f(1{\cdot}8432) = -\,0{\cdot}00150055,$$
$$f(1{\cdot}845) = -\,0{\cdot}00349260,$$

co zwiastuje istnienie pierwiastka pomiędzy 1·80 a 1·8432. Z trzech ostatnich wartości znajdujemy interpolacyą paraboliczną $q = 1{\cdot}8418136$, gdzie nawet 7-ma cyfra dziesiętna jest bezpieczna.

Poza tem nie istnieje tutaj inny jeszcze pierwiastek, funkcya f przybiera bowiem dla wzrastających q coraz bardziej wzrastające ujemne wartości

$$f(1{\cdot}90) = -\,0{\cdot}04057,\ f(2{\cdot}0) = -\,0{\cdot}09631,\ f(3{\cdot}0) = -\,0{\cdot}30166$$

itd. i nie zmienia już znaku powtórnie. Uwaga taka sama stosuje się również do wszystkich poniżej następujących równań warunkowych.

5. Gdybyśmy w równaniu (11) przyjęli $p = 0{\cdot}50$, to, pisząc zawsze $f(q)$ zamiast $F(0{\cdot}5, q)$, obliczylibyśmy kolejno

$$f(0) = 0,\ f(0{\cdot}5) = +\,0{\cdot}1132,\ f(0{\cdot}8) = +\,0{\cdot}2390,\ f(1{\cdot}0) = +\,0{\cdot}3755,$$
$$f(1{\cdot}900) = +\,0{\cdot}01285,\ f(1{\cdot}935) = -\,0{\cdot}00232,\ f(2{\cdot}000) = -\,0{\cdot}03170,$$

a dalsze ścieśnianie granic (1·900, 1·935), pomiędzy któremi zamknięty jest szukany pierwiastek, prowadzi do dokładnej jego wartości $q = 1{\cdot}929709$, uwidocznionej w naszej tabelce.

6. Następnie żądamy, aby było $q = \frac{5}{2}p$. Wówczas warunkowe równanie (11), po nadaniu mu kształtu dogodnego do obliczeń, będzie

$$\left.\begin{aligned} f(p) = \frac{841\,p^2 - 852}{240\,p}\,.\,\text{lognat}\left[\frac{4\,p^2 + (5\,p + 2)^2}{4\,p^2 + (5\,p - 2)^2}\right] \\ - \frac{5\,(841\,p^2 - 156)}{240\,p}\,.\,\text{arctang}\left(\frac{8\,p}{4 - 29\,p^2}\right) + 29 \end{aligned}\right\} = 0$$

i dostarcza kolejno

$f(0) = 0$, $f(p) = +135{\cdot}49\,p^4$, dla bardzo małych wartości na p
$f(0{\cdot}75) = +1{\cdot}33705$, $f(0{\cdot}771) = +0{\cdot}35421$, $f(0{\cdot}779) = -0{\cdot}02721$
$f(0{\cdot}80) = -1{\cdot}04402$.

Z trzech ostatnich wartości zwykłymi sposobami otrzymujemy ze znaczną już dokładnością wartość szukanego pierwiastka $p = 0\,778432$, skąd następnie $q = \frac{5}{2}p = 1{\cdot}946080$, jak to zostało uwidocznione w naszej tablicy. Dla większych wartości na p funkcya $f(p)$ przybiera już stale wartości ujemne, $f(1{\cdot}0) = -11{\cdot}478$ itd., co nas zapewnia, że oprócz znalezionego już nie istnieje tutaj drugi rzeczywisty pierwiastek.

7. Postawmy dalej żądanie, aby było $q = 2p$. Równanie warunkowe (11), znowu po nadaniu mu postaci dogodnej do rachunku, będzie naówczas

$$\left.\begin{aligned} f(p) = \frac{25p^2 - 33}{5p} \,.\, \text{lognat}\left[\frac{p^2 + (2p+1)^2}{p^2 + (2p-1)^2}\right] \\ - \frac{4(25p^2 - 3)}{5p} \,.\, \text{arctang}\left(\frac{2p}{1 - 5p^2}\right) + 48 \end{aligned}\right\} = 0$$

i daje po kolei

$f(0) = 0$, $f(p) = +\frac{320}{3}p^4$, dla p bardzo małego,
$f(0{\cdot}02) = +0{\cdot}000018$, $f(0{\cdot}70) = +9{\cdot}48769$, $f(0{\cdot}95) = +0{\cdot}69383$
$f(0{\cdot}97) = -0{\cdot}25019$, $f(1{\cdot}0) = -1{\cdot}70694$.

