
NR. 1468
DZ. IX 12

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Erster Theil.

Mit vier lithographirten Tafeln und zwei Holzschnitten.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.

1841.

Inhaltsverzeichniss des ersten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Geodäsie.

*) Ich bemerke hierbei, dass die literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Beiträge zur Untersuchung der dreiseitigen Pyramide.

Von dem

Herrn Professor C. A. Bretschneider

zu Gotha.

Die trigonometrischen Relationen zwischen den 44 Stücken des gewöhnlichen Tetraeders haben noch sehr wenige Bearbeiter gefunden. Die Franzosen sind es fast ausschliesslich, die sich mit diesem Gegenstande beschäftigt haben; aber auch sie haben vornehmlich nur das rechtkantige Tetraeder betrachtet. Von Deutschen ist mir nur eine Abhandlung bekannt, nämlich ein Progamm des Herrn Direktors J. H. T. Müller zu Gotha, welches den Anfang einer ausführlicheren Untersuchung des fraglichen Gegenstandes enthält und aus dem ein freilich nur unbedeutender Theil in die Anhänge der deutschen Bearbeitung des van Swinden'schen Lehrbuches aufgenommen worden ist. Unter diesen Umständen glaube ich, dass die nachfolgenden Sätze, die aus einer ausführlicheren trigonometrischen Untersuchung des Tetraeders entlehnt sind, nicht ganz ohne Interesse sein werden. Ueberdiess zeichnen sie sich zum Theil durch eine bemerkenswerthe Reciprocität aus, welche, so viel mir bekannt, noch nirgends erwähnt worden ist.

Es seien A, B, C, D die vier Ecken eines Tetraeders, T_1 T_2 T_3 T_4 die ihnen der Reihe nach gegenüber liegenden Seitenflächen; abc die drei Kanten des Dreieckes T_1, a_1 b_1 c_1 die ihnen der Reihe nach gegenüberliegenden Kanten, so dass das Dreieck T_2 die Kanten ab_1c_1, das Dreieck T_3 die Kanten ba_1c_1 und das Dreieck T_4 die Kanten ca_1b_1 enthält. Die Keile irgend zweier Seitenflächen z. B. T_1 und T_2 bezeichne man durch (12), die Winkel irgend zweier Kanten z. B. a und a_1 mit (aa_1). Ferner mögen die Geraden, welche die vier Ecken mit den Schwerpunkten der Gegenseitenflächen verbinden, der Reihe nach t_1 t_2 t_3 t_4 genannt, und die von denselben unter einander gebildeten Winkel, welche den ganzen Kanten gegenüberliegen, auf ähnliche Weise wie die Winkel der letzteren durch (t_{12}), (t_{13}) u. s. w. angedeutet werden. Alsdann erhält man durch Projektion sofort:

$$1.\left\{\begin{array}{l} T_1 = T_2 \cos(1,2) + T_3 \cos(1,3) + T_4 \cos(1,4) \\ T_2 = T_1 \cos(1,2) + T_3 \cos(2,3) + T_4 \cos(2,4) \\ T_3 = T_1 \cos(1,3) + T_2 \cos(2,3) + T_4 \cos(3,4) \\ T_4 = T_1 \cos(1,4) + T_2 \cos(2,4) + T_3 \cos(3,4) \end{array}\right.$$

und

$$1'.\left\{\begin{array}{l} -t_1 = t_2 \cos(t_{12}) + t_3 \cos(t_{13}) + t_4 \cos(t_{14}) \\ -t_2 = t_1 \cos(t_{12}) + t_3 \cos(t_{23}) + t_4 \cos(t_{24}) \\ -t_3 = t_1 \cos(t_{13}) + t_2 \cos(t_{23}) + t_4 \cos(t_{34}) \\ -t_4 = t_1 \cos(t_{14}) + t_2 \cos(t_{24}) + t_3 \cos(t_{34}) \end{array}\right.$$

Ausdrücke, welche gewissermaassen als Fundamentalformeln zu betrachten sind. Uebrigens sollen im Folgenden die vollständigen Systeme solcher Gleichungen nicht mehr aufgeführt werden, da man aus einer einzelnen unter ihnen durch gehörige Vertauschung der Zeiger die übrigen ohne Mühe entwickeln kann. Zunächst findet man nun:

$$2.\left\{\begin{array}{l} T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 - T_4^2 = 2T_1 T_2 \cos(1,2) + 2T_1 T_3 \cos(1,3) \\ \qquad + 2T_1 T_4 \cos(1,4) \\ -(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - t_4^2) = 2t_1 t_2 \cos(t_{12}) + 2t_1 t_3 \cos(t_{13}) \\ \qquad + 2t_1 t_4 \cos(t_{34}) \end{array}\right.$$

und

$$3.\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2) = T_1 T_2 \cos(1,2) + T_1 T_3 \cos(1,3) \\ \qquad + T_1 T_4 \cos(1,4) \\ \qquad + T_2 T_3 \cos(2,3) + T_2 T_4 \cos(2,4) \\ \qquad + T_3 T_4 \cos(3,4) \\ -\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) = t_1 t_2 \cos(t_{12}) + t_1 t_3 \cos(t_{13}) \\ \qquad + t_1 t_4 \cos(t_{14}) \\ \qquad + t_2 t_3 \cos(t_{23}) + t_2 t_4 \cos(t_{24}) \\ \qquad + t_3 t_4 \cos(t_{34}) \end{array}\right.$$

Man bezeichne ferner den Flächeninhalt des durch die Kante a und den Mittelpunkt der Gegenkante a_1 gelegten Dreieckes durch T_a, das durch die Kante b und den Mittelpunkt von b_1 gelegte Dreieck durch T_b u. s. f. so erhält man 6 solche Dreiecksflächen, von denen immer je zwei, wie T_a und T_{a_1}, als Gegenflächen zu betrachten sind. Je drei derselben schneiden sich immer in einer der Schwerlinien t, wie z. B. T_{a_1} T_{b_1} T_{c_1} in t_1, und sie sind daher ganz den Kanten des Tetraeders analog, von denen immer je drei in einer Seitenfläche liegen. Den Keil zweier solchen Dreiecksflächen z. B. T_a T_b wollen wir mit (T_{ab}) bezeichnen und darunter immer denjenigen von den 4 an der Durchschnittslinie liegenden Keilen verstehen, welcher der einzigen von den 4 Seitenflächen gegenüberliegt, die durch diese Dreiecke nicht getheilt wird.

Endlich sollen die Flächen der Dreiecke, die aus zwei Gegenkanten als Seiten, und ihrem Durchschnittswinkel als eingeschlossenem Winkel gebildet werden, durch Δ_1 Δ_2 Δ_3 bezeichnet werden, je nachdem sie zu den Kantenpaaren aa_1, bb_1, cc_1 gehören; die Neigungswinkel dieser Flächen gegen einander aber sollen (Δ_{12}), (Δ_{13}), (Δ_{23}) heifsen. Auf ganz ähnliche Weise sollen die doppelten Verbindungslinien der Mittelpunkte zweier Gegenkanten, wie

aa_1, bb_1 und cc_1 respective durch δ_1 δ_2 δ_3 angedeutet und die Winkel der letzteren unter einander mit (δ_{12}), (δ_{13}), (δ_{23}) bezeichnet werden. Es ist bekannt, dass die 7 Geraden t_1 t_2 t_3 t_4 δ_1 δ_2 δ_3 sich im Schwerpunkte des Tetraeders schneiden, und dafs die Parallelogramme, welche die Hälften zweier beliebigen δ zu Diagonalen haben, selbst die Hälften der entsprechenden Dreiecke Δ sind. Zunächst finden nun folgende Relationen statt:

$$4.\left\{\begin{aligned}
\Delta_1{}^2 &= T_1{}^2+T_2{}^2-2T_1T_2\cos(1,2)=T_3{}^2+T_4{}^2-2T_3T_4\cos(34)\\
&= T_b{}^2+T_{b_1}{}^2-2T_bT_{b_1}\cos(T_{bb_1})\\
&\qquad\qquad = T_c{}^2+T_{c_1}{}^2+2T_cT_{c_1}\cos(T_{cc_1})\\
&= T_1T_3\cos(1,3)+T_1T_4\cos(1,4)+T_2T_3\cos(2,3)\\
&\qquad\qquad +T_2T_4\cos(2,4)\\
\delta_1{}^2 &= \tfrac{9}{4}(t_1{}^2+t_2{}^2+2t_1t_2\cos(t_{12}))=\tfrac{9}{4}(t_3{}^2+t_4{}^2+2t_3t_4\cos(t_{34}))\\
&= b^2+b_1{}^2-2bb_1\cos(bb_1)=c^2+c_1{}^2+2cc_1\cos(cc_1)\\
&= -\tfrac{9}{4}\{t_1t_3\cos(t_{13})+t_1t_4\cos(t_{14})+t_2t_3\cos(t_{23})+t_2t_4\cos(t_{24})\}
\end{aligned}\right.$$

Hieraus folgen sogleich die Formeln:

$$5.\left\{\begin{aligned}
4T_a{}^2 &= T_1{}^2+T_2{}^2+2T_1T_2\cos(1,2)=\Delta_1{}^2+4T_1T_2\cos(1,2)\\
4T_{a_1}{}^2 &= T_3{}^2+T_4{}^2+2T_3T_4\cos(3,4)=\Delta_1{}^2+4T_3T_4\cos(3,4)\\
4a_1{}^2 &= \tfrac{9}{4}(t_1{}^2+t_2{}^2-2t_1t_2\cos(t_{12}))=\delta_1{}^2-9t_1t_2\cos(t_{12})\\
4a^2 &= \tfrac{9}{4}(t_3{}^2+t_4{}^2-2t_3t_4\cos(t_{34}))=\delta_1{}^2-9t_3t_4\cos(t_{34})
\end{aligned}\right.$$

$$6.\left\{\begin{aligned}
\Delta_1{}^2+\Delta_2{}^2+\Delta_3{}^2 &= T_1{}^2+T_2{}^2+T_3{}^2+T_4{}^2\\
&= T_a{}^2+T_{a_1}{}^2+T_b{}^2+T_{b_1}{}^2+T_c{}^2+T_{c_1}{}^2\\
\Delta_1{}^2+\Delta_2{}^2+2\Delta_3{}^2 &= \Delta_3{}^2+T_1{}^2+T_2{}^2+T_3{}^2+T_4{}^2\\
&= 2(T_a{}^2+T_{a_1}{}^2+T_b{}^2+T_{b_1}{}^2)\\
\delta_1{}^2+\delta_2{}^2+\delta_3{}^2 &= \tfrac{9}{4}(t_1{}^2+t_2{}^2+t_3{}^2+t_4{}^2)\\
&= a^2+a_1{}^2+b^2+b_1{}^2+c^2+c_1{}^2\\
\delta_1{}^2+\delta_2{}^2+2\delta_3{}^2 &= \delta_3{}^2+\tfrac{9}{4}(t_1{}^2+t_2{}^2+t_3{}^2+t_4{}^2)\\
&= 2(a^2+a_1{}^2+b^2+b_1{}^2)
\end{aligned}\right.$$

$$7.\left\{\begin{aligned}
\Delta_1{}^2+\Delta_2{}^2-\Delta_3{}^2 &= (T_1{}^2+T_2{}^2+T_3{}^2+T_4{}^2)-2\Delta_3{}^2\\
&= 2T_1T_4\cos(1,4)+2T_2T_3\cos(2,3)\\
\delta_1{}^2+\delta_2{}^2-\delta_3{}^2 &= \tfrac{9}{4}(t_1{}^2+t_2{}^2+t_3{}^2+t_4{}^2)-2\delta_3{}^2\\
&= -2t_1t_4\cos(t_{14})-2t_2t_3\cos(t_{23})
\end{aligned}\right.$$

$$8.\left\{\begin{aligned}
&\Delta_1{}^2=-T_a{}^2-T_{a_1}{}^2+T_b{}^2+T_{b_1}{}^2+T_c{}^2+T_{c_1}{}^2,\\
&\qquad\qquad \Delta_2{}^2+\Delta_3{}^2=2(T_a{}^2+T_{a_1}{}^2)\\
&\delta_1{}^2=-a^2-a_1{}^2+b^2+b_1{}^2+c^2+c_1{}^2,\quad \delta_2{}^2+\delta_3{}^2=2(a^2+a_1{}^2)
\end{aligned}\right.$$

$$9.\left\{\begin{aligned}
0 &= T_aT_{a_1}\cos(T_{aa_1})+T_bT_{b_1}\cos(T_{bb_1})+T_cT_{c_1}\cos(T_{cc_1})\\
0 &= aa_1\cos(aa_1)+bb_1\cos(bb_1)+cc_1\cos(cc_1)
\end{aligned}\right.$$

$$10.\left\{\begin{aligned}
2T_aT_{a_1}\cos(T_{aa_1}) &= T_c{}^2+T_{c_1}{}^2-T_b{}^2-T_{b_1}{}^2=\tfrac{1}{2}(\Delta_2{}^2-\Delta_3{}^2)\\
2aa_1\cos(aa_1) &= c^2+c_1{}^2-b^2-b_1{}^2=\tfrac{1}{2}(\delta_2{}^2-\delta_3{}^2)
\end{aligned}\right.$$

Ist ferner P der dreifache Körperinhalt des Tetraeders, so wird:

$$11.\left\{\begin{aligned}
Pa &= 2T_1T_2\sin(1,2) & Ta_1 &= \tfrac{9}{16}t_1t_2\sin(t_{12})\\
Pa_1 &= 2T_3T_4\sin(3,4) & Ta &= \tfrac{9}{16}t_3t_4\sin(t_{34})\\
P\delta_1 &= 2T_aT_{a_1}\sin(T_{aa_1}) & \Delta_1 &= \tfrac{1}{2}aa_1\sin(aa_1)
\end{aligned}\right.$$

zugleich aber auch:

$$12.\left\{\begin{array}{l}4a^2 = \delta_2{}^2 + \delta_3{}^2 - 2\delta_2\delta_3 \cos(\delta_{23}), \\ \qquad\qquad 4T_a{}^2 = \Delta_2{}^2 + \Delta_3{}^2 - 2\Delta_2\Delta_3 \cos(\Delta_{23}) \\ 4a_1{}^2 = \delta_2{}^2 + \delta_3{}^2 + 2\delta_2\delta_3 \cos(\delta_{23}), \\ \qquad\qquad 4T_{a_1}{}^2 = \Delta_2{}^2 + \Delta_3{}^2 + 2\Delta_2\Delta_3 \cos(\Delta_{23}) \\ P\delta_1 = 2\Delta_2\Delta_3 \sin(\Delta_{23}) \qquad \Delta_1 = \tfrac{1}{4}\delta_2\delta_3 \sin(\delta_{23})\end{array}\right.$$

ferner wird:

$$13.\left\{\begin{array}{l}T_{a_1}{}^2 = T_b{}^2 + T_c{}^2 + 2T_bT_c \cos(T_{bc}) \\ \qquad = T_{b_1}{}^2 + T_{c_1}{}^2 + 2T_{b_1}T_{c_1} \cos(T_{b_1c_1}) \\ T_a{}^2 = T_{b_1}{}^2 + T_c{}^2 + 2T_{b_1}T_c \cos(T_{b_1c}) \\ \qquad = T_b{}^2 + T_{c_1}{}^2 + 2T_bT_{c_1} \cos(T_{bc_1}) \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(bc) = b_1{}^2 + c_1{}^2 - 2b_1c_1 \cos(b_1c_1) \\ a_1{}^2 = b_1{}^2 + c^2 - 2b_1c \cos(b_1c) = b^2 + c_1{}^2 - 2bc_1 \cos(bc_1)\end{array}\right.$$

$$14.\left\{\begin{array}{l}\tfrac{3}{2}Pt_1 = 4T_{a_1}T_{b_1} \sin(T_{a_1b_1}) = 4T_{a_1}T_{c_1} \sin(T_{a_1c_1}) \\ \qquad = 4T_{b_1}T_{c_1} \sin(T_{b_1c_1}) \\ 2T_1 = ab \sin(ab) = ac \sin(ac) = bc \sin(bc)\end{array}\right.$$

Man führe zur Abkürzung folgende Zeichen ein:

$$15.\left\{\begin{array}{l}\Psi^2 = (T_1 + T_2 + T_3 - T_4)(T_1 + T_2 - T_3 + T_4) \\ \qquad (T_1 - T_2 + T_3 + T_4)(-T_1 + T_2 + T_3 + T_4) \\ \qquad - 8T_1T_2T_3T_4 \\ \Phi_a{}^2 = (T_b + T_{b_1} + T_c - T_{c_1})(T_b + T_{b_1} - T_c + T_{c_1}) \\ \qquad (T_b - T_{b_1} + T_c + T_{c_1})(-T_b + T_{b_1} + T_c + T_{c_1}) \\ \qquad - 8T_bT_{b_1}T_cT_{c_1} \\ \Pi^2 = (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3)(\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3) \\ \qquad (-\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) \\ \psi^2 = (t_1 + t_2 + t_3 - t_4)(t_1 + t_2 - t_3 + t_4)(t_1 - t_2 + t_3 + t_4) \\ \qquad (-t_1 + t_2 + t_3 + t_4) - 8t_1t_2t_3t_4 \\ \varphi_a{}^2 = (b + b_1 + c - c_1)(b + b_1 - c + c_1)(b - b_1 + c + c_1) \\ \qquad (-b + b_1 + c + c_1) - 8bb_1cc_1 \\ \pi^2 = (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)(\delta_1 + \delta_2 - \delta_3)(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3)(-\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)\end{array}\right.$$

so wird

$$16.\left\{\begin{array}{l}\Psi^2 = P^2(a \pm a_1)^2 + 8T_1T_2T_3T_4 \cos(12 \pm 34) \\ \qquad = P^2\{a^2 + a_1{}^2 + 2aa_1 \cot(12)\cot(34)\} \\ \Phi_a{}^2 = \tfrac{1}{4}P^2(\delta_2 \mp \delta_3)^2 - 8T_bT_{b_1}T_cT_{c_1} \cos(T_{bb_1} \pm T_{cc_1}) \\ \qquad = \tfrac{1}{4}P^2\{\delta_2{}^2 + \delta_3{}^2 - 2\delta_2\delta_3 \cot(T_{bb_1})\cot(T_{cc_1})\} \\ \Pi^2 = P^2(\delta_1{}^2 \mp 4aa_1) - 16T_1T_2T_3T_4 \cos(12 \pm 34) \\ \qquad = P^2\{\delta_1{}^2 - 4aa_1 \cot(12)\cot(34)\} \\ \frac{9^2}{16^2}\psi^2 = 4(T_{a_1} \pm T_a)^2 + \frac{9^2}{16^2} \cdot 8t_1t_2t_3t_4 \cos(t_{12} \pm t_{34}) \\ \qquad = 4\{T_a{}^2 + T_{a_1}{}^2 + 2T_aT_{a_1} \cot(t_{12})\cot(t_{34})\} \\ \varphi_a{}^2 = 4^2(\Delta_2 \mp \Delta_3)^2 - 8bb_1cc_1 \cos(bb_1 \pm cc_1) \\ \qquad = 4^2\{\Delta_2{}^2 + \Delta_3{}^2 - 2\Delta_2\Delta_3 \cot(bb_1)\cot(cc_1)\} \\ \frac{1}{8^2}\pi^2 = (\Delta_1{}^2 \mp 4T_aT_{a_1}) - \frac{9^2}{16^2}4t_1t_2t_3t_4 \cos(t_{12} \pm t_{34}) \\ \qquad = \Delta_1{}^2 - 4T_aT_{a_1} \cot(t_{12})\cot(t_{34})\end{array}\right.$$

und:

$$17. \begin{cases} 2\Psi^2 + \Pi^2 = P^2(\delta_1{}^2 + \delta_2{}^2 + \delta_3{}^2) \\ 2\,\dfrac{9^2\,\psi^2}{16^2} + \dfrac{\pi^2}{8^2} = \Delta_1{}^2 + \Delta_2{}^2 + \Delta_3{}^2. \end{cases}$$

Beschreibt man aus der Spitze A des Tetraeders als Mittelpunkt mit dem Halbmesser 1 eine Kugel, so bildet die Ecke A auf der Oberfläche der letzteren ein sphärisches Dreieck. Nennt man dann den dreifachen Körperinhalt der Pyramide, welche das Sehnendreieck jenes sphärischen Dreieckes zur Grundfläche und den Mittelpunkt der Kugel zur Spitze hat, k und dieselbe Grösse für das zugehörige Polardreieck K, so dass der Fläche T_1 die Grössen k_1 und K_1, der Fläche T_2 die Grössen k_2 und K_2 u. s. w. gegenüberliegen; so ist

$$18. \; T_1 : T_2 : T_3 : T_4 = K_1 : K_2 : K_3 : K_4.$$

Demnach verhalten sich die Seitenflächen jedes Tetraeders wie die Funktionen K der ihnen gegenüberliegenden Ecken. Diese Funktionen sind daher für das Tetraeder dasselbe, was die Sinusse der Gegenwinkel für das Dreieck sind. Bezeichnet man das constante Verhältniss $T : K$ durch M, so erhält man:

$$19. \begin{cases} M = \dfrac{4\,T_1\,T_2\,T_3\,T_4}{P^2} = \dfrac{T_1}{K_1} = \dfrac{T_2}{K_2} = \dfrac{T_3}{K_3} = \dfrac{T_4}{K_4} \\ = \dfrac{aa_1}{\sin(12)\,\sin(34)} = \dfrac{bb_1}{\sin(13)\,\sin(24)} = \dfrac{cc_1}{\sin(14)\,\sin(23)} \\ = \dfrac{\delta_1{}^2 - \delta_2{}^2}{4\,[\cos(12)\,\cos(34) - \cos(13)\,\cos(24)]} = \text{u. s. w.} \\ = \dfrac{(a + a_1 + b - b_1)\,(a + a_1 - b + b_1)}{4\sin\frac{1}{2}(12 + 34 + 13 - 24)\,\sin\frac{1}{2}(12 + 34 - 13 + 24)} = \text{u. s. w.} \\ = \dfrac{(a - a_1 + b + b_1)\,(-a + a_1 + b + b_1)}{4\sin\frac{1}{2}(12 - 34 + 13 + 24)\,\sin\frac{1}{2}(-12 + 34 + 13 + 24)} = \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Ebenso ist auch:

$$20. \; \frac{aa_1\,bb_1\,cc_1}{P} = \frac{abc}{k_1} = \frac{ab_1c_1}{k_2} = \frac{a_1bc_1}{k_3} = \frac{a_1b_1c}{k_4}.$$

Es ist nicht uninteressant zu untersuchen, was wohl die der Grösse M entsprechende Quantität m in Bezug auf die Grössen $t_1\,t_2\,t_3\,t_4$ sein mag; denn auch hier bleibt sich die Analogie gleich. Man erhält nämlich:

$$21. \begin{cases} m = \dfrac{9^2}{16^2}\,t_1t_2t_3t_4 = \dfrac{T_a\,T_{a_1}}{\sin(t_{12})\,\sin(t_{34})} = \dfrac{T_b\,T_{b_1}}{\sin(t_{13})\,\sin(t_{24})} = \text{u. s. w.} \\ = \dfrac{\Delta_1{}^2 - \Delta_2{}^2}{4\,[\cos(t_{12})\cos(t_{34}) - \cos(t_{13})\cos(t_{24})]} = \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Beantwortung dieser Frage hängt von der Lösung der Aufgabe ab, die Grösse zu finden, welche dem P entspricht. Letztere lässt sich auf die mannigfachste Weise ausdrücken z. B.

$$22. \begin{cases} P = a_1b_1c_1k_1 = a_1bck_2 = ab_1ck_3 = abc_1k_4 \\ = 2\sqrt{K_1\,T_2\,T_3\,T_4} = 2\sqrt{K_2\,T_1\,T_3\,T_4} = 2\sqrt{K_3\,T_1\,T_2\,T_4} \\ = 2\sqrt{K_4\,T_1\,T_2\,T_3} \end{cases}$$

Ferner wird:

$$
23.\left\{\begin{aligned}
16\,P^2 &= a^2 a_1{}^2 \delta_1{}^2 + b^2 b_1{}^2 \delta_2{}^2 + c^2 c_1{}^2 \delta_3{}^2 - a^2 b^2 c^2 - a_1{}^2 b_1{}^2 c^2 \\
&\qquad - a_1{}^2 b^2 c_1{}^2 - a^2 b_1{}^2 c_1{}^2 \\
&= 2a^2 b^2 c^2 + \tfrac{1}{8} a^2 (\delta_3{}^2 - \delta_1{}^2)(\delta_1{}^2 - \delta_2{}^2) \\
&\quad + \tfrac{1}{8} b^2 (\delta_1{}^2 - \delta_2{}^2)(\delta_2{}^2 - \delta_3{}^2) + \tfrac{1}{8} c^2 (\delta_2{}^2 - \delta_3{}^2)(\delta_3{}^2 - \delta_1{}^2) \\
&= 2a^2 b^2 c^2 - 2a^4 a_1{}^2 - 2b^4 b_1{}^2 - 2c^4 c_1{}^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{4} \varphi_a{}^2 (-a^2 + b^2 + c^2) + \tfrac{1}{4} \varphi_b{}^2 (a^2 - b^2 + c^2) \\
&\quad + \tfrac{1}{4} \varphi_c{}^2 (a^2 + b^2 - c^2) \\
&= \frac{(aa_1 + bb_1 + cc_1)(aa_1 + bb_1 - cc_1)(aa_1 - bb_1 + cc_1)(-aa_1 + bb_1 + cc_1)}{4R^2}
\end{aligned}\right.
$$

wo R den Halbmesser der dem Tetraeder umschriebenen Kugel bedeutet. Endlich erhält man für P auch noch folgende Ausdrücke:

$$
24.\left\{\begin{aligned}
P &= \frac{2\,T_1{}^2}{a \cot(12) + b \cot(13) + c \cot(14)} \\
&= \frac{\Delta_1{}^2 + \Delta_2{}^2 + \Delta_3{}^2 - 4\,T_1{}^2}{\delta_1 \cot(\Delta_{23}) + \delta_2 \cot(\Delta_{13}) + \delta_3 \cot(\Delta_{12})} \\
&= \frac{T_2{}^2 + T_3{}^2 + T_4{}^2 - T_1{}^2}{a_1 \cot(34) + b_1 \cot(24) + c_1 \cot(23)} \\
&= \frac{-T_1{}^2 - \frac{1}{12}(T_1{}^2 + T_2{}^2 + T_3{}^2 + T_4{}^2)}{t_2 \cot(T_{bc}) + t_3 \cot(T_{ac}) + t_4 \cot(T_{ab})} \\
&= \frac{-(T_{a_1}{}^2 + T_{b_1}{}^2 + T_{c_1}{}^2)}{3\,t_1 (\cot(T_{a_1 b_1}) + \cot(T_{a_1 c_1}) \cot(T_{b_1 c_1}))}
\end{aligned}\right.
$$

Zu den letzten Formeln lassen sich die analogen leicht finden; denn es ist:

$$
25.\left\{\begin{aligned}
-t &= \frac{\frac{9}{16} t^2}{T_{a_1} \cot(t_{12}) + T_{b_1} \cot(t_{13}) + T_{c_1} \cot(t_{14})} \\
&= \frac{\frac{1}{8}(\delta_1{}^2 + \delta_2{}^2 + \delta_3{}^2 - 9\,t_1{}^2)}{\Delta_1 \cot(\delta_{23}) + \Delta_2 \cot(\delta_{13}) + \Delta_3 \cot(\delta_{12})} \\
&= \frac{-\frac{9}{32}(t_2{}^2 + t_3{}^2 + t_4{}^2 - t_1{}^2)}{T_a \cot(t_{34}) + T_b \cot(t_{24}) + T_c \cot(t_{23})} \\
&= \frac{\frac{9}{32} c\, t_1{}^2 + t_2{}^2 + t_3{}^2 + t_4{}^2) - \frac{27}{16} t_1{}^2}{T_2 \cot(b_1 c_1) + T_3 \cot(a_1 c_1) + T_4 \cot(a_1 b_1)} \\
&= \frac{-(a^2 + b^2 + c^2)}{4\,T_1 (\cot(ab) + \cot(ac) + \cot(bc))}.
\end{aligned}\right.
$$

Bei Entwickelung dieser Formeln erhält man auch noch die Ausdrücke:

$$
26.\left\{\begin{aligned}
0 &= \delta_1 \cot(T_{aa_1}) + \delta_2 \cot(T_{bb_1}) + \delta_3 \cot(T_{cc_1}) \\
0 &= \Delta_1 \cot(aa_1) + \Delta_2 \cot(bb_1) + \Delta_3 \cot(cc_1)
\end{aligned}\right.
$$

Man führe ferner folgende Hülfswinkel ein:

$$
27.\left\{\begin{aligned}
&2\,bb_1\,cc_1 \cos\alpha = -a^2 a_1{}^2 + b^2 b_1{}^2 + c^2 c_1{}^2 \\
&\qquad 2 T_b T_{b_1} T_c T_{c_1} \cos A = -T_a{}^2 T_{a_1}{}^2 + T_b{}^2 T_{b_1}{}^2 + T_c{}^2 T_{c_1}{}^2 \\
&2\,aa_1\,cc_1 \cos\beta = a^2 a_1{}^2 - b^2 b_1{}^2 + c^2 c_1{}^2 \\
&\qquad 2 T_a T_{a_1} T_c T_{c_1} \cos B = T_a{}^2 T_{a_1}{}^2 - T_b{}^2 T_{b_1}{}^2 + T_c{}^2 T_{c_1}{}^2 \\
&2\,aa_1\,bb_1 \cos\gamma = a^2 a_1{}^2 + b^2 b_1{}^2 - c^2 c_1{}^2 \\
&\qquad 2 T_a T_{a_1} T_b T_{b_1} \cos\Gamma = T_a{}^2 T_{a_1}{}^2 + T_b{}^2 T_{b_1}{}^2 - T_c{}^2 T_{c_1}{}^2
\end{aligned}\right.
$$

$$28.\left\{\begin{array}{l}2\,bb_1\,cc_1\cos\alpha' = -a^2\delta_1{}^2 + b^2c_1{}^2 + b_1{}^2c^2\\ \qquad 2T_bT_{b_1}T_cT_{c_1}\cos A' = -T_a{}^2\Delta_1{}^2 + T_b{}^2T_c{}^2 + T_{b_1}{}^2T_{c_1}{}^2\\ 2\,aa_1\,cc_1\cos\beta' = -b^2\delta_2{}^2 + a^2c_1{}^2 + a_1{}^2c^2\\ \qquad 2T_aT_{a_1}T_cT_{c_1}\cos B' = -T_b{}^2\Delta_2{}^2 + T_a{}^2T_c{}^2 + T_{a_1}{}^2T_{c_1}{}^2\\ 2\,aa_1\,bb_1\cos\gamma' = -c^2\delta_3{}^2 + a^2b_1{}^2 + a_1{}^2b^2\\ \qquad 2T_aT_{a_1}T_bT_{b_1}\cos\Gamma' = -T_c{}^2\Delta_3{}^2 + T_a{}^2T_b{}^2 + T_{a_1}{}^2T_{b_1}{}^2\end{array}\right.$$

$$29.\left\{\begin{array}{l}2\,bb_1\,cc_1\cos\alpha'' = -a_1{}^2\delta_1{}^2 + b^2c^2 + b_1{}^2c_1{}^2\\ \qquad 2T_bT_{b_1}T_cT_{c_1}\cos A'' = -T_{a_1}{}^2\Delta_1{}^2 + T_b{}^2T_{c_1}{}^2 + T_{b_1}{}^2T_c{}^2\\ 2\,aa_1\,cc_1\cos\beta'' = -b_1{}^2\delta_2{}^2 + a^2c^2 + a_1{}^2c_1{}^2\\ \qquad 2T_aT_{a_1}T_cT_{c_1}\cos B'' = -T_{b_1}{}^2\Delta_2{}^2 + T_a{}^2T_{c_1}{}^2 + T_{a_1}{}^2T_c{}^2\\ 2\,aa_1\,bb_1\cos\gamma'' = -c_1{}^2\delta_3{}^2 + a^2b^2 + a_1{}^2b_1{}^2\\ \qquad 2T_aT_{a_1}T_bT_{b_1}\cos\Gamma'' = -T_{c_1}{}^2\Delta_3{}^2 + T_a{}^2T_{b_1}{}^2 + T_{a_1}{}^2T_b{}^2,\end{array}\right.$$

so ist auch:

$$30.\left\{\begin{array}{l}\cos(12) = \dfrac{\cos\alpha - \cos(bc)\cos(b_1c_1)}{\sin(bc)\sin(b_1c_1)} = \dfrac{\cos\alpha' - \cos(bc)\cos(b_1c_1)}{-\sin(bc)\sin(b_1c_1)}\\ \cos(34) = \dfrac{\cos\alpha - \cos(bc_1)\cos(b_1c)}{\sin(bc_1)\sin(b_1c)} = \dfrac{\cos\alpha'' - \cos(bc_1)\cos(b_1c)}{-\sin(bc_1)\sin(b_1c)}\end{array}\right.$$

$$31.\left\{\begin{array}{l}\cos(13) = \dfrac{\cos(bc)\cos(bc_1) - \cos(cc_1)}{\sin(bc)\sin(bc_1)}\\ \cos(24) = \dfrac{\cos(b_1c)\cos(b_1c_1) - \cos(cc_1)}{\sin(b_1c)\sin(b_1c_1)}\\ \cos(14) = \dfrac{\cos(bb_1) + \cos(bc)\cos(b_1c)}{\sin(bc)\sin(b_1c)}\\ \cos(23) = \dfrac{\cos(bb_1) + \cos(b_1c_1)\cos(bc_1)}{\sin(b_1c_1)\sin(bc_1)}\end{array}\right.$$

Da nun zugleich

$$32.\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha = \cos(bc)\cos(b_1c_1) + \cos(bc_1)\cos(b_1c) + \cos(bb_1)\cos(cc_1)\\ \cos\alpha' = \cos(bc)\cos(b_1c_1) - \cos(bc_1)\cos(b_1c) - \cos(bb_1)\cos(cc_1)\\ \cos\alpha'' = -\cos(bc)\cos(b_1c_1) + \cos(bc_1)\cos(b_1c) - \cos(bb_1)\cos(cc_1)\end{array}\right.$$

ist, so lassen sich die 6 Keile je zweier Seitenflächen aus den 6 ebenen Winkeln je zweier Paare von Gegenkanten unmittelbar bestimmen. Uebrigens ist auch analog:

$$33.\left\{\begin{array}{l}\cos(t_{12}) = \dfrac{\cos A - \cos(T_{bc})\cos(T_{b_1c_1})}{-\sin(T_{bc})\sin(T_{b_1c_1})} = \dfrac{\cos A'' - \cos(T_{bc})\cos(T_{b_1c_1})}{\sin(T_{bc})\sin(T_{b_1c_1})}\\ \cos(t_{34}) = \dfrac{\cos A - \cos(T_{bc_1})\cos T_{b_1c}}{-\sin(T_{bc_1})\sin(T_{b_1c})} = \dfrac{\cos A' - \cos(T_{bc_1})\cos(T_{b_1c})}{\sin(T_{bc_1})\sin(T_{b_1c})}\\ \cos(t_{13}) = \dfrac{\cos(T_{b_1c})\cos(T_{b_1c_1}) + \cos(T_{cc_1})}{\sin(T_{b_1c})\sin(T_{b_1c_1})}\\ \cos(t_{24}) = \dfrac{\cos(T_{bc})\cos(T_{bc_1}) + \cos(T_{cc_1})}{\sin(T_{bc})\sin(T_{bc_1})}\\ \cos(t_{14}) = \dfrac{\cos(T_{b_1c_1})\cos(T_{b_1c}) - \cos(T_{bb_1})}{\sin(T_{b_1c_1})\sin(T_{b_1c})}\\ \cos(t_{23}) = \dfrac{\cos(T_{bc})\cos(T_{b_1c}) - \cos(T_{bb_1})}{\sin(T_{bc})\sin(T_{b_1c})}\end{array}\right.$$

und

$$34.\begin{cases} \cos A = \cos(T_{bc})\cos(T_{b_1c_1}) + \cos(T_{bc_1})\cos(T_{b_1c}) \\ \qquad\qquad + \cos(T_{bb_1})\cos(T_{cc_1}) \\ \cos A' = -\cos(T_{bc})\cos(T_{b_1c_1}) + \cos(T_{bc_1})\cos(T_{b_1c}) \\ \qquad\qquad - \cos(T_{bb_1})\cos(T_{cc_1}) \\ \cos A'' = \cos(T_{bc})\cos(T_{b_1c_1}) - \cos(T_{bc_1})\cos(T_{b_1c}) \\ \qquad\qquad - \cos(T_{bb_1})\cos(T_{cc_1}) \end{cases}$$

Zugleich erhält man:

$$35.\begin{cases} \cos(\Delta_{12}) = \dfrac{\cos\gamma' + \cos(aa_1)\cos(bb_1)}{\sin(aa_1)\sin(bb_1)} = -\dfrac{\cos\gamma'' + \cos(aa_1)\cos(bb_1)}{\sin(aa_1)\sin(bb_1)} \\ \cos(\Delta_{13}) = \dfrac{\cos\beta' + \cos(aa_1)\cos(cc_1)}{\sin(aa_1)\sin(cc_1)} = -\dfrac{\cos\beta'' + \cos(aa_1)\cos(cc_1)}{\sin(aa_1)\sin(cc_1)} \\ \cos(\Delta_{23}) = \dfrac{\cos\alpha' + \cos(bb_1)\cos(cc_1)}{\sin(bb_1)\sin(cc_1)} = -\dfrac{\cos\alpha'' + \cos(bb_1)\cos(cc_1)}{\sin(bb_1)\sin(cc_1)} \\ \cos(\delta_{12}) = \dfrac{\cos\Gamma' + \cos(T_{aa_1})\cos(T_{bb_1})}{\sin(T_{aa_1})\sin(T_{bb_1})} = -\dfrac{\cos\Gamma'' + \cos(T_{aa_1})\cos(T_{bb_1})}{\sin(T_{aa_1})\sin(T_{bb_1})} \\ \cos(\delta_{13}) = \dfrac{\cos B' + \cos(T_{aa_1})\cos(T_{cc_1})}{\sin(T_{aa_1})\sin(T_{cc_1})} = -\dfrac{\cos B'' + \cos(T_{aa_1})\cos(T_{bb_1})}{\sin(T_{aa_1})\sin(T_{bb_1})} \\ \cos(\delta_{23}) = \dfrac{\cos A' + \cos(T_{bb_1})\cos(T_{cc_1})}{\sin(T_{bb_1})\sin(T_{cc_1})} = -\dfrac{\cos A'' + \cos(T_{bb_1})\cos(T_{cc_1})}{\sin(T_{bb_1})\sin(T_{cc_1})} \end{cases}$$

Ferner aber wird auch:

$$36.\begin{cases} \cos(aa_1) = \dfrac{\cos(13)\cos(24) - \cos(14)\cos(23)}{\sin(12)\sin(34)} \\ \cos(bb_1) = \dfrac{\cos(14)\cos(23) - \cos(12)\cos(34)}{\sin(13)\sin(24)} \\ \cos(cc_1) = \dfrac{\cos(12)\cos(34) - \cos(13)\cos(24)}{\sin(14)\sin(23)} \\ \cos(T_{aa_1}) = \dfrac{\cos(t_{13})\cos(t_{24}) - \cos(t_{14})\cos(t_{23})}{\sin(t_{12})\sin(t_{34})} \\ \cos(T_{bb_1}) = \dfrac{\cos(t_{14})\cos(t_{23}) - \cos(t_{12})\cos(t_{34})}{\sin(t_{13})\sin(t_{24})} \\ \cos(T_{cc_1}) = \dfrac{\cos(t_{12})\cos(t_{34}) - \cos(t_{13})\cos(t_{24})}{\sin(t_{14})\sin(t_{23})} \end{cases}$$

Für die Grössen Φ und φ erhält man nunmehr:

$$37.\begin{cases} \Phi_a^2 = \tfrac{1}{4}P^2\delta_1^2 + 8T_bT_{b_1}T_cT_{c_1}\cos A = P^2a^2 + 8T_bT_{b_1}T_cT_{c_1}\cos A' \\ \qquad = P^2a_1^2 + 8T_bT_{b_1}T_cT_{c_1}\cos A'' \\ \varphi_a^2 = 16\Delta_1^2 + 8bb_1cc_1\cos\alpha = 8^2T_a^2 + 8bb_1cc_1\cos\alpha' \\ \qquad = 8^2T_{a_1}^2 + 8bb_1cc_1\cos\alpha'' \end{cases}$$

$$38.\begin{cases} \Phi_a^2 + \Phi_b^2 + \Phi_c^2 = \tfrac{1}{4}P^2(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) \\ \qquad + 4(T_a^2T_{a_1}^2 + T_b^2T_{b_1}^2 + T_c^2T_{c_1}) \\ \varphi_a^2 + \varphi_b^2 + \varphi_c^2 = 16(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2) \\ \qquad + 4(a^2a_1^2 + b^2b_1^2 + c^2c_1^2) \end{cases}$$

Führt man endlich noch die Hülfswinkel Θ und ϑ ein, so dass

$$39.\left\{\cos\Theta_1 = \frac{-\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}{2\Delta_2\Delta_3} \text{ und } \cos\vartheta_1 = \frac{-\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}{2\delta_2\delta_3}\right.$$

ist, so findet man auch noch:

$$40. \begin{cases} \cos\Theta_1 = \dfrac{\cos\alpha + \cos(bb_1)\cos(cc_1)}{\sin(bb_1)\sin(cc_1)}, \quad \cos\vartheta_1 = \dfrac{\cos A + \cos(T_{bb_1})\cos(T_{cc_1})}{\sin(T_{bb_1})\sin(T_{cc_1})}. \end{cases}$$

Die geometrische Bedeutung der Grössen Θ und ϑ leuchtet von selbst ein. Eben so lässt sich aber auch den Grössen $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$ $A\ A'\ A''$ u. s. w. eine geometrische Bedeutung abgewinnen. Sind z. B. $a\ b\ c$ die drei Grundkanten eines dreiseitigen Prisma und $a_1\ b_1\ c_1$ die zu denselben gehörigen Höhen der Seitenparallelogramme des Prisma, so sind $\alpha\ \beta\ \gamma$ die diesen letzteren der Reihe nach gegenüberliegenden Keile der Seitenflächen u. s. w.

Das Vorstehende wird genügen, auf die trigonometrischen Relationen, welche das Tetraeder darbietet, aufmerksam zu machen. Die hier mitgetheilten Ausdrücke reichen bereits zur Lösung einer grossen Menge von Aufgaben hin, und sind dabei im Ganzen sehr elegant. Ihre Ableitung ist übrigens nicht gerade schwierig, auf dem gewöhnlichen Wege jedoch zum grössten Theil höchst umständlich und langweilig. Ich habe dieselben auf eine sehr schnelle Weise mittelst ein Paar allgemeiner Theoreme der Trigonometrie gefunden, die, so viel ich weiss, noch gänzlich unbekannt sind und von mir an einem anderen Orte werden mitgetheilt werden.

II.

Weitere Berechnung verschiedener auf das Kreisverhältniss π begründeter Zahlen.

Von dem

Herrn Professor Dr. G. Paucker

zu Mitau.

Das umgekehrte Kreisverhältniss $\frac{1}{\pi}$ ist von Euler Introd. in Anal. Infin. I. §. 198 auf 36 Stellen angegeben. Nur ist daselbst die 25ste Stelle durch einen Druckfehler unrichtig, und statt 9 muss man 5 lesen. Hier folgt diese Zahl auf 140 Stellen, nach dem Vegaschen Werthe von π berechnet.

Der Durchmesser des Kreises ist gleich dem Umfange multiplicirt mit $\frac{1}{\pi}$, auch ist die Oberfläche der Kugel gleich dem Quadrate des Umfangs multiplicirt mit $\frac{1}{\pi}$.

$$\frac{1}{\pi} = 0,3183098 \quad 8618379 \quad 0671537 \quad 7675267$$
$$4502872 \quad 4068919 \quad 2914809 \quad 1289749$$
$$5334688 \quad 1177935 \quad 9526845 \quad 3070180$$
$$2276055 \quad 3250617 \quad 1912145 \quad 6854535$$
$$1591607 \quad 3785823 \quad 6922291 \quad 5730277$$

Die Kreisfläche ist gleich dem Quadrat des Durchmessers multiplicirt mit $\frac{1}{4}\pi$.

$$\tfrac{1}{4}\pi = 0,7853981 \quad 6339744 \quad 8309615 \quad 6608458$$
$$1987572 \quad 1049292 \quad 3498437 \quad 76$$

Der körperliche Inhalt der Kugel ist gleich dem Cubus des Durchmessers multiplicirt mit $\frac{1}{6}\pi$.

$$\tfrac{1}{6}\pi = 0,5235987 \quad 7559829 \quad 8873077 \quad 1072305$$
$$4658381 \quad 4032861 \quad 5065625 \quad 17$$

Die Kreisfläche ist gleich dem Quadrat des Umfangs multiplicirt mit $\frac{1}{4\pi}$.

$$\frac{1}{4\pi} = 0,0795774 \quad 7154594 \quad 7667884 \quad 4418816$$
$$8625718 \quad 1017229 \quad 8228702 \quad 28$$

Das Quadrat des Verhältnisses ~~des~~ Durchmessers zum Umfange ist

$$\frac{1}{\pi^2} = 0,1013211 \quad 8364233 \quad 7771443 \quad 8794632$$
$$0972763 \quad 8904358 \quad 7746722 \quad 46$$

Der körperliche Inhalt der Kugel ist gleich dem Cubus des Umfangs multiplcirt mit $\frac{1}{6\pi^2}$.

$$\frac{1}{6\pi^2} = 0,0168868 \quad 6394038 \quad 9628573 \quad 9799105$$
$$3495460 \quad 6484059 \quad 7957787 \quad 07$$

Der Umfang der Kugel ist gleich der Quadratwurzel der Oberfläche multiplicirt mit $\sqrt{\pi}$.

$$\sqrt{\pi} = 1,7724538 \quad 5090551 \quad 6027298 \quad 1674833$$
$$4114518 \quad 2797549 \quad 4561223 \quad 8712821$$
$$3807789 \quad 8529112 \quad 8459103 \quad 2181374$$
$$9506567 \quad 3854466 \quad 5416226 \quad 8236242$$
$$8257066 \quad 6236152 \quad 8657244 \quad 2261088$$

Der Durchmesser der Kugel ist gleich der Quadratwurzel der Oberfläche multiplicirt mit $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$.

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0,5641895 \quad 8354775 \quad 6286948 \quad 0794515$$
$$6077258 \quad 5844050 \quad 6293289 \quad 9885684$$
$$4085721 \quad 709$$

Der Umfang des Kreises ist gleich der Quadratwurzel der Kreisfläche multiplicirt mit $2\sqrt{\pi}$.

$$2\sqrt{\pi} = 3,5449077 \quad 0181103 \quad 2054596 \quad 3349666$$
$$8229036 \quad 5595098 \quad 9122447 \quad 74$$

Der Durchmesser des Kreises ist gleich der Quadratwurzel der Kreisfläche multiplicirt mit $2\sqrt{\frac{1}{\pi}}$.

$$2\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 1{,}1283791\ 6709551\ 2573896\ 1589031\ 2154517\ 1688101\ 2586579\ 9771368\ 8171443\ 418$$

Der körperliche Inhalt der Kugel ist gleich dem Cubus der Quadratwurzel der Oberfläche multiplicirt mit $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}0940315\ 9725795\ 9381158\ 0132419\ 2679543\ 0974008\ 4382214\ 9980947\ 4014286\ 951$$

$$\sqrt[3]{6} = 1{,}8171205\ 9283213\ 9658891\ 2117563\ 2726050\ 2428210\ 4631412\ 1967148$$

$$\sqrt[3]{36} = 3{,}3019272\ 4889462\ 6683874\ 6099524\ 0908495\ 6846884\ 6443184\ 9333697$$

$$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}4645918\ 8756152\ 3263020\ 1425272\ 6379039\ 1738596\ 8556279\ 37$$

$$\sqrt[3]{\pi^2} = 2{,}1450293\ 9711102\ 5600077\ 4441009\ 4123559\ 7486667\ 3654715\ 56$$

Der Durchmesser der Kugel ist gleich der Cubikwurzel aus ihrem körperlichen Inhalt, multiplicirt mit $\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$.

$$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = 1{,}2407009\ 8179880\ 0033336\ 0136240\ 9555633\ 4701572\ 4003720\ 0$$

Der Umfang der Kugel ist gleich der Cubikwurzel aus ihrem körperlichen Inhalt, multiplicirt mit $\sqrt[3]{6\pi^2}$.

$$\sqrt[3]{6\pi^2} = 3{,}8977770\ 8972075\ 3958963\ 4709177\ 9985674\ 4015612\ 2958390\ 56$$

Die Oberfläche der Kugel ist gleich dem Quadrat der Cubikwurzel aus ihrem körperlichen Inhalt, multiplicirt mit $\sqrt[3]{36\pi}$.

$$\sqrt[3]{36\pi} = 4{,}8359758\ 6204940\ 8922150\ 9005399\ 1785481\ 6833842\ 2169715\ 85$$

III.

Neue Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades mittelst der goniometrischen Formeln und Tafeln.

Vom

Herausgeber.

Die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades mittelst der goniometrischen Formeln und Tafeln, welche ich in diesem kleinen Aufsatze mittheilen werde, scheint noch nicht bekannt zu sein, empfiehlt sich aber durch die Kürze und Leichtigkeit der Rechnung, welche dieselbe in Anspruch nimmt, und durch andere Vorzüge vor den sonst gewöhnlichen Methoden gar sehr.

Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung sei

$$x^2 - mx + n = 0.$$

Unter der vorläufigen Voraussetzung nun, dass beide Wurzeln reell sind, können wir dieselben unter der Form tang φ und tang φ_1 darstellen. Dann ist bekanntlich

$$\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\varphi_1 = m,\ \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi_1 = n.$$

Weil, wie die Goniometrie lehrt,

$$\operatorname{tang}(\varphi+\varphi_1) = \frac{\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\varphi_1}{1-\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi_1}$$

ist; so ist

$$\operatorname{tang}(\varphi+\varphi_1) = \frac{m}{1-n},\ \cot(\varphi+\varphi_1) = \frac{1-n}{m}.$$

Ferner ist

$$1+\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{\cos(\varphi-\varphi_1)}{\cos\varphi\cos\varphi_1} = 1+n,$$

$$\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{\sin(\varphi+\varphi_1)}{\cos\varphi\cos\varphi_1} = m;$$

woraus sich durch Division

$$\frac{\cos(\varphi-\varphi_1)}{\sin(\varphi+\varphi_1)} = \frac{1+n}{m},\ \cos(\varphi-\varphi_1) = \frac{1+n}{m}\sin(\varphi+\varphi_1)$$

ergiebt. Also hat man zur Berechnung von φ und φ_1 die beiden Gleichungen

$$\operatorname{tang}(\varphi+\varphi_1) = \frac{m}{1-n},\ \cos(\varphi-\varphi_1) = \frac{1+n}{m}\sin(\varphi+\varphi_1)$$

oder

$$\cot(\varphi+\varphi_1)=\frac{1-n}{m},\quad \cos(\varphi-\varphi_1)=\frac{1+n}{m}\sin(\varphi+\varphi_1).$$

Hat man nämlich mittelst dieser Formeln $\varphi+\varphi_1$ und $\varphi-\varphi_1$ gefunden, so erhält man φ und φ_1 auf bekannte Weise mittelst der Ausdrücke

$$\varphi=\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)+\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1),\quad \varphi_1=\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)-\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1).$$

Wir haben oben gesagt, dass wir von der vorläufigen Voraussetzung, dass beide Wurzeln der aufzulösenden Gleichung reell seien, ausgehen wollten, bemerken aber, dass man bei der wirklichen Rechnung diese Voraussetzung gar nicht zum Grunde zu legen braucht, indem die Auflösung selbst jederzeit ein Kriterium enthält, mittelst dessen man mit grösster Leichtigkeit entscheiden kann, ob die beiden gesuchten Wurzeln reell sind oder nicht.

Wenn nämlich der absolute Werth von $\cos(\varphi-\varphi_1)$, welchen man durch die obige Auflösung findet, nicht grösser als die Einheit ist, so sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung offenbar beide reell, wie die Auflösung selbst zeigt.

Wenn aber der in Rede stehende absolute Werth von $\cos(\varphi-\varphi_1)$ die Einheit übersteigt, so sind die beiden Wurzeln der gegebenen Gleichung imaginär, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann.

Wendet man auf die gegebene quadratische Gleichung die gewöhnliche algebraische Auflösung an, so erhält man

$$x=\tfrac{1}{2}m\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}m^2-n}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\cos(\varphi-\varphi_1)^2=\frac{(1+n)^2}{m^2}\sin(\varphi+\varphi_1)^2,$$

$$\sin(\varphi+\varphi_1)^2=\frac{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi_1)^2}{1+\operatorname{tang}(\varphi+\varphi_1)^2}=\frac{m^2}{m^2+(1-n)^2},$$

und folglich

$$\cos(\varphi-\varphi_1)^2=\frac{(1+n)^2}{m^2+(1-n)^2}.$$

Ist nun der absolute Werth von $\cos(\varphi-\varphi_1)$ grösser als die Einheit, so ist

$$\frac{(1+n)^2}{m^2+(1-n)^2}>1,$$

also

$$(1+n)^2>m^2+(1-n)^2 \text{ oder } m^2+(1-n)^2-(1+n)^2<0,$$

woraus sich, wenn man die Quadrate von $1-n$ und $1+n$ entwickelt, sogleich

$$m^2-4n<0 \text{ oder } \tfrac{1}{4}m^2-n<0$$

ergiebt, und folglich mittelst des Obigen erhellet, dass die beiden Wurzeln der gegebenen quadratischen Gleichung imaginär sind, wie behauptet wurde.

Sind aber die beiden Wurzeln imaginär, so stellt man dieselben am besten unter der Form

$$\varrho\,(\cos\Theta\pm\sin\Theta\sqrt{-1})$$

dar, welches bekanntlich immer möglich ist. Dann ist

$$x^2-mx+n=(x-\varrho\cos\Theta-\varrho\sin\Theta\sqrt{-1})\,(x-\varrho\cos\Theta+\varrho\sin\Theta\sqrt{-1}),$$

d. i.

$$x^2 - mx + n = (x - \varrho\cos\Theta)^2 + \varrho^2 \sin\Theta^2 = x^2 - 2\varrho x \cos\Theta + \varrho^2,$$

und folglich

$$\varrho^2 = n,\ 2\varrho\cos\Theta = m,$$

also

$$\varrho = \sqrt{n},\ \cos\Theta = \frac{m}{2\varrho} = \frac{m}{2\sqrt{n}};$$

mittelst welcher Formeln man ϱ und Θ leicht berechnen kann. Da man indess vorzüglich die Grössen $\varrho\cos\Theta$ und $\varrho\sin\Theta$ zu kennen wünscht, so kann man die Formeln auch zweckmässig unter der Form

$$\cos\Theta = \frac{m}{2\sqrt{n}},\ \varrho\cos\Theta = \tfrac{1}{2}m,\ \varrho\sin\Theta = \sin\Theta\,.\sqrt{n}$$

darstellen, unter welcher sie eine sehr bequeme Rechnung gestatten, wie sogleich in die Augen fallen wird.

Hat man die allgemeine Gleichung

$$\varkappa x^2 - \lambda x + \mu = 0$$

aufzulösen, so ist im Vorhergehenden

$$m = \frac{\lambda}{\varkappa},\ n = \frac{\mu}{\varkappa}$$

zu setzen, wodurch man leicht

$$\tang(\varphi + \varphi_1) = \frac{\lambda}{\varkappa - \mu},\ \cos(\varphi - \varphi_1) = \frac{\varkappa + \mu}{\lambda}\sin(\varphi + \varphi_1)$$

oder

$$\cot(\varphi + \varphi_1) = \frac{\varkappa - \mu}{\lambda},\ \cos(\varphi - \varphi_1) = \frac{\varkappa + \mu}{\lambda}\sin(\varphi + \varphi_1)$$

erhält. Das Kriterium, mittelst dessen sich entscheiden lässt, ob die Wurzeln beide reell oder imaginär sind, ist dasselbe wie oben.

Sind die beiden Wurzeln imaginär, so hat man zu ihrer Berechnung die Formeln

$$\cos\Theta = \frac{\lambda}{2\varkappa}\sqrt{\frac{\varkappa}{\mu}},\ \varrho\cos\Theta = \frac{\lambda}{2\varkappa},\ \varrho\sin\Theta = \sin\Theta\,.\sqrt{\frac{\mu}{\varkappa}}.$$

Um die im Vorhergehenden entwickelte Methode auf ein Beispiel anzuwenden, sei die Gleichung

$$7{,}285\,x^2 + 19{,}749\,x - 115{,}638 = 0$$

gegeben. In diesem Falle ist

$$\begin{aligned}
\varkappa &= 7{,}285\\
\lambda &= -\ 19.749\\
\mu &= -\ 115.638\\
\varkappa - \mu &= 122.923\\
\varkappa + \mu &= -\ 108.352\\
\log(\varkappa - \mu) &= 2.0896332\\
\log(\varkappa + \mu) &= 2.0348409\ n\\
cl\ \log\lambda &= \underline{8.7044549\ n}\\
\log\cot(\varphi + \varphi_1) &= 10{,}7940881\ n\\
\log\sin(\varphi + \varphi_1) &= 9{,}2003780\ n\\
\log\cos(\varphi - \varphi_1) &= 9{,}9396738\ n\\
\varphi + \varphi_1 &= -\ 9^{\circ}.\ 7'.\ 38'',03\\
\varphi - \varphi_1 &= \underline{150.\ 29.\ 40.75}\\
2\varphi &= 141.\ 22.\ 2{,}72\\
2\varphi_1 &= -\ 159.\ 37.\ 18{,}78
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= 70^\circ.\ 41'.\ \ 1'',36\\
\varphi_1 &= -79.\ \ 48.\ \ 39,39\\
\log\,\mathrm{tang}\ \varphi &= 0,4552944\\
\log\,\mathrm{tang}\ \varphi_1 &= 0,7453764\ n\\
\mathrm{tang}\ \varphi &= 2,852952\\
\mathrm{tang}\ \varphi_1 &= -5,563863
\end{aligned}$$

Diese beiden Werthe von tang φ und tang φ_1 sind die gesuchten Wurzeln. Zur Probe hat man

$$\mathrm{tang}\ \varphi + \mathrm{tang}\ \varphi_1 = 2,710911 \text{ und } \frac{\lambda}{\varkappa} = 2,710913.$$

Die Leichtigkeit und Kürze der obigen Rechnung wird einem Jeden sogleich von selbst in die Augen fallen. Wenn $\varphi - \varphi_1$ der Null sehr nahe kommt, so kann $\varphi - \varphi_1$ mittelst der Formel

$$\cos\,(\varphi - \varphi_1) = \frac{\varkappa + \mu}{\lambda} \sin\,(\varphi + \varphi_1)$$

bekanntlich nicht mit der erforderlichen Genauigkeit gefunden werden. In einem solchen Falle kann man sich aber auf folgende Art helfen Man berechne den Hülfswinkel ψ mittelst der Formel

$$\mathrm{tang}\ \psi = \frac{\varkappa + \mu}{\lambda} \sin\,(\varphi + \varphi_1).$$

Dann ist

$$\cos\,(\varphi - \varphi_1) = \mathrm{tang}\ \psi,$$

und folglich

$$1 - \cos\,(\varphi - \varphi_1) = 1 - \mathrm{tang}\ \psi,\ 1 + \cos\,(\varphi - \varphi_1) = 1 + \mathrm{tang}\ \psi;$$

also

$$\frac{1 - \cos\,(\varphi - \varphi_1)}{1 + \cos\,(\varphi - \varphi_1)} = \frac{1 - \mathrm{tang}\ \psi}{1 + \mathrm{tang}\ \psi},$$

d. i. nach bekannten Formeln

$$\mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)^2 = \mathrm{tang}\ (45^\circ - \psi),$$

$$\text{also } \mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) = \sqrt{\mathrm{tang}\ (45^\circ - \psi)}.$$

In diesem Falle sind folglich die Formeln, durch welche die Aufgabe aufgelöst wird,

$$\mathrm{tang}\ (\varphi + \varphi_1) = \frac{\lambda}{\varkappa - \mu},\ \mathrm{tang}\ \psi = \frac{\varkappa + \mu}{\lambda} \sin\,(\varphi + \varphi_1),$$

$$\mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) = \sqrt{\mathrm{tang}\ (45^\circ - \psi)}$$

oder

$$\cot\,(\varphi + \varphi_1) = \frac{\varkappa - \mu}{\lambda},\ \mathrm{tang}\ \psi = \frac{\varkappa + \mu}{\lambda} \sin\,(\varphi + \varphi_1),$$

$$\mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) = \sqrt{\mathrm{tang}\ (45^\circ - \psi)},$$

und die Rechnung wird nun allerdings etwas, aber doch nicht bedeutend weitläufiger.

Auf Gleichungen von der Form

$$\frac{a + bx}{a_1 + b_1 x} = \frac{\alpha + \beta x}{\alpha_1 + \beta_1 x}$$

wird man bekanntlich häufig bei der Auflösung von Aufgaben geführt, und diese Gleichungen führen, gehörig entwickelt, jederzeit zu einer quadratischen Gleichung, nämlich im vorliegenden Falle zu der Gleichung

$$(b\beta_1 - b_1\beta)\ x^2 + \{(a\beta_1 - a_1\beta) - (b\alpha_1 - b_1\alpha)\}\ x + a\alpha_1 - a_1\alpha = 0.$$

Wendet man nun auf diese Gleichung die obige Auflösungsmethode an, so erhält man zur Bestimmung der Winkel φ und φ_1 die Formeln

$$\cot(\varphi+\varphi_1) = -\frac{(b\beta_1 - b_1\beta) - (a\alpha_1 - a_1\alpha)}{(a\beta_1 - a_1\beta) + (b\alpha_1 - b_1\alpha)},$$

$$\cos(\varphi-\varphi_1) = -\frac{(b\beta_1 - b_1\beta) + (a\alpha_1 - a_1\alpha)}{(a\beta_1 - a_1\beta) + (b\alpha_1 - b_1\alpha)} \sin(\varphi+\varphi_1),$$

mittelst welcher sich also die Winkel φ und φ_1, und folglich auch die beiden Wurzeln tang φ und tang φ_1 unmittelbar aus den acht gegebenen Coefficienten a, b, α, β und a_1, b_1, α_1, β_1 berechnen lassen. Die Berechnung der Grössen

$$a\alpha_1 - a_1\alpha,\ b\beta_1 - b_1\beta,\ a\beta_1 - a_1\beta,\ b\alpha_1 - b_1\alpha$$

könnte man sich noch durch die Einführung von Hülfswinkeln erleichtern, wobei wir aber hier nicht länger verweilen, da sich die zweckmässigste Methode einem Jeden leicht von selbst darbieten wird.

IV.

Ampère's Auflösung der Gleichungen des vierten Grades.

Nach Correspondance mathématique et physique publiée par A. Quetelet. T. IX. p. 147 frei bearbeitet von

dem Herausgeber.

Die gegebene von ihrem zweiten Gliede schon befreite Gleichung des vierten Grades sei

$$1.\quad x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

und p, q, r, s seien die vier Wurzeln dieser Gleichung, so hat man bekanntlich die vier folgenden Gleichungen:

$$2.\quad p + q + r + s = 0,$$

$$3.\quad pq + pr + ps + qr + qs + rs = a,$$

$$4.\quad pqr + pqs + prs + qrs = -b,$$

$$5.\quad pqrs = c.$$

Aus den Gleichungen 2. und 3. erhält man leicht:

$$6.\quad r + s = -(p + q),$$

$$7.\quad pq + rs = a - (p + q)(r + s);$$

und folglich, wenn man den Werth von $r+s$ aus der Gleichung 6. in die Gleichung 7. einführt:

$$8.\quad pq+rs=a+(p+q)^2.$$

Ferner ist nach 4.

$$pq(r+s)+rs(p+q)=-b,$$

und folglich wegen der Gleichung 6.

$$(p+q)(pq-rs)=b,$$

oder

$$9.\quad pq-rs=\frac{b}{(p+q)}.$$

Nach 8. und 9. ist nun

$$(pq+rs)^2=\{a+(p+q)^2\}^2,\ (pq-rs)^2=\frac{b^2}{(p+q)^2},$$

und folglich, wenn man die zweite Gleichung von der ersten subtrahirt,

$$4pqrs=\{a+(p+q)^2\}^2-\frac{b^2}{(p+q)^2};$$

also nach der Gleichung 5.

$$4c=\{a+(p+q)^2\}^2-\frac{b^2}{(p+q)^2},$$

oder nach gehöriger Entwickelung

$$10.\quad (p+q)^6+2a(p+q)^4+(a^2-4c)(p+q)^2-b^2=0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf $(p+q)^2$ als unbekannte Grösse vom dritten Grade, und $(p+q)^2$ lässt sich also mittelst derselben durch Auflösung einer Gleichung des dritten Grades bestimmen. Bezeichnen wir nun eine Wurzel dieser Gleichung des dritten Grades durch μ, so können wir $(p+q)^2=\mu$, und folglich

$$11.\quad p+q=\pm\sqrt{\mu},$$

also nach 6. mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$12.\quad r+s=\mp\sqrt{\mu}$$

setzen.

