Technische Unterrichtsbriefe

für das **Selbststudium.** * System **Karnack-Hachfeld.**

Gesetzlich geschützt. W.-Z. 31255.

Brief 4. | **Geometrisches Zeichnen.** | **Brief 4.**

Zwölfte Stunde.

A. Vortrag.

109. Die in den folgenden Abschnitten zu behandelnden geometrischen Figuren entstehen, wenn man einen Kegel durch eine Ebene in zwei Teile teilt, als Schnittfiguren. Sie werden deshalb kurz als ***Kegelschnitte*** bezeichnet. Schneidet man einen Kegel (Textfig. 91) senkrecht zu seiner Axe durch eine Ebene AB, so ergiebt sich als Schnittfigur ein Kreis, dessen Mittelpunkt M in der Axe liegt. Dreht man nun die Schnittebene in die Lage CD, so verschiebt sich der Mittelpunkt der entstehenden Schnittfigur. Außerdem aber wird aus dem Kreise eine länger gestreckte, gewissermaßen in die Breite gezogene Figur, die ebenso wie der Kreis eine geschlossene Curve bildet, deren Punkte aber nicht mehr alle von dem Mittelpunkte gleich weit entfernt sind. Diese Curve heißt ***Ellipse,*** wenn der Winkel, den eine vom tiefsten Punkt der Schnittfigur (Punkte) auf dem Mantel nach der Spitze des Kegels gezogene Linie mit der Grundfläche bildet, spitzer ist als der Winkel zwischen der Verlängerung dieser Linie und der Grundfläche. In Textfig. 92 auf folgender Seite ist eine solche dargestellt.

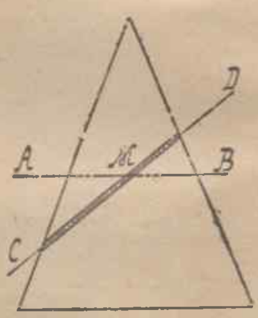

Fig. 91.

Man kann sich die Ellipse aus einem Kreise dadurch entstanden denken, daß alle wagerechten Abmessungen desselben, also die Abstände der Punkte des Umfanges von einem senkrechten Durchmesser, in gleichem Verhältnisse vergrößert worden sind, während alle senkrechten Abmessungen, also die Abstände der Punkte des Umfanges von einem wagerechten Durchmesser die gleichen bleiben. In dieser Art ist die Ellipse (Textfig. 92) entstanden, indem alle wagerechten Abmessungen des Kreises mit der kleinen Axe CD als Durchmesser verdoppelt sind, während alle senkrechten Abmessungen die gleichen geblieben sind. Aus dem wagerechten Durchmesser AB ist dabei die **große Axe** A_1B_1 der Ellipse geworden.

110. Auf dieser Eigentümlichkeit der Ellipse, daß alle Abmessungen in einer Richtung, hier der großen Axe, sich im selben Verhältnis vergrößern, beruhen nun eine Anzahl von Ellipsenconstructionen, die man als Constructionen durch **Vergatterung** bezeichnet.

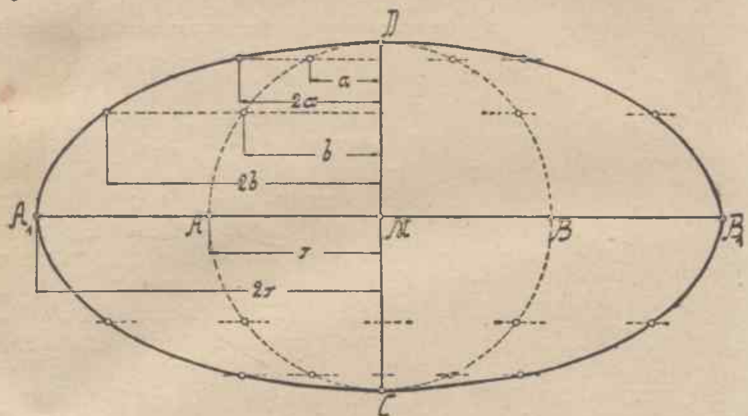

Fig. 92.

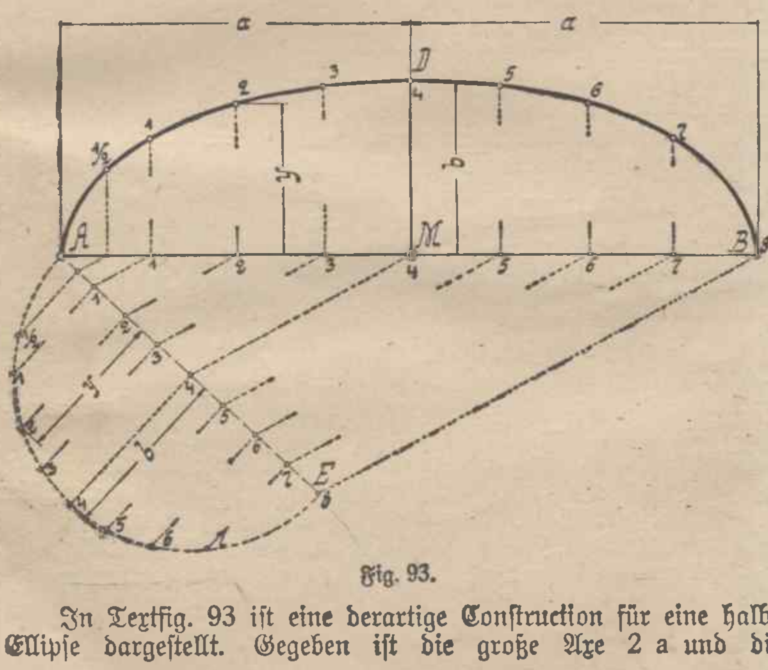

Fig. 93.

In Textfig. 93 ist eine derartige Construction für eine halbe Ellipse dargestellt. Gegeben ist die große Axe 2 a und die kleine Axe 2b der Ellipse. Wir tragen auf einer dazu senkrechten Linie nach beiden Seiten je die Hälfte der großen Axe ab und erhalten die Punkte A und B. Durch A ziehen wir unter beliebigem Winkel geneigt eine Linie AE und schlagen über dieser Linie einen Halbkreis mit der Hälfte der kleinen Axe als Radius, und zwar so, daß er durch den Punkt A geht. Den Durchmesser dieses Halbkreises teilen wir in eine beliebige Anzahl unter sich gleicher Teile und errichten in den Teilpunkten 1, 2, 3 . . . Senkrechte auf AE, welche den Halbkreis in den Punkten 1, 2, 3 . . . schneiden. Nunmehr wird der Punkt E mit B verbunden und durch die Teilpunkte 1, 2, 3 der Länge AE werden Parallelen zu EB gezogen, welche die Linie AB in den Punkten 1, 2, 3 . . . ebenfalls in gleiche Teile teilen. In diesen neu gewonnenen Teilpunkten errichtet man nun auf der großen Axe AB Senkrechte und trägt auf diesen die innerhalb des Halbkreises liegenden Abschnitte (y) 1 1, 2 2, 3 3 . . . ab, wodurch man die Punkte 1, 2, 3 . . . der Ellipse erhält. Diese werden nun mit Hilfe des Curvenlineals zu einer fortlaufenden Curve verbunden, deren unterhalb der großen Axe liegende Hälfte durch einfaches Abtragen der Abstände der einzelnen Punkte von der großen Axe nach unten gefunden werden.

111. Sehr eng mit dieser Construction verwandt ist die in Textfig. 94 angegebene, bei welcher folgendermaßen verfahren wird.

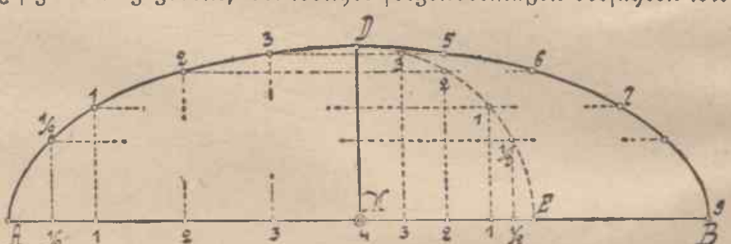

Fig. 94.

In der Mitte der großen Axe AB wird eine Senkrechte MD errichtet. Auf dieser wird die Hälfte der gegebenen kleinen Axe abgetragen und um M mit MD als Radius ein Viertelkreis bis zum Schnitt E mit der großen Axe geschlagen. Die Strecke ME wird nunmehr in gleiche Teile geteilt, und die Hälfte der

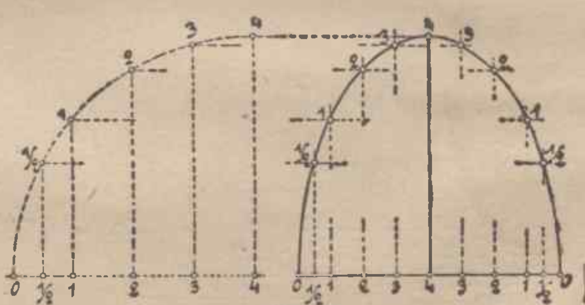

Fig. 95.

großen Axe AB in ebensoviel gleiche Teile zerlegt. Errichtet man nun in den Teilpunkten der Strecke ME Senkrechte, so ergeben sich die Schnittpunkte 1, 2, 3 . . . mit dem Viertelkreis. Durch diese zieht man wagerechte Linien und durch die Teilpunkte der großen Axe 1, 2, 3 . . . Senkrechte. Die Schnittpunkte der gleich numerierten wagerechten und senkrechten Linien sind dann Punkte einer Viertelellipse, die durch einfaches Abtragen nach der andern Seite der großen bezw. kleinen Axe den Umfang einer vollen Ellipse ergeben. In Textfig. 95 ist dasselbe Verfahren durchgeführt, und zwar für eine solche Ellipse, bei welcher die große Axe senkrecht steht. Der Uebersichtlichkeit wegen ist der Viertelkreis aus der Ellipse herausgelegt worden.

