Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 395 · 2020

Anna Łyczkowska-Hanćkowiak

Wyższa Szkoła Bankowa w Poznaniu
Wydział Finansów i Bankowości
Instytut Ekonomii i Finansów
anna.lyczkowska-hanckowiak@wsb.poznan.pl

O ZASTOSOWANIU ZORIENTOWANEGO ROZMYTEGO CZYNNIKA DYSKONTUJĄCEGO W KRYTERIUM JENSENA

Streszczenie: Przedmiotem analizy jest instrument finansowy o wartości bieżącej opisanej za pomocą skierowanej liczby rozmytej. Oznacza to, że wartość bieżąca została oszacowana w sposób nieprecyzyjny oraz uzupełniona o prognozę jej najbliższych zmian. Taką wartość bieżącą nazywamy zorientowaną wartością bieżącą. Dodatnia orientacja oznacza przewidywanie wzrostu wartości, a ujemna stanowi prognozę spadku wartości. Czynnik dyskontujący takiego instrumentu finansowego jest skierowaną liczbą rozmytą o takiej samej orientacji, co wyznaczająca go zorientowana wartość bieżąca. Z tego powodu nazywamy go zorientowanym czynnikiem dyskontującym. Wszystkie klasyczne metody analizy portfelowej opierają się na pojęciu stopy zwrotu. W literaturze przedmiotu wykazano jednak, że w przypadku instrumentów finansowych z rozmytą wartością bieżącą czynnik dyskontujący jest lepszym narzędziem analizy portfelowej niż stopa zwrotu. Rodzi to ideę przeredagowania wybranych metod analizy portfelowej do równoważnych technik opartych na czynniku dyskontującym, co pozwoli na zastosowanie tych metod w przypadku instrumentu finansowego ze zorientowaną rozmytą wartością bieżącą. Przedstawiono tu przykładowy wynik realizacji powyższego postulatu. Głównym celem prezentowanego artykułu jest przekształcenie kryterium Jensena w celu zastosowania go do zarządzania rekomendacjami inwestycyjnymi formułowanymi wobec instrumentu finansowego scharakteryzowanego przez zorientowany czynnik dyskontujący. Zastosowano tutaj pięciostopniową skalę rekomendacji. Całość rozważań zilustrowano przykładami.

Słowa kluczowe: kryterium Jensena, skierowana liczba rozmyta, zorientowany rozmyty czynnik dyskontujący.

JEL Classification: C44, C02, G10.

Wprowadzenie

Wartość bieżąca (PV) została zdefiniowana w pracy Piaseckiego [2012] jako bieżąca wartość płatności dostępnej w ustalonym momencie czasu w przyszłości. PV przyszłych przepływów finansowych jest wartością przybliżoną. Liczby rozmyte są jednym z głównych narzędzi, które pozwalają ją modelować.

Jeżeli wartość bieżąca jest oszacowana za pomocą liczby rozmytej, wówczas stopa zwrotu jest traktowana jako rozmyty zbiór probabilistyczny [Piasecki, 2011]. Oczekiwana stopa zwrotu została otrzymana jako rozmyty podzbiór na prostej rzeczywistej. Ten wynik jest podstawą teoretyczną dla strategii inwestycyjnych przedstawionych w pracach Piaseckiego [2014; 2018b]. W innej pracy Piaseckiego [2016] wyniki te zostały uogólnione do przypadku, gdy wartość bieżąca jest oszacowana za pomocą intuicjonistycznej liczby rozmytej [Atanassov, 1986].

Skierowane liczby rozmyte (OFN) zostały zdefiniowane w sposób intuicyjny przez Kosińskiego i jego współpracowników przez dodanie liczbie rozmytej orientacji [Kosiński, Słysz, 1993; Kosiński, Prokopowicz, Ślęzak, 2002, 2003; Kosiński, 2006]. Dodatnia orientacja oznacza tutaj przewidywanie wzrostu wartości, a ujemna stanowi prognozę spadku wartości. Kompetentnym omówieniem aktualnego stanu wiedzy na temat OFN jest monografia pod redakcją Prokopowicza i in. [2017]. Kosiński [2006] pokazał, że istnieją takie OFN, które nie są liczbami rozmytymi i nazwał je niewłaściwymi skierowanymi liczbami rozmytymi. Z tego powodu oryginalna teoria Kosińskiego została zrewidowana przez Piaseckiego [2018a].

Głównym celem tego artykułu jest zbadanie możliwości rozszerzenia wspomnianych powyżej strategii inwestycyjnych do przypadku, gdy wartość bieżąca jest oceniona za pomocą skierowanej liczby rozmytej. W celu realizacji tego zadania kryterium Jensena [Jensen, 1969] zostanie rozszerzone do tego przypadku.

W oryginalnym kryterium Jensena podstawową przesłanką do sformułowania rekomendacji inwestycyjnej jest wartość oczekiwanej stopy zwrotu z analizowanego instrumentu finansowego. Z drugiej strony w pracach Piaseckiego i Siwek [2018a; 2018b] zostało pokazane, że oczekiwany rozmyty czynnik dyskontujący jest lepszym narzędziem do wyceny rozważanych papierów wartościowych niż rozmyta oczekiwana stopa zwrotu. Uzasadniono tam, że stosowanie oczekiwanego rozmytego czynnika w istotny sposób ułatwia analizę portfelową. Z tego powodu oryginalne kryterium Jensena zostanie przeredagowane do równoważnej postaci, w której podstawową przesłanką do sformułowania rekomendacji inwestycyjnej jest oczekiwany rozmyty czynnik dyskontujący analizowanego instrumentu finansowego.

Artykuł został zorganizowany w następujący sposób. W części pierwszej przedstawiono podstawowe pojęcia i własności skierowanych liczb rozmytych (OFN). W części drugiej i trzeciej krótko omówiono pojęcia zorientowanej rozmytej wartości bieżącej oraz zorientowanego rozmytego czynnika dyskontującego. W kolejnej części przedstawiono pięciostopniową skalę rekomendacji inwestycyjnych. W części piątej określono kryterium Jensena dla zorientowanego czynnika dyskontującego. Pozwoli to na zastosowanie tak zmodyfikowanego kryterium do zarządzania rekomendacjami inwestycyjnymi. W ostatniej części pokazano trzy przykłady ilustrujące wykorzystanie przedefiniowanego kryterium Jensena do zarządzania rekomendacjami inwestycyjnymi z wartością bieżącą daną jako trapezoidalna skierowana liczba rozmyta. Artykuł kończy krótkie podsumowanie.