Nach 8., 9. und 11. ist nun

$$pq+rs=a+\mu,\ pq-rs=\pm\frac{b}{\sqrt{\mu}},$$

also

$$2pq=a+\mu\pm\frac{b}{\sqrt{\mu}},\quad 2rs=a+\mu\mp\frac{b}{\sqrt{\mu}},$$

und wir haben jetzt folglich zur Bestimmung von p und q die beiden Gleichungen

$$13.\quad p+q=\pm\sqrt{\mu},\ 2pq=a+\mu\pm\frac{b}{\sqrt{\mu}},$$

und zur Bestimmung von r und s die beiden Gleichungen

$$14.\quad r+s=\mp\sqrt{\mu},\ 2rs=a+\mu\mp\frac{b}{\sqrt{\mu}}.$$

Aus den beiden Gleichungen 13. ergiebt sich leicht

$$p+q=\pm\sqrt{\mu},\ (p-q)^2=-\mu-2\left(a\pm\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right),$$

und folglich entweder

$$p+q=\sqrt{\mu},\ p-q=\pm\sqrt{-\mu-2(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}})}$$

oder

$$p+q=-\sqrt{\mu},\ p-q=\pm\sqrt{-\mu-2(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}})};$$

also entweder

$$2p=\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}})},\ 2q=\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}})}$$

oder

$$2p=-\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}})},\ 2q=-\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}})}.$$

Aus den Gleichungen 14. ergiebt sich ganz ebenso respective

$$2r=-\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}})},\ 2s=-\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}})}$$

oder

$$2r=\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}})},\ 2s=\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}})}.$$

Also sind die doppelten Wurzeln unserer Gleichung des vierten Grades entweder

$$2p=\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}})},$$
$$2q=\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}})},$$
$$2r=-\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}})},$$
$$2s=-\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}})};$$

oder

$$2p=-\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}})},$$
$$2q=-\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}})},$$
$$2r=\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}})},$$
$$2s=\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}})}.$$

Da nun aber das zweite System von dem ersten offenbar nicht verschieden ist, so sind die doppelten Wurzeln

$$2p=\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}})},$$
$$2q=\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}})},$$
$$2r=-\sqrt{\mu}\pm\sqrt{-\mu-2(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}})},$$
$$2s=-\sqrt{\mu}\mp\sqrt{-\mu-2(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}})}.$$

Aber auch die obern und untern Vorzeichen in diesen Formeln liefern nicht zwei verschiedene Systeme von Wurzeln, und die doppelten Wurzeln unserer Gleichung sind also

$$2p=\sqrt{\mu}+\sqrt{-\mu-2\left(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$
$$2q=\sqrt{\mu}-\sqrt{-\mu-2\left(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$
$$2r=-\sqrt{\mu}+\sqrt{-\mu-2\left(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$
$$2s=-\sqrt{\mu}-\sqrt{-\mu-2\left(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}.$$

Folglich sind die vier Wurzeln unserer gegebenen Gleichung des vierten Grades

$$p=\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu}+\sqrt{-\mu-2\left(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\right\},$$
$$q=\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu}-\sqrt{-\mu-2\left(a+\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\right\},$$
$$r=-\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu}-\sqrt{-\mu-2\left(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\right\},$$
$$s=-\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu}+\sqrt{-\mu-2\left(a-\frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\right\}.$$

Weil jede cubische Gleichung bekanntlich mindestens eine reelle Wurzel hat, so kann man immer annehmen, dass μ eine reelle Grösse ist.

V.

Ueber die Bestimmung der Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden reellen oder imaginären Wurzeln der algebraischen Gleichungen.

Nach einer Abhandlung des Herrn Abbé Moigno in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. Fevrier 1840. p. 75. frei bearbeitet von dem

Herausgeber.

A.

Einige vorbereitende Sätze von den ganzen rationalen algebraischen Functionen und von den Gleichungen.

§. 1.

Erklärung. Wenn man jedes Glied einer ganzen rationalen algebraischen Function der veränderlichen Grösse x mit dem

Exponenten der in demselben enthaltenen Potenz von x multiplicirt, und diesen Exponenten der Potenz von x selbst um eine Einheit vermindert; so heisst die auf diese Weise aus der gegebenen Function erhaltene oder abgeleitete Function die erste derivirte Function der gegebenen Function, und soll, wenn $f(x)$ das Symbol der gegebenen Function ist, durch $f'(x)$ bezeichnet werden.

Für

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots. + a_n x^n$$

ist also, wenn man sich, wie dies in allen Fällen erforderlich ist, das erste constante Glied a_0 unter der Form $a_0 x^0$ dargestellt denkt, die erste derivirte Function

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + na_n x^{n-1},$$

und diese erste derivirte Function ist also immer eine ganze rationale algebraische Function von einem um eine Einheit niedrigeren Grade als die gegebene ganze rationale algebraische Function.

Die erste derivirte Function von $f'(x)$, ganz auf dieselbe Weise genommen wie vorher, heisst die zweite derivirte Function der gegebenen Function $f(x)$ und wird durch $f''(x)$ bezeichnet. Die erste derivirte Function von $f''(x)$ heisst die dritte derivirte Function von $f(x)$ und wird durch $f'''(x)$ bezeichnet. Die erste derivirte Function von $f'''(x)$ heisst die vierte derivirte Function von $f(x)$ und wird durch $f''''(x)$ bezeichnet. Ueberhaupt heisst die erste derivirte Function der $(k-1)$sten derivirten Function von $f(x)$ die $k$te derivirte Function von $f(x)$ und wird durch $f^{(k)}(x)$ bezeichnet.

§. 2.

Lehrsatz. Wenn $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function, und, indem C eine beliebige constante Grösse bezeichnet, $F(x) = Cf(x)$ ist; so ist jederzeit

$$F'(x) = Cf'(x).$$

Beweis. Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots. + a_n x^n,$$

und folglich nach der Voraussetzung

$$F(x) = a_0 C + a_1 Cx + a_2 Cx^2 + a_3 Cx^3 + \ldots + a_n Cx^n;$$

so ist nach §. 1.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1},$$

$$F'(x) = a_1 C + 2a_2 Cx + 3a_3 Cx^2 + \ldots + na_n Cx^{n-1},$$

also

$$F'(x) = C(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1}),$$

und folglich offenbar

$$F'(x) = Cf'(x),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 3.

Lehrsatz. Wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze rationale algebraische Functionen sind, und

$$F(x) = f(x) + \varphi(x)$$

ist; so ist jederzeit

$$F'(x) = f'(x) + \varphi'(x).$$

Beweis. Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n,$$
$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_\varkappa x^\varkappa,$$

wobei wir annehmen wollen, dass $n \overline{\overline{>}} \varkappa$ sei; so ist nach §. 1.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1},$$
$$\varphi'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \ldots + \varkappa\alpha_\varkappa x^{\varkappa-1},$$

und folglich

$$f'(x) + \varphi'(x)$$
$$= a_1 + \alpha_1 + 2(a_2 + \alpha_2)x + 3(a_3 + \alpha_3)x^2 + \ldots + \varkappa(a_\varkappa + \alpha_\varkappa)x^{\varkappa-1}$$
$$+ (\varkappa+1)a_{\varkappa+1}x^\varkappa + (\varkappa+2)a_{\varkappa+2}x^{\varkappa+1} + \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

Weil nun

$$F(x) = f(x) + \varphi(x)$$
$$= a_0 + \alpha_0 + (a_1 + \alpha_1)x + (a_2 + \alpha_2)x^2 + \ldots + (a_\varkappa + \alpha_\varkappa)x^\varkappa$$
$$+ a_{\varkappa+1}x^{\varkappa+1} + a_{\varkappa+2}x^{\varkappa+2} + \ldots + a_n x^n$$

ist; so erhellet die Richtigkeit des Satzes unmittelbar mittelst §. 1.

§. 4.

Erster Zusatz. Wenn $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, u. s. w. ganze rationale algebraische Functionen sind und

$$F(x) = f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \chi(x) + \ldots .$$

ist; so ist jederzeit

$$F'(x) = f'(x) + \varphi'(x) + \psi'(x) + \chi'(x) + \ldots .$$

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich sehr leicht durch eine successive Anwendung des vorigen Lehrsatzes.

§. 5.

Zweiter Zusatz. Wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze rationale algebraische Functionen sind und

$$F(x) = f(x) - \varphi(x)$$

ist; so ist jederzeit

$$F'(x) = f'(x) - \varphi'(x).$$

Nach der Voraussetzung und nach §. 3. ist

$$f(x) = F(x) + \varphi(x), \quad f'(x) = F'(x) + \varphi'(x),$$

also

$$F'(x) = f'(x) - \varphi'(x),$$

wie behauptet wurde.

§. 6.

Lehrsatz. Wenn $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function, und, indem μ eine positive ganze Zahl bezeichnet, $F(x) = x^\mu f(x)$ ist; so ist jederzeit

$$F'(x) = x^\mu f'(x) + \mu x^{\mu-1} f(x).$$

Beweis. Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n,$$
so ist nach der Voraussetzung
$$F(x) = a_0 x^\mu + a_1 x^{\mu+1} + a_2 x^{\mu+2} + \ldots + a_n x^{\mu+n},$$
und folglich nach §. 1.
$$F'(x) = \mu a_0 x^{\mu-1} + (\mu+1)a_1 x^\mu + (\mu+2)a_2 x^{\mu+1} + \ldots + (\mu+n)a_n x^{\mu+n-1}$$
$$= x^\mu(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1})$$
$$+ \mu x^{\mu-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n),$$
woraus der zu beweisende Satz unmittelbar erhellet.

§. 7.

Lehrsatz. Wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze rationale algebraische Functionen sind, und
$$F(x) = f(x)\,\varphi(x)$$
ist; so ist jederzeit
$$F'(x) = f(x)\,\varphi'(x) + \varphi(x)\,f'(x).$$

Beweis. Es sei
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n,$$
und folglich nach der Voraussetzung
$$F(x) = a_0\,\varphi(x) + a_1 x\varphi(x) + a_2 x^2\varphi(x) + \ldots + a_n x^n\varphi(x);$$
so ist nach §. 4., §. 2. und §. 6.
$$\begin{aligned} F'(x) = a_0\,\varphi'(x) &+ a_1\,\{x\varphi'(x) + 1\varphi(x)\} \\ &+ a_2\,\{x^2\varphi'(x) + 2x\varphi(x)\} \\ &+ a_3\,\{x^3\varphi'(x) + 3x^2\varphi(x)\} \\ &\qquad \text{u. s. w.} \\ &+ a_n\,\{x^n\varphi'(x) + nx^{n-1}\varphi(x)\} \end{aligned}$$
$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n)\,\varphi'(x)$$
$$+ (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1})\,\varphi(x),$$
woraus mittelst §. 1. der zu beweisende Satz unmittelbar erhellet.

§. 8.

Erster Zusatz. Wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze rationale algebraische Functionen sind, und
$$F(x) = f(x)\,\varphi(x)$$
ist; so ist jederzeit
$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Dieser Satz ergiebt sich unmittelbar aus §. 7., wenn man auf beiden Seiten der dort bewiesenen Gleichung durch $F(x) = f(x)\,\varphi(x)$ dividirt.

§. 9.

Zweiter Zusatz. Wenn $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, ... ganze rationale algebraische Functionen sind, und
$$F(x) = f(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)\,\chi(x) \ldots\ldots$$

ist; so ist jederzeit

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}+\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}+\frac{\chi'(x)}{\chi(x)}+\ldots\ldots$$

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich leicht durch eine successive Anwendung des unmittelbar vorhergehenden Satzes.

§. 10.

Lehrsatz. Unter der Voraussetzung, dass n eine positive ganze Zahl bezeichnet, sei $\varphi_n(x)=(x+a)^n$; so ist jederzeit

$$\varphi'_n(x)=n(x+a)^{n-1}.$$

Beweis. Weil

$$(x+a)^n=(x+a)\ (x+a)^{n-1},$$

d. i. in der eingeführten Bezeichnung

$$\varphi_n(x)=(x+a)\ \varphi_{n-1}\ (x),$$

und nach §. 1. die erste derivirte Function von $x+a$ der Einheit gleich ist; so ist nach §. 7.

$$\varphi'_n(x)=(x+a)\ \varphi'_{n-1}(x)+\varphi_{n-1}(x)$$

oder

$$\varphi'_n(x)=(x+a)\ \{\varphi'_{n-1}(x)+\varphi_{n-2}(x)\}.$$

Durch successive Anwendung dieser Relation erhält man

$$\begin{aligned}
\varphi'_1(x)&=1 &&=1(x+a)^0,\\
\varphi'_2(x)&=(x+a)\ \{\varphi'_1(x)+\varphi_0(x)\}&&=2(x+a)^1,\\
\varphi'_3(x)&=(x+a)\ \{\varphi'_2(x)+\varphi_1(x)\}&&=3(x+a)^2,\\
\varphi'_4(x)&=(x+a)\ \{\varphi'_3(x)+\varphi_2(x)\}&&=4(x+a)^3,\\
\varphi'_5(x)&=(x+a)\ \{\varphi'_4(x)+\varphi_3(x)\}&&=5(x+a)^4,
\end{aligned}$$

u. s. w.

Also ist offenbar für jedes positive ganze n

$$\varphi'_n(x)=n(x+a)^{n-1},$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 11.

Lehrsatz. Wenn $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function von x ist, und also $f(x+a)$ die ganze rationale algebraische Function von x bezeichnet, welche man aus $f(x)$ erhält, wenn man $x+a$ für x setzt; so wird die erste derivirte Function von $f(x+a)$ in Bezug auf x als veränderliche Grösse erhalten, wenn man in der ersten derivirten Function $f'(x)$ von $f(x)$ für x die Grösse $x+a$ setzt.

Beweis. Es sei

$$f(x)=a_0+a_1\ x+a_2\ x^2+a_3\ x^3+\ldots+a_n\ x^n,$$

und folglich

$$f'(x)=a_1+2a_2\ x+3a_3\ x^2+\ldots+na_n\ x^{n-1}.$$

Setzen wir nun $f(x+a)=\varphi(x)$, so ist

$$\varphi(x)=a_0+a_1\ (x+a)+a_2\ (x+a)^2+a_3\ (x+a)^3+\ldots \\ +a_n\ (x+a)^n,$$

und folglich nach §. 4., §. 2. und §. 10.

$$\varphi'(x) = a_1 + 2a_2(x+a) + 3a_3(x+a)^2 + \ldots + na_n(x+a)^{n-1}.$$

Weil nun die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens offenbar aus dem obigen $f'(x)$ erhalten wird, wenn man $x+a$ für x setzt, so erhellet die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

Anmerkung. Vermöge dieses Satzes ist man berechtigt, die erste derivirte Function von $f(x+a)$ in Bezug auf x als veränderliche Grösse durch $f'(x+a)$ zu bezeichnen.

§. 12.

Wenn

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n,$$

ist, so ist nach §. 1.

$$f'(x) = 1 . a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + na_n x^{n-1},$$

$$f''(x) = 1 . 2a_2 + 2 . 3a_3 x + 3 . 4a_4 x^2 + \ldots + (n-1)na_n x^{n-2},$$

$$f'''(x) = 1 . 2 . 3a_3 + 2 . 3 . 4a_4 x + \ldots + (n-2)(n-1)na_n x^{n-3},$$

$$f''''(x) = 1 . 2 . 3 . 4a_4 + \ldots + (n-3)(n-2)(n-1)na_n x^{n-4},$$

u. s. w.

$$f^{(n-1)}(x) = 1 . 2 . 3 \ldots (n-1)\, a_{n-1} + 2 . 3 . 4 \ldots na_n x,$$

$$f^{(n)}(x) = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots na_n,$$

woraus sich zugleich der Satz ergiebt, dass die $n$te derivirte Function einer jeden ganzen rationalen algebraischen Function des $n$ten Grades eine constante Grösse ist, und alle folgenden derivirten Function daher verschwinden, weil die derivirten Functionen einer jeden constanten Grösse C, die man immer unter der Form Cx^0 darstellen kann, natürlich sämmtlich verschwinden.

Setzt man nnn aber in den sämmtlichen obigen Gleichungen $x=0$; so erhält man

$$f(0) = a_0,$$

$$f'(0) = 1a_1,$$

$$f''(0) = 1 . 2a_2,$$

$$f'''(0) = 1 . 2 . 3a_3,$$

n. s. w.

$$f^{(n-1)}(0) = 1 . 2 . 3 \ldots (n-1)\, a_{n-1},$$

$$f^{(n)}(0) = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots na_n,$$

und folglich

$$a_0 = f(0),\ a_1 = \frac{f'(0)}{1},\ a_2 = \frac{f''(0)}{1 . 2},\ a_3 = \frac{f'''(0)}{1.2.3}, \ldots a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1 \ldots n}.$$

Also ist

$$\text{I. } f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1 . 2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1 \ldots n}x^n,$$

welches ein sehr merkwürdiger Ausdruck einer jeden ganzen rationalen algebraischen Function des $n$ten Grades ist.

Setzt man $f(x+i)=\varphi(i)$, so ist nach dem so eben bewiesenen Satze, weil $\varphi(i)$ offenbar eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von i ist,

$$f(x+i)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1}i+\frac{\varphi''(0)}{1.2}i^2+\frac{\varphi'''(0)}{1.2.3}i^3+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{1\ldots n}i^n.$$

Durch successive Anwendung des in §. 11. bewiesenen Satzes erhält man

$$\varphi(i)\ =f(x+i),$$
$$\varphi'(i)\ =f'(x+i),$$
$$\varphi''(i)=f''(x+i),$$
u. s. w.
$$\varphi^{(n)}(i)=f^{(n)}(x+i);$$

und folglich

$$\varphi(0)=f(x),\ \varphi'(0)=f'(x),\ \varphi''(0)=f''(x),\ \ldots\ \varphi^{(n)}(0)=f^{(n)}(x).$$

Also ist nach dem Obigen

$$\text{II. } f(x+i)=f(x)+\frac{f'(x)}{1}i+\frac{f''(x)}{1.2}i^2+\frac{f'''(x)}{1.2.3}i^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n}i^n,$$

welches ebenfalls eine sehr merkwürdige, und an Folgerungen sehr fruchtbare Formel ist.

§. 13.

Um eine Anwendung der Formel II. in dem vorigen Paragraphen zu zeigen, sei $f(x)=x^n$, wo n eine positive ganze Zahl sein soll, und folglich

$$f(x+i)=(x+i)^n.$$

Weil nun nach der Voraussetzung und nach §. 1.

$$f(x)\ =x^n,$$
$$f'(x)\ =nx^{n-1},$$
$$f''(x)=n(n-1)\ x^{n-2},$$
$$f'''(x)=n(n-1)\ (n-2)\ x^{n-3},$$
u. s. w.
$$f^{(n)}(x)=n(n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ldots 2.1$$

ist; so ist nach §. 12. II.

$$(x+i)^n=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}i+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}i^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}i^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 2}{1\ldots(n-1)}xi^{n-1}+\frac{n(n-1)\ldots 1}{1\ldots n}i^n,$$

welche Gleichung der analytische Ausdruck des Binomischen Lehrsatzes für positive ganze Exponenten ist.

§. 14.

Unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze rationale algebraische Functionen sind, wollen wir nun noch das allgemeine Gesetz der höhern derivirten Functionen der ganzen rationalen algebraischen Function

$$F(x) = f(x)\,\varphi(x)$$

entwickeln.

Wendet man auf diese Function die aus dem Obigen bekannten Regeln zur Entwickelung der derivirten Functionen an, so erhält man nach und nach:

$$F'(x) = f(x)\,\varphi'(x) + f'(x)\,\varphi(x),$$

$$\begin{aligned} F''(x) &= f(x)\,\varphi''(x) + f'(x)\,\varphi'(x) \\ &\quad + f'(x)\,\varphi'(x) + f''(x)\,\varphi(x) \\ &= f(x)\,\varphi''(x) + 2f'(x)\,\varphi'(x) + f''(x)\,\varphi(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'''(x) &= f(x)\varphi'''(x) + 2f'(x)\,\varphi''(x) + f''(x)\,\varphi'(x) \\ &\quad + f'(x)\,\varphi''(x) + 2f''(x)\,\varphi'(x) + f'''(x)\varphi(x) \\ &= f(x)\varphi'''(x) + 3f'(x)\varphi''(x) + 3f''(x)\varphi'(x) + f'''(x)\varphi(x), \end{aligned}$$

u. s. w.

Ueberlegt man nun, dass

$$\begin{aligned} x + i &= x + i, \\ (x+i)^2 &= x^2 + xi \\ &\quad + xi + i^2 \\ &= x^2 + 2xi + i^2, \\ (x+i)^3 &= x^3 + 2x^2i + xi^2 \\ &\quad + x^2i + 2xi^2 + i^3 \\ &= x^3 + 3x^2i + 3xi^2 + i^3, \end{aligned}$$

u. s. w.

ist; so wird man sich sogleich überzeugen, dass die numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder der Entwickelungen der derivirten Functionen der Function $F(x)$ nach und nach ganz eben so entstehen, wie die numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder der Entwickelungen der Potenzen von $x+i$. Daher sind die numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder der Entwickelung von $F^{(\varkappa)}(x)$ einerlei mit den numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder der Entwickelung von $(x+i)^{\varkappa}$, und es ist also nach dem Obigen und nach §. 13. offenbar

$$\begin{aligned} F^{(\varkappa)}(x) &= f(x)\,\varphi^{(\varkappa)}(x) + \frac{\varkappa}{1} f'(x)\,\varphi^{(\varkappa-1)}(x) \\ &\quad + \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1\,.\,2} f''(x)\,\varphi^{(\varkappa-2)}(x) \\ &\quad + \frac{\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)}{1\,.\,2\,.\,3} f'''(x)\,\varphi^{(\varkappa-3)}(x) \\ &\quad \text{u. s. w.} \\ &\quad + \frac{\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)\ldots 2\,.\,1}{1\ldots\ldots\varkappa} f^{(\varkappa)}(x)\,\varphi(x). \end{aligned}$$

§. 15.

Wenn man in der aus §. 12 bekannten Gleichung

$$f(x+i) = f(x) + \frac{f'(x)}{1}i + \frac{f''(x)}{1\,.\,2}i^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n}i^n$$

für x und i respective a und $x-a$ setzt; so wird dieselbe

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a).$$

Ist nun unter der Voraussetzung, dass $m \overline{\overline{<}} n$ *) ist,

$$f(a)=0,\ f'(a)=0,\ f''(a)=0, \ldots f^{(m-1)}(a)=0;$$

so ist

$$f(x)=\frac{(x-a)^m}{1\ldots m}f^{(m)}(a)+\frac{(x-a)^{m+1}}{1..(m+1)}f^{(m+1)}(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a),$$

und folglich die Function $f(x)$ offenbar durch $(x-a)^m$ ohne Rest theilbar.

Wenn umgekehrt die ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades $f(x)$ durch $(x-a)^m$ ohne Rest theilbar ist; so ist

$$f(x)=(x-a)^m\,\varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine ganze rationale algebraische Function von x bezeichnet; und nach §. 14., §. 2. und §. 10 ist folglich, wenn nur $\varkappa$ nicht grösser als m ist,

$$\begin{aligned}
f^{(\varkappa)}(x) &= (x-a)^m\,\varphi^{(\varkappa)}(x)\\
&+\frac{\varkappa}{1}\,.\,m(x-a)^{m-1}\,\varphi^{(\varkappa-1)}(x)\\
&+\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1.2}\,.\,m(m-1)(x-a)^{m-2}\,\varphi^{\varkappa-2}(x)\\
&+\frac{\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)}{1.2.3}\,.\,m(m-1)(m-2)(x-a)^{m-3}\,\varphi^{(\varkappa-3)}(x)\\
&\qquad\text{u. s. w.}\\
&+\frac{\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)..2.1}{1\ldots.\varkappa}\,.\,m(m-1)\ldots(m-\varkappa+1)(x-a)^{m-\varkappa}\varphi(x).
\end{aligned}$$

Hieraus sieht man, dass die Entwickelungen der derivirten Functionen

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots. f^{(m-1)}(x)$$

in allen ihren Gliedern die Grösse $x-a$ als Factor enthalten, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass diese derivirten Functionen, so wie die Function $f(x)$ selbst, für $x=a$ sämmtlich verschwinden, oder dass

$$f(a)=0,\ f'(a)=0,\ f''(a)=0, \ldots f^{(m-1)}(a)=0$$

ist.

Aus dem Bisherigen ergiebt sich also der folgende Satz:

Wenn, unter der Voraussetzung, dass $m \overline{\overline{<}} n$ ist,

$$f(a)=0,\ f'(a)=0,\ f''(a)=0, \ldots f^{(m-1)}(a)=0$$

ist; so ist die Function $f(x)$ jederzeit durch $(x-a)^m$ ohne Rest theilbar, und umgekehrt.

Aus diesem Satze ergiebt sich ferner unmittelbar, dass, wenn $f(x)$ durch keine höhere Potenz von $x-a$ als $(x-a)^m$ theilbar ist, nur

---

*) Weil, wenn a_n der Coefficient des höchsten Gliedes der ganzen rationalen algebraischen Function $f(x)$ des $n$ten Grades ist, welcher also nicht verschwindet, bekanntlich $f^{(n)}(x)=1.2.3\ldots na_n$, und folglich auch $f^{(n)}(a)=1.2.3\ldots na_n$ ist; so ist nie $f^{(n)}(a)=0$.

$$f(a)=0,\ f'(a)=0,\ f''(a)=0,\ \ldots f^{(m-1)}(a)=0,$$

nicht auch $f^{(m)}(a)=0$ ist.

§. 16.

Lehrsatz. Wenn die veränderliche Grösse x, von welcher die ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades $f(x)$ mit lauter reellen Coefficienten abhängt, sich von a bis b stetig verändert; so verändert sich die Function $f(x)$ von $f(a)$ bis $f(b)$ stetig.

Beweis. Dass jede ganze rationale algebraische Function für jeden endlichen völlig bestimmten reellen Werth ihrer veränderlichen Grösse einen endlichen völlig bestimmten reellen Werth erhält, ist für sich klar.

Nach der Formel §. 12. II. ist allgemein

$$f(x+i)=f(x)+\frac{f'(x)}{1}i+\frac{f''(x)}{1.2}i^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n}i^n,$$

und

$$\frac{f'(x)}{1}i+\frac{f''(x)}{1.2}i^2+\frac{f'''(x)}{1.2.3}i^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n}i^n$$

ist folglich die Veränderung, welche $f(x)$ erleidet, wenn x sich um i ändert. Bezeichnen wir nun den absoluten Werth derjenigen unter den Grössen

$$\frac{f'(x)}{1},\ \frac{f''(x)}{1.2},\ \frac{f'''(x)}{1.2.3},\ldots\frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n},$$

welche den grössten absoluten Werth haben*), durch V, und den absoluten Werth von i durch i_1; so ist der absolute Werth von

$$\frac{f'(x)}{1}i+\frac{f''(x)}{1.2}i^2+\frac{f'''(x)}{1.2.3}i^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n}i^n$$

nicht grösser als

$$V(i_1+i_1{}^2+i_1{}^3+\ldots+i_1{}^n),$$

d. i. nicht grösser als

$$Vi_1(1+i_1+i_1{}^2+i_1{}^3+\ldots+i_1{}^{n-1})=V\,\frac{i_1(1-i_1{}^n)}{1-i_1}.$$

Nehmen wir nun, was offenbar verstattet ist, i_1 kleiner als die Einheit; so ist

$$V\frac{i_1(1-i_1{}^n)}{1-i_1}<\frac{Vi_1}{1-i_1},$$

und folglich der absolute Werth von

$$\frac{f'(x)}{1}i+\frac{f''(x)}{1.2}i^2+\frac{f'''(x)}{1.2.3}i^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n}i^n$$

kleiner als $\frac{Vi_1}{1-i_1}$.

Bezeichnet jetzt μ eine beliebige positive Grösse, so ist die Bedingung

$$\frac{Vi_1}{1-i_1}<\mu$$

---

*) Mehrere dieser Grössen können gleiche Werthe, also auch mehrere den grössten absoluten Werth haben.

jederzeit erfüllt, wenn die Bedingung

$$Vi_1 < \mu(1-i_1)$$

erfüllt ist, und diese Bedingung ist jederzeit erfüllt, wenn die Bedingung

$$(\mu+V)i_1 < \mu \text{ oder } i_1 < \frac{\mu}{\mu+V}$$

erfüllt ist. Nimmt man also

$$i_1 < \frac{\mu}{\mu+V},$$

und folglich, wie es nach dem Obigen erforderlich ist, auch $i_1 < 1$; so ist

$$\frac{Vi_1}{1-i_1} < \mu,$$

und nach dem Obigen folglich der absolute Werth von

$$\frac{f'(x)}{1}i + \frac{f''(x)}{1.2}i^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}i^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n}i^n$$

kleiner als μ. Da man nun die Grösse μ beliebig klein annehmen kann, so sieht man, dass die Grösse

$$\frac{f'(x)}{1}i + \frac{f''(x)}{1.2}i^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}i^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n}i^n$$

der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur i nahe genug bei Null annimmt, und der Null unendlich nahe kommende Veränderungen der veränderlichen Grösse x führen also offenbar der Null unendlich nahe kommende Veränderungen der Function $f(x)$ herbei.

Weil nun jedem endlichen völlig bestimmten reellen Werthe der veränderlichen Grösse x ein endlicher völlig bestimmter Werth der Function $f(x)$ entspricht; weil ferner der Null unendlich nahe kommenden Veränderungen der veränderlichen Grösse x der Null unendlich nahe kommende Veränderungen der Function $f(x)$ entsprechen; weil endlich $f(a)$ und $f(b)$ die Werthe sind, welche die Function $f(x)$ für $x=a$ und $x=b$ erhält; so ist klar, dass die Function $f(x)$ sich von $f(a)$ bis $f(b)$ stetig verändert, wenn die veränderliche Grösse x sich von a bis b stetig verändert, wie bewiesen werden sollte.

§. 17.

Erster Zusatz. Die ganze rationale algebraische Function

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

mit lauter reellen Coefficienten nähert sich der Grösse a_0 als ihrer Gränze, wenn x sich der Null nähert, und kann dieser Gränze beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt.

Da die ganze rationale algebraische Function $f(x)$ für $x=0$ den Werth a_0 erhält, und sich nach dem vorigen Lehrsatze von a_0 an stetig verändert, wenn man sich x von Null an stetig verändern lässt; so erhellet die Richtigkeit des Satzes mit völliger Deutlichkeit.

§. 18.

Zweiter Zusatz. Für x lassen sich immer der Null so nahe kommende Werthe angeben, dass das Vorzeichen der ganzen rationalen algebraischen Function

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \ldots + a_n x^{m+n}$$

mit lauter reellen Coefficienten, wo a_0 nicht verschwinden soll, mit dem Vorzeichen ihres ersten Gliedes $a_0 x^m$ einerlei ist.

Es ist

$$f(x) = x^m\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n).$$

Nähert sich nun x stetig der Null, so nähert die Function

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

sich nach dem vorigen Zusatze stetig der Grösse a_0 als ihrer Gränze, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt, wird also für der Null sehr nahe kommende Werthe von x offenbar mit a_0 gleiches Vorzeichen haben, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass die Function

$$f(x) = x^m\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n)$$

für der Null sehr nahe kommende Werthe von x mit $a_0 x^m$ gleiches Vorzeichen hat, wie behauptet wurde.

§. 19.

Dritter Zusatz. Für x lassen sich immer, absolut genommen, so grosse Werthe angeben, dass das Vorzeichen der ganzen rationalen algebraischen Function

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}\,x + a_n$$

mit lauter reellen Coefficienten mit dem Vorzeichen ihres höchsten Gliedes $a_0 x^n$ einerlei ist.

Es ist

$$f(x) = \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right) x^n,$$

oder, wenn der Kürze wegen $\frac{1}{x} = \xi$ gesetzt wird,

$$f(x) = (a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \ldots + a_{n-1} \xi^{n-1} + a_n \xi^n)\, x^n.$$

Für der Null unendlich nahe kommende Werthe von ξ hat nach dem vorigen Zusatze die Grösse

$$a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \ldots + a_{n-1} \xi^{n-1} + a_n \xi^n$$

mit a_0, also die Grösse

$$f(x) = (a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \ldots + a_{n-1} \xi^{n-1} + a_n \xi^n)\, x^n$$

mit $a_0 x^n$ gleiches Vorzeichen, woraus die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes unmittelbar erhellet, weil der Null unendlich nahe kommenden Werthen von ξ offenbar, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, unendlich grosse Werthe von $x = \frac{1}{\xi}$ entsprechen.

§. 20.

Es sei jetzt

$$f(x) = A\,(x-a)^m\,(x-b)^p\,(x-c)^q\,(x-d)^r\ldots.,$$

wo A eine beliebige constante Grösse bezeichnet, und die Grössen a, b, c, d, ... sämmtlich unter einander ungleich sein sollen.

Durch Entwickelung der ersten derivirten Function dieser Function findet man leicht

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x-a} + \frac{p}{x-b} + \frac{q}{x-c} + \frac{r}{x-d} + \ldots..$$

$$= \frac{m(x-b)(x-c)(x-d)\ldots + p(x-a)(x-c)(x-d)\ldots + q(x-a)(x-b)(x-d)\ldots + \ldots}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots.}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der Kürze wegen respective durch $F(x)$ und $F_1(x)$ bezeichnet,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{F_1(x)}.$$

Sei nun $\psi(x)$ der grösste gemeinschaftliche (algebraische) Divisor von $f(x)$ und $f'(x)$; so sind, wenn wir

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \varphi(x),\ \frac{f'(x)}{\psi(x)} = \varphi_1(x)$$

setzen, $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ zwei ganze rationale algebraische Functionen von x, die für keinen Werth von x zugleich verschwinden, weil, wenn dies der Fall wäre, offenbar $\psi(x)$ nicht der **grösste** gemeinschaftliche Divisor von $f(x)$ und $f'(x)$ sein würde.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Weil $F_1(a) = 0$ und nach der Voraussetzung, wie sogleich in die Augen fallen wird, nicht $F(a) = 0$ ist; so muss wegen der vorhergehenden Gleichung offenbar $\varphi_1(a) = 0$ sein, woraus sich, weil $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ für keinen Werth von x zugleich verschwinden, ferner ergiebt, dass nicht $\varphi(a) = 0$ ist.

Weil $\varphi_1(a) = 0$ ist, so geht $x - a$ in $\varphi_1(x)$ auf, und

$$\frac{\varphi_1(x)}{x-a} = \varphi_2(x)$$

ist folglich eine ganze rationale algebraische Function. Nach dem Obigen ist nun

$$\frac{F(x)}{F_1(x) : (x-a)} = \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x) : (x-a)},$$

d. i., wenn wir

$$(x-b)\,(x-c)\,(x-d)\ldots. = F_2(x)$$

setzen,

$$\frac{F(x)}{F_2(x)} = \frac{\varphi(x)}{\varphi_2(x)}.$$

Weil weder $\varphi(a) = 0$, noch $F_2(a) = 0$ ist, so ergiebt sich aus dieser Gleichung, dass auch $\varphi_2(a)$ nicht verschwindet.

Nimmt man nun alles Vorhergehende zusammen, so ist klar, dass a eine Wurzel der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ ist, dass aber diese Gleichung die in Rede stehende Wurzel nur ein Mal enthält, und auf ganz ähnliche Art überzeugt man sich, dass auch jede der Grössen $b, c, d, \ldots$ eine Wurzel der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ ist, dass aber diese Gleichung jede der in Rede stehenden Wurzeln nur ein Mal enthält.

Zeigen lässt sich nun auch noch ohne Schwierigkeit, dass die Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ ausser $a, b, c, d, \ldots$ gar keine Wurzel weiter hat. Wäre nämlich g eine nicht unter $a, b, c, d, \ldots$ vorkommende Wurzel der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$, und folglich $\varphi_1(g) = 0$; so müsste, weil nach dem Obigen

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x) \, . \, F_1(x)}{F(x)}$$

ist, offenbar auch

$$\varphi(g) \, . \, F_1(g) = 0,$$

und folglich entweder $\varphi(g) = 0$ oder $F_1(g) = 0$ sein. Beides ist aber nicht möglich, weil die Functionen $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ für keinen Werth von x zugleich verschwinden, und

$$F_1(g) = (g - a)\,(g - b)\,(g - c)\,(g - d) \ldots$$

offenbar nicht verschwindet, weil die Grösse g unter den Grössen $a, b, c, d, \ldots$ nicht vorkommt.

Man sieht also, dass jede der Grössen $a, b, c, d, \ldots$ eine Wurzel der Gleichung

$$\varphi_1(x) = 0$$

ist, dass aber diese Gleichung jede der in Rede stehenden Wurzeln nur ein Mal enthält, und ausser denselben gar keine Wurzel hat.

Die Function $\varphi_1(x)$ ist der Quotient, welchen man erhält, wenn man $f(x)$ durch den grössten gemeinschaftichen Divisor von $f(x)$ und $f'(x)$ dividirt, und man kann also nach dem Obigen aus jeder gegebenen Gleichung

$$f(x) = 0$$

immer leicht eine Gleichung ableiten, welche alle ungleichen Wurzeln dieser Gleichung nur ein Mal, und ausser denselben gar keine andere Wurzel weiter enthält.

Durch Auflösung der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ erhält man alle ungleichen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, und wird nun auch in allen Fällen durch mehrmalige successive Division mit $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, ... in die Function $f(x)$ bestimmen können, wie oft die Gleichung $f(x) = 0$ jede dieser Wurzeln enthält.

Hiernach kann man bei der Auflösung der Gleichungen immer von der Voraussetzung ausgehen, dass alle Wurzeln der gegebenen Gleichung unter einander ungleich sind.

B.

Von dem Excess der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen.

§. 21.

Erklärung. Wenn die gebrochene rationale algebraische Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, wo $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ ganze rationale algebraische Functionen sind, indem die veränderliche Grösse x sich von a bis b stetig verändert, n Mal unendlich wird und dabei von dem Negativen zum Positiven übergeht, und ausserdem n' Mal unendlich wird und dabei von dem Positiven zum Negativen übergeht; so heisst die Differenz $n-n'$, welche wir durch E bezeichnen, also $n-n'=E$ setzen wollen, der Excess *) der gebrochenen rationalen algebraischen Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ für die Gränzen a und b.

Wenn $n'=0$ ist, d. h. wenn zwischen den Gränzen a, b die gebrochene rationale algebraische Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, indem dieselbe unendlich wird und ihr Zeichen ändert, immer vom Negativen zum Positiven übergeht, so ist $E=n$. Wenn $n=0$ ist, d. h. wenn zwischen den Gränzen a, b die gebrochene rationale algebraische Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, indem dieselbe unendlich wird und ihr Zeichen ändert, immer vom Positiven zum Negativen übergeht, so ist $E=-n'$.

Für gebrochene rationale algebraische Functionen, welche zwischen zwei bestimmten Gränzen niemals unendlich werden, ist der diesen Gränzen entsprechende Excess Null. Für eine gebrochene rationale algebraische Function, welche niemals unendlich wird, also z. B. für jede gebrochene rationale algebraische Function, deren Zähler durch ihren Nenner ohne Rest theilbar, und die also eigentlich eine ganze rationale algebraische Function ist, verschwindet der Excess für jede zwei ganz beliebige Gränzen.

§. 22.

Lehrsatz. Für zwei absolut gleiche, dem Zeichen nach aber entgegengesetzte gebrochene rationale algebraische Functionen $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ und $-\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ sind die, gleichen Gränzen entsprechenden Excesse jederzeit absolut gleich, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt, oder die Summe dieser beiden Excesse ist gleich Null.

Beweis. Wir wollen annehmen, dass zwischen zwei gewissen Gränzen die Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, indem dieselbe unendlich wird,

*) Den Ausdruck excès gebraucht Herr Moigno nach Sturm und Liouville. Cauchy nennt dieselbe Grösse indice intégral.

n Mal vom Negativen zum Positiven und n' Mal vom Positiven zum Negativen übergebe; so geht zwischen denselben Gränzen die Function $-\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, indem sie unendlich wird, offenbar n Mal vom Positiven zum Negativen und n' Mal vom Negativen zum Positiven über, und nach §. 21. ist folglich $n-n'$ der Excess der ersten, $n'-n$ der Excess der zweiten Function. Weil nun $n'-n=-(n-n')$, oder $(n-n')+(n'-n)=0$ ist, so erhellet die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

§. 23.

Lehrsatz. Wenn E und E' die Excesse der beiden gebrochenen rationalen algebraischen Functionen $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ und $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$, deren zweite das Reciproke der ersten ist, für die Gränzen a, b sind; so ist immer

$$E+E'=0, \text{ oder } E+E'=+1, \text{ oder } E+E'=-1,$$

jenachdem die beiden Gränzwerthe $\frac{\varphi_1(a)}{\varphi(a)}$, $\frac{\varphi_1(b)}{\varphi(b)}$ der Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ gleiche Vorzeichen haben, oder der erste dieser beiden Gränzwerthe negativ und der zweite positiv, oder der erste dieser Gränzwerthe positiv und der zweite negativ ist.

Beweis. Wir wollen annehmen, dass zwischen den Gränzen a, b die Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, indem sie unendlich wird, n Mal vom Negativen zum Positiven und n' Mal vom Positiven zum Negativen, dagegen die Function $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$, indem sie unendlich wird, n_1 Mal vom Negativen zum Positiven und n_1' Mal vom Positiven zum Negativen übergehe; so ist, wenn wir die den Gränzen a, b entsprechenden Excesse unserer beiden Functionen durch E und E' bezeichnen,

$$E=n-n', \quad E'=n_1-n_1'.$$

Beide Fnutionen, welche für gleiche Werthe von x offenbar immer gleiche Vorzeichen haben, können ihre Zeichen nur dann ändern, wenn sie entweder unendlich werden oder verschwinden. Da nun die erste Function offenbar immer dann verschwindet, wenn die zweite unendlich wird, so ist klar, dass zwischen den Gränzen a, b die Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, indem sie verschwindet, n_1 Mal vom Negativen zum Positiven und n_1' Mal vom Positiven znm Negativen übergeht. Geht aber die Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ zwischen den Gränzen a, b vom Negativen zum Positiven überhaupt μ Mal, vom Positiven zum Negativen überhaupt μ' Mal über, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\mu=n+n_1, \quad \mu'=n'+n_1',$$

und folglich

$$\mu-\mu'=(n-n')+(n_1-n_1'),$$

d. i. nach dem Obigen

$$E+E'=\mu-\mu'.$$

Haben nun die beiden Gränzwerthe

$$\frac{\varphi_1(a)}{\varphi(a)} \text{ und } \frac{\varphi_1(b)}{\varphi(b)}$$

der Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ gleiche Vorzeichen, so geht dieselbe zwischen den Gränzen a, b offenbar eben so oft vom Negativen zum Positiven wie vom Positiven zum Negativen über, wie augenblicklich aus der blossen Anschauung einer Reihe von der Form

$$\pm \mp \pm \mp \pm \mp \pm \mp \pm$$

erhellet, und es ist folglich $\mu=\mu'$, also nach dem Obigen $E+E'=0$.

Wenn der erste der beiden Gränzwerthe

$$\frac{\varphi_1(a)}{\varphi(a)} \text{ und } \frac{\varphi_1(b)}{\varphi(b)}$$

der Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ negativ, der zweite positiv ist, so geht diese Function zwischen den Gränzen a, b offenbar ein Mal öfter vom Negativen zum Positiven als vom Positiven zum Negativen über, wie augenblicklich aus der blossen Anschauung einer Reihe von der Form

$$- + - + - + - + - +$$

erhellet, und es ist folglich $\mu=\mu'+1$, also nach dem Obigen $E+E'=+1$.

Wenn endlich der erste der beiden Gränzwerthe

$$\frac{\varphi_1(a)}{\varphi(a)} \text{ und } \frac{\varphi_1(b)}{\varphi(b)}$$

der Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ positiv, der zweite negativ ist, so geht diese Function zwischen den Gränzen a, b offenbar ein Mal öfter vom Positiven zum Negativen als vom Negativen zum Positiven über, wie augenblicklich aus der blossen Anschauung einer Reihe von der Form

$$+ - + - + - + - + -$$

erhellet, und es ist folglich $\mu=\mu'-1$, also nach dem Obigen $E+E'=-1$.

Hierdurch ist nun unser Satz vollständig bewiesen.

§. 24.

Wenn zwei Grössen A, B gleiche Vorzeichen haben, so sagt man, dass ihre Vorzeichen eine Folge bilden; wenn dagegen zwei Grössen A, B ungleiche Vorzeichen haben, so sagt man, dass ihre Vorzeichen einen Wechsel bilden. Dies vorausgesetzt, kann man nun den vorhergehenden wichtigen Lehrsatz auch auf folgende Art ausdrücken:

Wenn E und E' die Excesse der beiden gebrochenen rationalen algebraischen Functionen $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ und $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$, deren zweite das Reciproke der ersten ist, für die Gränzen a, b sind; so ist immer

$$E+E'=0, \text{ oder } E+E'=+1, \text{ oder } E+E'=-1,$$

wenn respective die Vorzeichen von $\varphi(a)$, $\varphi_1(a)$ und $\varphi(b)$, $\varphi_1(b)$ zugleich eine Folge oder zugleich einen Wechsel bilden; wenn die Vorzeichen von $\varphi(a)$, $\varphi_1(a)$ einen Wechsel, die Vorzeichen von $\varphi(b)$, $\varphi_1(b)$ eine Folge bilden; wenn die Vorzeichen von $\varphi(a)$, $\varphi_1(a)$ eine Folge, die Vorzeichen von $\varphi(b)$, $\varphi_1(b)$ einen Wechsel bilden.

§. 25.

Wenn der Nenner $\varphi(x)$ der ganzen rationalen algebraischen Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ von einem niedrigern oder eben so hohen Grade als der Zähler ist; so kann man mit dem Nenner in den Zähler dividiren, und wird, wenn man den Quotienten durch Q, den Rest durch $\psi(x)$ bezeichnet, eine Gleichung von der Form

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}=Q+\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

wo nun der Bruch auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens eine echte gebrochene rationale algebraische Function ist, erhalten.

Die Functionen $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ und $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ werden zugleich unendlich, und für den Werthen von x, für welche die beiden in Rede stehenden Functionen unendlich werden, benachbarte Werthe von x ist offenbar der absolute Werth der Function $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ grösser als der absolute Werth der ganzen rationalen algebraischen Function Q, welche immer einen endlichen Werth hat, so dass also für die in Rede stehenden Werthe von x die Functionen $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ und $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ offenbar gleiche Vorzeichen haben, weil das Zeichen der Grösse $Q+\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ bloss durch $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ bestimmt wird. Nimmt man alles dieses zusammen, so erhellet mit völliger Deutlichkeit, dass für dieselben Gränzen die Excesse der Functionen $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ und $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ einander gleich sind, und der Excess der erstern Function also immer durch die Berechnung des Excesses der letztern gefunden werden kann.

Hierdurch sind wir berechtigt, im Folgenden die Regeln für die Berechnung des Excesses der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen zwischen gegebenen Gränzen auf echte gebrochene rationale algebraische Functionen, deren Zähler von einem niedrigern Grade als ihre Nenner sind, einzuschränken.

§. 26.

Wir wollen daher jetzt annehmen, dass $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ eine echte, folglich $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ eine unechte gebrochene rationale algebraische Function sei, und wollen wie oben die den Gränzen a, b entsprechenden Excesse dieser beiden Functionen durch E und E' bezeichnen; so ist

$$E + E' = \varepsilon,$$

wo ε eine nach den in den vorhergehenden Paragraphen gegebenen Regeln immer mit völliger Sicherheit bestimmbare Grösse ist. Dividiren wir nun mit $\varphi_1(x)$ in $\varphi(x)$ hinein, bezeichnen den Quotienten durch Q und den mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Rest durch $\varphi_2(x)$, so ist

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Der Excess von $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$ für die Gränzen a, b sei E_1; so ist $-E_1$ nach §. 22. der Excess von $-\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$ für dieselben Gränzen.

Weil nun

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q + \frac{-\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$$

ist; so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen $E' = -E_1$, und folglich nach dem Obigen

$$E - E_1 = \varepsilon$$

oder $E = E_1 + \varepsilon$, wo E, E_1 die Excesse von $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$ sind, und ε eine nach den aus dem Obigen bekannten Regeln jederzeit mit völliger Sicherheit bestimmbare Grösse ist.

§. 27.

Nach Vorausschickung dieser Principien lassen sich nun die Regeln zur Bestimmung des zwei gegebenen Gränzen a, b entsprechenden Excesses der echten gebrochenen rationalen algebraischen Function $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ ohne Schwierigkeit entwickeln.

Man dividire mit $\varphi_1(x)$ in $\varphi(x)$, und bezeichne den Quotienten durch Q, den mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Rest durch $\varphi_2(x)$, so ist

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Ferner dividire man mit $\varphi_2(x)$ in $\varphi_1(x)$, und bezeichne den Quotienten durch Q_1, den mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Rest durch $\varphi_3(x)$, so ist

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = Q_1 - \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)}.$$

Auf ähnliche Art dividire man mit $\varphi_3(x)$ in $\varphi_2(x)$, und bezeichne den Quotienten durch Q_2, den mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Rest durch $\varphi_4(x)$, so ist

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = Q_2 - \frac{\varphi_4(x)}{\varphi_3(x)}.$$

Geht man auf diese Art weiter, so wird man immer endlich auf einen verschwindenden Rest kommen, und jederzeit eine Reihe Gleichungen von der Form

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)},$$
$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = Q_1 - \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)},$$
$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = Q_2 - \frac{\varphi_4(x)}{\varphi_3(x)},$$

u. s. w.

$$\frac{\varphi_{n-2}(x)}{\varphi_{n-1}(x)} = Q_{n-2} - \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)},$$
$$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)} = Q_{n-1};$$

wo Q_{n-1} eine ganze rationale algebraische Function von x ist, erhalten.

Bezeichnen wir jetzt die den Gränzen a, b entsprechenden Excesse der Functionen

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}, \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)}, \ldots \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}, \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)}$$

respective durch

$$E, E_1, E_2, E_3, \ldots E_{n-1}, E_n;$$

so ist nach §. 26. und §. 23.

$$E=E_1+\varepsilon, E_1=E_2+\varepsilon_1, E_2=E_3+\varepsilon_2, \ldots E_{n-2}=E_{n-1}+\varepsilon_{n-2},$$
$$E_{n-1}=-E_n+\varepsilon_{n-1};$$

wo $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_{n-1}$ gewisse mittelst der aus dem Vorhergehenden bekannten Regeln mit völliger Sicherheit bestimmbare Grössen sind. Durch Addition der vorhergehenden Gleichungen erhält man aber, wenn man aufhebt was sich aufheben lässt, und überlegt, dass nach §. 21., weil

$$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)} = Q_{n-1}$$

eine ganze rationale algebraische Function ist, $E_n=0$ sein muss, sogleich die Gleichung

$$E=\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_{n-1},$$

und sieht also, dass zur Berechnung des Excesses E nur eine völlig sichere und möglichst einfache Regel zur Bestimmung der Grössen $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_{n-1}$ erforderlich ist, die wir nun zu geben versuchen wollen.

Zu dem Ende schreiben wir die Werthe, welche die Functionen

$$\varphi(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots \varphi_n(x)$$

für $x=a$ und für $x=b$ erhalten, in zwei Zeilen, wie folgt unter einander:

$$(1) \ldots\ldots \varphi(a), \varphi_1(a), \varphi_2(a), \varphi_3(a), \ldots\ldots \varphi_n(a);$$
$$(2) \ldots\ldots \varphi(b), \varphi_1(b), \varphi_2(b), \varphi_3(b), \ldots\ldots \varphi_n(b).$$

Betrachten wir nun zuvörderst irgend eine der Grössen $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_{n-2}$, die wir im Allgemeinen durch ε_m bezeichnen wollen, so ist nach dem Obigen

$$E_m = E_{m+1} + \varepsilon_m,$$

wo E_m und E_{m+1} die Excesse der Functionen

$$\frac{\varphi_{m+1}(x)}{\varphi_m(x)} \text{ und } \frac{\varphi_{m+2}(x)}{\varphi_{m+1}(x)}$$

für die Gränzen a, b sind. Weil aber

$$\frac{\varphi_m(x)}{\varphi_{m+1}(x)} = Q_m - \frac{\varphi_{m+2}(x)}{\varphi_{m+1}(x)}$$

ist, so ist nach §. 25. der Excess von $-\frac{\varphi_{m+2}(x)}{\varphi_{m+1}(x)}$, d. i. $-E_{m+1}$ nach §. 22., dem Excesse von $\frac{\varphi_m(x)}{\varphi_{m+1}(x)}$ gleich. Bezeichnen wir also den Excess der letztern Function durch E'_m, so ist $-E_{m+1} = E'_m$ oder $E_{m+1} = -E'_m$, und folglich nach dem Obigen

$$E_m = -E'_m + \varepsilon_m \text{ oder } E_m + E'_m = \varepsilon_m.$$

Also ist nach §. 24.

$$\varepsilon_m = 0, \text{ oder } \varepsilon_m = +1, \text{ oder } \varepsilon_m = -1,$$

wenn respective die Vorzeichen von $\varphi_m(a)$, $\varphi_{m+1}(a)$ und $\varphi_m(b)$, $\varphi_{m+1}(b)$ zugleich einen Wechsel oder zugleich eine Folge bilden; wenn die Vorzeichen von $\varphi_m(a)$, $\varphi_{m+1}(a)$ einen Wechsel, die Vorzeichen von $\varphi_m(b)$, $\varphi_{m+1}(b)$ eine Folge bilden; wenn die Vorzeichen von $\varphi_m(a)$, $\varphi_{m+1}(a)$ eine Folge, die Vorzeichen von $\varphi_m(b)$, $\varphi_{m+1}(b)$ einen Wechsel bilden.

Ganz dasselbe lässt sich auf folgende Art auch von der Grösse ε_{n-1} beweisen. Nach dem Obigen ist

$$E_{n-1} = -E_n + \varepsilon_{n-1} \text{ oder } E_{n-1} + E_n = \varepsilon_{n-1},$$

wo E_{n-1} und E_n die Excesse der Functionen

$$\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)} \text{ und } \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)}$$

sind. Also ist nach §. 24.

$$\varepsilon_{n-1} = 0, \text{ oder } \varepsilon_{n-1} = +1, \text{ oder } \varepsilon_{n-1} = -1,$$

wenn respective die Vorzeichen von $\varphi_{n-1}(a)$, $\varphi_n(a)$ und $\varphi_{n-1}(b)$, $\varphi_n(b)$ zugleich einen Wechsel oder zugleich eine Folge bilden; wenn die Vorzeichen von $\varphi_{n-1}(a)$, $\varphi_n(a)$ einen Wechsel, die Vorzeichen von $\varphi_{n-1}(b)$, $\varphi_n(b)$ eine Folge bilden; wenn die Vorzeichen von $\varphi_{n-1}(a)$, $\varphi_n(a)$ eine Folge, die Vorzeichen von $\varphi_{n-1}(b)$, $\varphi_n(b)$ einen Wechsel bilden; welches Alles ganz mit dem Obigen übereinstimmt.

Seien nun w und f die Anzahl der Wechsel und der Folgen in der Reihe (1), w' und f' die Anzahl der Wechsel und der Folgen in der Reihe (2). Die Anzahl der Fälle, wo einem Wechsel in der Reihe (1) eine Folge in der Reihe (2) entspricht, sei $\varkappa$; die Anzahl der Fälle, wo einer Folge in der Reihe (1) ein Wechsel in der Reihe (2) entspricht, sei $\varkappa'$; die Anzahl der Fälle, wo einem Wechsel in der Reihe (1) ein Wechsel in der Reihe (2) entspricht, sei $\varkappa''$; die Anzahl der Fälle, wo einer Folge in der Reihe (1) eine Folge in der Reihe (2) entspricht, sei $\varkappa'''$; so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{n-1} = \varkappa - \varkappa',$$

also $E = x - x'$. Ferner ist aber, wie sogleich erhellet,

$$w = x + x'', \quad f = x' + x'''$$

und

$$w' = x' + x'', \quad f' = x + x''';$$

also

$$w - w' = x - x', \quad f' - f = x - x'.$$

Daher ist

$$E = w - w' = f' - f,$$

und zur Berechnung des Excesses einer echten gebrochenen rationalen algebraischen Function ergiebt sich also die folgende Regel:

Man bilde, wenn $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ die gegebene echte gebrochene rationale algebraische Function ist, nach der oben gegebenen Anweisung die beiden Reihen

$$\varphi(a),\ \varphi_1(a),\ \varphi_2(a),\ \varphi_3(a),\ \ldots\ \varphi_n(a);$$
$$\varphi(b),\ \varphi_1(b),\ \varphi_2(b),\ \varphi_3(b),\ \ldots\ \varphi_n(b);$$

und zähle in jeder dieser beiden Reihen die vorkommenden Wechsel w, w' und Folgen f, f'; dann ist, wenn der gesuchte, den Gränzen a, b entsprechende Excess der gegebenen Function wie gewöhnlich durch E bezeichnet wird,

$$E = w - w' = f - f'.$$

Weil nach dem Obigen

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q + \frac{-\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)},$$
$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = Q_1 + \frac{-\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)}.$$
$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = Q_2 + \frac{-\varphi_4(x)}{\varphi_3(x)},$$
$$\frac{\varphi_3(x)}{\varphi_4(x)} = Q_3 + \frac{-\varphi_5(x)}{\varphi_4(x)},$$
u. s. w.

ist; so sieht man, dass die Grössen

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \varphi_4(x),\ \ldots\ \varphi_n(x),$$

welche im Folgenden überhaupt Divisoren*) genannt werden sollen, erhalten werden, wenn man auf die beiden Functionen $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ die bekannte Methode zur Auffindung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier ganzen rationalen algebraischen Functionen anwendet, jedoch mit dem Unterschiede, dass man in den vorhergehenden Divisor nie mit dem zuletzt übrig gebliebenen Reste selbst, sondern vielmehr mit dem Entgegengesetzten dieses Restes dividirt, und hierauf alle bei dieser Operation gebrauchten Divisoren vom ersten bis zum letzten in natürlicher Folge in einer Reihe neben einander schreibt, wodurch man unmittelbar die gesuchten Grössen erhält.

*) Herr Moigno nennt diese Grössen, mit Ausnahme der ersten, Reste; uns scheint die obige Benennung sachgemässer.

Bei der Ausführung dieser Rechnung kann man, um numerische Brüche in den Quotienten zu vermeiden und sich dadurch die Rechnung zu erleichtern, die Dividenden mit zweckmässig gewählten positiven Zahlen multipliciren, weil dadurch die Vorzeichen der Reste, und also auch die Vorzeichen der auf einander folgenden Divisoren, auf die es hier allein ankommt, keine Aenderung erleiden.

§. 28.

Bis jetzt haben wir stillschweigend angenommen, dass kein Glied der beiden Reihen (1) und (2) verschwinde, und müssen daher jetzt noch zeigen, wie man sich zu verhalten hat, wenn dies nicht der Fall ist, wobei wir jedoch voraussetzen wollen, dass keine der beiden Gränzen a, b selbst eine Wurzel der Gleichung $\varphi(x)=0$, und also weder $\varphi(a)=0$, noch $\varphi(b)=0$ ist.

Unter dieser Voraussetzung können nie zwei benachbarte Glieder der Reihen (1) und (2) zugleich verschwinden, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Wäre nämlich z. B. $\varphi_m(a)=0$ und auch $\varphi_{m+1}(a)=0$, so würden wegen der Gleichungen

$$\varphi(x)=Q\varphi_1(x)-\varphi_2(x),$$
$$\varphi_1(x)=Q_1\varphi_2(x)-\varphi_3(x),$$
u. s. w.
$$\varphi_{m-1}(x)=Q_{m-1}\,\varphi_m(x)-\varphi_{m+1}(x),$$
$$\varphi_m(x)=Q_m\,\varphi_{m+1}(x)-\varphi_{m+2}(x),$$
$$\varphi_{m+1}(x)=Q_{m+1}\,\varphi_{m+2}(x)-\varphi_{m+3}(x),$$
u. s. w.
$$\varphi_{n-3}(x)=Q_{n-3}\,\varphi_{n-2}(x)-\varphi_{n-1}(x),$$
$$\varphi_{n-2}(x)=Q_{n-2}\,\varphi_{n-1}(x)-\varphi_n(x)$$

offenbar die Grössen

$$\varphi(a),\ \varphi_1(a),\ \varphi_2(a)\ \varphi_3(a),\ \ldots\ \varphi_n(a)$$

sämmtlich verschwinden, welches ungereimt ist, weil nach der Voraussetzung $\varphi(a)$ nicht verschwindet.

Wenn also ein Glied, z. B. $\varphi_m(a)$, verschwindet, so verschwindet keins der beiden Glieder $\varphi_{m-1}(a)$ und $\varphi_{m+1}(a)$, und diese beiden Glieder haben, weil wegen der Gleichung

$$\varphi_{m-1}(x)=Q_{m-1}\,\varphi_m(x)-\varphi_{m+1}(x)$$

offenbar $\varphi_{m-1}(a)=-\varphi_{m+1}(a)$ ist, jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen, welches Alles für jede der beiden Reihen (1) und (2) gilt, wenn nur, wie immer angenommen wird, keine der beiden Grössen $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ verschwindet.

Wir wollen nun der Einfachheit wegen den Fall besonders betrachten, wenn in der Reihe (1) das eine Glied $\varphi_m(a)$, in der Reihe (2) kein Glied verschwindet. Bezeichnen wir durch a_1 eine Grösse, welche von der Grösse a nur um eine der Null unendlich nahe kommende Grösse verschieden ist, so wird in der Reihe

$$(1^\circ)\ \ldots.\ \varphi(a_1),\ \varphi_1(a_1),\ \varphi_2(a_1),\ \varphi_3(a_1),\ \ldots.\ \varphi_n(a_1)$$

kein Glied verschwinden, und, mit Ausnahme des Gliedes $\varphi_m(a_1)$, werden alle Glieder mit den entsprechenden Gliedern der Reihe (1) gleiche Vorzeichen haben, den gesuchten Excess der gegebenen Function für die Gränzen a, b wird man aber offenbar erhalten, wenn man den Excess derselben für die Gränzen a_1, b sucht, so dass also, wenn E der gesuchte Excess ist, und durch w_1 und w' respective die Anzahl der Wechsel in der Reihe (1^c) und (2) bezeichnet wird,

$$E = w_1 - w'$$

ist.

Vergleicht man nun aber die beiden Reihen

$$\varphi(a),\ \varphi_1(a),\ \ldots\ \varphi_{m-1}(a),\ \varphi_m(a),\ \varphi_{m+1}(a),\ \ldots\ \varphi_{n-1}(a),\ \varphi_n(a);$$

$$\varphi(a_1),\ \varphi_1(a_1),\ \ldots\ \varphi_{m-1}(a_1),\ \varphi_m(a_1),\ \varphi_{m+1}(a_1),\ \ldots\ \varphi_{n-1}(a_1),\ \varphi_n(a_1)$$

mit einander; so ist aus dem Obigen klar, dass in den Theilen

$$\varphi(a),\ \varphi_1(a),\ \varphi_2(a),\ \ldots\ \varphi_{m-1}(a);$$

$$\varphi(a_1),\ \varphi_1(a_1),\ \varphi_2(a_1)\ \ldots\ \varphi_{m-1}(a_1)$$

und

$$\varphi_{m+1}(a),\ \varphi_{m+2}(a),\ \ldots\ \varphi_{n-1}(a),\ \varphi_n(a);$$

$$\varphi_{m+1}(a_1),\ \varphi_{m+2}(a_1),\ \ldots\ \varphi_{n-1}(a_1),\ \varphi_n(a_1)$$

derselben gleich viele Wechsel vorkommen. Lässt man in der ersten Reihe das verschwindende Glied $\varphi_m(a)$ ganz weg, so geben die Glieder $\varphi_{m-1}(a)$, $\varphi_{m+1}(a)$, welche nach dem Obigen nicht verschwinden und entgegengesetzte Vorzeichen haben, einen Wechsel. Die Zeichen der drei Glieder $\varphi_{m-1}(a_1)$, $\varphi_m(a_1)$, $\varphi_{m+1}(a_1)$ der zweiten Reihe sind aber entweder

$$++-,\ \text{oder}\ +--,\ \text{oder}\ -++,\ \text{oder}\ --+,$$

und bieten daher immer nur einen Wechsel dar, woraus sich, in Verbindung mit allem Vorhergehenden ergiebt, dass die Anzahl der Wechsel in (1^c) jederzeit der Anzahl der Wechsel in (1), wenn man bei der Zählung der Wechsel das verschwindende Glied $\varphi_m(a)$ dieser letztern Reihe ganz ausser Acht lässt, völlig gleich, oder dass, wenn w die Anzahl der Wechsel der Reihe (1) mit völliger Beseitigung des verschwindenden Gliedes $\varphi_m(a)$ bezeichnet, $w_1 = w$, und nach dem Obigen folglich $E = w - w'$ ist.

Wenn also ein Glied der Reihe (1) verschwindet, so kann man für die Gränzen a, b den Excess E der gegebenen Function so bestimmen, dass man die Anzahl der Wechsel in den beiden Reihen (1) und (2) durch unmittelbare Zählung derselben bestimmt, wobei man das verschwindende Glied der Reihe (1) ganz aus der Acht lässt, und dann, wenn unter dieser Voraussetzung w die Anzahl der Wechsel in der Reihe (1), w' aber die Anzahl der Wechsel in der Reihe (2) ist, $E = w - w'$ setzt.

Dass übrigens ein ähnliches Verfahren bei der Zählung der Folgen in den beiden Reihen (1) und (2) nicht angewandt werden darf, geht aus dem Obigen unmittelbar hervor.

Zugleich aber ergiebt sich aus der obigen Darstellung ganz unzweideutig, dass ein ganz ähnliches Verfahren wie vorher immer in Anwendung gebracht werden kann, wenn beliebig viele Glieder der Reihen (1) und (2) mit Ausnahme der beiden ersten verschwinden, und die allgemeine Regel zur Bestimmung des Excesses einer echten gebrochenen rationalen algebraischen Function zwischen gegebenen Gränzen wird sich nun auf den folgenden Ausdruck bringen lassen:

Wenn $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ die gegebene echte gebrochene rationale algebraische Function ist, und die Grössen a, b, welche nicht selbst Wurzeln der Gleichung $\varphi(x)=0$ sein sollen, die gegebenen Gränzen sind; so wende man, um den diesen Gränzen entsprechenden Excess E der gegebenen Function zu finden, auf die beiden ganzen rationalen algebraischen Functionen $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ die Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers an, jedoch mit dem Unterschiede, dass man in den vorhergehenden Divisor nie mit dem zuletzt übrig gebliebenen Reste selbst, sondern vielmehr immer mit dem Entgegengesetzten dieses Rests dividirt, und schreibe alle bei dieser Operation gebrauchte Divisoren in Verbindung mit der Function $\varphi(x)$ in einer Reihe neben einander, wodurch man die Reihe

$$\varphi(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots\ \varphi_n(x)$$

erhält, aus welcher sich, wenn man für x die beiden gegebenen Gränzen a und b setzt, ferner die beiden Reihen

$$\varphi(a),\ \varphi_1(a),\ \varphi_2(a),\ \varphi_3(a),\ \ldots\ \varphi_n(a);$$
$$\varphi(b),\ \varphi_1(b),\ \varphi_2(b),\ \varphi_3(b),\ \ldots\ \varphi_n(b)$$

ergeben. Zählt man nun mit völliger Beseitigung aller verschwindenden Glieder die in diesen beiden Reihen vorkommenden Wechsel, und bezeichnet deren Anzahl respective durch w und w', so ist jederzeit $E=w-w'$.

C.

Bestimmung der Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung.

§. 29.