112. Weiter sind mit den im vorstehenden behandelten Constructionen einige Constructionen verwandt, welche die Aufzeichnung

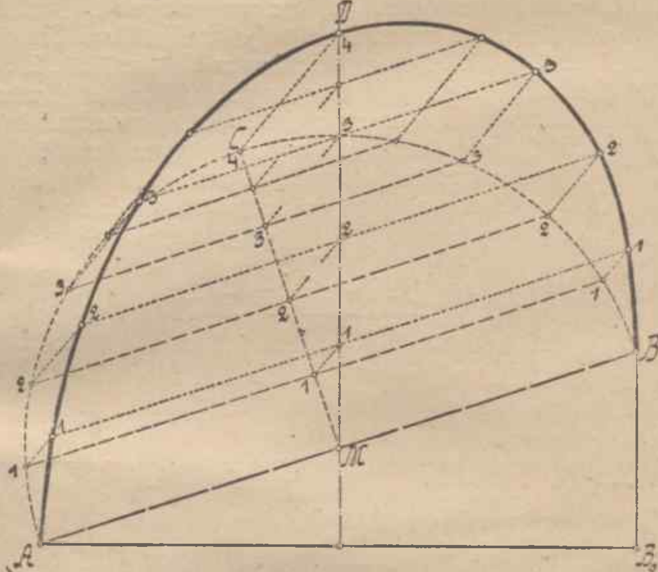

Fig. 96.

steigender Bögen zum Zweck haben. Es soll hier nur eine behandelt werden, welche in Textfig. 96 zur Darstellung gekommen ist. Gegeben ist die Spannweite AB_0 und die Steigung BB_0, außerdem der Scheitelpunkt D des Bogens. Wir tragen in B_0 senkrecht zu AB_0 die Steigung auf und erhalten den Punkt B. Ueber AB schlagen wir einen Halbkreis um M und errichten weiter in der Mitte von AB_0 eine Senkrechte, auf welcher wir den Scheitelpunkt D festlegen. In M errichten wir auf AB eine Senkrechte und erhalten als Schnittpunkt derselben mit dem vorher geschlagenen Halbkreise den Punkt C. Nunmehr teilen wir sowohl

MC wie MD in eine gleiche Anzahl gleicher Teile und verbinden die zusammengehörigen Punkte 1 1, 2 2 . . . . . . CD miteinander. Nachdem dieses geschehen ist, ziehen wir durch die Teilpunkte 1, 2, 3 . . . der Linie MC Parallelen zu AB, welche den Halbkreis in den entsprechend numerierten Punkten 1, 2, 3 . . . schneiden. Ebenso werden durch die Teilpunkte 1, 2, 3 . . . der Linie MD Parallelen zu AB gezogen und nunmehr durch die Schnittpunkte 1, 2, 3 der erstgezogenen Parallelen mit dem Kreis Parallelen zu CD. Dadurch ergeben sich die Parallelogramme 1 1 1 1, 2 2 2 2, 3 3 3 3 . . . . , deren zuletzt entstandene Punkte 1 1, 2 2, 3 3 . . . Punkte des steigenden Bogens ADB sind.

B. Zusammenfassung.

Die Ellipse ist eine Schnittfigur einer Ebene mit einem Kegel. Die Construction der Ellipse durch Vergatterung beruht auf den Verhältnissen zwischen einem Durchmesser des Kreises und den zu ihn parallelen Sehnen. Durch Vergrößerung dieser Sehnen in dem Verhältnis des Kreisdurchmessers zu der großen Axe der Ellipse erhält man dann die Abmessungen der Ellipsensehnen parallel zu dieser Axe in denselben Abständen, die die betreffenden Sehnen beim Kreise vom Durchmesser hatten.

C. Besprechung des Lehrstoffes.

Frage: Wie entsteht eine Ellipse? **Antwort:** Sie entsteht dadurch, daß man einen Kegel durch eine Ebene schneidet, welche sowohl die Kegelaxe, als auch die Kegelseite unter schiefen Winkeln schneidet. **Fr.:** Wie bezeichnet man die Hauptrichtungen der Ellipse? **A.:** Als große und kleine Axe. **Fr.:** Welche Constructionsart der Ellipse haben wir bisher kennen gelernt? **A.:** Die bisher besprochenen Constructionen der Ellipse beruhen alle auf der Eigentümlichkeit derselben, daß die Abmessungen in Richtung der großen Axe im gleichen Verhältnis größer sind als die zugehörigen Abmessungen in Richtung der kleinen Axe. **Fr.:** Welchen gemeinschaftlichen Namen hat man für diese Constructionsart? **A.:** Die Construction durch Vergatteru

A. Vortrag.

113. Bei den bisher besprochenen Constructionen findet sich, daß bei gleichmäßiger Teilung in der Nähe der Punkte A und B der großen Axe größere Teile des Ellipsenumfanges durch Punkte nur dann festgelegt werden konnten, wenn man die den Endpunkten am nächsten liegenden Teilstücke der großen Axe nochmals unterteilte. So zeigt sich, daß in den Textfig. 93, 94, 95, die Teilpunkte $^1/_2$ entstanden sind. Dem gewissenhaften Zeichner muß nun daran liegen, gerade in der Nähe der Axenenden möglichst abgerundete und gute Formen der Curve zu erhalten. Diesem Zweck können die sogenannten ***Krümmungskreise*** dienen. Es liegt auf der Hand, daß man zu jedem Curvenstück einen Radius so finden kann, daß ein Kreisbogen, welcher mit diesem Radius geschlagen wurde, sich der Curve auf ein gewisses Stück hin ziemlich genau anschmiegt. Die höhere Mathematik lehrt die Berechnung der Radien für jeden Punkt einer gesetzmäßigen Curve. Uns interessieren hier zurzeit nur die Krümmungskreise für die Endpunkte der großen und der kleinen Axe der Ellipse. Diese lassen sich durch Zeichnung, wie in Textfig. 97 dargestellt, finden.

Zieht man nämlich durch die Punkte A und B der großen bezw. C und D der kleinen Axe einer Ellipse Parallelen zur großen und zur kleinen Axe, so erhält man ein Parallelogramm EFGH. Verbindet man nun die Punkte A, D, B, C miteinander und fällt von den Punkten E, F, G, H auf die Linien AC, AD, DB, BC *Senkrechte*, so schneiden diese die beiden Axen in den Punkten J_1, J_2, J_3 und J_4. Diese vier Punkte sind die *Krümmungsmittelpunkte* für die Krümmungskreise der Ellipse in den Endpunkten ihrer beiden Axen. Die Krümmungskreise selbst erhält man, indem man um die Punkte J_1 und J_2 mit den Strecken J_1A bezw. J_2B und um die Punkte J_3 und J_4 mit J_3D bezw. J_4C Kreisbögen schlägt. Diese Kreisbögen geben für eine gewisse Strecke den Verlauf des Ellipsenumfanges wieder, und man kann, wenn es nicht auf allzu große Genauigkeit ankommt und vor allen Dingen der Unterschied der beiden Axen nicht allzu groß ist, durch einfache Verbindung der Bögen mit Hilfe des Curvenlineals eine ziemlich genaue Annäherung an die Ellipse erhalten, was für viele Aufgaben der Praxis von Wichtigkeit ist.

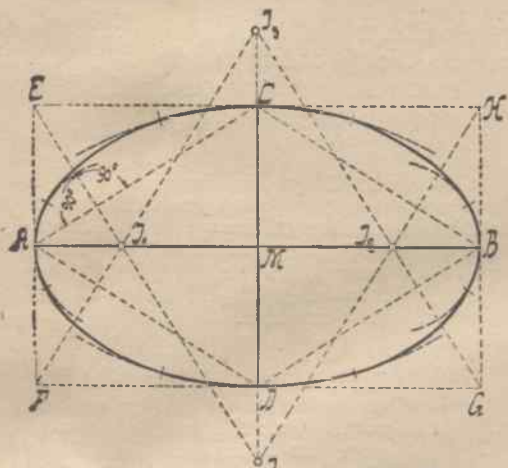

Fig. 97.

114. Untersucht man eine Ellipse (Textfig. 98) auf ihre mathematischen Eigenschaften hin (was in der „Planimetrie" und in der „Darstellenden Geometrie" geschieht), so findet man, daß es auf der großen Axe derselben zwei besonders bemerkenswerte Punkte giebt. Diese Punkte liegen von dem Mittelpunkt gleich weit entfernt und heißen ***Brennpunkte*** (F_1 und F_2 der Figur). Der Abstand e jedes Brennpunktes vom Mittelpunkte heißt die

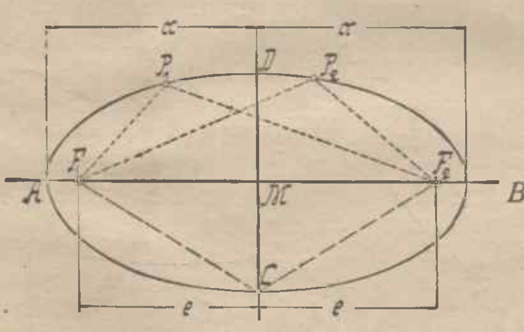

Fig. 98.

Excentricität der Ellipse. Die besondere Eigentümlichkeit der beiden Brennpunkte besteht nun darin, daß die Verbindungslinien eines Punktes P_1 auf dem Umfang der Ellipse mit beiden Brennpunkten zusammen genau so lang sind wie die Verbindungslinien eines beliebigen zweiten Punktes P_2 auf dem Ellipsenumfang mit den beiden Brennpunkten. Die Summe der beiden Längen F_1P_1 und P_1F_2 ist gleich der Länge der großen Axe AB. Daraus ergiebt sich aber, daß auch die Summe der Verbindungslinien der Brennpunkte mit dem Endpunkt C der kleinen Axe gleich 2 a sein muß, oder daß die Größe $F_1C = F_2C$ gleich der Hälfte der großen Axe, also gleich a sein muß. Aus dieser Eigentümlichkeit folgt die Construction der Brennpunkte einer Ellipse (s. Textfig. 99): Ist nämlich die kleine und die große Axe gegeben, so schlägt man mit der Hälfte der großen Axe um einen Endpunkt (D) der kleinen Axe einen Kreisbogen, der die große Axe in den Brennpunkten F_1 und F_2 schneidet. Damit ist die Excentricität ebenfalls bestimmt.

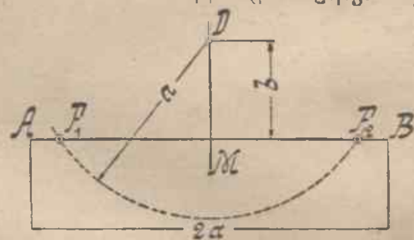

Fig. 99.