1. Skierowane liczby rozmyte – podstawowe fakty

Przez $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ oznaczamy rodzinę wszystkich rozmytych podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Liczba nieprecyzyjna jest zbiorem wartości, w którym każda z rozpatrywanych wartości należy do niego w różnym stopniu. Powszechnie akceptowanym modelem liczby nieprecyzyjnej jest liczba rozmyta (FN) zdefiniowana jako rozmyty podzbiór zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Najbardziej ogólna definicja liczby rozmytej FN została podana przez Dubois i Prade [1978]. Liczba rozmyta jest zdefiniowana w następujący sposób: Dla dowolnej liczby rozmytej $\mathcal{L}$ istnieje taki niemalejący ciąg $(a, b, c, d) \subset \mathbb{R}$, dla którego $\mathcal{L} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest reprezentowana przez swoją funkcję przynależności:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\cdot\, | a, b, c, d, L_L, R_L) \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$$

daną wzorem:

$$\mu_{\mathcal{L}}(x | a, b, c, d, L_L, R_L) = \begin{cases} 0, x \notin [a, d], \\ L_L(x), x \in [a, b], \\ 1, x \in [b, c], \\ R_L(x), x \in [c, d], \end{cases} \tag{1}$$

gdzie lewa funkcja odniesienia $L_L \in [0; 1]^{[a,b]}$ oraz prawa funkcja odniesienia $R_L \in [0; 1]^{[c,d]}$ są półciągłymi z góry, monotonicznymi funkcjami spełniającymi warunki:

$$L_L(b) = R_L(c) = 1, \tag{2}$$

$$\forall_{x \in]a,d[}\colon\ \mu_{\mathcal{L}}(x | a, b, c, d, L_L, R_L) > 0\ . \ \square \tag{3}$$

Rodzinę wszystkich liczb rozmytych oznaczamy przez $\mathbb{F}$. Ponadto Dubois i Prade [1979] wprowadzili operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych, które są spójne z zasadą rozszerzenia Zadeha.

Skierowane liczby rozmyte (OFN) zostały intuicyjnie wprowadzone przez Kosińskiego i jego współpracowników w serii artykułów [Kosiński, Słysz, 1993; Kosiński, Prokopowicz, Ślęzak, 2002, 2003; Kosiński, 2006] jako rozszerzenie pojęcia FN. Istotną wadą teorii Kosińskiego jest istnienie skierowanych liczb rozmytych, które nie są liczbami rozmytymi [Kosiński, 2006]. Intuicyjne podejście Kosińskiego do pojęcia skierowanych liczb rozmytych jest jednak bardzo użyteczne. Wynika to z faktu, że skierowana liczba rozmyta została zdefiniowana jako liczba rozmyta uzupełniona orientacją: dodatnią lub ujemną. Ujemna orientacja oznacza uporządkowanie liczb od większej do mniejszej. Dodatnia orientacja oznacza uporządkowanie liczb od mniejszej do większej. Orientacja liczby rozmytej jest interpretowana jako przewidywanie przyszłych zmian FN. Teoria Kosińskiego została zrewidowana przez Piaseckiego [2018a]. Skierowane liczby rozmyte ogólnie są zdefiniowane w następujący sposób:

Dla dowolnego monotonicznego ciągu $(a, b, c, d) \subset \mathbb{R}$ skierowana liczba rozmyta (OFN) $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}(a, b, c, d, S_L, E_L)$ jest zdefiniowana jako para liczb rozmytych przez swoją funkcję przynależności $\mu_{\mathcal{L}}(\cdot\, | a, b, c, d, S_L, E_L) \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ określoną następująco:

$$\mu_{\mathcal{L}}(x | a, b, c, d, S_L, E_L) = \begin{cases} 0, x \notin [a, d] = [d, a], \\ S_L(x), x \in [a, b] = [b, a], \\ 1, x \in [b, c] = [c, b], \\ E_L(x), x \in [c, d] = [d, c] \end{cases} \tag{4}$$

i orientację $[\![a \rightarrowtail d]\!] = (a, d)$. Funkcja początkowa $S_L \in [0; 1]^{[a,b]}$ oraz funkcja końcowa $E_L \in [0; 1]^{[c,d]}$ są półciągłymi z góry, monotonicznymi funkcjami spełniającymi warunki:

$$S_L(b) = E_L(c) = 1, \tag{5}$$

$$\forall_{x \in]a,d[}\ \mu_{\mathcal{L}}(x | a, b, c, d, S_L, E_L) > 0. \square \tag{6}$$

Zauważmy, że tożsamość (4) opisuje dodatkowo rozszerzoną notację przedziałów liczbowych, która będzie wykorzystywana w tym artykule. Notacja ta pozwala równoważnie zapisać dowolny przedział jako przedział od wartości mniejszej do większej lub jako przedział od wartości większej do mniejszej.

Przestrzeń wszystkich skierowanych liczb rozmytych oznaczamy symbolem $\mathbb{K}$. Warunek $a < d$ określa dodatnią orientację $[\![a \rightarrowtail d]\!]$ skierowanej liczby rozmytej $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}(a, b, c, d, S_L, E_L)$. W tym przypadku funkcja początkowa S_L jest niemalejąca, a funkcja końcowa E_L jest nierosnąca. Każda dodatnio zorientowana OFN jest interpretowana jako liczba nieprecyzyjna, która może wzrosnąć. Warunek $a > d$ określa ujemnie zorientowaną liczbę rozmytą $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}(a, b, c, d, S_L, E_L)$. W tym przypadku funkcja początkowa S_L jest nierosnąca, a funkcja końcowa E_L jest niemalejąca. Ujemnie zorientowana OFN jest interpretowana jako liczba nieprecyzyjna, która może zmaleć. W przypadku gdy $a = d$, skierowana liczba rozmyta OFN $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}(a, a, a, a, S_L, E_L)$ opisuje liczbę rzeczywistą $a \in \mathbb{R}$, która nie jest zorientowana.

W dalszej części artykułu ograniczono się do specjalnego przypadku skierowanych liczb rozmytych – trapezoidalnych skierowanych liczb rozmytych zdefiniowanych w pracy Piaseckiego [2018a] w następujący sposób:

Dla dowolnego monotonicznego ciągu $(a, b, c, d) \subset \mathbb{R}$ trapezoidalna skierowana liczba rozmyta (TrOFN) $\overleftrightarrow{Tr}(a, b, c, d)$ jest zdefiniowana jako para liczb rozmytych FN określona przez swoją funkcję przynależności $\mu_{\overleftrightarrow{Tr}}(\cdot\,|a, b, c, d) \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ daną za pomocą tożsamości:

$$\mu_{\overleftrightarrow{Tr}}(x|a, b, c, d) = \begin{cases} 0, x \notin [a, d], x \notin [d, a], \\ \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, b[=]b, a], \\ 1, x \in [b, c] = [c, b], \\ \frac{x-d}{c-d}, x \in]c, d] = [d, c[\end{cases} \tag{7}$$

oraz orientację $[\![a \rightarrowtail d]\!]$. □

Przestrzeń wszystkich trapezoidalnych skierowanych liczb rozmytych TrOFN oznaczamy symbolem $\mathbb{K}_{Tr}$.