Es sei jetzt $f(x)=0$ eine Gleichung eines beliebigen Grades, und α sei eine reelle Wurzel dieser Gleichung, welche dieselbe μ Mal, aber nicht öfter. enthalten mag, so dass also die Function $f(x)$ durch $(x-\alpha)^\mu$, aber durch keine höhere Potenz von $x-\alpha$, ohne Rest theilbar ist. Unter diesen Voraussetzungen ist nach §. 15.

$$f(\alpha)=0\quad f'(\alpha)=0,\ f''(\alpha)=0,\ \ldots.\ f^{(\mu-1)}(\alpha)=0,$$

aber nicht $f^{(\mu)}(\alpha)=0$. Also ist nach §. 12. II.

$$f(\alpha+i)=\frac{f^{(\mu)}(\alpha)}{1\ldots\mu}\,i^\mu+\frac{f^{(\mu+1)}(\alpha)}{1\ldots(\mu+1)}\,i^{\mu+1}+\frac{f^{(\mu+2)}(\alpha)}{1\ldots(\mu+2)}\,i^{\mu+2}+\ldots.$$

$$f(a+i)=\frac{f^{(\mu)}(a)}{1\ldots(\mu-1)}i^{\mu-1}+\frac{f^{(\mu+1)}(a)}{1\ldots\mu}i^{\mu}+\frac{f^{(\mu+2)}(a)}{1\ldots(\mu+1)}i^{\mu+1}\ldots.,$$

und folglich

$$\frac{f'(a+i)}{f(a+i)}=\frac{\mu+\frac{f^{(\mu+1)}(a)}{f^{(\mu)}(a)}i+\frac{f^{(\mu+2)}(a)}{(\mu+1)f^{(\mu)}(a)}i^2+\ldots}{i+\frac{f^{(\mu+1)}(a)}{(\mu+1)f^{(\mu)}(a)}i^2+\frac{f^{(\mu+2)}(a)}{(\mu+1)(\mu+2)f^{(\mu)}(a)}i^3+\ldots}.$$

Hieraus sieht man, dass der Bruch $\frac{f'(a+i)}{f(a+i)}$ für $i=0$ unendlich wird, so dass also der Bruch $\frac{f'(a)}{f(a)}$ jederzeit unendlich ist. Zugleich aber ergiebt sich aus §. 18., dass für der Null unendlich nahe kommende i der Bruch $\frac{f'(a+i)}{f(a+i)}$ mit dem Bruche $\frac{\mu}{i}$, also mit der Grösse i, gleiches Vorzeichen hat, und daher von dem Negativen zum Positiven übergeht, wenn i vom Negativen zum Positiven übergeht.

Wenn also, indem jetzt i eine unendlich kleine positive Grösse sein soll, x sich von $a-i$ bis $a+i$ stetig ändert, so wird unter den gemachten Voraussetzungen der Bruch $\frac{f'(x)}{f(x)}$ für $x=a$ jederzeit unendlich, und geht, indem er unendlich wird, vom Negativen zum Positiven über.

§. 30.

Wenn nun zwischen den Gränzen a und b, wo jetzt $a<b$ sein soll, die sämmtlich von einander verschiedenen m reellen Wurzeln α_1, α_2, α_3, α_4. . . . . α_m der Gleichung $f(x)=0$ liegen, so wird nach dem vorigen Paragraphen der Bruch $\frac{f'(x)}{f(x)}$ für

$$x=\alpha_1,\ x=\alpha_2,\ x=\alpha_3,\ \ldots.\ x=\alpha_m$$

unendlich, und geht, wenn x sich von a bis b stetig ändert, indem er unendlich wird, jederzeit vom Negativen zum Positiven über. Nimmt man hierzu, dass der Bruch $\frac{f'(x)}{f(x)}$ zwischen den Gränzen a und b offenbar nur für

$$x=\alpha_1,\ x=\alpha_2,\ x=\alpha_3,\ \ldots.\ x=\alpha_m$$

unendlich werden kann, so ist klar, dass, wenn E den Excess der in Rede stehenden gebrochenen Function für die Gränzen a, b bezeichnet, jederzeit $m=E$ ist, wodurch wir unmittelbar zu dem folgenden überaus wichtigen und merkwürdigen Satze geführt werden:

Die Anzahl der zwischen den Gränzen a, b, wo $a<b$ sein soll, liegenden von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ ist jederzeit dem diesen Gränzen entsprechenden Excesse der gebrochenen rationalen algebraischen Function $\frac{f'(x)}{f(x)}$ gleich.

Setzen wir aber mit diesem Satze die in §. 28. bewiesene Regel für den Excess in Verbindung, so erhalten wir das folgende Theorem:

Um, unter der Voraussetzung, dass $a<b$ ist, die Anzahl der zwischen den Gränzen a, b, welche nicht selbst Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ sind, liegenden von einander verschiedenen reellen Wurzeln dieser Gleichung zu finden, wende man auf die beiden ganzen rationalen algebraischen Fuuctionen $f(x)$ und $f'(x)$, deren zweite jederzeit von einem niedrigern Grade als die erste ist, die Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers an, jedoch mit dem Unterschiede, dass man in den vorhergehenden Divisor nie mit dem zuletzt übrig gebliebenen Reste selbst, sondern vielmehr immer mit dem Entgegengesetzten dieses Restes dividirt, und schreibe alle bei dieser Operation gebrauchte Divisoren in Verbindung mit der Function $f(x)$ wie folgt in eine Reihe:

$$f(x),\ f'(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \ldots\ldots$$

Setzt man dann in dieser Reihe $x=a$ und $x=b$, so erhält man die beiden Reihen

$$f(a),\ f'(a),\ f_2(a),\ f_3(a),\ f_4(a),\ \ldots\ldots;$$
$$f(b),\ f'(b),\ f_2(b),\ f_3(b),\ f_4(b),\ \ldots\ldots;$$

und die gesuchte Anzahl der zwischen den gegebenen Gränzen a, b liegenden von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ ist nun jederzeit der Differenz gleich, welche man erhält, wenn man die Anzahl der in der zweiten der beiden obigen Reihen vorkommenden Wechsel von der Anzahl der in der ersten der beiden obigen Reihen vorkommenden Wechsel abzieht, wobei man nicht zu übersehen hat, dass bei der Zählung der in Rede stehenden vorkommenden Wechsel verschwindende Glieder dieser beiden Reihen ganz unberücksichtigt gelassen werden.

Mittelst dieses in jeder Beziehung höchst merkwürdigen Satzes, dessen Erfinder Sturm ist, lässt sich also die Anzahl der zwischen jeden zwei gegebenen Gränzen liegenden von einander verschiedenen reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung in allen Fällen mit völliger Sicherheit bestimmen *).

Bezeichnet man die Anzahl der Wechsel in den Reihen der Vorzeichen, welche die, die höchsten Potenzen von x enthaltenden Glieder der Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \ldots\ldots$$

---

*) Herr Moigno leitet in seiner Abhandlung aus der Lehre vom Excess der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen auch noch die Sätze von Rolle, Budan, Fourier, Descartes über die Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden reellen Wurzeln der Gleichungen mit grosser Leichtigkeit ab. Da aber diese Sätze nur Grössen angeben, welche die Anzahl der zwischen den gegebenen Gränzen liegenden reellen Wurzeln nicht übersteigen kann, so gehören sie jetzt weniger zu unserm Zwecke, und wir werden dieselben daher, um die vorliegende Abhandlung jetzt nicht zu sehr auszudehnen, zu dem Gegenstande eines spätern eignen Aufsatzes machen, in welchem wir uns in Betreff der Lehre vom Excess auf den vorliegenden beziehen werden.

erhalten, wenn man für x eine beliebige negative oder positive Grösse setzt, respective durch N und P, und überlegt, dass nach §. 19. die Vorzeichen der Grössen

$$f(-\infty),\ f'(-\infty),\ f_2(-\infty),\ f_3(-\infty),\ f_4(-\infty),\ \ldots.;$$
$$f(+\infty),\ f'(+\infty),\ f_2(+\infty),\ f_3(+\infty),\ f_4(+\infty),\ \ldots.$$

mit den Vorzeichen ihrer die höchsten Potenzen von $-\infty$ und $+\infty$ enthaltenden Glieder einerlei sind, also die Anzahl der Wechsel in der ersten dieser beiden Reihen offenbar N, die Anzahl der Wechsel in der zweiten Reihe P ist; so wird man sich mittelst des obigen Satzes auf der Stelle überzeugen, dass $N-P$ die Anzahl der sämmtlichen von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ ist, und also auch diese Anzahl auf diese Weise immer mit völliger Sicherheit bestimmt werden kann.

Bezeichnen wir endlich durch O die Anzahl der in der Reihe

$$f(0).\ f'(0),\ f_2(0),\ f_3(0),\ f_4(0),\ \ldots.$$

vorkommenden Wechsel; so ist nach dem obigen Satze $N-O$ die Anzahl der sämmtlichen von einander verschiedenen negativen, $O-P$ die Anzahl der sämmtlichen von einander verschiedenen positiven Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$.

D.

Bestimmung der Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden imaginären Wurzeln einer gegebenen Gleichung.

§. 31.

Wir wollen zuerst zeigen, dass jede imaginäre Grösse $u+v\sqrt{-1}$, in welcher übrigens auch $v=0$ sein kann, wenn ϱ eine gewisse positive Grösse, ω einen gewissen Bogen oder Winkel bezeichnet, unter der Form $\varrho\,(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})$, so dass

$$u+v\sqrt{-1}=\varrho\,(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})$$

ist, dargestellt werden kann. Die vorstehende Gleichung ist nämlich erfüllt, wenn sich die beiden Grössen ϱ und ω, deren erstere positiv sein soll, so bestimmen lassen, dass sie den beiden Gleichungen

$$\varrho\cos\omega=u,\ \varrho\sin\omega=v$$

genügen. Quadrirt man diese beiden Gleichungen, und addirt sie dann zu einander, so erhält man

$$\varrho^2=u^2+v^2,\ \varrho=\sqrt{u^2+v^2},$$

wo die Quadratwurzel positiv genommen werden muss, da ϱ positiv sein soll. Dividirt man mit der ersten der beiden obigen Gleichungen in die zweite, so erhält man

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{v}{u},$$

und folglich, wenn wir durch Arctang $\frac{v}{u}$ den der goniometrischen Tangente $\frac{v}{u}$ entsprechenden Bogen bezeichnen, welcher den kleinsten absoluten Werth hat,

$$\omega = \operatorname{Arctang}\frac{v}{u} + \varkappa\pi,$$

wo $\varkappa$ eine ganze Zahl bezeichnet, über die nun noch die folgende Bestimmung gegeben werden muss.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt

$$\cos\omega = (-1)^{\varkappa} . \cos\operatorname{Arctang}\frac{v}{u}, \quad \sin\omega = (-1)^{\varkappa} . \sin\operatorname{Arctang}\frac{v}{u}.$$

Da nun Arctang $\frac{v}{u}$ den der goniometrischen Tangente $\frac{v}{u}$ entsprechenden Bogen bezeichnet, welcher den kleinsten absoluten Werth hat, so ist cos Arctang $\frac{v}{u}$ immer positiv, sin Arctang $\frac{v}{u}$ dagegen ist positiv oder negativ, jenachdem $\frac{v}{u}$ positiv oder negativ ist. Also ist

$$\cos\operatorname{Arctang}\frac{v}{u} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{u^2}}}, \quad \sin\operatorname{Arctang}\frac{v}{u} = \frac{\frac{v}{u}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{u^2}}},$$

die Quadratwurzel positiv genommen, und folglich

$$\cos\operatorname{Arctang}\frac{v}{u} = \pm\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \sin\operatorname{Arctang}\frac{v}{u} = \frac{\frac{v}{u}\sqrt{u^2}}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem u positiv oder negativ ist, woraus sich ferner unmittelbar ergiebt, dass immer

$$\cos\operatorname{Arctang}\frac{v}{u} = \pm\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \sin\operatorname{Arctang}\frac{v}{u} = \pm\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

und folglich

$$\varrho\cos\operatorname{Arctang}\frac{v}{u} = \pm u, \quad \varrho\sin\operatorname{Arctang}\frac{v}{u} = \pm v$$

ist, wenn man nur immer die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem u positiv oder negativ ist. Folglich ist nach dem Obigen

$$\varrho\cos\omega = \pm(-1)^{\varkappa} . u, \quad \varrho\sin\omega = \pm(-1)^{\varkappa} . v,$$

wenn man die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem u positiv oder negativ ist. Nimmt man nun aber nur die ganze Zahl

$\varkappa$ gerade oder ungerade, jenachdem u positiv oder negativ ist, so ist jederzeit

$$\varrho \cos \omega = u, \ \varrho \sin \omega = v,$$

wie es dem Obigen zufolge erforderlich ist.

Also ist

$$\omega = \operatorname{Arctang} \frac{v}{u} + \varkappa\pi,$$

wenn man nur die an sich übrigens ganz willkührliche ganze Zahl $\varkappa$ gerade oder ungerade nimmt, jenachdem die Grösse u positiv oder negativ ist, wodurch nun sowohl ϱ, als auch ω, vollkommen bestimmt ist.

§. 32.

Lehrsatz. Es seien u und v zwei Functionen der veränderlichen Grösse s, die zwischen den Gränzen $s = s_0$ und $s = s_1$ stetig sind, und deren jede für $s = s_0$ $s = s_1$ gleiche Werthe erhält, so dass, wenn wir die den Werthen s_0, s_1 der veränderlichen Grösse s entsprechenden Werthe dieser beiden Functionen respective durch u_0, v_0 und u_1, v_1 bezeichnen, $u_0 = u_1$ und $v_0 = v_1$ ist; so ist, wenn wir

$$u + v\sqrt{-1} = \varrho (\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1})$$

setzen, und annehmen, dass auch der Bogen ω eine zwischen den Gränzen $s = s_0$ und $s = s_1$ stetige Function von s sei, die den Gränzwerthen s_0 und s_1 der veränderlichen Grösse s entsprechenden Werthe von ω aber durch ω_0 und ω_1 bezeichnen, der den Gränzen s_0 und s_1 entsprechende Excess der Function $\frac{u}{v}$ der Grösse $\frac{\omega_1 - \omega_0}{\pi}$ gleich, wo π die bekannte Bedeutung hat.

Beweis. Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$\omega = \operatorname{Arctang} \frac{v}{u} + \varkappa\pi,$$

wo die an sich willkührliche ganze Zahl $\varkappa$ gerade oder ungerade zu nehmen ist, jenachdem u positiv oder negativ ist. So lange u sein Zeichen nicht verändert, ist also $\varkappa$ constant, oder kann wenigstens immer als constant angenommen werden; ändert aber u sein Zeichen, so muss jederzeit $\varkappa$ um eine Einheit vermehrt oder vermindert werden, oder man muss auf der rechten Seite der obigen Gleichung π addiren oder subtrahiren, wobei es übrigens an sich ganz willkührlich ist, ob man das Erste oder das Zweite thun will.

Hieraus ergiebt sich nun unmittelbar, dass

$$\omega - \omega_0 = \operatorname{Arctang} \frac{v}{u} - \operatorname{Arctang} \frac{u_0}{v_0} + \lambda\pi$$

ist, wo die ganze Zahl λ so lange constant ist oder wenigstens immer als constant angenommen werden kann, so lange u sein Zeichen nicht ändert; ändert aber u sein Zeichen, so muss jederzeit λ um eine Einheit vermehrt oder vermindert, oder es muss auf der rechten Seite der obigen Gleichung π addirt oder subtrahirt werden, wobei es an sich ganz willkührlich ist, ob man das Erste oder das Zweite thut.

Wir wollen nun annehmen, dass s sich von s_0 bis s_1 stetig verändere, so verändern sich den gemachten Voraussetzungen gemäss auch die Grössen $\omega - \omega_0$ und $\text{Arctang}\,\frac{v}{u} - \text{Arctang}\,\frac{v_0}{u_0}$ stetig. Da nach der Voraussetzung die Function u sich stetig verändert, wenn s sich von s_0 bis s_1 stetig ändert, so wird zwischen den Gränzen $s = s_0$ und $s = s_1$ mit jeder Aenderung des Zeichens der Function u ein Durchgang derselben durch Null verbunden sein, und die Function $\frac{v}{u}$ wird daher jederzeit, aber auch nur dann, ihr Zeichen ändern und durch Unendlich gehen, wenn u sein Zeichen ändert, wenn nur zwischen den Gränzen $s = s_0$ und $s = s_1$ die Functionen u und v nie zugleich verschwinden, welches aber mit der Voraussetzung, dass ω, und folglich natürlich auch $\text{Arctang}\,\frac{v}{u}$, sich stetig verändern soll, wenn s sich von s_0 bis s_1 stetig verändert, in Widerspruch stehen würde, indem einem solchen gleichzeitigen Verschwinden der Functionen u und v der völlig unbestimmte Werth $\text{Arctang}\,\frac{0}{0}$ von $\text{Actang}\,\frac{v}{u}$ entsprechen würde. Für $s = s_0$ ist

$$\omega = \omega_0,\ \text{Arctang}\,\frac{v}{u} = \text{Arctang}\,\frac{v_0}{u_0},$$

also

$$\omega - \omega_0 = \text{Arctang}\,\frac{v}{u} - \text{Arctang}\,\frac{v_0}{u_0},$$

oder $\lambda = 0$, und diese Gleichung bleibt so lange richtig, so lange u sein Zeichen nicht ändert, oder, was nach dem Obigen dasselbe ist, $\frac{v}{u}$ sein Zeichen nicht ändert und durch das Unendliche geht. Aendert nun aber das erste Mal u sein Zeichen, oder findet, was nach dem Obigen dasselbe ist, das erste Mal eine Aenderung des Zeichens und ein Durchgang durch das Unendliche der Function $\frac{v}{u}$ Statt, so muss man auf der rechten Seite der obigen Gleichung π addiren oder subtrahiren. Geht $\frac{v}{u}$ vom Negativen durch das Unendliche zum Positiven über, so springt $\text{Arctang}\,\frac{v}{u}$ mit einem Male von $-\frac{1}{2}\pi$ zu $+\frac{1}{2}\pi$ über, oder nimmt mit einem Male um π zu; geht dagegen $\frac{v}{u}$ vom Positiven durch das Unendliche zum Negativen über, so springt $\text{Arctang}\,\frac{v}{u}$ mit einem Male von $+\frac{1}{2}\pi$ zu $-\frac{1}{2}\pi$ über, oder nimmt mit einem Male um π ab; weil nun ω nach der Voraussetzung zwischen den Gränzen $s = s_0$ und $s = s_1$ stetig sein soll, so muss man offenbar auf der rechten Seite der obigen Gleichung im ersten Falle π subtrahiren, im zweiten Falle dagegen π addiren, oder es wird

$$\omega - \omega_0 = \text{Arctang}\,\frac{v}{u} - \text{Arctang}\,\frac{v_0}{u_0} + (-1)^{\mu_1}.\,\pi$$

sein, wenn man nur für μ_1 eine ungerade oder eine gerade Zahl setzt, jenachdem $\frac{v}{u}$ durch das Unendliche vom Negativen zum Positiven oder vom Positiven zum Negativen übergeht. Hieraus ergiebt sich aber sehr leicht, dass, wenn zwischen den in Rede stehenden Gränzen überhaupt i mit einer Aenderung des Zeichens verbundene Durchgänge der Function $\frac{v}{u}$ durch das Unendliche Statt finden, jederzeit

$$\omega_1 - \omega_0$$
$$= \text{Arctang}\,\frac{v_1}{u_1} - \text{Arctang}\,\frac{v_0}{u_0} + (-1)^{\mu_1}.\pi + (-1)^{\mu_2}.\pi + (-1)^{\mu_3}.\pi + \ldots + (-1)^{\mu_i}.\pi$$

oder

$$\omega_1 - \omega_0$$
$$= \text{Arctang}\,\frac{v_1}{u_1} - \text{Arctang}\,\frac{v_0}{u_0} + \{(-1)^{\mu_1} + (-1)^{\mu_2} + (-1)^{\mu_3} + \ldots + (-1)^{\mu_i}\}\pi$$

sein wird, wo in der Reihe $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_i$ alle ungerade Zahlen Durchgängen der Function $\frac{v}{u}$ durch das Unendliche vom Negativen zum Positiven, alle gerade Zahlen dagegen Durchgängen der Function $\frac{v}{u}$ durch das Unendliche vom Positiven zum Negativen entsprechen. Ist nun ε der den Gränzen s_0, s_1 entsprechende Excess der Function $\frac{v}{u}$, so ist offenbar

$$(-1)^{\mu_1} + (-1)^{\mu_2} + (-1)^{\mu_3} + \ldots + (-1)^{\mu_i} = -\varepsilon,$$

und folglich

$$\omega_1 - \omega_0 = \text{Arctang}\,\frac{v_1}{u_1} - \text{Arctang}\,\frac{v_0}{u_0} - \varepsilon\pi.$$

Nach der Voraussetzung ist aber $u_0 = u_1$, $v_0 = v_1$, also natürlich auch $\text{Arctang}\,\frac{v_0}{u_0} = \text{Arctang}\,\frac{v_1}{u_1}$, und folglich

$$\omega_1 - \omega_0 = -\varepsilon\pi.$$

Bezeichnet jetzt e den Excess der Function $\frac{u}{v}$ für die Gränzen s_0 und s_1, so ist nach §. 23., weil die Grössen $\frac{u_0}{v_0}$ und $\frac{u_1}{v_1}$ einander gleich sind, also natürlich auch gleiche Vorzeichen haben, $e + \varepsilon = 0$, $e = -\varepsilon$, und folglich $\omega_1 - \omega_0 = e\pi$, also

$$e = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\pi},$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 33.

Lehrsatz. Wenn, indem u, v; u', v'; u'', v''; u''', v'''; u. s. w. Functionen von s sind, welche, so wie die auf analoge Weise wie im vorigen Paragraphen bezeichneten Functionen ω, ω', ω'', ω''', ..., sämmtlich den Bedingungen des vorigen Satzes genügen, und

$$U+V\sqrt{-1}=(u+v\sqrt{-1})\,(u'+v'\sqrt{-1})\,(u''+v''\sqrt{-1})\,\ldots..$$

ist, die den Gränzen s_0 und s_1 entsprechenden Excesse der Functionen $\frac{u}{v}$, $\frac{u'}{v'}$, $\frac{u''}{v''}$, $\frac{u'''}{v'''}$, u. s. w. und $\frac{U}{V}$ aber respective durch e, e', e'', e''', u. s. w. und E bezeichnet werden; so ist jederzeit

$$E=e+e'+e''+e'''+\ldots.$$

Beweis. Man setze

$$\begin{aligned}
u+v\sqrt{-1}&=\varrho\,(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}),\\
u'+v'\sqrt{-1}&=\varrho'(\cos\omega'+\sin\omega'\sqrt{-1}),\\
u''+v''\sqrt{-1}&=\varrho''(\cos\omega''+\sin\omega''\sqrt{-1}),\\
u'''+v'''\sqrt{-1}&=\varrho'''(\cos\omega'''+\sin\omega'''\sqrt{-1}),
\end{aligned}$$

u. s. w.

also

$$(u+v\sqrt{-1})\,(u'+v'\sqrt{-1})\,(u''+v''\sqrt{-1})\,\ldots..$$

$$=\varrho\varrho'\varrho''\ldots(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\,(\cos\omega'+\sin\omega'\sqrt{-1})\,(\cos\omega''+\sin\omega''\sqrt{-1})\,\ldots..,$$

so ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet,

$$(u+v\sqrt{-1})\,(u'+v'\sqrt{-1})\,(u''+v''\sqrt{-1})\,\ldots..$$

$$=\varrho\varrho'\varrho''\ldots\{\cos(\omega+\omega'+\omega''+\ldots)+\sin(\omega+\omega'+\omega''+\ldots)\sqrt{-1}\},$$

und folglich, wenn

$$U+V\sqrt{-1}=R(\cos\Omega+\sin\Omega\sqrt{-1})$$

gesetzt wird,

$$R=\varrho\varrho'\varrho''\varrho'''\ldots \text{ und } \Omega=\omega+\omega'+\omega''+\omega'''+\ldots,$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass auch die Functionen U, V, Ω den Bedingungen des vorigen Satzes vollständig genügen. Bedient man sich nun ähnlicher Bezeichnungen wie beim vorigen Satze, so ist nach diesem Satze

$$e=\frac{\omega_1-\omega_0}{\pi},\quad e'=\frac{\omega_1'-\omega_0'}{\pi},\quad e''=\frac{\omega_1''-\omega_0''}{\pi},\quad e'''=\frac{\omega_1'''-\omega_0'''}{\pi},\ldots.$$

und

$$E=\frac{\Omega_1-\Omega_0}{\pi}$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\Omega_1=\omega_1+\omega_1'+\omega_1''+\omega_1'''+\ldots,\quad \Omega_0=\omega_0+\omega_0'+\omega_0''+\omega_0'''+\ldots,$$

und folglich

$$\frac{\Omega_1-\Omega_0}{\pi}=\frac{\omega_1-\omega_0}{\pi}+\frac{\omega_1'-\omega_0'}{\pi}+\frac{\omega_1''-\omega_0''}{\pi}+\frac{\omega_1'''-\omega_0'''}{\pi}+\ldots.$$

ist, so ist

$$E=e+e'+e''+e'''+\ldots.,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 34.

Wir wollen uns jetzt in einer Ebene eine geschlossene Curve denken, wollen in derselben einen beliebigen Punkt M als Anfangspunkt der Bogen annehmen, und wollen, indem wir ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem zum Grunde legen, die Coordinaten x, y eines jeden Punktes dieser Curve als Functionen des von dem Anfangspunkte M an nach einer bestimmten Richtung hin genommenen, und bei dem Punkte (xy) sich endigenden Bogens s derselben betrachten. Der ganze Umfang der Curve soll durch c bezeichnet werden. Ist nun der durch die Coordinaten α, β bestimmte Punkt A ein ganz beliebiger Punkt in der Ebene der Curve, so sind nach den einfachsten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten $x-\alpha$, $y-\beta$ die Coordinaten des Punktes (xy) der Curve in Bezug auf ein dem primitiven paralleles Coordinatensystem, dessen Anfang der Punkt A ist, und, wenn wir

$$x-\alpha=\varrho\cos\omega,\ y-\beta=\varrho\sin\omega$$

setzen, so sind ω, ϱ die polaren Coordinaten des Punktes (xy) in Bezug auf den Punkt A als Pol und den positiven Theil der Abscissenaxe des secundären rechtwinkligen Systems als Axe der polaren Coordinaten, von welcher an die Winkel oder Bogen ω nach der Seite der positiven secundären rechtwinkligen Ordinaten hin gezählt werden. Bezeichnen wir nun, indem wir annehmen, dass ω sich stetig verändert, wenn s sich von 0 bis c stetig verändert, die den Werthen 0 und c des Bogens s entsprechenden Werthe von ω durch ω_0 und ω_1, so ist nach §. 32. offenbar

$$e=\frac{\omega_1-\omega_0}{\pi}$$

der den Gränzen 0 und c entsprechende Excess der Function $\frac{x-\alpha}{y-\beta}$. Hierbei ist angenommen worden, dass s sich von 0 bis c stetig verändert, oder dass der Radius Vector ϱ den ganzen Umfang der Curve von AM an bis wieder zu AM durchlaufen habe. Liegt nun der Punkt A oder $(\alpha\beta)$ innerhalb unserer Curve, so ist offenbar

$$\omega_1=\omega_0+2\pi,\ \omega_1-\omega_0=2\pi,\ e=\frac{\omega_1-\omega_0}{\pi}=2.$$

Liegt dagegen der Punkt A oder $(\alpha\beta)$ ausserhalb unserer Curve, so ist offenbar

$$\omega_1=\omega_0,\ \omega_1-\omega_0=0,\ e=\frac{\omega_1-\omega_0}{\pi}=0.$$

Der den Gränzen 0 und c entsprechende Excess der Function $\frac{x-\alpha}{y-\beta}$ ist also 2 oder 0, jenachdem der Punkt $(\alpha\beta)$ innerhalb oder ausserhalb der Curve liegt.

Wir wollen nun annehmen, dass die Gleichung des $n$ten Grades

$$f(x+y\sqrt{-1})=0$$

die n sämmtlich unter einander ungleichen reellen oder imaginären Wurzeln

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha'+\beta'\sqrt{-1},\ \alpha''+\beta''\sqrt{-1},\ \alpha'''+\beta'''\sqrt{-1},\ \ldots.$$

habe; so ist bekanntlich

$$f(x+y\sqrt{-1})$$
$$=\{x-\alpha+(y-\beta)\sqrt{-1}\}\ \{x-\alpha'+(y-\beta')\sqrt{-1}\}$$
$$\{x-\alpha''+(y-\beta'')\sqrt{-1}\}\ \ldots\ldots$$

Die den Gränzen 0, c entsprechenden Excesse der Functionen

$$\frac{x-\alpha}{y-\beta},\ \frac{x-\alpha'}{y-\beta'},\ \frac{x-\alpha''}{y-\beta''},\ \frac{x-\alpha'''}{y-\beta'''},\ \ldots\ldots$$

wollen wir durch e, e', e'', e''', ... bezeichnen, und wollen annehmen, dass keiner der Punkte $(\alpha\ \beta)$, $(\alpha'\ \beta')$, $(\alpha''\ \beta'')$. $(\alpha'''\ \beta''')$, ... ein Punkt unserer Curve sei; so ist nach dem Vorhergehenden

$$e\ =2 \text{ oder } e\ =0,$$
$$e'\ =2 \text{ oder } e'\ =0,$$
$$e''=2 \text{ oder } e''=0,$$
$$e'''=2 \text{ oder } e'''=0,$$

u. s. w.

jenachdem die Punkte $(\alpha\ \beta)$, $(\alpha'\ \beta')$, $(\alpha''\ \beta'')$, $(\alpha'''\ \beta''')$, ... innerhalb oder ausserhalb der Curve liegen. Bezeichnen wir daher die Anzahl der innerhalb der Curve liegenden Punkte durch m, so ist, weil die Excesse e, e', e'', e''', ... der 2 gleich sind oder verschwinden, jenachdem die entsprechenden Punkte innerhalb oder ausserhalb der Curve liegen, offenbar

$$2m=e+e'+e''+e'''+\ldots.$$

und folglich

$$m=\frac{e+e'+e''+e'''+\ldots.}{2}.$$

Setzen wir nun aber

$$f(x+y\sqrt{-1})=U+V\sqrt{-1},$$

also nach dem Obigen

$$U+V\sqrt{-1}=\{x-\alpha+(y-\beta)\sqrt{-1}\}\ \{x-\alpha'+(y-\beta')\sqrt{-1}\}\ldots.,$$

und bezeichnen den Excess der Function $\frac{U}{V}$ für die Gränzen 0, c durch E; so ist nach §. 33.

$$E=e+e'+e''+e'''+\ldots.,$$

und nach dem Obigen folglich $m=\frac{1}{2}E$, woraus sich der folgende merkwürdige Satz ergiebt:

Es sei $f(x+y\sqrt{-1})=U+V\sqrt{-1}=0$ eine beliebige Gleichung mit lauter ungleichen Wurzeln. Wenn nun in einer Ebene eine geschlossene Curve, deren Umfang c sein mag, beschrieben ist, und die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte dieser Curve als zwischen den Gränzen 0 und c stetige Functionen der entsprechenden von einem gewissen Anfangspunkte an gerechneten Bogen der Curve betrachtet werden können; so ist die Anzahl der innerhalb dieser Curve liegenden

Punkte, deren Coordinaten, für x und y in die Gleichung $f(x+y\sqrt{-1})=0$ gesetzt, dieser Gleichung genügen, jederzeit dem halben Excesse der Function $\frac{U}{V}$ für die Gränzen 0, c gleich, wenn nur die Curve so beschaffen ist, dass die Coordinaten keines ihrer Punkte, für x und y gesetzt, der Gleichung $f(x+y\sqrt{-1})=0$ genügen.

§. 35.

Wenn uns nun die lauter ungleiche Wurzeln habende Gleichung

$$f(x+y\sqrt{-1}) = U+V\sqrt{-1}=0$$

gegeben ist, so wollen wir jetzt zu bestimmen suchen, wie viele Wurzeln dieser Gleichung es giebt, deren reeller Theil zwischen den Gränzen x_0, X, und deren Factor der imaginären Grösse $\sqrt{-1}$ zwischen den Gränzen y_0, Y enthalten ist, wobei wir aber annehmen wollen, dass $x+y\sqrt{-1}$ weder für $x=x_0$, noch für $x=X$, noch für $y=y_0$, noch für $y=Y$ eine Wurzel unserer Gleichung wird. Zu dem Ende wollen wir uns x_0, y_0 und X, Y als die rechtwinkligen Coordinaten zweier Punkte in einem beliebigen rechtwinkligen Coordinatensysteme denken, und wollen durch die Endpunkte der den Ordinaten y_0, Y entsprechenden geraden Linien Parallelen mit der Abscissenaxe ziehen, so werden diese Parallelen in Gemeinschaft mit den. den Ordinaten y_0, Y entsprechenden, nöthigenfalls verlängerten Linien jederzeit ein Rechteck einschliessen. Die Coordinaten eines jeden Punktes innerhalb dieses Rechtecks liegen offenbar zwischen den Gränzen x_0, X und y_0, Y, und unsere Aufgabe wird daher offenbar gelöst sein, wenn wir bestimmen können, wie viel Punkte innerhalb dieses Rechtecks es giebt, deren Coordinaten für x und y gesetzt, der gegebenen Gleichung

$$f(x+y\sqrt{-1})=U+V\sqrt{-1}=0$$

genügen, auf welche Bestimmung wir demnach jetzt unser Augenmerk allein werden zu richten haben.

Die durch den Endpunkt von y_0 gehende, der Abscissenaxe parallele Seite unsers Rechtecks soll als die erste; die durch den Endpunkt von X gehende, der Ordinatenaxe parallele Seite soll als die zweite; die durch den Endpunkt von Y gehende, der Abscissenaxe parallele Seite soll als die dritte; die durch den Endpunkt von x_0 gehende, der Ordinatenaxe parallele Seite soll als die vierte Seite unsers Rechtecks angenommen werden. Für jeden Punkt in der ersten, zweiten, dritten, vierten Seite ist respective

$$y=y_0,\ x=X,\ y=Y,\ x=x_0,$$

und weil nun nach der Voraussetzung nie

$$f(x+y_0\sqrt{-1})=0,$$
$$f(X+y\sqrt{-1})=0,$$
$$f(x+Y\sqrt{-1})=0,$$
$$f(x_0+y\sqrt{-1})=0$$

sein soll, so genügen die Coordinaten keines Punktes in dem Umfange unsers Rechtecks der gegebenen Gleichung $f(x+y\sqrt{-1})=0$, und der Umfang dieses Rechtecks kann also als die im vorigen Paragraphen betrachtete geschlossene Curve angenommen werden.

Die Längen der vier Seiten unsers Rechtecks seien nach der Reihe c_1, c_2, c_3, c_4, und $c=c_1+c_2+c_3+c_4$ sei der ganze Umfang des Rechtecks. Der Kürze wegen wollen wir

$$\frac{U}{V}=\varphi(x,\ y)$$

setzen, und der den Gränzen $s=0$, $s=c$, wobei der vorige Paragraph zu vergleichen ist, entsprechende Excess dieser Function sei E; so ist nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze $\frac{1}{2}E$ die Grösse, welche wir suchen, und es wird nun darauf ankommen, zu zeigen, wie der Excess E gefunden werden kann.

Für jeden Punkt der ersten Seite ist $y=y_0$ und folglich $\varphi(x,\ y)=\varphi(x,\ y_0)$. Für $s=0$ und $s=c_1$ ist respective $x=x_0$ und $x=X$; also ist der Excess von $\varphi(x,\ y)$ für die Gränzen $s=0$ und $s=c_1$ offenbar dem Excesse von $\varphi(x,\ y_0)$ für die Gränzen $x=x_0$ und $x=X$, welchen wir durch E_{y_0} bezeichnen wollen, gleich.

Für jeden Punkt der zweiten Seite ist $x=X$, und folglich $\varphi(x,\ y)=\varphi(X,\ y)$. Für $s=c_1$ und $s=c_1+c_2$ ist $y=y_0$ und $y=Y$; also ist der Excess von $\varphi(x,\ y)$ für die Gränzen $s=c_1$ und $s=c_1+c_2$ dem Excesse von $\varphi(X,\ y)$ für die Gränzen $y=y_0$ und $y=Y$, welchen wir durch durch E_X bezeichnen wollen, gleich.

Für jeden Punkt der dritten Seite ist $y=Y$, und folglich $\varphi(x,\ y)=\varphi(x,\ Y)$. Für $s=c_1+c_2$ und $s=c_1+c_2+c_3$ ist $x=X$ und $x=x_0$; also ist der Excess von $\varphi(x,\ y)$ für die Gränzen $s=c_1+c_2$ und $s=c_1+c_2+c_3$ dem Excesse von $\varphi(x,\ Y)$ für die Gränzen $x=X$ und $x=x_0$, welchen wir durch E'_Y bezeichnen wollen, gleich.

Für jeden Punkt der vierten Seite ist $x=x_0$, und folglich $\varphi(x,\ y)=\varphi(x_0,\ y)$. Für $s=c_1+c_2+c_3$ und $s=c_1+c_2+c_3+c_4=c$ ist $y=Y$ und $y=y_0$; also ist der Excess von $\varphi(x,\ y)$ für die Gränzen $s=c_1+c_2+c_3$ und $s=c_1+c_2+c_3+c_4=c$ dem Excesse von $\varphi(x_0,\ y)$ für die Gränzen $y=Y$ und $y=y_0$, welchen wir durch E'_{x_0} bezeichnen wollen, gleich.

Auf der Stelle erhellet nun aber aus dem allgemeinen Begriffe des Excesses die Richtigkeit der Gleichung

$$E=E_{y_0}+E_X+E'_Y+E'_{x_0},$$

wo

$$E_{y_0},\ E_X,\ E'_Y,\ E'_{x_0}$$

die Excesse der Functionen

$$\varphi(x,\ y_0),\ \varphi(X,\ y),\ \varphi(x,\ Y),\ \varphi(x_0,\ y)$$

für die Gränzen

$$x_0,\ X;\ y_0,\ Y;\ X,\ x_0;\ Y,\ y_0$$

sind, welche nach den in der zweiten Abtheilung dieser Abhandlung gegebenen Regeln immer berechnet werden können.

Bezeichnen wir nun aber die den Gränzen x_0, X und y_0, Y entsprechenden Excesse der Functionen $\varphi(x, Y)$ und $\varphi(x_0, y)$ durch E'_Y und E'_{x_0}; so erhellet aus dem allgemeinen Begriffe des Excesses auf der Stelle, dass

$$E'_Y = -E_Y,\ E'_{x_0} = -E_{x_0}$$

ist, und nach dem Obigen ist folglich

$$E = (E_X - E_{x_0}) - (E_Y - E_{y_0}),$$

und also die Grösse, welche wir suchen,

$$\tfrac{1}{2}\{(E_X - E_{x_0}) - (E_Y - E_{y_0})\}.$$

wo

$$E_X,\ E_{x_0},\ E_Y,\ E_{y_0}$$

die Excesse der Functionen

$$\varphi(X, y),\ \varphi(x_0, y),\ \varphi(x, Y),\ \varphi(x, y_0)$$

für die Gränzen

$$y_0,\ Y;\ y_0,\ Y;\ x_0,\ X;\ x_0,\ X$$

sind, welche nach den in der zweiten Abtheilung dieses Aufsatzes entwickelten Regeln jederzeit gefunden werden können.

Das in dem Vorhergehenden enthaltene, von Cauchy gefundene, in jeder Beziehung höchst merkwürdige und wichtige Theorem ist, in Verbindung mit dem Satze von Sturm, und den im Obigen entwickelten allgemeinen Regeln zur Berechnung des Excesses gebrochener Functionen, im eigentlichen Sinne als neu gewonnenes Land in der Theorie der Gleichungen zu betrachten, und wird als eine der wichtigsten Erfindungen auf dem Gebiete der Mathematik dem gegenwärtigen Jahrhundert jederzeit zur Ehre und zum Ruhme gereichen, wobei auch noch die ganz elementare Darstellung, welche man im Obigen kennen gelernt hat, ganz besonders hervorgehoben zu werden verdient. Ganz richtig sagt Herr Abbé Moigno im Eingange seiner Abhandlung: „Lagrange et Legendre auraient en effet eu de la peine à croire qu'on arriverait par des procédés très élémentaires à déterminer, pour une équation de degré quelconque, le nombre des racines imaginaires dont la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ sont compris entre des limites données"; womit wir unsere Darstellung dieses höchst wichtigen Gegenstandes beschliessen wollen.

VI.

Neue Beweise einiger Sätze und allgemeine Bemerkungen über eine in der Analysis in gewissen Fällen gebräuchliche Art der Beweisführung.

Von dem

Herrn Doctor Stern

zu Göttingen.

Eine grosse Anzahl combinatorischer Lehrsätze wird bis jetzt in den Lehrbüchern dadurch bewiesen, dass man sie an die Betrachtung einer nach den Potenzen einer beliebigen Grösse x fortschreitenden Reihe anknüpft. Dahin gehört z. B., um nur ganz Elementares zu erwähnen, das übliche Verfahren, wie man die Recursionsformel für die Coefficienten der $n$ten Potenz eines Polynoniums, den Zusammenhang der Coefficienten in der Exponentialreihe und Aehnliches findet. Auch die merkwürdigen Untersuchungen über die Theilung der Zahlen, welche Euler in dem 16. Cap. seiner Einleitung in die Analysis des Unendlichen angestellt hat, beruhen gänzlich auf Betrachtung solcher Reihen und es ist bis jetzt, so viel mir bekannt ist, nicht gelungen, die dort gefundenen Sätze, die elementarsten abgerechnet, ohne Hülfe der Reihen abzuleiten. So fruchtbar auch diese Art der Beweisführung ist, so scheint sie doch einen wissenschaftlichen Mangel zu haben, insofern sie ein Element x einführt, welches in den zu beweisenden Sätzen gar nicht vorkommt. Sie hat hierin Aehnlichkeit mit dem Verfahren der synthetischen Geometrie, die Hülfslinien einführt, welche ebenfalls den zu beweisenden Sätzen fremd sind. So wie es aber in neuerer Zeit gelungen ist, solche Hülfsconstructionen fast gänzlich entbehrlich zu machen, so scheint es auch wünschenswerth, dass man alle Sätze, die nicht zu der Theorie der Reihen gehören, ohne deren Hülfe finde. Ich hoffe bei einer anderen Gelegenheit nachzuweisen, wie dies bei allen erwähnten Eulerschen Sätzen geleistet werden kann und will hier vorläufig nur für einen derselben einen sehr einfachen Beweis geben. Dieser sehr bekannte Satz sagt,

dass man alle ganzen Zahlen aus den Gliedern der nach den Potenzen von 2 fortgehenden geometrischen **Progression, so dass jedes Glied nur einmal vorkommt, durch Addition bilden kann und zwar nur auf eine einzige Weise.**

Die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen, die man aus den $m+1$ Elementen $1.\ 2,\ 2^2 \ldots 2^m$ bilden kann, ist

$$m+1+\frac{m+1\,.\,m}{1\,.\,2}+\frac{m+1\,.\,m\,.\,m-1}{1\,.\,2\,.\,3}\ldots=2^{m+1}-1.$$

Unter diesen Combinationsformen können nie zwei dem Werthe nach gleich sein, wenn man sich die Elemente durch Addition verbunden denkt. Die zwei Formen, welche gleich sein sollten, müssten entweder beide oder keine von beiden das Element 1 enthalten. Sei nun die eine

$$2^{k_1}+2^{k_2}\ldots+2^{k_r}+M,$$

die andere

$$2^{l_1}+2^{l_2}\ldots\ldots+2^{l_n}+M,$$

wo M die Summe der Elemente bezeichnen soll. die beiden Gruppen gemeinschaftlich sind, so dass also $k_1, k_2, \ldots k_r, l_1, l_2, \ldots l_n$ sämmtlich unter einander verschiedene Zahlen sind. Man hätte mithin

$$2^{k_1}+2^{k_2}\ldots+2^{k_r}=2^{l_1}+2^{l_2}\ldots+2^{l_n}.$$

Bezeichnet nun k_1 den kleinsten Exponenten. so hätte man

$$1+2^{k_2-k_1}\ldots+2^{k_r-k_1}=2^{l_1-k_1}+2^{l_2-k_1}\ldots+2^{l_n-k_1},$$

was unmöglich ist, da keine der Zahlen $k_2-k_1, \ldots k_r-k_1, l_1-k_1 \ldots l_n-k_1$ gleich Null sein kann. Jede der $2^{m+1}-1$ Combinationsformen muss also einen anderen Werth haben. Nun ist der Werth der ersten und kleinsten Combinationsform $=1$, der der letzten und grössten $=1+2+2^2\ldots+2^m=2^{m+1}-1$; mithin müssen die dazwischen liegenden Combinationen alle ganzen Zahlen zwischen 1 und $2^{m+1}-1$ und zwar jede nur einmal geben.

Auf dieselbe Weise kann man auch den anderen bekannten Satz beweisen. **dass man jede Zahl aus der nach Potenzen von 3 aufsteigenden geometrischen Progression durch Addition und Subtraktion, und zwar nur auf eine Weise, bilden kann.**

In den Nov. Act. Acad. Petr. T. IX. p. 44 findet **Euler** mit Hülfe der Integralrechnung den Ausdruck

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{5}{11}+\frac{1}{7}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{9}{15}\ldots.$$

Die Richtigkeit dieses Ausdrucks lässt sich auch leicht vermittelst der Theorie der Kettenbrüche nachweisen. Es ist nämlich $\frac{1}{2}=\frac{1}{7-5}$, $5=\frac{7\,.\,5}{16-9}$, $9=\frac{11\,.\,9}{24-13}$, $13=\frac{15\,.\,13}{32-17}$ u. s. w., mithin

$$\frac{1}{2}=\cfrac{1}{7-\cfrac{7.5}{16-\cfrac{11.9}{24-\cfrac{15.13}{32 \text{ etc.}}}}}$$

Verwandelt man diesen Kettenbruch nach der bekannten Methode in eine Reihe, so erhält man den obigen Ausdruck.

VII.

Turners Eigenschaft der ungeraden Zahlen.

Mitgetheilt und bewiesen vom

Herausgeber.

In der Versammlung brittischer Gelehrten, welche im September 1837 zu Liverpool gehalten wurde theilte Sir W. Hamilton folgende von Turner gefundene Eigenschaft der ungeraden Zahlen mit:

Wenn man die Summen der 1sten; der 2ten und 3ten; der 4ten, 5ten und 6ten; der 7ten. 8ten, 9ten und 10ten; u. s. w. ungeraden Zahl bildet; so erhält man die Cubi der natürlichen Zahlen nach der Reihe.

Es ist nämlich

$$1^3 = 1,$$
$$2^3 = 3+5,$$
$$3^3 = 7+9+11,$$
$$4^3 = 13+15+17+19,$$
$$5^3 = 21+23+25+27+29,$$

u. s. w.

welches auf folgende Art leicht bewiesen werden kann.

Die ersten Glieder der arithmetischen Reihen, deren Summen durch die Cubikzahlen $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots . n^3$ dargestellt werden sollen, sind

$$1.0+1,\ 2.1+1,\ 3.2+1,\ 4.3+1,\ 5.4+1, \ldots, n(n-1)+1;$$

welches leicht durch den Schluss von n auf $n+1$ bewiesen werden kann, indem nämlich, wenn dieses Gesetz für n gilt, das erste Glied der arithmetischen Reihe, deren Summe nach dem Turnerschen Satze durch $(n+1)^3$ dargestellt werden soll, nach der Lehre von den arithmetischen Progressionen offenbar

$$\{n(n-1)+1\}+2(n+1-1)=n(n-1)+2n+1=(n+1)n+1$$

ist, so dass also das bemerkte Gesetz für $n+1$ gilt, wenn es für n gilt, und daher allgemein richtig ist.

Hiernach kommt es nun, um den Turnerschen Satz zu beweisen, bloss darauf an, zu zeigen, dass

$$n^3=\{n(n-1)+1\}+\{n(n-1)+3\}+\{n(n-1)+5\}+\ldots \\ +\{n(n-1)+2n-1\}$$

ist. Die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist aber eine gewöhnliche arithmetische Reihe, deren Summe bekanntlich

$$\frac{\{n(n-1)+1\}+\{n(n-1)+2n-1\}}{2}\,.\,n=n^2\,.\,n=n^3$$

ist, welches bewiesen werden sollte.

Mittelst dieses Turnerschen Satzes kann man nun auch leicht die Reihe der Cubikzahlen $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots\ldots n^3$ summiren.

Nach demselben ist nämlich offenbar

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=1+3+5+7+9+\ldots \\ +\{(n+1)n-1\}.$$

und folglich, weil

$$(n+1)\,n-1=2\,.\,\frac{(n+1)n}{2}-1,$$

also $\frac{1}{2}(n+1)\,n$ die Anzahl der Glieder der arithmetischen Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist, nach der Lehre von den arithmetischen Progressionen

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\frac{1+\{(n+1)n-1\}}{2}\,.\,\frac{(n+1)n}{2} \\ =\left\{\frac{(n+1)n}{2}\right\}^2,$$

wodurch die Summe der dritten Potenzen der natürlichen Zahlen gefunden ist.

Als eine Eigenschaft der geraden Zahlen kann man sich folgenden ebenfalls leicht zu beweisenden Satz merken:

$$1^3+1=1(1^2+1)=2,$$
$$2^3+2=2(2^2+1)=4+6,$$
$$3^3+3=3(3^2+1)=8+10+12,$$
$$4^3+4=4(4^2+1)=14+16+18+20,$$
$$5^3+5=5(5^2+1)=22+24+26+28+30,$$

u. s. w.

VIII.

Einige Resultate aus verglichenen Barometer-Beobachtungen in Berlin und Neustadt-Eberswalde.

Von dem

Herrn Professor F. W. Schneider

an der Königlichen höhern Forst-Lehr-Anstalt zu Neustadt-Eberswalde.

Eine Reihe fortlaufender meteorologischer Beobachtungen, die ich in den Jahren 1835 und 1836 auf Veranlassung des Herrn Prof. Berghaus am hiesigen Orte (Neustadt-Eberswalde) sechsmal täglich anstellte, verglich ich, soweit sie das Barometer betrafen, für den Zeitraum vom 1. Januar bis 11. März 1836 durch graphische Darstellung mit den gleichzeitigen Beobachtungen des Herrn Prof. Mädler in Berlin. Der Nullpunkt meines Barometers (Pistor'sches mikroskopisches Heber-B. Nr. 135, der hiesigen Königl. Forstlehranstalt gehörig) lag 64,89 pariser Fuss über der Ostsee bei Swinemünde, wie durch einen von dem K. Ingenieurgeographen Herrn Bertram und mir bewirkten Anschluss an das Nivellement des Herrn Majors Baeyer zwischen Swinemünde und Berlin, und zwar an die Station Pimpinellenberg bei Oderberg, ermittelt worden war.— Die analoge Bestimmung für das Mädlersche Barometer ist mir nicht bekannt geworden; nur so viel ist gewiss, dass eine Höhendifferenz beider Beobachtungsorte vorhanden war, und diese wenigstens 45 Fuss (Berlin über Neustadt) betragen musste. (Vergl. Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin, von J. J. Baeyer, Berlin 1840, Seite 112.) — Die Mädlerschen Beobachtungen entnahm ich aus der Berliner Vossischen Zeitung, wo sie für $+ 10° R.$ Normaltemperatur des Quecksilbers, täglich mitgetheilt werden, nachdem ich sie wie die meinigen auf 0° Normaltemperatur reducirt hatte. Die horizontale Entfernung beider Beobachtungsorte beträgt ohngefähr 6 Meilen, und ihre Verbindungslinie, von Berlin aus nordöstlich, fällt in die Richtung der herrschenden stärkeren Winde und Stürme.

Die Barometerstände während des oben bezeichneten Zeitraums waren sehr veränderlich; Perioden höherer und hoher Stände (über 28 Zoll) wechselten in kurzen Uebergängen mit ausgezeichnet niederem Luftdruck, der einmal sogar unter 27 Zoll herabging (den 30. Januar Mittags, wo ich 321,92‴ beobachtete).

Den gleichzeitigen Gang beider Kurven habe ich auf Tafel I. in einer Zeichnung entworfen, in der Art, dass ihre Ordinaten die

Barometerhöhen unmittelbar in pariser Maass längs zwei mit 27″ und 28″ bezeichneten Abscissenaxen darstellen, woraus der Vortheil entsteht, dass man den Gang der barometrischen Differenzen sofort in demselben Maassstabe erblickt, wie ihn die Scala des Instruments anzeigte. Obgleich der Zeitraum der verglichenen Beobachtungen nur kurz ist, so zeigen sich doch als deutlich hervortretend folgende Phänomene:

1) Die Neustädter Kurve liegt fast überall höher als die Berliner, wie sich ohnehin nach der Höhendifferenz beider Orte erwarten liess. Nur am 17., 28., 30. und 31. Januar und am 16. Februar war der Barometerstand in Neustadt kurze Zeit hindurch niedriger als der in Berlin, aber mit so geringen Unterschieden, dass sie bei dem Maassstabe der Zeichnung nicht überall sichtbar werden.

2) Alle bedeutenden Aufgänge und Niedergänge sind beiden Kurven gemein.

3) Aber das Phänomen, welches ich hauptsächlich hier zur Sprache bringen wollte, ist die Veränderlichkeit in der Differenz der Barometerstände an beiden Beobachtungsorten, und dabei das Gesetz dieser Veränderlichkeit in den mit zahlreichen Wind- und Sturmperioden durchzogenen Monaten Januar und Februar:

Bei jedem bedeutenden und plötzlichen Niedergang des Barometers nähern sich die Neustädter und Berliner Kurven, zuweilen fast bis zur Kongruenz (s. u. a. den 18., 23., 24., 29. und 30. Januar), bei jedem Aufgange trennen sie sich wieder, und in den Perioden der höheren Barometerstände und bei mehr windstiller und beständiger Witterung sind die Abweichungen am grössten. Ein Gleiches findet Statt bei Niedergängen, die allmählich erfolgen, und bei tiefen Barometerständen, welche mehrere Tage mit geringeren Schwankungen anhalten.

Allerdings kann die Differenz der Barometerhöhen an zwei Orten, die nicht in demselben Niveau liegen, nicht konstant bleiben, sondern muss sich vermöge des Mariottischen Gesetzes bei niederem Luftdruck verkleinern; dass aber diese Ursache nur einen fast unmerklichen Antheil an dem so bedeutenden Zusammengehen der beiden Kurven in ihren tieferen Regionen haben kann, ergiebt sich aus der einfachsten Rechnung, und bedarf keiner Erläuterung.

Die in Nr. 3 gemachte Bemerkung berechtigt zu folgenden Schlüssen:

a) Bei stürmischem Wetter, mit welchem ein schnelles Sinken der Barometersäule verbunden zu sein pflegt, sind die Luftschichten von gleicher Dichtigkeit nicht horizontal, sondern ihre Lage nähert sich der Parallelität mit dem Boden.

In der Richtung von Berlin her erhebt sich das Terrain von 100 zu 150 bis 200′, und fällt dann in das Finowthal von 40′ absoluter Höhe ab; die Luft wird also in ihrer Bewegung von Südwesten her zuerst aufgestaut, und sinkt dann in die tiefere Gegend. Hiermit scheint der eben ausgesprochene Satz in ganz einfachem Zusammenhange zu stehen, insofern die wellenförmige Gestalt der Erdoberfläche auf den Weg der bei windstillem Wetter horizontalen Luftschichten von gleicher Dichtigkeit unmöglich ohne Einfluss bleiben kann. Sobald aber dieser Einfluss einzutreten beginnt, ist die Differenz der gleichzeitigen Barometerstände nicht mehr eine reine Function der Höhendifferenz beider Beobachtungsorte im eigentlichen Sinne, sondern sie entspricht zugleich der relativen Höhenlage dieser Punkte gegen den Boden. Der Nullpunkt des Instruments, an welchem ich in Neustadt beobachtete, befand sich $6\frac{1}{4}$ pariser Fuss über dem Boden; wenn nun auch das Mädlersche Barometer vielleicht 20′ über der Erdoberfläche in Berlin befindlich war, so ist eben die Differenz doch nur so gering, und der Unterschied der absoluten Höhen wieder so gross, dass die Annäherung der beiden Beobachtungskurven mit der eben versuchten Erklärung aufs Beste übereinstimmt. — Allerdings war das Mädlersche Barometer mit dem meinigen nicht verglichen; da sich aber bei ruhigem Wetter die Differenzen des beobachteten Luftdrucks dem Höhenunterschiede der Stationen angemessen zeigten (s. die Zeichnung), so darf daraus auf gute Uebereinstimmung beider Instrumente geschlossen werden.

b) Wenn man die Höhendifferenz zweier Punkte, die sich in gleicher oder nahe gleicher Entfernung vom Boden befinden, aus einer oder einigen gleichzeitigen Barometerbeobachtungen ableitet, so erhält man das Resultat um eine, weder durch Rechnung noch durch Erfahrung jemals mit einiger Sicherheit zu bestimmende Grösse viel wahrscheinlicher zu klein als zu gross. Der Fehler wächst mit der Geschwindigkeit des Windes, wenigstens wenn der Strich desselben nahe oder ganz in die Verbindungslinie der beiden Stationen fallt, und wenn der Barometergang am Tage der Beobachtung eine schnelle Bewegung aufwärts oder abwärts erleidet.

c) Die Berechnung des Höhenunterschiedes derselben Punkte aus den durch mehrjährige Beobachtung gefundenen mittleren Barometerständen giebt um so gewisser falsche, nämlich zu kleine Resultate, je genauer die Mittel sind, d. h. aus je längeren Beobachtungszeiträumen sie abgeleitet wurden*). Denn die mittlere Differenz des Luftdrucks an beiden Orten (oder der Logarithmus seines mittleren Quotienten) setzt sich zusammen ans dem Mittel der normalen Differenzen bei hohem Barometerstande und ruhiger Luft, und aus den viel zu kleinen Differenzen während der Sturmperioden. Eine Bestätigung dieses Satzes glaube ich nachweisen zu können durch die Zahlen, in welchen Herr Major Baeyer (Nivellement zw. Swinemünde und Berlin, Seite V) die Berghaus'schen Berechnungen der Höhe Berlins über der Ostseefläche zusammenstellt, die sich auf zwei- bis neunjährige Beobachtungsreihen in Berlin. Swinemünde, Stralsund, Danzig, Königsberg, Apenrade und Altona gründen. Diese Berechnungen gaben für die Höhe von Berlin (Strassenpflaster im Thorwege der alten Sternwarte) resp. 14,74, 14,33, 14,75, 14.75, 15.23, 14,92, im Mittel 14,78 Toisen, mithin sämmtlich um Beträchtliches zu kleine Werthe, da durch das Baeyer'sche Nivellement dieselbe Höhe = 17,376 Tois. gefunden wurde.

Man kann also diesen Fehler bezeichnen als denjenigen, welchen die nicht horizontale, vielmehr der Parallelität mit dem Boden sich nähernde Bewegung der Luft bei heftigeren Winden hervorbringt, und es dürfte misslich sein, denselben durch eine Korrektion beseitigen zu wollen, die wohl weit

*) Diesen allerdings etwas paradox scheinenden Satz empfiehlt der geehrte Herr Verf. in einem an mich gerichteten Schreiben der sorgfältigen Prüfung der Leser. G.

unsicherer und im Allgemeinen weit beträchtlicher ausfallen dürfte, als etwa die Korrektion wegen Differenz der Breiten, oder die wegen Abnahme der Schwerkraft in der Richtung der Vertikalen. Ich glaube, man würde zuverlässigere Nivellements aus Barometerbeobachtungen erhalten, als bisher, wenn man die Methode der vieljährigen Mittel gänzlich verliesse, dafür, zur Erleichterung der Uebersicht, die korrespondirenden Beobachtungen graphisch zusammenstellte, und alsdann nur diejenigen Perioden aus den Sommer- und Herbstmonaten auswählte und zur Berechnung der Mittel verwendete, welche durchaus keine plötzlichen Schwankungen des Luftdrucks gezeigt hätten.

Obgleich ich kaum zu hoffen wage, durch Vorstehendes gelehrten Meteorologen, zu welchen ich mich nicht rechnen darf, etwas Neues gesagt zu haben, so bedaure ich doch, dass es mir nicht vergönnt war, die graphische Vergleichung des hiesigen und Berliner Barometerganges während eines längern Zeitraumes fortzusetzen. Bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft wäre es gewiss nicht mehr ohne Interesse, folgende Fragen durch zahlreiche korrespondirende, und übersichtlich zusammengestellte Beobachtungen beantwortet zu erhalten:

Wie verhält sich der gleichzeitige Barometergang:

1) Wenn die Station *A* nahe am Boden, die Station *B* entfernt vom Boden (z. B. auf einem hohen Thurme) aber in demselben Niveau mit *A*. befindlich wäre. Sollte hier nicht bei ruhiger Luft und hohem Druck ein gleicher Barometerstand, aber während der Windperioden bei niederem Druck, in der Station *A* ein höherer Barometerstand als der gleichzeitige in *B* zu erwarten sein? Die Kurven würden also die entgegengesetze Erscheinung zeigen, als die der beiliegenden Zeichnung, d. h. die Berührung würde in den Regionen der hohen und länger anhaltenden niederen, die Abweichung in den niederen von kürzerer Dauer, eintreten. Die Berechnung der Höhendifferenz aus den Mitteln ergäbe nicht 0, sondern *A* tiefer als *B*.

2) Wenn die Stationen *A* und *B* in gleicher Entfernung vom Boden, aber in verschiedenen Niveaus lägen? Ein Beitrag zur Untersuchung dieses Falles war der Zweck des vorliegenden Aufsatzes und der beigegebenen Zeichnung.

3) Wenn sich der Boden unter *A* und *B* in demselben Niveau befände? Hier würden, wenn *A* und *B* verschiedene absolute Höhe hätten, auch bei schnell abnehmendem Luftdruck mehr normale Differenzen der Barometerhöhen zu erwarten sein, mithin die Kurven bei den Niedergängen nur geringe Konvergenz zeigen, und die Berechnung der Höhendifferenz aus den barometrischen Mitteln liesse die relativ zuverlässigsten Resultate erwarten.

4) Wie unterscheidet sich der gleichzeitige Gang der Barometerstände, jenachdem die Verbindungslinie der Stationen in die Richtung der herrschenden Winde, oder mehr rechtwinklig mit dieser Richtung fällt? Auch dürfte die Lage des Beobachtungsortes, auf einem langgestreckten Erdrücken oder isolirten Berge, welcher den bewegten unteren Luftschichten ein Ausweichen zur Seite gestattet, nicht weniger wesentliche Modifikationen in die Erscheinungen bringen.

IX.

Ueber Reisebarometer.

Von dem

Herrn Professor F. W. Schneider
an der Königlichen höhern Forst-Lehr-Anstalt zu Neustadt-Eberswalde.

Bekanntlich ist die Reduction der Barometerstände auf eine feste Normaltemperatur des Quecksilbers eine so wichtige Korrektion, dass die Vernachlässigung derselben barometrische Beobachtungen für wissenschaftliche Zwecke fast werthlos macht. Man versieht desshalb jedes Barometer, das zu genauen Untersuchungen dienen soll, mit einem Thermometer. Behufs der Temperaturangabe einer Masse Quecksilbers, welches in einer kurzen Röhre, von gleichem Durchmesser mit dem der Barometerröhre, sich so nahe neben dieser befindet, dass eine gleiche Temperatur beider vorausgesetzt werden darf.

Leider aber wird noch fortwährend im Bau der Barometer, namentlich der zu Beobachtungen auf Reisen bestimmten, ein Versehen begangen, durch welches die Sicherheit in der Korrektion der Quecksilbertemperatur bedeutend gefährdet erscheint. Ich meine diejenigen Instrumente, welche, wie die sonst so vortrefflichen Greinerschen und Pistorschen mikroskopischen Heberbarometer, mit einer etwa auf $\frac{3}{4}$ der Länge fest in einen Holzrahmen verschlossenen, im Uebrigen frei dem Luftzuge ausgesetzten Quecksilberröhre versehen sind. Bei der schlechten Wärmeleitung des Holzes bedarf es offenbar einer längeren Zeit (oft sind $\frac{3}{4}$ Stunden nicht ausreichend), bevor die Temperatur des eingeschlossenen Quecksilbers sich mit der Lufttemperatur ins Gleichgewicht setzt, während dies bei dem im oberen Theile und im kürzeren Schenkel enthaltenen Quecksilber viel eher geschehen muss. Hat man sich nach einer im Freien gelegenen Beobachtungsstation begeben, ist vielleicht das Futteral des Barometers und somit sein ganzer Inhalt durch die aufprallenden Sonnenstrahlen bedeutend erwärmt worden; so zeigt innerhalb geraumer Zeit nach dem Aufhängen des Instruments das Thermometer desselben eine um mehrere Grade höhere Temperatur als die umgebende Luft, da doch ohne Zweifel derjenige Theil der Quecksilbersäule, der in den durchbrochenen Räumen der Holzfassung liegt, bereits einen der Luftwärme näher kommenden Grad angenommen haben muss. Man hat daher durchaus keine Gewährschaft, dass das Quecksilber des Barometers gleichförmig erwärmt sei, wenn man nicht einem oft sehr lästigen Zeitverlust durch stundenlanges Warten sich hingeben will. Selbst dann noch möchte unter gewissen Umständen zweifelhaft sein, ob die Temperatur der verschiedenen Theile der Säule unter einander und mit der Temperatur des Thermometers bis auf Zehntelgrade übereinstimmen, und es bleibt eine Unsicherheit, welche der sonstigen Einrichtung des Instruments (der mikroskopischen Einstellung und dem Nonius auf 50tel Linien) wenig angemessen ist.

Beim Gebrauch ähnlicher Barometer zu Beobachtungen im Zimmer verliert zwar der erwähnte Nachtheil an Erheblichkeit, sobald man in ungeheizten Zimmern beobachtet, wo sich die Temperatur langsam ändert; in geheizten Zimmern aber ist der Uebelstand um so grösser, weil man, an bestimmte Beobachtungszeiten gebunden, die Ausgleichung der Temperatur-Differenzen nicht abwarten kann. Es entsteht also die Frage, ob nicht bei der Verfertigung der Barometer folgende Grundsätze zu befolgen wären:

1) Die Quecksilbersäule muss nach der ganzen Länge beider Schenkel frei liegen, entweder in einem durchbrochenen, durch schmale Metallbänder zusammengehaltenen Gestell, oder vor demselben, und so weit davon entfernt, dass sie ringsum von der Luft bestrichen werden kann.