115. Textfig. 100 zeigt eine Construction der Ellipse, welche auf der vorher erörterten Eigentümlichkeit beruht. Ist nämlich die große und die kleine Axe gegeben, so bestimmt man zunächst die Brennpunkte und legt durch Stifte in diesen Brennpunkten die Enden einer Schnur fest, deren Länge gleich der großen Axe AB ist. Fährt man nun mit einem Stift S so längs der Schnur, daß die Schnur stets gespannt bleibt, so beschreibt der Stift eine Ellipse. Diese Construction, welche Fadenconstruction genannt wird, kommt in der Praxis bei der Aufzeichnung von Schablonen bezw. Lehren häufig vor. Insbesondere wird sie von den Gärtnern zur Herstellung elliptischer Beete gern benutzt.

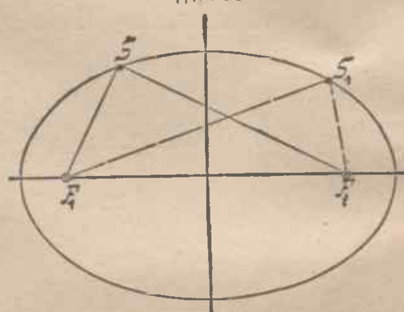

Fig. 100

Man bezeichnet die Strecken F_1S und F_2S als Brennstrahlen oder Fahrstrahlen und kann den vorher behandelten Satz nun so ausdrücken:

> Bei jeder Ellipse bleibt die Summe zweier Fahrstrahlen nach demselben Punkte des Umfanges stets dieselbe und ist gleich der Länge der großen Axe.

116. Textfig. 101 giebt eine punktweise Construction der Ellipse, welche ebenfalls auf diesem Satz beruht. Man bestimmt bei gegebener großer und kleiner Axe zunächst die beiden Brennpunkte F_1 und F_2. Darauf schlägt man mit einem beliebigen Radius r_1 um den Brennpunkt F_1 einen Kreisbogen, trägt r_1 auf einer vorher verzeichneten Strecke 2 a (der großen Axe) ab und schlägt nunmehr mit dem Rest r_2 dieser Strecke um den andern Brennpunkt F_2 ebenfalls einen Kreisbogen. Die Schnittpunkte P_1 und P_2 dieser beiden Kreisbögen sind Punkte der Ellipse. Man kann das Verfahren beliebig oft wiederholen und bekommt damit eine beliebige Anzahl Ellipsenpunkte.

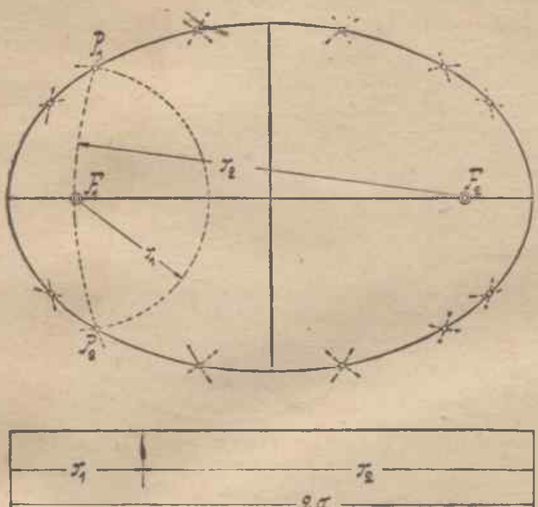

Fig. 101.

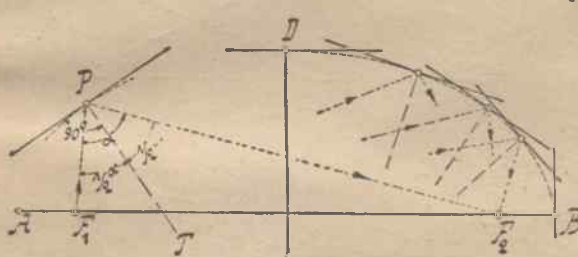

Fig. 102.

117. Denkt man sich den Ellipsenumfang (Textfig. 100) als spiegelnde Fläche ausgebildet und in einem Brennpunkt F_1 einen leuchtenden Körper angebracht, so würde jeder Lichtstrahl, der von diesem Punkte ausgeht, zu dem zweiten Brennpunkt F_2 zurückgeworfen werden. Die Lehre vom Licht, welche in der „Physik“ behandelt wird, zeigt nun, daß in einem solchen Falle die Senkrechte auf der spiegelnden Fläche den Winkel zwischen den beiden Strahlen halbiert, wie dieses z. B. in Textfig. 102 für die Strahlen F_1P und F_2P dargestellt ist. Eine Linie, welche zu der Halbierungslinie PT senkrecht gezogen ist, würde also die Richtung der spiegelnden Fläche, d. h. in diesem Falle die Tangente der Ellipse, in P an geben. Man kann diese Tangentenconstruction benutzen, um das Ausziehen einer punktweise construierten Ellipse zu erleichtern, indem man sich für eine gewisse Anzahl Punkte die Tangenten aufzeichnet und damit das Anschmiegen des Curvenlineals beim Ausziehen erleichtert. Zu diesem Zwecke zieht man von dem in Frage kommenden Ellipsenpunkte (z. B. P) die Fahrstrahlen F_1 P und F_2 P. Der entstehende Winkel α wird in bekannter Weise halbiert und auf der Halbierungslinie (PT) in P eine senkrechte errichtet. Diese ist die gesuchte Tangente. Die Tangenten in D bezw. B laufen parallel zur großen bezw. kleinen Axe.

118. Zum Schluß soll noch eine punktweise Construction der Ellipse angegeben werden, welche bei gegebener großer und kleiner Axe häufig angewendet wird und in Textfig. 103 wiedergegeben ist. Man schlägt um den Mittelpunkt M mit der halben großen und mit der halben kleinen Axe je einen Kreis und erhält dadurch zunächst die Punkte A, B, C, D der Ellipse als Schnittpunkte der Kreise mit den beiden Axen. Nunmehr teilt man die vier von den beiden Axen gebildeten rechten Winkel in gleiche Teile und zieht die Teillinien bis zum Schnitt mit den beiden Kreisen aus. Dabei ergeben sich die Teilpunkte 1 1, 2 2, 3 3 . . . Werden nun durch je zwei zusammengehörige Teilpunkte senkrechte bezw. wagerechte Linien gezogen, so findet man in den Schnittpunkten 1, 2, 3 . . . Punkte der Ellipse, die in bekannter Weise zu einer Curve ergänzt werden können.

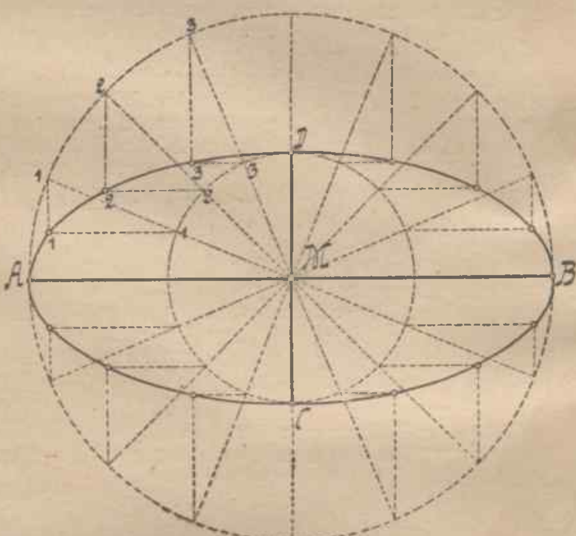

Fig. 103.

B. Zusammenfassung.

Unter Krümmungskreis versteht man Kreisbögen, die auf eine kurze Strecke den Verlauf von gesetzmäßigen Curven annähern oder praktisch genau wiedergeben. Bei der Ellipse findet man die Mittelpunkte der Krümmungskreise, indem man die 4 Endpunkte der Axen dieser Ellipse miteinander verbindet. Hierauf zieht man durch diese 4 Endpunkte Parallelen zu den beiden Axen. Nun fällt man von den Schnittpunkten dieser 4 Geraden, die ein die Ellipse tangential und zwar in den Endpunkten der Axen berührendes Viereck bilden, Lote auf diejenigen Linien, die die Endpunkte der Axen unter sich verbinden. Dort, wo sich je zwei dieser Lote schneiden, liegen die Mittelpunkte der Krümmungskreise. Je zwei dieser Schnittpunkte liegen auf der großen Axe der Ellipse, die beiden anderen liegen auf der kleinen Axe der Ellipse. Die Summe zweier Fahrstrahlen einer Ellipse ist constant und zwar gleich der großen Axe. Hierauf beruht die Fadenconstruction, bei der man in den Brennpunkten zwei Stifte befestigt, an welchen die Enden eines Fadens befestigt werden, so daß das gesamte zwischen den beiden Stiften befindliche Fadenende ebenso lang wie die große Axe ist. Fährt man nun mit einem Bleistift an dem stets straff gespannten Faden entlang, dann erhält man einen halben Ellipsenbogen. Durch Vornahme derselben zeichnerischen Operation auf der andern Seite erhält man dann den andern halben Ellipsenbogen.

C. Besprechung des Lehrstoffes.

Frage: Welches sind die bemerkenswertesten Punkte einer Ellipse? **Antwort:** Die beiden Brennpunkte. **Fr.:** Wie heißen die Verbindungslinien der beiden Brennpunkte mit einem Punkte des Ellipsenumfanges? **A.:** Die Fahrstrahlen oder Brennstrahlen. **Fr.:** Welche Eigentümlichkeit haben die Fahrstrahlen? **A.:** Die Summe zweier zusammengehöriger Fahrstrahlen ist gleich der großen Axe der Ellipse. **Fr.:** Welche Construction beruht auf dieser Eigenschaft der Fahrstrahlen? **A.:** Die Fadenconstruction. **Fr.:** Auf welcher Eigenschaft der Fahrstrahlen beruht die Construction der Ellipsentangenten? **A.:** Darauf, daß bei einer spiegelnden Form des Ellipsenumfanges jeder von einem Brennpunkt ausgehende Lichtstrahl zum anderen zurückgeworfen wird.