Kosiński wprowadził operację arytmetyczną mnożenia przez liczbę $\odot$ dla trapezoidalnych skierowanych liczb rozmytych w następujący sposób:

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $\beta \in \mathbb{R}$ oraz dowolnej trapezoidalnej skierowanej liczby rozmytej $\overleftrightarrow{Tr}(a, b, c, d)$ ich iloczyn może być obliczony następująco:

$$\beta \odot \overleftrightarrow{Tr}(a, b, c, d) = \overleftrightarrow{Tr}(\beta \cdot a, \beta \cdot b, \beta \cdot c, \beta \cdot d). \tag{8}$$

Niestety również arytmetyka zaproponowana przez Kosińskiego ma istotną wadę. Przestrzeń wszystkich skierowanych liczb rozmytych nie jest domknięta ze względu na dodawanie Kosińskiego. Z tego powodu teoria Kosińskiego została zmodyfikowana w ten sposób, że przestrzeń skierowanych liczb rozmytych jest domknięta ze względu na zrewidowane operacje arytmetyczne. Suma $\boxplus$ trapezoidalnych skierowanych liczb rozmytych została określona w pracy Piaseckiego [2018a]. Dla przypadku dwóch dowolnych trapezoidalnych skierowanych liczb rozmytych $\overleftrightarrow{Tr}(a, b, c, d)$ oraz $\overleftrightarrow{Tr}(p - a, q - b, r - c, s - d)$ ich suma jest zdefiniowana następująco:

$$\overleftrightarrow{Tr}(a,b,c,d) \boxplus \overleftrightarrow{Tr}(p-a,q-b,r-c,s-d) = \\ = \begin{cases} \overleftrightarrow{Tr}(\min\{p,q\},q,r,\max\{r,s\}), (q<r) \vee (q=r \wedge p \le s), \\ \overleftrightarrow{Tr}(\max\{p,q\},q,r,\min\{r,s\}), (q>r) \vee (q=r \wedge p > s). \end{cases} \tag{9}$$

Na zbiorze trapezoidalnych skierowanych liczb rozmytych została również określona relacja rozmytego preporządku [Piasecki, 2018b]. Rozpatrzmy parę $(\overleftrightarrow{\mathcal{K}}, \overleftrightarrow{\mathcal{L}}) \in \mathbb{K}_{Tr} \times \mathbb{K}_{Tr}$. Na zbiorze $\mathbb{K}_{Tr}$ wszystkich skierowanych liczb rozmytych definiujemy relację $\overleftrightarrow{\mathcal{K}} \succcurlyeq \overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ następująco:

$$\overleftrightarrow{\mathcal{K}} \succcurlyeq \overleftrightarrow{\mathcal{L}} \Leftrightarrow \text{“}TrOFN\ \overleftrightarrow{\mathcal{K}}\ jest\ większa\ lub\ równa\ TrOFN\ \overleftrightarrow{\mathcal{L}}\text{”} \tag{10}$$

Ta relacja jest rozmytym preporządkiem $Q \in \mathcal{F}(\mathbb{K}_{Tr} \times \mathbb{K}_{Tr})$ określonym za pomocą takiej funkcji przynależności $\nu_Q \in [0,1]^{\mathbb{K}_{Tr} \times \mathbb{K}_{Tr}}$, że z punktu widzenia logiki wielowartościowej wartość $\nu_Q(\overleftrightarrow{\mathcal{K}}, \overleftrightarrow{\mathcal{L}})$ może być interpretowana jako wartość logiczna zdania (10). Wartość funkcji przynależności ν_Q jest opisana szczegółowo w następujący sposób:

Dla dowolnej pary $(\overleftrightarrow{\mathcal{K}}, \overleftrightarrow{\mathcal{L}}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ spełniającej warunek:

$$\overleftrightarrow{\mathcal{K}} \boxplus \left((-1) \odot \overleftrightarrow{\mathcal{L}}\right) = \overleftrightarrow{\mathcal{M}} = \overleftrightarrow{Tr}(a_{\mathcal{M}}, b_{\mathcal{M}}, c_{\mathcal{M}}, d_{\mathcal{M}}) \tag{11}$$

mamy:

– jeżeli $a_{\mathcal{M}} \le d_{\mathcal{M}}$, to:

$$\nu_Q(\overleftrightarrow{\mathcal{K}}, \overleftrightarrow{\mathcal{L}}) = \begin{cases} 0, 0 > d_{\mathcal{M}}, \\ \dfrac{-d_{\mathcal{M}}}{c_{\mathcal{M}} - d_{\mathcal{M}}}, d_{\mathcal{M}} \ge 0 > c_{\mathcal{M}}, \\ 1, c_{\mathcal{M}} \ge 0, \end{cases} \tag{12}$$

– jeżeli $a_{\mathcal{M}} > d_{\mathcal{M}}$, to:

$$\nu_Q(\overleftrightarrow{\mathcal{K}}, \overleftrightarrow{\mathcal{L}}) = \begin{cases} 0, 0 > a_{\mathcal{M}}, \\ \frac{-a_{\mathcal{M}}}{b_{\mathcal{M}} - a_{\mathcal{M}}}, a_{\mathcal{M}} \ge 0 > b_{\mathcal{M}}. \ \square \\ 1, b_{\mathcal{M}} \ge 0. \end{cases} \tag{13}$$

2. Zorientowana rozmyta wartość bieżąca

Wartość bieżąca (PV) to wartość teraźniejszego ekwiwalentu płatności dostępnej w ustalonym momencie czasu [Piasecki, 2012]. Wartość bieżąca przyszłych przepływów finansowych może być nieprecyzyjna. Z tego powodu PV jest oszacowana za pomocą liczb rozmytych. Wtedy PV jest scharakteryzowana przez monotoniczny ciąg $\{V_s, V_f, \check{C}, V_l, V_e\}$, gdzie:

– $\check{C}$ – cena rynkowa,
– $[V_s, V_e] \subset \mathbb{R}^+$ – przedział wszystkich możliwych wartości PV,
– $[V_f, V_l] \subset [V_s, V_e]$ – przedział wszystkich możliwych cen, które nie różnią się zauważalnie od ceny rynkowej $\check{C}$.

PV została oszacowana w sposób nieprecyzyjny oraz uzupełniona o prognozę jej najbliższych zmian. Taką wartość bieżącą nazywamy zorientowaną wartością bieżącą (OPV). OPV jest oszacowana przez OFN jako:

$$\overleftrightarrow{PV} = \overleftrightarrow{S}(V_s, V_f, V_l, V_e\ , L_{PV}, R_{PV}), \tag{14}$$

gdzie lewa funkcja odniesienia $L_{PV}: [V_s; V_f] \to [0; 1]$ oraz prawa funkcja odniesienia $R_{PV}: [V_l; V_e] \to [0; 1]$ są dane. Jeżeli przewidujemy wzrost ceny rynkowej, to OPV jest opisana za pomocą dodatnio zorientowanej OFN. Jeżeli przewidujemy spadek ceny rynkowej, to OPV jest opisana za pomocą ujemnie zorientowanej OFN. W niniejszym artykule OPV jest przybliżona przez TrOFN:

$$\overleftrightarrow{PV} = \overleftrightarrow{Tr}(V_s, V_f, V_l, V_e). \tag{15}$$

Jeżeli $V_s < V_e$, to dodatnio zorientowana PV oznacza prognozę wzrostu wartości. Jeżeli $V_s > V_e$, wówczas ujemna orientacja jest prognozą spadku wartości.