2) Eine ganz gleichartige Lage muss die Quecksilberröhre haben, in welcher sich die Kugel des fixen Thermometers befindet.

Da es längst transportable Barometer giebt, deren Röhren frei vor der Holzwand liegen, so fällt der Einwand weg, dass die partielle Einschliessung zur Sicherung des Instruments unvermeidlich sei. — Bei dieser Gelegenheit möchte ich auch noch behaupten, dass ein Thermometer der Skala, womit man genauere Instrumente zu versehen pflegt, ganz füglich entbehrt werden kann. Denn wenn angenommen wird, dass die Längenausdehnung des Messings $\frac{1}{10}$ beträgt von der Ausdehnung der Quecksilbersäule, so genügt es selbst bei den genauesten Messungen, die Temperatur der Skala nur in ganzen Graden zu wissen, und um ganze Grade wird das Thermometer der Skala nie vom Thermometer des Quecksilbers abweichen, wenn letzteres nicht im Holze eingeschlossen ist. Man kann folglich die Temperatur der Skala vom Thermometer des Quecksilbers ablesen, ohne fürchten zu müssen, die reducirte Barometerhöhe nicht mit eben so vielen Hunderttheilen der pariser Linie zu erhalten, als wenn man die Temperatur der Skala besonders gemessen hätte.

X.

Das Binomialtheorem für positive ganze Exponenten, als specieller Fall eines allgemeinern Satzes betrachtet.

Vom

Herausgeber.

Längst ist den Mathematikern der merkwürdige Satz von den Binomial-Coefficienten bekannt, auf welchen Euler, Segner, L'Huilier, Rothe, Busse und andere neuere Geometer den kürzesten und einleuchtendsten Beweis des binomischen Lehrsatzes in seiner grössten Allgemeinheit gegründet haben. Nicht so allgemein bekannt dürfte aber die Bemerkung sein, dass in dem in Rede stehenden Satze von den Binomial-Coefficienten, wenn man denselben nur auf eine zweckmässige Weise erweitert, der Binomische Lehrsatz für positive ganze Exponenten selbst als ein specieller Fall enthalten ist, welches zu zeigen der Hauptzweck des vorliegenden kleinen Aufsatzes ist.

Der Kürze wegen wollen wir im Folgenden die Grösse

$$\frac{n(n+k)\,(n+2k)\ldots(n+(p-1)\,k)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots p},$$

wo n und k beliebige Grössen sein können, p aber eine positive ganze Zahl bezeichnen soll, durch $\overset{k}{n}_p$ bezeichnen, so dass also

$$1.\quad \overset{k}{n}_p=\frac{n(n+k)\,(n+2k)\ldots(n+(p-1)\,k)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots p},$$

und folglich für $k=-1$

$$2.\quad \overset{-1}{n}_p=\frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots p}$$

ist, welches Letztere die bekannte Form der Binomial-Coefficienten ist.

Nach 1. ist

$$\overset{k}{n}_p=\frac{n(n+k)\,(n+2k)\ldots(n+(p-1)\,k)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots p},$$

$$\overset{k}{n}_{p+1}=\frac{n(n+k)\,(n+2k)\ldots(n+pk)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(p+1)};$$

und folglich offenbar

$$3.\quad \overset{k}{n}_{p+1} = \overset{k}{n}_p \cdot \frac{n+pk}{p+1}.$$

Weil nach 1.

$$\overset{k}{n}_1 = \frac{n}{1}$$

ist; so muss man, wenn die Relation 3. noch für $p=0$ gelten soll, offenbar

$$4.\quad \overset{k}{n}_0 = 1$$

setzen, welches im Folgenden auch immer geschehen wird.

Nach 1. ist ferner

$$(n \overset{k}{+} k)_p = \frac{(n+k)\,(n+2k)\ldots(n+pk)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots p},$$

und folglich, weil nach dem Obigen offenbar

$$\overset{k}{n}_{p+1} = \frac{(n+k)\,(n+2k)\ldots(n+pk)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots p} \cdot \frac{n}{p+1}$$

ist,

$$5.\quad \overset{k}{n}_{p+1} = (n \overset{k}{+} k)_p \cdot \frac{n}{p+1},$$

welche Relation auch nur dann noch für $p=0$ gilt, wenn man, wie schon in 4. geschehen ist, allgemein $\overset{k}{n}_0 = 1$ setzt.

Nach 3. ist

$$(n \overset{k}{+} k)_p = (n \overset{k}{+} k)_{p-1} \cdot \frac{n+pk}{p},$$

und folglich

$$(n \overset{k}{+} k)_{p-1} + (n \overset{k}{+} k)_p = (n \overset{k}{+} k)_{p-1} \cdot \frac{n+p\,(k+1)}{p}.$$

Nach 5. ist aber

$$\overset{k}{n}_p = (n \overset{k}{+} k)_{p-1} \cdot \frac{n}{p} \text{ oder } (n \overset{k}{+} k)_{p-1} = \overset{k}{n}_p \cdot \frac{p}{n}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$6.\quad (n \overset{k}{+} k)_{p-1} + (n \overset{k}{+} k)_p = \overset{k}{n}_p \cdot \frac{n+p\,(k+1)}{n},$$

eine für das Folgende sehr wichtige Relation. Setzt man in derselben $k=-1$, so erhält man

$$7.\quad (n \overset{-1}{-} 1)_{p-1} + (n \overset{-1}{-} 1)_p = \overset{-1}{n}_p,$$

worin ein sehr bekannter Satz von den Binomial-Coefficienten enthalten ist.

Nach dieser Vorbereitung wollen wir uns nun mit der Summirung der in vielen Beziehungen wichtigen und merkwürdigen Reihe

$$\overset{k}{m}_p + \overset{k}{m}_{p-1} \,.\, \overset{k}{n}_1 + \overset{k}{m}_{p-2} \,.\, \overset{k}{n}_2 + \ldots + \overset{k}{m}_2 \,.\, \overset{k}{n}_{p-2} + \overset{k}{m}_1 \,.\, \overset{k}{n}_{p-1} + \overset{k}{n}_p$$

beschäftigen. Der Kürze wegen bezeichnen wir diese Summe durch $F(p)$, und setzen also

8. $F(p) = \overset{k}{m}_p + \overset{k}{m}_{p-1} . \overset{k}{n}_1 + \overset{k}{m}_{p-2} . \overset{k}{n}_2 + \ldots + \overset{k}{m}_2 . \overset{k}{n}_{p-2} + \overset{k}{m}_1 . \overset{k}{n}_{p-1} + \overset{k}{n}_p.$

Die Summe $F(p)$ kann aber auf folgende Art gefunden werden. Es ist, wovon man sich durch eine ganz einfache Rechnung auf der Stelle überzeugen wird,

$$\begin{aligned}
\frac{m+n+pk}{p+1} &= \frac{m+pk}{p+1} + \frac{n}{p+1} \\
&= \frac{m+(p-1)k}{p+1} + \frac{n+k}{p+1} \\
&= \frac{m+(p-2)k}{p+1} + \frac{n+2k}{p+1} \\
&\quad \text{u. s. w.} \\
&= \frac{m+2k}{p+1} + \frac{n+(p-2)k}{p+1} \\
&= \frac{m+k}{p+1} + \frac{n+(p-1)k}{p+1} \\
&= \frac{m}{p+1} + \frac{n+pk}{p+1}.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten der Gleichung 8. mit der Grösse

$$\frac{m+n+pk}{p+1},$$

indem man dabei für diese Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung 8. ihre obigen Zerlegungen nach der Reihe einführt; so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}
F(p) . \frac{m+n+pk}{p+1} = \; & \overset{k}{m}_p . \frac{m+pk}{p+1} && + \overset{k}{m}_p . \frac{n}{p+1} \\
& + \overset{k}{m}_{p-1} . \frac{m+(p-1)k}{p+1} . \overset{k}{n}_1 && + \overset{k}{m}_{p-1} . \overset{k}{n}_1 . \frac{n+k}{p+1} \\
& + \overset{k}{m}_{p-2} . \frac{m+(p-2)k}{p+1} . \overset{k}{n}_2 && + \overset{k}{m}_{p-2} . \overset{k}{n}_2 . \frac{n+2k}{p+1} \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + \overset{k}{m}_2 . \frac{m+2k}{p+1} . \overset{k}{n}_{p-2} && + \overset{k}{m}_2 . \overset{k}{n}_{p-2} . \frac{n+(p-2)k}{p+1} \\
& + \overset{k}{m}_1 . \frac{m+k}{p+1} . \overset{k}{n}_{p-1} && + \overset{k}{m}_1 . \overset{k}{n}_{p-1} . \frac{n+(p-1)k}{p+1} \\
& + \frac{m}{p+1} . \overset{k}{n}_p && + \overset{k}{n}_p . \frac{n+pk}{p+1}.
\end{aligned}$$

Weil nun nach 3.

$$\overset{k}{m}_p . \frac{m+pk}{p+1} = \overset{k}{m}_p . \frac{m+pk}{p+1} . \frac{p+1}{p+1} = \overset{k}{m}_{p+1} . \frac{p+1}{p+1},$$

$$\overset{k}{m}_{p-1} . \frac{m+(p-1)k}{p+1} = \overset{k}{m}_{p-1} . \frac{m+(p-1)k}{p} . \frac{p}{p+1} = \overset{k}{m}_p . \frac{p}{p+1},$$

$$\overset{k}{m}_{p-2} . \frac{m+(p-2)k}{p+1} = \overset{k}{m}_{p-2} . \frac{m+(p-2)k}{p-1} . \frac{p-1}{p+1} = \overset{k}{m}_{p-1} . \frac{p-1}{p+1},$$

u. s. w.

$$\overset{k}{m}_2 \cdot \frac{m+2k}{p+1} = \overset{k}{m}_2 \cdot \frac{m+2k}{3} \cdot \frac{3}{p+1} = \overset{k}{m}_3 \cdot \frac{3}{p+1},$$

$$\overset{k}{m}_1 \cdot \frac{m+k}{p+1} = \overset{k}{m}_1 \cdot \frac{m+k}{2} \cdot \frac{2}{p+1} = \overset{k}{m}_2 \cdot \frac{2}{p+1},$$

$$\frac{m}{p+1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{p+1} = \overset{k}{m}_1 \cdot \frac{1}{p+1};$$

und ganz auf ähnliche Art

$$\frac{n}{p+1} = \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{p+1} = \overset{k}{n}_1 \cdot \frac{1}{p+1},$$

$$\overset{k}{n}_1 \cdot \frac{n+k}{p+1} = \overset{k}{n}_1 \cdot \frac{n+k}{2} \cdot \frac{2}{p+1} = \overset{k}{n}_2 \cdot \frac{2}{p+1},$$

$$\overset{k}{n}_2 \cdot \frac{n+2k}{p+1} = \overset{k}{n}_2 \cdot \frac{n+2k}{3} \cdot \frac{3}{p+1} = \overset{k}{n}_3 \cdot \frac{3}{p+1},$$

u. s. w.

$$\overset{k}{n}_{p-2} \cdot \frac{n+(p-2)k}{p+1} = \overset{k}{n}_{p-2} \cdot \frac{n+(p-2)k}{p-1} \cdot \frac{p-1}{p+1} = \overset{k}{n}_{p-1} \cdot \frac{p-1}{p+1},$$

$$\overset{k}{n}_{p-1} \cdot \frac{n+(p-1)k}{p+1} = \overset{k}{n}_{p-1} \cdot \frac{n+(p-1)k}{p} \cdot \frac{p}{p+1} = \overset{k}{n}_p \cdot \frac{p}{p+1},$$

$$\overset{k}{n}_p \cdot \frac{n+pk}{p+1} = \overset{k}{n}_p \cdot \frac{n+pk}{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1} = \overset{k}{n}_{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1}$$

ist; so ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned}
F(p) \cdot \frac{m+n+k}{p+1} = {} & \overset{k}{m}_{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1} + \overset{k}{m}_p \cdot \overset{k}{n}_1 \cdot \frac{1}{p+1} \\
& + \overset{k}{m}_p \cdot \overset{k}{n}_1 \cdot \frac{p}{p+1} + \overset{k}{m}_{p-1} \cdot \overset{k}{n}_2 \cdot \frac{2}{p+1} \\
& + \overset{k}{m}_{p-1} \cdot \overset{k}{n}_2 \cdot \frac{p-1}{p+1} + \overset{k}{m}_{p-2} \cdot \overset{k}{n}_3 \cdot \frac{3}{p+1} \\
& + \overset{k}{m}_{p-2} \cdot \overset{k}{n}_3 \cdot \frac{p-2}{p+1} + \overset{k}{m}_{p-3} \cdot \overset{k}{n}_4 \cdot \frac{4}{p+1} \\
& \text{u. s. w.} \\
& + \overset{k}{m}_3 \cdot \overset{k}{n}_{p-2} \cdot \frac{3}{p+1} + \overset{k}{m}_2 \cdot \overset{k}{n}_{p-1} \cdot \frac{p-1}{p+1} \\
& + \overset{k}{m}_2 \cdot \overset{k}{n}_{p-1} \cdot \frac{2}{p+1} + \overset{k}{m}_1 \cdot \overset{k}{n}_p \cdot \frac{p}{p+1} \\
& + \overset{k}{m}_1 \cdot \overset{k}{n}_p \cdot \frac{1}{p+1} + \overset{k}{n}_{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {} & \overset{k}{m}_{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1} \\
& + \overset{k}{m}_p \cdot \overset{k}{n}_1 \cdot \left\{\frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1}\right\} \\
& + \overset{k}{m}_{p-1} \cdot \overset{k}{n}_2 \cdot \left\{\frac{p-1}{p+1} + \frac{2}{p+1}\right\} \\
& + \overset{k}{m}_{p-2} \cdot \overset{k}{n}_3 \cdot \left\{\frac{p-2}{p+1} + \frac{3}{p+1}\right\}
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$+\overset{k}{m}_2 \,.\, \overset{k}{n}_{p-1} \,.\, \left\{\frac{2}{p+1}+\frac{p-1}{p+1}\right\}$$

$$+\overset{k}{m}_1 \,.\, \overset{k}{n}_p \,.\, \left\{\frac{1}{p+1}+\frac{p}{p+1}\right\}$$

$$+\overset{k}{n}_{p+1} \,.\, \frac{p+1}{p+1}$$

$$=\overset{k}{m}_{p+1}+\overset{k}{m}_p \,.\, \overset{k}{n}_1+\overset{k}{m}_{p-1} \,.\, \overset{k}{n}_2+\overset{k}{m}_{p-2} \,.\, \overset{k}{n}_3+\ldots+\overset{k}{m}_2 \,.\, \overset{k}{n}_{p-1}$$
$$+\overset{k}{m}_1 \,.\, \overset{k}{n}_p+\overset{k}{n}_{p+1}\,.$$

So wie nun oben in 8.

$$F(p)=\overset{k}{m}_p+\overset{k}{m}_{p-1} \,.\, \overset{k}{n}_1+\overset{k}{m}_{p-2} \,.\, \overset{k}{n}_2+\ldots+\overset{k}{m}_2 \,.\, \overset{k}{n}_{p-2}$$
$$+\overset{k}{m}_1 \,.\, \overset{k}{n}_{p-1}+\overset{k}{n}_p$$

gesetzt worden ist, muss natürlich

$$F(p+1)=\overset{k}{m}_{p+1}+\overset{k}{m}_p \,.\, \overset{k}{n}_1+\overset{k}{m}_{p-1} \,.\, \overset{k}{n}_2+\overset{k}{m}_{p-2} \,.\, \overset{k}{n}_3+\ldots$$
$$+\overset{k}{m}_2 \,.\, \overset{k}{n}_{p-1}+\overset{k}{m}_1 \,.\, \overset{k}{n}_p+\overset{k}{n}_{p+1}$$

gesetzt werden, und aus dem Vorhergehenden ergiebt sich daher unmittelbar die folgende Relation:

$$\bullet\, 9.\quad F(p+1)=F(p)\,.\,\frac{m+n+pk}{p+1}.$$

Weil nun offenbar

$$F(1)=\overset{k}{m}_1+\overset{k}{n}_1=\frac{m}{1}+\frac{n}{1}=\frac{m+n}{1}$$

ist; so ist nach dieser Relation

$$F(1)=\frac{m+n}{1},$$

$$F(2)=F(1)\,.\,\frac{m+n+k}{2}$$
$$=\frac{m+n}{1}\,.\,\frac{m+n+k}{2},$$

$$F(3)=F(2)\,.\,\frac{m+n+2k}{3}$$
$$=\frac{m+n}{1}\,.\,\frac{m+n+k}{2}\,.\,\frac{m+n+2k}{3}.$$

$$F(4)=F(3)\,.\,\frac{m+n+3k}{4}$$
$$=\frac{m+n}{1}\,.\,\frac{m+n+k}{2}\,.\,\frac{m+n+2k}{3}\,.\,\frac{m+n+3k}{4},$$

u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und das Gesetz, nach welchem die obigen Ausdrücke fortschreiten, liegt deutlich vor Augen. Also ist in völliger Allgemeinheit

$$10.\quad F(p) = \frac{(m+n)(m+n+k)(m+n+2k)\dots(m+n+(p-1)k)}{1.2.3.4\dots p}$$

d. i. nach 1.

$$11.\quad F(p) = (m \overset{k}{+} n)_p\,,$$

und folglich nach 8.

$$12.\quad (m\overset{k}{+}n)_p = \overset{k}{m}_p + \overset{k}{m}_{p-1}\,.\,\overset{k}{n}_1 + \overset{k}{m}_{p-2}\,.\,\overset{k}{n}_2 + \dots + \overset{k}{m}_2\,.\,\overset{k}{n}_{p-2}$$
$$+ \overset{k}{m}_1\,.\,\overset{k}{n}_{p-1} + \overset{k}{n}_p\,,$$

eine auf jeden Fall höchst merkwürdige Relation. Für $k = -1$ wird dieselbe

$$13.\quad (m\overset{-1}{+}n)_p = \overset{-1}{m}_p + \overset{-1}{m}_{p-1}\,.\,\overset{-1}{n}_1 + \overset{-1}{m}_{p-2}\,.\,\overset{-1}{n}_2 + \dots + \overset{-1}{m}_2\,.\,\overset{-1}{n}_{p-2}$$
$$+ \overset{-1}{m}_1\,.\,\overset{-1}{n}_{p-1} + \overset{-1}{n}_p\,,$$

welches der oben erwähnte längst bekannte Satz von den Binomial-Coefficienten ist.

Setzt man aber in der Gleichung 12., wie es verstattet ist, $k = 0$; so erhält man

$$(m\overset{0}{+}n)_p = \overset{0}{m}_p + \overset{0}{m}_{p-1}\,.\,\overset{0}{n}_1 + \overset{0}{m}_{p-2}\,.\,\overset{0}{n}_2 + \dots + \overset{0}{m}_2\,.\,\overset{0}{n}_{p-2}$$
$$+ \overset{0}{m}_1\,.\,\overset{0}{n}_{p-1} + \overset{0}{n}_p\,.$$

Weil nun nach 1. überhaupt

$$\overset{0}{n}_p = \frac{n^p}{1\dots p}$$

ist; so ist wegen vorstehender Gleichung

$$\frac{(m+n)^p}{1\dots p} = \frac{m^p}{1\dots p} + \frac{m^{p-1}}{1\dots(p-1)}\cdot\frac{n}{1} + \frac{m^{p-2}}{1..(p-2)}\cdot\frac{n^2}{1.2}$$
$$+ \frac{m^{p-3}}{1..(p-3)}\cdot\frac{n^3}{1.2.3} + \dots$$
$$\dots + \frac{m^2}{1.2}\cdot\frac{n^{p-2}}{1..(p-2)} + \frac{m}{1}\cdot\frac{n^{p-1}}{1..(p-1)} + \frac{n^p}{1\dots p},$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit $1\dots p$ multiplicirt,

$$(m+n)^p = m^p + \frac{p}{1}m^{p-1}n + \frac{p(p-1)}{1.2}m^{p-2}n^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}m^{p-3}n^3 + \dots$$
$$\dots + \frac{p(p-1)\dots 3}{1\dots(p-2)}m^2n^{p-2} + \frac{p(p-1)\dots 2}{1\dots(p-1)}mn^{p-1} + \frac{p(p-1)\dots 1}{1\dots p}n^p\,,$$

d. i. nach 1.

$$14.\quad (m+n)^p = m^p + \overset{-1}{p}_1\,.\,m^{p-1}n + \overset{-1}{p}_2\,.\,m^{p-2}n^2 + \overset{-1}{p}_3\,.\,m^{p-3}n^3 + \dots$$
$$\dots + \overset{-1}{p}_{p-2}\,.\,m^2n^{p-2} + \overset{-1}{p}_{p-1}\,.\,mn^{p-1} + \overset{-1}{p}_p\,.\,n^p\,,$$

in welcher Gleichung das Binomialtheorem für positive ganze Exponenten enthalten ist.

Hieraus sieht man also, dass die merkwürdige allgemeine Relation 12. das Binomialtheorem für positive ganze Exponenten als einen speciellen Fall in sich enthält.

XI.

Bemerkung zur Trigonometrie.

Vom

Herausgeber.

Wenn der Winkel oder Bogen φ mittelst der Gleichung

$$\cos\varphi = A \text{ oder } \sin\varphi = A$$

zu finden ist, und der absolute Werth von A der Einheit sehr nahe kommt, so kann φ mittelst der gewöhnlichen goniometrischen Tafeln nicht mit der erforderlichen Genauigkeit berechnet werden, weshalb man auch beim trigonometrischen Calcul solchen Formeln den Vorzug zu geben pflegt, bei denen die gesuchten Winkel alle mittelst ihrer Tangenten oder Cotangenten gefunden werden. Wie es mir scheint, kann man sich aber in solchen Fällen wie die obigen jederzeit auf folgende Art helfen.

Man berechne einen Hülfswinkel Θ mittelst der Formel

$$\tang\Theta = A,$$

welches jederzeit mit der erforderlichen Genauigkeit geschehen kann. Ist dann

$$\cos\varphi = A,$$

so ist $\cos\varphi = \tang\Theta$, und folglich

$$\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1-\tang\Theta}{1+\tang\Theta},$$

also nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\tang\tfrac{1}{2}\varphi^2 = \tang(45^\circ-\Theta),\quad \tang\tfrac{1}{2}\varphi = \pm\sqrt{\tang(45^\circ-\Theta)},$$

mittelst welcher Formel φ jederzeit mit der erforderlichen Genauigkeit berechnet werden kann. Ist dagegen

$$\sin\varphi = A,$$

so ist $\sin\varphi = \tang\Theta$, und folglich

$$\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} = \frac{1-\tang\Theta}{1+\tang\Theta},$$

also nach bekannten goniometrischen Formeln

$\tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)^2 = \tan(45^\circ - \Theta)$, $\tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) = \pm\sqrt{\tan(45^\circ - \Theta)}$, mittelst welcher Formel φ wieder jederzeit mit der erforderlichen Genauigkeit gefunden werden kann.

Um ein Beispiel zu geben, so sei aus zwei Seiten a, b eines ebenen Dreiecks und dem Gegenwinkel α der einen a dieser beiden Seiten der Gegenwinkel β der anderen Seite b zu finden, und es sei gegeben

$$\alpha = 18^\circ\,.\,14'\,.\,0'' \text{ und } \log\frac{b}{a} = 0{,}5046112.$$

Weil nun bekanntlich $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$ ist, so ist

$$\begin{aligned}\log\frac{b}{a} &= 0{,}5046112\\ \log\sin\alpha &= 9{,}4953883\\ \hline \log\sin\beta &= 9{,}9999995\end{aligned}$$

Ein Blick in die Callet'schen Tafeln, deren ich mich hier bedienen werde, zeigt, dass β in diesem Falle mittelst seines Sinus nicht mit der erforderlichen Genauigkeit gefunden werden kann, weshalb man nun die Rechnung auf folgende Art führen wird:

$$\begin{aligned}\log\tan\Theta &= 9{,}9999995\\ \Theta &= 44^\circ.\,59'.\,59'',\,88\\ 45^\circ - \Theta &= 0.\;\;0.\;\;0,\,12\\ \log\tan(45^\circ - \Theta) &= 3{,}7647562\\ \log\tan(45^\circ - \tfrac{1}{2}\beta) &= 6{,}8823781\\ 45^\circ - \tfrac{1}{2}\beta &= 0^\circ.\,2'.\,37'',\,39\\ 90^\circ - \beta &= 0.\;5.\;14,\;\;78\\ \beta &= 89.\,54.\,45,\,22\end{aligned}$$

Uebrigens hat β im vorliegenden Falle, wo offenbar $a < b$ ist, zwei Werthe, deren Summe 180° beträgt. Der zweite Werth ist die Ergänzung des durch die vorhergehende Rechnung gefundenen Werths zu 180°, nämlich $90^\circ.\,5'.\,14'',\,78$.

XII.

Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin. Auf dienstliche Veranlassung ausgeführt von J. J. Baeyer, Major im Generalstabe. Mit einer Uebersichtskarte. Berlin. 1840. 4.

Vom

Herausgeber.

Die aus zu verschiedenen Zeiten angestellten barometrischen Messungen und Vergleichungen für die Höhe Berlins über dem Meere gezogenen Resultate, welche der Verfasser in der Vorrede zu seinem in jeder Beziehung höchst schätzbaren Werke zusammenstellt, waren bisher höchst schwankend, und es herrschte gerade über dieses Element noch immer die grösste Ungewissheit. Als nun dasselbe bei der im Frühjahre 1835 von Bessel vorgenommenen Bestimmung der Länge des Secundenpendels auf der Berliner Sternwarte als ein wichtiges Reductionselement zur Sprache kam, ersuchte Alexander von Humboldt den Chef des Generalstabes der Armee und General der Infanterie Herrn Krauseneck, zur endlichen Entscheidung der Sache ein trigonometrisches Nivellement zwischen der Ostsee und Berlin ausführen zu lassen. Letzterer, stets bereit wissenschaftliche Zwecke kräftigst zu unterstützen und zu fördern, ging sogleich mit der grössten Bereitwilligkeit auf den Vorschlag ein, und ertheilte dem Verfasser den Auftrag, in Gemeinschaft mit dem in Neu-Vorpommern eben mit Messungen beschäftigten Ingenieur-Geographen Herrn Bertram als zweitem Beobachter die Arbeit im Laufe des Sommers 1835 auszuführen. Im September 1835 war die ganze Operation beendigt. Die Rechnungen sind mit Hülfe des Lieutenants von Mörner, eines jungen thätigen und kenntnissreichen Offiziers, sämmtlich nach Bessels Vorschriften ausgeführt, welcher Letztere sich der Sache überhaupt auf das Eifrigste annahm und seinen Rath nie fehlen liess.

Die Instrumente waren: 1) Ein Theodolit von Ertel in München mit 15zölligem Azimuthalkreis und 8zölligem Höhenkreis, deren Nonien unmittelbar respective 2 und 4 Secunden angaben. 2) Ein Theodolit von Gambey in Paris mit einem 12zölligen Azimuthalkreise und einem eben so grossen Höhenkreise, deren Nonien eine unmittelbare Ablesung der Winkel von 3 Secunden gestatteten. 3) Ein Box-Chronometer von Tiede in Berlin, und 4) ein Taschen-Chronometer von Tiede. Mit Nr. 1. und 3. beobachtete der Verfasser, mit Nr. 2. und 4. Herr Bertram.

Die Dreiecksverbindung zwischen Berlin und Swinemünde konnte dnrcb Anschliessung an eine trigonometrische Vermessung der Oder bewirkt werden, welche das Königliche Ministerium für den Handel, die Gewerbe und das Bauwesen in den Jahren 1820 bis 1824 durch den Premier-Lieutenant Asmann hatte ansführen lassen.

Die Höhenmessungen wnrden natürlich, um den Einfluss der Strahlenbrechung so viel als möglich zn beseitigen, auf bekannte Weise durch gleichzeitige Beobachtung gegenseitiger Zenithdistanzen ausgeführt, und bei der Berechnung die folgenden, dem Wesentlichen nach Bessel angehörenden, von dem Verfasser aber in Bezug auf praktische Anwendung erweiterten und weiter entwickelten Formeln in Anwendung gebracht.

Die Höben zweier Pnnkte A und B über dem Meere seien h und h'; die in A beobachtete Zenithdistanz von B sei z, die gleichzeitig in B beobachtete Zenithdistanz von A sei z'. Bezeichnen wir nun die entsprechenden Refractionen durch Δz und $\Delta z'$, so sind die wahren Zenithdistanzen von B und A respective $z + \Delta z$ und $z' + \Delta z'$, wobei man nicht zu übersehen hat, dass durch die Strahlenbrechung die Höhen vergrössert, die Zenithdistanzen also vermindert werden. Obgleich nun ein Durchschnitt der Vertikallinien zweier Punkte auf dem Erdellipsoid nur bedingungsweise Statt findet, so wird doch mit Rücksicht auf die geringe Verschiedenheit der Lage zweier von einander sichtbaren Punkte der Fehler unberücksichtigt bleiben, nnd man wird also den von den Vertikallinien der beiden Punkte A und B eingeschlossenen Winkel sowohl, als auch den Durchschnittspunkt der beiden in Rede stehenden Vertikallinien durch C bezeichnen können. Denkt man sich nun das Dreieck ABC, so wird auch ohne Figur auf der Stelle ersichtlich sein, dass dessen äussere an A und B nnd der Seite AB liegende Winkel respective $z + \Delta z$ und $z' + \Delta z'$, die innern Winkel dieses Dreiecks also $180° - (z + \Delta z)$, $180° - (z' + \Delta z')$ uud C sind, welches die Gleichung

$$360° + C - (z + \Delta z + z' + \Delta z') = 180°$$

oder

$$z + \Delta z + z' + \Delta z' = 180° + C$$

giebt. Setzt man nun $\Delta z + \Delta z' = kC$, wo k nach Gauss der Coefficient der Strahlenbrechung ist, unter welchem die französischen Mathematiker gewöhnlich $\frac{1}{2}k$ verstehen, so erhält man die Gleichung

$$z + z' - 180° = (1 - k)\, C.$$

Bezeichnet r den Radius der Erde, die wir hier als eine Kugel betrachten wollen, nnd s den dem Winkel C entsprechenden Bogen, d. h. die horizontale Entfernung der beiden Punkte A und B, so hat man die Proportion

$$\sin 1'' : \frac{s}{r} = 1 : C,$$

und folglich

$$C = \frac{s}{r \sin 1''},$$

oder wenn $\omega = 206264{,}8$ gesetzt wird,

$$C = \frac{s\omega}{r},$$

wodurch man C in Secunden ausgedrückt erhält. Führt man nun diesen Ausdrnck von C in die obige Gleichung zwischen z, z', k, C ein, so ergiebt sich

$$1 - k = \frac{r}{s\omega}(z + z' - 180^\circ),$$

welche Formel den Coefficienten der Strahlenbrechung liefert, ausgedrückt durch die gegenseitig gleichzeitig beobachteten Zenithdistanzen und die Entfernung der Beobachtungspunkte. Natürlich muss nun auch in dieser Gleichung die Grösse $z + z' - 180^\circ$ in Secnnden ausgedrückt gedacht werden. Hat man auf diese Weise k gefunden, so kann auch $\Delta z + \Delta z'$ gefnnden werden, weil nach dem Obigen

$$\Delta z + \Delta z' = kC$$

ist. Um nun aber Δz und $\Delta z'$ selbst zu finden, ist man nach dem jetzigen Stand der Sache genöthigt $\Delta z = \Delta z'$ zu setzen, welches freilich nur näherungsweise, und zwar mit desto grösserer Genauigkeit richtig ist, je geringer der Höhenunterschied der beiden Beobachtungsorte, und mit je grösserm Rechte also die Voraussetzung gleicher Dichtigkeit der Luft an beiden Beobachtungsorten zulässig ist. Auf die Gleichungen $\Delta z = \Delta z'$ und $\Delta z + \Delta z' = kC$ gestützt, erhält man

$$\Delta z = \Delta z' = \tfrac{1}{2}kC,$$

wodurch also, da k nach dem Obigen schon bekannt ist, die Refractionen Δz und $\Delta z'$ sich ergeben.

Das Dreieck ABC liefert nun, indem wir jetzt zu der Bestimmung des Höhenunterschieds der beiden Beobachtungsorte selbst übergehen, nach einem bekannten Satze der ebenen Trigonometrie die Proportion

$$AC + BC : AC - BC = \cot \tfrac{1}{2}C : \tang \tfrac{1}{2}(B - A),$$

oder, weil offenbar $AC = r + h$, $BC = r + h'$ ist,

$$2r + h + h' : h - h' = \cot \tfrac{1}{2}C : \tang \tfrac{1}{2}(B - A),$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$B - A = z + \Delta z - z' - \Delta z'$$

ist,

$$2r + h + h' : h - h' = \cot \tfrac{1}{2}C : \tang \tfrac{1}{2}(z + \Delta z - z' - \Delta z'),$$

also

$$h - h' = 2r\left(1 + \frac{h + h'}{2r}\right) \tang \tfrac{1}{2}C \tang \tfrac{1}{2}(z + \Delta z - z' - \Delta z'),$$

oder, weil man $\Delta z = \Delta z'$ setzt, und bei nicht sehr beträchtlichen Höhen $\frac{h + h'}{2r}$ offenbar als eine verschwindende Grösse betrachtet werden kann,

$$h - h' = 2r \tang \tfrac{1}{2}C \tang \tfrac{1}{2}(z - z'),$$

oder endlich, weil $2r \tang \frac{1}{2}C = s$ gesetzt werden kann,

$$h - h' = s \text{ tang } \tfrac{1}{2}(z - z').$$

Führt man in diese Gleichung für z' den aus dem Obigen sich ergebenden Werth

$$z' = 180^\circ + (1 - k)\, C - z$$

ein, so erhält man

$$h - h' = -s \cot \left(z - \frac{1-k}{2}\, C\right)$$

oder

$$h' - h = s \cot \left(z - \frac{1-k}{2}\, C\right),$$

oder endlich auch nach dem Obigen

$$h' - h = s \cot \left\{z - (1-k)\frac{s\omega}{2r}\right\},$$

wo ω den obigen Werth hat.

Weil

$$z' + \Delta z' = 180^\circ + C - (z + \Delta z),\quad z + \Delta z = 180^\circ + C - (z' + \Delta z')$$

ist, so erhält man aus dem Obigen auch leicht die beiden Gleichungen

$$h' - h = 2r\left(1 + \frac{h'+h}{2r}\right) \text{ tang } \tfrac{1}{2}C \cot \left(z + \Delta z - \tfrac{1}{2}C\right),$$

$$h - h' = 2r\left(1 + \frac{h'+h}{2r}\right) \text{ tang } \tfrac{1}{2}C \cot \left(z' + \Delta z' - \tfrac{1}{2}C\right);$$

oder

$$\cot\left(z + \Delta z - \tfrac{1}{2}C\right) = \frac{(h'-h)\cot \tfrac{1}{2}C}{2r\left(1 + \frac{h'+h}{2r}\right)},\quad \cot\left(z' + \Delta z' - \tfrac{1}{2}C\right) = \frac{(h-h')\cot \tfrac{1}{2}C}{2r\left(1 + \frac{h'+h}{2r}\right)},$$

mittelst welcher die Refractionen Δz und $\Delta z'$ bestimmt werden können, wenn die Höhen der beiden Punkte, ihre horizontale Entfernung und die gleichzeitig gegenseitig gemessenen Zenithdistanzen bekannt sind. Punkte in der Nähe der Meeresküste, deren Höhen vom Strande aus unabhängig von einander nivellirt werden können, eignen sich zur Lösung dieser Aufgabe am besten.

Wir haben hier die obige Theorie der Bestimmung der Höhenunterschiede aus gleichzeitig gemessenen gegenseitigen Zenithdistanzen, als der genauesten bis jetzt bekannten Methode, zu solchen Bestimmungen zu gelangen, in der Kürze vollständig entwickelt. In Bezug auf verschiedene andere instructive und praktisch wichtige Aufgaben, rücksichtlich des Details der Messung und der bei derselben zur Erreichung möglichst grosser Genauigkeit angewandten Vorsichtsmaassregeln müssen wir auf das ausgezeichnete Werk selbst verweisen, indem wir uns begnügen, einige der wichtigsten aus der Messung gezogenen Resultate im Folgenden zusammenzustellen.

Das mittlere Niveau der Ostsee bei Swinemünde findet bei einem Pegelstande von 0,5636 Toisen Statt, und dies ist der Nullpunkt, auf welchen sich das ganze Nivellement bezieht. Die neunjährigen monatlichen Mittel des Standes der Ostsee bei Swinemünde bieten die auffallende Erscheinung dar, dass das Niveau der Ostsee in der ersten Hälfte des Jahrs um 3 Zoll niedriger ist als in der zweiten Hälfte. Es wäre zu wünschen, auch aus andern Häfen der Ostsee sorgfältige Beobachtungen über den Stand derselben zu erhalten, um zu ermitteln, ob der namhaft gemachten sonderbaren Erscheinung eine locale oder eine allgemeine Ursache zum Grunde liegt.

Folgende Höhen einiger Punkte von Berlin über der Ostsee, d. h. über dem vorher näher bezeichneten Nullpunkte der Messung, dürften von allgemeinerem Interesse sein.

	Toisen.
Obere Fläche des Sandsteinpfeilers auf der Plateforme der Berliner neuen Sternwarte in nordwestlicher Richtung vom Centrum des runden Thurms	+ 23,9512
Fussboden des magnetischen Häuschens bei der Sternwarte	+ 17,6096
Strassenpflaster unter dem Thorwege der alten Sternwarte	+ 17,3761
Strassenpflaster am Fusse des Marienthurms . . .	+ 17.9210
Nullpunkt des Pegels an der Fischerbrücke . . .	+ 15,2743
Normalwasserstand der Spree, welcher für die Sommermonate vom Mai bis September gilt:	
Oberwasser	+ 16,6163
Unterwasser	+ 15,9789

Auf dem erwähnten Pfeiler auf der Plateform der neuen Berliner Sternwarte stand der Theodolit. Der wahrscheinliche Fehler der Höhenbestimmung dieses Stationspunktes war 0,317 Toisen, so wie denn die wahrscheinlichen Fehler für alle Nivellementsstationen berechnet und in dem Werke mitgetheilt worden sind.

Den Coefficienten k der terrestrischen Strahlenbrechung setzen

die Engländer	0,2000
die Franzosen	0,1600
Coraheuf	0,1285
die ostpreussische Gradmessung .	0,1370
Gauss	0,1306
Struve	0,1237

Der Bestimmung desselben war die von Herrn Baeyer ausgeführte Operation im Allgemeinen nicht sehr günstig, weil der Hauptzweck: eine möglichst genaue Ermittelung der Höhe von Berlin, die Bedingung auferlegte, die Entfernung der einzelnen Stationen nicht sehr gross anzunehmen, und in der That wurde auch eine Entfernung von 2 bis 3 Meilen nur da überschritten, wo es die Localität durchaus nicht anders gestattete. Bezeichnet man aber den Fehler der Summe der beobachteten Zenithdistanzen durch $d(z+z')$, den Fehler von k durch dk; so ist wegen der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$1-k=\frac{r}{s\,\omega}\,(z+z'-180^\circ),$$

wenn man dieselbe differentiirt,

$$-dk=\frac{r}{s\,\omega}\,d(z+z') \text{ oder } dk=-\frac{r}{s\,\omega}\,d(z+z'),$$

woraus man sieht, dass der Einfluss der Beobachtungsfehler in der Summe der Zenithdistanzen auf den Coefficienten der Strahlenbrechung in demselben Verhältnisse abnimmt, in welchem die Entfernung der Beobachtungspunkte zunimmt. Ungeachtet dieser nicht eben günstigen Umstände hat aber der Verfasser doch aus seinen Beobachtungen und Messungen ein wichtiges Resultat zu ziehen gewusst, welches wir hier zum Schluss noch mittheilen wollen, indem wir zugleich diejenigen, welche dazu Gelegenheit haben, zu einer nähern Prüfung desselben auffordern.

Dass die Strahlenbrechung an jedem Tage sich nicht gleich bleibt, sondern im Allgemeinen vom Morgen gegen den Mittag hin abnimmt, und vom Mittage gegen den Abend hin wächst, ist schon früher nicht unbekannt gewesen. Dies hat den Verfasser zu einer Vergleichung seiner Bestimmungen von k mit den Tageszeiten, welchen dieselben entsprechen, veranlasst, wobei er von der Hypothese ausgeht, dass die Werthe von k den Abständen der entsprechenden Tageszeiten vom wahren Mittage proportional sind, und eben diese Hypothese ist es, deren Wahrscheinlichkeit er aus seinen Beobachtungen darzuthun sucht, wobei er auf folgende Art verfährt.

Er drückt die Abstände der Tageszeiten vom wahren Mittage in Theilen des halben Tagebogens aus, so dass 0 dem Mittage, 1 dem Sonnen-Auf- oder Untergange entspricht. Ist nämlich T der Abstand der Tageszeit vom wahren Mittage und L die Tageslänge, beide in einerlei Zeitmaas ausgedrückt, so erhält man den Abstand der Tageszeit vom wahren Mittage in Theilen des halben Tagebogens ausgedrückt durch die Formel $\frac{2T}{L}$, welche wir im Folgenden durch b bezeichnen wollen. Ist dann die obige Hypothese richtig, so muss $\frac{k}{b}$ eine constante Grösse, oder es muss

$$k = ab$$

sein, wo a eine constante Grösse bezeichnet. Die Uebereinstimmung dieser Hypothese mit wirklich angestellten Beobachtungen wird man aus dem folgenden von dem Verfrsser mitgetheilten Täfelchen zu beurtheilen im Stande sein:

Anzahl der Bestimmungen von k	Zeit in halben Tagebögen b	Beobachtete Werthe von k	$\frac{k}{b} = a$	Berechnete Werthe von $k = ab$	Fehler.
1	0,376	0,0791	0,2104	0,0802	+ 0,0011
4	0,460	0,1003	0,2180	0,0981	— 0,0022
10	0,555	0,1205	0,2171	0,1183	— 0,0022
19	0,640	0,1347	0,2105	0.1364	+ 0,0017
15	0,738	0,1543	0,2091	0.1573	+ 0,0030
5	0,849	0,1912	0.2252	0,1810	— 0,0102

54 Mittel .... 0,2132 $= a$

Dass der von dem Verfasser aufgestellten Hypothese grosse Wahrscheinlichkeit zur Seite steht, unterliegt hiernach keinem Zweifel, und es ist sehr zu wünschen, dass durch vervielfältigte Beobachtungen dieselbe näher geprüft und der Werth von a genauer bestimmt werde. Bis jetzt wird man

$$k = 0{,}2132 \,.\, b$$

zu setzen haben, wo b die obige Bedeutung hat. Bei Sonnen-Auf- oder Untergang ist nach dieser Formel $k = 0{,}2132$, für den wahren Mittag ergiebt sich nach derselben $k = 0$. Der erste Werth von k stimmt nach des Verfassers Versicherung mit mehreren andern von ihm gemachten Bestimmungen sehr nahe überein; den zweiten Werth von k hat er, was freilich sehr zu wünschen gewesen wäre und andern Beobachtern ganz besonders empfohlen werden muss, bis jetzt noch nicht durch directe Beobachtungen zu prüfen Gelegenheit gehabt.

Allen, die sich für trigonometrische Nivellements interessiren und namentlich selbst dergleichen Arbeiten auszuführen beabsichtigen, wird das in jeder Beziehung höchst schätzbare Werk des Herrn Baeyer die vielfachste Belehrung darbieten und sie bei ihren Arbeiten wesentlich unterstützen.

XIII.

Mourey's Beweis des Fundamentalsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen.

Nach zwei Abhandlungen des Herrn Liouville in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. T. IV. p. 501 T. V. p. 31. frei bearbeitet von

dem Herausgeber.

§. 1.

Der Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Gleichungen, welchen in neuerer Zeit vorzüglich Gauss und Cauchy zum Gegenstande ihrer scharfsinnigen Untersuchungen gemacht haben, ist bekanntlich der Satz:

dass jede algebraische Gleichung, deren Coefficienten sämmtlich die Form $a+b\sqrt{-1}$ haben, wo a und b reelle Grössen sind, die auch verschwinden können, mindestens *eine* Wurzel von derselben Form haben muss.

Einen sehr einfachen und beachtungswerthen Beweis dieses in jeder Beziehung höchst wichtigen Theorems hat Herr Mourey in einer im Jahre 1828 unter dem Titel: Vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, erschienenen Schrift gegeben. Da aber dieser Beweis bis jetzt nur wenig bekannt geworden zu seyn scheint, so hat Herr Liouville in den beiden oben genannten Abhandlungen von Neuem auf denselben aufmerksam gemacht, und hat ihn zugleich in einem Punkte vervollständigt, wo er der Vervollständigung sehr bedurfte. Diese beiden Abhandlungen des Herrn Liouville legen wir unserer folgenden Darstellung des in Rede stehenden bemerkenswerthen Beweises des oben genannten wichtigen Satzes, dessen Beweis schon auf so viele verschiedene Arten von den berühmtesten Mathematikern der neuern Zeit versucht worden ist, zum Grunde.

Als bekannt setzen wir bei dieser Darstellung die folgenden Sätze voraus, welche in jedem etwas vollständigen Lehrbuche der Algebra bewiesen werden:

1. Unter der Voraussetzung, dass jede algebraische Gleichung des $n$ten und jedes niedrigern Grades, deren höchstes Glied die Einheit zum Coefficienten hat, und deren übrige Coefficienten sämmtlich von der Form $a+b\sqrt{-1}$ sind, mindestens *eine* Wurzel von derselben Form hat, lässt sich die Function einer jeden solchen Gleichung des $n$ten Grades in n Factoren zerlegen, welche sämmtlich ganze rationale algebraische Functionen des ersten Grades der unbekannten Grösse z der Gleichung von der Form $z-p-q\sqrt{-1}$ sind.

2. Jede algebraische Gleichung des $n$ten Grades kann höchstens n sämmtlich unter einander verschiedene Wurzeln haben.

§. 2.

In einer Ebene nehme man jetzt zwei rechtwinklige Axen der x und y an und denke sich in derselben Ebene eine beliebige völlig geschlossene Curve gezogen. M sei ein beliebiger Punkt auf dieser Curve, und A sei ein beliebiger innerhalb oder ausserhalb derselben, nicht auf ihr, liegender Punkt in der in Rede stehenden Ebene. Von dem Punkte A aus denke man sich eine mit dem positiven Theile der Axe der x parallele und nach derselben Seite wie der positive Theil der Axe der x von dem Anfange der xy aus hin gerichtete gerade Linie gezogen, und betrachte alle mit dieser Linie von der Linie AM eingeschlossenen Winkel als positiv oder als negativ, jenachdem dieselben von der von dem Punkte A aus mit dem positiven Theile der Axe der x parallel und nach derselben Seite hin gezogenen geraden Linie an bis zu der Linie AM nach der Seite der positiven oder negativen y hin gezählt worden sind.

Dies vorausgesetzt, bezeichne man nun einen der von der Linie AM mit der von dem Punkte A aus mit dem positiven Theile der Axe der x parallel und nach derselben Seite hin gezogenen geraden Linie eingeschlossenen Winkel durch ω, und lasse sich den Punkt M auf der in der Ebene der xy gezogenen geschlossenen Curve immer nach derselben Richtung hin bewegen, bis er wieder in seine erste Lage zurückkehrt; so wird der Winkel ω sich stetig verändern, und möge durch diese stetige Veränderung, wenn der Punkt M wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, den Werth ω' erhalten. Zwischen den beiden Grössen ω und ω' wollen wir nun eine Gleichung aufsuchen, und wollen dabei ω und ω' als durch Kreisbogen für einen der Einheit gleichen Radius gemessen annehmen. Wir müssen aber bei dieser Untersuchung die folgenden Fälle unterscheiden.

Wenn der Punkt A innerhalb der in der Ebene der xy gezogenen geschlossenen Curve liegt, und der Punkt M sich auf dieser Curve nach derselben Richtung hin bewegt, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den von den positiven Theilen der Axen der x und y eingeschlossenen rechten Winkel hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen; so wird der Winkel ω, mag derselbe nun positiv oder negativ sein, jederzeit stetig zunehmen, und es wird auf der Stelle erhellen, dass in diesem Falle zwischen ω und ω' immer die Gleichung

$$\omega' = \omega + 2\pi,$$

wo π seine bekannte Bedeutung hat, Statt findet.

Wenn der Punkt A wieder innerhalb der in der Ebene der xy gezogenen geschlossenen Curve liegt, der Punkt M sich aber auf dieser Curve nach derselben Richtung hin bewegt, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den von dem positiven Theile der Axe der x und dem negativen Theile der Axe der y eingeschlossenen rechten Winkel hindurch zu dem negativen Theile der Axe der y zu gelangen; so wird der Winkel ω, mag derselbe nun positiv oder negativ sein, jederzeit stetig abnehmen, und es wird auf der Stelle erhellen, dass in diesem Falle zwischen ω und ω' immer die Gleichung

$$\omega' = \omega - 2\pi,$$

wo π wieder seine bekannte Bedeutung hat, Statt findet.

Wenn der Punkt A ausserhalb der in der Ebene der xy gezogenen geschlossenen Curve liegt, so findet, wovon man sich sogleich überzeugen wird, wenn man nur diesen Fall an einer Figur etwas näher betrachtet, zwischen den Grössen ω und ω' jederzeit die Gleichung

$$\omega' = \omega$$

Statt.

Hieraus ergiebt sich, dass zwischen den Grössen ω und ω' jederzeit die Gleichung

$$\omega' = \omega \pm 2\pi \text{ oder } \omega' = \omega$$

Statt findet, jenachdem der Punkt A innerhalb oder ausserhalb der in der Ebene der xy gezogenen geschlossenen Curve liegt, und dass man in der ersten dieser beiden Gleichungen das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem sich der Punkt M auf der in der Ebene der xy gezogenen geschlossenen Curve nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den von den positiven Theilen der Axen der x und y eingeschlossenen rechten Winkel hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegt.

Dies führt aber ferner, indem alle vorhergehenden Voraussetzungen auch jetzt noch ihre Gültigkeit behalten, unmittelbar zu dem folgenden Satze:

Wenn die n Punkte $A, A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-1}$ sämmtlich in der Ebene der xy liegen, von jedem derselben aus eine mit dem positiven Theile der Axe der x parallele und nach derselben Seite hin gerichtete gerade Linie gezogen gedacht wird, die mit diesen Linien von den Linien $AM, A_1M, A_2M, A_3M, \ldots A_{n-1}M$ eingeschlossenen Winkel respective durch $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_{n-1}$, die Werthe aber, welche diese Winkel, wenn sich der Punkt M auf der in der Ebene der xy geschlossenen Curve immer nach derselben Richtung hin bis wieder in seine ursprüngliche Lage bewegt, durch ihre mit dieser Bewegung des Punktes M verbundene stetige Veränderung, indem derselbe wieder in seiner ursprünglichen Lage ankommt, erhalten, respective durch $\omega', \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \ldots \omega'_{n-1}$ bezeichnet werden, und x die Anzahl derjenigen der Punkte $A, A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-1}$ ist, welche innerhalb der in der Ebene der xy gezogenen geschlossenen Curve liegen; so ist immer

$$\omega' + \omega'_1 + \omega'_2 + \ldots + \omega'_{n-1} = \omega + \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1} \pm x\pi,$$

wenn man nur in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem sich der Punkt M auf der in der Ebene der xy gezogenen geschlossenen Curve nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den von den positiven Theilen der Axen der x und y eingeschlossenen Winkel hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegt hat.

Weiss man also, dass von den Punkten $A, A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-1}$ wenigstens *einer* innerhalb der in der Ebene der xy gezogenen geschlossenen Curve liegt, so wird man, wenn man nur den Punkt M auf dieser Curve seine Lage der Grösse und der Richtung nach auf die erforderliche Weise verändern, auch nöthigenfalls seinen Umlauf auf der in Rede stehenden Curve mehrere Mal vollenden lässt, die Summe $\omega + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_{n-1}$ jede beliebige Zunahme oder Abnahme, überhaupt jede beliebige Veränderung erleiden lassen können;

welches sich ganz unmittelbar aus dem vorigen Satze ergiebt, wenn man nur bei der Anwendung desselben zugleich nicht aus den Augen verliert, dass sich die in Rede stehende Summe so wie jeder ihrer einzelnen Theile fortwährend stetig verändert, wenn sich der Punkt M auf der in der Ebene der xy gezogenen geschlossenen Curve ohne Unterbrechung bewegt.

Auf diesen wenigen an sich höchst einfachen Principien, von deren Richtigkeit man sehr leicht die vollkommenste Ueberzeugung gewinnt, beruhet vorzüglich der Beweis des Herrn **Mourey**, den wir nun sogleich näher kennen lernen werden.

§. 3.

Es sei

$$z^n + Pz^{n-1} + Qz^{n-2} + \ldots Tz + U = 0$$

irgend eine Gleichung des $n$ten Grades, deren Coefficienten sämmtlich von der Form $a + b\sqrt{-1}$ sind. Für $n = 1$ hat diese Gleichung offenbar eine Wurzel von derselben Form, und es wird also, um das wichtige Fundamentaltheorem der Theorie der Gleichungen, von dem in §. 1. die Rede gewesen ist, im Allgemeinen zu beweisen, bloss darauf ankommen, zu zeigen, dass dasselbe, wenn es für jede Gleichung von einem niedrigern Grade als dem $n$ten richtig ist, dann immer auch für jede Gleichung des $n$ten Grades gelten muss.

Daher wollen wir jetzt annehmen, dass der zu beweisende Satz für jede Gleichung von einem niedrigern Grade als dem $n$ten gilt. Unter dieser Voraussetzung lässt sich nach dem Satze 1. in §. 1. die Function

$$z^{n-1}+Pz^{n-2}+Qz^{n-3}+\ldots+T$$

jederzeit als ein aus $n-1$ Factoren bestehendes Product von der Form

$$(z-a_1-b_1\sqrt{-1})\,(z-a_2-b_2\sqrt{-1})\ldots(z-a_{n-1}-b_{n-1}\sqrt{-1})$$

darstellen, und es wird, um unsern Satz zu beweisen, nun darauf ankommen, dass man zeigt, dass es immer mindestens einen Werth von z von derselben Form wie die Coefficienten der gegebenen Gleichung geben muss, für welchen

$$z(z-a_1-b_1\sqrt{-1})\,(z-a_2-b_2\sqrt{-1})\ldots(z-a_{n-1}-b_{n-1}\sqrt{-1})+U=0$$

oder

$$z(z-a_1-b_1\sqrt{-1})\,(z-a_2-b_2\sqrt{-1})\ldots(z-a_{n-1}-b_{n-1}\sqrt{-1})=-U$$

ist.

Um dies zu beweisen, setze man

$$z=x+y\sqrt{-1},$$

und stelle sich x und y als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes M in einer Ebene in Bezug auf zwei beliebige auf einander senkrecht stehende Coordinatenaxen, deren positive Theile Ox und Oy sein mögen, vor. Ferner seien A_1, A_2, A_3, ... A_{n-1} die durch die Coordinaten

$$a_1,\ b_1;\ a_2,\ b_2;\ a_3,\ b_3;\ \ldots\ a_{n-1},\ b_{n-1}$$

in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem bestimmten $n-1$ Punkte in dieser Ebene. ω sei einer der von dem Radius Vector $OM=\varrho$ mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen Winkel; so ist, wie sogleich erhellen wird, in völliger Allgemeinheit

$$z=x+y\sqrt{-1}=\varrho\,(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}).$$

Sind nun ferner ω_1, ω_2, ... ω_{n-1} die von den Vectoren $A_1M=\varrho_1$, $A_2M=\varrho_2$, $A_3M=\varrho_3$, ... $A_{n-1}M=\varrho_{n-1}$ mit den von den Punkten A_1, A_2, A_3, ... A_{n-1} aus mit dem positiven Theile der Axe der x parallel und nach derselben Seite hin gezogenen geraden Linien eingeschlossenen Winkel; so ist nach den einfachsten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten offenbar in völliger Allgemeinheit

$$z-a_1-b_1\sqrt{-1}=x-a_1+(y-b_1)\sqrt{-1}=\varrho_1(\cos\omega_1+\sin\omega_1\sqrt{-1}),$$

$$z-a_2-b_2\sqrt{-1}=x-a_2+(y-b_2)\sqrt{-1}=\varrho_2(\cos\omega_2+\sin\omega_2\sqrt{-1}),$$

$$z-a_3-b_3\sqrt{-1}=x-a_3+(y-b_3)\sqrt{-1}=\varrho_3(\cos\omega_3+\sin\omega_3\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$z-a_{n-1}-b_{n-1}\sqrt{-1}=x-a_{n-1}+(y-b_{n-1})\sqrt{-1}$$
$$=\varrho_{n-1}\,(\cos\omega_{n-1}+\sin\omega_{n-1}\sqrt{-1});$$

und folglich nach einem bekannten Satze aus der Lehre von den imaginären Grössen

$$z(z-a_1-b_1\sqrt{-1})\,(z-a_2-b_2\sqrt{-1})\ldots(z-a_{n-1}-b_{n-1}\sqrt{-1})$$
$$=\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}\left\{\begin{array}{l}\cos(\omega+\omega_1+\ldots+\omega_{n-1})\\ \quad+\sin(\omega+\omega_1+\ldots+\omega_{n-1})\sqrt{-1}\end{array}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen uns nun zu zeigen obliegt, dass sich für $z=x+y\sqrt{-1}$, wo x und y reelle Grössen sind, immer mindestens ein Werth angeben lässt, für welchen

$$z(z-a_1-b_1\sqrt{-1})(z-a_2-b_2\sqrt{-1})\ldots(z-a_{n-1}-b_{n-1}\sqrt{-1})=-U$$

ist; so werden wir jetzt zu zeigen haben, dass sich für x, y immer mindestens ein System zweier reeller Werthe angeben lässt, für welches

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}\left\{\begin{array}{l}\cos(\omega+\omega_1+\ldots+\omega_{n-1})\\ \quad+\sin(\omega+\omega_1+\ldots+\omega_{n-1})\sqrt{-1}\end{array}\right\}=-U$$

ist. Nach der Voraussetzung und nach der Lehre von den imaginären Grössen kann aber immer

$$-U=R(\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1})$$

gesetzt werden. Daher wird das Obige bewiesen sein, wenn man zeigen kann, dass sich für x, y immer mindestens ein System zweier reeller Werthe angeben lässt, durch welches die beiden Gleichungen

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}=R,\quad \omega+\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_{n-1}=\alpha$$

zugleich erfüllt werden, wovon man sich auf folgende Art überzeugen kann.

Weil nach dem Obigen

$$\varrho_1=\sqrt{(\varrho\cos\omega-a_1)^2+(\varrho\sin\omega-b_1)^2},$$
$$\varrho_2=\sqrt{(\varrho\cos\omega-a_2)^2+(\varrho\sin\omega-b_2)^2},$$
$$\varrho_3=\sqrt{(\varrho\cos\omega-a_3)^2+(\varrho\sin\omega-b_3)^2},$$
u. s. w.
$$\varrho_{n-1}=\sqrt{(\varrho\cos\omega-a_{n-1})^2+(\varrho\sin\omega-b_{n-1})^2}$$

ist; so ist das Produkt $\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}$, dessen Werth immer positiv ist, für jeden bestimmten Werth von ω eine stetige Function von ϱ, welche für $\varrho=0$ verschwindet und für $\varrho=\infty$ unendlich wird. Daher muss es offenbar für jeden bestimmten Werth von ω mindestens einen Werth von ϱ geben, für welchen

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}=R,$$

also die erste der beiden obigen Gleichungen erfüllt ist. Denkt man sich folglich in der Ebene der xy von dem Anfange O der Coordinaten aus eine stetige Folge gerader Linien gezogen, so wird es auf jeder dieser geraden Linien einen Punkt M geben, dessen Entfernung vom Anfange der Coordinaten oder dessen Radius Vector, für ϱ in die Gleichung

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}=R$$

gesetzt, derselben genügt, und es frägt sich jetzt zunächst, ob alle diese Punkte eine stetige völlig geschlossene, den Punkt O also nach allen Seiten hin ohne Unterbrechung umgebende Curve bilden. Dass dies aber wirklich der Fall ist, kann auf folgende Art gezeigt werden.

Weil nach dem Obigen

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\varrho_1 = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2},$$
$$\varrho_2 = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2},$$
$$\varrho_3 = \sqrt{(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2},$$
u. s. w.
$$\varrho_{n-1} = \sqrt{(x - a_{n-1})^2 + (y - b_{n-1})^2}$$

ist, so ist die Gleichung

$$\varrho\, \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n-1} = R,$$

oder vielmehr, wenn man dieselbe rational macht, die Gleichung

$$\varrho^2 \varrho_1{}^2 \varrho_2{}^2 \ldots \varrho_{n-1}{}^2 = R^2,$$

offenbar sowohl in Bezug auf x, als auch in Bezug auf y vom $2n$ ten Grade. Die Gleichung einer jeden geraden Linie hat die Form

$$y = \lambda x + \mu \text{ oder } x = \lambda.$$

Denkt man sich im ersten Falle in der Gleichung

$$\varrho^2 \varrho_1{}^2 \varrho_2{}^2 \ldots \varrho_{n-1}{}^2 = R^2$$

für y den Ausdruck $\lambda x + \mu$ gesetzt, so erhält man eine bloss die unbekannte Grösse x enthaltende Gleichung, deren höchstes Glied offenbar $(1 + \lambda^2)^n x^{2n}$, und die also vom $2n$ten Grade ist, folglich nach dem Satze 2. in §. 1. höchstens $2n$ reelle Wurzeln haben kann, zu deren jeder wegen der Gleichung $y = \lambda x + \mu$ nur ein bestimmter reeller Werth von y gehört. Im zweiten Falle erhält man, wenn man in der Gleichung

$$\varrho^2 \varrho_1{}^2 \varrho_2{}^2 \ldots \varrho_{n-1}{}^2 = R^2$$

die Grösse $x = \lambda$ setzt, eine bloss die unbekannte Grösse y enthaltende Gleichung des $2n$ten Grades, welche also nach dem Satze 2. in §. 1. wieder höchstens $2n$ reelle Wurzeln haben kann. Hieraus ergiebt sich, dass von der durch die Gleichung

$$\varrho\, \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n-1} = R$$

characterisirten Curve keine gerade Linie in mehr als $2n$ Punkten geschnitten werden kann, und dass also diese Curve jedenfalls nicht der Gattung der Spiralen angehört, welche ohne jemals in sich selbst zurückzukehren in unendlich vielen Windungen einen festen Punkt umgeben. Bestände aber die durch die Gleichung

$$\varrho\, \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n-1} = R$$

characterisirte Curve aus gewissen von einander gesonderten, also in keinem stetigen Zusammenhange stehenden Theilen, so würde man von dem Punkte O an durch die Zwischenräume zwischen den einzelnen Theilen hindurch bis zu einem von dem Punkte O unendlich weit entfernten Punkte O_1 eine stetige Curve ziehen können, auf welcher der Radius Vector keines Punktes der Gleichung

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\,\ldots\,\varrho_{n-1}=R$$

genügen würde, welches ungereimt ist. Denn die, dem diese Curve beschreibenden Punkte entsprechenden Vectoren ϱ verändern sich stetig von 0 bis ∞, und es werden sich also auch die entsprechenden Werthe der Grösse

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\,\ldots\,\varrho_{n-1}-R$$

stetig verändern. Weil nun $\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}$ für $\varrho=0$ verschwindet, so ist in der Nähe des Punktes O die Grösse

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\,\ldots\,\varrho_{n-1}-R$$

offenbar negativ; positiv ist diese Grösse dagegen in der Nähe des Punktes O_1, weil $\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}$ für $\varrho=\infty$ unendlich wird. Daher muss die Grösse

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\,\ldots\,\varrho_{n-1}-R$$

irgendwo auf der Curve OO_1 vom Negativen zum Positiven übergehen, welches wegen der stetigen Veränderung dieser Grösse nur dann geschehen kann, wenn dieselbe durch Null hindurch geht, woraus sich also ergiebt, dass jederzeit für einen gewissen Punkt auf der Curve OO_1

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\,\ldots\,\varrho_{n-1}-R=0 \text{ oder } \varrho\,\varrho_1\varrho_2\,\ldots\,\varrho_{n-1}=R$$

sein muss, welches gegen das Obige streitet. Folglich ist die durch die Gleichung

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\,\ldots\,\varrho_{n-1}=R$$

characterisirte Curve nothwendig eine stetige geschlossene, den Punkt O nach allen Seiten hin ohne Unterbrechung umgebende Curve.

Von den Punkten O, A_1, A_2, A_3, ... A_{n-1} liegt immer mindestens einer, nämlich der Punkt O, innerhalb der in Rede stehenden Curve. Ferner lässt sich leicht zeigen, dass keiner dieser Punkte auf derselben liegt. Von dem Punkte O versteht sich dies von selbst. Läge aber z. B. der Punkt A_1 auf der Curve, so würde, da für jeden Punkt derselben die Gleichung

$$\varrho\,\varrho_1\varrho_2\,\ldots\,\varrho_{n-1}=R$$

erfüllt ist, dies auch für den Punkt A_1 der Fall sein, welches aber ungereimt ist. Weil man nämlich unter diesen Voraussetzungen den oben im Allgemeinen durch M bezeichneten Punkt als mit dem Punkte A_1 zusammenfallend betrachten muss, so würde offenbar $\varrho_1=A_1M=0$, und folglich auch $\varrho\,\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}=0$ sein, da doch offenbar R nie verschwinden kann, weil natürlich U als nicht verschwindend angenommen wird. Nimmt man nun alles dieses zusammen, so ergiebt sich aus dem letzten Satze des vorigen Paragraphen unmittelbar, dass auf der in Rede stehenden Curve der Punkt M immer so angenommen werden kann, dass die Summe

$$\omega+\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_{n-1}$$

jeden beliebigen Werth erhält, also auch so, dass

$$\omega+\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_{n-1}=\alpha$$

ist. Da nun nach dem Obigen für jeden Punkt unserer Curve die Gleichung

$$\varrho\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}=R$$

erfüllt ist, so sieht man, dass sich auf derselben immer ein Punkt angeben lässt, durch dessen Coordinaten die beiden Gleichungen

$$\varrho\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}=R,\quad \omega+\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_{n-1}=\alpha$$

zugleich erfüllt werden: auf den Beweis dieses Satzes ist aber oben der Beweis des Fundamentalsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen zurückgeführt worden, so dass also nun auch dieser wichtige Fundamentalsatz selbst vollständig bewiesen ist.

XIV.

Ueber eine merkwürdige Relation zwischen den rechtwinkligen Coordinaten von vier Punkten in einer Ebene und den drei Winkeln, welche die vier von diesen Punkten nach einem fünften Punkte in derselben Ebene gezogenen geraden Linien mit einander einschliessen, und über zwei wichtige geodätische Aufgaben.