D. Zur Wiederholung.

83. Welche Constructionen der Ellipse haben wir kennen gelernt? 84. Was versteht man unter den Axen einer Ellipse? 85. Worauf beruhen die Constructionen durch Vergatterung? 86. Was versteht man unter Krümmungskreis? 87. Wie werden die Brennpunkte einer Ellipse gefunden? 88. In welchem Zusammenhang stehen die Fahrstrahlen mit der Länge der großen Axe?

E. Aufgaben.

46. Gegeben ist die große Axe einer Ellipse gleich 14 cm und die kleine Axe gleich 7 cm. Es soll eine Ellipse durch Vergatterung nach Textfig. 93 gezeichnet werden.

47. Gegeben ist die Spannweite und die Pfeilhöhe eines Bogens, und zwar ist die erstere 6 m, die zweite 4 m. Es soll ein Ellipsenbogen nach Textfig. 95 im Maßstabe 1:50 gezeichnet werden.

48. Es ist ein steigender Bogen nach Textfig. 96 im Maßstabe 1:50 zu zeichnen, dessen Spannweite 8 m, dessen Steigung 3 m und dessen Scheitelhöhe 6 m beträgt.

Dreizehnte Stunde.

A. Vortrag.

119. In Textfig. 104 ist die Schnittebene AB des schon früher betrachteten Kegels noch weiter gedreht worden, und zwar so weit, daß sie nun parallel zu einer Kegelseite liegt. Aus der Ellipse ist bei dieser Weiterdrehung der Schnittebene eine Curve geworden, welche an einem Ende geschlossen ist und deren beide Zweige in die Unendlichkeit gehen. Wir nennen diese Curve eine ***Parabel*** (vergl. Textfig. 105)

Die Parabel ist dadurch gekennzeichnet, daß ein beliebiger Punkt P derselben von einem festen Punkte F, dem Brennpunkte, und einer festen, außerhalb der Curve liegenden Linie LL, der *Leitlinie*, gleichen Abstand hat.

Es ist also in Textfig. 105 PA = PF. Verbindet man nun A mit F, so muß das Dreieck PAF ein gleichschenkliges sein und dementsprechend muß die

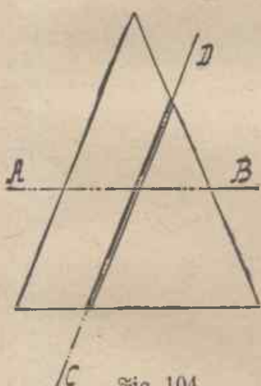

Fig. 104.

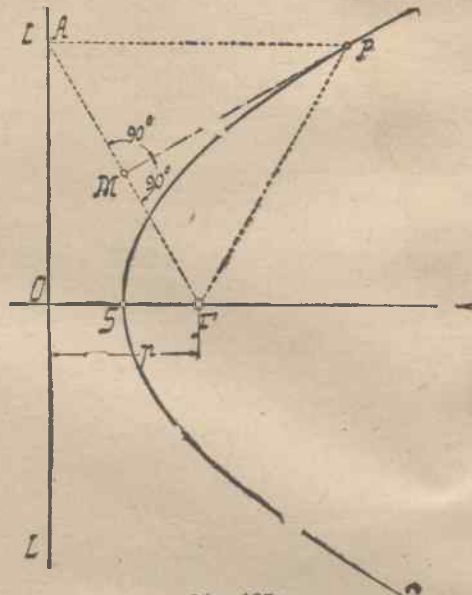

Fig. 105.

Verbindungslinie des Mittelpunktes M von AF mit P senkrecht auf AF stehen. Eine Linie, welche durch F geht und senkrecht auf der Leitlinie LL steht, heißt die Axe der Parabel. Der Schnittpunkt S der Axe mit der Curve wird der Scheitel der Parabel genannt. Dieser muß von LL und F den gleichen Abstand haben, also muß OS = SF sein. Die Strecke OF wird der *Parameter* der Parabel genannt und gewöhnlich mit p bezeichnet. Durch die Größe des Parameters ist die ganze Parabel bestimmt. Der Scheitel der Parabel teilt also den Parameter in zwei gleiche Teile.

120. In den Textfig. 106 und 107 sind zwei Constructionen der Parabel wiedergegeben. Gegeben ist der Parameter p. Wir bestimmen nach Textfig. 105 zu-

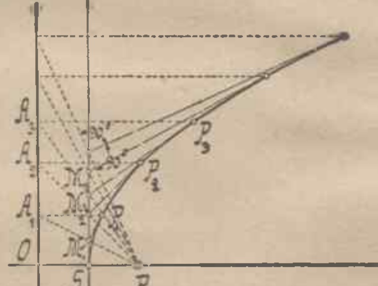

Fig. 106.

nächst den Brennpunkt F und ziehen die Leitlinie. Den Brennpunkt verbinden wir mit einer beliebigen Anzahl von Punkten A_1, A_2 ... auf der Leitlinie. Durch diese Punkte ziehen wir Wagerechte parallel zur Axe und errichten in den Mittelpunkten M_1, M_2 ... der Verbindungslinien A_1F, A_2F ... Senkrechte auf diesen Verbindungslinien. Diese Senkrechten schneiden die durch A_1, A_2 ... gezogenen Wagerechten in den Punkten P_1, P_2 ..., welche Punkte der Parabel sind. Der Scheitel S wird gefunden, indem man den Parameter halbiert.

121. Zieht man nun die Verbindungslinie $SM_1 M_2$, so findet man, daß diese auf der Axe der Parabel senkrecht steht. Daraus folgt ohne weiteres eine neue Construction (Textfig. 107), welche angewendet wird, wenn der Scheitel und der Brennpunktabstand (auch Brennweite genannt) SF gegeben sind. In diesem Falle errichtet man in S auf der Axe der Parabel eine Senkrechte, nimmt auf dieser beliebige Punkte A_1, A_2, A_3 ... an und verbindet diese mit F. Nunmehr werden in den Punkten A_1, A_2, A_3 ... auf den Verbindungslinien A_1F, A_2F, A_3F ... Senkrechte errichtet und genügend weit verlängert. Diese Senkrechten umhüllen dann die Parabel, deren Tangenten sie bilden. Nimmt

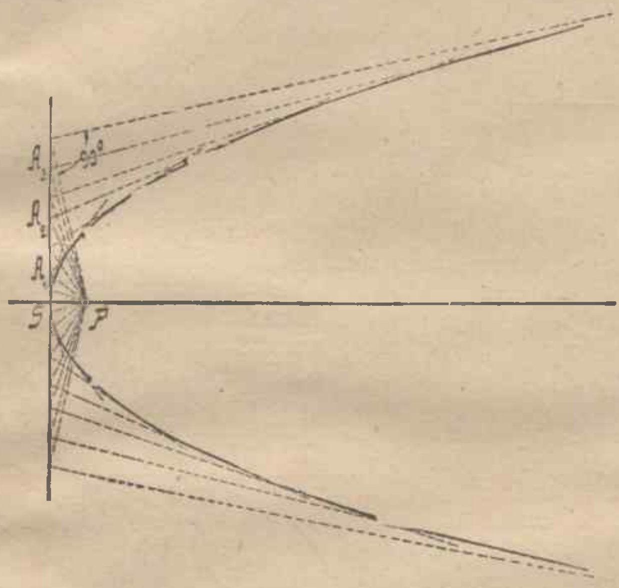

Fig. 107.

man die Punkte A_1, A_2, A_3 .. genügend dicht auf der Senkrechten durch den Scheitel an, so kann man es erreichen, daß die kurzen Stücke der einzelnen Tangenten mit genügender Genauigkeit die Curve selbst darstellen. Man nennt eine solche Construction „Umhüllungs-Construction“.

122. Eine weitere punktweise Construction giebt Textfig. 108 wieder. Bei gegebener Leitlinie bezw. gegebenem Parameter bestimmt man den Brennpunkt F. Nunmehr zieht man in beliebigen Abständen a, b, c . . . Parallelen zur Leitlinie und schlägt um den Brennpunkt mit den Strecken a, b, c . . . Kreisbögen. Diese schneiden die vorher erwähnten Senkrechten in den Punkten P_1, P_2, P_3 ... der Parabel. Der Scheitelpunkt S wird, wie früher angegeben, gefunden.

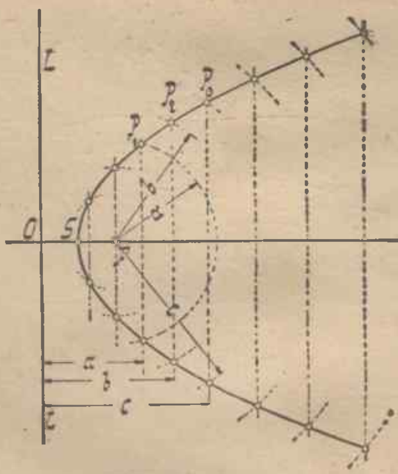

Fig. 108.

B. Zusammenfassung.

Legt man eine Schnittebene parallel zu irgendeiner Seite eines Kegels, so ist die Schnittfigur auf der Ebene eine Parabel. Die Parabel ist bestimmt durch eine gerade Linie, Leitlinie genannt, und einen in einem bestimmten Abstand von ihr befindlichen Punkt, den Brennpunkt. Die Parabel hat die Eigentümlichkeit, daß sämtliche auf ihr liegenden Punkte von dem Brennpunkt und der Leitlinie gleich weit entfernt sind. Infolgedessen liegt der Scheitelpunkt auf der Mitte des Parameters, womit man den Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie bezeichnet. Ist der Parameter gegeben, so werden die einzelnen Punkte auf der Parabel gefunden, in dem man in bestimmten Abständen von der Leitlinie zu ihr parallele Linien zieht und von dem Brennpunkte aus mit denselben Abständen als Radius Kreisbögen schlägt. Der Schnittpunkt eines solchen Kreisbogens mit der zugehörigen zur Leitlinie parallelen Linie ist dann ein Punkt auf der Parallelen.

C. Besprechung des Lehrstoffes.

Frage: Wie liegt die Schnittebene, welche mit einem Kegel eine Parabel bildet? **Antwort:** Parallel zu einer Kegelseite. **Fr.:** Ist die Parabel eine geschlossene Curve? **A.:** Nein. **Fr.:** Durch welche Stücke ist eine Parabel bestimmt? **A.:** Durch die Leitlinie und den Brennpunkt. **Fr.:** Wie bezeichnet man den Abstand zwischen Leitlinie und Brennpunkt? **A.:** Als Parameter **Fr.:** Wie heißt der Schnittpunkt der Parabel mit ihrer Axe? **A.:** Der Scheitel.