3. Zorientowany rozmyty czynnik dyskontujący

Załóżmy, że jest ustalony horyzont czasu $t > 0$ inwestycji. Wtedy rozpatrywany tutaj instrument finansowy jest określony przez dwie wartości: przewidywaną wartość przyszłą $FV = V_t$ oraz oszacowaną wartość bieżącą $PV = V_0$. Podstawową charakterystyką pozwalającą ocenić korzyści płynące z posiadania danego instrumentu finansowego jest prosta stopa zwrotu zdefiniowana następująco:

$$r_t = \frac{V_t - V_0}{V_0} = \frac{V_t}{V_0} - 1. \tag{16}$$

W praktyce analizy rynków finansowych ryzyko niepewności zwykle opisuje rozkład prawdopodobieństwa stopy zwrotu wyznaczonej dla $V_0 = \check{C}$. Za Markowitzem [1952] zakładamy, że prosta stopa zwrotu ma rozkład normalny $N(\bar{r}, \sigma)$. Wtedy oczekiwany czynnik dyskontujący $\bar{v} \in \mathbb{R}$ jest określony wzorem:

$$\bar{v} = \frac{1}{1+\bar{r}}\,. \tag{17}$$

Zorientowany rozmyty czynnik dyskontujący opisany przez TrOFN został podany w pracy Łyczkowskiej-Hanćkowiak i Piaseckiego [2018]:

$$\overleftrightarrow{V} = \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{V_s}{\check{C}} \cdot \bar{v}, \frac{V_f}{\check{C}} \cdot \bar{v}, \frac{V_l}{\check{C}} \cdot \bar{v}, \frac{V_e}{\check{C}} \cdot \bar{v}\right). \tag{18}$$

Tak określony czynnik dyskontujący instrumentu finansowego jest zorientowaną liczbą rozmytą o orientacji podobnej do wyznaczającej go zorientowanej wartości bieżącej. Z tej przyczyny nazywamy go rozmytym zorientowanym czynnikiem dyskontującym. Warto tutaj zauważyć, że kryterium maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu można zastąpić kryterium minimalizacji oczekiwanego czynnika dyskontującego. W przypadku wartości nierozmytych obu parametrów kryteria te są równoważne.

4. Rekomendacje inwestycyjne

Rekomendacja inwestycyjna jest poradą udzieloną inwestorowi przez doradcę. W tym artykule rozpatrzymy rodzinę porad, które były stosowane w pracy Piaseckiego [2014]. Z tego powodu rekomendacje są wyrażone za pomocą wystandaryzowanych porad [Piasecki, 2014]:

– Kupuj – oznacza sugestię, że oceniony instrument finansowy jest znacznie niedowartościowany,
– Dokupuj – oznacza sugestię, że oceniony instrument finansowy jest niedowartościowany,
– Trzymaj – oznacza sugestię, że oceniony instrument finansowy jest właściwie wyceniony,
– Redukuj – oznacza sugestię, że oceniony instrument finansowy jest przewartościowany,
– Sprzedaj – oznacza sugestię, że oceniony instrument finansowy jest znacząco przewartościowany.

Wspomniane porady tworzą zbiór $\mathbb{A} = \{A^{++}, A^{+}, A^{0}, A^{-}, A^{--}\}$ nazywany skalą ocen, gdzie:

– A^{++} oznacza poradę Kupuj,
– A^{+} oznacza poradę Dokupuj,
– A^{0} oznacza poradę Trzymaj,
– A^{-} oznacza poradę Redukuj,
– A^{--} oznacza poradę Sprzedaj.

Dzięki takiemu podejściu będziemy mogli w przyszłości porównywać uzyskane tutaj wyniki z wynikami analogicznych rozważań prowadzonych w pracach Piaseckiego [2014; 2016] oraz Piaseckiego i Siwek [2019].

Załóżmy teraz, że dany jest ustalony instrument finansowy $\check{S}$ reprezentowany przez parę $(\bar{r}, \sigma^2)$, gdzie $\bar{r}$ jest oczekiwaną stopą zwrotu z $\check{S}$, a σ^2 jest wariancją zwrotu z $\check{S}$. Porada doradcy zależy od oczekiwanej stopy zwrotu. Kryterium kompetentnego wyboru porady można przedstawić jako porównanie wartości $g(\bar{r})$ oraz $\check{G}$, gdzie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest rosnącą funkcją oczekiwanej stopy zwrotu, indeksem zysku, natomiast $\check{G}$ jest wartością graniczną.

W pracy Piaseckiego [2014] funkcja wyboru rekomendacji $\Lambda: \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{A}}$ została zdefiniowana następująco:

$$
\begin{aligned}
&- \ A^{++} \in \Lambda(\bar{r}, \check{G}) \Leftrightarrow g(\bar{r}) > \check{G} \Leftrightarrow g(\bar{r}) \geq \check{G} \wedge \neg g(\bar{r}) \leq \check{G}, \\
&- \ A^{+} \in \Lambda(\bar{r}, \check{G}) \Leftrightarrow g(\bar{r}) \geq \check{G}, \\
&- \ A^{0} \in \Lambda(\bar{r}, \check{G}) \Leftrightarrow g(\bar{r}) = \check{G} \Leftrightarrow g(\bar{r}) \geq \check{G} \wedge g(\bar{r}) \leq \check{G}, \\
&- \ A^{-} \in \Lambda(\bar{r}, \check{G}) \Leftrightarrow g(\bar{r}) \leq \check{G}, \\
&- \ A^{--} \in \Lambda(\bar{r}, \check{G}) \Leftrightarrow g(\bar{r}) < \check{G} \Leftrightarrow \neg g(\bar{r}) \geq \check{G} \wedge g(\bar{r}) \leq \check{G}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

W ten sposób instrumentowi finansowemu $\check{S}$ został przypisany podzbiór porad. Wartość $\Lambda(\bar{r}, \check{G}) \subset \mathbb{A}$ jest interpretowana jako rekomendacja inwestycyjna. W naszym przypadku rekomendacja inwestycyjna zależy od rozmytego oczekiwanego zwrotu. Zakładamy, że dany jest ustalony instrument finansowy $\check{S}$ reprezentowany przez uporządkowaną parę $(\mu_{\overleftrightarrow{V}}, \sigma)$, gdzie $\mu_{\overleftrightarrow{V}} \in [0,1]^{\mathbb{R}}$ jest funkcją przynależności zorientowanego rozmytego czynnika dyskontującego z $\check{S}$, a σ jest wariancją zwrotu z $\check{S}$. Wtedy rozmyty indeks zysku jest określony przez swoją funkcję przynależności daną wzorem:

$$\gamma(x) = \sup\left\{\mu_{\overleftrightarrow{V}}(v): x = g\left(\frac{1}{v} - 1\right)\right\} = \mu_{\overleftrightarrow{V}}\left(\frac{1}{g^{-1}(x)+1}\right). \tag{20}$$

Wartością $\tilde{\Lambda}(\gamma, \check{G})$ funkcji wyboru rekomendacji $\tilde{\Lambda}: [0,1]^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \to [0,1]^{\mathbb{R}}$ jest wtedy funkcja przynależności $\lambda(\cdot\,|\gamma, \check{G}): \mathbb{A} \to [0,1]$ określona w następujący sposób [Piasecki, 2014]:

$$
\begin{aligned}
&- \ \lambda(A^{++}|\gamma, \check{G}) = \sup\{\gamma(x): x \geq \check{G}\} \wedge \left(1 - \sup\{\gamma(x): x \leq \check{G}\}\right), \\
&- \ \lambda(A^{+}|\gamma, \check{G}) = \sup\{\gamma(x): x \geq \check{G}\}, \\
&- \ \lambda(A^{0}|\gamma, \check{G}) = \sup\{\gamma(x): x \geq \check{G}\} \wedge \sup\{\gamma(x): x \leq \check{G}\}, \\
&- \ \lambda(A^{-}|\gamma, \check{G}) = \sup\{\gamma(x): x \leq \check{G}\}, \\
&- \ \lambda(A^{--}|\gamma, \check{G}) = \sup\{\gamma(x): x \leq \check{G}\} \wedge \left(1 - \sup\{\gamma(x): x \geq \check{G}\}\right).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Z punktu widzenia logiki wielowartościowej wartość $\lambda(A|\gamma,\breve{G})$ interpretujemy jako wartość logiczną zdania:

$$\text{"}Rekomendacja\ A \in \mathbb{A}\ jest\ zalecana\ dla\ podjęcia\ decyzji\ inwestycyjnej\text{"}\ . \tag{22}$$

Z punktu widzenia podejmowania decyzji wartość $\lambda(A|\gamma,\breve{G})$ interpretujemy jako stopień zalecenia rekomendacji $A \in \mathbb{A}$, tj. deklarowany udział doradcy w odpowiedzialności za ostateczne podjęcie decyzji inwestycyjnej zgodnej z poradą $A \in \mathbb{A}$. W opisanej sytuacji rekomendacja inwestycyjna $\tilde{\Lambda}(\gamma,\breve{G})$ jest podzbiorem rozmytym skali ocen $\mathbb{A}$.