Von

dem Herausgeber.

Es seien A', A'_1, A'_2, A'_3, vier Punkte in einer Ebene, deren Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem respective x', y'; x'_1, y'_1; x'_2, y'_2; x'_3, y'_3 sein mögen. Ein fünfter Punkt in derselben Ebene sei A, und x, y seien die Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf dasselbe System. Durch den Punkt A denke man sich ein dem primitiven paralleles Coordinatensystem der $\xi\,\eta$ gelegt, und bezeichne die Coordinaten der Punkte A', A'_1, A'_2, A'_3 in Bezug auf dieses neue System respective durch ξ', η'; ξ'_1, η'_1; ξ'_2, η'_2; ξ'_3, η'_3; so hat man nach den einfachsten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$1.\left\{\begin{aligned}x' &= x+\xi', \quad y' = y+\eta';\\ x'_1 &= x+\xi'_1, \quad y'_1 = y+\eta'_1;\\ x'_2 &= x+\xi'_2, \quad y'_2 = y+\eta'_2;\\ x'_3 &= x+\xi'_3, \quad y'_3 = y+\eta'_3.\end{aligned}\right.$$

Die von den Linien AA', AA'_1, AA'_2, AA'_3, welche durch ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 bezeichnet werden sollen, mit dem positiven Theile der Axe der ξ eingeschlossenen Winkel, welche von dem positiven Theile der Axe der ξ an durch den von den positiven Theilen der Axen der ξ und η eingeschlossenen rechten Winkel hindurch immer nach derselben Richtung hin von 0 bis 360° gezählt werden, wollen wir durch φ, $\varphi+\alpha$, $\varphi+\beta$, $\varphi+\gamma$ bezeichnen, indem wir darauf besonders aufmerksam zu machen nicht unterlassen, dass die durch α, β, γ bezeichneten Grössen zwar nicht in allen Fällen die 180° nicht übersteigenden Winkel $A'AA'_1$, $A'AA'_2$, $A'AA'_3$ selbst sind, aber doch aus diesen Winkeln jederzeit leicht gefunden, und daher, wenn dieselben etwa bei einer geodätischen Aufnahme gemessen worden sind, immer als bekannt angenommen werden können. Dies vorausgesetzt ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\begin{aligned}\xi' &= \varrho \cos\varphi, & \eta' &= \varrho \sin\varphi;\\ \xi'_1 &= \varrho_1 \cos(\varphi+\alpha), & \eta'_1 &= \varrho_1 \sin(\varphi+\alpha);\\ \xi'_2 &= \varrho_2 \cos(\varphi+\beta), & \eta'_2 &= \varrho_2 \sin(\varphi+\beta);\\ \xi'_3 &= \varrho_3 \cos(\varphi+\gamma), & \eta'_3 &= \varrho_3 \sin(\varphi+\gamma);\end{aligned}$$

und mittelst der Gleichungen 1. ergeben sich daher jetzt die folgenden Gleichungen:

$$2.\left\{\begin{aligned}x' &= x+\varrho \cos\varphi & y' &= y+\varrho \sin\varphi;\\ x'_1 &= x+\varrho_1 \cos(\varphi+\alpha), & y'_1 &= y+\varrho_1 \sin(\varphi+\alpha);\\ x'_2 &= x+\varrho_2 \cos(\varphi+\beta), & y'_2 &= y+\varrho_2 \sin(\varphi+\beta);\\ x'_3 &= x+\varrho_3 \cos(\varphi+\gamma), & y'_3 &= y+\varrho_3 \sin(\varphi+\gamma).\end{aligned}\right.$$

Durch Elimination der Grössen ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 aus diesen acht Gleichungen erhält man die vier folgenden Gleichungen:

$$3.\left\{\begin{aligned}x\sin\varphi - y\cos\varphi &= x'\sin\varphi - y'\cos\varphi;\\ x\sin(\varphi+\alpha) - y\cos(\varphi+\alpha) &= x'_1\sin(\varphi+\alpha) - y'_1\cos(\varphi+\alpha);\\ x\sin(\varphi+\beta) - y\cos(\varphi+\beta) &= x'_2\sin(\varphi+\beta) - y'_2\cos(\varphi+\beta);\\ x\sin(\varphi+\gamma) - y\cos(\varphi+\gamma) &= x'_3\sin(\varphi+\gamma) - y'_3\cos(\varphi+\gamma);\end{aligned}\right.$$

aus denen sich ferner, wenn man aus der ersten und zweiten, aus der ersten und dritten, aus der ersten und vierten die Grösse y eliminirt, leicht die drei Gleichungen

$$4.\left\{\begin{aligned}x\sin\alpha &= \{x'_1\sin(\varphi+\alpha)-y'_1\cos(\varphi+\alpha)\}\cos\varphi-(x'\sin\varphi-y'\cos\varphi)\cos(\varphi+\alpha),\\ x\sin\beta &= \{x'_2\sin(\varphi+\beta)-y'_2\cos(\varphi+\beta)\}\cos\varphi-(x'\sin\varphi-y'\cos\varphi)\cos(\varphi+\beta),\\ x\sin\gamma &= \{x'_3\sin(\varphi+\gamma)-y'_3\cos(\varphi+\gamma)\}\cos\varphi-(x'\sin\varphi-y'\cos\varphi)\cos(\varphi+\gamma)\end{aligned}\right.$$

ergeben, die dann durch Elimination von x sogleich zu den beiden Gleichungen

$$\frac{\{x'_1\sin(\varphi+\alpha)-y'_1\cos(\varphi+\alpha)\}\cos\varphi-(x'\sin\varphi-y'\cos\varphi)\cos(\varphi+\alpha)}{\sin\alpha}$$
$$=\frac{\{x'_2\sin(\varphi+\beta)-y'_2\cos(\varphi+\beta)\}\cos\varphi-(x'\sin\varphi-y'\cos\varphi)\cos(\varphi+\beta)}{\sin\beta}$$
$$=\frac{\{x'_3\sin(\varphi+\gamma)-y'_3\cos(\varphi+\gamma)\}\cos\varphi-(x'\sin\varphi-y'\cos\varphi)\cos(\varphi+\gamma)}{\sin\gamma}$$

oder

$$x'_1(1+\cot\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi)-y'_1(\cot\alpha-\mathrm{tang}\,\varphi)-(x'\mathrm{tang}\,\varphi-y')(\cot\alpha-\mathrm{tang}\,\varphi)$$
$$=x'_2(1+\cot\beta\,\mathrm{tang}\,\varphi)-y'_2(\cot\beta-\mathrm{tang}\,\varphi)-(x'\mathrm{tang}\,\varphi-y')(\cot\beta-\mathrm{tang}\,\varphi)$$
$$=x'_3(1+\cot\gamma\,\mathrm{tang}\,\varphi)-y'_3(\cot\gamma-\mathrm{tang}\,\varphi)-(x'\mathrm{tang}\,\varphi-y')(\cot\gamma-\mathrm{tang}\,\varphi);$$

oder, wie man nach leichter Rechnung findet, zu den beiden Gleichungen

$$x'_1-(y'_1-y')\cot\alpha+\{(x'_1-x')\cot\alpha+y'_1-y'\}\,\mathrm{tang}\,\varphi+x'\,\mathrm{tang}\,\varphi^2$$
$$=x'_2-(y'_2-y')\cot\beta+\{(x'_2-x')\cot\beta+y'_2-y'\}\,\mathrm{tang}\,\varphi+x'\,\mathrm{tang}\,\varphi^2$$
$$=x'_3-(y'_3-y')\cot\gamma+\{(x'_3-x')\cot\gamma+y'_3-y'\}\,\mathrm{tang}\,\varphi+x'\,\mathrm{tang}\,\varphi^2;$$

oder, wenn man in diesen Gleichungen die letzten einander gleichen Glieder aufhebt, zu den beiden Gleichungen

5. $$x'_1-(y'_1-y')\cot\alpha+\{(x'_1-x')\cot\alpha+y'_1-y'\}\,\mathrm{tang}\,\varphi$$
$$=x'_2-(y'_2-y')\cot\beta+\{(x'_2-x')\cot\beta+y'_2-y'\}\,\mathrm{tang}\,\varphi$$
$$=x'_3-(y'_3-y')\cot\gamma+\{(x'_3-x')\cot\gamma+y'_3-y'\}\,\mathrm{tang}\,\varphi$$

führen. Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber leicht

6. $$\left\{\begin{aligned}\mathrm{tang}\,\varphi&=-\frac{x'_1-x'_2-(y'_1-y')\cot\alpha+(y'_2-y')\cot\beta}{y'_1-y'_2+(x'_1-x')\cot\alpha-(x'_2-x')\cot\beta},\\ \mathrm{tang}\,\varphi&=-\frac{x'_2-x'_3-(y'_2-y')\cot\beta+(y'_3-y')\cot\gamma}{y'_2-y'_3+(x'_2-x')\cot\beta-(x'_3-x')\cot\gamma};\end{aligned}\right.$$

also

7. $$\frac{x'_1-x'_2-(y'_1-y')\cot\alpha+(y'_2-y')\cot\beta}{y'_1-y'_2+(x'_1-x')\cot\alpha-(x'_2-x')\cot\beta}$$
$$=\frac{x'_2-x'_3-(y'_2-y')\cot\beta+(y'_3-y')\cot\gamma}{y'_2-y'_3+(x'_2-x')\cot\beta-(x'_3-x')\cot\gamma}.$$

Bringt man aber diese Gleichung auf Null, so erhält man nach einigen leichten Verwandlungen die folgende merkwürdige Gleichung:

8. $$\begin{aligned}0=&\{(x'_1-x'_2)(y'_2-y'_3)-(x'_2-x'_3)(y'_1-y'_2)\}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\\ &+\{(x'-x'_1)(x'_2-x'_3)+(y'-y'_1)(y'_2-y'_3)\}\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\\ &+\{(x'-x'_2)(x'_3-x'_1)+(y'-y'_2)(y'_3-y'_1)\}\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma\\ &+\{(x'-x'_3)(x'_1-x'_2)+(y'-y'_3)(y'_1-y'_2)\}\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\\ &+\{(x'-x'_2)(y'-y'_3)-(x'-x'_3)(y'-y'_2)\}\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\\ &+\{(x'-x'_3)(y'-y'_1)-(x'-x'_1)(y'-y'_3)\}\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\\ &+\{(x'-x'_1)(y'-y'_2)-(x'-x'_2)(y'-y'_1)\}\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.\end{aligned}$$

Nach weiterer Entwickelung erhält diese Gleichung die Form

$$
\begin{aligned}
9.\ 0 = &(x'x'_1 + y'y'_1 + x'_2 x'_3 + y'_2 y'_3)\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\\
&+(x'x'_2 + y'y'_2 + x'_3 x'_1 + y'_3 y'_1)\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)\\
&+(x'x'_3 + y'y'_3 + x'_1 x'_2 + y'_1 y'_2)\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\\
&-(x'y'_1 - y'x'_1)\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)\\
&-(x'y'_2 - y'x'_2)\cos\beta\sin(\gamma-\alpha)\\
&-(x'y'_3 - y'x'_3)\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)\\
&+(x'_2 y'_3 - y'_2 x'_3)\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)\\
&+(x'_3 y'_1 - y'_3 x'_1)\sin\beta\cos(\gamma-\alpha)\\
&+(x'_1 y'_2 - y'_1 x'_2)\sin\gamma\cos(\alpha-\beta),
\end{aligned}
$$

und diese Gleichung lässt sich endlich, wenn man die Producte der goniometrischen Functionen auf bekannte Weise in Aggregate von Cosinussen und Sinussen verwandelt, auch unter der folgenden Gestalt darstellen:

$$
\begin{aligned}
10.\ 0 = &\{(x'-x'_1)(x'_2-x'_3)+(y'-y'_1)(y'_2-y'_3)\}\cos(-\alpha+\beta+\gamma)\\
&+\{(x'-x'_2)(x'_3-x'_1)+(y'-y'_2)(y'_3-y'_1)\}\cos(\alpha-\beta+\gamma)\\
&+\{(x'-x'_3)(x'_1-x'_2)+(y'-y'_3)(y'_1-y'_2)\}\cos(\alpha+\beta-\gamma)\\
&+\{(x'-x'_1)(y'_2-y'_3)-(y'-y'_1)(x'_2-x'_3)\}\sin(-\alpha+\beta+\gamma)\\
&+\{(x'-x'_2)(y'_3-y'_1)-(y'-y'_2)(x'_3-x'_1)\}\sin(\alpha-\beta+\gamma)\\
&+\{(x'-x'_3)(y'_1-y'_2)-(y'-y'_3)(x'_1-x'_2)\}\sin(\alpha+\beta-\gamma).
\end{aligned}
$$

Mittelst der im Vorhergehenden entwickelten Formeln lassen sich zwei wichtige geodätische Probleme, die in der Praxis häufig mit Vortheil in Anwendung gebracht werden, auflösen.

Bei der unter dem Namen des **Pothenotschen Problems** bekannten Aufgabe sind drei Punkte ihrer Lage nach gegeben, und die Lage eines vierten Punkts soll bestimmt werden, wenn in diesem Punkte die beiden Winkel gemessen worden sind, welche die drei von demselben nach den drei gegebenen Punkten gezogenen Linien mit einander einschliessen.

Nehmen wir an, dass A', A'_1, A'_2 die drei gegebenen Punkte sind und A der gesuchte Punkt ist, so sind die im Obigen durch x', y'; x'_1, y'_1; x'_2, y'_2 bezeichneten Coordinaten und die beiden Winkel α, β bekannt, und die beiden Coordinaten x, y werden gesucht. Weil nun nach 6.

$$
11.\ \tang\varphi = -\frac{x'_1 - x'_2 - (y'_1 - y')\cot\alpha + (y'_2 - y')\cot\beta}{y'_1 - y'_2 + (x'_1 - x')\cot\alpha - (x'_2 - x')\cot\beta}
$$

ist, so kann der Winkel φ aus den gegebenen Grössen gefunden werden. Da man jedoch nur weiss, dass dieser Winkel 360° nicht übersteigt, so frägt es sich, ob man denselben zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° zu nehmen hat. Eine Entscheidung hierüber kann aber leicht auf folgende Art gegeben werden. Nach 2. hat man die folgenden Gleichungen:

$$
12.\left\{\begin{aligned}
x' &= x+\varrho\cos\varphi, & y' &= y+\varrho\sin\varphi;\\
x'_1 &= x+\varrho_1\cos(\varphi+\alpha), & y'_1 &= y+\varrho_1\sin(\varphi+\alpha);\\
x'_2 &= x+\varrho_2\cos(\varphi+\beta), & y'_2 &= y+\varrho_2\sin(\varphi+\beta);
\end{aligned}\right.
$$

aus denen sich die Gleichungen

$$x'-x'_1=\varrho\cos\varphi-\varrho_1\cos(\varphi+\alpha),\quad y'-y'_1=\varrho\sin\varphi-\varrho_1\sin(\varphi+\alpha);$$

$$x'-x'_2=\varrho\cos\varphi-\varrho_2\cos(\varphi+\beta),\quad y'-y'_2=\varrho\sin\varphi-\varrho_2\sin(\varphi-\beta);$$

und hieraus die beiden folgenden Ausdrücke von ϱ ergeben:

$$13.\quad\begin{cases}\varrho=\dfrac{(x'-x'_1)\sin(\varphi+\alpha)-(y'-y'_1)\cos(\varphi+\alpha)}{\sin\alpha},\\[2ex] \varrho=\dfrac{(x'-x'_2)\sin(\varphi+\beta)-(y'-y'_2)\cos(\varphi+\beta)}{\sin\beta}.\end{cases}$$

Da nun die beiden Werthe, welche φ haben kann, jederzeit von der Form φ und $\varphi+180^\circ$ sind, so sieht man, dass diese beiden Werthe, für φ in einen der beiden vorhergehenden Ausdrücke gesetzt, für ϱ jederzeit zwei Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen liefern. Weil aber ϱ seiner Natur nach positiv ist, so muss man für φ immer denjenigen seiner beiden Werthe setzen, welcher für ϱ einen positiven Werth liefert, und kann also auf diese Art immer mit völliger Sicherheit entscheiden, ob man φ zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° zu nehmen hat.

Hat man φ und ϱ auf diese Weise gefunden, so ergeben sich die gesuchten Coordinaten x, y mittelst der aus 12. fliessenden Formeln

$$14.\quad x=x'-\varrho\cos\varphi,\quad y=y'-\varrho\sin\varphi;$$

und ϱ_1 und ϱ_2 erhält man nun ferner leicht mittelst der folgenden sich ebenfalls unmittelbar aus 12. ergebenden Formeln:

$$15.\quad\begin{cases}\varrho_1=\dfrac{x'_1-x}{\cos(\varphi+\alpha)}=\dfrac{y'_1-y}{\sin(\varphi+\alpha)},\\[2ex] \varrho_2=\dfrac{x'_2-x}{\cos(\varphi+\beta)}=\dfrac{y'_2-y}{\sin(\varphi+\beta)}.\end{cases}$$

Auf diese Art ist jetzt das Pothenotsche Problem vollständig aufgelöst.

Eine andere geodätische Aufgabe, deren Auflösung sich aus den im Obigen entwickelten Gleichungen ableiten lässt, ist das folgende schöne Lambertsche Problem:

Man soll die gegenseitige Lage von acht Punkten A, A_1, A_2, A_3 und A', A'_1, A'_2, A'_3 bestimmen, wenn in jedem der Punkte A, A_1, A_2, A_3 die Winkel gemessen worden sind, welche die von diesen Punkten nach den Punkten A', A'_1, A'_2, A'_3 gezogenen geraden Linien mit einander einschliessen.

Man nehme den Punkt A' als Anfang der Coordinaten an, und setze also $x'=0$, $y'=0$, so wird die Gleichung 9.

$$\begin{aligned}0=&(x'_2x'_3+y'_2y'_3)\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\\ &+(x'_3x'_1+y'_3y'_1)\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)\\ &+(x'_1x'_2+y'_1y'_2)\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\\ &+(x'_2y'_3-y'_2x'_3)\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)\\ &+(x'_3y'_1-y'_3x'_1)\sin\beta\cos(\gamma-\alpha)\\ &+(x'_1y'_2-y'_1x'_2)\sin\gamma\cos(\alpha-\beta).\end{aligned}$$

Setzt man nun, was offenbar verstattet ist, auch noch $y'_1 = 0$; so wird diese Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = & (x'_2 x'_3 + y'_2 y'_3) \sin\alpha \sin(\beta-\gamma) \\ & + (x'_2 y'_3 - y'_2 x'_3) \sin\alpha \cos(\beta-\gamma) \\ & + x'_1 \{x'_3 \sin(\gamma-\alpha) - y'_3 \cos(\gamma-\alpha)\} \sin\beta \\ & + x'_1 \{x'_2 \sin(\alpha-\beta) + y'_2 \cos(\alpha-\beta)\} \sin\gamma, \end{aligned}$$

und folglich, wenn man

$$16. \quad x'_2 = x'_1 + z$$

setzt,

$$\begin{aligned} 0 = & (z x'_3 + y'_2 y'_3) \sin\alpha \sin(\beta-\gamma) \\ & + (z y'_3 - y'_2 x'_3) \sin\alpha \cos(\beta-\gamma) \\ & + x'_1 x'_3 \{\sin\alpha \sin(\beta-\gamma) + \sin\beta \sin(\gamma-\alpha)\} \\ & + x'_1 y'_3 \{\sin\alpha \cos(\beta-\gamma) - \sin\beta \cos(\gamma-\alpha)\} \\ & + x'_1 \{x'_1 \sin(\alpha-\beta) + z \sin(\alpha-\beta) + y'_2 \cos(\alpha-\beta)\} \sin\gamma, \end{aligned}$$

oder, wie man leicht findet, weil

$$\begin{aligned} \sin\alpha \sin(\beta-\gamma) + \sin\beta \sin(\gamma-\alpha) &= -\sin\gamma \sin(\alpha-\beta), \\ \sin\alpha \cos(\beta-\gamma) - \sin\beta \cos(\gamma-\alpha) &= \quad \cos\gamma \sin(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

ist,

$$\begin{aligned} 17. \quad 0 = & (z x'_3 + y'_2 y'_3) \sin\alpha \sin(\beta-\gamma) \\ & + (z y'_3 - y'_2 x'_3) \sin\alpha \cos(\beta-\gamma) \\ & + x'_1 y'_2 \sin\gamma \cos(\alpha-\beta) \\ & + x'_1 y'_3 \cos\gamma \sin(\alpha-\beta) \\ & + x'_1 (x'_1 - x'_3 + z) \sin\gamma \sin(\alpha-\beta). \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird, wenn man der Kürze wegen

$$18. \left\{ \begin{array}{l} p = z x'_3 + y'_2 y'_3, \; q = z y'_3 - y'_2 x'_3, \\ r = x'_1 y'_2, \; s = x'_1 y'_3, \; t = x'_1 (x'_1 - x'_3 + z) \end{array} \right.$$

setzt,

$$\begin{aligned} 19. \quad 0 = & \, p \sin\alpha \sin(\beta-\gamma) \\ & + q \sin\alpha \cos(\beta-\gamma) \\ & + r \sin\gamma \cos(\alpha-\beta) \\ & + s \cos\gamma \sin(\alpha-\beta) \\ & + t \sin\gamma \sin(\alpha-\beta). \end{aligned}$$

Ueberlegt man, dass diese Gleichung sich auf den Punkt A bezieht, und dass man für die Punkte A_1, A_2, A_3 offenbar ganz ähnliche Gleichungen bilden kann; so erhellet, dass die Data der Aufgabe immer vier Gleichungen des ersten Grades zwischen den fünf unbekannten Grössen p, q, r, s, t von der obigen Form liefern, mittelst welcher man also die Verhältnisse der Grössen p, q, r, s, t unter einander bestimmen kann. Daher wird man

$$p = ks, \quad q = k_1 s, \quad r = k_2 s, \quad t = k_3 s$$

setzen können, wo k, k_1, k_2, k_3 bekannte Grössen sind. Setzt man dann noch $x'_1=1$, so ist $s=y'_3$, und die Gleichungen 18. erhalten die folgende Form:

$$20.\begin{cases} zx'_3+y'_2y'_3=ky'_3, \\ zy'_3-y'_2x'_3=k_1y'_3, \\ \qquad\quad y'_2=k_2y'_3, \\ 1-x'_3+z=k_3y'_3. \end{cases}$$

Dies sind vier Gleichungen mit vier unbekannten Grössen, die sich also mittelst dieser Gleichungen bestimmen lassen. Durch Elimination von y'_2, wenn man nämlich den Werth dieser Grösse aus der dritten Gleichung in die beiden ersten Gleichungen einführt, erhält man leicht die drei folgenden Gleichungen:

$$21.\begin{cases} zx'_3+k_2y'_3y'_3=ky'_3, \\ \quad z-k_2x'_3=k_1, \\ 1-x'_3+z=k_3y'_3; \end{cases}$$

und durch Elimination von z erhält man ferner die beiden Gleichungen

$$22.\begin{cases} (1-k_2)x'_3=1+k_1-k_3y'_3, \\ k_2(x'_3x'_3+y'_3y'_3)=ky'_3-k_1x'_3 \end{cases}$$

zwischen den Coordinaten x'_3 und y'_3. Führt man den Werth von x'_3 aus der ersten dieser beiden Gleichungen in die zweite ein, so erhält man für y'_3 die folgende Gleichung des zweiten Grades:

$$\begin{aligned} 23.\quad 0=&(1+k_1)(k_1+k_2) \\ &-\{k(1+k_2k_2)-2k_2(k-k_3)+k_1k_3(1+k_2)\}y'_3 \\ &+k_2\{(1-k_2)^2+k_3k_3\}y'_3y'_3, \end{aligned}$$

und sieht also, dass y'_3 im Allgemeinen zwei Werthe hat, die aber auch beide unmöglich werden können. Hat man auf diese Art y'_3 gefunden, so ergeben sich x'_3, z, x'_2, y'_2 leicht mittelst der Gleichungen 22., 21., 16. und 20., wobei man immer fest zu halten hat, dass $x'_1=1$ gesetzt worden ist. Die Coordinaten x, y des Punktes A findet man nun ferner ganz auf dieselbe Art wie oben bei der Pothenot'schen Aufgabe gezeigt worden ist, und auf ganz ähnliche Weise ergeben sich auch die Coordinaten der Punkte A_1, A_2, A_3.

Alle unbekannte Grössen sind hier durch die Grösse x'_1 als Einheit ausgedrückt worden, und mehr als die Verhältnisse der gesuchten Grössen zu der Grösse x'_1 als Einheit lässt sich auch aus den Datis der Aufgabe in der That nicht finden, weil die sämmtlichen Data der Aufgabe nur Winkel sind. Handelte es sich um absolute Grössenbestimmungen, so müsste mindestens noch eine der in der Figur vorkommenden Linien, etwa die Linie x'_1, welche unter den oben gemachten Voraussetzungen offenbar die Entfernung der beiden Punkte A' und A'_1 von einander ist, gemessen werden.

XV.

Tafel der pythagoräischen Dreiecke.

Von dem

Herrn Professor C. A. Bretschneider

zu Gotha.

Dass die in den Schulze'schen Tafeln Bd. II. Seite 308 ff. unter der Aufschrift „rationale Trigonometrie" enthaltene Tafel der pythagoräischen Dreiecke in einzelnen Resultaten bedeutende Fehler enthält, wird allen den Lehrern der Trigonometrie nicht unbekannt sein, die diese Tafel zu Aufgaben für ihre Schüler benutzt haben. Neuerdings hat jedoch Herr Professor Kunze in Weimar*) nachgewiesen, dass die Menge der in jener Tabelle vorkommenden Fehler so bedeutend ist, dass letztere dadurch fast unbrauchbar wird. Da sie nun gleichwohl dem Lehrer eine sehr brauchbare Beispielsammlung für rechtwinkliche und schiefwinkliche Dreiecke darbietet, so habe ich mich der kleinen Mühe unterzogen, sie nochmals zu berechnen und dabei die Winkel bis auf Zehntelsecunden genau zu bestimmen. Da jedes Resultat mittelst der Callet'schen Tafeln doppelt berechnet und die Winkel bis auf Hunderttheile der Secunden gesucht worden sind, wobei die doppelten Werthe höchstens nur um 0,"04 differiren durften, so möchten die erhaltenen Resultate wohl volles Zutrauen verdienen.

Bezeichnen daher m und n relative Primzahlen, von denen immer nur die eine ungerade seyn darf, und man setzt den einen Catheten a eines rechtwinklichen Dreieckes gleich $2mn$, so ist der andere Cathete b gleich m^2-n^2, die Hypotenuse h gleich m^2+n^2, woraus sich die den Catheten a und b gegenüberliegenden Winkel A und B durch die Gleichungen:

$$\tang \tfrac{1}{2} A = \frac{n}{m} \text{ und } \tang \tfrac{1}{2} B = \frac{m-n}{m+n}$$

ergeben. Die Tafel selbst ist nun folgende:

---

*) In der Vorrede zu Chr. Gottl. Tröbst Tafel der Sinus, Tangenten und Secanten etc. Jena 1840 bei Hochhausen. 181 S. 12.

m	n	a	b	h	$\frac{1}{2}ab$	A	B
2	1	4	3	5	6	53° 7′48″,4	36°52′11″,6
3	2	12	5	13	30	67 22 48, 5	22 37 11, 5
4	1	8	15	17	60	28 4 20, 9	61 55 39, 1
	3	24	7	25	84	73 44 23, 3	16 15 36, 7
5	2	20	21	29	210	43 36 10, 1	46 23 49, 9
	4	40	9	41	180	77 19 10, 6	12 40 49, 4
6	1	12	35	37	210	18 55 28, 7	71 4 31, 3
	5	60	11	61	330	79 36 40, 0	10 23 20, 0
7	2	28	45	53	630	31 53 26, 8	58 6 33, 2
	4	56	33	65	924	59 29 23, 2	30 30 36, 8
	6	84	13	85	546	81 12 9, 3	8 47 50, 7
8	1	16	63	65	504	14 15 0, 1	75 44 59, 9
	3	48	55	73	1320	41 6 43, 5	48 53 16, 5
	5	80	39	89	1560	64 0 38, 8	25 59 21, 2
	7	112	15	113	840	82 22 18, 7	7 37 41, 3
9	2	36	77	85	1386	25 3 27, 4	64 56 32, 6
	4	72	65	97	2340	47 55 29, 9	42 4 30, 1
	8	144	17	145	1224	83 16 1, 5	6 43 58, 5
10	1	20	99	101	990	11 25 16, 3	78 34 43, 7
	3	60	91	109	2730	33 23 54, 6	56 36 5, 4
	7	140	51	149	3570	69 59 2, 5	20 0 57, 5
	9	180	19	181	1710	83 58 27, 9	6 1 32, 1
11	2	44	117	125	2574	20 36 34, 9	69 23 25, 1
	4	88	105	137	4620	39 57 58, 4	50 2 1, 6
	6	132	85	157	5610	57 13 15, 3	32 46 44 7
	8	176	57	185	5016	72 3 17, 1	17 56 42, 9
	10	220	21	221	2310	84 32 50, 5	5 27 9, 5
12	1	24	143	145	1716	9 31 38, 2	80 28 21, 8
	5	120	119	169	7140	45 14 23, 0	44 45 37, 0
	7	168	95	193	7980	60 30 46, 4	29 29 13, 6
	11	264	23	265	3036	85 1 15, 3	4 58 44, 7
13	2	52	165	173	4290	17 29 32, 4	72 30 27, 6
	4	104	153	185	7956	34 12 19, 6	55 47 40, 4
	6	156	133	205	10374	49 33 1, 0	40 26 59, 0
	8	208	105	233	10920	63 12 54, 0	26 47 6, 0
	10	260	69	269	8970	75 8 13. 8	14 51 46, 2
	12	312	25	313	3900	85 25 7, 6	4 34 52, 4
14	1	28	195	197	2730	8 10 16, 4	81 49 43, 6
	3	84	187	205	7854	24 11 22, 3	65 48 37, 7
	5	140	171	221	11970	39 18 27, 5	50 41 32, 5
	9	252	115	277	14490	65 28 13, 6	24 31 46, 4
	11	308	75	317	11550	76 18 52, 0	13 41 8, 0
	13	364	27	365	4914	85 45 28, 1	4 14 31, 9
15	2	60	221	229	6630	15 11 21, 4	74 48 38, 6
	4	120	209	241	12540	29 51 46, 0	60 8 14, 0
	8	240	161	289	19320	56 8 41, 9	33 51 18, 1
	14	420	29	421	6090	86 3 0, 4	3 56 59, 6
16	1	32	255	257	4080	7 9 9, 6	82 50 50, 4
	3	96	247	265	11856	21 14 21, 5	68 45 38, 5
	5	160	231	281	18480	34 42 29, 0	55 17 31, 0
	7	224	207	305	23184	47 15 31, 5	42 44 28, 5

m	n	a	b	h	$\frac{1}{2}ab$	A	B
16	9	288	175	337	25200	58°42′55″,8	31°17′ 4″,2
	11	352	135	377	23760	69 1 1, 4	20 58 58, 6
	13	416	87	425	18096	78 11 15, 8	11 48 44, 2
	15	480	31	481	7440	86 18 17, 2	3 41 42, 8
17	2	68	285	293	9690	13 25 10, 8	76 34 49, 2
	4	136	273	305	18564	26 28 51, 7	63 31 8, 3
	6	204	253	325	25806	38 52 48, 3	51 7 11, 7
	8	272	225	353	30600	50 24 8, 1	39 35 51, 9
	10	340	189	389	32130	60 55 51, 9	29 4 8, 1
	12	408	145	433	29580	70 26 6, 7	19 33 53, 3
	14	476	93	485	22134	78 56 41, 7	11 3 18, 3
	16	544	33	545	8976	86 31 42, 9	3 28 17, 1
18	1	36	323	325	5814	6 21 34, 8	83 38 25, 2
	5	180	299	349	26910	31 2 53, 6	58 57 6, 4
	7	252	275	373	34650	42 30 3, 6	47 29 56, 4
	11	396	203	445	40194	62 51 32, 9	27 8 27, 1
	13	468	155	493	36270	71 40 31, 1	18 19 28, 9
	17	612	35	613	10710	86 43 36, 6	3 16 23, 4
19	2	76	357	365	13566	12 1 4, 9	77 58 55, 1
	4	152	345	377	26220	23 46 38, 3	66 13 21, 7
	6	228	325	397	37050	35 3 4, 1	54 56 55, 9
	8	304	297	425	45144	45 40 2, 3	44 19 57, 7
	10	380	261	461	49590	55 31 1, 5	34 28 58, 5
	12	456	217	505	49476	64 33 4, 6	25 26 55, 4
	14	532	165	557	43890	72 46 7, 3	17 13 52, 7
	16	608	105	617	31920	80 12 6, 5	9 57 53, 5
	18	684	37	685	12654	86 54 13, 3	3 5 46, 7
20	1	40	399	401	7980	5 43 29, 3	84 16 30, 7
	3	120	391	409	23460	17 3 41, 5	72 56 18, 5
	7	280	351	449	49140	38 34 48, 3	51 25 11, 7
	9	360	319	481	57420	48 27 19, 7	41 32 40, 3
	11	440	279	521	61380	57 37 17, 7	32 22 42, 3
	13	520	231	569	60060	66 2 51, 9	23 57 8, 1
	17	680	111	689	37740	80 43 44, 6	9 16 15, 4
	19	760	39	761	14820	87 3 44, 6	2 56 15, 4
21	2	84	437	445	18354	10 52 50, 4	79 7 9, 6
	4	168	425	457	35700	21 34 6, 9	68 25 53, 1
	8	336	377	505	63336	41 42 32, 1	48 17 27, 9
	10	420	341	541	71610	50 55 36, 1	39 4 23, 9
	16	672	185	697	62160	74 36 28, 4	15 23 31, 6
	20	840	41	841	17220	87 12 20, 3	2 47 39, 7
22	1	44	483	485	10626	5 12 18, 4	84 47 41, 6
	3	132	475	493	31350	15 31 49, 2	74 28 10, 8
	5	220	459	509	50490	25 36 30, 7	64 23 29, 3
	7	308	435	533	66990	35 18 0, 9	54 41 59, 1
	9	396	403	565	79794	44 29 53, 0	45 30 7, 0
	13	572	315	653	90090	61 9 30, 4	28 50 29, 6
	15	660	259	709	85470	68 34 25, 5	21 25 34, 5
	17	748	195	773	72930	75 23 18, 5	14 36 41, 5
	19	836	123	845	51414	81 37 48, 6	8 22 11, 4
	21	924	43	925	19866	87 20 8, 0	2 39 52, 0

m	n	a	b	h	$\frac{1}{2}ab$	A	B
23	2	92	525	533	24150	9°56′22″,1	80° 3′37″,9
	4	184	513	545	47196	19 43 53, 8	70 16 6, 2
	6	276	493	565	68034	29 14 30, 3	60 45 29, 7
	8	368	465	593	85560	38 21 28, 8	51 38 31, 2
	10	460	429	629	98670	46 59 49, 7	43 0 10, 3
	12	552	385	673	106260	55 6 20, 2	34 53 39, 8
	14	644	333	725	107226	62 39 26, 6	27 20 33, 4
	16	736	273	785	100464	69 38 56, 3	20 21 3, 7
	18	828	205	853	84870	76 5 38, 7	13 54 21, 3
	20	920	129	929	59340	82 1 5, 4	7 58 54, 6
	22	1012	45	1013	22770	87 27 14, 2	2 32 45, 8
24	1	48	575	577	13800	4 46 18, 8	85 13 41, 2
	5	240	551	601	66120	23 32 11, 7	66 27 48, 3
	7	336	527	625	88536	32 31 13, 5	57 28 46, 5
	11	528	455	697	120120	49 14 49, 7	40 45 10, 3
	13	624	407	745	126984	56 53 9, 1	33 6 50, 9
	17	816	287	865	117096	70 37 20, 8	19 22 39, 2
	19	912	215	937	98040	76 44 5, 9	13 15 54, 1
	23	1104	47	1105	25944	87 33 44, 1	2 26 15, 9
25	2	100	621	629	31050	9 8 52, 3	80 51 7, 7
	4	200	609	641	60900	18 10 50, 0	71 49 10, 0
	6	300	589	661	88350	26 59 29, 3	63 0 30, 7
	8	400	561	689	112200	35 29 21, 6	54 30 38, 4
	12	600	481	769	144300	51 16 55, 2	38 43 4, 8
	14	700	429	821	150150	58 29 51, 5	31 30 8, 5
	16	800	369	881	147600	65 14 18, 6	24 45 41, 4
	18	900	301	949	135450	71 30 28, 0	18 29 32, 0
	22	1100	141	1109	77550	82 41 44, 0	7 18 16, 0
	24	1200	49	1201	29400	87 39 42, 2	2 20 17, 8

Eine genaue Vergleichung dieser Tafel mit der Schulzeschen zeigt nun allerdings sehr viele und zum Theil bedeutende Rechnungsfehler. Der Verfertiger der Tafel hat unter 200 Dreiecken nicht weniger als 68 Dreiecke doppelt berechnet, weil er verkannt hat, dass die Werthe tang $\frac{1}{2}A = \frac{m}{n}$ und tang $\frac{1}{2}B = \frac{m-n}{m+n}$ zu demselben Dreiecke gehören. Von diesen 68 Dreiecken sind wiederum 23 falsch berechnet, während unter den 64 Dreiecken, welche bloss einmal vorkommen, 9 grösstentheils total falsche sich befinden. Ausserdem sind nicht weniger als 18 Dreiecke vorhanden, in welchen die Winkel gerade um 0,″5 zu gross oder zu klein angegeben sind, so dass demnach auf 132 wirklich von einander verschiedene Dreiecke 32 ganz falsche und 18 ungenaue, zusammen also 50 fehlerhafte kommen. Für diejenigen, welche die Schulzeschen Tafeln besitzen, folgen die nöthigen Verbesserungen im nachstehenden Schema:

anstatt $\omega =$	muss sein $\omega =$	anstatt $\omega =$	muss sein $\omega =$
6°43′58″	6°43′59″	38°21′28″	38°21′29″
12 1 4	12 1 5	50 41 33	50 41 32
12 40 50	12 40 49	55 6 2	55 6 20
13 25 10	13 25 11	61 10 29	61 9 30
15 11 24	15 11 21	61 55 57	61 55 39
16 16 24	16 15 37	64 56 32	64 56 33
17 28 35	17 29 32	68 45 39	68 45 38
17 56 44	17 56 43	72 56 16	72 56 18
21 13 38	21 14 22	70 39 21	70 37 21
21 33 55	21 34 7	74 48 38	74 48 39
23 45 22	23 46 38	75 45 54	75 45 0
24 32 14	24 31 46	78 12 44	78 11 16
25 35 25	25 36 31	79 8 50	79 7 10
26 59 25	26 59 29	79 35 56	79 36 40
33 23 54	33 23 55	81 12 2	81 12 9
35 2 44	35 3 4	81 49 43	81 49 44

Unter den Dreiecksseiten befinden sich folgende Fehler:

$\omega =$	anstatt			muss sein		
	perp.	hyp.	bas.	perp.	hyp.	bas.
12° 1′ 4″	78	—	—	76	—	—
13 41 8	—	308	317	—	317	308
30 30 37	23	—	—	33	—	—
42 44 28	203	—	—	207	—	—
60 30 46	—	183	—	—	193	—
70 30 28	—	929	—	—	949	—
71 40 31	476	—	—	468	—	—

Unter der Rubrik endlich „tang $\frac{1}{2}\omega$ in Decimaltheilen“ sind folgende Fehler gefunden worden:

	anstatt	muss sein
tang $\frac{1}{2}\omega =$	0,2608691	0,2608696
	0,2941179	0,2941176
	0,3076938	0,3076923
	0,3157363	0,3157895
	0,5909001	0,5909091
	0,6086965	0,6086957
	0,6956526	0,6956522
	0,7058823	0,7058824
	0,7619047	0,7619048
	0,9523809	0,9523810

In der oben stehenden neu berechneten Tafel ist die zuletzt erwähnte Columne der Schulzeschen Tafel weggelassen und dafür eine Columne für die Flächeninhalte der Pythagoräischen Dreiecke beigefügt worden, da die letzteren dem Lehrer nöthiger sind als der Werth von tang $\frac{1}{2}A$ in Decimaltheilen. Die Einrichtung der Schulzeschen Tafel aber, welche die Dreieckswinkel A und B zu Argumenten hat, ist gänzlich verlassen worden, weil man, wie Herr Professor Kunze sehr richtig bemerkt, bestimmte Dreiecke weniger nach dem Winkel, als vielmehr nach den bestimmten und bestimmenden Verhältnissen von $n:m$ aufzusuchen pflegt. Die Tafel gewährt bei dieser Veränderung zugleich den Vortheil, dass man sie jeden Augenblick weiter fortsetzen kann, ohne sie völlig umordnen zu müssen, was bei der von **Schulze** getroffenen Einrichtung nicht geschehen kann.

XVI.

Ueber die Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Decimalbruch.

Von dem

Herrn Doctor J. A. Arndt,

Subrector und Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Torgau.

Das Verfahren selbst ist bekannt, ebenso, dass zuweilen ein gewöhnlicher Bruch sich vollkommen in einen Decimalbruch verwandeln lässt, zuweilen nur näherungsweise, und dass im letzteren Falle eine Periode entsteht, welche nie mehr Ziffern haben kann, als der Nenner des Bruches Einheiten enthält weniger eine. Hier sollen die Fragen beantwortet werden:

1. Wann entsteht eine Periode, wann nicht?
2. Wann fängt die Periode sogleich nach dem Komma an, wann nicht?

Der in einen Decimalbruch zu verwandelnde gewöhnliche Bruch sei $\frac{r}{p}$; es werde angenommen, er sei auf seine kleinste Benennung gebracht, ebenso, er sei ein ächter Bruch, indem die unächten Brüche sogleich in vermischte Zahlen verwandelt werden, die Ganzen aber sodann unberücksichtigt bleiben können.

Da bei der Verwandlung des Bruches $\frac{r}{p}$ in einen Decimalbruch der Zähler des Bruches nach und nach immer mit 10 multiplicirt und dieses Product dann durch den Nenner dividirt wird, so kann die Division nur dann aufgehen, wenn der Nenner p in 10 oder einer Potenz von 10 aufgeht; nun ist aber 10 oder eine Potenz von 10 nur durch 2 und 5 theilbar, es kann daher der Bruch $\frac{r}{p}$ nur dann vollkommen in einen Decimalbruch verwandelt werden, wenn der Nenner keine andern Primfactoren enthält, als 2 und 5. Auch lässt sich durch die Zerlegung des Nenners in seine Primfactoren leicht beurtheilen, wieviel Decimalstellen der Decimalbruch haben werde; p muss nämlich eine von folgenden Formen haben: 2^n, 5^n, $2^n . 5^m$, $2^m . 5^n$,*) wo m immer kleiner oder höchstens $= n$ sein soll.

Von welcher Form der Nenner p aber auch sei, immer wird er in $2^n . 5^n = (2 . 5)^n = 10^n$, nicht aber in einer niedrigeren Potenz von 10 aufgehen. Man muss demnach den Zähler des Bruches mit 10^n multipliciren, damit die Division durch den Nenner p aufgehe, woraus unmittelbar folgt, dass der Quotient dieser Division aus n Ziffern bestehen, der Decimalbruch also n Decimalstellen, d. h. so viel Decimalstellen haben müsse, als der höchste der beiden Exponenten, mit welchen nach der Zerlegung des Nenners in seine Primfactoren die 2 und 5 versehen sind, Einheiten enthält.

Hiernach geben die Nenner 2, 5, 10 einen Decimalbruch mit einer Decimalstelle, die Nenner 4, 20, 25, 50, 100 mit zwei Decimalstellen, die Nenner 8, 40, 125, 200, 250, 500, 1000 mit drei Decimalstellen, die Nenner 16, 80, 400, 625, 1250, 2000, 2500, 5000, 10000 mit vier Decimalstellen u. s. w.

Enthält der Nenner des Bruches andere Primfactoren als 2 und 5, so kann, wie aus dem Vorigen erhellet, da diese andern Primfactoren nicht in 10 oder einer Potenz von 10 aufgehen würden, der Bruch nicht vollkommen in einen Decimalbruch verwandelt werden, sondern muss einen periodischen geben.

Hierbei lassen sich zwei Fälle unterscheiden, jenachdem der Nenner p gar keine 2 und 5 unter seinen Primfactoren enthält oder nicht. Im erstern Falle fängt die Periode sogleich nach dem Komma an. Die Form der Rechnung sei diese:

$$\begin{array}{l}
p\,|\,r0\,|\,0,q\,q_1\,q_2\,q_3\ldots q_k \\
\quad\underline{pq\quad} \\
\qquad r_1 0 \\
\qquad\underline{p\,q_1\quad} \\
\qquad\quad r_2 0 \\
\qquad\quad\underline{p\,q_2\quad} \\
\qquad\qquad r_3 0 \\
\qquad\qquad\quad\vdots \\
\qquad\qquad\qquad\overline{\quad\quad} \\
\qquad\qquad\qquad r_k\,0 \\
\qquad\qquad\qquad\underline{p\,q_k\quad} \\
\qquad\qquad\qquad\quad r_l
\end{array}$$

so dass also $\frac{r}{p} = 0, q\,q_1\,q_2\,q_2 \ldots q_k \ldots$ ist.

Es lässt sich nun zeigen, dass unter den Resten r_1, r_2, r_3, ... r_k, r_l keiner eher wiederkehren kann, bevor nicht einer gleich dem Zähler geworden ist, dass also r_l weder $= r_1$, noch $= r_2$, noch $= r_3$ u. s. w., noch $= r_k$ sein könne. Nach der Natur der Rechnung ist

*) Setzt man $m=0$, so hat man als besondere Fälle für die beiden letztern Formen die beiden erstern Formen.

$$r_1 = 10\,r - pq$$
$$r_2 = 10\,r_1 - pq_1$$
$$r_3 = 10\,r_2 - pq_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$r_g = 10\,r_f - pq_f$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$r_l = 10\,r_k - pq_k$$

Wäre nun r_l z. B. gleich r_g, so müsste auch

$$10\,r_f - pq_f = 10\,r_k - pq_k, \text{ also auch}$$
$$10\,r_f - 10\,r_k = pq_f - pq_k \text{ oder}$$
$$10\,(r_f - r_k) = p\,(q_f - q_k) \text{ sein.}$$

Da p nicht in 10 aufgeht und auch nicht in $r_f - r_k$, indem r_f und r_k kleiner als p sind, so kann es auch nicht in $10\,(r_f - r_k)$, d. h. in der linken Seite der Gleichung

$$10\,(r_f - r_k) = p\,(q_f - q_k) \text{ aufgehen, also}$$
$$\frac{10\,(r_f - r_k)}{p} \text{ nicht } = q_f - q_k \text{ sein, da}$$

$\frac{10\,(r_f - r_k)}{p}$ keine ganze Zahl sein kann, $q_f - q_k$ aber eine ganze Zahl sein muss. Es kann demnach nicht $10\,(r_f - r_k) = p\,(q_f - q_k)$ d. h. r_l nicht gleich r_g sein. Da aber nothwendig eine von den Zahlen r, r_1, r_2 u. s. w. wieder als Rest erscheinen muss, so kann dies nur die erste r, d. h. der Zähler des Bruches sein; dann aber kehrt auch der Quotient q und die auf ihn folgenden nach der Reihe wieder. Es fängt also die Periode sogleich nach dem Komma an, wenn der Nenner gar keine 2 oder 5 unter seinen Primfactoren enthält.

Enthalte nun p unter seinen Primfactoren ausser anderen auch 2 und 5 und sei z. B. $p = 2^n \cdot 5^m \cdot t$ oder $= 2^m \cdot 5^n \cdot t$, wo n nicht kleiner als m sein soll und t eine nicht durch 2 oder 5 theilbare Zahl ist; man hat demnach

$$\frac{r}{p} = \frac{r \cdot 10^n}{2^n \cdot 5^m \cdot t} : 10^n \text{ oder im andern Falle } = \frac{r \cdot 10^n}{2^m \cdot 5^n \cdot t} : 10^n.$$

Nun ist 10^n immer durch $2^n \cdot 5^m$ und durch $2^m \cdot 5^n$ theilbar und der Quotient $\frac{10^n}{2^n \cdot 5^m}$ oder $\frac{10^n}{2^m \cdot 5^n}$ werde durch v bezeichnet; dann ist

$$\frac{r}{p} = \frac{r \cdot v}{t} : 10^n.$$

Der Bruch $\frac{r \cdot v}{t}$ giebt, da t keine 2 und 5 als Primfactoren enthält, einen periodischen Decimalbruch, dessen Periode sogleich nach dem Komma beginnt; nun muss aber $\frac{r \cdot v}{t}$ noch durch 10^n dividirt, das Komma also n Ziffern nach der linken Hand hin gerückt werden, es wird daher $\frac{r}{p}$ einen Decimalbruch geben, dessen Periode erst nach n Ziffern d. h. nach so viel Ziffern anfängt, als der höchste der beiden Exponenten, mit welchen nach der Zerlegung des Nenners in seine Primfactoren die 2 und 5 versehen sind, Einheiten enthält.

Fasst man Alles zusammen, so hat man folgende Bestimmungen:

1) Ein Bruch lässt sich vollkommen in einen Decimalbruch verwandeln, wenn der Nenner desselben zu seinen Primfactoren nur 2 und 5 enthält, und zwar ist die Anzahl der Decimalstellen immer dem höchsten der beiden Exponenten gleich, mit welchen nach Zerlegung des Nenners in seine Primfactoren die 2 und 5 versehen sind.

2) Ein Bruch giebt einen periodischen Decimalbruch, wenn der Nenner nicht bloss 2 und 5 zu Primfactoren enthält und zwar

a. die Periode fängt sogleich nach dem Komma an, wenn der Nenner zu Primfactoren gar keine 2 oder 5 enthält.

b. die Periode fängt nicht gleich nach dem Komma an, wenn der Nenner ausser andern Primfactoren auch noch 2 und 5 enthält, und zwar ist dann die Anzahl der der Periode vorhergehenden Ziffern gleich dem höchsten der beiden Exponenten, mit welchem nach Zerlegung des Nenners in seine Primfactoren die 2 und 5 versehen sind.

XVII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

(Der Herausgeber bittet um recht vielfache Mittheilung solcher Aufgaben in möglichst grosser Mannigfaltigkeit. Es kann seiner Meinung nach einer solchen Mittheilung nicht unbedingt der Umstand entgegen stehen, dass sich die Aufgaben schon anderwärts gedruckt finden, wenn dieselben nur weniger bekannt sind und in irgend einer Beziehung ein besonderes Interesse darbieten. Auch können späterhin besonders elegante Auflösungen in dem Archive mitgetheilt werden. Die folgenden Aufgaben sollen nur ein Versuch sein, den Artikel: „Uebungsaufgaben für Schüler", bei dessen Ueberschrift man es übrigens mit dem Zusatze für Schüler nicht allzu genau nehmen muss, zu einem stehenden in dem Archive zu machen, und der Herausgeber hofft in dieser Beziehung vorzüglich auch auf Unterstützung durch seine Herrn Mitarbeiter. Die folgenden Lehrsätze sollen natürlich immer bewiesen, die Aufgaben aufgelöst werden, worüber eine besondere Bemerkung späterhin nicht weiter gemacht werden wird.)

1. Wenn zwei gerade Linien sich unter Winkeln von 60° in einem gewissen Punkte S schneiden, so ist der geometrische Ort der Spitzen aller gleichseitigen Dreiecke, deren Grundlinien zwi-

schen den Schenkeln der in Rede stehenden Winkel von 60°, und deren Spitzen auf derselben Seite ihrer Grundlinie wie der Punkt S liegen, eine durch den Punkt S gehende und gegen die beiden gegebenen geraden Linien unter Winkeln von 60° geneigte gerade Linie.

Dieser Satz, welcher zu verschiedenen geometrischen Betrachtungen Veranlassung geben kann, soll bewiesen und mittelst desselben dann die folgende Aufgabe aufgelöst werden.

2. Gleichseitige Dreiecke zu beschreiben, deren Spitzen in drei gegebenen durch einen Punkt gehenden geraden Linien liegen.

3. Wenn man ein Rechteck, dessen längere Seite sich zu seiner kürzern wie $\sqrt{2}:1$, d. h. wie die Diagonale eines Quadrats zu seiner Seite verhält, durch eine mit seinen kürzern Seiten parallele gerade Linie halbirt, die erhaltene Hälfte auf ähnliche Weise wieder halbirt, und diese Operation in's Unendliche fortsetzt, so erhält man eine Reihe von Rechtecken, die sämmtlich einander ähnlich sind, und deren längere Seiten sich wie

$$1:\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{1}{\sqrt{2^2}}:\frac{1}{\sqrt{2^3}}:\frac{1}{\sqrt{2^4}}:\frac{1}{\sqrt{2^5}}:\ldots.$$

zu einander verhalten.

4. Es ist ein Kreis und innerhalb desselben sind zwei Punkte gegeben; man soll durch diese beiden gegebenen Punkte einen Kreis dergestalt beschreiben, dass die gerade Linie, welche seine beiden Durchschnittspunkte mit dem gegebenen Kreise verbindet, durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht.

5. Ueber zwei gegenüberstehenden Seiten eines Vierecks als Grundlinien sind zwei einander gleiche Dreiecke construirt, deren Spitzen in denselben Punkt fallen; man soll den geometrischen Ort dieses Punktes bestimmen.

6. Die folgenden goniometrischen Formeln sind zu beweisen.

1°. $\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\alpha+\gamma-\beta)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$
$$=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

2°. $\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\gamma-\beta)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$
$$=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

3°. $\operatorname{tang}(\alpha+\beta+\gamma)+\operatorname{tang}(\alpha+\beta-\gamma)+\operatorname{tang}(\alpha-\beta+\gamma)+\operatorname{tg}(-\alpha+\beta+\gamma)$
$$=2\frac{2\sin2(\alpha+\beta+\gamma)+\sin4\alpha+\sin4\beta+\sin4\gamma}{4\cos2\alpha\cos2\beta\cos2\gamma+\cos4\alpha+\cos4\beta+\cos4\gamma},$$

4°. $4\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(\alpha+\beta-\gamma)\sin(\alpha-\beta+\gamma)\sin(-\alpha+\beta+\gamma)$
$$=2\cos2\alpha\cos2\beta\cos2\gamma-\cos2\alpha^2-\cos2\beta^2-\cos2\gamma^2+1,$$

5°. $4\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\alpha+\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta+\gamma)\cos(-\alpha+\beta+\gamma)$
$$=2\cos2\alpha\cos2\beta\cos2\gamma+\cos2\alpha^2+\cos2\beta^2+\cos2\gamma^2-1,$$

6°. $8\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma+\delta)\sin\frac{1}{4}(\alpha-\beta+\gamma+\delta)$
$$\sin\frac{1}{4}(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

$$= 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\delta + 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma\sin\tfrac{1}{2}\delta$$
$$- \cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma - \cos\delta,$$

7°. $$8\cos\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\cos\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma+\delta)\cos\tfrac{1}{4}(\alpha-\beta+\gamma+\delta)$$
$$\cos\tfrac{1}{4}(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\delta + 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma\sin\tfrac{1}{2}\delta$$
$$+ \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta,$$

8°. $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\gamma)=4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$,

9°. $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\gamma)=4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)-1$,

10°. $$\sin(\alpha-\beta)^2+\sin(\alpha-\gamma)^2+\sin(\beta-\gamma)^2$$
$$=2\{1-\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\gamma)\cos(\beta-\gamma)\},$$

11°. $$\cos(\alpha-\beta)^2+\cos(\alpha-\gamma)^2+\cos(\beta-\gamma)^2$$
$$=1+2\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\gamma)\cos(\beta-\gamma),$$

12°. $$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)^2+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)^2+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)^2$$
$$+\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)^2$$
$$=2(1+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma),$$

13°. $$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)^2+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)^2+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)^2$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)^2$$
$$=2(1-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma),$$

14°. $$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2+\cos(\alpha+\beta+\gamma)^2$$
$$=2\{1+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)\},$$

15°. $$\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2+\sin(\alpha+\beta+\gamma)^2$$
$$=2\{1-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)\}.$$ *)

7. Ein dreiseitiges Prisma mit einer Ebene so zu durchschneiden, dass der Schnitt ein gleichseitiges Dreieck wird.

8. Zu finden, an welchen Tagen des Jahrs die Sonne zweien Oertern, deren Längen und Breiten gegeben sind, in demselben Augenblicke auf- oder untergeht.

---

*) Diese goniometrischen Formeln finden sich nebst noch vielen andern auf einem unter den Papieren des verstorbenen Professors Mollweide befindlichen Blatte verzeichnet. Aus der Handschrift lässt sich jedoch mit völliger Sicherheit erkennen, dass dieselben von dem ebenfalls verstorbenen Professor Buzengeiger in Freiburg herrühren. Der zu frühe Tod dieser beiden trefflichen Männer wird von den Mathematikern mit Recht schmerzlichst empfunden und bedauert. G.

XVIII.

Miscellen.

Von dem kürzlich verstorbenen berühmten französischen Mathematiker Poisson erzählt man folgenden Zug. Im Jahre 1802 kam ein Rekrut zu ihm, gab sich für seinen Pathen aus, und ersuchte ihn, ihm eine Summe von 500 Francs aufzuheben; komme er im Kriege um, so solle sie seiner Schwester zugehören; bleibe er aber am Leben, so werde er das Geld selbst wieder abholen. — „Ganz recht, mein Freund" antwortete Poisson „legt es nur dort hin, und lasst mich arbeiten, denn ich habe viel zu thun." Der Rekrut legt den Sack mit den 500 Francs auf ein Büchergestell, und Poisson legt, um ihn vor Besuchenden nicht sehen zu lassen, einen Band des Horaz darauf. Zwanzig Jahre später kommt ein Mann mit sonnverbranntem Gesicht, und verlangt seine 500 Francs zurück. Poisson kann sich nicht erinnern; Jener schwört Stein und Bein, dass er ihm das Geld zugestellt habe. „Wie" fragt endlich Poisson voll Wuth „Ihr hättet mir die Summe in die Hände gelegt?" — „Nein" erwiederte der Soldat „aber auf jenes Büchergestell; Sie selbst haben dieses Buch darauf gelegt." Bei diesen Worten hebt er den Klassiker auf, und findet hinter dem bestaubten Octavband, zu seiner nicht geringen Verwunderung, den Sack mit den 500 Francs so wieder, wie er ihn vor zwanzig Jahren hingelegt hatte.

Der berühmte englische Physiker und Chemiker Michael Faraday ist der Sohn eines gewöhnlichen Grobschmiedes, der ihn zu einem kleinen Buchbinder in London in die Lehre that, als er erst neun Jahre alt war, bei dem Faraday bis zu seinem zweiundzwanzigsten Jahre blieb. Die Umstände, welche veranlassten, dass er die Buchbinderwerkstatt mit dem chemischen Laboratorium vertauschte, werden auf folgende Weise erzählt. Ned Magrath, jetzt Sekretair bei dem Athenäum, kam vor etwa fünf und zwanzig Jahren zu dem Buchbinder Ribeau und sah, dass einer der Gesellen eifrig in einem Buche studirte, das er einbinden sollte. Er trat näher und sah, dass es ein Band der Encyclopaedia britannica war, aufgeschlagen bei dem Artikel „Electricität." Er liess sich mit dem eifrigen Buchbindergesellen in ein Gespräch ein und wunderte sich nicht wenig, bei demselben nicht geringe chemische

Kenntnisse zu finden. Er gab ihm darauf eine Eintrittskarte zu den Vorlesungen Davy's in der Royal Institution, und hier konnte man nun jeden Tag den Buchbindergesellen dem Vorlesenden gegenüber, mit der gespanntesten Aufmerksamkeit zuhörend oder bisweilen schreibend. sitzen sehen. Die Vorlesungen nahmen ein Ende, aber Faraday's Geist hatte einen neuen Anstoss bekommen, der nur durch die grösste Noth hätte unwirksam gemacht werden können; dies wurde jedoch durch die Bereitwilligkeit verhindert, mit welcher Davy dem verwandten Geiste zu Hülfe kam. Er ernannte Faraday zu seinem Gehülfen in dem Laboratorium, und nach zwei bis drei Jahren konnte er ihn als Sekretair gebrauchen. Jetzt steht der ehemalige Buchbindergesell an der Spitze der Chemiker in England. Diese wenig oder gar nicht bekannten Notizen sind einer Schrift entlehnt, in der man sie nicht suchen sollte, nämlich Arnett's History of book-binding.

In der Eloge de Lambert in den Nouveaux Mémoires de l'Academie royale des sciences et belles-lettres. 1778. p. 84. wird bei Gelegenheit der Berufung dieses berühmten Mathematikers nach Berlin der folgende characteristische Zug von demselben erzählt: Le Roi le fit appeler à Potsdam au mois de Mars (1764). C'étoit une conjoncture bien critique pour le sort de M. Lambert; et d'abord elle parut décider pour la négative. Le ton tranchant de ses réponses, l'assurance avec laquelle il répondit sans hésiter à la question: „Que savez vous?" — „Tout, Sire" — et à l'instance „Comment l'avez-vous appris?" — „De moi-même", en frappant des oreilles, peu faites à ce langage, pouvoient faire juger que la plénitude de son cerveau en avoit altéré quelques ressorts. L'entrevue demeura donc infructueuse et paroissoit devoir l'être sans retour; mais le Roi mis au fait de la singularité de ce caractère, qu'un de nos dignes Confrères, honoré des entretiens journaliers de S.M. Lui assura ressembler à celui de La Fontaine, ne voulut pas priver son Académie d'un Membre dont elle avoit tant à se promettre. Il y fut donc aggrégé avec une pension, et prononça son discours de réception dans l'Assemblée publique du mois de Janvier 1765. Depuis ce tems-là le Roi lui a donné des marques fréquentes et distinguées de son estime, en le plaçant dans la Commission économique de l'Académie, et dans le département des Batimens avec le titre de Conseiller supérieur, et en augmentant considérablement sa pension.

Man habe n beliebige Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, ... A_n im Raume. Wenn man diese Punkte in einer beliebigen Ordnung nimmt, und von dem 1sten nach dem 2ten, von dem 2ten nach dem 3ten, von dem 3ten nach dem 4ten, u. s. w. von dem $(n-1)$sten nach dem $n$ten, von dem $n$ten nach dem 1sten gerade Linien zieht, so wollen wir den ganzen auf diese Weise erhaltenen Zug eine Polygonlinie nennen, und man kann nun fragen, durch wie viele verschiedene Polygonlinien die gegebenen n Punkte sich mit einander verbinden lassen. Die Antwort auf diese Frage kann leicht auf folgende Art gegeben werden.

Da die Anzahl der Permutationen der gegebenen n Punkte bekanntlich $1 . 2 . 3 \ldots n$ ist, so giebt es natürlich überhaupt $1 . 2 . 3 \ldots n$ Polygonlinien, und es entsteht jetzt bloss die Frage, ob diese Polygonlinien sämmtlich von einander verschieden sind, oder ob unter denselben sich nicht vielleicht einige identische finden. Um hierüber zur Gewissheit zu kommen, denke man sich eine beliebige, aber bestimmte Permutation der n gegebenen Punkte, z. B. die Permutation

$$A_1\ A_2\ A_3\ A_4 \ldots . A_n.$$

Nun erhellet zunächst auf der Stelle, dass alle aus den folgenden Permutationen der n gegebenen Punkte entspringenden Polygonlinien unter einander identisch sind:

$$\begin{array}{c} A_1\ A_2\ A_3\ A_4 \ldots . A_n \\ A_2\ A_3\ A_4 \ldots . A_n\ A_1 \\ A_3\ A_4 \ldots . A_n\ A_1\ A_2 \\ A_4 \ldots . A_n\ A_1\ A_2\ A_3 \\ \text{u. s. w.} \\ A_n\ A_1\ A_2\ A_3 \ldots . A_{n-1}. \end{array}$$

Ferner geben aber offenbar auch alle die Permutationen, welche aus den vorhergehenden entspringen, wenn man die Buchstaben in umgekehrter Ordnung schreibt, ganz dieselbe Polygonlinie wie die vorhergehenden Permutationen, und es erhellet also hieraus nun mit völliger Deutlichkeit, dass unter den $1 . 2 . 3 \ldots n$ Polygonlinien, welche es überhaupt giebt, eine jede nothwendig $2n$ Mal vorkommt, so dass man also, wenn die Anzahl der sämmtlich wirklich von einander verschiedenen Polygonlinien durch p bezeichnet wird, die Gleichung

$$2np = 1 . 2 . 3 \ldots n$$

hat, aus der sich

$$p = \frac{1 . 2 . 3 \ldots n}{2n} = \frac{1 . 2 . 3 \ldots (n-1)}{2}$$

ergiebt. Für $n=3$ ist z. B. $p = \frac{1 . 2}{2} = 1.$

$$\text{Für } n = 4 \text{ ist } p = \frac{1 . 2 . 3}{2} = 3.$$

Für $n = 5$ ist $p = \frac{1 . 2 . 3 . 4}{2} = 12.$ Von der Richtigkeit dieser Resultate kann man sich leicht auf praktischem Wege überzeugen.

Auf der Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser wir der Einfachheit wegen der Einheit gleich setzen wollen, sei ein sphärisches Dreieck $A\ B\ C$ beschrieben, dessen Seiten, so wie sie den Winkeln A, B, C gegenüberstehen, wie gewöhnlich durch a, b, c bezeichnet werden. Durch die Punkte A, B, C ziehe man nun an die Seiten des Dreiecks $A\ B\ C$ sechs Tangenten, bezeichne die Durchschnittspunkte der beiden an die Seiten a, b, c gezogenen Tangenten respective durch A_1, B_1, C_1, und verbinde diese drei Punkte durch gerade Linien mit einander, so erhält man ein ebenes Dreieck $A_1\ B_1\ C_1$, dessen drei Seiten, so wie sie den Winkeln A_1, B_1, C_1 gegenüberstehen, respective durch a_1, b_1, c_1 bezeichnet werden sollen. Die Seiten und Winkel dieses ebenen Dreiecks $A_1\ B_1\ C_1$ wollen wir nun durch die Seiten des sphärischen Dreiecks $A\ B\ C$ auszudrücken suchen.