A. Vortrag.

123. Wie wir schon früher gesehen haben, ist es für das Aufzeichnen von Curven, welche punktweise construiert worden sind, wichtig, in jedem Punkte die Richtung der Curve, d. h. ihre Tangente zu kennen. Bei der Parabel ergiebt sich die Construction

der Tangente in einem Punkte P aus der Eigenschaft der Parabel (s. Textfig. 109), daß ein Lichtstrahl, welcher parallel zur Axe die als Spiegel gedachte Parabel trifft, nach dem Brennpunkte F zurückgeworfen wird. Die Winkelhalbierende des Winkels CPF, die Linie PN, steht somit im Punkte P senkrecht auf der Parabel. Die Linie TT, welche mit PN in P einen rechten Winkel bildet, ist die Tangente der Parabel. Hat man also durch Construction einen Punkt P gefunden, so zieht man die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Brennpunkte F (den ***Brennstrahl*** oder ***Fahrstrahl)*** und eine Parallele PA zur Parabelaxe, halbiert den Winkel α zwischen PF und der Verlängerung von PA über P hinaus und errichtet in P auf der Halbierungslinie die Senkrechte TT. Diese ist die gesuchte Tangente.

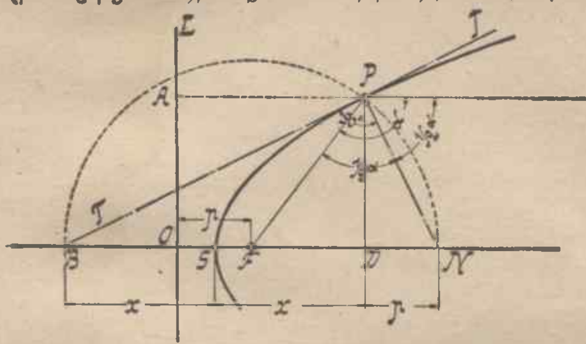

Fig. 109.

Eine kurze mathematische Betrachtung vereinfacht das Verfahren noch bedeutend. $\sphericalangle T_1PN$ ist 90^0, eben $\sphericalangle T_2PN$. Jedem gemeinsam ist $\frac{1}{2}\alpha$, so daß

$$\sphericalangle T_1PF = 90^0 - \tfrac{1}{2}\alpha$$

und

$$\sphericalangle T_2PC = 90^0 - \tfrac{1}{2}\alpha$$

Demnach ist

$$\sphericalangle T_1PF = \sphericalangle T_2PC.$$

Nun sind aber $\sphericalangle T_1PA$ und $\sphericalangle T_2PC$ Scheitelwinkel. Infolgedessen ist auch

$$\sphericalangle T_1PF = \sphericalangle T_1PA.$$

Man braucht den Winkel FPA, den der Fahrstrahl FP mit der zur Axe parallelen PA bildet, zu halbieren. Diese Halbierungslinie ist die Tangente an der Parabel.

124. Eine nähere Untersuchung der Verhältnisse der Tangente und der dazu senkrechten Linie PN, welche als ***Normale*** bezeichnet wird, ergiebt nun folgendes: Fällt man von dem Punkte P auf die Axe der Parabel die Senkrechte PD, so findet man, daß für jede beliebige Lage des Punktes P der Abschnitt DN der Axe gleich dem Parameter ist. Weiter zeigt sich, daß der Abschnitt DS, d. h. das Stück der Axe zwischen dem eben gefundenen Punkte D und dem Scheitel der Parabel stets gleich dem Abschnitt der Axe zwischen Scheitelpunkt und Schnittpunkt der Tangente B mit der

Axe wird. Daraus ergeben sich zwei Vereinfachungen für die Construction der Tangente. Ist nämlich die Parabel ihrer Form nach gegeben, d. h. ist der Parameter bekannt, so hat man nichts weiter zu tun, als von dem Fußpunkte D der Senkrechten durch P den Parameter nach rechts hin aufzutragen, wodurch dann der Punkt N ohne Winkelhalbierung gefunden wird. Ebenso kann man von dem Punkte D nach links hin die Strecke DS über S hinaus noch einmal abtragen, wodurch man den Punkt B findet, dessen Verbindung mit P ohne weiteres die Tangente ergiebt.

125. Es sind nunmehr noch einige Constructionen der Parabel zu besprechen, welche in der Praxis häufiger benutzt werden, um Uebergänge von Flächen und Linien ineinander zu bewerkstelligen. Textfig. 110 zeigt eine derartige Construction. Gegeben ist der Scheitelpunkt S und ein beliebiger Punkt P der Parabel. Man

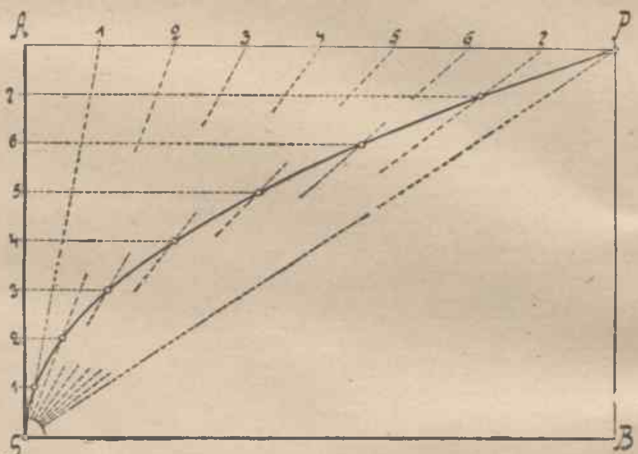

Fig. 110.

zeichnet nun ein Rechteck ASBP, dessen gegenüberliegende Ecken P und S sind und teilt die beiden aufeinander senkrechten Seiten AP und AS in eine beliebige, jedoch bei beiden Seiten gleiche Anzahl gleicher Teile. Hierauf zieht man durch die Teilpunkte 1, 2, 3, 4 . . . der Seite AS wagerechte Linien und verbindet die Teilpunkte 1, 2, 3, 4 . . . der wagerechten Seite AP mit dem Scheitelpunkt S. Die Schnittpunkte der gleich numerierten Linien sind die gesuchten Parabelpunkte.

126. Die Textfig. 111 und 112 zeigen zwei weitere Umhüllungsconstructionen, bei denen die Form der Uebergangsparabel zwischen zwei sich schneidenden Linien durch Tangenten festgelegt wird. In Textfig. 111 sind die Abschnitte der sich schneidenden Linien, von ihrem Schnittpunkt aus gemessen, gleich lang. Man teilt diese Abschnitte in eine gleiche Anzahl gleicher Teile und numeriert diese, auf dem einen Abschnitt am freien Ende, auf dem anderen am Schnittpunkt der Linien beginnend, mit gleichen Ziffern. Hierauf verbindet man die mit gleichen Ziffern versehenen Punkte durch gerade Linien miteinander und bekommt so eine Schar von Tangenten, welche, wenn sie zahlreich genug sind, die Form der Uebergangsparabel zwischen den beiden Linien mit genügender Genauigkeit wiedergeben. Die Curve selbst wird dann mit dem Curvenlineal ausgeglichen. In Textfig. 112 ist eine Uebergangsparabel dargestellt, wie sie bei der Construction von Maschinenteilen häufig Verwendung findet. Die beiden Abschnitte CA und CB der sich schneidenden Linien L_1 und L_2 sind hier ungleich groß; trotzdem verfährt man in genau derselben Weise, wie dieses bei der Textfig. 111 erläutert wurde, und bekommt auf diesem Wege eine sogenannte schiefe Parabel. Man tut gut, die Zahl der Tangenten recht groß zu wählen, was in den Figuren der Deutlichkeit wegen nicht möglich war.

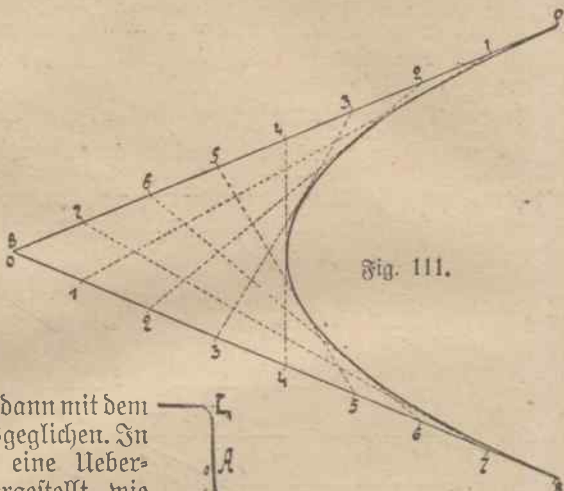

Fig. 111.

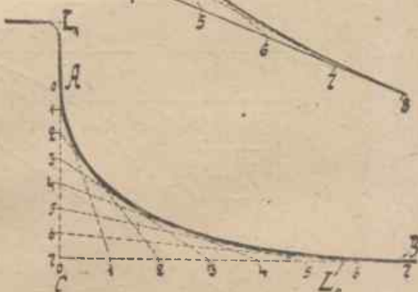

Fig. 112.

B. Zusammenfassung.

Eine einfache Construction einer Tangente an einem bestimmten Punkt der Parabel ergiebt sich aus dem Umstand, daß die Projection der Tangente auf die Axe der Parabel durch den Scheitelpunkt halbiert wird. Will man also an irgendeinem Punkte der Parabel eine Tangente legen, so fällt man von diesem Pukte auf die Axe ein Lot und trägt die Strecke zwischen dem Fußpunkt des Lotes und dem Scheitel auf der Verlängerung der Axe über den Scheitelpunkt hinaus ab. Die Verbindungslinie zwischen dem so erhaltenen neuen Punkt und dem gegebenen Punkt auf der Parabel ist dann die gesuchte Tangente. Ist der Scheitel und ein Punkt der Parabel gegeben, so construiert man eine Parabel, indem man die beiden gegebenen Punkte verbindet und über dieser Verbindungslinie als Diagonale ein Rechteck errichtet. Zwei durch diese Diagonale verbundene Rechtecksseiten werden dann

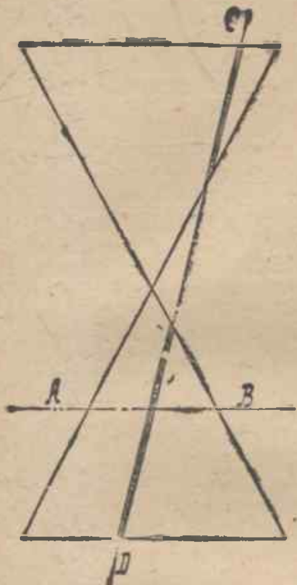

Fig. 113.