5. Kryterium Jensena

Kryterium Jensena to jedno z kryteriów zarządzania ryzykiem. Na rynku kapitałowym obserwujemy wolną od ryzyka stopę zwrotu r_0 oraz stopę zwrotu r_M z portfela rynkowego M. Każda efektywna inwestycja jest reprezentowana przez parę (r,β), której oczekiwana stopa zwrotu r spełnia warunek wyznaczony przez model CAPM:

$$r_0 = r - \beta(r_M - r_0), \tag{23}$$

natomiast β jest miarą wrażliwości na stopę zwrotu z portfela rynkowego, miarą ryzyka rynkowego. Rozważmy inwestycję reprezentowaną przez parę $(\bar{r},\beta)$. Jensen zaproponował ocenianie inwestycji na podstawie jej położenia względem linii równowagi wyznaczonej przez model CAPM. Podał wskaźnik kryterialnej oceny:

$$J = \bar{r} - \beta(r_M - r_0) \tag{24}$$

nazywany miernikiem Jensena. Spośród dwóch inwestycji za lepszą uważamy tę, dla której wskaźnik osiąga wyższą wartość. Jeśli $J > r_0$, to inwestycja jest niedowartościowana i inwestycji tej przyporządkowujemy rekomendację Kupuj. Jeśli $J = r_0$, cena inwestycji jest ceną równowagi i inwestycji tej przyporządkowujemy rekomendację Trzymaj. Jeśli $J < r_0$, to inwestycja jest wyceniona nazbyt wysoko i inwestycji tej przyporządkowujemy rekomendację Sprzedaj. Miernik Jensena porządkuje inwestycje według premii za ryzyko stopy rynkowej. W tym modelu równowagi finansowej porównywana jest oczekiwana stopa zwrotu osiągnięta przez zarządzającego portfelem i oczekiwana stopa zwrotu z portfela rynkowego z instrumentem wolnym od ryzyka. Indeks zysku Jensena szacuje wielkość premii rynkowej ryzyka portfela. Wartość graniczna Jensena jest równa stopie zwrotu wolnej od ryzyka [Piasecki, 2014; Jensen, 1969]. Załóżmy teraz, że istnieje wolny od ryzyka instrument finansowy opisany przez parę $(r_0, 0)$ i portfel rynkowy opisany przez parę (r_M, β_M). Jensen definiuje indeks zysku oraz wartość graniczną następująco:

$$g(r) = r - \beta(r_M - r_0), \tag{25}$$

$$\breve{G} = r_0. \tag{26}$$

W naszym przypadku dla instrumentu finansowego wolnego od ryzyka opisanego przez parę $(r_0, 0)$ i portfela rynkowego opisanego przez parę (r_M, β_M) stopę zwrotu wyrażamy za pomocą czynnika dyskontującego:

$$r_0 = \frac{1}{v_0} - 1, \tag{27}$$

$$r_M = \frac{1}{v_M} - 1. \tag{28}$$

Wtedy dla instrumentu finansowego $\breve{S}$ opisanego przez parę (v, β) indeks zysku oraz wartość graniczną $\breve{G}$ definiujemy następująco:

$$g(v) = \frac{1}{v} + \frac{v_M - v_0}{v_M v_0}\beta - 1, \tag{29}$$

$$\breve{G} = \frac{1}{v_0} - 1. \tag{30}$$

Rozmyty indeks zysku jest określony przez swoją funkcję przynależności:

$$\gamma(x) = \sup\left\{\mu_{\overleftrightarrow{V}}(v) \colon x = \frac{1}{v} + \frac{v_M - v_0}{v_M v_0}\beta - 1\right\} = \mu_{\overleftrightarrow{V}}\left(\frac{v_M v_0}{v_M v_0(x+1) - (v_M - v_0)\beta}\right). \tag{31}$$

Dokonując porównania zdefiniowanego przez Jensena indeksu zysku (29) z wolną od ryzyka stopą zwrotu r_0 (30), wyznaczamy wartości funkcji wyboru rekomendacji. Wartością $\tilde{\Lambda}(\gamma, \breve{G})$ funkcji wyboru rekomendacji $\tilde{\Lambda} \colon [0,1]^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \rightarrow$ $\rightarrow [0,1]^{\mathbb{R}}$ jest funkcja przynależności $\lambda \colon \mathbb{A} \rightarrow [0,1]$. Jest ona opisana za pomocą następujących wzorów:

$$
\begin{aligned}
&- \ A^{++} \in \Lambda(\bar{r}, \breve{G}) \Leftrightarrow x < \frac{v_0 v_M}{v_M + (v_0 - v_M)\beta}, \\
&- \ A^{+} \in \Lambda(\bar{r}, \breve{G}) \Leftrightarrow x \le \frac{v_0 v_M}{v_M + (v_0 - v_M)\beta}, \\
&- \ A^{0} \in \Lambda(\bar{r}, \breve{G}) \Leftrightarrow x = \frac{v_0 v_M}{v_M + (v_0 - v_M)\beta}, \\
&- \ A^{-} \in \Lambda(\bar{r}, \breve{G}) \Leftrightarrow x \ge \frac{v_0 v_M}{v_M + (v_0 - v_M)\beta}, \\
&- \ A^{--} \in \Lambda(\bar{r}, \breve{G}) \Leftrightarrow x > \frac{v_0 v_M}{v_M + (v_0 - v_M)\beta},
\end{aligned}
\tag{32}
$$

gdzie x jest liczbą rzeczywistą, która może być równa wartości oczekiwanego czynnika dyskontującego, $\tilde{A}(\tilde{V},\breve{G})$ jest nieprecyzyjną rekomendacją inwestycyjną, a $\lambda(A)$ określa stopień, w jakim rekomendacja $A \in \mathbb{A}$ została wybrana. Oczekiwany rozmyty czynnik dyskontujący w naszym przypadku jest opisany za pomocą trapezoidalnej skierowanej liczby rozmytej:

$$\overleftrightarrow{V} = \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{V_s}{\breve{C}} \cdot \bar{v}, \frac{V_f}{\breve{C}} \cdot \bar{v}, \frac{V_l}{\breve{C}} \cdot \bar{v}, \frac{V_e}{\breve{C}} \cdot \bar{v}\right). \tag{33}$$