Zuvörderst ist nach bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie, wie sogleich erhellet,

$$a_1{}^2 = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b^2 + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c^2 - 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \cos A,$$

$$b_1{}^2 = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c^2 + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a^2 - 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a \cos B,$$

$$c_1{}^2 = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a^2 + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b^2 - 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b \cos C.$$

Weil nun nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

ist, so ist, wie man leicht findet, wenn man

$$\tan \tfrac{1}{2} b = \frac{\sin \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} b}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} c}$$

und

$$\sin b = 2 \sin \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} b, \quad \sin c = 2 \sin \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} c$$

setzt,

$$a_1{}^2 = \frac{2 \sin \frac{1}{2} b^2 \cos \frac{1}{2} c^2 + 2 \cos \frac{1}{2} b^2 \sin \frac{1}{2} c^2 - (\cos a - \cos b \cos c)}{2 \cos \frac{1}{2} b^2 \cos \frac{1}{2} c^2}.$$

Setzt man nun ferner

$$\cos a - \cos b \cos c = \cos a - (\cos \tfrac{1}{2} b^2 - \sin \tfrac{1}{2} b^2)(\cos \tfrac{1}{2} c^2 - \sin \tfrac{1}{2} c^2),$$

so erhält man nach einigen leichten Reductionen

$$a_1{}^2 = \frac{1 - \cos a}{2 \cos \frac{1}{2} b^2 \cos \frac{1}{2} c^2} = \frac{\sin \frac{1}{2} a^2}{\cos \frac{1}{2} b^2 \cos \frac{1}{2} c^2},$$

und folglich, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben,

$$a_1 = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}, \quad b_1 = \frac{\sin \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} a}, \quad c_1 = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}.$$

Aus diesen drei Formeln erhält man leicht

$$a_1+b_1+c_1=\frac{\sin a+\sin b+\sin c}{2\cos\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}b\ \cos\frac{1}{2}c},$$

$$b_1+c_1-a_1=\frac{\sin b+\sin c-\sin a}{2\cos\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}b\ \cos\frac{1}{2}c},$$

$$c_1+a_1-b_1=\frac{\sin c+\sin a-\sin b}{2\cos\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}b\ \cos\frac{1}{2}c},$$

$$a_1+b_1-c_1=\frac{\sin a+\sin b-\sin c}{2\cos\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}b\ \cos\frac{1}{2}c}.$$

Ist Δ_1 der Flächeninhalt des Dreiecks $A_1\ B_1\ C_1$, so ist bekanntlich

$$\Delta_1=\tfrac{1}{4}\sqrt{(a_1+b_1+c_1)\ (b_1+c_1-a_1)\ (c_1+a_1-b_1)\ (a_1+b_1-c_1)},$$

und folglich nach dem Obigen

$$\Delta_1=\frac{\sqrt{(\sin a+\sin b+\sin c)(\sin b+\sin c-\sin a)(\sin c+\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b-\sin c)}}{16\cos\frac{1}{2}a^2\ \cos\frac{1}{2}b^2\ \cos\frac{1}{2}c^2}$$

Auch ergiebt sich sogleich die folgende Relation

$$a_1\ b_1\ c_1=\frac{\sin\frac{1}{2}a\ \sin\frac{1}{2}b\ \sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a^2\ \cos\frac{1}{2}b^2\ \cos\frac{1}{2}c^2}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}b\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}b\ \cos\frac{1}{2}c}.$$

Nach der ebenen Trigonometrie ist bekanntlich

$$\cos A_1=\frac{b_1{}^2+c_1{}^2-a_1{}^2}{2b_1\ c_1},$$

und folglich, wenn man die oben gefundenen Ausdrücke von a_1, b_1, c_1 einführt, nach einigen leichten Verwandlungen, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben,

$$\cos A_1=\frac{\sin b^2+\sin c^2-\sin a^2}{2\sin b\ \sin c},$$

$$\cos B_1=\frac{\sin c^2+\sin a^2-\sin b^2}{2\sin c\ \sin a},$$

$$\cos C_1=\frac{\sin a^2+\sin b^2-\sin c^2}{2\sin a\ \sin b}.$$

Die weitere Verfolgung der Vergleichung der beiden Dreiecke $A\ B\ C$ und $A_1\ B_1\ C_1$ mit einander überlassen wir dem Leser, indem wir diesen Gegenstand als eine, wie es uns scheint, zweckmässige Uebung für Schüler in der ebenen und sphärischen Trigonometrie hier nur haben andeuten wollen.

Berichtigung.

Seite 15, Zeile 9 setze man: — 2,710911 und — 2,710913 für 2,710911 und 2,710913.

XIX.

Beiträge zur Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Von dem

Herrn Professor Dr. L. Oettinger

zu Freiburg i. Br.

I.

Der Werth der Erwartung im Verhältniss zu der Art, die zu wagende Summe auszusetzen.

A will die Summe ra wagen. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist $\frac{m}{m+n}$, die zu verlieren ist $\frac{n}{m+n}$. So oft A gewinnt, erhält er den Einsatz $q$mal als reinen Gewinn. Es fragt sich: Soll A die Summe ra in einem Versuche, soll er sie in r hintereinander folgenden oder gleichzeitigen Versuchen wagen?

Um die vorliegende Frage zu beantworten, ist der Werth der Erwartung zu bestimmen, die Jemand hat, wenn er die Summe ra in einem Versuche oder die Summe a in r Versuchen aussetzt und die erhaltenen Resultate sind unter sich zu vergleichen.

a) Setzt A die Summe in einem Versuche aus, so ergiebt sich bekanntlich der Werth seiner Erwartung durch das Product des Gewinnes in die Wahrscheinlichkeit diesen Gewinn zu erhalten. Der gesuchte Werth ergiebt sich hiernach

$$1)\quad E = qra\,.\,\frac{m}{m+n}.$$

b) Die genannte Summe wird auf r hintereinander folgende Versuche vertheilt und in jedem die Summe a ausgesetzt.

Folgende Fälle können eintreten: A gewinnt in allen Versuchen, oder in $(r-1)$, oder in $(r-2)$, oder in $(r-3)$, ... oder in 2, oder in einem Versuche. Hiedurch sind alle für den Unternehmer günstigen Fälle erschöpft. Der Gesammt Werth der Erwartung, der sich hierauf gründet, wird gefunden, wenn derjenige der einzelnen Fälle bestimmt und die Summe aller ermittelt wird.

Die Wahrscheinlichkeit, in allen Versuchen zu gewinnen, ist

$$W = \frac{m^r}{(m+n)^r}.$$

In diesem Falle gewinnt A die Summe $q \,.\, ra$. Der Werth der Erwartung ist

$$E_r = \frac{m^r}{(m+n)^r} \,.\, q \,.\, ra.$$

Die Wahrscheinlichkeit, in $(r-1)$ Versuchen zu gewinnen, setzt voraus, dass A einmal verliere. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse auf die genannte Weise eintreten, ist

$$r \,.\, \frac{m^{r-1}}{(m+n)^{r-1}} \,.\, \frac{n}{m+n}.$$

In diesem Falle gewinnt A die Summe $(r-1)qa$. Der Werth der Erwartung ist dann

$$E_{r-1} = \frac{r}{1} \,.\, \frac{m^{r-1} \,.\, n}{(m+n)^r} \, (r-1)qa.$$

Die Wahrscheinlichkeit, in $(r-2)$ Versuchen zu gewinnen, setzt voraus, dass das entgegengesetzte Ereigniss zweimal eintreten werde. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist

$$\frac{r \,.\, (r-1)}{1 \,.\, 2} \,.\, \frac{m^{r-2}}{(m+n)^{r-2}} \,.\, \frac{n^2}{(m+n)^2}.$$

In diesem Falle gewinnt A die Summe $(r-2)\,qa$. Der Werth der Erwartung ist

$$E_{r-2} = \frac{r\,(r-1)}{1 \,.\, 2} \,.\, \frac{m^{r-2} \,.\, n^2}{(m+n)^r} \, (r-2) \,.\, qa$$

Werden diese Schlüsse fortgesetzt, so ergiebt sich durch Analyse sämmtlicher für A günstigen Fälle für den Gesammtwerth der Erwartung folgende Darstellung:

$$E = q \,.\, ra \,.\, \frac{m}{m+n} \left[\frac{m^{r-1}}{(m+n)^{r-1}} + \frac{r-1}{1} \,.\, \frac{m^{r-2} \,.\, n}{(m+n)^{r-1}} \right.$$
$$\left. + \frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \,.\, \frac{m^{r-3}\, n^2}{(m+n)^{r-1}} + \ldots + \frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}} \,.\, \frac{n^{r-1}}{(m+n)^{r-1}} \right]$$
$$= q \,.\, ra \,.\, \frac{m}{m+n} \,.\, \frac{(m+n)^{r-1}}{(m+n)^{r-1}},$$

also

$$2)\quad E = q\, ra \,.\, \frac{m}{m+n}.$$

Das gleiche Resultat, wie unter 2) ergiebt sich, wenn die Versuche gleichzeitig gemacht werden. Die Vergleichung von 1) und 2) führt in Folge der eben angeführten Bemerkung zu folgendem Satze:

3) Der Werth der Erwartung oder der mathematischen Hoffnung bleibt derselbe, man mag eine zu wagende Summe in einem Versuche oder gleichheitlich auf mehrere Versuche aussetzen, vorausgesetzt dass die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, in allen Fällen gleich gross ist.

Hierher gehört auch folgender Fall, der eine besondere Art von Versuchen in sich begreift, nämlich diejenigen, worin keine

Wiederholungen eintreten können, wie sie bei dem eben betrachteten Fall vorausgesetzt wurden.

In einer Urne sind m Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 .... m bezeichnet sind. Es werden p Kugeln hintereinander gezogen und nach geschehener Ziehung zusammen in die Urne zurückgeworfen. Jede Zahl kann mit einer beliebigen Summe besetzt werden. Erscheint die besetzte Zahl unter den gezogenen, so wird der Einsatz q mal als reiner Gewinn bezahlt. A will die Summe ra wagen. Soll er sie auf eine Zahl setzen, oder auf r Zahlen in einer und derselben Ziehung gleichheitlich vertheilen?

Auch hier beruht die Beantwortung der vorliegenden Frage auf zwei Fällen und es ist der Werth der Erwartung zu bestimmen, wenn die ganze Summe auf eine Zahl gesetzt, oder gleichheitlich auf mehrere Zahlen derselben Ziehung vertheilt wird.

a) A setzt die Summe ra auf eine einzige Zahl. In diesem Falle gewinnt er den $q$fachen Einsatz. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die besetzte Zahl unter p gezogenen befinden werde, ist

$$W = p \cdot \frac{(m-1)^{p-1|-1}}{m^{p|-1}} = \frac{p}{m}.$$

Der Werth der Erwartung ist für diesen Fall

$$4) \quad E = \frac{p}{m}\, q \cdot ra.$$

b) Die Ermittelung des Werthes der Erwartung von A für den Fall, dass die Summe ra gleichheitlich auf r Zahlen einer Ziehung vertheilt wird, beruht auf der Untersuchung folgender Fälle. Alle besetzten Zahlen erscheinen; $r-1$, $r-2$, $r-3$, ... 3, 2 oder 1 besetzte Zahl erscheint.

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle besetzten Zahlen erscheinen werden, ist

$$W = \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{r^{r|-1}\,(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}}.$$

In diesem Falle ist der reine Gewinn $q \cdot ra$. Der Werth der Erwartung ist sofort

$$E_r = \frac{p^{r|-1}\,(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}}\, q \cdot ra.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass $(r-1)$ von den besetzten Zahlen erscheinen werden, ist

$$W = \frac{p^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}} \cdot \frac{r^{r-1|-1}\,(m-r)^{p-r+1|-1}}{m^{p|-1}}.$$

In diesem Falle beträgt der Gewinn $(r-1)qa$. Der Werth der Erwartung ist sofort

$$E_{r-1} = \frac{p^{r-1|-1} \cdot r(m-r)^{p-r+1|-1}}{m^{p|-1}}\,(r-1)\,qa.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass $(r-2)$ Zahlen erscheinen werden, ist

$$W = \frac{p^{r-2|-1}}{1^{r-2|1}} \cdot \frac{r^{r-2|-1} \cdot (m-r)^{p-r+2|-1}}{m^{p|-1}}.$$

Der Gewinn ist in diesem Falle $(r-2)qa$. Hiernach ist der Werth der Erwartung

$$E_{r-2} = \frac{p^{r-2|-1}\, r^{2|-1}\, (m-r)^{p-r+3|-1}}{1^{2|1}\; m^{p|-1}}\,(r-2)\,qa.$$

Werden diese Bemerkungen weiter fortgesetzt, so ergiebt sich für den Gesammtwerth der Erwartung folgende Darstellung:

$$E = \frac{r\,p^{r|-1}\,(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}}\,qa + \frac{r^{2|-1}\,p^{r-1|-1}\,(m-r)^{p-r+1|-1}}{m^{p|-1}}\,qa$$

$$+ \frac{r^{3|-1}\,p^{r-2|-1}\,(m-r)^{p-r+2|-1}}{m^{p|-1}}\,qa + \ldots + \frac{r^{2|-1}}{1} \cdot \frac{p^{2|-1}\,(m-r)^{p-2|-1}}{m^{p|-1}}\,qa$$

$$+ \frac{r\,.\,p\,(m-r)^{p-1|-1}}{m^{p|-1}}\,qa.$$

Werden die jedem Gliede gemeinschaftlichen Grössen, und wird ferner die Fakultät

$$(m-r)^{p-r|-1} = (m-r)\,(m-r-1)\,(m-r-2)\ldots\,(m-p+1)$$

ausgestossen, so geht diese Darstellung in folgende über:

$$E = \frac{p(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}}\,q\,r\,a\,\Big[(p-1)^{r-1|-1} + \frac{r-1}{1}\,(p-1)^{r-2|-1}\,(m-p)$$

$$+ \frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\,(p-1)^{r-3|-1}\,(m-p)^{2|-1} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{r-1}{1}\,(p-1)\,(m-p)^{r-2|-1} + (m-p)^{r-1|-1}\Big].$$

Die in den Klammern eingeschlossene Reihe lässt sich bekanntlich auf den Ausdruck $(m-1)^{r-1|-1}$ zurückführen. Hiedurch geht die vorstehende Gleichung in folgende über:

$$E = \frac{p\,(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}}\,q\,ra\,(m-1)^{r-1|-1} = \frac{p\,qra\,(m-1)^{p-1|-1}}{m^{p|-1}}$$

oder

$$5)\quad E = \frac{p}{m}\,q\,.\,ra.$$

Aus der Vergleichung von 4) und 5) ergiebt sich der Schluss, dass auch unter den eben genannten Bedingungen der Werth der Erwartung in beiden Fällen gleich gross ist.

Die unter 4) und 5) gefundenen Resultate wurden unter der Voraussetzung gewonnen, dass r kleiner oder höchstens so gross als p ist. Sie gelten jedoch auch noch dann, wenn r grösser als p wird. und dann tritt eine Art von Paradoxon ein. Ist nämlich r grösser als die Anzahl der Kugeln, welche in einer Ziehung gezogen werden, so können höchstens p von den besetzten Kugeln gewinnen, und dann kann A, wenn er auf r Kugeln je einmal die Summe a setzt, im glücklichsten Fall den Gewinn $p\,.\,qa$ erhalten, während er bei Besetzung einer einzigen Zahl im glücklichen Fall die Summe $r\,.\,qa$ erhalten kann. Doch dieser Widerspruch löst sich dadurch, dass der Werth der Erwartung den mittleren oder Durchschnitts-Werth für alle mögliche Gewinnste angiebt, und dass dieser Durchschnittswerth einer bestimmten Summe gleichkommen kann, ohne dass die einzelnen Gewinnste, wodurch er bedingt ist, zu einer solchen Höhe anwachsen, als diess in einem andern Falle statt finden kann.

Untersucht man nun die möglichen Fälle, worin A gewinnen kann, wenn $r > p$ ist, so ergeben sich folgende: Von den besetzten Zahlen gewinnen p, oder $p-1$, $p-2$, ... 3, 2, 1. Wird der Werth der Erwartung für jeden einzelnen Fall nach der vorhin angegebenen Methode bestimmt, so ergiebt sich folgende Darstellung für den Gesammtwerth der Erwartung:

$$E = \frac{p^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot r^{p|-1}\, p \cdot qa + \frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \cdot \frac{r^{p-1|-1}(m-r)}{m^{p|-1}} (p-1)\, qa$$

$$+ \frac{p^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}} \cdot \frac{r^{p-2|-1}(m-r)^{2|-1}}{m^{p|-1}} (p-2)\, qa + \ldots$$

$$\ldots + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{r^{2|-1}(m-r)^{p-2|-1}}{m^{p|-1}} 2qa + \frac{p\,(m-r)^{p-1|-1} \cdot r}{m^{p|-1}} qa$$

$$= \frac{p \cdot r\, qa}{m^{p|-1}} \Big[(r-1)^{p-1|-1} + \frac{p-1}{1} (r-1)^{p-2|-1} (m-r)$$

$$+ \frac{(p-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} (r-1)^{p-3|-1} (m-r)^{2|-1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{p-1}{1} (r-1)(m-r)^{p-2|-1} + (m-r)^{p-1|-1} \Big]$$

Wird die in Klammern eingeschlossene Reihe wie vorhin behandelt, so ergiebt sich

$$6) \quad E = \frac{p}{m}\, r\, qa.$$

Der Calcul kennt also zwischen 4, 5, 6 keinen Unterschied. Der unter 2 aufgestelite Satz ist bekannt. Er findet sich unter andern in Lacroix's Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung (übersetzt v. Unger) §. 75. bewiesen. Die unter 4, 5 und 6 aufgestellten Sätze sind, wie man sieht, eine Erweiterung dieses Satzes. Sie werden hier eine Stelle um so eher finden, weil sie nicht gekannt zu sein scheinen und sogar Gauthier d'Hauteserve in seinem Traité sur les probab. Probl. XVII. P. 77. derbe Verstösse dagegen gemacht hat.

Dort findet sich nämlich folgende Aufgabe: *A* will mit 3 Fr. im Lotto spielen. Soll er sie auf eine Nummer, oder auf drei Nummern als Auszüge in einer und derselben Ziehung oder endlich auf je eine Nummer in drei verschiedenen Ziehungen setzen?

Gauthier findet als Werth der Erwartung, wenn er 3 Fr. auf eine Nummer setzt, wobei er den Satz 14 mal als reinen Gewinn erhält, 2,3333... Fr.; dagegen bei einer Vertheilung auf drei Nummern einer und derselben Ziehung 2,5464... Fr.; für den Fall, dass er sie hintereinander in drei verschiedenen Ziehungen vertheilt 2,601. Die letzte Methode wäre demnach die Vortheilhafteste.

Hätte Hr. G. d'Hauteserve richtige Schlüsse gemacht, so hätte er nach der Gleichung 4, 2 und 5 immer nur ein und dasselbe Resultat erhalten, nämlich 2,333... Fr. Zu dem scheint sich in das im angeführten Buche mitgetheilte Resultat 2,5464... ein Druck- oder Rechnungsfehler eingeschlichen zu haben.

Die Unrichtigkeit der von Hrn. G. d'Hauteserve gemachten Schlüsse tritt ganz besonders auffallend im dritten Falle hervor. Ist nämlich die Wahrscheinlichkeit, gerade einmal in drei Ziehungen zu gewinnen, $3 \cdot \frac{5}{90}$, wie Hr. G. meint, so wäre hiernach die Wahrscheinlichkeit in 18 Ziehungen einmal zu gewinnen, $18 \cdot \frac{5}{90} = 1$

und jeder, der 18 mal auf eine Nummer in den verschiedenen auf einander folgenden Ziehungen des Lottos setzte, müsste nach der Ansicht des Hrn. G. gewinnen, was offenbar falsch ist.

Wir schliessen mit der Bemerkung, dass die oben unter 1 bis 6 aufgestellten Sätze nur von dem objectiven Werthe der Erwartung, nicht aber von dem subjectiven oder individuellen Werth derselben gelten. Um letztern zu ermitteln sind andere Schlüsse zu machen.

II.

Verhältniss der Ordnung, in welcher die Theilnehmer zum Spiele gelangen, zum Werthe der Erwartung.

In einer Urne sind n Loose enthalten, und darunter zwei Treffer und $n-2$ Nieten. Der eine Treffer gewinnt die Summe a, der andere die Summe b. Die beiden Gewinnste sollen unter n Personen A_1, A_2, A_3 .... A_n durchs Loos vertheilt werden. Jede Person kommt in der genannten Ordnung zum Loosen und zieht dann ein Loos aus der Urne. Wie gross ist der Werth der Erwartung für jede einzelne Person vor dem Anfange der Ziehung?

Um die vorliegende Frage zu beantworten, ist zu beachten, dass die beiden Gewinnste in der angegebenen oder in der umgekehrten Ordnung erscheinen können. Erscheinen sie in der angegebenen, so können folgende Fälle eintreten:

a) d. Gewinnst. fall. a. d. 1te u. 2te, 1te u. 3te, 1te u. 4te .... 1te u. $n$te Pers.
b) - - - - - 2te - 3te, 2te - 4te, 2te - 5te .... 2te - $n$te -
c) - - - - - 3te - 4te, 3te - 5te, 3te - 6te .... 3te - $n$te -
. . . .
. . . .
. . . .
n) die Gewinnste fallen auf die $(n-1)$te und $n$te Person.

Diese Zusammenstellung umfasst alle möglichen Fälle. Sie stimmen mit den Zerstreuungen von zwei Elementen in n Fächer überein und sind deswegen ihrer Zahl nach (s. m. Comb. Lehre *)) $\frac{n(n-1)}{1.2}$. Jeder Theilnehmer hat die Aussicht, dass sich das Loos in $(n-1)$ Fällen günstig für ihn entscheide. Für jeden einzelnen Fall muss der Werth der Erwartung bestimmt und sämmtliche Werthe müssen zusammengezählt werden. Die Wahrscheinlichkeit ist für jeden einzelnen Fall veränderlich.

Geht man zur Werthbestimmung der einzelnen Fälle über, so setzt die Natur des unter a) aufgezählten Falles voraus, dass A_1 und A_2 gewinne, oder dass A_1 und A_3 gewinne, also für A_2 eine Niete erscheine, dass A_1 und A_4 gewinne, also für A_2 und A_3 eine Niete erscheine u. s. w. Diese Bemerkungen führen zu folgender Darstellung:

---

*) Die Lehre von den Combinationen nach einem neuen Systeme bearbeitet und erweitert von Dr. L. Oettinger. Freiburg, 1837. 8. Seite 94. G.

$$1)\ \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$
$$\frac{a}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{b}{n-2} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$
$$\frac{a}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{b}{n-3} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$
$$\frac{a}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{b}{n-4} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$
$$\vdots$$
$$\frac{a}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdots\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot b = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}.$$

Wendet man die eben gemachten Bemerkungen auch auf die unter b) aufgeführten Fälle an, so gewinnt man folgende Zusammenstellung:

$$2)\ \frac{n-2}{n}\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{b}{n-2} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$
$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{b}{n-3} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$
$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{b}{n-4} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$
$$\vdots$$
$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot b = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}.$$

Für die unter c) angeführten Fälle ergiebt sich:

$$3)\ \frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{a}{n-2}\cdot\frac{b}{n-3} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$
$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{a}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{b}{n-4} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$
$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{a}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\frac{b}{n-5} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$
$$\vdots$$
$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{a}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot b = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}$$

u. s. w. Der letzte Fall giebt folgende Bestimmung:

$$4)\ \frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot b = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}.$$

Erscheinen die Gewinnste in umgekehrter Ordnung, so treten auch dafür die oben unter a, b, c, d .... n aufgeführten Fälle wieder ein. Sie führen nach den beigefügten Bemerkungen zu folgenden Darstellungen:

$$5)\quad \frac{b}{n}\cdot\frac{a}{n-1} = \frac{b}{n}\cdot\frac{a}{n-1}$$

$$\frac{b}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{a}{n-2} = \frac{b}{n}\cdot\frac{a}{n-1}$$

$$\frac{b}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{a}{n-3} = \frac{b}{n}\cdot\frac{a}{n-1}$$

$$\frac{b}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{a}{n-4} = \frac{b}{n}\cdot\frac{a}{n-1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{b}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdots\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\,a = \frac{b}{n}\cdot\frac{a}{n-1}.$$

$$6)\quad \frac{n-2}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{a}{n-2} = \frac{b}{n}\cdot\frac{a}{n-1}$$

$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{a}{n-3} = \frac{b}{n}\cdot\frac{a}{n-1}$$

$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{a}{n-4} = \frac{b}{n}\cdot\frac{a}{n-1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\,a = \frac{b}{n}\cdot\frac{a}{n-1}$$

u. s. w. Endlich

$$7)\quad \frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdots\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{2}\cdot a = \frac{b}{n}\cdot\frac{a}{n-1}.$$

Die Hoffnung für A_1 den Gewinn a zu erhalten ist in 1) angegeben. $(n-1)$ Fälle sind für ihn günstig, die sämmtlich einander gleich sind. Ihre Summe ist hiernach

$$\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}(n-1) = \frac{a}{n}\cdot b.$$

Nun hat A_1 offenbar nur auf einen Gewinn, und in diesem Fall auf den Gewinn a Anspruch. Der Gewinn b fällt sofort einem der übrigen Theilnehmer zu. Dieser Gewinn ist von dem vorstehenden Resultate zu trennen. Der Werth der Erwartung für A_1 hinsichtlich des Gewinnstes a ist hiernach

$$a_1 = \frac{a}{n}.$$

In 5) ist der Werth der Erwartung für A_1 in Beziehung auf den Gewinn b angegeben. Die Wiederholung der gemachten Bemerkungen hinsichtlich des Gewinnstes b giebt hiernach für A_1

$$\beta_1 = \frac{b}{n}.$$

Der Gesammtwerth seiner Erwartung ist sofort

$$E_1 = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Auf ganz ähnliche Weise bestimmt sich der Werth der Erwartung für A_2. Nach 2) giebt es für ihn $(n-2)$ günstige Fälle, den Gewinn a zu erhalten, während ein späterer Theilnehmer den Gewinn b erhält. Nach 5) hat er noch einmal Hoffnung auf denselben Gewinn, während A_1 den Gewinn b erhält. Hiernach ist der Werth seiner Erwartung in Beziehung auf a:

$$\alpha_2 = \frac{a}{n}.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich der Werth seiner Erwartung in Beziehung auf den Gewinn b. Er ist

$$\beta_2 = \frac{b}{n}.$$

Der Gesammtwerth seiner Erwartung ist also

$$E_2 = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Wird diese Entwicklungsweise weiter fortgeführt, so ergiebt sich der Werth der Erwartung für A_3

$$E_3 = \frac{a}{n} + \frac{b}{n},$$

und allgemein der Werth der Erwartung für den Theilnehmer A_k

$$8)\ E_k = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Diess führt zu dem Schlusse:

9) Sollen zwei Gewinnste a und b durch das Loos unter n Theilnehmer, die in einer vorgeschriebenen Ordnung zum Loosen gelangen, auf die oben bezeichnete Weise vertheilt werden, so ist der Werth der Erwartung für jeden Theilnehmer vor dem Beginne der Verloosung gleich.

Geht man von der oben vorgeschriebenen Ordnung, in welcher die Theilnehmer zum Loosen gelangen, ab und legt eine andere zu Grund, so bemerkt man leicht, dass sich die oben gemachten Schlüsse durchaus nicht ändern, und sich leicht auf die neu gewählte Ordnung übertragen lassen, dass sofort der Werth der Erwartung vor dem Beginne der Verloosung für jeden Theilnehmer unverändert bleibt. Hiernach rechtfertigt sich der Schluss:

10) Sollen zwei Gewinnste a und b durch das Loos unter n Theilnehmer auf die oben angegebene Weise vertheilt werden, so ist die Ordnung, in welcher die Theilnehmer zum Loosen gelangen, ganz gleichgültig und der Werth der Erwartung ist vor dem Beginne der Verloosung für alle Theilnehmer gleich.

Alles bleibt wie oben. k Nieten sind gezogen worden. Wie gross ist der Werth der Erwartung für jeden einzelnen der übrigen Theilnehmer?

Sind k Loose gezogen, so sind auch k Theilnehmer ausgetreten und noch $(n-k)$ Loose in der Urne nebst den Gewinnsten a und b zurück, worauf $n-k$ Personen Anspruch haben. Der vorliegende Fall ist ganz nach der vorhin angegebenen Weise zu behandeln. Die verminderte Anzahl der Loose ändert die Schlussfolge nicht: Der Werth der Erwartung für jeden einzelnen der noch übrigen Theilnehmer ist

$$9)\ E=\frac{a}{n-k}+\frac{b}{n-k}.$$

Ist schon ein Gewinn, etwa a, gezogen, so ist der Werth der Erwartung

$$10)\ E=\frac{b}{n-k}.$$

Wir kehren zu der oben aufgestellten Frage zurück und verallgemeinern.

In einer Urne, die n Loose enthält, befinden sich drei Treffer und $(n-3)$ Nieten. Sie sollen unter n Personen $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_n$ durchs Loos so vertheilt werden, dass diese in der genannten Ordnung zum Loosen gelangen. Wie gross ist der Werth der Erwartung für jede Person vor dem Beginne der Verloosung?

Die Gewinnste können in folgender Ordnung erscheinen:

$$\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ b, & a, & c \\ a, & c, & b \\ c, & a, & b \\ b, & c, & a \\ c, & b, & a \end{array}$$

Für jede Ordnung können folgende Fälle eintreten.

Die Gewinnste fallen zu:

a)	dem	1t., 2t. u. 3t.;	1t., 2t. u. 4t.;	1t., 2t. u. 5t. ……	1t., $(n-1)$t. u. nt.	Theil-
b)	–	2t., 3t. u. 4t.;	2t., 3t. u. 5t.;	2t., 3t. u. 6t. ……	2t., $(n-1)$t. u. nt.	nehmer
c)	–	3t., 4t. u. 5t.;	3t., 4t. u. 6t.;	3t., 4t. u. 7t. ……	3t., $(n-1)$t. u. nt.	–
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	

n) dem $(n-2)$ten, $(n-1)$ten und $n$ten Theilnehmer.

Dieses Schema fällt mit den Zerstreuungen von drei Elementen in n Fächer zusammen. Es gilt für jede einzelne Gewinnvertheilung. Hiernach ist die Zahl aller möglichen Fälle

$$1\,.\,2\,.\,3\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}=n\,(n-1)\,(n-2).$$

Unter diesen Fällen sind $1\,.\,2\,\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}$, worin jeder Theilnehmer in Beziehung auf jeden einzelnen Gewinn ein für sich günstiges Resultat erwarten darf.

Die Werthe der Erwartung, die für das eben aufgestellte Schema zu bestimmen sind, ergeben sich aus folgenden Darstellungen und zwar der Reihe nach für die Fälle $a, b, c \ldots\ldots n$:

11) $\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{c}{n-2} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{c}{n-2}$

$\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{c}{n-3} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{c}{n-2}$

$\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{c}{n-4} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{c}{n-2}$

. . . .

$\frac{a}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-3}\cdots\cdots\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{2}\cdot c = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{c}{n-2}$

12) $\frac{n-3}{n}\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{b}{n-2}\cdot\frac{c}{n-3} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{c}{n-2}$

$\frac{n-3}{n}\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{b}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{c}{n-4} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{c}{n-2}$

$\frac{n-3}{n}\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{b}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\frac{c}{n-5} \qquad = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{c}{n-2}$

. . . .

$\frac{n-3}{n}\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-3}\cdot\frac{n-6}{n-4}\cdots\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{2}\cdot c = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{c}{n-2}$

u. s. w.

13) $\frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-4}{n-1}\cdot\frac{n-5}{n-2}\cdot\frac{n-6}{n-3}\cdots\cdots\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{2}\cdot c = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{c}{n-2}$

Wird eine andere Ordnung im Erscheinen der Gewinnste a, b, c gewählt, so ist in 11, 12, und 13 die veränderte Ordnung hinsichtlich der Buchstaben a, b, c einzuführen. Die übrigen Gebilde bleiben unverändert.

Um nun den Werth der Erwartung für A_1 hinsichtlich des Gewinnstes a zu ermitteln, ist zu bemerken, dass er ihn in $1.2.\frac{n(n-1)}{1.2}$ Fällen erhalten kann, worin jedoch ausser ihm noch zwei andere Theilnehmer sich in die Gewinnste b und c theilen. Diess führt zu der Bestimmung

$$\alpha_1 = \frac{a}{n}.$$

Auf gleiche Weise bestimmt sich der Werth der Erwartung von A_1 in Beziehung auf den Gewinn b. Er ist

$$\beta_1 = \frac{b}{n}.$$

Eben so in Beziehung auf den Gewinn c. Er ist

$$\gamma_1 = \frac{c}{n}.$$

Hiernach ist der Werth der Erwartung für A_1 in Beziehung auf alle Gewinnste

$$E_1 = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n}.$$

Die nämlichen Bemerkungen führen zur Bestimmung des Werthes der Erwartung für A_2:

$$E_2 = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n}.$$

Hieraus folgt endlich der Werth der Erwartung für A_k:

$$14)\ E_k = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n}.$$

Man ist sofort zu dem Schlusse gelangt, dass auch in dem vorliegenden Falle der Werth der Erwartung für alle Theilnehmer, die in der vorgeschriebenen Ordnung zum Loosen gelangen, gleich ist. Hieran knüpft sich nun die weitere Folgerung leicht, dass zugleich die Ordnung, in welcher die Theilnehmer zum Loosen gelangen, gleichgültig ist, da die Darstellungen 11, 12, 13 für jede andere Ordnung des oben aufgestellten Schema's gelten.

Die hier angegebene Entwicklungsweise hat, wie sich deutlich zeigt, einen allgemeinen Charakter. Sie bleibt dieselbe, wenn die Vertheilung von vier und mehr Gewinnsten unter n Personen in Frage kommt.

Sind nun die Gewinnste $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_r$ unter n Personen auf die oben angegebene Weise durchs Loos zu vertheilen, und fragt man nach dem Werthe der Erwartung für die einzelnen Theilnehmer vor dem Beginne der Verloosung, so ergiebt sich für jeden ohne Unterschied

$$15)\ E = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots a_r}{n}.$$

Hier gilt die Bedingungsgleichung, dass

$$r \overline{\overline{<}} n.$$

Die Gleichung 15) gilt eigentlich unter der Voraussetzung, dass sämmtliche Theilnehmer in der bestimmten Ordnung $A_1, A_2, \ldots A_n$ zum Loosen gelangen. Es liegt aber deutlich vor Augen, dass sie nach den oben angeführten Bemerkungen noch immer gilt, wenn irgend eine andere Ordnung, worin die Theilnehmer zum Loosen gelangen, gewählt wird. Diess rechtfertigt folgenden Satz:

16) Wenn r Gewinnste unter n Personen durchs Loos vertheilt werden sollen, so ist der Werth der Erwartung vor dem Beginne der Verlosung für alle Theilnehmer gleich, und die Ordnung, worin die Theilnehmer zum Loosen gelangen, ganz gleichgültig.

Die gleichen Gesetze gelten bei Vertheilung der Lasten durch das Loos. Diess beweist, dass das Verfahren, welches gewöhnlich bei Vertheilung der Gewinnste oder Lasten durch das Loos angewendet wird, ganz im Rechte begründet ist. Man ist gewissermassen einem instinctartigen, natürlichen Gefühle gefolgt, und hat recht gehandelt, ohne sich der Gründe dafür bewusst zu sein. Nirgends ist nämlich der vorstehende Satz, so viel mir bekannt ist, mit Hülfe der Mathematik begründet worden, und doch bildet er einen der ersten Elementarsätze in der Lehre von dem Werthe der Erwartung oder der mathematischen Hoffnung, wenn dieser Ausdruck der „moralischen Hoffnung" zur Seite gestellt werden darf. Selbst die Berechnung der durchschnittlichen Werthe von zu hoffenden Vortheilen, wie sie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung so häufig vorkommen, gründet sich auf den Satz 16, denn es ist nicht möglich den Erwartungswerth für irgend einen Theilnehmer zu bestimmen, wenn nicht eine bestimmte Ordnung gilt, oder nicht, wie hier, vorher nachgewiesen ist, dass die Ordnung in welcher die Verloosung nach der angegebenen Art vor sich geht, gleichgültig ist.

Sind mehrere von den zu vertheilenden Gewinnsten einander gleich, so ändert diess die obigen Bestimmungen nicht. Die Gleichung 16) geht dann in folgende über:

$$17)\ E = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + \ldots p_r a_r}{n},$$

wobei $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_r \overline{\overline{<}}\, n$ ist.

Sind k Nieten gezogen, ohne dass ein Gewinn erschienen ist, so ändert sich natürlich der Werth der Erwartung und es ist aus 17)

$$18)\ E = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + \ldots p_r a_r}{n - k}.$$

Hier muss

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_r \overline{\overline{<}}\, n - k$$

sein. Die Art, wie die Verloosung auszuführen ist, gehört nicht hierher.

Sind die Bedingungen der Verloosung anders, so werden auch die Resultate geändert. Weitere hieher gehörige Untersuchungen habe ich in den Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der Königl. Baierschen Akademie der Wissenschaften 2. Bd. München, 1837. p. 243 mitgetheilt.

XX.

Ableitung der Sätze von Rolle, Fourier und Descartes über die Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung aus der Lehre vom Excess der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen. Als Fortsetzung zu der Abhandlung No. V. in diesem Theile *).

Vom

Herausgeber.

---

§. 1.

Das Theorem von Rolle kann auf folgende Art ausgesprochen werden:

Die Anzahl der zwischen zwei beliebigen gegebenen Gränzen liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ ist nie grösser als die um eine Einheit vermehrte Anzahl der zwischen denselben Gränzen liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f'(x)=0$.

Um diesen merkwürdigen Satz zu beweisen, wollen wir die beiden gegebenen Gränzen durch a, b bezeichnen, und wollen, was offenbar verstattet ist, annehmen, dass $a<b$ sei. Der den Gränzen a, b entsprechende Excess der gebrochenen rationalen algebraischen Function $\frac{f'(x)}{f(x)}$ sei E, und die Anzahl der zwischen den Gränzen a, b liegenden von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ sei m; so ist nach dem in V. §. 30. bewiesenen Satze $m=E$. Ist nun E' der den Gränzen a, b entsprechende Excess der gebrochenen rationalen algebraischen Function $\frac{f(x)}{f'(x)}$, so ist nach dem in V. §. 23. bewiesenen Satze

$$E+E'=\varepsilon \text{ oder } E=-E'+\varepsilon,$$

wo entweder $\varepsilon=0$ oder $\varepsilon=\pm 1$ sein kann, und es ist folglich nach dem Vorhergehenden

$$m=-E'+\varepsilon.$$

---

*) Man vergl. die Note auf S. 45.

Nach dem aus V. §. 21. bekannten allgemeinen Begriffe des gewissen gegebenen Gränzen entsprechenden Excesses einer gebrochenen rationalen algebraischen Function ist nun, wenn, indem x sich von a bis b stetig ändert, die Function $\frac{f(x)}{f'(x)}$ n Mal unendlich wird und dabei von dem Negativen zum Positiven übergeht, und n' Mal unendlich wird und dabei von dem Positiven zum Negativen übergeht, $E' = n - n'$ oder $-E' = n' - n$, und folglich nach dem Obigen

$$m = n' - n + \varepsilon.$$

Wird nun die Function $\frac{f(x)}{f'(x)}$ zwischen den Gränzen a und b überhaupt m' Mal unendlich und ändert ihr Zeichen, so ist $m' = n' + n$, und folglich offenbar immer $m' \overline{\overline{>}} n' - n$, also $m' + \varepsilon \overline{\overline{>}} n' - n + \varepsilon$, d. i. nach dem Obigen $m' + \varepsilon \overline{\overline{>}} m$ oder $m \overline{\overline{<}} m' + \varepsilon$.

Bezeichnet jetzt m'' die Anzahl der zwischen den Gränzen a und b liegenden reellen von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$, welche nicht zugleich auch Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind; so ist offenbar immer $m' \overline{\overline{<}} m''$, also $m' + \varepsilon \overline{\overline{<}} m'' + \varepsilon$, und folglich nach dem Vorhergehenden immer

$$m \overline{\overline{<}} m'' + \varepsilon.$$

Liegen aber zwischen den Gränzen a und b noch m''' reelle von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$, welche zugleich auch Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind, so ist $m'' + m''' = m_1$ die Anzahl aller zwischen den Gränzen a und b liegenden reellen von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$, und folglich $m'' = m_1 - m'''$, also nach dem Obigen immer

$$m \overline{\overline{<}} m_1 - m''' + \varepsilon.$$

Bevor wir jetzt in dieser Betrachtung weiter fortschreiten, wollen wir zuvörderst völliger Deutlichkeit wegen den folgenden Satz von den Gleichungen in der Kürze beweisen:

Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als k Wurzeln hat, die sämmtlich $= a$ sind; so hat die Gleichung $f'(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als $k - 1$ Wurzeln, die sämmtlich $= a$ sind, wobei sich von selbst versteht, dass k nicht $= 0$ ist.

Weil nämlich nach der Voraussetzung die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als k Wurzeln hat, die sämmtlich $= a$ sind, so kann

$$f(x) = (x - a)^k \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine für $x = a$ nicht verschwindende ganze rationale algebraische Function von x bezeichnet, gesetzt werden. Nimmt man nun nach V. §. 7. und §. 10. auf beiden Seiten der vorstehenden Gleichung die derivirten Functionen; so erhält man

$$f'(x) = (x-a)^k\, \varphi'(x) + k(x-a)^{k-1}\, \varphi(x)$$

oder

$$f'(x) = (x-a)^{k-1}\, \{(x-a)\, \varphi'(x) + k\, \varphi(x)\},$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass die Gleichung $f'(x) = 0$ jederzeit $k-1$ Wurzeln hat, die sämmtlich $= a$ sind. Dass aber diese Gleichung auch nicht mehr als $k-1$ Wurzeln haben kann, die sämmtlich $= a$ sind, erhellet eben so leicht. Sollte dieselbe nämlich k Wurzeln haben, deren jede $= a$ ist; so müsste $x - a$ offenbar in der ganzen rationalen algebraischen Function

$$(x-a)\, \varphi'(x) + k\, \varphi(x)$$

aufgehen, und diese Function also für $x = a$ verschwinden, welches nicht möglich ist, da dieselbe für diesen Werth der Grösse x den Werth $k\varphi(a)$ erhält, und nach dem Obigen weder $k = 0$, noch $\varphi(a) = 0$ ist, wodurch nun unser obiger eingeschalteter Satz, der sich offenbar auch umkehren lässt, bewiesen ist.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die Gleichung $f(x) = 0$ zwischen den Gränzen a und b

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ \ldots\ k_\lambda,$$

von welchen Grössen eine jede grösser als die Einheit sein soll, reelle Wurzeln habe, die sämmtlich respective den Grössen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots\ \alpha_\lambda$$

gleich sind; so hat nach dem so eben bewiesenen Satze die Gleichung $f'(x) = 0$ zwischen den Gränzen a und b

$$k_1 - 1,\ k_2 - 1,\ k_3 - 1,\ k_4 - 1,\ \ldots\ k_\lambda - 1$$

reelle Wurzeln, die sämmtlich respective den Grössen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots\ \alpha_\lambda$$

gleich sind, und andere einander gleiche Wurzeln kann diese Gleichung nach dem in Rede stehenden Satze offenbar nicht haben. Da nun nach dem Obigen m die Anzahl der sämmtlich von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen den Gränzen a und b ist: so ist, wenn μ die Anzahl aller reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen den Gränzen a und b bezeichnet, offenbar

$$\mu = m + (k_1 - 1) + (k_2 - 1) + (k_3 - 1) + \ldots + (k_\lambda - 1)$$

oder

$$m = \mu - (k_1 - 1) - (k_2 - 1) - (k_3 - 1) - \ldots - (k_\lambda - 1).$$

Weil ferner nach dem Obigen m_1 die Anzahl der sämmtlich von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ zwischen den Gränzen a und b ist; so ist, wenn μ_1 die Anzahl aller reellen Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ zwischen den Gränzen a und b bezeichnet, wie eben so leicht erhellen wird,

$$\mu_1 = m_1 + (k_1 - 2) + (k_2 - 2) + (k_3 - 2) + \ldots + (k_\lambda - 2)$$

oder

$$m_1 = \mu_1 - (k_1 - 2) - (k_2 - 2) - (k_3 - 2) - \ldots - (k_\lambda - 2).$$

Weil nun nach dem Obigen

$$m \overline{\gtrless} m_1 - m''' + \varepsilon$$

ist, so ist

$$\mu - (k_1 - 1) - (k_2 - 1) - (k_3 - 1) - \ldots - (k_\lambda - 1)$$
$$\overline{\gtrless} \mu_1 - (k_1 - 2) - (k_2 - 2) - (k_3 - 2) - \ldots - (k_\lambda - 2) - m''' + \varepsilon,$$

und folglich, wie sich hieraus sogleich ergiebt,

$$\mu \overline{\gtrless} \mu_1 + \lambda - m''' + \varepsilon.$$

Nach dem Obigen ist m''' die Anzahl der von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ zwischen den Gränzen a und b, welche zugleich Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind. Ueberlegt man nun, dass nach dem vorher bewiesenen Satze jede Wurzel, welche die Gleichung $f(x) = 0$ nur ein Mal enthält, nicht auch eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ sein kann; so wird auf der Stelle erhellen, dass immer $m''' = \lambda$, und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\mu \overline{\gtrless} \mu_1 + \varepsilon$$

sein muss. Weil ferner nach dem Obigen immer

$$m \overline{\gtrless} m_1 - m''' + \varepsilon$$

ist, so ist um so mehr immer

$$m \overline{\gtrless} m_1 + \varepsilon.$$

Weil nun, wie wir oben gesehen haben, $+1$ der grösste Werth ist, welchen ε haben kann, so ist immer

$$\mu \overline{\gtrless} \mu_1 + 1 \text{ und } m \overline{\gtrless} m_1 + 1,$$

woraus man sieht, dass das Theorem von Rolle nicht bloss von allen zwischen den Gränzen a und b liegenden reellen Wurzeln der Gleichungen $f(x) = 0$ und $f'(x) = 0$, sondern auch von allen zwischen diesen Gränzen liegenden sämmtlich von einander verschiedenen reellen Wurzeln der beiden in Rede stehenden Gleichungen gilt.

Wenn

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \ldots . \alpha_\varrho$$

die sämmtlichen von einander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$, und diese Wurzeln nach ihrer Grösse aufsteigend geordnet sind; so liegt zwischen $-\infty$ und α_1 keine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, also nach dem vorhergehenden Satze höchstens eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Zwischen α_1 und α_2 liegt keine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, also nach dem vorigen Satze höchstens eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Zwischen α_ϱ und $+\infty$ liegt keine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, also höchstens eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Hieraus sieht man folglich, dass es höchstens eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, welche kleiner als α_1, höchstens eine reelle Wurzel dieser Gleichung geben kann, welche grösser als a_ϱ ist. Ferner kann nur eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ zwischen a_1 und a_2, nur eine reelle Wurzel dieser Gleichung zwischen a_2 und a_3, u. s. w., nur eine reelle Wurzel derselben Gleichung zwischen $a_{\varrho-1}$ und a_ϱ liegen.

§. 2.

Wir wollen jetzt annehmen, dass $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von x sei, und wollen durch successive Entwickelung der derivirten Functionen nach den aus V. A. bekannten Regeln die Reihe

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots f^{(n)}(x)$$

bilden. Setzen wir in dieser Reihe für x die Grössen a und b, wo wieder $a<b$ sein soll; so erhalten wir die beiden Reihen

$$(1)\ \ldots\ldots\ f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ f'''(a),\ \ldots\ f^{(n)}(a);$$

$$(2)\ \ldots\ldots\ f(b),\ f'(b),\ f''(b),\ f'''(b),\ \ldots\ f^{(n)}(b);$$

in denen, wie wir jetzt annehmen wollen, kein Glied verschwinden soll. Ferner wollen wir annehmen, dass zwischen den Gränzen a und b

$$\mu,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ldots\ \mu_n$$

reelle Wurzeln der Gleichungen

$$f(x)=0,\ f'(x)=0,\ f''(x)=0,\ f'''(x)=0,\ \ldots f^{(n)}(x)=0$$

liegen, und wollen überhaupt in Bezug auf die Functionen

$$f(x) \text{ und } f'(x),$$
$$f'(x) \text{ und } f''(x),$$
$$f''(x) \text{ und } f'''(x),$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$f^{(n-1)}(x) \text{ und } f^{(n)}(x)$$

durch

$$\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots\ \varepsilon_{n-1}$$

Dasselbe bezeichnen, was im vorigen Paragraphen in Bezug auf die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ durch ε bezeichnet worden ist; so ist, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben,

$$\mu \overline{\overline{<}} \mu_1 + \varepsilon,$$

$$\mu_1 \overline{\overline{<}} \mu_2 + \varepsilon_1,$$

$$\mu_2 \overline{\overline{<}} \mu_3 + \varepsilon_2,$$

$$\text{u. s. w.}$$

$$\mu_{n-1} = \mu_n + \varepsilon_{n-1};$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt, und aufhebt, was sich aufheben lässt,

$$\mu \overline{\overline{<}} \mu_n + \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{n-1}.$$

Da aber nach der Voraussetzung $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades, also nach V. §. 12. bekanntlich $f^{(n)}(x)$ ein constante nicht verschwindende Grösse ist; so sind die Grössen $f^{(n)}(a)$ und $f^{(n)}(b)$ einander gleich und verschwinden nicht, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass zwischen den Gränzen a und b keine reelle Wurzel der Gleichung $f^{(n)}(x)=0$ liegen kann, folglich $\mu_n=0$, und daher nach dem Obigen jederzeit

$$\mu \overline{\gtrless} \varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots\ldots+\varepsilon_{n-1}$$

ist.

Nach V. §. 24. ist

$$\varepsilon=0, \text{ oder } \varepsilon=+1, \text{ oder } \varepsilon=-1,$$

wenn respective die Vorzeichen von $f(a)$, $f'(a)$ und $f(b)$, $f'(b)$ zugleich eine Folge oder zugleich einen Wechsel bilden; wenn die Vorzeichen von $f(a)$, $f'(a)$ einen Wechsel, die Vorzeichen von $f(b)$, $f'(b)$ eine Folge bilden; wenn die Vorzeichen von $f(a)$, $f'(a)$ eine Folge, die Vorzeichen von $f(b)$, $f'(b)$ einen Wechsel bilden; und etwas ganz Aehnliches gilt von den Grössen ε_1, ε_2, ε_3, ... ε_{n-1}.

Seien nun w und f die Anzahl der Wechsel und der Folgen in der Reihe (1), w' und f' die Anzahl der Wechsel und der Folgen in der Reihe (2). Die Anzahl der Fälle, wo einem Wechsel in der Reihe (1) eine Folge in der Reihe (2) entspricht, sei k; die Anzahl der Fälle, wo einer Folge in der Reihe (1) ein Wechsel in der Reihe (2) entspricht, sei k'; die Anzahl der Fälle, wo einem Wechsel in der Reihe (1) ein Wechsel in der Reihe (2) entspricht, sei k''; die Anzahl der Fälle, wo einer Folge in der Reihe (1) eine Folge in der Reihe (2) entspricht, sei k'''; so ist nach Vorhergehenden offenbar

$$\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_{n-1}=k-k'.$$

Ferner ist aber, wie sogleich erhellet,

$$w=k+k'',\ f=k'+k'''$$

und

$$w'=k'+k'',\ f'=k+k''';$$

also

$$w-w'=k-k',\ f'-f=k-k',$$

und folglich nach dem Obigen

$$\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_{n-1}=w-w'=f'-f.$$

Weil nun immer

$$\mu \overline{\gtrless} \varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_{n-1}$$

war, so ist immer

$$\mu \overline{\gtrless} w-w' \text{ oder } \mu \overline{\gtrless} f'-f.$$

§. 3.

Im Vorhergehenden haben wir angenommen, dass kein Glied der beiden Reihen

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ f'''(a),\ \ldots.\ f^{(n)}(a);$$
$$f(b),\ f'(b),\ f''(b),\ f'''(b),\ \ldots.\ f^{(n)}(b)$$

verschwindet. Indem wir nun zu dem Falle übergehen wollen, wo diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, müssen wir zuvörderst die folgenden Betrachtungen vorausschicken.

Wir wollen überhaupt die Reihe

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ f'''(a),\ \ldots\ f^{(n)}(a),$$

welche die Functionenreihe genannt werden soll, betrachten. Die Reihe der Vorzeichen der einzelnen Glieder derselben mag die Zeichenreihe genannt und der Kürze wegen durch (a) bezeichnet werden, wobei wir zugleich bemerken, dass in derselben, wenn ein Glied der Functionenreihe verschwindet, an die entsprechende Stelle jederzeit 0 geschrieben werden soll. Durch i soll im Folgenden immer eine unendlich kleine positive Grösse bezeichnet werden, und wir wollen nun zeigen, wie aus der Zeichenreihe (a) immer die derselben auf beiden Seiten nächst benachbarten Zeichenreihen $(a-i)$ und $(a+i)$ abgeleitet oder gebildet werden können.

Zu dem Ende wollen wir zuvörderst annehmen, dass ein beliebiges Glied $f^{(k)}(a)$ der Functionenreihe nicht verschwindet, also auch das diesem Gliede entsprechende Glied der Zeichenreihe (a) nicht 0, sondern $\pm$ ist. Nach V. §. 12. ist

$$f^{(k)}(a \pm i) = f^{(k)}(a) \pm \frac{i}{1} f^{(k+1)}(a) + \ldots + \frac{(\pm i)^{n-k}}{1\,.\,.\,(n-k)} f^{(n-k)}(a),$$

und nach V. §. 18. lässt sich i immer so klein annehmen, dass das Vorzeichen von $f^{(k)}(a \pm i)$ mit dem Vorzeichen des ersten nach der Voraussetzung nicht verschwindenden Gliedes $f^{(k)}(a)$ der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung einerlei ist, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass, wenn $\pm$ das dem Gliede $f^{(k)}(a)$ der Functionenreihe entsprechende Glied der Zeichenreihe (a) ist, dann mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander immer auch $\pm$ sowohl das entsprechende Glied der Zeichenreihe $(a-i)$, als auch das entsprechende Glied der Zeichenreihe $(a+i)$ ist. Also hat man bei der Bildung oder Ableitung der Zeichenreihen $(a-i)$ und $(a+i)$ aus der Zeichenreihe (a) für jedes nicht verschwindende Glied der letztern das sich in demselben findende Zeichen unverändert beizubehalten und in die beiden erstern gesuchten Zeichenreihen einzuführen.

Ferner wollen wir jetzt annehmen, dass die den Gliedern

$$f^{(k)}(a),\ f^{(k+1)}(a),\ f^{(k+2)}(a),\ \ldots\ f^{(k+p-1)}(a),\ f^{(k+p)}(a)$$

der Functionenreihe entsprechenden Glieder der Zeichenreihe (a)

$$0\ 0\ 0\ \ldots\ 0 \pm$$

sind; so lässt sich nach V. §. 12. und V. §. 18. die Grösse i immer so klein annehmen, dass die Grössen

$$f^{(k)}(a \pm i),\ f^{(k+1)}(a \pm i),\ f^{(k+2)}(a \pm i),\ \ldots\ f^{(k+p-1)}(a \pm i)$$

respective mit den Grössen

$$\frac{(\pm i)^p}{1\ldots p} f^{(k+p)}(a),\ \frac{(\pm i)^{p-1}}{1\,.\,.(p-1)} f^{(k+p)}(a),\ \frac{(\pm i)^{p-2}}{1\,.\,.(p-2)} f^{(k+p)}(a),\ \ldots\ \frac{\pm i}{1} f^{(k+p)}(a)$$

einerlei Vorzeichen haben.

Hieraus, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, ergiebt sich nun aber unmittelbar Folgendes.

Die den Gliedern

$$0\ 0\ 0 \ldots 0 \pm$$

der Zeichenreihe (α) entsprechenden Glieder der Zeichenreihe ($\alpha - i$) sind jederzeit

$$\pm(-)^p,\ \pm(-)^{p-1},\ \pm(-)^{p-2},\ \ldots \pm(-),\ \pm$$

oder

$$\pm(-)^p,\ \mp(-)^p,\ \pm(-)^p,\ \ldots \mp,\ \pm;$$

so dass nämlich in diesem Theile der Zeichenreihe ($\alpha - i$) die Glieder vom ersten bis zum letzten Gliede, welches mit dem entsprechenden Gliede der Zeichenreihe (α) einerlei ist, fortwährend abwechseln.

Die den Gliedern

$$0\ 0\ 0 \ldots 0 \pm$$

der Zeichenreihe (α) entsprechenden Glieder der Zeichenreihe ($\alpha + i$) sind jederzeit

$$\pm\ \pm\ \pm \ldots \pm\ \pm,$$

so dass nämlich in diesem Theile der Zeichenreihe ($\alpha + i$) alle Glieder vom ersten bis zum letzten Gliede, welches mit dem entsprechenden Gliede der Zeichenreihe (α) einerlei ist, einander gleich sind.

Aus dem Vorhergehenden, wobei es nicht überflüssig ist. noch zu bemerken, dass, weil nach der Voraussetzung $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von x ist, $f^{(n)}(\alpha)$ niemals verschwinden kann, ergiebt sich nun unmittelbar die folgende Regel zur Ableitung der beiden Zeichenreihen ($\alpha - i$) und ($\alpha + i$) aus der Zeichenreihe (α), bei deren Anwendung wir die Zeichenreihe ($\alpha - i$) über, die Zeichenreihe ($\alpha + i$) unter die Zeichenreihe (α) schreiben wollen:

Ueber und unter jedes Glied der Zeichenreihe (α), welches nicht 0 ist, schreibe man dasselbe Zeichen, wobei man jederzeit bei dem letzten niemals verschwindenden Gliede anfängt. Dagegen schreibe man über jedes Glied der Reihe (α), welches 0 ist, das entgegengesetzte Zeichen von dem, welches in der Reihe ($\alpha - i$) nach der rechten Seite hin unmittelbar folgt; unter jedes Glied der Reihe (α), welches 0 ist, schreibe man aber ein dem in der Reihe ($\alpha + i$) nach der rechten Seite hin unmittelbar folgenden gleiches Zeichen.

Das folgende Beispiel wird zur bessern Erläuterung dieser Regel dienen, wobei wir noch bemerken, dass man der Kürze wegen die Zeichenreihen ($\alpha - i$) und ($\alpha + i$) ganz zweckmässig gewöhnlich bloss respective durch ($<\alpha$) und ($>\alpha$) zu bezeichnen pflegt:

$$\begin{array}{r}
(<\alpha)\ldots + - - + - + - + - + + + - + - + - + - + - + \\
(\alpha)\ldots + - 0\ 0\ 0\ 0\ 0 + 0 + + 0\ 0\ 0 - 0\ 0\ 0\ 0 + - + \\
(>\alpha)\ldots + - + + + + + + + + + - - - - + + + + + - +
\end{array}$$

Aus einer nähern Betrachtung dieser Regel geht hervor, dass die Zeichenreihen (α) und ($\alpha + i$) immer eine völlig gleiche Anzahl von Wechseln enthalten, wenn man nämlich bei dem Zählen der

Wechsel der Reihe (α) die verschwindenden Glieder ganz ausser Acht lässt und als gar nicht vorhanden betrachtet.

Nehmen wir nun an, dass die Reihen

$$(1) \ldots f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \ldots f^{(n)}(a);$$

$$(2) \ldots f(b), f'(b), f''(b), f'''(b), \ldots f^{(n)}(b)$$

beliebig viele verschwindende Glieder enthalten, und bezeichnen, unter der Voraussetzung, dass man bei dem Zählen der in diesen Reihen vorkommenden Wechsel die verschwindenden Glieder ganz ausser Acht lässt und als gar nicht vorhanden betrachtet, die Anzahl der Wechsel in der Reihe (1) durch w, die Anzahl der Wechsel in der Reihe (2) durch w'; so ist nach dem Vorhergehenden w auch die Anzahl der Wechsel in der Reihe ($a+i$), und w' die Anzahl der Wechsel in der Reihe ($b+i$). Bezeichnet jetzt μ die Anzahl der sämmtlichen zwischen den Gränzen a und b liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$; so ist, unter der Voraussetzung, dass b nicht selbst eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ ist, also $f(b)$ nicht verschwindet, offenbar μ auch die Anzahl der sämmtlichen zwischen den Gränzen $a+i$ und $b+i$, wo i immer die ihm oben beigelegte Bedeutung hat, liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, und folglich nach dem vorigen Paragraphen jederzeit

$$\mu \overset{=}{<} w - w'.$$

Hiernach lässt sich jetzt das Theorem von Fourier auf folgende Art aussprechen:

Wenn $a<b$ und b keine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ ist, also $f(b)$ nicht verschwindet, und μ die Anzahl der sämmtlichen zwischen den Gränzen a und b liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ bezeichnet; so ist, wenn man die Anzahl der in der Reihe

$$f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \ldots f^{(n)}(a)$$

vorkommenden Zeichenwechsel durch w, die Anzahl der in der Reihe

$$f(b), f'(b), f''(b), f'''(b), \ldots f^{(n)}(b)$$

vorkommenden Zeichenwechsel durch w' bezeichnet, wo bei der Zählung der Wechsel in den beiden vorstehenden Reihen alle in denselben vorkommende verschwindende Glieder ganz ausser Acht gelassen und als gar nicht vorhanden betrachtet werden, jederzeit

$$\mu \overset{=}{<} w - w'.$$

§. 4.

Um nun auch noch das berühmte Theorem von Descartes aus dem Vorhergehenden abzuleiten, wollen wir überhaupt die Gleichung des $n$ten Grades

$$f(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n = 0$$

betrachten, wollen aber jetzt annehmen, dass keiner der Coefficienten

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_n$$

verschwinde und der Coefficient A_n des höchsten Gliedes der Function $f(x)$ positiv sei, welches Letztere offenbar immer verstattet ist. Entwickelt man jetzt die derivirten Functionen von $f(x)$, und setzt sowohl in denselben, als auch in der Function $f(x)$ selbst $x = 0$; so findet man, dass die Grössen

$$f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ f'''(0),\ \ldots\ f^{(n)}(0)$$

respective mit den Coefficienten

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_n$$

gleiche Vorzeichen haben.

Lassen wir nun den Ausdruck

$$(0) = A\ A_1\ A_2\ A_3\ \ldots\ A_n$$

im Folgenden bloss bedeuten, dass die Glieder der Zeichenreihe (0) mit den Vorzeichen der Coefficienten $A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_n$ einerlei sind; so haben wir, wie unmittelbar aus dem in V. §. 19. bewiesenen Satze und den leicht zu entwickelnden derivirten Functionen von $f(x)$ folgt, die folgenden Zeichenreihen:

$$(-\infty) = \pm \mp \pm \mp \ldots - +$$
$$(0) = A\ A_1\ A_2\ A_3\ \ldots A_{n-1}\ A_n$$
$$(+\infty) = + + + + \ldots + +$$

Die Anzahl der Wechsel in der Reihe $(-\infty)$ ist offenbar n, und die Anzahl der Wechsel in der Reihe $(+\infty)$ ist 0. Die Anzahl der Wechsel in der Reihe 0 sei w, und die Anzahl der in dieser Reihe vorkommenden Folgen sei f. Die Anzahl der negativen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sei m, die Anzahl der positiven reellen Wurzeln dieser Gleichung sei p. Weil die sämmtlichen negativen reellen Wurzeln zwischen $-\infty$ und 0 liegen, so ist nach dem vorigen Paragraphen

$$m \leqq n - w.$$

Nun ist aber offenbar $w + f = n$, und folglich $n - w = f$, also nach dem Vorhergehenden

$$m \leqq f.$$

Da ferner die sämmtlichen positiven reellen Wurzeln zwischen 0 und $+\infty$ liegen, so ist nach dem vorigen Paragraphen

$$p \leqq w - 0, \text{ d. i. } p \leqq w,$$

und es ist also jederzeit

$$p \leqq w,\ m \leqq f.$$

Hat die Gleichung $f(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln, so ist

$$p + m = n,\ w + f = n,$$

und folglich

$$p + m = w + f.$$

Wäre nun $p < w$, so wäre wegen dieser Gleichung $m > f$, welches gegen das Obige, da nämlich immer $m \overline{\overline{<}} f$ ist, streitet. Also kann nicht $p < w$ sein, und es muss folglich, da immer $p \overline{\overline{<}} w$ ist, $p = w$ sein, woraus dann wegen der Gleichung $p + m = w + f$ unmittelbar $m = f$ folgt. Wenn also die Gleichung lauter reelle Wurzeln hat, so ist immer

$$p = w, \quad m = f.$$

In den vorhergehenden Ausdrücken ist das hinreichend schon aus den Elementen der Algebra bekannte Theorem von Desçartes oder Harriot in dem Falle, wenn kein Coefficient der Gleichung verschwindet, offenbar enthalten. Der Ausdruck, auf welchen Gauss dieses Theorem in dem allgemeinern Falle, wenn beliebig viele Coefficienten der Gleichung verschwinden, gebracht hat, und der schöne von Gauss gegebene Beweis können hier als völlig bekannt vorausgesetzt werden. Unsere Absicht war hier vorzugsweise, die Fruchtbarkeit der Lehre von dem Excess der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen zu zeigen.

XXI.

Ueber eine geometrische Aufgabe.

Vom

Herausgeber.

In den Lehrbüchern der analytischen Geometrie, wenigstens in den mir bekannten, fehlt bis jetzt noch die folgende Aufgabe, für welche ich daher, weil sie mir in mehrfacher Beziehung von Interesse und mancher Anwendungen fähig zu sein scheint, in diesem Aufsatze eine Auflösung zu geben versuchen werde.

Aufgabe.

Die Gleichungen einer geraden Linie zu finden, welche vier gerade Linien im Raume, deren Gleichungen gegeben sind, schneidet.

Auflösung.

Die Gleichungen der vier gegebenen geraden Linien im Raume seien

$$1.\quad\begin{cases} x = a_1 z + b_1, & y = \alpha_1 z + \beta_1; \\ x = a_2 z + b_2, & y = \alpha_2 z + \beta_2; \\ x = a_3 z + b_3, & y = \alpha_3 z + \beta_3; \\ x = a_4 z + b_4, & y = \alpha_4 z + \beta_4; \end{cases}$$

und

$$2.\quad x = Az + B,\ y = \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}$$

seien die Gleichungen der gesuchten geraden Linie, von welcher die vier gegebenen geraden Linien geschnitten werden sollen, wo also die Grössen A, B und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zu bestimmen sind.