Dalsze ścieśnianie granic pierwiastka, tutaj znowu jedynego, w połączeniu z paraboliczną interpolacyą, prowadzi do dokładnej jego wartości $p = 0{\cdot}964739$, skutkiem czego $q = 2p = 1\,929478$, jak to zostało uwidocznione w tabelce.

8. Żądamy teraz, ażeby spełnił się związek $q = \frac{3}{2}p$. Warunkowe równanie (11), po wstawieniu tej na q wartości, oraz po łatwych uproszczeniach przybiera postać następującą

$$\left.\begin{aligned} f(p) = \frac{169p^2 - 276}{208p} \,.\, \text{lognat}\left[\frac{4p^2 + (3p+2)^2}{4p^2 + (3p-2)^2}\right] \\ - \frac{3(169p^2 + 36)}{208p} \,.\, \text{arctang}\left(\frac{8p}{4 - 13p^2}\right) + 9 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Pomijając zbyteczne tutaj wartości zmiennej p, które sprawiają, że funkcya $f(p)$ staje się nazbyt odległą od zera, znajdujemy rzeczywistem obliczeniem

$$f(1{\cdot}240) = +0{\cdot}009162,\ f(1{\cdot}242) = -0{\cdot}000442,$$
$$f(1{\cdot}250) = -0{\cdot}039089,\ f(1{\cdot}300) = -0{\cdot}288348, \ldots$$

a dalsze ścieśnianie granic pierwiastka, wespół z paraboliczną interpolacyą, doprowadza do dokładnej jego wartości $p = 1{\cdot}241908$, co pozwala natychmiast znaleźć odpowiadającą wartość drugiego parametru, tj. $q = \frac{3}{2}p = 1{\cdot}862862$. Oprócz znalezionego nie istnieje także i tutaj drugi jeszcze pierwiastek.

9. Przyjmujemy teraz $q = \frac{5}{4}p$. Równanie warunkowe (11) będzie skutkiem tego po należytych redukcyach

$$\left.\begin{aligned} f(p) = \frac{1681\,p^2 - 2832}{1312\,p} \,.\, \text{lognat}\left[\frac{16\,p^2 + (5\,p + 4)^2}{16\,p^2 + (5\,p - 4)^2}\right] \\ - \frac{5\,(1681\,p^2 + 1104)}{1312\,p} \,.\, \tfrac{1}{2}\,\text{arctang}\left(\frac{32\,p}{16 - 41\,p^2}\right) + 15 \end{aligned}\right\} = 0,$$

podług czego otrzymujemy kolejno

$$f(0) = 0,\ f(1{\cdot}35) = +1{\cdot}114468,\ f(1{\cdot}40) = +0{\cdot}166645,$$
$$f(1{\cdot}41) = +0{\cdot}111868, f(1{\cdot}43) = +0{\cdot}000309, f(1{\cdot}44) = -0{\cdot}056444,$$

a dalsze ścieśnianie granic pierwiastka, wsparte paraboliczną interpolacyą, doprowadza do dokładnej jego wartości $p = 1{\cdot}430054$, skąd następnie znajduje się odpowiednia wartość parametru q równa $1{\cdot}787568$, uwidoczniona w naszej tabelce.

10. Wydaje się interesującem rozwiązanie warunkowego równania przestępnego (11) w razie przypuszczenia $p = q$. Wówczas mamy wzór stosunkowo dość prosty

$$\left.\begin{aligned} f(p) = \frac{2\,p^2 - 3}{p} \,.\, \text{lognat}\left[\frac{p^2 + (p + 1)^2}{p^2 + (p - 1)^2}\right] \\ - \frac{2\,(2\,p^2 + 3)}{p} \,.\, \text{arctang}\left(\frac{2\,p}{1 - 2\,p^2}\right) + 24 \end{aligned}\right\} = 0,$$

skąd rzeczywistem obliczeniem znajdujemy następujące wartości

$$f(0) = 0,\ f(p) = +\frac{128}{15}p^4 \text{ dla bardzo małych wartości na } p,$$

$$f(0{\cdot}05) = +0{\cdot}000054,\ f(0{\cdot}2) = +0{\cdot}0146,$$
$$f(0{\cdot}3) = 0{\cdot}0676,\ f(0{\cdot}5) = +0{\cdot}4527,$$
$$f(1{\cdot}0) = +2{\cdot}046,\ f(1{\cdot}5) = +0{\cdot}894.\ f(1{\cdot}65) = +0{\cdot}0545480,$$
$$f(1{\cdot}6589) = -0{\cdot}0004742,\ f(1{\cdot}80) = -0{\cdot}9404502.$$