Wartość graniczna jest liczbą rzeczywistą, która zapisana w postaci trapezoidalnej skierowanej liczby rozmytej przyjmuje postać:

$$\overleftrightarrow{V_0} = \overleftrightarrow{Tr}(\breve{G},\breve{G},\breve{G},\breve{G}), \tag{34}$$

gdzie wartość graniczna jest równa:

$$\breve{G} = \frac{v_0 v_M}{v_M + (v_0 - v_M)\beta}\,. \tag{35}$$

Aby porównać liczby $\overleftrightarrow{V}$ oraz $\overleftrightarrow{V_0}$, wyznaczamy:

$$\overleftrightarrow{M} = \overleftrightarrow{V}\text{-}\overleftrightarrow{V_0} = \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{V_s}{\breve{C}} \cdot \bar{v} - \breve{G}, \frac{V_f}{\breve{C}} \cdot \bar{v} - \breve{G}, \frac{V_l}{\breve{C}} \cdot \bar{v} - \breve{G}, \frac{V_e}{\breve{C}} \cdot \bar{v} - \breve{G}\right). \tag{36}$$

Zauważmy, że orientacja $\overleftrightarrow{M}$ oraz $\overleftrightarrow{V}$ jest taka sama. Wyznaczamy wartości funkcji przynależności rozmytego preporządku na zbiorze $\{\overleftrightarrow{V},\overleftrightarrow{V_0}\}$. Jeżeli $\overleftrightarrow{M}$ oraz $\overleftrightarrow{V}$ mają dodatnią orientację, to wartość funkcji przynależności rozmytego preporządku jest określona wzorem:

$$\nu_Q(\overleftrightarrow{V},\overleftrightarrow{V_0}) = \begin{cases} 0, \frac{\breve{G}\cdot\breve{C}}{\bar{v}} > V_e, \\ \frac{-V_e\bar{v}+\breve{G}\cdot\breve{C}}{(V_l-V_e)\bar{v}},\ V_e \geq \frac{\breve{G}\cdot\breve{C}}{\bar{v}} > V_l, \\ 1,\ V_l \geq \frac{\breve{G}\cdot\breve{C}}{\bar{v}}. \end{cases} \tag{37}$$

Jeżeli $\overleftrightarrow{M}$ oraz $\overleftrightarrow{V}$ mają ujemną orientację, to wartość funkcji przynależności rozmytego preporządku można zapisać za pomocą wzoru:

$$\nu_Q(\overleftrightarrow{V},\overleftrightarrow{V_0}) = \begin{cases} 0, \frac{\breve{G}\cdot\breve{C}}{\bar{v}} > V_s, \\ \frac{-V_e\bar{v}+\breve{G}\cdot\breve{C}}{(V_l-V_e)\bar{v}},\ V_s \geq \frac{\breve{G}\cdot\breve{C}}{\bar{v}} > V_f, \\ 1,\ V_f \geq \frac{\breve{G}\cdot\breve{C}}{\bar{v}}. \end{cases} \tag{38}$$

6. Przykłady

Ta część zawiera trzy przykłady ilustrujące niniejsze rozważania. Pokazano tu metodę (sposób) wykorzystania przedefiniowanego kryterium Jensena do zarządzania rekomendacjami inwestycyjnymi. W każdym przypadku wartość bieżąca jest dana i opisana za pomocą trapezoidalnej skierowanej liczby rozmytej. W przykładach 1 i 2 wartość bieżąca jest dodatnio zorientowana, a w przykładzie 3 wartość bieżąca jest ujemnie zorientowana.

Przykład 1

Dla wartości bieżącej danej za pomocą dodatnio zorientowanej trapezoidalnej liczby rozmytej $\overleftrightarrow{PV} = \overleftrightarrow{Tr}(20, 30, 50, 80)$, ceny rynkowej $\check{C} = 40$, oczekiwanej stopy zwrotu $\bar{r} = 0{,}25$, stopy zwrotu z portfela $r_M = 0{,}20$, stopy zwrotu wolnej od ryzyka $r_0 = 0{,}18$ oraz miary ryzyka rynkowego $\beta = 0{,}7$, wyznaczamy oczekiwany czynnik dyskontujący $\bar{v} = \frac{1}{1+\bar{r}} = \frac{1}{1+0{,}25} = \frac{4}{5} = 0{,}8$. Podobnie wyznaczamy $v_M = \frac{1}{1+r_M} = \frac{1}{1+0{,}2} = \frac{5}{6} \approx 0{,}833$ oraz $v_0 = \frac{1}{1+r_0} = \frac{1}{1+0{,}18} = \frac{50}{59} \approx$ $\approx 0{,}8476$. Wartość graniczna jest równa $\check{G} = \frac{v_0 v_M}{v_M + (v_0 - v_M)\beta} = \frac{\frac{50}{59}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{5}{6} + \frac{7}{10}\cdot\left(\frac{50}{59} - \frac{5}{6}\right)} = \frac{500}{597} \approx$ $\approx 0{,}9862$. W naszym przypadku oczekiwany czynnik dyskontujący jest rozmytym czynnikiem dyskontującym opisanym za pomocą trapezoidalnej liczby rozmytej. Aby można go było porównać z wartością graniczną $\check{G}$, została ona przedstawiona jako trapezoidalna liczba rozmyta, tzn. $\overleftrightarrow{V_0} = \check{G} = \overleftrightarrow{Tr}(\check{G}, \check{G}, \check{G}, \check{G}) =$ $= \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{500}{597}, \frac{500}{597}, \frac{500}{597}, \frac{500}{597}\right)$. Oczekiwany rozmyty czynnik dyskontujący jest równy $\overleftrightarrow{V} = \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{0{,}8}{40}\cdot 20, \frac{0{,}8}{40}\cdot 30, \frac{0{,}8}{40}\cdot 50, \frac{0{,}8}{40}\cdot 80\right) = \overleftrightarrow{Tr}(0{,}4, 0{,}6, 1, 1{,}6) = \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{8}{5}\right)$. W celu porównania liczb $\overleftrightarrow{V}$ oraz $\overleftrightarrow{V_0}$ korzystamy z relacji preporządku w rozumieniu Orlovsky'ego. Wyznaczamy najpierw:

$$\overleftrightarrow{M} = \overleftrightarrow{V} - \overleftrightarrow{V_0} = \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{8}{5}\right) - \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{500}{597}, \frac{500}{597}, \frac{500}{597}, \frac{500}{597}\right) =$$
$$= \overleftrightarrow{Tr}\left(-\frac{1306}{2985}, -\frac{709}{2985}, \frac{97}{597}, \frac{2276}{2985}\right)$$

oraz:

$$\overleftrightarrow{N} = \overleftrightarrow{V_0} - \overleftrightarrow{V} = \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{500}{597}, \frac{500}{597}, \frac{500}{597}, \frac{500}{597}\right) - \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{8}{5}\right) =$$
$$= \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{1306}{2985}, \frac{709}{2985}, -\frac{97}{597}, -\frac{2276}{2985}\right),$$

a następnie wartości logiczne funkcji przynależności rozmytego preporządku określonego na zbiorze $\{\overleftrightarrow{V}, \overleftrightarrow{V_0}\}$:

$$x_1 = \vartheta_Q\left(\overleftrightarrow{V}, \overleftrightarrow{V_0}\right) = 1 \text{ oraz } x_2 = \vartheta_Q\left(\overleftrightarrow{V_0}, \overleftrightarrow{V}\right) = 1.$$

Na tej podstawie otrzymujemy wartości funkcji przynależności wyboru rekomendacji (stopnie, w jakich dana decyzja jest rekomendowana):

- $\lambda(\mathrm{A}^{++}) = \min\{x_1, 1 - x_2\} = \min\{1,0\} = 0$,
- $\lambda(\mathrm{A}^{+}) = x_1 = 1$,
- $\lambda(\mathrm{A}^{0}) = \min\{x_1, x_2\} = \min\{1,1\} = 1$,
- $\lambda(\mathrm{A}^{-}) = x_2 = 1$,
- $\lambda(\mathrm{A}^{--}) = \min\{x_2, 1 - x_1\} = \min\{1,0\} = 0$.