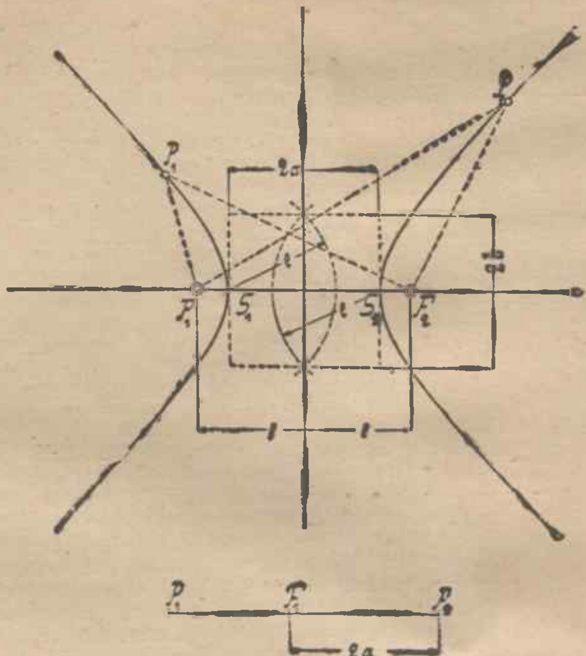

Fig. 114.

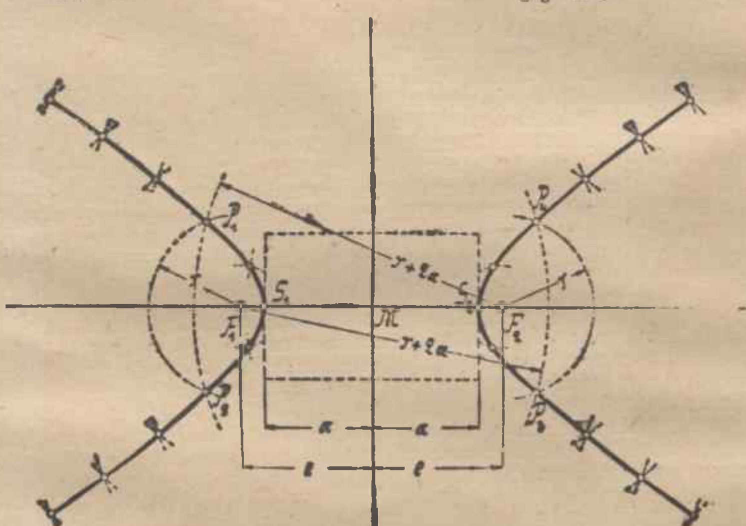

Fig. 115.

in eine gleiche Anzahl Teile geteilt, die auf jeder Seite gleich ist, so daß jede Seite für sich in eine Anzahl gleich großer Teile zerlegt wird, wobei die Teilstrecken der größeren Seite größer als die der kleineren Seite sind. Durch die Teilpunkte der einen Rechtecksseite zieht man Parallelen zu der anderen. Die Teilpunkte dieser letzteren Rechtecksseite verbindet man mit dem Scheitelpunkt. Man numeriert nun vom Scheitelpunkt ausgehend erst die Teilpunkte der ihn berührenden Rechtecksseite, bis man an die andere Rechtecksseite kommt, geht von dieser Ecke des Rechtecks auf die andere Seite des Rechtecks über und numeriert von hier aus weitergehend, aber wieder von 1 anfangend, die Teilpunkte auf dieser Rechtecksseite. Auf diese Weise erhält man Nummern für die Parallelen und die Verbindungslinien. Der Schnittpunkt zwischen jeder Parallelen und Verbindungslinie gleicher Nummer ist dann je ein Punkt der gesuchten Parabel. Auf diese Weise ist es möglich, durch die beiden gegebenen Punkte unendlich viele Parabeln zu legen. Zur Construction einer bestimmten Parabel muß die Richtung der Tangente an den Scheitelpunkt resp. die Richtung der Axe gegeben sein, welche beiden Richtungen untrennbar miteinander verbunden sind.

C. Besprechung des Lehrstoffes.

Frage: Wohin werden Lichtstrahlen, welche einen Parabelspiegel parallel zur Axe treffen, zurückgeworfen? **Antwort:** Zum Brennpunkt. **Fr.:** Welche Eigenschaft besitzt demnach die Winkelhalbierende zwischen einem Brennstrahl und einer Parallele zur Parabelaxe? **A.:** Sie steht senkrecht auf der Tangente. **Fr.:** Wie bezeichnet man diese Winkelhalbierende? **A.:** Als Normale. **Fr.:** Welche Constructionen von Parabeln werden häufig für die Herstellung von Uebergangscurven benutzt? **A.:** Die sogenannten Umhüllungsconstructionen. **Fr.:** Wodurch sind die Umhüllungsconstructionen gekennzeichnet? **A.:** Dadurch, daß man eine große Anzahl von Tangenten construiert, welche in ihrer Gesamtheit die Form der Curve genügend genau wiedergeben, um die Curve selbst danach verzeichnen zu können.

D. Zur Wiederholung.

89. Wodurch entsteht die Parabel als Kegelschnitt? 90. Was versteht man unter dem Parameter einer Parabel? 91. Wodurch ist die Gestalt einer Parabel gegeben? 92. Wie bestimmt man den Brennpunkt einer Parabel bei gegebener Leitlinie und gegebenem Parameter? 93. In welchem Zusammenhang stehen die Abstände eines Parabelpunktes von der Leitlinie und vom Brennpunkte? 94. Welche Arten von Parabelconstructionen haben wir kennen gelernt? 95. Wie groß ist der Abschnitt zwischen dem Schnittpunkt der Normalen und dem Fußpunkte einer Senkrechten von einem Parabelpunkte auf die Axe? 96. Welche Beziehung besteht zwischen der Entfernung des Scheitelpunktes der Parabel vom Schnittpunkt der Tangente mit der Axe und dem Fußpunkte der Senkrechten vom zugehörigen Parabelpunkte auf die Axe?

E. Aufgaben.

49. Es ist eine Parabel von 4 cm Parameter punktweise nach dem Verfahren der Textfig. 106 und 108 zu construieren.

50. Von einer Parabel ist die Brennweite von 3 cm gegeben. Es soll nach dem Verfahren der Textfig. 107 die Umhüllungsconstruction ausgeführt werden.

51. Zwei aufeinander senkrecht stehende Linien sollen durch eine Uebergangsparabel so verbunden werden, daß auf der senkrechten Linie 8 cm, auf der wagerechten 5 cm abgeschnitten werden.

Vierzehnte Stunde.

A. Vortrag.

127. Dreht man bei einem Doppelkegel (Textfig. 113) eine Schnittebene CD so weit, daß sie beide Teile des Doppelkegels schneidet, so findet man als Schnittfigur eine Curve, welche aus zwei vollständig voneinander getrennten Teilen besteht. Eine solche Curve heißt ***Hyperbel*** und ist in der Textfig. 114 dargestellt.

Untersucht man die Punkte der Hyperbel, so findet man, daß der Unterschied der Abstände PF_1 und PF_2 von zwei festen Punkten F_1 und F_2 (die auch hier wieder Brennpunkte genannt werden) stets die gleiche Größe hat.

Diese Größe wird als große Axe der Hyperbel bezeichnet und stellt den Abstand der beiden Scheitelpunkte S_1 und S_2 dar. Der Abstand der beiden Brennpunkte voneinander heißt die doppelte Excentricität und wird mit 2 e bezeichnet. Errichtet man im Mittelpunkte M der Strecke S_1S_2 eine Senkrechte und schlägt mit der Excentricität e um die beiden Scheitelpunkte Kreisbögen, so schneiden sich diese in den zwei Punkten auf der vorher gefundenen Senkrechten und wir bezeichnen die Entfernung dieser Punkte als kleine Axe der Hyperbel. Die doppelte Excentricität ist demnach die Diagonale eines aus den beiden Axen gebildeten Rechteckes.

128. Aus den eben besprochenen Eigenschaften der Hyperbel folgt nun die punktweise Construction (Textfig. 115) derselben,

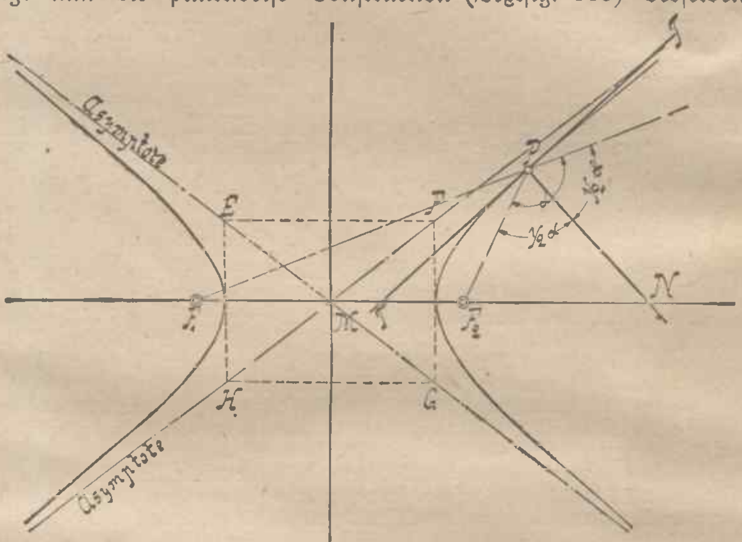

Fig. 116.

wenn die große Axe 2a und die kleine Axe bb gegeben sind. Wir ziehen durch einen Punkt M eine senkrechte und eine wagerechte Axe, tragen auf der senkrechten nach oben und unten die Strecke b ab und nach rechts und links die Strecke a. Hieraus ergiebt sich ein Rechteck um M. Nunmehr bestimmen wir die Brennpunkte F_1 und F_2, indem wir die halbe Diagonale des Rechteckes (siehe Textfig. 115) von M aus nach rechts bezw. links auftragen. Nunmehr schlagen wir um einen Brennpunkt F_1 mit einer beliebigen Länge r einen Kreisbogen und um den anderen Brennpunkt F_2 mit einer Strecke $r + 2a$ einen zweiten Kreisbogen. Diese beiden schneiden sich in den Punkten P_1 und P_2, welche Hyperbelpunkte sind. Dieses Verfahren kann, wie in Textfig. 115 gezeigt ist, beliebig oft wiederholt werden und ergiebt eine beliebige Anzahl von Hyperbelpunkten. Ist die Excentricität gegeben und eine Axe, so fällt die Bestimmung der ersteren fort.