Z trzech ostatnich wartości interpolacyą paraboliczną znajdujemy bardzo już dokładną wartość pierwiastka $p = q = 1{\cdot}6588236$, gdzie nawet 7-ma cyfra dziesiętna jest jeszcze bezpieczna.

Ponieważ następujące potem wartości

$$f(1{\cdot}8) = -0{\cdot}940,\ f(2{\cdot}0) = -2{\cdot}458,\ f(3{\cdot}0) = -11{\cdot}96,$$
$$f(4{\cdot}0) = -25{\cdot}01$$

itd. są stale ujemne i nieograniczenie wzrastają, przeto funkcya $f(p)$ nie zmienia już znaku powtórnie, a to świadczy, że znaleziony pierwiastek jest jedyny.

11. Tutaj przyjmiemy z góry $p = 2{\cdot}0$, a zapytujemy o odpowiednią wartość parametru q, uważanego za funkcyę zmiennej niezależnej p.

Równanie warunkowe (11), użyte bez żadnych przekształceń, tak się obecnie przedstawia:

$$\left.\begin{aligned} F(q) = {} & \frac{28 - q^2 + q^4}{(q^2+4)^3} \cdot \tfrac{1}{2} \operatorname{lognat}\left[\frac{4+(q+1)^2}{4+(q-1)^2}\right] \\ & - \frac{q(52 + 5q^2 + q^4)}{(q^2+4)^3} \cdot \tfrac{1}{2} \operatorname{arctang}\left(-\frac{4}{q^2+3}\right) + \frac{12q}{(q^2+4)^2} \end{aligned}\right\} = 0$$

i pozwala obliczyć kolejno wartości następujące

$$F(0) = 0,\ F(1{\cdot}0) = +0{\cdot}010995,\ F(1{\cdot}22) = +0{\cdot}005626,$$
$$F(1{\cdot}32) = +0{\cdot}00199798,\ F(1{\cdot}368) = +0{\cdot}00000154,$$
$$F(1{\cdot}369) = -0{\cdot}00004087.$$

Z ostatnich trzech oznaczeń, zapomocą parabolicznej inter-

polacyi znajduje się dokładną wartość szukanego pierwiastka $q = 1{\cdot}3680363$, gdzie nawet 7-ma cyfra dziesiętna jest jeszcze pewna.

Dla większych od niego wartości na q otrzymujemy

$$F(1{\cdot}38) = -0{\cdot}000523,\ F(1{\cdot}4) = -0{\cdot}001541,\ F(2{\cdot}0) = -0{\cdot}038408,$$
$$F(2{\cdot}2) = -0{\cdot}053256,\ F(4{\cdot}0) = -0{\cdot}15117,\ F(6{\cdot}0) = -0{\cdot}16663,$$
$$F(10) = -0{\cdot}140,\quad F(20) = -0{\cdot}076, \ldots$$

itd.; funkcya F nie zmienia już powtórnie znaku, co świadczy, że badane tu przestępne równanie, oprócz znalezionego pierwiastka (pomijając nieprzydatny dla nas, równy zeru) nie posiada już więcej żadnego innego.

12. Żądamy tutaj, aby było $p = 2q$. Równanie warunkowe (11) przybiera wówczas postać następującą

$$\left.\begin{aligned} f(q) = \frac{3+25q^2}{5q} \,.\, \text{lognat}\left[\frac{4q^2+(q+1)^2}{4q^2+(q-1)^2}\right] \\ -\frac{(33+25q^2)}{5q} \,.\, \text{arctang}\left(\frac{4q}{1-5q^2}\right) + 24 \end{aligned}\right\} = 0,$$

według czego oblicza się kolejno

$$f(0) = 0,\ f(q) = +\frac{160}{3}q^4 \text{ dla bardzo małych wartości na } q,$$
$$f(1{\cdot}0) = +0{\cdot}54976,\ f(1{\cdot}1) = +0{\cdot}01722,\ f(1{\cdot}12) = -0{\cdot}10391.$$

Zmiana znaku funkcyi f oznajmia, że pomiędzy 1·10 a 1·12 znajduje się szukany pierwiastek. Dalsze ścieśnianie tych jego granic, w połączeniu z interpolacyą paraboliczną, doprowadza do jego wartości $q = 1{\cdot}102870$, skutkiem czego $p = 2q = 2{\cdot}205740$, jak to widzimy w tabelce.