Stąd ostatecznie otrzymujemy zbiór:

$$\mathbb{A} = \left\{{}^{0}/_{A^{++}}\,; {}^{1}/_{A^{+}}\,; {}^{1}/_{A^{0}}\,; {}^{1}/_{A^{-}}\,; {}^{0}/_{A^{--}}\right\},$$

co oznacza, że sugestie Dokupuj, Trzymaj oraz Redukuj są rekomendowane w stopniu 1, natomiast Kupuj oraz Sprzedaj są rekomendowane w stopniu 0.

Przykład 2

Dla wartości bieżącej danej za pomocą dodatnio zorientowanej trapezoidalnej liczby rozmytej $\overleftrightarrow{PV} = \overleftrightarrow{Tr}(20, 30, 35, 80)$ oraz pozostałych parametrów danych, jak w Przykładzie 1, wyznaczamy oczekiwany zorientowany rozmyty czynnik dyskontujący:

$$\overleftrightarrow{V} = \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{0{,}8}{40}\cdot 20, \frac{0{,}8}{40}\cdot 30, \frac{0{,}8}{40}\cdot 35, \frac{0{,}8}{40}\cdot 80\right) = \overleftrightarrow{Tr}(0{,}4, 0{,}6, 0{,}9, 1{,}6) =$$
$$\overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{8}{5}\right).$$

Liczby $\overleftrightarrow{M}$ oraz $\overleftrightarrow{N}$ są odpowiednio równe:

$$\overleftrightarrow{M} = \overleftrightarrow{V} - \overleftrightarrow{V_0} = \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{8}{5}\right) - \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{500}{597}, \frac{500}{597}, \frac{500}{597}, \frac{500}{597}\right) =$$
$$= \overleftrightarrow{Tr}\left(-\frac{1306}{2985}, -\frac{709}{2985}, -\frac{821}{5970}, \frac{2276}{2985}\right),$$
$$\overleftrightarrow{N} = \overleftrightarrow{V_0} - \overleftrightarrow{V} = \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{500}{597}, \frac{500}{597}, \frac{500}{597}, \frac{500}{597}\right) - \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{8}{5}\right) =$$
$$= \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{1306}{2985}, \frac{709}{2985}, \frac{821}{5970}, -\frac{2276}{2985}\right).$$

Wartości logiczne funkcji przynależności rozmytego preporządku określonego na zbiorze $\{\overleftrightarrow{V}, \overleftrightarrow{V_0}\}$ wynoszą:

$$x_1 = \vartheta_Q\left(\overleftrightarrow{V}, \overleftrightarrow{V_0}\right) = \frac{4552}{5373} \text{ oraz } x_2 = \vartheta_Q\left(\overleftrightarrow{V_0}, \overleftrightarrow{V}\right) = 1.$$

Stąd wartości funkcji przynależności wyboru rekomendacji są równe:

- $\lambda(A^{++}) = \min\{x_1, 1 - x_2\} = \min\left\{\frac{4552}{5373}, 1 - 1\right\} = 0$,
- $\lambda(A^{+}) = x_1 = \frac{4552}{5373}$,
- $\lambda(A^{0}) = \min\{x_1, x_2\} = \min\left\{\frac{4552}{5373}, 1\right\} = \frac{4552}{5373}$,
- $\lambda(A^{-}) = x_2 = 1$,
- $\lambda(A^{--}) = \min\{x_2, 1 - x_1\} = \min\left\{1, \frac{821}{5373}\right\} = \frac{821}{5373}$.

Ostatecznie otrzymujemy $\mathbb{A} = \left\{{}^{0}\!/_{\mathrm{A}^{++}}; {}^{\frac{4552}{5373}}\!\Big/_{\mathrm{A}^{+}}; {}^{\frac{4552}{5373}}\!\Big/_{\mathrm{A}^{0}}; {}^{1}\!/_{\mathrm{A}^{-}}; {}^{\frac{821}{5373}}\!\Big/_{\mathrm{A}^{--}}\right\}$, co oznacza, że sugestia Kupuj jest rekomendowana w stopniu 0, sugestie Dokupuj oraz Trzymaj są rekomendowane w stopniu $\frac{4552}{5373}$, sugestia Redukuj jest rekomendowana w stopniu 1, a sugestia Sprzedaj jest rekomendowana w stopniu $\frac{821}{5373}$.

Przykład 3

Dla wartości bieżącej danej za pomocą ujemnie zorientowanej trapezoidalnej liczby rozmytej $\overleftrightarrow{PV} = \overleftrightarrow{Tr}(80, 35, 30, 20)$ oraz pozostałych parametrów danych, jak w Przykładzie 1, wyznaczamy liczby:

$$\overleftrightarrow{M} = \overleftrightarrow{V} - \overleftrightarrow{V_0} = \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{8}{5}, \frac{7}{10}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) - \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{500}{597}, \frac{500}{597}, \frac{500}{597}, \frac{500}{597}\right) =$$
$$= \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{2276}{2985}, -\frac{821}{5970}, -\frac{709}{2985}, -\frac{1306}{2985}\right),$$
$$\overleftrightarrow{N} = \overleftrightarrow{V_0} - \overleftrightarrow{V} = \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{500}{597}, \frac{500}{597}, \frac{500}{597}, \frac{500}{597}\right) - \overleftrightarrow{Tr}\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{10}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) =$$
$$= \overleftrightarrow{Tr}\left(-\frac{2276}{2985}, \frac{821}{5970}, \frac{709}{2985}, \frac{1306}{2985}\right),$$

a następnie wartości funkcji przynależności rozmytego preporządku:

$$x_1 = \vartheta_Q\left(\overleftrightarrow{V}, \overleftrightarrow{V_0}\right) = \frac{4552}{5373} \text{ oraz } x_2 = \vartheta_Q\left(\overleftrightarrow{V_0}, \overleftrightarrow{V}\right) = 1.$$

Stąd dostajemy wartości funkcji przynależności wyboru rekomendacji:

- $\lambda(A^{++}) = \min\{x_1, 1 - x_2\} = \min\left\{\frac{4552}{5373}, 1 - 1\right\} = 0$,
- $\lambda(A^{+}) = x_1 = \frac{4552}{5373}$,
- $\lambda(A^{0}) = \min\{x_1, x_2\} = \min\left\{\frac{4552}{5373}, 1\right\} = \frac{4552}{5373}$,
- $\lambda(A^{-}) = x_2 = 1$,
- $\lambda(A^{--}) = \min\{x_2, 1 - x_1\} = \min\left\{1, \frac{821}{5373}\right\} = \frac{821}{5373}$

i ostatecznie $\mathbb{A} = \left\{ {}^{0}/_{\mathrm{A}^{++}}; {}^{\frac{4552}{5373}}/_{\mathrm{A}^{+}}; {}^{\frac{4552}{5373}}/_{\mathrm{A}^{0}}; {}^{1}/_{\mathrm{A}^{-}}; {}^{\frac{821}{5373}}/_{\mathrm{A}^{--}} \right\}$. Łatwo zauważyć, że otrzymany zbiór rekomendacji jest taki sam, jak w Przykładzie 2. Oznacza to, że orientacja PV może nie mieć wpływu na rekomendacje ekspertów.