129. Wie bei den anderen Kegelschnitten ist es auch bei der Hyperbel wichtig, für jeden Punkt die Richtung der Hyperbeltangente zu kennen. Man findet diese, indem man von dem Punkte P der Hyperbel (Textfig. 116) die beiden Brennlinien PF_1 und PF_2 zieht und die letztere über P hinaus verlängert. Darauf halbiert man den dabei entstehenden Winkel α und errichtet auf der neugefundenen Linie PN in P eine Senkrechte TT. Diese ist die Tangente im Punkte P. Auch hier halbiert wieder wie bei der Parabel die Tangente den Winkel zwischen den beiden Fahrstrahlen, so daß man die bei der Parabel besprochene Construction auch bei der Hyperbel anwenden kann. Besonders bemerkenswert sind zwei Tangenten der Hyperbel, die in erst unendlicher Entfernung vom Mittelpunkt die Curve berühren. Sie heißen ***Asymptoten*** und entstehen, indem man in dem Rechteck EHGF die Diagonalen EG und HF zieht und über die Ecken hinaus verlängert. Zwischen diesen beiden Asymptoten liegt die gesamte Curve.

B. Zusammenfassung.

Die Hyperbel ist eine Schnittfigur, die entsteht, wenn eine Ebene einen Doppelkegel schneidet. Sie ist demnach eine Doppelcurve, deren beide Einzelcurven ihre Scheitel einander zuwenden und eine gemeinsame Axe haben, wobei jede einzelne genau den gleichen Verlauf hat wie die andere. Charakteristisch für sie ist, daß für jeden Punkt die Differenz der Fahrstrahlen nach den b e i d e n Brennpunkten constant ist, und zwar ist diese Differenz gleich dem große Axe genannten Abstand der Scheitelpunkte. Der halbe Abstand der Brennpunkte heißt Excentricität. Schlägt man mit der Excentricität Kreisbögen um jeden Scheitelpunkt, dann erhält man zwischen den beiden Schnittpunkten dieser beiden Kreisbögen die kleine Axe. Die Tangente an einen Punkt der Hyperbel findet man, indem man diesen Punkt mit den Brennpunkten verbindet und den Winkel zwischen den Fahrstrahlen halbiert. Die Halbierungslinie ist dann die gesuchte Tangente. Die Diagonalen des mit den beiden Axen construierten Rechtecks treffen die Hyperbel als Tangenten in der Unendlichkeit und heißen Asymptoten.

C. Besprechung des Lehrstoffes.

Frage: Wie entsteht die Hyperbel als Kegelschnitt? **Antwort:** Dadurch, daß die Schnittebene den Kegel und den Ergänzungskegel trifft. **Fr.:** Wieviel Zweige besitzt eine Hyperbel? **A.:** Zwei. **Fr.:** Welche Beziehung besteht zwischen den Axen der Hyperbel und der Excentricität? **A.:** Die Excentricität

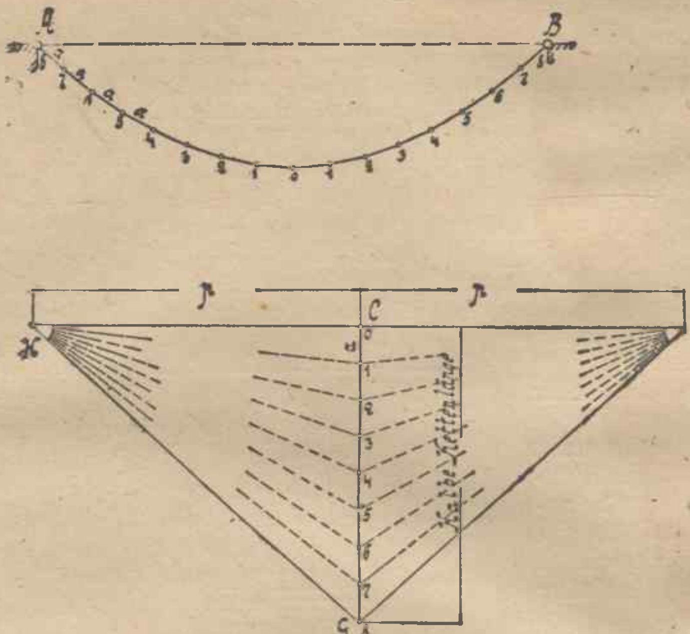

Fig. 118.

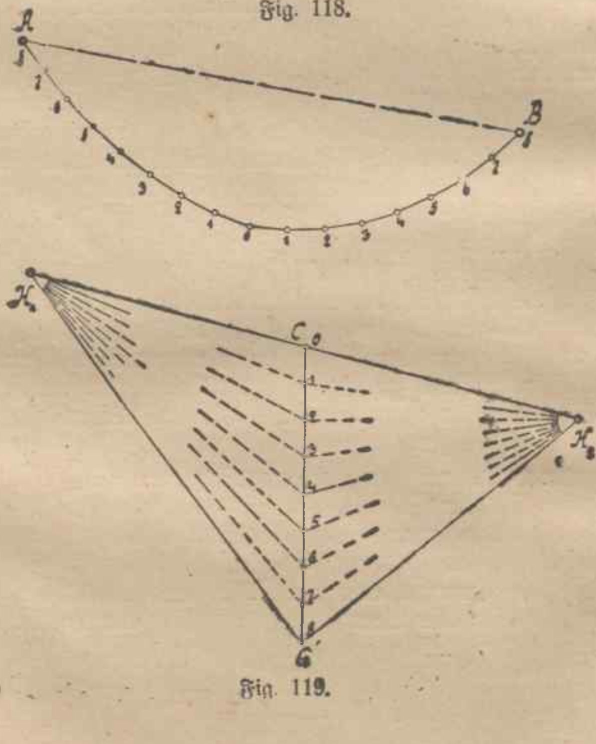

Fig. 119.

ist die Diagonale in einem Rechteck aus den beiden Halbaxen. **Fr.:** Welche Beziehung besteht zwischen den Brennstrahlen und der großen Axe? **A.:** Die Differenz der Brennstrahlen ist gleich der großen Axe. **Fr.:** Was versteht man unter Asymptoten? **A.:** Die Asymptoten einer Hyperbel sind zwei Linien, welche sich im Mittelpunkte der Hyperbel schneiden und die Hyperbel auf ihrer gesamten Länge zwischen sich fassen, ohne jemals von ihr berührt zu werden. Sie entstehen als Diagonalen eines Rechtecks aus den beiden Axen.

A. Vortrag.

130. Eine besondere Form der Hyperbel ist diejenige, welche entsteht, wenn die beiden Axen einander gleich werden. In diesem Falle wird das Rechteck aus den beiden Axen ein Quadrat und die Diagonalen dieses Quadrates, die Asymptoten, stehen senkrecht aufeinander. Jede Hyperbel, welche diese Eigenschaft der Asymptoten besitzt, heißt eine g l e i c h s e i t i g e H y p e r b e l. Solche gleichseitigen Hyperbeln spielen in der Maschinentechnik insofern eine Rolle, als die Drucklinien,

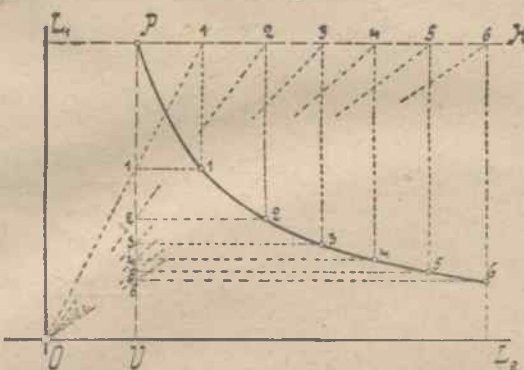

Fig. 117.

welche bei der Wirkung des Dampfes im Dampfcylinder entstehen, gleichseitige Hyperbeln (auch M a r i o t t e s c h e L i n i e n genannt) sind. In Textfig. 117 ist die punktweise Construction einer Mariotteschen Linie wiedergegeben, wenn die beiden Asymptoten L_1 und L_2 und der Punkt P als Anfangspunkt der Mariotteschen Linie gegeben sind. Man verfährt dann folgendermaßen: Durch P wird eine wagerechte Linie PH und eine senkrechte Linie PV gezogen. Verbindet man nun beliebige Punkte 1, 2, 3 . . . auf PH mit dem Schnittpunkt O der Asymptoten L_1 und L_2, so ergeben sich die Punkte 1, 2, 3 . . . auf PV. Werden nun durch die gleich numerierten Punkte auf PH und PV senkrechte bezw. wagerechte Linien gezogen, so findet man als Schnittpunkte der zusammengehörigen Linien die Punkte 1, 2, 3 der gleichseitigen Hyperbel.

131. Verwandt mit den drei Kegelschnitten Ellipse, Parabel und Hyperbel ist die sogenannte ***Kettenlinie.*** Eine Kettenlinie entsteht, wenn man eine feingliedrige Kette oder einen vollkommen biegsamen Faden zwischen zwei n i c h t senkrecht übereinanderliegenden Punkten aufhängt. Die Construction der Kettenlinie ist wichtig für die Beurteilung von Triebwerken, bei denen Seile, Riemen oder Ketten zur Uebertragung dienen, und bei der

Construction sogenannter Drucklinien in Gewölben. Der erstere Fall wird des näheren in den Maschinenelementen, der zweite in der graphischen Statik behandelt werden.

132. In Textfig. 118 ist die Construction der gemeinen Kettenlinie mit gleich hoch liegenden Aufhängungspunkten A und B gezeigt; in Textfig. 119 eine annähernde für verschieden hoch liegende. Es soll hier bemekt werden, daß eine genaue Construction nur auf Grund von Berechnungen erfolgen kann, die aber hier nicht wiedergegeben werden können.