Poza tem wartości funkcyi f pozostają już stale ujemne i wzrastają wraz z q nieograniczenie:

$$f(1{\cdot}13) = -0{\cdot}166,\ f(1{\cdot}15) = -0{\cdot}294,\ f(1{\cdot}4) = -2{\cdot}22,$$
$$f(2{\cdot}0) = -7{\cdot}89$$

itd., oprócz podanego wyżej niema więc tutaj drugiego jeszcze rzeczywistego pierwiastka.

13. Gdybyśmy postawili żądanie, ażeby było $p = 3q$, warunkowe, z (11) wytworzone równanie byłoby natenczas

$$\left.\begin{aligned} f(q) = \frac{3(9+50q^2)}{10q} \,.\, \text{lognat}\left[\frac{9q^2+(q+1)^2}{9q^2+(q-1)^2}\right] \\ -\frac{(78+100q^2)}{10q} \,.\, \text{arctang}\left(\frac{6q}{1-10q^2}\right) + 36 \end{aligned}\right\} = 0,$$

podług którego zostały obliczone następujące wartości szczegółowe

$$f(0) = 0,\ f(q) = +320q^4 \text{ dla } q \text{ bardzo małego,}$$
$$f(0{\cdot}5) = +1{\cdot}6729,\ f(0{\cdot}7) = +0{\cdot}86948,\ f(0{\cdot}78) = +0{\cdot}11244,$$
$$f(0{\cdot}79) = +0{\cdot}002735,\ f(1{\cdot}0) = -2{\cdot}9452.$$

Dalsze ścieśnianie granic pierwiastka, zawsze w połączeniu z paraboliczną interpolacyą, pozwala znaleźć dokładną jego wartość, mianowicie $q = 0{\cdot}790225$, skutkiem czego $p = 3q = 2{\cdot}370675$, jak to zostało uwidocznione w tabelce. Także i tutaj nie istnieje drugi rzeczywisty pierwiastek.

14. Ustalając już z góry, że ma być $p = 6q$, otrzymamy z (11) następujące równanie warunkowe

$$\left.\begin{aligned} f(q) = \frac{3(99+1369q^2)}{74q} \,.\, \text{lognat}\left[\frac{36q^2+(q+1)^2}{36q^2+(q-1)^2}\right] \\ -\frac{(321+1369q^2)}{74q} \,.\, \text{arctang}\left(\frac{12q}{1-37q^2}\right) + 36 \end{aligned}\right\} = 0,$$

które pozwala obliczyć następujące wartości

$$f(0) = 0,\ f(0{\cdot}2) = +1{\cdot}250,\ f(0{\cdot}3) = +1{\cdot}4508,\ f(0{\cdot}35) = +0{\cdot}8463$$
$$f(0{\cdot}40) = +0{\cdot}273319,\ f(0{\cdot}41) = +0{\cdot}087373,\ f(0{\cdot}4146) = -0{\cdot}001869$$
$$f(0{\cdot}4150) = -0{\cdot}009740.$$

Trzy ostatnie wyznaczenia doprowadzają paraboliczną interpolacyą do bardzo już dokładnej wartości szukanego pierwiastka, a mianowicie $q = 0{\cdot}4145632$, skąd zaraz $p = 6q = 2{\cdot}487379$, jak to widzimy w tabelce. Dla jeszcze większych wartości na q funk-

cya $f(q)$ przybiera wartości wyłącznie ujemne, nieograniczenie wzrastające

$$f(0{\cdot}50) = -2{\cdot}040,\ f(1{\cdot}0) = -22{\cdot}129$$

itd., co dowodzi, że oprócz znalezionego nie istnieje tutaj drugi jeszcze pierwiastek.