Podsumowanie

W niniejszym artykule wykazano, że jeśli jako przesłankę do sformułowania rekomendacji inwestycyjnej wykorzystamy oczekiwany zorientowany rozmyty czynnik dyskontujący, to sama rekomendacja jest podzbiorem rozmytym w skali ocen. Wartości funkcji przynależności rekomendacji inwestycyjnej powinny być interpretowane jako stopień rekomendacji wybranej porady, tj. deklarowany udział doradcy w odpowiedzialności za ostateczne podjęcie decyzji inwestycyjnej.

W ten sposób uzyskano postać rekomendacji inwestycyjnej identyczną z postacią rekomendacji inwestycyjnej wyznaczoną w pracach Piaseckiego [2014, 2016]. Pozwoli to w przyszłości na zbadanie wpływu orientacji czynnika dyskontowego na kształt rekomendacji inwestycyjnej.

Przedmiotem dalszych prac powinno być wyznaczanie kolejnych takich strategii inwestycyjnych, dla których zorientowany rozmyty czynnik dyskontujący jest podstawową przesłanką podejmowania decyzji inwestycyjnych.

Literatura

Atanassov K. (1986), *Intuitionistic Fuzzy Sets*, “Fuzzy Sets and Systems”, No. 20, s. 87-96.

Dubois D., Prade H. (1978), *Operations on Fuzzy Numbers*, “Int. J. Syst. Sci.”, No. 9, s. 613-629.

Dubois D., Prade H. (1979), *Fuzzy Real Algebra: Some Results*, “Fuzzy Set. Syst.”, No. 2, s. 327-348.

Jensen M.C. (1969), *Risk, the Pricing of Capital Assets, and the Evaluation of Investment Portfolios*, “Journal of Business”, No. 42(2), s. 167-247.

Kosiński W. (2006), *On Fuzzy Number Calculus*, “Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.”, No. 16(1), s. 51-57.

Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D. (2002), *Fuzzy Numbers with Algebraic Operations: Algorithmic Approach* [w:] M. Klopotek, S.T. Wierzchoń, M. Michalewicz (eds.), *Proc.IIS’2002 Sopot, Poland*, Physica Verlag, Heidelberg, s. 311-320.

Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D. (2003), *Ordered Fuzzy Numbers*, „Bull. Pol. Acad. Sci.", No. 51(3), s. 327-339.

Kosiński W., Słysz P. (1993), *Fuzzy Numbers and Their Quotient Space with Algebraic Operations*, "Bull. Pol. Acad. Sci.", No. 41(3), s. 285-295.

Łyczkowska-Hanćkowiak A., Piasecki K. (2018), *The Expected Discount Factor Determined for Present Value Given as Ordered Fuzzy Number*, 9th International Scientific Conference "Analysis of International Relations 2018. Methods and Models of Regional Development. Winter Edition", Katowice, s. 69-75.

Markowitz H. (1952), *Portfolio Selection*, "Journal of Finance", No. 7(1), s. 77-91.

Piasecki K. (2011), *Effectiveness of Securities with Fuzzy Probabilistic Return*, "Operations Research and Decision", No. 21(2), s. 65-78.

Piasecki K. (2012), *Basis of Financial Arithmetic from the Viewpoint of the Utility Theory*, "Operations Research and Decisions", No. 3, s. 37-53.

Piasecki K. (2014), *On Imprecise Investment Recommendations*, "Studies in Logic, Grammar and Rhetoric", No. 37(1), s. 179-194.

Piasecki K. (2016), *The Intuitionistic Fuzzy Investment Recommendations* [w:] *Mathematical Methods in Economics MME 2016 Conference Proceedings*, s. 681-686.

Piasecki K. (2018a), *Revision of the Kosiński's Theory of Ordered Fuzzy Numbers*, "Axioms", No. 7(1), https://doi.org/10.3390/axioms7010016.

Piasecki K. (2018b), *The Relations "Less or Equal" and "Less than" for Ordered Fuzzy Number* [w:] *10th International Scientific Conference "Analysis of International Relations 2018. Methods and Models of Regional Development. Summer Edition". Conference Proceedings*, Publishing House of the University of Economics in Katowice, s. 32-39.

Piasecki K., Siwek J. (2018a), *Two-assets Portfolio with Trapezoidal Fuzzy Present Value* [w:] W. Szkutnik, A. Sączewska-Piotrowska, M. Hadaś-Dyduch, J. Acedański (eds.), *9th International Scientific Conference "Analysis of International Relations 2018. Methods and Models of Regional Development. Winter Edition". Conference Proceedings*, Publishing House of the University of Economics in Katowice, s. 76-84.

Piasecki K., Siwek J. (2018b), *Two-Asset Portfolio with Triangular Fuzzy Present Values − An Alternative Approach* [w:] T. Choudhry, J. Mizerka (eds.), *Contemporary Trends in Accounting, Finance and Financial Institutions. Proceedings from the International Conference on Accounting, Finance and Financial Institutions (ICAFFI), Poznan 2016*, Springer International Publishing, s. 11-26.

Piasecki K., Siwek J. (2019), *Investment Strategies Determined by Present Value Given as Trapezoidal Fuzzy Numbers* [w:] W. Tarczyński, N. Kesra (eds.), *Effective Investments on Capital Markets − Capital Markets Effective Investments (CMEI)2018*, Springer Proceedings in Business and Economics, s. 189-213.

Prokopowicz P., Czerniak J., Mikołajewski D., Apiecionek Ł., Ślezak D., eds. (2017), *Theory and Applications of Ordered Fuzzy Number. Tribute to Professor Witold Kosiński*, "Studies in Fuzziness and Soft Computing", No. 356, Springer Verlag, Berlin.

ON APPLICATION ORIENTED FUZZY DISCOUNT FACTOR FOR JENSEN'S RATIO

Summary: The analysis presented in the paper regards the security of a present value given as an ordered fuzzy number. It means that the present value was estimated in an imprecise manner and supplemented by the forecast of its coming changes. Such a present value is called the oriented fuzzy present value. A discount factor of such security is an ordered fuzzy number of the orientation identical to the oriented present value that determines it. All classical methods of portfolio analysis base on the definition of the return rate. On the other hand, in the literature it was indicated that in case of securities with the fuzzy present value, a discount factor is a better tool of portfolio analysis than the return rate. It implies that chosen methods of management of securities should be revised and transformed to equivalent methods based on a discount factor. It will enable the use of those methods in case of a financial instrument of the oriented fuzzy present value. This paper presents the example results of the realisation of such a postulate. The main aim of the paper is to generalise Jensen's ratio to a case of investment recommendations management formulated for a security characterised by an oriented discount factor. A five-step rating scale was used. The whole deliberation is illustrated by broad numerical examples.

Keywords: Jensen's ratio, ordered fuzzy number, fuzzy oriented discount factor.