Zur Construction der Kettenlinie in beiden Fällen ist erforderlich die Kettenlänge und eine Größe p, welche auch hier der Parameter genannt wird und welche aus der Spannung der Kette und dem Abstand der Aufhängepunkte voneinander berechnet werden kann. Die Berechnung des Parameters wird in der höheren Mathematik gelehrt. Hier handelt es sich um die Construction der Kettenlinie bei gegebenem Parameter, gegebener Länge und gegebener Neigung der Verbindungslinie der Aufhängepunkte gegen die Wagerechte.

Bei gleicher Höhenlage der Aufhängepunkte A und B zieht man durch einen Punkt C eine Wagerechte CH gleich dem Parameter p und eine Senkrechte CG, deren Länge gleich der halben Kettenlänge gemacht wird. CG wird in eine beliebige Anzahl gleicher Teile a geteilt und die Teilpunkte 1, 2, 3 . . . mit H verbunden. Nun wird im Aufhängepunkte A eine Parallele zur letzten Verbindungslinie HG gezogen und auf dieser eins der Teilstücke der Länge CG abgetragen. Man erhält dadurch z. B. den Punkt 7 der Kettenlinie, durch diesen wird nunmehr eine weitere Parallele zu H 7 gezogen und der Punkt 6 durch Abtragen eines weiteren Stückes der Kettenlänge gefunden. In dieser Weise fährt man fort, bis eine Parallele zum Parameter gezogen und auf dieser das letzte Kettenstück abgetragen ist. Der Endpunkt dieses Stückes ist der tiefste Punkt der Kette und zugleich der Mittelpunkt derselben. Die zweite Hälfte der Kettenlinie wird durch einfaches Uebertragen nach der anderen Seite gefunden.

133. Bei der in Textfig. 119 dargestellten angenäherten Construction mit ungleicher Höhenlage der Aufhängepunkte wird durch einen Punkt C eine Linie H_1H_2 gezogen, welche gegen die Wagerechte um denselben Winkel geneigt ist, wie die Verbindungslinie der Aufhängepunkte A und B. Mit den vorher berechneten Parametern, die hier verschieden sind, zieht man parallel zu der Senkrechten CG zwei Linien und findet dadurch die Punkte H_1 und H_2. CG wird wie vorher, gleich der halben Kettenlänge gemacht und in eine beliebige Anzahl gleicher Teile geteilt; die ebenso wie in Textfig. 118 mit H_1 bezw. H_2 verbunden werden. Man beginnt nun bei dem angenommenen Aufhänge-

punkt A mit dem Ziehen der Parallele zu H_1G und verfährt genau so wie bei Textfig. 118, bis die Parallele zu H_1C gezogen ist. Dann zieht man als weitere Stücke der Kettenlinie Parallelen zu $1 H_2$ und als letzte zu GH_2. Der Endpunkt der Parallelen zu GH_2 bestimmt den zweiten Aufhängepunkt B.

B. Zusammenfassung.

Sind die beiden Axen der Hyperbel gleich groß, so wird sie gleichseitig genannt. Die Asymptoten stehen bei einer gleichseitigen Hyperbel aufeinander senkrecht. Anwendung findet die gleichseitige Hyperbel bei der Construction der Drucklinien des Dampfes im Dampfcylinder. — Zur Construction einer Kettenlinie müssen der Parameter, die Länge der Kette und die Neigung der Verbindungslinie der Aufhängepunkte gegen die Wagerechte gegeben sein. Liegen die Aufhängepunkte in gleicher Höhe, so zieht man durch einen Punkt eine Wagerechte, auf der man nach beiden Seiten den Parameter abträgt. Auf einer in dem Punkte errichteten Senkrechten trägt man nach unten die halbe Kettenlänge ab. Diese Senkrechte wird in eine beliebige Anzahl gleicher Teile geteilt, und die Teilpunkte mit den Endpunkten der Wagerechten verbunden. Zieht man nun im Aufhängepunkte zur letzten Verbindungslinie eine Parallele und trägt auf diese ein Teilstück der Senkrechten ab, so hat man einen Punkt der Kettenlinie. Durch diesen zieht man eine Parallele zur zweiten Verbindungslinie und trägt wieder die Teilstrecke ab u. s. f.

C. Besprechung des Lehrstoffes.

Frage: Durch welche besondere Eigentümlichkeit zeichnet sich die gleichseitige Hyperbel aus? **Antwort:** Bei der gleichseitigen Hyperbel sind die beiden Axen gleich groß und die Asymptoten stehen senkrecht aufeinander. **Fr.:** Wo wird die gleichseitige Hyperbel besonders häufig angewendet? **A.:** Bei der Construction der Drucklinien für Dampfmaschinen. **Fr.:** Was versteht man unter einer gemeinen Kettenlinie? **A.:** Eine Kettenlinie ist eine solche Linie, welche entsteht, wenn man eine an allen Stellen gleich schwere Kette oder einen vollkommen biegsamen Faden zwischen zwei nicht senkrecht übereinanderliegenden Punkten aufhängt. **Fr.:** Welche Größen müssen gegeben sein zur Construction einer Kettenlinie? **A.:** Die Aufhängepunkte, die Länge der Kette und der Parameter. **Fr.:** Wo finden die Kettenlinien Anwendung? **A.:** In der Maschinentechnik bei den Riemen-, Seil- und Kettentrieben, in der Bautechnik bei der Construction der Drucklinien für Gewölbe.

D. Zur Wiederholung.

97. Welcher Satz gilt für die Lage der Hyperbelpunkte zu den Brennpunkten? 98. Wie findet man die Excentricität der Hyperbel bei gegebener Länge der Axe? 99. Wie werden die Asymptoten einer Hyperbel construiert? 100. Welche besondere Form der Hyperbel findet in der Maschinentechnik häufig Anwendung? 101. Wodurch unterscheidet sich die gleichseitige Hyperbel von solchen mit ungleichen Axen? 102. Wie entsteht eine Kettenlinie? 103. Wie unterscheidet sich die Construction der Kettenlinie mit gleich hoch liegenden Aufhängepunkten von derjenigen mit verschieden hoch liegenden Aufhängepunkten?

E. Aufgaben.

52. Es soll eine Hyperbel construiert werden, deren große Axe 8 cm, und deren kleine Axe 5 cm lang ist.

53. Es ist eine gleichseitige Hyperbel zu construieren, deren Anfangspunkt P von der senkrechten Asymptote 3 cm, von der wagerechten Asymptote 9 cm entfernt liegt. Die wagerechte Länge der gesamten Figur soll 15 cm betragen.

G. Antworten auf Wiederholungen.

83. Punktweise Construction und Fadenconstruction.

84. Zwei durch den Mittelpunkt der Ellipse gehende aufeinander senkrecht stehende Durchmesser, von denen der größere die beiden am weitesten voneinander abliegenden Punkte des Umfanges verbindet.

85. Auf der Eigentümlichkeit der Ellipse, daß alle in wagerechter Richtung gemessenen Abstände von der senkrechten Axe in gleichem Verhältnis vergrößert sind.

86. Einen Kreis, welcher sich der gegebenen Curve auf eine gewisse Strecke hin möglichst eng anschmiegt.

87. Dadurch, daß man vom Endpunkt der kleinen Axe mit der halben großen Axe einen Kreis schlägt.

88. Die Summe der Fahrstrahlen ist stets gleich der Länge der großen Axe.

89. Dadurch, daß eine Ebene einen Kegel parallel zu einer seiner Seiten schneidet.

90. Der Parameter ist der Abstand zwischen Brennpunkt und Leitlinie.

91. Durch Leitlinie und Parameter.

92. Man trägt den Parameter auf der Axe von der Leitlinie aus ab.

93. Der Abstand eines Parabelpunktes vom Brennpunkte ist gleich demjenigen von der Leitlinie.

94. Punktweise Construction und Umhüllungsconstruction.

95. Gleich dem Parameter.

96. Die Entfernungen sind gleich.

97. Der Unterschied der Abstände eines Hyperbelpunktes von den beiden Brennpunkten bleibt stets gleich.

98. Die Excentricität ist die Diagonale in einem Rechteck aus den beiden Halbaxen.

99. Man zieht in einem Rechteck aus den beiden Axen die Diagonalen und verlängert sie über die Eckpunkte des Rechtecks hinaus.

100. Die gleichseitige Hyperbel.

101. Bei der gleichseitigen Hyperbel sind die Axen einander gleich und die Asymptoten stehen senkrecht aufeinander.

102. Durch Aufhängen einer gleichmäßigen Kette oder eines vollkommen biegsamen Fadens an einer senkrechten Wand.

103. Die Kettenlinie mit gleich hochliegenden Aufhängepunkten hat für beide Hälften den gleichen Parameter, bei verschiedener Höhenlage für beide Hälften verschieden.

H. Lösungen der Aufgaben.

46. Construction nach Satz 109 und 110 und Textfig. 93 mit AB = 14 cm MD = 3,5 cm.

47. Construction nach Satz 110 und Textfig. 95 mit OO = 4 m und 44 = 6 m im Maßstabe 1 : 50.

48. Construction nach Satz 111 und Textfig. 96 mit AB_0 = 8 m, B_0B = 3 m, Höhe von D über AB_0 6 m im Maßstabe 1 : 50.

49. Construction nach Satz 120 und 121 und Textfig. 106 bezw. 108. FO = 4 cm.

50. Construction nach Satz 121 und Textfig. 107. FS = 3 cm; durch S wird eine Senkrechte zur Axe gezogen und auf dieser die Punkte A_1 A_2 A_3 . . . angenommen.

51. Construction nach Satz 126 und Textfig. 112. CA = 8 cm, CB = 5 cm. Die beiden Abschnitte werden zweckmäßig in 8 Teile zerlegt.

52. Construction nach Satz 128 und Textfig. 115. 2a = 8 cm, 2b = 5 cm. Es wird aus den beiden Axen ein Rechteck construiert, in dieses die beiden Diagonalen als Asymptoten der Hyperbel eingezeichnet. Die halbe Diagonale ist die Excentricität. Nunmehr werden F_1 und F_2 bestimmt und die Construction nach Textfig. 115 durchgeführt.

53. Construction nach Satz 130 und Textfig. 117.