15. Dokładne ustalenie „granicznych“ na p i na Ω wartości mianowicie 2·529308, a wzgl. 0·2246656, odpowiadających skrajnemu przypuszczeniu $\lim q = 0$, a więc samemu początkowi przeradzania się elipsoidy obrotowej spłaszczonej w różne od elipsoidy postaci stopni wyższych nad 2-gi, podaliśmy wyżej przy równaniach (15) i (25), oraz w dodatku II-gim do pracy niniejszej.

Biblioteka Śląska

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności. Serya III. Tom 11 Dział A. (Ogólnego zbioru tom 51 A).

Maryan Smoluchowski: O oddziaływaniu wzajemnem kul poruszających się w ośrodku lepkim (str. 1—3). — W. Rybczyński: O ruchu postępowym kuli ciekłej w ośrodku lepkim (str. 5—7). — W. Rogala: Górno-kredowe utwory na Podolu galicyjskiem (z tabl. I). Część I. Turon. Biała kreda z krzemieniami (str. 9—39). — Mieczysław Limanowski: Geologiczne przekroje przez Wielki fałd Czerwonych Wierchów między doliną Suchej Wody a Chochołowską w Tatrach (z tabl. II) (str. 41—80). — Leon Lichtenstein: Przyczynek do teoryi równań różniczkowych liniowych o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu typu eliptycznego. Całki okresowe i podwójnie okresowe (str. 81—112). — Alfred Rosenblatt: Przyczynek do klasyfikacyi powierzchni rozwijalnych algebraicznych (str. 113—151). — J. Buraczewski, L. Krauze i A. Krzemecki: O diastazie (str. 153—157). — Z. Klemensiewicz: O powstawaniu dodatnich ionów na ogrzanych metalach (str. 159—177). — L. Krauze: Studya nad jodopochodnemi strychniny, brucyny i niektórych innych alkaloidów (str. 179—199). — Józef Puzyna: O systemach krzywych z grupą pseudoliniowych podstawień (str. 201—324). — Zygmunt Mysłakowski: O. Waleryan Magni i kontrowersya w sprawie odkrycia próżni (1638—1648) (str. 325—377). — Ludwik Antoni Birkenmajer: Aforyzmy z teoryi podstawień (str. 379—464). — Tadeusz Kuczyński: Metody analizowania wysokoprocentowych aliaży wolframowych (str. 465—474). — W. Jakób i St. Tołłoczko: Analiza toryanitu Ceylońskiego (str. 475—483).

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności. Serya III. Tom 12. Dział A. (Ogólnego zbioru tom 52 A).

Sierpiński W.: O pewnym układzie równań funkcyjnych, który wyznacza funkcyę, mającą pantachiczne przedziały stałości (str. 1—15). — Browiński J. i Dąbrowski St.: Badania ilościowe nad zawartością azotu aminowego w kwasach oksyproteinowych moczu ludzkiego (str. 17—32). — Sierpiński W.: O pewnym szeregu wielomianów, którego suma przedstawiać może przy odpowiedniem uporządkowaniu składników, dowolną funkcyę ciągłą (str. 33—43) — Romer E.: Przyczynek do topografii i geografii Sichota-Alinu (z tabl. I) (str. 45—88). — Hoborski A.: O pewnem zastosowaniu zasady najmniejszej wartości (str. 89—161). — Starzyński Zygmunt.: Przyczynek do znajomości andezytów pacyficznych i składających je minerałów (z tabl. II—III) (str. 163—186). — Zygmuntowska W.: Ryolit sodowy z wysp Komandorskich (tabl. IV) (str. 187—196). — Rosenblatt Alfred: Badania nad pewnemi klasami powierzchni algebraicznych nieregularnych i nad biracyonalnemi przekształceniami, nie zmieniającemi tych powierzchni (str. 197—294). — Tołłoczko St. i Kling K.: O chlorowaniu naturalnych gazów naftowych. Część I. Chlorowanie w podwyższonej temperaturze wobec katalizatorów (str. 295—306). — Tołłoczko St. O chlorowaniu naturalnych gazów naftowych. Część II. Chlorowanie pod wpływem promieni lampy rtęciowej (uwiolowej) (str. 307—316). — Kamińska E. W.: Trwałość szaty śnieżnej na północnym stoku Karpat (tabl. V) (str. 317—344).

Skład główny; na Galicyę: — Księgarnia Spółki wydawniczej w Krakowie, na Królestwo Polskie: Księgarnia Gebethnera i Wolffa w Warszawie.