Zu dem Ende bezeichne man die Coordinaten der Punkte, in denen die vier gegebenen geraden Linien von der gesuchten geraden Linie geschnitten werden, respective durch x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4; so hat man nach dem Obigen zur Bestimmung dieser zwölf Grössen und der vier Grössen A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die sechzehn folgenden Gleichungen:

$$3.\quad\begin{cases} x_1 = a_1 z_1 + b_1, & y_1 = \alpha_1 z_1 + \beta_1; \\ x_2 = a_2 z_2 + b_2, & y_2 = \alpha_2 z_2 + \beta_2; \\ x_3 = a_3 z_3 + b_3, & y_3 = \alpha_3 z_3 + \beta_3; \\ x_4 = a_4 z_4 + b_4, & y_4 = \alpha_4 z_4 + \beta_4; \\ & \\ x_1 = A z_1 + B, & y_1 = \mathfrak{A} z_1 + \mathfrak{B}; \\ x_2 = A z_2 + B, & y_2 = \mathfrak{A} z_2 + \mathfrak{B}; \\ x_3 = A z_3 + B, & y_3 = \mathfrak{A} z_3 + \mathfrak{B}; \\ x_4 = A z_4 + B, & y_4 = \mathfrak{A} z_4 + \mathfrak{B}. \end{cases}$$

Durch Elimination von x_1, x_2, x_3, x_4 und y_1, y_2, y_3, y_4 erhält man aus diesen Gleichungen ohne alle Schwierigkeit die acht folgenden Gleichungen:

$$4.\quad\begin{cases} 0 = (a_1 - A)z_1 + b_1 - B, & 0 = (\alpha_1 - \mathfrak{A})z_1 + \beta_1 - \mathfrak{B}; \\ 0 = (a_2 - A)z_2 + b_2 - B, & 0 = (\alpha_2 - \mathfrak{A})z_2 + \beta_2 - \mathfrak{B}; \\ 0 = (a_3 - A)z_3 + b_3 - B, & 0 = (\alpha_3 - \mathfrak{A})z_3 + \beta_3 - \mathfrak{B}; \\ 0 = (a_4 - A)z_4 + b_4 - B, & 0 = (\alpha_4 - \mathfrak{A})z_4 + \beta_4 - \mathfrak{B}; \end{cases}$$

aus denen sich ferner durch Elimination von z_1, z_2, z_3, z_4 die vier folgenden Gleichungen ergeben:

$$5.\quad\begin{cases} (a_1 - A)\ (\beta_1 - \mathfrak{B}) = (\alpha_1 - \mathfrak{A})\ (b_1 - B), \\ (a_2 - A)\ (\beta_2 - \mathfrak{B}) = (\alpha_2 - \mathfrak{A})\ (b_2 - B), \\ (a_3 - A)\ (\beta_3 - \mathfrak{B}) = (\alpha_3 - \mathfrak{A})\ (b_3 - B), \\ (a_4 - A)\ (\beta_4 - \mathfrak{B}) = (\alpha_4 - \mathfrak{A})\ (b_4 - B); \end{cases}$$

aus denen nun die vier unbekannten Grössen A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bestimmt werden müssten. Wir wollen jedoch die weitere Verfolgung dieses Wegs, obgleich derselbe zu nicht uneleganten Resultaten führt, dem Leser überlassen, und wollen hier ein anderes Verfahren in Anwendung bringen, durch welches wir zu einer einfachern Auflösung gelangen werden.

Aus den Gleichungen 4. ergeben sich nämlich durch Elimination der Grössen B und $\mathfrak{B}$ leicht die folgenden Gleichungen:

$$6.\quad \begin{cases} b_1 + (a_1 - A)z_1 = b_2 + (a_2 - A)z_2 = b_3 + (a_3 - A)z_3 \\ \qquad\qquad = b_4 + (a_4 - A)z_4, \\ \beta_1 + (\alpha_1 - \mathfrak{A})z_1 = \beta_2 + (\alpha_2 - \mathfrak{A})z_2 = \beta_3 + (\alpha_3 - \mathfrak{A})z_3 \\ \qquad\qquad = \beta_4 + (\alpha_4 - \mathfrak{A})z_4; \end{cases}$$

aus denen man durch Elimination von z_2, z_3, z_4 ferner ohne Schwierigkeit

$$7.\quad \begin{cases} \dfrac{b_1 - b_2 + (a_1 - A)z_1}{\beta_1 - \beta_2 + (\alpha_1 - \mathfrak{A})z_1} = \dfrac{a_2 - A}{\alpha_2 - \mathfrak{A}}, \\ \dfrac{b_1 - b_3 + (a_1 - A)z_1}{\beta_1 - \beta_3 + (\alpha_1 - \mathfrak{A})z_1} = \dfrac{a_3 - A}{\alpha_3 - \mathfrak{A}}, \\ \dfrac{b_1 - b_4 + (a_1 - A)z_1}{\beta_1 - \beta_4 + (\alpha_1 - \mathfrak{A})z_1} = \dfrac{a_4 - A}{\alpha_4 - \mathfrak{A}}; \end{cases}$$

und hieraus

$$8.\quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{(b_1 - b_2)\ (\alpha_2 - \mathfrak{A}) - (\beta_1 - \beta_2)\ (a_2 - A)}{(\alpha_1 - \mathfrak{A})\ (a_2 - A) - (\alpha_2 - \mathfrak{A})\ (a_1 - A)}, \\ z_1 = \dfrac{(b_1 - b_3)\ (\alpha_3 - \mathfrak{A}) - (\beta_1 - \beta_3)\ (a_3 - A)}{(\alpha_1 - \mathfrak{A})\ (a_3 - A) - (\alpha_3 - \mathfrak{A})\ (a_1 - A)}, \\ z_1 = \dfrac{(b_1 - b_4)\ (\alpha_4 - \mathfrak{A}) - (\beta_1 - \beta_4)\ (a_4 - A)}{(\alpha_1 - \mathfrak{A})\ (a_4 - A) - (\alpha_4 - \mathfrak{A})\ (a_1 - A)}; \end{cases}$$

oder

$$9.\quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{\alpha_2(b_1 - b_2) - a_2(\beta_1 - \beta_2) - (b_1 - b_2)\mathfrak{A} + (\beta_1 - \beta_2)A}{\alpha_1 a_2 - a_1\alpha_2 + (a_1 - a_2)\mathfrak{A} - (\alpha_1 - \alpha_2)A}, \\ z_1 = \dfrac{\alpha_3(b_1 - b_3) - a_3(\beta_1 - \beta_3) - (b_1 - b_3)\mathfrak{A} + (\beta_1 - \beta_3)A}{\alpha_1 a_3 - a_1\alpha_3 + (a_1 - a_3)\mathfrak{A} - (\alpha_1 - \alpha_3)A}, \\ z_1 = \dfrac{\alpha_4(b_1 - b_4) - a_4(\beta_1 - \beta_4) - (b_1 - b_4)\mathfrak{A} + (\beta_1 - \beta_4)A}{\alpha_1 a_4 - a_1\alpha_4 + (a_1 - a_4)\mathfrak{A} - (\alpha_1 - \alpha_4)A}; \end{cases}$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$10.\quad \begin{cases} k_1 = \alpha_2(b_1 - b_2) - a_2(\beta_1 - \beta_2),\ \lambda_1 = -(b_1 - b_2),\ \mu_1 = \beta_1 - \beta_2; \\ k_2 = \alpha_3(b_1 - b_3) - a_3(\beta_1 - \beta_3),\ \lambda_2 = -(b_1 - b_3),\ \mu_2 = \beta_1 - \beta_3; \\ k_3 = \alpha_4(b_1 - b_4) - a_4(\beta_1 - \beta_4),\ \lambda_3 = -(b_1 - b_4),\ \mu_3 = \beta_1 - \beta_4; \end{cases}$$

und

$$11.\quad \begin{cases} \gamma_1 = \alpha_1 a_2 - a_1\alpha_2,\ \delta_1 = a_1 - a_2,\ \varepsilon_1 = -(\alpha_1 - \alpha_2); \\ \gamma_2 = \alpha_1 a_3 - a_1\alpha_3,\ \delta_2 = a_1 - a_3,\ \varepsilon_2 = -(\alpha_1 - \alpha_3); \\ \gamma_3 = \alpha_1 a_4 - a_1\alpha_4,\ \delta_3 = a_1 - a_4,\ \varepsilon_3 = -(\alpha_1 - \alpha_4); \end{cases}$$

gesetzt wird,

$$12.\quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{k_1 + \lambda_1\mathfrak{A} + \mu_1 A}{\gamma_1 + \delta_1\mathfrak{A} + \varepsilon_1 A}, \\ z_1 = \dfrac{k_2 + \lambda_2\mathfrak{A} + \mu_2 A}{\gamma_2 + \delta_2\mathfrak{A} + \varepsilon_2 A}, \\ z_1 = \dfrac{k_3 + \lambda_3\mathfrak{A} + \mu_3 A}{\gamma_3 + \delta_3\mathfrak{A} + \varepsilon_3 A}, \end{cases}$$

erhält.

Diese drei Gleichungen bringt man aber leicht auf die Form

$$13.\quad \begin{cases} 0=k_1-\gamma_1 z_1+(\lambda_1-\delta_1 z_1)\mathfrak{A}+(\mu_1-\varepsilon_1 z_1)A, \\ 0=k_2-\gamma_2 z_1+(\lambda_2-\delta_2 z_1)\mathfrak{A}+(\mu_2-\varepsilon_2 z_1)A, \\ 0=k_3-\gamma_3 z_1+(\lambda_3-\delta_3 z_1)\mathfrak{A}+(\mu_3-\varepsilon_3 z_1)A; \end{cases}$$

und wird nun, wenn man aus denselben die Grössen A und $\mathfrak{A}$ eliminirt, die bloss die eine unbekannte Grösse z_1 enthaltende Endgleichung erhalten.

Um diese Elimination mit möglichster Leichtigkeit auszuführen, wollen wir die drei vorhergehenden Gleichungen nach der Reihe mit den drei unbestimmten Faktoren F_1, F_2, F_3 multipliciren, und dieselben dann zu einander addiren, wodurch wir die Gleichung

$$\begin{aligned} 0= &\ (k_1-\gamma_1 z_1)F_1+(k_2-\gamma_2 z_1)F_2+(k_3-\gamma_3 z_1)F_3 \\ &+\{(\lambda_1-\delta_1 z_1)F_1+(\lambda_2-\delta_2 z_1)F_2+(\lambda_3-\delta_3 z_1)F_3\}\mathfrak{A} \\ &+\{(\mu_1-\varepsilon_1 z_1)F_1+(\mu_2-\varepsilon_2 z_1)F_2+(\mu_3-\varepsilon_3 z_1)F_3\}A \end{aligned}$$

erhalten, und wollen nun die unbestimmten Faktoren F_1, F_2, F_3 so bestimmen, dass sie den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} (\lambda_1-\delta_1 z_1)F_1+(\lambda_2-\delta_2 z_1)F_2+(\lambda_3-\delta_3 z_1)F_3=0, \\ (\mu_1-\varepsilon_1 z_1)F_1+(\mu_2-\varepsilon_2 z_1)F_2+(\mu_3-\varepsilon_3 z_1)F_3=0 \end{aligned}$$

genügen. Eliminirt man zuerst F_3, dann F_2; so erhält man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} &\{(\lambda_1-\delta_1 z_1)(\mu_3-\varepsilon_3 z_1)-(\lambda_3-\delta_3 z_1)(\mu_1-\varepsilon_1 z_1)\}F_1 \\ =&\{(\lambda_3-\delta_3 z_1)(\mu_2-\varepsilon_2 z_1)-(\lambda_2-\delta_2 z_1)(\mu_3-\varepsilon_3 z_1)\}F_2, \\ &\{(\lambda_2-\delta_2 z_1)(\mu_1-\varepsilon_1 z_1)-(\lambda_1-\delta_1 z_1)(\mu_2-\varepsilon_2 z_1)\}F_1 \\ =&\{(\lambda_3-\delta_3 z_1)(\mu_2-\varepsilon_2 z_1)-(\lambda_2-\delta_2 z_1)(\mu_3-\varepsilon_3 z_1)\}F_3; \end{aligned}$$

und kann also offenbar

$$\begin{aligned} F_1&=(\lambda_3-\delta_3 z_1)(\mu_2-\varepsilon_2 z_1)-(\lambda_2-\delta_2 z_1)(\mu_3-\varepsilon_3 z_1), \\ F_2&=(\lambda_1-\delta_1 z_1)(\mu_3-\varepsilon_3 z_1)-(\lambda_3-\delta_3 z_1)(\mu_1-\varepsilon_1 z_1), \\ F_3&=(\lambda_2-\delta_2 z_1)(\mu_1-\varepsilon_1 z_1)-(\lambda_1-\delta_1 z_1)(\mu_2-\varepsilon_2 z_1) \end{aligned}$$

setzen, wodurch man nun in Verbindung mit dem Obigen unmittelbar zu der folgenden, bloss die eine unbekannte Grösse z_1 enthaltenden Gleichung gelangt;

$$\begin{aligned} 14.\quad 0=&(k_1-\gamma_1 z_1)\{(\lambda_3-\delta_3 z_1)(\mu_2-\varepsilon_2 z_1)-(\lambda_2-\delta_2 z_1)(\mu_3-\varepsilon_3 z_1)\} \\ &+(k_2-\gamma_2 z_1)\{(\lambda_1-\delta_1 z_1)(\mu_3-\varepsilon_3 z_1)-(\lambda_3-\delta_3 z_1)(\mu_1-\varepsilon_1 z_1)\} \\ &+(k_3-\gamma_3 z_1)\{(\lambda_2-\delta_2 z_1)(\mu_1-\varepsilon_1 z_1)-(\lambda_1-\delta_1 z_1)(\mu_2-\varepsilon_2 z_1)\}, \end{aligned}$$

mit deren weiterer Entwickelung wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Zuerst erhält man ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned} 0=&(k_1-\gamma_1 z_1)\left\{\begin{array}{l} \lambda_3\mu_2-\lambda_2\mu_3 \\ -[(\lambda_3\varepsilon_2-\lambda_2\varepsilon_3)+(\delta_3\mu_2-\delta_2\mu_3)]z_1+(\delta_3\varepsilon_2-\delta_2\varepsilon_3)z_1^2 \end{array}\right\} \\ &+(k_2-\gamma_2 z_1)\left\{\begin{array}{l} \lambda_1\mu_3-\lambda_3\mu_1 \\ -[(\lambda_1\varepsilon_3-\lambda_3\varepsilon_1)+(\delta_1\mu_3-\delta_3\mu_1)]z_1+(\delta_1\varepsilon_3-\delta_3\varepsilon_1)z_1^2 \end{array}\right\} \end{aligned}$$

$$+(k_2-\gamma_3 z_1)\left\{\begin{array}{l}\lambda_2\mu_1-\lambda_1\mu_2\\ -[(\lambda_2\varepsilon_1-\lambda_1\varepsilon_2)+(\delta_2\mu_1-\delta_1\mu_2)]z_1+(\delta_2\varepsilon_1-\delta_1\varepsilon_3)z_1{}^2\end{array}\right\},$$

welches offenbar eine Gleichung des dritten Grades ist, in der $z_1{}^3$ den Coefficienten

$$-\gamma_1(\delta_3\varepsilon_2-\delta_2\varepsilon_3)-\gamma_2(\delta_1\varepsilon_3-\delta_3\varepsilon_1)-\gamma_3(\delta_2\varepsilon_1-\delta_1\varepsilon_2)$$

oder

$$\gamma_1(\delta_2\varepsilon_3-\delta_3\varepsilon_2)+\gamma_2(\delta_3\varepsilon_1-\delta_1\varepsilon_3)+\gamma_3(\delta_1\varepsilon_2-\delta_2\varepsilon_1)$$

hat. Diesen Coefficienten wollen wir nun etwas näher betrachten, nachdem wir ihn zuvörderst auf die Form

$$\varepsilon_1(\gamma_2\delta_3-\gamma_3\delta_2)+\varepsilon_2(\gamma_3\delta_1-\gamma_1\delta_3)+\varepsilon_3(\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1)$$

gebracht haben. Nach 11. ist

$$\varepsilon_1(\gamma_2\delta_3-\gamma_3\delta_2)+\varepsilon_2(\gamma_3\delta_1-\gamma_1\delta_3)+\varepsilon_3(\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1)$$

$$\begin{aligned}
=&-(\alpha_1-\alpha_2)\,\{(\alpha_1a_3-a_1\alpha_3)\,(a_1-a_4)-(\alpha_1a_4-a_1\alpha_4)\,(a_1-a_3)\}\\
&-(\alpha_1-\alpha_3)\,\{(\alpha_1a_4-a_1\alpha_4)\,(a_1-a_2)-(\alpha_1a_2-a_1\alpha_2)\,(a_1-a_4)\}\\
&-(\alpha_1-\alpha_4)\,\{(\alpha_1a_2-a_1\alpha_2)\,(a_1-a_3)-(\alpha_1a_3-a_1\alpha_3)\,(a_1-a_2)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&-a_1(\alpha_1-\alpha_2)\,\{a_1(\alpha_4-\alpha_3)+a_3(\alpha_1-\alpha_4)+a_4(\alpha_3-\alpha_1)\}\\
&-a_1(\alpha_1-\alpha_3)\,\{a_1(\alpha_2-\alpha_4)+a_2(\alpha_4-\alpha_1)+a_4(\alpha_1-\alpha_2)\}\\
&-a_1(\alpha_1-\alpha_4)\,\{a_1(\alpha_3-\alpha_2)+a_2(\alpha_1-\alpha_3)+a_3(\alpha_2-\alpha_1)\}
\end{aligned}$$

$$=-a_1a_1\{(\alpha_1-\alpha_2)\,(\alpha_4-\alpha_3)+(\alpha_1-\alpha_3)\,(\alpha_2-\alpha_4)+(\alpha_1-\alpha_4)\,(\alpha_3-\alpha_2)\},$$

wo man nun durch leichte Rechnnng findet, dass die letzte Grösse verschwindet, und folglich, wenn man zugleich den hier betrachteten Coefficienten noch anf andere Weise ausdrückt,

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(\delta_2\varepsilon_3-\delta_3\varepsilon_2)+\gamma_2(\delta_3\varepsilon_1-\delta_1\varepsilon_3)+\gamma_3(\delta_1\varepsilon_2-\delta_2\varepsilon_1)=0,\\
&\delta_1(\varepsilon_2\gamma_3-\varepsilon_3\gamma_2)+\delta_2(\varepsilon_3\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_3)+\delta_3(\varepsilon_1\gamma_2-\varepsilon_2\gamma_1)=0,\\
&\varepsilon_1(\gamma_2\delta_3-\gamma_3\delta_2)+\varepsilon_2(\gamma_3\delta_1-\gamma_1\delta_3)+\varepsilon_3(\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1)=0
\end{aligned}$$

ist.

Hieraus ergiebt sich also das wichtige Resultat, dass die oben gefundene, nur die eine unbekannte Grösse z_1 enthaltende Endgleichung nicht vom dritten, sondern bloss vom zweiten Grade ist. Entwickelt man nun diese Gleichung gehörig, so erhält dieselbe, wenn der Kürze wegen

$$15.\quad\left\{\begin{array}{ll}
f_1=\lambda_3\mu_2-\lambda_2\mu_3, & g_1=\delta_3\mu_2-\delta_2\mu_3;\\
f_2=\lambda_1\mu_3-\lambda_3\mu_1, & g_2=\delta_1\mu_3-\delta_3\mu_1;\\
f_3=\lambda_2\mu_1-\lambda_1\mu_2, & g_3=\delta_2\mu_1-\delta_1\mu_2;\\
h_1=\lambda_3\varepsilon_2-\lambda_2\varepsilon_3, & i_1=\delta_3\varepsilon_2-\delta_2\varepsilon_3;\\
h_2=\lambda_1\varepsilon_3-\lambda_3\varepsilon_1, & i_2=\delta_1\varepsilon_3-\delta_3\varepsilon_1;\\
h_3=\lambda_2\varepsilon_1-\lambda_1\varepsilon_2, & i_3=\delta_2\varepsilon_1-\delta_1\varepsilon_2
\end{array}\right.$$

gesetzt wird, die folgende Gestalt:

$$16.\quad 0=f_1k_1+f_2k_2+f_3k_3 \\ -\{f_1\gamma_1+f_2\gamma_2+f_3\gamma_3+(g_1+h_1)k_1+(g_2+h_2)k_2 \\ +(g_3+h_3)k_3\}z_1 \\ +\{i_1k_1+i_2k_2+i_3k_3+(g_1+h_1)\gamma_1+(g_2+h_2)\gamma_2 \\ +(g_3+h_3)\gamma_3\}z_1^2.$$

Bezeichnen wir die drei Coefficienten dieser Gleichung durch L, M, N, und setzen also

$$17.\quad 0=L-Mz_1+Nz_1^2,$$

so erhalten wir nach der in dem Aufsatze III. S. 12. entwickelten Auflösungsmethode der quadratischen Gleichungen zur Berechnung der beiden Wurzeln der obigen Gleichung die folgenden Formeln:

$$18.\quad \cot(\chi+\chi_1)=\frac{N-L}{M},\ \cos(\chi-\chi_1)=\frac{N+L}{M}\sin(\chi+\chi_1),\ z_1=\begin{cases}\tang\chi \\ \tang\chi_1.\end{cases}$$

Findet sich mittelst der zweiten dieser Formeln der absolute Werth von $\cos(\chi-\chi_1)$ grösser als die Einheit, so hat die Gleichung 17. zwei imaginäre Wurzeln, und die Aufgabe ist also unmöglich; in jedem andern Falle hat die in Rede stehende Gleichung zwei reelle Wurzeln, und die Aufgabe ist im Allgemeinen zweier Auflösungen fähig.

Hat man z_1 gefunden, so ergeben sich A und $\mathfrak{A}$ mittelst der folgenden, leicht aus den Gleichungen 13. zu erhaltenden Ausdrücke:

$$19.\quad \begin{cases} A=\dfrac{(k_1-\gamma_1z_1)\,(\lambda_2-\delta_2z_1)-(k_2-\gamma_2z_1)\,(\lambda_1-\delta_1z_1)}{(\lambda_1-\delta_1z_1)\,(\mu_2-\varepsilon_2z_1)-(\lambda_2-\delta_2z_1)\,(\mu_1-\varepsilon_1z_1)}, \\ A=\dfrac{(k_2-\gamma_2z_1)\,(\lambda_3-\delta_3z_1)-(k_3-\gamma_3z_1)\,(\lambda_2-\delta_2z_1)}{(\lambda_2-\delta_2z_1)\,(\mu_3-\varepsilon_3z_1)-(\lambda_3-\delta_3z_1)\,(\mu_2-\varepsilon_2z_1)}, \\ A=\dfrac{(k_3-\gamma_3z_1)\,(\lambda_1-\delta_1z_1)-(k_1-\gamma_1z_1)\,(\lambda_3-\delta_3z_1)}{(\lambda_3-\delta_3z_1)\,(\mu_1-\varepsilon_1z_1)-(\lambda_1-\delta_1z_1)\,(\mu_3-\varepsilon_3z_1)} \end{cases}$$

und

$$20.\quad \begin{cases} \mathfrak{A}=-\dfrac{(k_1-\gamma_1z_1)\,(\mu_2-\varepsilon_2z_1)-(k_2-\gamma_2z_1)\,(\mu_1-\varepsilon_1z_1)}{(\lambda_1-\delta_1z_1)\,(\mu_2-\varepsilon_2z_1)-(\lambda_2-\delta_2z_1)\,(\mu_1-\varepsilon_1z_1)}, \\ \mathfrak{A}=-\dfrac{(k_2-\gamma_2z_1)\,(\mu_3-\varepsilon_3z_1)-(k_3-\gamma_3z_1)\,(\mu_2-\varepsilon_2z_1)}{(\lambda_2-\delta_2z_1)\,(\mu_3-\varepsilon_3z_1)-(\lambda_3-\delta_3z_1)\,(\mu_2-\varepsilon_2z_1)}, \\ \mathfrak{A}=-\dfrac{(k_3-\gamma_3z_1)\,(\mu_1-\varepsilon_1z_1)-(k_1-\gamma_1z_1)\,(\mu_3-\varepsilon_3z_1)}{(\lambda_3-\delta_3z_1)\,(\mu_1-\varepsilon_1z_1)-(\lambda_1-\delta_1z_1)\,(\mu_3-\varepsilon_3z_1)}. \end{cases}$$

Die Grössen B und $\mathfrak{B}$ erhält man dann endlich mittelst der Formeln

$$21.\quad B=b_1+(a_1-A)z_1,\quad \mathfrak{B}=\beta_1+(\alpha_1-\mathfrak{A})z_1.$$

Die Coordinaten z_2, z_3, z_4 erhält man mittelst der Formeln

$$22.\quad \begin{cases} z_2=-\dfrac{b_2-B}{a_2-A}=-\dfrac{\beta_2-\mathfrak{B}}{\alpha_2-\mathfrak{A}}, \\ z_3=-\dfrac{b_3-B}{a_3-A}=-\dfrac{\beta_3-\mathfrak{B}}{\alpha_3-\mathfrak{A}}, \\ z_4=-\dfrac{b_4-B}{a_4-A}=-\dfrac{\beta_4-\mathfrak{B}}{\alpha_4-\mathfrak{A}}; \end{cases}$$

und die Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 und y_1, y_2, y_3, y_4 werden mittelst der Gleichungen 3. gefunden.

Hierdurch ist nun unsere Aufgabe vollständig aufgelöst. Dass dieselbe unbestimmt werden muss, wenn die vier gegebenen geraden Linien in einer Ebene liegen, fällt sogleich in die Augen.

Man kann von dieser Aufgabe eine Anwendung zur annähernden Bestimmung der Cometenbahnen machen, worüber wir nur ganz in der Kürze Folgendes bemerken wollen.

Den Mittelpunkt der Sonne wollen wir als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z annehmen. Die Ebene der Ekliptik sei die Ebene der xy, und der positive Theil der Axe der x soll vom Mittelpunkte der Sonne nach dem Frühlingspunkte hingerichtet sein; den positiven Theil der Axe der y nehmen wir so an, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, ganz nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher von dem positiven Theile der Axe der x an die heliocentrischen Längen genommen werden; den positiven Theil der Axe der z nehmen wir endlich auf der nördlichen Seite der Ebene der Elliptik d. i. der Ebene der xy an. Ferner legen wir zu einer bestimmten Zeit durch den Mittelpunkt der Erde ein dem Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem der $x_1y_1z_1$. Bezeichnen dann für diese Zeit α, β und ϱ respective die geocentrische Länge und Breite eines Cometen nnd dessen sogenannte curtirte Entfernung vom Mittelpunkte der Erde; so sind offenbar in völliger Allgemeinheit $\varrho\cos\alpha$, $\varrho\sin\alpha$, $\varrho\operatorname{tang}\beta$ die Coordinaten des Cometen in dem Systeme der $x_1y_1z_1$. Die Gleichungen der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Cometen gezogenen geraden Linie im Systeme der $x_1y_1z_1$ haben die Form

$$x_1 = Az_1,\ y_1 = Bz_1,$$

nnd es ist folglich nach dem Vorhergehenden

$$\varrho\cos\alpha = A\varrho\operatorname{tang}\beta,\ \varrho\sin\alpha = B\varrho\operatorname{tang}\beta,$$

also

$$A = \cos\alpha\cot\beta,\ B = \sin\alpha\cot\beta.$$

Folglich sind die Gleichungen der vom Mittelpunkte der Erde nach dem Cometen gezogenen geraden Linie im Systeme der $x_1y_1z_1$

$$23.\quad x_1 = z_1\cos\alpha\cot\beta,\ y_1 = z_1\sin\alpha\cot\beta.$$

Bezeichnet Θ die geocentrische Länge der Sonne und R deren Entfernung von der Erde zu der in Rede stehenden Zeit, so sind offenbar in völliger Allgemeinheit $R\cos\Theta$, $R\sin\Theta$ die Coordinaten der Sonne im Systeme der $x_1y_1z_1$, wobei sich von selbst versteht, dass die dritte Coordinate der Null gleich gesetzt wird. Also hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten zwischen den Coordinaten eines und desselben Punktes in den Systemen der xyz und $x_1y_1z_1$ die Gleichungen

$$x_1 = R\cos\Theta + x,\ y_1 = R\sin\Theta + y,\ z_1 = z$$

oder

$$x = x_1 - R\cos\Theta,\ y = y_1 - R\sin\Theta,\ z = z_1,$$

und die Gleichungen der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem

Cometen gezogenen geraden Linie im Systeme der xyz sind also nach dem Vorhergehenden

$$x + R \cos \Theta = z \cos \alpha \cot \beta,\quad y + R \sin \Theta = z \sin \alpha \cot \beta$$

oder

$$24.\quad x = z \cos \alpha \cot \beta - R \cos \Theta,\quad y = z \sin \alpha \cot \beta - R \sin \Theta.$$

Hat man nun vier aus Beobachtungen abgeleitete geocentrische Längen und Breiten α, α', α'', α''' und β, β', β'', β''' eines Cometen; so kennt man die Lage von vier von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Cometen gezogenen geraden Linien, deren Gleichungen, wenn die entsprechenden geocentrischen Längen und Entfernungen der Sonne von der Erde durch Θ, Θ', Θ'', Θ''' und R, R', R'', R''' bezeichnet werden, nach 24.

$$25.\quad \begin{cases} x = z \cos \alpha \cot \beta - R \cos \Theta, & y = z \sin \alpha \cot \beta - R \sin \Theta; \\ x = z \cos \alpha' \cot \beta' - R' \cos \Theta', & y = z \sin \alpha' \cot \beta' - R' \sin \Theta'; \\ x = z \cos \alpha'' \cot \beta'' - R'' \cos \Theta'', & y = z \sin \alpha'' \cot \beta'' - R'' \sin \Theta''; \\ x = z \cos \alpha''' \cot \beta''' - R''' \cos \Theta''', & y = z \sin \alpha''' \cot \beta''' - R''' \sin \Theta''' \end{cases}$$

sind. Wenn nun die Zwischenzeiten zwischen den Beobachtungen nur klein sind, so kann man das Stück der Cometenbahn, auf welches sich dieselben beziehen, näherungsweise als eine gerade Linie betrachten, und wird seine Lage offenbar nach der oben aufgelösten Aufgabe bestimmen können, wenn man

$$26.\quad \begin{cases} a_1 = \cos \alpha \cot \beta, & b_1 = -R \cos \Theta; \\ a_2 = \cos \alpha' \cot \beta', & b_2 = -R' \cos \Theta'; \\ a_3 = \cos \alpha'' \cot \beta'', & b_3 = -R'' \cos \Theta''; \\ a_4 = \cos \alpha''' \cot \beta''', & b_4 = -R''' \cos \Theta'''; \end{cases}$$

und

$$27.\quad \begin{cases} \alpha_1 = \sin \alpha \cot \beta, & \beta_1 = -R \sin \Theta; \\ \alpha_2 = \sin \alpha' \cot \beta', & \beta_2 = -R' \sin \Theta'; \\ \alpha_3 = \sin \alpha'' \cot \beta'', & \beta_3 = -R'' \sin \Theta''; \\ \alpha_4 = \sin \alpha''' \cot \beta''', & \beta_4 = -R''' \sin \Theta''' \end{cases}$$

setzt. Freilich aber wird in jedem Falle eine besondere Beurtheilung nöthig sein, welche Wurzel der quadratischen Gleichung, auf welche die obige Aufgabe führt, man zu nehmen hat. Weil die Ebene der Cometenbahn durch den Mittelpunkt der Sonne geht, so wird man nun offenbar auch deren Lage bestimmen, und hieraus ferner die sämmtlichen Elemente der Cometenbahn finden können, wie in der Astronomie ausführlich gezeigt wird.

Olbers urtheilt in seiner Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen. Weimar. 1797. S. 27 über die vorige Methode, die Cometenbahnen zu berechnen, auf folgende Art: „Wenn die vier gegebenen geraden Linien nicht in einer Ebene liegen, so ist die Lage einer fünften, die von allen vieren geschnitten werden soll, an sich bestimmt, ohne auf die Verhältnisse der Abschnitte zu sehen. Man könnte also bloss mit der Voraussetzung, dass das Stück der Cometenbahn zwischen den vier Beobachtungen gerade sei, ausreichen, ohne auch die gleichförmige Geschwindigkeit anzunehmen, wenn man die Breiten mit in Betrachtung ziehen wollte. Die Lage dieser fünften geraden Linie wird indess nicht durch eine linearische, sondern durch eine Gleichung des achten Grades und eine ziemlich verwickelte Formel gefunden werden. Auch würden bei dieser Aufgabe ähnliche Einschränkungen wie bei der Bouguerschen Statt finden, ob man gleich sonst viel weiter damit reichen würde. Denn die Geschwindigkeit des Cometen ist gerade dann am ungleichförmigsten, wenn seine Bewegung sich am mehrsten der geraden Linie nähert, und umgekehrt.“ Wie Olbers zu der Meinung kommt, dass die gerade Linie, welche die vier von der Erde nach dem Cometen gezogenen geraden Linien schneidet, durch eine Gleichung des achten Grades bestimmt werde, ist nicht abzusehen, indem wir vielmehr aus dem Obigen wissen, dass die Lage dieser geraden Linie bloss durch eine Gleichung vom zweiten Grade bestimmt wird.

XXII.

Die verschiedenen Auflösungen des Sternschnuppen-Problems, aus einem allgemeinen Gesichtspunkte dargestellt.

Von

dem Herausgeber.

(Diese Abhandlung hat, wie schon ihr Titel andeutet, den Zweck, die verschiedenen Ansichten, nach denen man bis jetzt das Sternschnuppen-Problem behandelt hat, den Lesern des Archivs in einem zusammenhängenden und systematischen Ganzen vor die Augen zu führen und unter einem gemeinschaftlichen Gesichtspunkte darzustellen. Späterhin werden ausführliche und vollständige Relationen über die neuesten wichtigen Arbeiten von Bessel, Erman und andern Mathematikern und Physikern nachfolgen, um in dem Archive Alles aufzubewahren, was über den in Rede stehenden wichtigen und interessanten Gegenstand der Physik in theoretischer Rücksicht gearbeitet worden ist und noch gearbeitet werden wird.)

§. 1.

Es liegt in dem Zwecke dieser Zeitschrift, auch vollständige Darstellungen der verschiedenen Auflösungen oder Beweise, welche für besonders wichtige Probleme oder Theoreme gegeben worden sind, zu liefern. Da nun zu den Problemen der mathematischen Physik, welche das Interesse der Gegenwart ganz vorzüglich in Anspruch nehmen, mit Recht das Sternschnuppen-Problem gehört, so glaube ich den Lesern dieser Zeitschrift einen angenehmen Dienst zu leisten, wenn ich versuche, in diesem Aufsatze eine vollständige Darstellung der verschiedenen Auflösungen, welche für dieses wichtige und interessante Problem gegeben worden sind, in der Art zu liefern, dass ich mich bemühen werde, alle diese Auflösungen aus einigen allgemeinen Grundformeln abzuleiten.

Ueber die Art, wie Sternschnuppen beobachtet werden, schicke ich, um das Verstehen der analytischen Entwickelungen, welche den Hauptgegenstand dieses Aufsatzes ausmachen, zu erleichtern, hier die folgenden kurzen Bemerkungen voraus. Jeder Beobachter ist mit einer nach der Zeit seines Beobachtungsorts gehenden Uhr und mit einer Sternkarte versehen. An der Uhr beobachtet er die Zeit des Erscheinens einer Sternschnuppe, wo möglich die beiden genauen Zeitmomente des Entstehens und Erlöschens derselben, und auf der Sternkarte zeichnet er mit einem Bleistifte so genau als irgend möglich den ganzen Weg der Sternschnuppe von seinem Anfangspunkte bis zu seinem Endpunkte, indem er zugleich durch einen Pfeil oder ein anderes passendes Zeichen die Richtung angiebt, nach welcher sich die Sternschnuppe bewegte. Aus der Sternkarte kann man nachher die wahren, d. h. auf den Mittelpunkt der Erde bezogenen Rectascensionen und Declinationen der Punkte des Himmels nehmen, in denen die Sternschnuppe dem Beobachter zu entstehen und zu erlöschen schien, und hat auf diese Weise nun, wie im Folgenden gezeigt werden wird, alle Data, welche nöthig sind, um durch Combination an mehreren Orten, deren geographische Positionen bekannt sind, angestellter Beobachtungen dieser Art die Bahnen der Sternschnuppen bestimmen zu können, insofern es nämlich verstattet ist, dieselben während der in allen Fällen immer nur sehr kurzen Dauer der Sichtbarkeit der Sternschnuppen als gerade Linien zu betrachten.

§. 2.

Zuerst wollen wir jetzt die Gleichungen der von einem Beobachtungsorte nach einem beobachteten Punkte der Bahn einer Sternschnuppe gezogenen Gesichtslinie entwickeln.

Zu dem Ende nehmen wir, um die grösste Allgemeinheit zu erreichen, den Mittelpunkt der Sonne als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz an. Die Ebene der Ekliptik sei die Ebene der xy. Die von dem Mittelpunkte der Sonne nach dem Frühlingspunkte gezogene gerade Linie sei der positive Theil der Axe der x. Der positive Theil der Axe der y werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher von dem positiven Theile der Axe der x an die heliocentrischen Längen von 0 bis 360° gezählt werden. Der positive Theil der Axe der z liege auf der Seite der Ebene der xy, auf welcher die positiven heliocentrischen Breiten genommen werden.

Ferner nehmen wir den Mittelpunkt der Erde als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $x_1\ y_1\ z_1$ an. Die Ebene des Aequators sei die Ebene der $x_1 y_1$. Der positive Theil der Axe der x_1 sei von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Frühlingspunkte hin gerichtet. Der positive Theil der Axe der y_1 werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x_1 durch den rechten Winkel $(x_1 y_1)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_1 zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher von dem positiven Theile der Axe der x_1 an die Rectascensionen von 0 bis 360° gezählt werden. Der positive Theil der Axe der z_1 liege auf der Seite der Ebene der $x_1 y_1$, auf welcher die positiven Declinationen genommen werden.

Endlich lege man durch den Mittelpunkt der Erde ein dem Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem der $\xi\eta\zeta$.

Die dem Moment der Beobachtung entsprechende geocentrische Länge der Sonne und deren Entfernung vom Mittelpunkte der Erde, welche aus den astronomischen Tafeln oder den Ephemeriden zu nehmen sind, seien λ und ϱ; so erhellet mittelst einer sehr einfachen Betrachtung, dass allgemein $\lambda \pm 180°$ die dem Moment der Beobachtung entsprechende heliocentrische Länge der Erde ist, und folglich

$$\varrho \cos(\lambda \pm 180°),\ \varrho \sin(\lambda \pm 180°),\ 0$$

oder

$$-\varrho \cos\lambda,\ -\varrho \sin\lambda,\ 0$$

die dem Moment der Beobachtung entsprechenden Coordinaten des Mittelpunkts der Erde in dem Systeme der xyz sind.

Daher hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten zwischen den Coordinaten der beiden Systeme der xyz und $\xi\eta\zeta$ die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$1.\quad x = -\varrho \cos\lambda + \xi,\ y = -\varrho \sin\lambda + \eta,\ z = \zeta$$

oder

$$2.\quad \xi = \varrho \cos\lambda + x,\ \eta = \varrho \sin\lambda + y,\ \zeta = z.$$

Bezeichnen wir nun die Schiefe der Ekliptik durch Θ; so ist, wie leicht erhellen wird, allgemein

$$\begin{array}{lll} (\xi x_1) = 0, & (\xi y_1) = 90°, & (\xi z_1) = 90°; \\ (\eta x_1) = 90°, & (\eta y_1) = \Theta, & (\eta z_1) = 90° - \Theta; \\ (\zeta x_1) = 90°, & (\zeta y_1) = 90° + \Theta, & (\zeta z_1) = \Theta; \end{array}$$

und nach den bekannten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten hat man also zwischen den Coordinaten der Systeme der $x_1 y_1 z_1$ und $\xi\eta\zeta$ die folgenden Gleichungen:

$$3.\quad \begin{cases} \xi = x_1, \\ \eta = y_1 \cos\Theta + z_1 \sin\Theta, \\ \zeta = -y_1 \sin\Theta + z_1 \cos\Theta; \end{cases}$$

oder umgekehrt

$$4.\quad \begin{cases} x_1 = \xi, \\ y_1 = \eta \cos\Theta - \zeta \sin\Theta, \\ z_1 = \eta \sin\Theta + \zeta \cos\Theta. \end{cases}$$

Also hat man nach 1. und 3. zwischen den Coordinaten der Systeme der xyz und $x_1 y_1 z_1$ die folgenden Gleichungen:

$$5.\quad \begin{cases} x = -\varrho \cos\lambda + x_1, \\ y = -\varrho \sin\lambda + y_1 \cos\Theta + z_1 \sin\Theta, \\ z = -y_1 \sin\Theta + z_1 \cos\Theta; \end{cases}$$

oder. wie man hieraus leicht findet, umgekehrt:

$$6.\quad \begin{cases} x_1 = \varrho \cos\lambda + x, \\ y_1 = \varrho \sin\lambda \cos\Theta + y \cos\Theta - z \sin\Theta, \\ z_1 = \varrho \sin\lambda \sin\Theta + y \sin\Theta + z \cos\Theta. \end{cases}$$

Der nach dem Beobachtungsorte gezogene Erdradius und die geocentrische Breite des Beobachtungsorts seien r und φ, und T sei die Sternzeit der Beobachtung; so sind

$$r \cos\varphi \cos 15\ T,$$
$$r \cos\varphi \sin 15\ T,$$
$$r \sin\varphi$$

die Coordinaten des Beobachtungsorts im Moment der Beobachtung in dem Systeme der $x_1 y_1 z_1$. Also sind nach 5.

$$-\varrho \cos\lambda + r \cos\varphi \cos 15\ T,$$
$$-\varrho \sin\lambda + r (\sin\Theta \sin\varphi + \cos\Theta \cos\varphi \sin 15\ T)$$
$$r (\cos\Theta \sin\varphi - \sin\Theta \cos\varphi \sin 15\ T)$$

die Coordinaten des Beobachtungsorts im Moment der Beobachtung im Systeme der xyz.

Durch den Beobachtungsort legen wir nun ein dem Systeme der $x_1 y_1 z_1$ paralleles Coordinatensystem der $x_2 y_2 z_2$; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten allgemein

$$7.\quad \begin{cases} x_1 = r \cos\varphi \cos 15\ T + x_2, \\ y_1 = r \cos\varphi \sin 15\ T + y_2, \\ z_1 = r \sin\varphi + z_2. \end{cases}$$

Die Rectascension und Declination des beobachteten Punktes der Bahn der Sternschnuppe seien α und δ; so ist, wenn wir die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der von dem Beobachtungsorte nach dem beobachteten Punkte der Bahn der Sternschnuppe gezogenen Gesichtslinie in dem Systeme der $x_2 y_2 z_2$ durch m, n, k, und die Entfernung dieses Punktes von dem Beobachtungsorte durch i bezeichnen,

$$m = i \cos\alpha \cos\delta,$$
$$n = i \sin\alpha \cos\delta,$$
$$k = i \sin\delta;$$

wobei man nur nicht zu übersehen hat, dass die in Rede stehende Gesichtslinie und die vom Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte, in welchem die Sternschnuppe dem Beobachter am Himmel erschien, als parallel zu betrachten sind. Sind nun

$$x_2 = M z_2,\ \ y_2 = N z_2$$

die Gleichungen der in Rede stehenden Gesichtslinie in dem Systeme der $x_2 y_2 z_2$; so ist

$$i \cos\alpha \cos\delta = i\, M \sin\delta,\quad i \sin\alpha \cos\delta = i\, N \sin\delta,$$

und folglich

$$M = \cos\alpha \cot\delta,\quad N = \sin\alpha \cot\delta.$$

Also sind

$$8.\quad x_2 = z_2 \cos\alpha \cot\delta,\quad y_2 = z_2 \sin\alpha \cot\delta$$

die Gleichungen der von dem Beobachtungsorte nach dem beobachteten Punkte der Bahn der Sternschnuppe gezogenen Gesichtslinie in dem Systeme der $x_2 y_2 z_2$, und mittelst der Gleichungen 7. ergiebt sich nun ferner leicht, dass

$$9.\ \begin{cases} x_1 - r\cos\varphi\cos 15\,T = (z_1 - r\sin\varphi)\cos\alpha\cot\delta, \\ y_1 - r\cos\varphi\sin 15\,T = (z_1 - r\sin\varphi)\sin\alpha\cot\delta \end{cases}$$

oder

$$10.\ \begin{cases} x_1 = z_1 \cos\alpha\cot\delta + r\,(\cos\varphi\cos 15\,T - \cos\alpha\cot\delta\sin\varphi), \\ y_1 = z_1 \sin\alpha\cot\delta + r\,(\cos\varphi\sin 15\,T - \sin\alpha\cot\delta\sin\varphi) \end{cases}$$

die Gleichungen der von dem Beobachtungsorte nach dem beobachteten Punkte der Bahn der Sternschnuppe gezogenen Gesichtslinie in dem Systeme der $x_1 y_1 z_1$ sind.

Nach 6. und 9. sind

$$11.\ \begin{cases} \varrho\cos\lambda - r\cos\varphi\cos 15\,T + x \\ \qquad = (\varrho\sin\lambda\sin\Theta - r\sin\varphi + y\sin\Theta + z\cos\Theta)\cos\alpha\cot\delta, \\ \varrho\sin\lambda\cos\Theta - r\cos\varphi\sin 15\,T + y\cos\Theta - z\sin\Theta \\ \qquad = (\varrho\sin\lambda\sin\Theta - r\sin\varphi + y\sin\Theta + z\cos\Theta)\sin\alpha\cot\delta \end{cases}$$

die Gleichungen der von dem Beobachtungsorte nach dem beobachteten Punkte der Bahn der Sternschnuppe gezogenen Gesichtslinie in dem Systeme der xyz.

Um diese Gleichungen noch anders auszudrücken, seien f, g, h und f_1, g_1, h_1 die Coordinaten des Beobachtungsortes und des beobachteten Punktes in der Bahn der Sternschnuppe in dem Systeme der xyz, und

$$y = Ax + B,\quad z = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}$$

seien die Gleichungen der durch die beiden in Rede stehenden Punkte bestimmten Gesichtslinie; so ist

$$g = Af + B,\quad h = \mathfrak{A}f + \mathfrak{B};\quad g_1 = Af_1 + B,\quad h_1 = \mathfrak{A}f_1 + \mathfrak{B};$$

und folglich

$$y - g = A(x - f),\quad z - h = \mathfrak{A}(x - f)$$

und

$$g - g_1 = A(f - f_1),\quad h - h_1 = \mathfrak{A}(f - f_1),$$

also

$$y - g = \frac{g - g_1}{f - f_1}(x - f),\quad z - h = \frac{h - h_1}{f - f_1}(x - f).$$

Nach dem Obigen ist

$$f = -\varrho \cos\lambda + r\cos\varphi\cos 15\,T,$$
$$g = -\varrho \sin\lambda + r(\sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\cos\varphi\sin 15\,T),$$
$$h = \qquad\qquad r(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\cos\varphi\sin 15\,T).$$

Ferner ist, wenn jetzt wieder i die Entfernung des beobachteten Punktes der Bahn der Sternschnuppe von dem Beobachtungsorte bezeichnet, nach 5. und 7.

$$f_1 = -\varrho\cos\lambda + r\cos\varphi\cos 15\,T + i\cos\alpha\cos\delta,$$
$$g_1 = -\varrho\sin\lambda + r(\sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\cos\varphi\sin 15\,T)$$
$$+ i(\sin\Theta\sin\delta + \cos\Theta\sin\alpha\cos\delta),$$
$$h_1 = \qquad\qquad r(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\cos\varphi\sin 15\,T)$$
$$+ i(\cos\Theta\sin\delta - \sin\Theta\sin\alpha\cos\delta);$$

d. i.

$$f_1 = f + i\cos\alpha\cos\delta,$$
$$g_1 = g + i\,(\sin\Theta\sin\delta + \cos\Theta\sin\alpha\cos\delta),$$
$$h_1 = h + i\,(\cos\Theta\sin\delta - \sin\Theta\sin\alpha\cos\delta).$$

Folglich sind nach dem Obigen

$$12.\quad \left\{\begin{aligned} & y + \varrho\sin\lambda - r(\sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\cos\varphi\sin 15\,T) \\ & = \frac{\sin\Theta\sin\delta + \cos\Theta\sin\alpha\cos\delta}{\cos\alpha\cos\delta}(x + \varrho\cos\lambda - r\cos\varphi\cos 15\,T), \\ & z - r(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\cos\varphi\sin 15\,T) \\ & = \frac{\cos\Theta\sin\delta - \sin\Theta\sin\alpha\cos\delta}{\cos\alpha\cos\delta}(x + \varrho\cos\lambda - r\cos\varphi\cos 15\,T) \end{aligned}\right.$$

die Gleichungen der von dem Beobachtungsorte nach dem beobachteten Punkte der Bahn der Sternschnuppe gezogenen Gesichtslinie in dem Systeme der xyz.

Diese Gleichungen sind auch

$$x - f = \frac{f - f_1}{h - h_1}(z - h),\quad y - g = \frac{g - g_1}{h - h_1}(z - h),$$

und folglich nach dem Obigen

$$13.\quad \left\{\begin{aligned} & x + \varrho\cos\lambda - r\cos\varphi\cos 15\,T \\ & = \frac{\cos\alpha\cos\delta}{\cos\Theta\sin\delta - \sin\Theta\sin\alpha\cos\delta}\{z - r(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\cos\varphi\sin 15\,T)\} \\ & y + \varrho\sin\lambda - r(\sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\cos\varphi\sin 15\,T) \\ & = \frac{\sin\Theta\sin\delta + \cos\Theta\sin\alpha\cos\delta}{\cos\Theta\sin\delta - \sin\Theta\sin\alpha\cos\delta}\{z - r(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\cos\varphi\sin 15\,T)\}. \end{aligned}\right.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$14.\quad \left\{\begin{aligned} & A = \cos\alpha\cos\delta, \\ & B = \sin\Theta\sin\delta + \cos\Theta\sin\alpha\cos\delta, \\ & C = \cos\Theta\sin\delta - \sin\Theta\sin\alpha\cos\delta, \\ & A_1 = \cos\varphi\cos 15\,T, \\ & B_1 = \sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\cos\varphi\sin 15\,T, \\ & C_1 = \cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\cos\varphi\sin 15\,T; \end{aligned}\right.$$

so werden die Gleichungen 13.

$$15.\quad \begin{cases} x = \frac{A}{C}\,z - \frac{AC_1}{C}\,r + A_1\,r - \varrho\cos\lambda, \\ y = \frac{B}{C}\,z - \frac{BC_1}{C}\,r + B_1\,r - \varrho\sin\lambda; \end{cases}$$

und wenn man die Hülfswinkel ψ, ψ_1 mittelst der Formeln

$$16.\quad \tang\psi = \sin\alpha\cot\delta,\ \tang\psi_1 = \sin 15\,T\cot\varphi$$

berechnet; so hat man für die Grössen A, B, C, A_1, B_1, C_1 die folgenden Ausdrücke:

$$17.\quad \begin{cases} A = \cos\alpha\cos\delta, \\ B = \frac{\sin\delta\sin(\Theta+\psi)}{\cos\psi}, \\ C = \frac{\sin\delta\cos(\Theta+\psi)}{\cos\psi}, \\ A_1 = \cos\varphi\cos 15\,T, \\ B_1 = \frac{\sin\varphi\sin(\Theta+\psi_1)}{\cos\psi_1}, \\ C_1 = \frac{\sin\varphi\cos(\Theta+\psi_1)}{\cos\psi_1}, \end{cases}$$

§. 3.

Wir wollen jetzt die Bedingungsgleichung aufsuchen, welche erfüllt sein muss, wenn zwei aus verschiedeneneu Beobachtungsorten nach beobachteten Sternschnuppen gezogene Gesichtslinien sich schneiden sollen.

Nach den Gleichnngen 11. im vorigen Paragraphen haben die Gleichungen der beiden in Rede stehenden Gesichtslinien im Allgemeinen die folgende Form:

$$\varrho\cos\lambda - r\cos\varphi\cos 15\,T + x$$
$$= (\varrho\sin\lambda\sin\Theta - r\sin\varphi + y\sin\Theta + z\cos\Theta)\cos\alpha\cot\delta,$$
$$\varrho\sin\lambda\cos\Theta - r\cos\varphi\sin 15\,T + y\cos\Theta - z\sin\Theta$$
$$= (\varrho\sin\lambda\sin\Theta - r\sin\varphi + y\sin\Theta + z\cos\Theta)\sin\alpha\cot\delta$$

und

$$\varrho_1\cos\lambda_1 - r_1\cos\varphi_1\cos 15\,T_1 + x$$
$$= (\varrho_1\sin\lambda_1\sin\Theta - r_1\sin\varphi_1 + y\sin\Theta + z\cos\Theta)\cos\alpha_1\cot\delta_1,$$
$$\varrho_1\sin\lambda_1\cos\Theta - r_1\cos\varphi_1\sin 15\,T_1 + y\cos\Theta - z\sin\Theta$$
$$= (\varrho_1\sin\lambda_1\sin\Theta - r_1\sin\varphi_1 + y\sin\Theta + z\cos\Theta)\sin\alpha_1\cot\delta_1.$$

Eliminirt man nun aus diesen vier Gleichungen die drei Grössen x, y, z, so wird man offenbar die gesuchte Bedingungsgleichung erhalten. Zieht man aber die dritte Gleichung von der ersten, die vierte von der zweiten ab, so erhält man nach einigen leichten Reductionen die beiden folgenden Gleichungen:

$$\varrho \cos\lambda - \varrho_1 \cos\lambda_1 - (r \cos\varphi \cos 15\,T - r_1 \cos\varphi_1 \cos 15\,T_1)$$
$$- (\varrho \sin\lambda \sin\Theta - r \sin\varphi) \cos\alpha \cot\delta$$
$$+ (\varrho_1 \sin\lambda_1 \sin\Theta - r_1 \sin\varphi_1) \cos\alpha_1 \cot\delta_1$$
$$= (\cos\alpha \cot\delta - \cos\alpha_1 \cot\delta_1)\,(y \sin\Theta + z \cos\Theta),$$
$$(\varrho \sin\lambda - \varrho_1 \sin\lambda_1) \cos\Theta - (r \cos\varphi \sin 15\,T - r_1 \cos\varphi_1 \sin 15\,T_1)$$
$$- (\varrho \sin\lambda \sin\Theta - r \sin\varphi) \sin\alpha \cot\delta$$
$$+ (\varrho_1 \sin\lambda_1 \sin\Theta - r_1 \sin\varphi_1) \sin\alpha_1 \cot\delta_1$$
$$= (\sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha_1 \cot\delta_1)\,(y \sin\Theta + z \cos\Theta).$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man nun sehr leicht die Grösse $y \sin\Theta + z \cos\Theta$ eliminiren, und erhält nach einigen leichten Reductionen die folgende Gleichung:

18. $$0 = \{(\varrho \sin\lambda - \varrho_1 \sin\lambda_1) \sin\Theta - (r \sin\varphi - r_1 \sin\varphi_1)\}$$
$$\sin(\alpha - \alpha_1) \cot\delta \cot\delta_1$$
$$- \{(\varrho \cos\lambda - \varrho_1 \cos\lambda_1) \sin\alpha - (\varrho \sin\lambda - \varrho_1 \sin\lambda_1) \cos\alpha \cos\Theta$$
$$- r \cos\varphi \sin(\alpha - 15\,T) + r_1 \cos\varphi_1 \sin(\alpha - 15\,T_1)\} \cot\delta$$
$$+ \{(\varrho \cos\lambda - \varrho_1 \cos\lambda_1) \sin\alpha_1 - (\varrho \sin\lambda - \varrho_1 \sin\lambda_1) \cos\alpha_1 \cos\Theta$$
$$- r \cos\varphi \sin(\alpha_1 - 15\,T) + r_1 \cos\varphi_1 \sin(\alpha_1 - 15\,T_1)\} \cot\delta_1,$$

welche die gesuchte Bedingungsgleichung ist. Bringt man alle die geocentrischen Breiten φ und φ_1 der beiden Beobachtungsorte enthaltenden Glieder auf eine Seite, so nimmt die vorstehende Gleichung folgende Gestalt an:

19. $$(\varrho \cos\lambda - \varrho_1 \cos\lambda_1)(\sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha_1 \cot\delta_1)$$
$$- (\varrho \sin\lambda - \varrho_1 \sin\lambda_1)\,\{\cos\Theta\,(\cos\alpha \cot\delta - \cos\alpha_1 \cot\delta_1)$$
$$+ \sin\Theta_1 \sin(\alpha - \alpha_1) \cot\delta \cot\delta_1\}$$
$$= r \cos\varphi\,\{\sin(\alpha - 15\,T) \cot\delta - \sin(\alpha_1 - 15\,T) \cot\delta_1\}$$
$$- r_1 \cos\varphi_1\,\{\sin(\alpha - 15\,T_1) \cot\delta - \sin(\alpha_1 - 15\,T_1) \cot\delta_1\}$$
$$- (r \sin\varphi - r_1 \sin\varphi_1) \sin(\alpha - \alpha_1) \cot\delta \cot\delta_1.$$

Noch etwas einfacher kann man die beiden vorhergehenden Gleichungen unter der folgenden Gestalt darstellen:

20. $$0 = \{(\varrho \sin\lambda - \varrho_1 \sin\lambda_1) \sin\Theta - (r \sin\varphi - r_1 \sin\varphi_1)\} \sin(\alpha - \alpha_1)$$
$$- \{(\varrho \cos\lambda - \varrho_1 \cos\lambda_1) \sin\alpha - (\varrho \sin\lambda - \varrho_1 \sin\lambda_1) \cos\alpha \cos\Theta$$
$$- r \cos\varphi \sin(\alpha - 15\,T) + r_1 \cos\varphi_1 \sin(\alpha - 15\,T_1)\} \operatorname{tang}\delta_1$$
$$+ \{(\varrho \cos\lambda - \varrho_1 \cos\lambda_1) \sin\alpha_1 - (\varrho \sin\lambda - \varrho_1 \sin\lambda_1) \cos\alpha_1 \cos\Theta$$
$$- r \cos\varphi \sin(\alpha_1 - 15\,T) + r_1 \cos\varphi_1 \sin(\alpha_1 - 15\,T_1)\} \operatorname{tang}\delta$$

und

21. $$(\varrho \cos\lambda - \varrho_1 \cos\lambda_1)(\sin\alpha \operatorname{tang}\delta_1 - \sin\alpha_1 \operatorname{tang}\delta)$$
$$- (\varrho \sin\lambda - \varrho_1 \sin\lambda_1)\,\{\sin\Theta \sin(\alpha - \alpha_1) + \cos\Theta\,(\cos\alpha \operatorname{tg}\delta_1 - \cos\alpha_1 \operatorname{tg}\delta)\}$$
$$= r \cos\varphi\,\{\sin(\alpha - 15\,T) \operatorname{tang}\delta_1 - \sin(\alpha_1 - 15\,T) \operatorname{tang}\delta\}$$
$$- r_1 \cos\varphi_1\,\{\sin(\alpha - 15\,T_1) \operatorname{tang}\delta_1 - \sin(\alpha_1 - 15\,T_1) \operatorname{tang}\delta\}$$
$$- (r \sin\varphi - r_1 \sin\varphi_1) \sin(\alpha - \alpha_1).$$

Diese letzte Gleichung kann auch auf folgende Art geschrieben werden:

$$22.\quad (\varrho \cos \lambda - \varrho_1 \cos \lambda_1)(\sin \alpha \tang \delta_1 - \sin \alpha_1 \tang \delta)$$
$$-(\varrho \sin \lambda - \varrho_1 \sin \lambda_1)\{\sin \Theta \sin (\alpha - \alpha_1) + \cos \Theta (\cos \alpha \tang \delta_1 - \cos \alpha_1 \tang \delta)\}$$
$$= (\sin \alpha \tang \delta_1 - \sin \alpha_1 \tang \delta)(r \cos \varphi \cos 15 T - r_1 \cos \varphi_1 \cos 15 T_1)$$
$$-(\cos \alpha \tang \delta_1 - \cos \alpha_1 \tang \delta)(r \cos \varphi \sin 15 T - r_1 \cos \varphi_1 \sin 15 T_1)$$
$$-(r \sin \varphi - r_1 \sin \varphi_1) \sin (\alpha - \alpha_1).$$

Sind L, L_1 die geographischen Längen der beiden Beobachtungsorte, so hat man, wie man durch eine einfache Betrachtung findet, für die Gleichzeitigkeit der Beobachtungen die Bedingungsgleichung

$$(L - L_1) - 15 (T - T_1) = 0$$

oder

$$(L - L_1) - 15 (T - T_1) = \pm 360°,$$

jenachdem die Grössen $L - L_1$ und $T - T_1$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, wobei zugleich zu bemerken ist, dass in der zweiten der beiden vorstehenden Gleichungen das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem $L - L_1$ eine positive oder eine negative Grösse ist.

Für gleichzeitige Beobachtungen ist aber $\varrho = \varrho_1$, $\lambda = \lambda_1$, also

$$\varrho \cos \lambda - \varrho_1 \cos \lambda_1 = 0, \quad \varrho \sin \lambda - \varrho_1 \sin \lambda_1 = 0,$$

und die Gleichungen 21. und 22. werden also in diesem Falle

$$23.\quad (r \sin \varphi - r_1 \sin \varphi_1) \sin (\alpha - \alpha_1)$$
$$= r \cos \varphi \{\sin (\alpha - 15 T) \tang \delta_1 - \sin (\alpha_1 - 15 T) \tang \delta\}$$
$$- r_1 \cos \varphi_1 \{\sin (\alpha - 15 T_1) \tang \delta_1 - \sin (\alpha_1 - 15 T_1) \tang \delta\}$$

und

$$24.\quad (r \sin \varphi - r_1 \sin \varphi_1) \sin (\alpha - \alpha_1)$$
$$= (\sin \alpha \tang \delta_1 - \sin \alpha_1 \tang \delta)(r \cos \varphi \cos 15 T - r_1 \cos \varphi_1 \cos 15 T_1)$$
$$-(\cos \alpha \tang \delta_1 - \cos \alpha_1 \tang \delta)(r \cos \varphi \sin 15 T - r_1 \cos \varphi_1 \sin 15 T_1).$$

Für $r = r_1$, d. h. wenn man auf die sphäroidische Gestalt der Erde keine Rücksicht nimmt, können diese Gleichungen auch unter der folgenden Form dargestellt werden:

$$25.\quad 2 \sin (\alpha - \alpha_1) \sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_1) \cos \tfrac{1}{2} (\varphi + \varphi_1)$$
$$= \{\cos \varphi \sin (\alpha - 15 T) - \cos \varphi_1 \sin (\alpha - 15 T_1)\} \tang \delta_1$$
$$- \{\cos \varphi \sin (\alpha_1 - 15 T) - \cos \varphi_1 \sin (\alpha_1 - 15 T_1)\} \tang \delta$$

und

$$26.\quad 2 \sin (\alpha - \alpha_1) \sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_1) \cos \tfrac{1}{2} (\varphi + \varphi_1)$$
$$= (\sin \alpha \tang \delta_1 - \sin \alpha_1 \tang \delta)(\cos \varphi \cos 15 T - \cos \varphi_1 \cos 15 T_1)$$
$$-(\cos \alpha \tang \delta_1 - \cos \alpha_1 \tang \delta)(\cos \varphi \sin 15 T - \cos \varphi_1 \sin 15 T_1).$$

Die Gleichung 23. oder 24. kann noch auf einen andern bemerkenswerthen Ausdruck gebracht werden. Die Gleichungen der die beiden Beobachtungsorte mit einander verbindenden geraden Linie in dem Systeme der $x_1 y_1 z_1$ seien

$$x_1 = Kz_1 + L,\quad y_1 = Mz_1 + N_1;$$

so ist nach §. 2.

$$r\cos\varphi\cos 15T = K r\sin\varphi + L,\quad r\cos\varphi\sin 15T = M r\sin\varphi + N;$$

$$r_1\cos\varphi_1\cos 15T_1 = Kr_1\sin\varphi_1 + L,\ r_1\cos\varphi_1\sin 15T_1 = Mr_1\sin\varphi_1 + N;$$

und die Gleichungen der in Rede stehenden Linie sind also offenbar

$$27.\ \left\{\begin{array}{l} x_1 - r\cos\varphi\cos 15T = \dfrac{r\cos\varphi\cos 15T - r_1\cos\varphi_1\cos 15T_1}{r\sin\varphi - r_1\sin\varphi_1}(z_1 - r\sin\varphi), \\ y_1 - r\cos\varphi\sin 15T = \dfrac{r\cos\varphi\sin 15T - r_1\cos\varphi_1\sin 15T_1}{r\sin\varphi - r_1\sin\varphi_1}(z_1 - r\sin\varphi). \end{array}\right.$$

Also sind

$$28.\ \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{r\cos\varphi\cos 15T - r_1\cos\varphi_1\cos 15T_1}{r\sin\varphi - r_1\sin\varphi_1}z_1, \\ y_1 = \dfrac{r\cos\varphi\sin 15T - r_1\cos\varphi_1\sin 15T_1}{r\sin\varphi - r_1\sin\varphi_1}z_1 \end{array}\right.$$

die Gleichungen der mit der in Rede stehenden geraden Linie durch den Anfang der Coordinaten, d. i. durch den Mittelpunkt der Erde, parallel gezogenen geraden Linie. Bezeichnen wir den 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen der auf der positiven Seite der Axe der x_1 liegende Theil der Projection der in Rede stehenden geraden Linie auf der Ebene der $x_1 y_1$ mit dem positiven Theile der Axe der x_1 einschliesst, durch A, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$29.\quad \operatorname{tang} A = \frac{r\cos\varphi\sin 15T - r_1\cos\varphi_1\sin 15T_1}{r\cos\varphi\cos 15T - r_1\cos\varphi_1\cos 15T_1},$$

weil nach 28.

$$30.\quad y_1 = \frac{r\cos\varphi\sin 15T - r_1\cos\varphi_1\sin 15T_1}{r\cos\varphi\cos 15T - r_1\cos\varphi_1\cos 15T_1}x_1$$

die Gleichung der in Rede stehenden Projection ist.

Ferner sei D die Declination des Punktes der Sphäre, in welchem dieselbe von dem Theile der durch den Mittelpunkt der Erde mit der die beiden Beobachtungsorte verbindenden geraden Linie parallel gezogenen geraden Linie, dessen Projection auf der Ebene der $x_1 y_1$ auf der positiven Seiten der Axe der x_1 liegt, geschnitten wird; so ist, wenn x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes in diesem Theile der in Rede stehenden durch den Mittelpunkt der Erde mit der die beiden Beobachtungsorte mit einander verbindenden geraden Linie parallel gezogenen geraden Linie sind, offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\operatorname{tang} D = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$\operatorname{tang} A = \frac{y_1}{x_1}$$

ist,

$$\tang D = \pm \frac{z_1}{x_1} \cos A,$$

das Zeichen so genommen, dass tang D mit z_1 einerlei Vorzeichen erhält. Nun überzeugt man sich aber durch eine ganz einfache Betrachtung sehr leicht, dass unter den gemachten Voraussetzungen x_1 und cos A immer gleiche Vorzeichen haben, und folglich in völliger Allgemeinheit

$$\tang D = \frac{z_1}{x_1} \cos A,$$

also nach 28.

$$31.\quad \tang D = \frac{r \sin \varphi - r_1 \sin \varphi_1}{r \cos \varphi \cos 15T - r_1 \cos \varphi_1 \cos 15T_1} \cos A$$

zu setzen ist.

Nach 29. und 31. ist nun

$$r \cos \varphi \sin 15T - r_1 \cos \varphi_1 \sin 15T_1$$
$$= (r \cos \varphi \cos 15T - r_1 \cos \varphi_1 \cos 15T_1) \tang A,$$
$$r \sin \varphi - r_1 \sin \varphi_1 = (r \cos \varphi \cos 15T - r_1 \cos \varphi_1 \cos 15T_1) \sec A \tang D;$$

und folglich nach 24.

$$\sin(\alpha - \alpha_1) \sec A \tang D = \sin \alpha \tang \delta_1 - \sin \alpha_1 \tang \delta$$
$$- (\cos \alpha \tang \delta_1 - \cos \alpha_1 \tang \delta) \tang A,$$

oder, wie man hieraus leicht findet,

$$32.\quad \sin(\alpha - \alpha_1) \tang D = \sin(\alpha - A) \tang \delta_1 - \sin(\alpha_1 - A) \tang \delta$$

oder

$$33.\quad \sin(\alpha_1 - A) \tang \delta - \sin(\alpha - A) \tang \delta_1 + \sin(\alpha - \alpha_1) \tang D = 0.$$

Auf diesen Ausdruck hat zuerst Bessel die Bedingungsgleichung für das Schneiden zweier Gesichtslinien gebracht.

§. 4.

Wenn die Beobachtungen für zwei Beobachtungsorte gleichzeitig sind und die Bedingungsgleichung 23. erfüllt ist, so wird man die Beobachtungen als einem und demselben Punkte der Bahn einer und derselben Sternschnuppe entsprechend betrachten können, und sich nun die Aufgabe vorlegen, die Lage dieses Punktes im Raume zu bestimmen, welches die Ansicht ist, von welcher Olbers *) bei seiner Auflösung des Sternschnuppen-Problems ausgegangen ist, und die auch wir, weil sie in der That die einfachste ist, von welcher man ausgehen kann, hier zuerst verfolgen wollen.

Es liegt in der Natur der Sache, dass wir unter den gemachten Voraussetzungen das System der $x_1 y_1 z_1$ zum Grunde legen können. Bezeichnen nun x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des beobachteten Punktes der Sternschnuppen-Bahn; so haben wir nach 10. zwischen denselben die folgenden Gleichungen:

---

*) Benzenberg über die Bestimmung der geographischen Länge durch Sternschnuppen. Hamburg. 1802. — Gehler physikalisches Wörterbuch. Neue Ausg. Art. Feuerkugel. S. 211.

$$x_1 = z_1 \cos\alpha \cot\delta + r\,(\cos\varphi \cos 15\,T - \cos\alpha \cot\delta \sin\varphi),$$
$$y_1 = z_1 \sin\alpha \cot\delta + r\,(\cos\varphi \sin 15\,T - \sin\alpha \cot\delta \sin\varphi)$$

und

$$x_1 = z_1 \cos\alpha_1 \cot\delta_1 + r_1\,(\cos\varphi_1 \cos 15\,T_1 - \cos\alpha_1 \cot\delta_1 \sin\varphi_1),$$
$$y_1 = z_1 \sin\alpha_1 \cot\delta_1 + r_1\,(\cos\varphi_1 \sin 15\,T_1 - \sin\alpha_1 \cot\delta_1 \sin\varphi_1);$$

wobei wohl kaum besonders bemerkt zu werden braucht, dass sich das eine dieser beiden Systeme von Gleichungen auf den einen, das andere auf den andern der beiden Beobachtungsorte bezieht.

Aus der ersten und zweiten und aus der dritten und vierten dieser vier Gleichungen erhält man durch Elimination von z_1

$$x_1 \sin\alpha - y_1 \cos\alpha = r \cos\varphi \sin(\alpha - 15\,T),$$
$$x_1 \sin\alpha_1 - y_1 \cos\alpha_1 = r_1 \cos\varphi_1 \sin(\alpha_1 - 15\,T_1);$$

und folglich

$$x_1 \sin(\alpha-\alpha_1) = r\cos\varphi\cos\alpha_1\sin(\alpha-15\,T) - r_1\cos\varphi_1\cos\alpha\sin(\alpha_1-15\,T_1),$$
$$y_1 \sin(\alpha-\alpha_1) = r\cos\varphi\sin\alpha_1\sin(\alpha-15\,T) - r_1\cos\varphi_1\sin\alpha\sin(\alpha_1-15\,T_1);$$

also

$$34.\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{r\cos\varphi\cos\alpha_1\sin(\alpha-15T) - r_1\cos\varphi_1\cos\alpha\sin(\alpha_1-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{r\cos\varphi\sin\alpha_1\sin(\alpha-15T) - r_1\cos\varphi_1\sin\alpha\sin(\alpha_1-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)}. \end{cases}$$

Aus der ersten und dritten und aus der zweiten und vierten Gleichung erhält man durch Elimination von x_1 und y_1 für z_1 sehr leicht die beiden folgenden Ausdrücke:

$$35.\quad \begin{cases} z_1 = -\dfrac{r(\cos\varphi\cos15T - \cos\alpha\cot\delta\sin\varphi) - r_1(\cos\varphi_1\cos15T_1 - \cos\alpha_1\cot\delta_1\sin\varphi_1)}{\cos\alpha\cot\delta - \cos\alpha_1\cot\delta_1}, \\[2ex] z_1 = -\dfrac{r(\cos\varphi\sin15T - \sin\alpha\cot\delta\sin\varphi) - r_1(\cos\varphi_1\sin15T_1 - \sin\alpha_1\cot\delta_1\sin\varphi_1)}{\sin\alpha\cot\delta - \sin\alpha_1\cot\delta_1}. \end{cases}$$

Man kann aber für z_1 noch andere Ausdrücke finden. Aus der ersten und zweiten, und aus der dritten und vierten Gleichung erhält man nämlich leicht

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha = z_1 \cot\delta + r\,\{\cos\varphi\cos(\alpha-15T) - \sin\varphi\cot\delta\},$$
$$x_1 \cos\alpha_1 + y_1 \sin\alpha_1 = z_1 \cot\delta_1 + r_1\,\{\cos\varphi_1\cos(\alpha_1-15T_1) - \sin\varphi_1\cot\delta_1\}$$

oder

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha = (z_1 - r\sin\varphi)\cot\delta + r\cos\varphi\cos(\alpha-15T),$$
$$x_1 \cos\alpha_1 + y_1 \sin\alpha_1 = (z_1 - r_1\sin\varphi_1)\cot\delta_1 + r_1\cos\varphi_1\cos(\alpha_1-15T_1).$$

Nach 34. ist aber, wie man leicht findet,

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha = \frac{r\cos\varphi\cos(\alpha-\alpha_1)\sin(\alpha-15T) - r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)},$$
$$x_1 \cos\alpha_1 + y_1 \sin\alpha_1 = \frac{r\cos\varphi\sin(\alpha-15T) - r_1\cos\varphi_1\cos(\alpha-\alpha_1)\sin(\alpha_1-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)};$$

und folglich nach dem Obigen

$$36. \begin{cases} z_1 = r\sin\varphi + \dfrac{r\cos\varphi\sin(\alpha_1-15T) - r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)\cot\delta}, \\ z_1 = r_1\sin\varphi_1 + \dfrac{r\cos\varphi\sin(\alpha-15T) - r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)\cot\delta_1}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir jetzt die dem Moment der Beobachtungen entsprechende Sternzeit des Punktes der Erdoberfläche, in welchem dieselbe von der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem beobachteten Punkte der Sternschnuppen - Bahn gezogenen geraden Linie geschnitten wird, durch T', und setzen der Kürze wegen $A=15T'$, so ist, wie leicht erhellen wird, in völliger Allgemeinheit

$$37. \quad \tang A = \frac{y_1}{x_1},$$

mit der Bestimmung, dass in dem Falle, wo x_1 und y_1 gleiche Vorzeichen haben, A zwischen 0 und 90° oder zwischen 180° und 270° genommen werden muss, jenachdem die Grössen x_1, y_1 beide positiv oder beide negativ sind; dass dagegen in dem Falle, wo x_1 und y_1 ungleiche Vorzeichen haben, A zwischen 90° und 180° oder zwischen 270° und 360° genommen werden muss, jenachdem x_1 negativ und y_1 positiv, oder x_1 positiv und y_1 negativ ist.

Bezeichnen wir die geographische Länge des in Rede stehenden Punktes der Erdoberfläche in Bezug auf den einen der beiden Beobachtungsorte, welchem die Sternzeit T entsprechen mag, als Anfang der Längen durch L'; so ist offenbar

$$L' = 15(T'-T) \text{ oder } L' = 360^\circ + 15(T'-T),$$

jenachdem $T'-T$ positiv oder negativ ist, und die geographische Länge des in Rede stehenden Punktes der Erdoberfläche ist nun, wenn L die geographische Länge des Beobachtungsortes, welchem die Sternzeit T entspricht, bezeichnet,

$$L + L' \text{ oder } L + L' - 360^\circ,$$

jenachdem $L+L'$ kleiner oder grösser als 360° ist. Dass man hier an die Stelle des Beobachtungsorts, welchem die Sternzeit T entspricht, auch den Beobachtungsort, welchem die Sternzeit T_1 entspricht, setzen kann, versteht sich von selbst.

Nach 34. und 37. ist

$$38. \quad \tang A = \frac{r\cos\varphi\sin\alpha_1\sin(\alpha-15T) - r_1\cos\varphi_1\sin\alpha\sin(\alpha_1-15T_1)}{r\cos\varphi\cos\alpha_1\sin(\alpha-15T) - r_1\cos\varphi_1\cos\alpha\sin(\alpha_1-15T_1)},$$

woraus leicht die Gleichung

$$39. \quad r\cos\varphi\sin(\alpha-15T)\sin(\alpha_1-A) = r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1-15T_1)\sin(\alpha-A)$$

oder

$$40. \begin{cases} \dfrac{r}{r_1} = \dfrac{\cos\varphi_1\sin(\alpha_1-15T_1)\sin(\alpha-A)}{\cos\varphi\sin(\alpha-15T)\sin(\alpha_1-A)}, \\ \dfrac{r_1}{r} = \dfrac{\cos\varphi\sin(\alpha-15T)\sin(\alpha_1-A)}{\cos\varphi_1\sin(\alpha_1-15T_1)\sin(\alpha-A)} \end{cases}$$

erhalten wird. Also ist

$$\cos\varphi \sin(\alpha_1 - 15T) - \frac{r_1}{r} \cos\varphi_1 \sin(\alpha_1 - 15T_1)$$
$$= \cos\varphi \frac{\sin(\alpha_1 - 15T)\sin(\alpha - A) - \sin(\alpha - 15T)\sin(\alpha_1 - A)}{\sin(\alpha - A)},$$

$$\frac{r}{r_1} \cos\varphi \sin(\alpha - 15T) - \cos\varphi_1 \sin(\alpha - 15T_1)$$
$$= \cos\varphi_1 \frac{\sin(\alpha_1 - 15T_1)\sin(\alpha - A) - \sin(\alpha - 15T_1)\sin(\alpha_1 - A)}{\sin(\alpha_1 - A)};$$

oder, wie man leicht findet,

$$\cos\varphi \sin(\alpha_1 - 15T) - \frac{r_1}{r}\cos\varphi_1 \sin(\alpha_1 - 15T_1) = \cos\varphi \frac{\sin(\alpha-\alpha_1)\sin(A-15T)}{\sin(\alpha-A)},$$

$$\frac{r}{r_1}\cos\varphi \sin(\alpha - 15T) - \cos\varphi_1 \sin(\alpha - 15T_1) = \cos\varphi_1 \frac{\sin(\alpha-\alpha_1)\sin(A-15T_1)}{\sin(\alpha_1-A)};$$

und folglich nach 36.

$$40. \begin{cases} z_1 = r \dfrac{\sin\varphi \sin(\alpha - A) + \cos\varphi \tan\delta \sin(A - 15T)}{\sin(\alpha - A)}, \\ z_1 = r_1 \dfrac{\sin\varphi_1 \sin(\alpha_1 - A) + \cos\varphi_1 \tan\delta_1 \sin(A - 15T_1)}{\sin(\alpha_1 - A)}. \end{cases}$$

Berechnet man die Hülfswinkel ψ und ψ_1 mittelst der Formeln

$$42. \quad \tan\psi = \frac{\tan\delta \sin(A - 15T)}{\sin(\alpha - A)}, \quad \tan\psi_1 = \frac{\tan\delta_1 \sin(A - 15T_1)}{\sin(\alpha_1 - A)};$$

so ist

$$43. \quad z_1 = r\frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi}, \quad z_1 = r_1 \frac{\sin(\varphi_1 + \psi_1)}{\cos\psi_1}.$$

Mittelst der Gleichungen 34. und 40. erhält man auch leicht

$$44. \quad x_1 = r\frac{\cos\varphi \cos A \sin(\alpha - 15T)}{\sin(\alpha - A)}, \quad x_1 = r_1 \frac{\cos\varphi_1 \cos A \sin(\alpha_1 - 15T_1)}{\sin(\alpha_1 - A)}$$

und

$$45. \quad y_1 = r\frac{\cos\varphi \sin A \sin(\alpha - 15T)}{\sin(\alpha - A)}, \quad y_1 = r_1 \frac{\cos\varphi_1 \sin A \sin(\alpha_1 - 15T_1)}{\sin(\alpha_1 - A)};$$

also

$$46. \quad x_1^2 + y_1^2 = r^2 \frac{\cos\varphi^2 \sin(\alpha - 15T)^2}{\sin(\alpha - A)^2} = r_1^2 \frac{\cos\varphi_1^2 \sin(\alpha_1 - 15T_1)^2}{\sin(\alpha_1 - A)^2}.$$

Bezeichnen wir die geocentrische Breite des Punktes der Erdoberfläche, in welchem dieselbe von der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem beobachteten Punkte der Sternschnuppen-Bahn gezogenen geraden Linie geschnitten wird, durch B; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$47. \quad \tan B = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}},$$

d. i. nach 41. und 46.

$$48. \begin{cases} \tan B = \pm \dfrac{\tan\varphi \sin(\alpha - A) + \tan\delta \sin(A - 15T)}{\sin(\alpha - 15T)}, \\ \tan B = \pm \dfrac{\tan\varphi_1 \sin(\alpha_1 - A) + \tan\delta_1 \sin(A - 15T_1)}{\sin(\alpha_1 - 15T_1)}; \end{cases}$$

das Zeichen jederzeit so genommen, dass tang B mit z_1 einerlei Vorzeichen erhält, d. h. so, dass tang B positiv oder negativ wird, jenachdem die Grössen

$$\sin(\alpha - A) \text{ und } \sin\varphi \sin(\alpha - A) + \cos\varphi \operatorname{tang}\delta \sin(A - 15T)$$

oder

$$\sin(\alpha_1 - A) \text{ und } \sin\varphi_1 \sin(\alpha_1 - A) + \cos\varphi_1 \operatorname{tang}\delta_1 \sin(A - 15T_1)$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Auch ist

$$\operatorname{tang} B = \pm \frac{z_1}{x_1 \sqrt{1 + \operatorname{tang} A^2}} = \pm \frac{z_1}{x_1} \cos A,$$

das Zeichen so genommen, dass tang B mit z_1 einerlei Vorzeichen erhält. Nun erhellet aber leicht, dass x_1 und cos A jederzeit gleiche Vorzeichen haben. Folglich ist in völliger Allgemeinheit

$$49.\quad \operatorname{tang} B = \frac{z_1}{x_1} \cos A.$$

Bezeichnet man durch E und E_1 die Entfernungen des beobachteten Punktes der Sternschnuppen-Bahn von den beiden Beobachtungsorten; so ist

$$E = \sqrt{(x_1 - r\cos\varphi\cos 15T)^2 + (y_1 - r\cos\varphi\sin 15T)^2 + (z_1 - r\sin\varphi)^2},$$

$$E_1 = \sqrt{(x_1 - r_1\cos\varphi_1\cos 15T_1)^2 + (y_1 - r_1\cos\varphi_1\sin 15T_1)^2 + (z_1 - r_1\sin\varphi_1)^2};$$

und folglich, weil nach dem Obigen, wie man leicht findet,

$$x_1 - r\cos\varphi\cos 15T = \cos\alpha \frac{r\cos\varphi\sin(\alpha_1 - 15T) - r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1 - 15T_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1)},$$

$$y_1 - r\cos\varphi\sin 15T = \sin\alpha \frac{r\cos\varphi\sin(\alpha_1 - 15T) - r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1 - 15T_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1)},$$

$$z_1 - r\sin\varphi = \operatorname{tang}\delta \frac{r\cos\varphi\sin(\alpha_1 - 15T) - r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1 - 15T_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1)}$$

und

$$x_1 - r_1\cos\varphi_1\cos 15T_1 = \cos\alpha_1 \frac{r\cos\varphi\sin(\alpha - 15T) - r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha - 15T_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1)},$$

$$y_1 - r_1\cos\varphi_1\sin 15T_1 = \sin\alpha_1 \frac{r\cos\varphi\sin(\alpha - 15T) - r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha - 15T_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1)},$$

$$z_1 - r_1\sin\varphi_1 = \operatorname{tang}\delta_1 \frac{r\cos\varphi\sin(\alpha - 15T) - r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha - 15T_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1)}$$

ist,

$$50.\quad \begin{cases} E = \pm \dfrac{r\cos\varphi\sin(\alpha_1 - 15T) - r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1 - 15T_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1)\cos\delta}, \\ E_1 = \pm \dfrac{r\cos\varphi\sin(\alpha - 15T) - r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha - 15T_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1)\cos\delta_1}; \end{cases}$$

die Zeichen so genommen, dass die Grössen auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen positiv werden. Mittelst dieser Formeln erhält man ferner, weil nach dem Obigen

$$\cos\varphi \sin(\alpha_1 - 15T) - \frac{r_1}{r}\cos\varphi_1 \sin(\alpha_1 - 15T_1)$$
$$= \cos\varphi \frac{\sin(\alpha-\alpha_1)\sin(A-15T)}{\sin(\alpha-A)},$$

$$\frac{r}{r_1}\cos\varphi\sin(\alpha-15T) - \cos\varphi_1\sin(\alpha-15T_1)$$
$$= \cos\varphi_1 \frac{\sin(\alpha-\alpha_1)\sin(A-15T_1)}{\sin(\alpha_1-A)}$$

ist, leicht

51. $$E = \pm r \frac{\cos\varphi \sin(A-15T)}{\cos\delta \sin(\alpha-A)},\quad E_1 = \pm r_1 \frac{\cos\varphi_1 \sin(A-15T_1)}{\cos\delta_1 \sin(\alpha_1-A)},$$

die Zeichen so genommen, dass die Grössen auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen positiv werden.

Bezeichnen wir die Entfernung des beobachteten Punktes der Sternschnuppen-Bahn vom Mittelpunkte der Erde durch R; so ist offenbar

$$R\cos B = \sqrt{x_1^2+y_1^2},\quad R = \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\cos B},$$

und folglich nach 46.

52. $$R = \pm r \frac{\cos\varphi \sin(\alpha-15T)}{\cos B \sin(\alpha-A)},\quad R = \pm r_1 \frac{\cos\varphi_1 \sin(\alpha_1-15T_1)}{\cos B \sin(\alpha_1-A)},$$

die Vorzeichen so genommen, dass die Grössen auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen positiv werden.

Man hat also jetzt zur Berechnung aller auf die Lage des beobachteten Punktes der Sternschnuppen-Bahn im Raume Bezug habenden Grössen die folgenden Formeln:

$$\tang A = \frac{r\cos\varphi\sin\alpha_1\sin(\alpha-15T) - r_1\cos\varphi_1\sin\alpha\sin(\alpha_1-15T_1)}{r\cos\varphi\cos\alpha_1\sin(\alpha-15T) - r_1\cos\varphi_1\cos\alpha\sin(\alpha_1-15T_1)},$$

$$x_1 = r\frac{\cos\varphi\cos A\sin(\alpha-15T)}{\sin(\alpha-A)} = r_1\frac{\cos\varphi_1\cos A\sin(\alpha_1-15T_1)}{\sin(\alpha_1-A)},$$

$$y_1 = r\frac{\cos\varphi\sin A\sin(\alpha-15T)}{\sin(\alpha-A)} = r_1\frac{\cos\varphi_1\sin A\sin(\alpha_1-15T_1)}{\sin(\alpha_1-A)},$$

$$\tang\psi = \frac{\tang\delta\sin(A-15T)}{\sin(\alpha-A)},\quad \tang\psi_1 = \frac{\tang\delta_1\sin(A-15T_1)}{\sin(\alpha_1-A)},$$

$$z_1 = r\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} = r_1\frac{\sin(\varphi_1+\psi_1)}{\cos\psi_1},$$

$$\tang B = \frac{z_1}{x_1}\cos A,$$

$$E = \pm r\frac{\cos\varphi\sin(A-15T)}{\cos\delta\sin(\alpha-A)},\quad E_1 = \pm r_1\frac{\cos\varphi_1\sin(A-15T_1)}{\cos\delta_1\sin(\alpha_1-A)},$$

$$R = \pm r\frac{\cos\varphi\sin(\alpha-15T)}{\cos B\sin(\alpha-A)} = \pm r_1\frac{\cos\varphi_1\sin(\alpha_1-15T_1)}{\cos B\sin(\alpha_1-A)};$$

in den Ausdrücken für E, E_1, R die Zeichen so genommen, dass die Grössen auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen positiv werden.

Den Ausdrücken von E und E_1 kann man auch die folgende Gestalt geben:

$$E = \pm r \frac{\cos\varphi \ \mathrm{tang}\ \psi}{\sin\delta}, \quad E_1 = \pm r_1 \frac{\cos\varphi_1 \ \mathrm{tang}\ \psi_1}{\sin\delta_1}.$$

Verlangt man die Coordinaten x_1, y_1, z_1 nicht zu kennen, so stellt man die Formeln am besten unter der folgenden Gestalt dar:

$$\mathrm{tang}\ A = \frac{r\cos\varphi\sin\alpha_1\sin(\alpha-15T) - r_1\cos\varphi_1\sin\alpha\sin(\alpha_1-15T_1)}{r\cos\varphi\cos\alpha_1\sin(\alpha-15T) - r_1\cos\varphi_1\cos\alpha\sin(\alpha_1-15T_1)},$$

$$\mathrm{tang}\ \psi = \frac{\mathrm{tang}\ \delta\sin(A-15T)}{\sin(\alpha-A)}, \quad \mathrm{tang}\ \psi_1 = \frac{\mathrm{tang}\ \delta_1\sin(A-15T_1)}{\sin(\alpha_1-A)},$$

$$\mathrm{tang}\ B = \pm\frac{\sin(\alpha-A)\sin(\varphi+\psi)}{\cos\varphi\cos\psi\sin(\alpha-15T)} = \pm\frac{\sin(\alpha_1-A)\sin(\varphi_1+\psi_1)}{\cos\varphi_1\cos\psi_1\sin(\alpha_1-15T_1)},$$

$$E = \pm r\frac{\cos\varphi\ \mathrm{tang}\ \psi}{\sin\delta}, \quad E_1 = \pm r_1\frac{\cos\varphi_1\ \mathrm{tang}\ \psi_1}{\sin\delta_1},$$

$$R = \pm r\frac{\cos\varphi\sin(\alpha-15T)}{\cos B\sin(\alpha-A)} = \pm r_1\frac{\cos\varphi_1\sin(\alpha_1-15T_1)}{\cos B\sin(\alpha_1-A)}.$$

In den Ausdrücken von tang B müssen die Zeichen so genommen werden, dass tang B positiv oder negativ wird, jenachdem die Grössen $\cos\psi$, $\sin(\varphi+\psi)$ oder $\cos\psi_1$, $\sin(\varphi_1+\psi_1)$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Ohne Schwierigkeit kann man auch nach den folgenden sich leicht aus dem Obigen ergebenden Formeln rechnen:

$$n = \frac{r\cos\varphi\sin(\alpha_1-15T) - r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha_1-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)},$$

$$x_1 = n\cos\alpha + r\cos\varphi\cos 15T,$$

$$y_1 = n\sin\alpha + r\cos\varphi\sin 15T,$$

$$z_1 = n\ \mathrm{tang}\ \delta + r\sin\varphi,$$

$$\mathrm{tang}\ A = \frac{y_1}{x_1},$$

$$\mathrm{tang}\ B = \frac{z_1}{x_1}\cos A,$$

$$E = \pm r\frac{\cos\varphi\sin(A-15T)}{\cos\delta\sin(\alpha-A)},$$

$$E_1 = \pm r_1\frac{\cos\varphi_1\sin(A-15T_1)}{\cos\delta_1\sin(\alpha_1-A)},$$

$$R = \pm r\frac{\cos\varphi\sin(\alpha-15T)}{\cos B\sin(\alpha-A)};$$

oder auch nach den folgenden Formeln:

$$n_1 = \frac{r\cos\varphi\sin(\alpha-15T) - r_1\cos\varphi_1\sin(\alpha-15T_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)},$$

$$x_1 = n_1\cos\alpha_1 + r_1\cos\varphi_1\cos 15T_1,$$

$$y_1 = n_1\sin\alpha_1 + r_1\cos\varphi_1\sin 15T_1,$$

$$z_1 = n_1\ \mathrm{tang}\ \delta_1 + r_1\sin\varphi_1,$$

$$\mathrm{tang}\ A = \frac{y_1}{x_1},$$

$$\text{tang}\, B = \frac{z_1}{x_1} \cos A,$$

$$E = \pm r \frac{\cos \varphi \sin (A - 15T)}{\cos \delta \sin (\alpha - A)},$$

$$E_1 = \pm r_1 \frac{\cos \varphi_1 \sin (A - 15T_1)}{\cos \delta_1 \sin (\alpha_1 - A)},$$

$$R = \pm r_1 \frac{\cos \varphi_1 \sin (\alpha_1 - 15T_1)}{\cos B \sin (\alpha_1 - A)}.$$

Die Vorzeichen in den Ausdrücken von E, E_1, R müssen immer so genommen werden, dass die in Rede stehenden Grössen positiv werden.

§. 5.

Auch bei Beobachtungen, die sich als gleichzeitig erwiesen haben, wird wohl fast nie der Fall eintreten, dass die Bedingungsgleichung 23. genau erfüllt ist, sondern dies wird immer nur näherungsweise Statt finden. Dadurch ist Brandes*) veranlasst worden, bei der Auflösung unserer Aufgabe von einer andern Ansicht auszugehen, indem er nämlich auf den beiden Gesichtslinien die beiden Punkte bestimmt, deren Entfernung von einander ein Minimum ist, und in der Grösse dieser Entfernung zugleich ein Kriterium für die Genauigkeit der Beobachtungen findet.

Die Gleichungen der beiden Gesichtslinien in dem Systeme der $x_1 y_1 z_1$, welches wir hier wieder zum Grunde legen können, sind nach 10.

$$x_1 = z_1 \cos \alpha \cot \delta + r (\cos \varphi \cos 15T - \cos \alpha \cot \delta \sin \varphi),$$

$$y_1 = z_1 \sin \alpha \cot \delta + r (\cos \varphi \sin 15T - \sin \alpha \cot \delta \sin \varphi)$$

und

$$x_1 = z_1 \cos \alpha_1 \cot \delta_1 + r_1 (\cos \varphi_1 \cos 15T_1 - \cos \alpha_1 \cot \delta_1 \sin \varphi_1),$$

$$y_1 = z_1 \sin \alpha_1 \cot \delta_1 + r_1 (\cos \varphi_1 \sin 15T_1 - \sin \alpha_1 \cot \delta_1 \sin \varphi_1).$$

Die Coordinaten der beiden Punkte dieser Linien, deren Abstand von einander ein Minimum ist, seien respective X, Y, Z und X', Y', Z', und der Abstand dieser beiden Punkte von einander sei S; so hat man die folgenden fünf Gleichungen:

$$53. \begin{cases} X = Z \cos \alpha \cot \delta + r (\cos \varphi \cos 15T - \cos \alpha \cot \delta \sin \varphi), \\ Y = Z \sin \alpha \cot \delta + r (\cos \varphi \sin 15T - \sin \alpha \cot \delta \sin \varphi); \end{cases}$$

$$54. \begin{cases} X' = Z' \cos \alpha_1 \cot \delta_1 + r_1 (\cos \varphi_1 \cos 15T_1 - \cos \alpha_1 \cot \delta_1 \sin \varphi_1), \\ Y' = Z' \sin \alpha_1 \cot \delta_1 + r_1 (\cos \varphi_1 \sin 15T_1 - \sin \alpha_1 \cot \delta_1 \sin \varphi_1); \end{cases}$$

$$55. \quad S^2 = (X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2.$$

---

*) Brandes Unterhaltungen für Freunde der Physik und Astronomie. Leipzig, 1826. Heft 1. Die von mir im Folgenden entwickelten Formeln dürften übrigens vor den von Brandes gegebenen Formeln wesentliche Vorzüge haben, so wie denn überhaupt die von mir angewandte Analysis von der sich im Geiste der ältern geometrischen Analysis haltenden Methode von Brandes ganz verschieden ist.

Nach den Bedingungen der Aufgabe müssen X, Y, Z und X', Y', Z' so bestimmt werden, dass S ein Minimum wird. Man kann aber offenbar S als eine Function der beiden von einander unabhängigen veränderlichen Grössen Z und Z' betrachten, und hat also nach den Principien der Differentialrechnung die beiden folgenden Gleichungen:

$$56.\quad \left(\frac{dS}{dZ}\right)=0,\ \left(\frac{dS}{dZ'}\right)=0,$$

wo die Differentialquotienten partielle Differentialquotienten sind. Aus der Gleichung 55. erhält man aber, indem man nur überlegt, dass X und Y bloss von Z, X' und Y' bloss von Z' abhängen, sogleich

$$S\left(\frac{dS}{dZ}\right)=(X-X')\frac{dX}{dZ}+(Y-Y')\frac{dY}{dZ}+Z-Z',$$

$$-S\left(\frac{dS}{dZ'}\right)=(X-X')\frac{dX'}{dZ'}+(Y-Y')\frac{dY'}{dZ'}+Z-Z';$$

und hat also nach 56. die beiden folgenden Bedingungsgleichungen:

$$(X-X')\frac{dX}{dZ}+(Y-Y')\frac{dY}{dZ}+Z-Z'=0,$$

$$(X-X')\frac{dX'}{dZ'}+(Y-Y')\frac{dY'}{dZ'}+Z-Z'=0.$$

Nach 53. und 54. ist aber

$$\frac{dX}{dZ}=\cos\alpha\cot\delta,\ \frac{dY}{dZ}=\sin\alpha\cot\delta;$$

$$\frac{dX'}{dZ'}=\cos\alpha_1\cot\delta_1,\ \frac{dY'}{dZ'}=\sin\alpha_1\cot\delta_1;$$

und folglich

$$57.\ \begin{cases}(X-X')\cos\alpha\cot\delta+(Y-Y')\sin\alpha\cot\delta+Z-Z'=0,\\(X-X')\cos\alpha_1\cot\delta_1+(Y-Y')\sin\alpha_1\cot\delta_1+Z-Z'=0;\end{cases}$$

oder

$$58.\ \begin{cases}(X-X')\cos\alpha+(Y-Y')\sin\alpha+(Z-Z')\tang\delta=0,\\(X-X')\cos\alpha_1+(Y-Y')\sin\alpha_1+(Z-Z')\tang\delta_1=0.\end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen und den vier Gleichungen 53. und 54. sind die sechs Coordinaten X, Y, Z und X', Y', Z' zu bestimmen.

Aus den Gleichungen 57. erhält man ohne alle Schwierigkeit

$$(X-X')(\cos\alpha\cot\delta-\cos\alpha_1\cot\delta_1)+(Y-Y')(\sin\alpha\cot\delta-\sin\alpha_1\cot\delta_1)=0$$

und

$$(X-X')\sin(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1+(Z-Z')(\sin\alpha\cot\delta-\sin\alpha_1\cot\delta_1)=0,$$

$$(Y-Y')\sin(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1-(Z-Z')(\cos\alpha\cot\delta-\cos\alpha_1\cot\delta_1)=0;$$

also

$$59.\quad \frac{Y-Y'}{X-X'}=-\frac{\cos\alpha\cot\delta-\cos\alpha_1\cot\delta_1}{\sin\alpha\cot\delta-\sin\alpha_1\cot\delta_1}=-\frac{\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta_1-\cos\alpha_1\,\mathrm{tang}\,\delta}{\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta_1-\sin\alpha_1\,\mathrm{tang}\,\delta}$$

und

$$60.\quad \begin{cases} X-X'=-\dfrac{\sin\alpha\cot\delta-\sin\alpha_1\cot\delta_1}{\sin(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1}(Z-Z'),\\[2ex] Y-Y'=\dfrac{\cos\alpha\cot\delta-\cos\alpha_1\cot\delta_1}{\sin(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1}(Z-Z') \end{cases}$$

oder

$$61.\quad \begin{cases} X-X'=-\dfrac{\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta_1-\sin\alpha_1\,\mathrm{tang}\,\delta}{\sin(\alpha-\alpha_1)}(Z-Z'),\\[2ex] Y-Y'=\dfrac{\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta_1-\cos\alpha_1\,\mathrm{tang}\,\delta}{\sin(\alpha-\alpha_1)}(Z-Z'). \end{cases}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$62.\quad \begin{cases} A=r(\cos\varphi\cos 15T-\cos\alpha\cot\delta\sin\varphi),\\ A_1=r_1(\cos\varphi_1\cos 15T_1-\cos\alpha_1\cot\delta_1\sin\varphi_1) \end{cases}$$

und

$$63.\quad \begin{cases} B=r(\cos\varphi\sin 15T-\sin\alpha\cot\delta\sin\varphi)\\ B_1=r_1(\cos\varphi_1\sin 15T_1-\sin\alpha_1\cot\delta_1\sin\varphi_1); \end{cases}$$

so ist nach 53. und 54.

$$64.\quad X=Z\cos\alpha\cot\delta+A,\quad Y=Z\sin\alpha\cot\delta+B,$$

$$65.\quad X'=Z'\cos\alpha_1\cot\delta_1+A_1,\quad Y'=Z'\sin\alpha_1\cot\delta_1+B_1$$

und folglich

$$X-X'=A-A_1+Z\cos\alpha\cot\delta-Z'\cos\alpha_1\cot\delta_1,$$
$$Y-Y'=B-B_1+Z\sin\alpha\cot\delta-Z'\sin\alpha_1\cot\delta_1.$$

Führt man dies in die Gleichungen 57. ein, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen zwischen Z und Z':

$$\{(A-A_1)\cos\alpha+(B-B_1)\sin\alpha\}\cot\delta+Z\operatorname{cosec}\delta^2$$
$$-Z'\{1+\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1\}=0,$$
$$\{(A-A_1)\cos\alpha_1+(B-B_1)\sin\alpha_1\}\cot\delta_1-Z'\operatorname{cosec}\delta_1{}^2$$
$$+Z\{1+\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1\}=0;$$

aus denen sich auf dem Wege der gewöhnlichen Elimination ferner die beiden folgenden Gleichungen ergeben:

$$66.\quad \cot\delta\operatorname{cosec}\delta_1{}^2\{(A-A_1)\cos\alpha+(B-B_1)\sin\alpha\}$$
$$-\cot\delta_1\{1+\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1\}\{(A-A_1)\cos\alpha_1+(B-B_1)\sin\alpha_1\}$$
$$=-Z\{\operatorname{cosec}\delta^2\operatorname{cosec}\delta_1{}^2-(1+\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1)^2\},$$

$$67.\quad \cot\delta_1\operatorname{cosec}\delta^2\{(A-A_1)\cos\alpha_1+(B-B_1)\sin\alpha_1\}$$
$$-\cot\delta\{1+\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1\}\{(A-A_1)\cos\alpha+(B-B_1)\sin\alpha\}$$
$$=Z'\{\operatorname{cosec}\delta^2\operatorname{cosec}\delta_1{}^2-(1+\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1)^2\}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch Addition und Subtraction

$$68.\ \cot\delta\cot\delta_1\{\cot\delta_1-\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha+(B-B_1)\sin\alpha\}$$
$$+\cot\delta\cot\delta_1\{\cot\delta-\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta_1\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha_1+(B-B_1)\sin\alpha_1\}$$
$$=-(Z-Z')\ \{\operatorname{cosec}\delta^2\ \operatorname{cosec}\delta_1{}^2-(1+\cos(\alpha-\alpha_1)\ \cot\delta\ \cot\delta_1)^2\},$$

$$69.\ \cot\delta\ \{1+\operatorname{cosec}\delta_1{}^2+\cos(\alpha-\alpha_1)\ \cot\delta\ \cot\delta_1\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha + (B-B_1)\sin\alpha\}$$
$$-\cot\delta_1\ \{1+\operatorname{cosec}\delta^2+\cos(\alpha-\alpha_1)\ \cot\delta\cot\delta_1\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha_1 + (B-B_1)\sin\alpha_1\}$$
$$=-(Z+Z')\ \{\operatorname{cosec}\delta^2\ \operatorname{cosec}\delta_1{}^2-(1+\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\cot\delta_1)^2\};$$

oder, wenn man auf beiden Seiten der vorhergehenden und dieser Gleichungen mit $\sin\delta^2\ \sin\delta_1{}^2$ multiplicirt:

$$70.\quad -Z\ \{1-(\sin\delta\ \sin\delta_1+\cos\delta\ \cos\delta_1\ \cos(\alpha-\alpha_1))^2\}$$
$$=\sin\delta\ \cos\delta\ \{(A-A_1)\ \cos\alpha+(B-B_1)\ \sin\alpha\}$$
$$-\sin\delta\cos\delta_1\ \{\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha_1 + (B-B_1)\sin\alpha_1\},$$

$$71.\quad Z'\ \{1-(\sin\delta\ \sin\delta_1+\cos\delta\ \cos\delta_1\ \cos(\alpha-\alpha_1))^2\}$$
$$=\sin\delta_1\ \cos\delta_1\ \{(A-A_1)\ \cos\alpha_1+(B-B_1)\ \sin\alpha_1\}$$
$$-\cos\delta\sin\delta_1\ \{\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\ \cos(\alpha-\alpha_1)\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha + (B-B_1)\sin\alpha\}$$

und

$$72.\quad -(Z-Z')\ \{1-(\sin\delta\ \sin\delta_1+\cos\delta\ \cos\delta_1\ \cos(\alpha-\alpha_1))^2\}$$
$$=\cos\delta\cos\delta_1\ \{\sin\delta\cos\delta_1-\cos\delta\sin\delta_1\ \cos(\alpha-\alpha_1)\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha + (B-B_1)\sin\alpha\}$$
$$+\cos\delta\cos\delta_1\ \{\cos\delta\sin\delta_1-\sin\delta\cos\delta_1\ \cos(\alpha-\alpha_1)\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha_1 + (B-B_1)\sin\alpha_1\},$$

$$73.\quad -(Z+Z')\ \{1-(\sin\delta\ \sin\delta_1+\cos\delta\ \cos\delta_1\ \cos(\alpha-\alpha_1))^2\}$$
$$=\cos\delta\ \{\sin\delta+\sin\delta_1\ (\sin\delta\ \sin\delta_1+\cos\delta\ \cos\delta_1\ \cos(\alpha-\alpha_1))\}\ \{(A-A_1)\ \cos\alpha+(B-B_1)\ \sin\alpha\}$$
$$-\cos\delta_1\ \{\sin\delta_1+\sin\delta\ (\sin\delta\ \sin\delta_1+\cos\delta\ \cos\delta_1\ \cos(\alpha-\alpha_1))\}\ \{(A-A_1)\cos\alpha_1+(B-B_1)\sin\alpha_1\}.$$

Nach 61. ist

$$(X-X')^2+(Y-Y')^2=\frac{\operatorname{tang}\delta^2+\operatorname{tang}\delta_1{}^2-2\operatorname{tang}\delta\operatorname{tang}\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)}{\sin(\alpha-\alpha_1)^2}(Z-Z')^2,$$

und folglich nach 55., wie man leicht findet,

$$S^2=\frac{1-\{\sin\delta\ \sin\delta_1+\cos\delta\ \cos\delta_1\ \cos(\alpha-\alpha_1)\}^2}{\cos\delta^2\ \cos\delta_1{}^2\ \sin(\alpha-\alpha_1)^2}\ (Z-Z')^2,$$

oder

$$74.\quad S=\pm(Z-Z')\frac{\sqrt{1-\{\sin\delta\ \sin\delta_1+\cos\delta\ \cos\delta_1\ \cos(\alpha-\alpha_1)\}^2}}{\cos\delta\ \cos\delta_1\ \sin(\alpha-\alpha_1)},$$

das Zeichen immer so genommen, dass S positiv wird.

Wir haben nun alle zur Berechnung von X, Y, Z und

X', Y', Z' und S nöthigen Formeln. Durch Einführung zweier Hülfswinkel kann man sich jedoch die Rechnung noch bedeutend erleichtern. Weil nämlich

$$\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)$$
$$=\sin\delta\,\{\sin\delta_1+\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta\}$$

ist; so ist, wenn man

$$75.\quad \cot\xi=\cos(\alpha-\alpha_1)\cot\delta$$

setzt,

$$76.\quad \sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1)=\frac{\sin\delta}{\sin\xi}\cos(\delta_1-\xi).$$

Auf folgende Art kann aber leicht gezeigt werden, dass überhaupt der absolute Werth von

$$\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

nie grösser als die Einheit ist, was auch a, b, C sein mögen.

Sowohl der absolute Werth von $\cos a\cos b$, als auch der absolute Werth von $\sin a\sin b\cos C$ ist niemals grösser als die Einheit.

Haben also die Grössen $\cos a\cos b$ und $\sin a\sin b\cos C$ entgegengesetzte Vorzeichen, so ist offenbar der absolute Werth von

$$\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

nicht grösser als die Einheit.

Haben aber die Grössen $\cos a\cos b$ und $\sin a\sin b\cos C$ gleiche Vorzeichen, so seien dieselben zuerst beide positiv. Dann ist offenbar, wenn $\sin a\sin b$ positiv ist,

$$\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C \overline{\overline{<}} \cos a\cos b+\sin a\sin b,$$

d. i.

$$\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C \overline{\overline{<}} \cos(a-b),$$

woraus das zu Beweisende folgt. Wenn aber $\sin a\sin b$ negativ ist, so ist offenbar

$$\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C \overline{\overline{<}} \cos a\cos b-\sin a\sin b,$$

d. i.

$$\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C \overline{\overline{<}} \cos(a+b),$$

woraus wieder das zu Beweisende folgt.

Wenn ferner die Grössen $\cos a\cos b$ und $\sin a\sin b\cos C$ beide negativ sind; so sind die Grössen $\cos(180^\circ+a)\cos b$ und $\sin(180^\circ+a)\sin b\cos C$ beide positiv, und nach dem Vorhergehenden ist folglich

$$\cos(180^\circ+a)\cos b+\sin(180^\circ+a)\sin b\cos C \overline{\overline{<}} 1,$$

d. i.

$$-\cos a\cos b-\sin a\sin b\cos C \overline{\overline{<}} 1.$$

Es ist aber

$$-\cos a \cos b - \sin a \sin b \cos C$$

der absolute Werth von

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

und hierdurch folglich auch in diesem Falle unser Satz bewiesen, so dass derselbe also jetzt allgemein bewiesen ist.

Dass auch der absolute Werth von

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b \cos C$$

niemals grösser als die Einheit ist, ergiebt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar, wenn man, was verstattet ist, $-a$ für a setzt.

Dass auch der absolute Werth von

$$\sin a \sin b \pm \cos a \cos b \cos C$$

niemals grösser als die Einheit ist, folgt aus dem Vorhergehenden sogleich, wenn man für a und b respective $90^\circ - a$ und $90^\circ - b$ setzt.

Weil also hiernach der absolute Werth von

$$\sin \delta \sin \delta_1 + \cos \delta \cos \delta_1 \cos (\alpha - \alpha_1) = \frac{\sin \delta}{\sin \xi} \cos (\delta_1 - \xi)$$

nicht grösser als die Einheit ist, so kann man den Hülfswinkel ψ mittelst der Formel

$$77. \quad \cos \psi = \frac{\sin \delta}{\sin \xi} \cos (\delta_1 - \xi)$$

berechnen.

Alles dieses vorausgesetzt, haben wir nur zur Berechnung der gesuchten Grössen die folgenden aus dem Obigen sich leicht ergebenden Formeln:

$$A = r (\cos \varphi \cos 15 T - \cos \alpha \cot \delta \sin \varphi),$$

$$B = r (\cos \varphi \sin 15 T - \sin \alpha \cot \delta \sin \varphi),$$

$$A_1 = r_1 (\cos \varphi_1 \cos 15 T_1 - \cos \alpha_1 \cot \delta_1 \sin \varphi_1),$$

$$B_1 = r_1 (\cos \varphi_1 \sin 15 T_1 - \sin \alpha_1 \cot \delta_1 \sin \varphi_1),$$

$$K = (A - A_1) \cos \alpha + (B - B_1) \sin \alpha,$$

$$K_1 = (A - A_1) \cos \alpha_1 + (B - B_1) \sin \alpha_1,$$

$$-Z \sin \psi^2 = \sin \delta (K \cos \delta - K_1 \cos \delta_1 \cos \psi),$$

$$Z' \sin \psi^2 = \sin \delta_1 (K_1 \cos \delta_1 - K \cos \delta \cos \psi),$$

$$X = A + Z \cos \alpha \cot \delta, \quad Y = B + Z \sin \alpha \cot \delta;$$

$$X' = A_1 + Z' \cos \alpha_1 \cot \delta_1, \quad Y' = B_1 + Z' \sin \alpha_1 \cot \delta_1;$$

$$S = \pm \frac{(Z - Z') \sin \psi}{\cos \delta \cos \delta_1 \sin (\alpha - \alpha_1)},$$

wo in der letzten Formel das Zeichen immer so genommen werden muss, dass S positiv wird.

Was man nun noch zu wissen verlangt, lässt sich mittelst der durch die vorhergehenden Formeln bekannt gewordenen Grössen mit Hülfe der bekannten Formeln der analytischen Geometrie immer ohne Schwierigkeit finden. Bezeichnen wir nämlich z. B. durch L und L' die geocentrischen Breiten der Punkte der Erdoberfläche, in denen dieselbe von den von dem Mittelpunkte der Erde nach den Punkten (XYZ) und $X'Y'Z')$ gezogenen geraden Linien geschnitten wird, und durch R und R' die Entfernungen der Punkte (XYZ) und $(X'Y'Z')$ vom Mittelpunkte der Erde; so ist

$$78.\quad \text{tang}\, L = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}},\ \text{tang}\, L' = \frac{Z'}{\sqrt{X'^2+Y'^2}}$$

und

$$79.\quad R = \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\cos L},\ R' = \frac{\sqrt{X'^2+Y'^2}}{\cos L'},$$

oder nach dem Vorhergehenden

$$80.\quad R = \frac{Z}{\sin L},\ R' = \frac{Z'}{\sin L'}.$$

Um sich die Berechnung von L und L' mittelst der Formeln 78. zu erleichtern, berechne man zwei Hülfswinkel Θ und Θ' mittelst der Formeln

$$81.\quad \text{tang}\, \Theta = \frac{Y}{X},\ \text{tang}\, \Theta' = \frac{Y'}{X'};$$

dann ist

$$82.\quad \text{tang}\, L = \pm \frac{Z}{X} \cos\Theta,\ \text{tang}\, L' = \pm \frac{Z'}{X'} \cos\Theta',$$

wo die Zeichen immer so zu nehmen sind, dass tang L und tang L' respective mit Z und Z' gleiche Vorzeichen erhalten.

Sind E und E'_1 die Entfernungen der Punkte (XYZ) und $(X'Y'Z')$ von den beiden Beobachtungsorten, deren geocentrische Breiten φ und φ_1 sind; so ist

$$E = \sqrt{(X - r\cos\varphi\cos 15T)^2 + (Y - r\cos\varphi\sin 15T)^2 + (Z - r\sin\varphi)^2},$$

$$E_1' = \sqrt{(X' - r_1 \text{cs}\varphi_1 \text{cs} 15T_1)^2 + (Y' - r_1 \text{cs}\varphi_1 \sin 15T_1)^2 + (Z' - r_1 \sin\varphi_1)^2};$$

und folglich, wie man mittelst des Obigen leicht findet,

$$83.\quad E = \pm \frac{Z - r\sin\varphi}{\sin\delta},\ E'_1 = \pm \frac{Z' - r_1 \sin\varphi_1}{\sin\delta_1},$$

die Zeichen so genommen, dass die Grössen E und E_1' positiv werden.

§. 6.

In neuester Zeit haben Quetelet*) und Bessel**) eine andere Berechnungsart der Sternschnuppen in Vorschlag gebracht, bei

---

*) Correspondance mathém. et physiqne publiée par A. Quetelet. Tom. IX. Bruxelles. 1837. p. 189. Uebrigens ist die folgende Analysis nebst den Formeln von der Herrn Quetelets ganz verschieden.

**) Schumachers astronomische Nachrichten. Band XVI. Altona. 1839. S. 321. Ueber diese wichtige Abhandlung wird späterhin, wie schon oben erwähnt worden ist, eine ausführliche Relation in dem Archive geliefert werden. Hier mag nur erwähnt werden, dass sich Bessel durchaus bloss der sphärischen Trigonometrie auf eine äusserst elegante Weise bedient, und zu höchst eleganten Formeln gelangt.

welcher angenommen wird, dass die Bahn einer Sternschnuppe während der immer nur sehr kurzen Dauer ihrer Sichtbarkeit eine gerade Linie ist. Zugleich setzt diese Berechnungsart voraus, dass an jedem der beiden Beobachtungsorte sowohl der Punkt des Entstehens, als auch der Punkt des Erlöschens der Sternschnuppe beobachtet worden ist, so dass man also an jedem der beiden Beobachtungsorte die Rectascension und Declination dieser beiden Punkte erhält. Die immer sehr kleine Zwischenzeit zwischen dem Entstehen und Erlöschen wird unberücksichtigt gelassen oder als verschwindend betrachtet, und daher die Erde während der ganzen Dauer des Phänomens als ruhend im Raume angenommen, weshalb wir also auch jetzt das Coordinatensystem der $x_1 y_1 z_1$ werden zum Grunde legen können. Durch jeden Beobachtungsort und die beiden von demselben nach der Sternschnuppen-Bahn gezogenen Gesichtslinien wird eine Ebene gelegt, und die Sternschnuppen-Bahn als die Durchschnittslinie der beiden auf diese Weise erhaltenen Ebenen betrachtet. Diese Berechnungsart hat offenbar den Vortheil, dass bei ihr nicht angenommen wird, dass die Sternschnuppe von beiden Beobachtern gleichzeitig entstehend und gleichzeitig erlöschend gesehen wird, eine Annahme, die allerdings nur unter der Voraussetzung eines ganz plötzlichen Entstehens und Erlöschens der Sternschnuppen zulässig ist, gegen deren Richtigkeit namentlich Bessel sehr gegründete Zweifel erhoben, und eben deshalb die vorher in kurzen Umrissen dargelegte neue Berechnungsart in Vorschlag gebracht hat, die allerdings auch geometrisch genau ist, insofern man die Bahnen der Sternschnuppen während der Dauer ihrer Sichtbarkeit als geradlinig und die Zwischenzeit zwischen den Momenten des Entstehens und Erlöschens als verschwindend, die Erde also während dieser Zeit als ruhend im Raume betrachten darf.

Indem wir nun den so eben in der Kürze vorgezeichneten Weg etwas weiter verfolgen wollen, bezeichnen wir, alle übrigen im Vorhergehenden gebrauchten Symbole auch jetzt beibehaltend, die Rectascension und Declination der Punkte des Entstehens und Erlöschens an dem einen Beobachtungsorte durch α, δ und α', δ', an dem andern Beobachtungsorte durch α_1, δ_1 und α_1', δ_1'.

Fassen wir zunächst bloss den ersten Beobachtungsort in's Auge und setzen der Kürze wegen

$$84. \begin{cases} A = r\,(\cos\varphi\,\cos 15T - \cos\alpha\,\cot\delta\,\sin\varphi), \\ B = r\,(\cos\varphi\,\sin 15T - \sin\alpha\,\cot\delta\,\sin\varphi), \\ A' = r\,(\cos\varphi\,\cos 15T - \cos\alpha'\,\cot\delta'\,\sin\varphi), \\ B' = r\,(\cos\varphi\,\sin 15T - \sin\alpha'\,\cot\delta'\,\sin\varphi); \end{cases}$$

so sind nach 10. die Gleichungen der beiden nach der Sternschnuppen-Bahn gezogenen Gesichtslinien

$$85.\quad x_1 = z_1\,\cos\alpha\,\cot\delta + A,\quad y_1 = z_1\,\sin\alpha\,\cot\delta + B$$

und

$$86.\quad x_1 = z_1\,\cos\alpha'\,\cot\delta' + A',\quad y_1 = z_1\,\sin\alpha'\,\cot\delta' + B'.$$

Die Gleichung der durch diese beiden Gesichtslinien bestimmten Ebene sei

$$87.\quad Cx_1 - Dy_1 - Ez_1 - F = 0;$$

so ist nach 85. und 86. für jedes z_1

$$(C \cos\alpha \cot\delta - D \sin\alpha \cot\delta - E)\, z_1 + AC - BD - F = 0,$$
$$(C \cos\alpha' \cot\delta' - D \sin\alpha' \cot\delta' - E)\, z_1 + A'C - B'D - F = 0;$$

und folglich

$$C \cos\alpha \cot\delta - D \sin\alpha \cot\delta - E = 0,$$
$$C \cos\alpha' \cot\delta' - D \sin\alpha' \cot\delta' - E = 0$$

und

$$AC - BD - F = 0,$$
$$A'C - B'D - F = 0.$$

Also ist

$$(A - A')\, C - (B - B')\, D = 0,$$
$$(\cos\alpha \cot\delta - \cos\alpha' \cot\delta')\, C - (\sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha' \cot\delta')\, D = 0;$$

und folglich

$$D = \frac{A - A'}{B - B'}\, C = \frac{\cos\alpha \cot\delta - \cos\alpha' \cot\delta'}{\sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha' \cot\delta'}\, C.$$

Ferner findet man leicht

$$E = \frac{\sin(\alpha - \alpha') \cot\delta \cot\delta'}{\sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha' \cot\delta'}\, C$$

und

$$F = -\frac{AB' - A'B}{B - B'}\, C$$

oder

$$F = \frac{A(\sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha' \cot\delta') - B(\cos\alpha \cot\delta - \cos\alpha' \cot\delta')}{\sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha' \cot\delta'}\, C.$$

Daher kann man

$$C = \sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha' \cot\delta',$$
$$D = \cos\alpha \cot\delta - \cos\alpha' \cot\delta',$$
$$E = \sin(\alpha - \alpha') \cot\delta \cot\delta',$$
$$F = AC - BD$$

setzen.

Setzt man also jetzt für den einen Beobachtungsort

$$88.\quad \begin{cases} A = r(\cos\varphi \cos 15T - \cos\alpha \cot\delta \sin\varphi), \\ B = r(\cos\varphi \sin 15T - \sin\alpha \cot\delta \sin\varphi), \\ A' = r(\cos\varphi \cos 15T - \cos\alpha' \cot\delta' \sin\varphi), \\ B' = r(\cos\varphi \sin 15T - \sin\alpha' \cot\delta' \sin\varphi), \\ C = \sin\alpha \cot\delta - \sin\alpha' \cot\delta', \\ D = \cos\alpha \cot\delta - \cos\alpha' \cot\delta', \\ E = \sin(\alpha - \alpha') \cot\delta \cot\delta' \end{cases}$$

und für den andern Beobachtungsort

$$89.\ \begin{cases} A_1 = r_1\ (\cos\varphi_1\ \cos 15T_1 - \cos\alpha_1\ \cot\delta_1\ \sin\varphi_1), \\ B_1 = r_1\ (\cos\varphi_1\ \sin 15T_1 - \sin\alpha_1\ \cot\delta_1\ \sin\varphi_1), \\ A_1' = r_1\ (\cos\varphi_1\ \cos 15T_1 - \cos\alpha_1'\ \cot\delta_1'\ \sin\varphi_1), \\ B_1' = r_1\ (\cos\varphi_1\ \sin 15T_1 - \sin\alpha_1'\ \cot\delta_1'\ \sin\varphi_1), \\ C_1 = \sin\alpha_1\ \cot\delta_1 - \sin\alpha_1'\ \cot\delta_1', \\ D_1 = \cos\alpha_1\ \cot\delta_1 - \cos\alpha_1'\ \cot\delta_1', \\ E_1 = \sin(\alpha_1 - \alpha_1')\ \cot\delta_1\ \cot\delta_1'; \end{cases}$$

so sind die Gleichungen der beiden durch die Beobachtungsorte und die entsprechenden Gesichtslinien gelegten Ebenen

$$90.\ \begin{cases} Cx_1 - Dy_1 - Ez_1 - AC + BD = 0, \\ C_1x_1 - D_1y_1 - E_1z_1 - A_1C_1 + B_1D_1 = 0; \end{cases}$$

oder

$$91.\ \begin{cases} C(x_1 - A) - D(y_1 - B) - Ez_1 = 0, \\ C_1(x_1 - A_1) - D_1(y_1 - B_1) - E_1z_1 = 0; \end{cases}$$

und diese Gleichungen sind also auch zugleich die Gleichungen der Durchschnittslinie der beiden in Rede stehenden Ebenen, d. i. die Gleichungen der Sternschnuppen-Bahn. Eliminirt man aus diesen Gleichungen nach der Reihe z_1, y_1, x_1, so erhält man die drei folgenden Gleichungen:

$$92.\ \begin{cases} (CE_1 - C_1E)x_1 - (DE_1 - D_1E)y_1 - (AC - BD)E_1 \\ \qquad + (A_1C_1 - B_1D_1)E = 0, \\ (CD_1 - C_1D)x_1 + (DE_1 - D_1E)z_1 - (AC - BD)D_1 \\ \qquad + (A_1C_1 - B_1D_1)D = 0, \\ (CD_1 - C_1D)y_1 + (CE_1 - C_1E)z_1 - (AC - BD)C_1 \\ \qquad + (A_1C_1 - B_1D_1)C = 0; \end{cases}$$

welche die Gleichungen der Projectionen der Sternschnuppen-Bahn auf den drei Coordinatenebenen sind. Die Gleichungen der Projectionen einer durch den Anfang der Coordinaten, d. i. den Mittelpunkt der Erde, gelegten, der Sternschnuppen-Bahn parallelen geraden Linie sind:

$$93.\ \begin{cases} (CE_1 - C_1E)x_1 - (DE_1 - D_1E)y_1 = 0, \\ (CD_1 - C_1D)x_1 + (DE_1 - D_1E)z_1 = 0, \\ (CD_1 - C_1D)y_1 + (CE_1 - C_1E)z_1 = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet R die Rectascension des Punktes der Sphäre, in welchem dieselbe von dem auf der positiven Seite der Ebene der x_1z_1 liegenden Theile der in Rede stehenden Linie geschnitten wird; so ist, weil

$$y_1 = \frac{CE_1 - C_1E}{DE_1 - D_1E}\, x_1$$

ist, nach den Principien der analytischen Geometrie

$$94.\ \ \tang R = \frac{CE_1 - C_1E}{DE_1 - D_1E},$$

wobei man zu beachten hat, dass R immer positiv und offenbar nie grösser als 180° ist.

Ferner sei Δ die Declination des Punktes, in welchem die Sphäre von dem auf der positiven Seite der Ebene der $x_1 z_1$ liegenden Theile der durch den Anfang der Coordinaten mit der Sternschnuppen-Bahn parallel gezogenen geraden Linie geschnitten wird, wobei man nicht zu übersehen hat, dass Δ positiv oder negativ ist, jenachdem der in Rede stehende Theil der durch den Anfang der Coordinaten mit der Sternschnuppen-Bahn parallel gezogenen geraden Linie auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der $x_1 y_1$ liegt, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$\sin \Delta^2 = \frac{(CD_1 - C_1 D)^2}{(CD_1 - C_1 D)^2 + (CE_1 - C_1 E)^2 + (DE_1 - D_1 E)^2},$$

und folglich

$$\operatorname{tang} \Delta^2 = \frac{(CD_1 - C_1 D)^2}{(CE_1 - C_1 E)^2 + (DE_1 - D_1 E)^2},$$

also nach 94., wie man leicht findet,

$$95. \quad \operatorname{tang} \Delta^2 = \left(\frac{CD_1 - C_1 D}{DE_1 - D_1 E}\right)^2 . \cos R^2.$$

Nach 93. ist

$$\frac{z_1}{x_1} = -\frac{CD_1 - C_1 D}{DE_1 - D_1 E}$$

die Gleichung der Projection der durch den Anfang der Coordinaten mit der Sternschnuppen-Bahn parallel gezogenen geraden Linie auf der Ebene der $x_1 z_1$.

Ist nun zuvörderst $R < 90°$, also $\cos R$ positiv, so ist offenbar Δ, und folglich auch $\operatorname{tang} \Delta$, positiv oder negativ, jenachdem in obiger Gleichung x_1 und z_1 gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, d. i. $\frac{z_1}{x_1}$ oder

$$-\frac{CD_1 - C_1 D}{DE_1 - D_1 E}$$

positiv oder negativ ist, und folglich nach 95. in diesem Falle offenbar

$$\operatorname{tang} \Delta = -\frac{CD_1 - C_1 D}{DE_1 - D_1 E} \cos R.$$

Wenn ferner $R > 90°$, also $\cos R$ negativ ist, so ist offenbar Δ, und folglich auch $\operatorname{tang} \Delta$, positiv oder negativ, jenachdem in obiger Gleichung x_1 und z_1 ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben, d. i. $\frac{z_1}{x_1}$ oder

$$-\frac{CD_1 - C_1 D}{DE_1 - D_1 E}$$

negativ oder positiv ist, und nach 95. ist also in diesem Falle offenbar wieder

$$\operatorname{tang} \Delta = -\frac{CD_1 - C_1 D}{DE_1 - D_1 E} \cos R.$$

Daher ist in völliger Allgemeinheit

$$96. \quad \tang \Delta = -\frac{CD_1 - C_1D}{DE_1 - D_1E} \cos R.$$

Bezeichnen X, Y die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Sternschnuppen-Bahn mit der Ebene der x_1y_1 oder mit der Ebene des Aequators; so ist nach 92.

$$97. \quad \begin{cases} X = \dfrac{(AC - BD)D_1 - (A_1C_1 - B_1D_1)D}{CD_1 - C_1D}, \\ Y = \dfrac{(AC - BD)C_1 - (A_1C_1 - B_1D_1)C}{CD_1 - C_1D}; \end{cases}$$

und durch die Formeln 94., 96. und 97. ist nun offenbar die Lage der Sternschnuppen-Bahn im Raume vollständig bestimmt.

Zur Bestimmung von X und Y erhält man auch aus den Gleichungen 90., wenn man in denselben $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $z_1 = 0$ setzt,

$$C(X - A) = D(Y - B),$$
$$C_1(X - A_1) = D_1(Y - B_1).$$

Also ist

$$\frac{C}{D}(X - A) = Y - B_1 - (B - B_1),$$

und folglich

$$\frac{C}{D}(X - A) = \frac{C_1}{D_1}(X - A_1) - (B - B_1)$$

oder

$$\frac{C}{D}(X - A) - \frac{C_1}{D_1}(X - A_1) = -(B - B_1),$$

und folglich

$$\left(\frac{C}{D} - \frac{C_1}{D_1}\right)(X - A) = (A - A_1)\frac{C_1}{D_1} - (B - B_1)$$

oder

$$-\left(1 - \frac{CD_1}{DC_1}\right)(X - A) = A - A_1 - (B - B_1)\frac{D_1}{C_1},$$

also

$$X - A = -\frac{A - A_1 - (B - B_1)\dfrac{D_1}{C_1}}{1 - \dfrac{CD_1}{DC_1}}$$

oder

$$X - A = -(A - A_1) \cdot \frac{1 - \dfrac{B - B_1}{A - A_1} \cdot \dfrac{D_1}{C_1}}{1 - \dfrac{C}{D} \cdot \dfrac{D_1}{C_1}},$$

und folglich

$$X = A - (A - A_1) \cdot \frac{1 - \dfrac{B - B_1}{A - A_1} \cdot \dfrac{D_1}{C_1}}{1 - \dfrac{C}{D} \cdot \dfrac{D_1}{C_1}}.$$

Die Grösse Y findet man dann ferner mittelst der Ausdrücke

$$Y = B + \frac{C}{D}(X - A) = B_1 + \frac{C_1}{D_1}(X - A_1).$$

Berechnet man die Hülfswinkel ξ, ψ, ψ_1 mittelst der Formeln

$$98.\quad \operatorname{tang} \xi = \frac{B - B_1}{A - A_1},\ \operatorname{tang} \psi = \frac{D}{C},\ \operatorname{tang} \psi_1 = \frac{D_1}{C_1};$$

so ist

$$X = A - (A - A_1) \cdot \frac{1 - \operatorname{tang} \xi \operatorname{tang} \psi_1}{1 - \cot \psi \operatorname{tang} \psi_1}$$

oder

$$X = A - (A - A_1) \frac{\sin \psi \cos (\xi + \psi_1)}{\cos \xi \sin (\psi - \psi_1)},$$

und folglich

$$Y = B - (A - A_1) \frac{\sin \psi \cos (\xi + \psi_1)}{\cos \xi \sin (\psi - \psi_1)} \cot \psi,$$

d. i.

$$Y = B - (A - A_1) \frac{\cos \psi \cos (\xi + \psi_1)}{\cos \xi \sin (\psi - \psi_1)}.$$

Daher hat man jetzt zur Berechnung von X, Y die Formeln

$$99.\quad \begin{cases} X = A - (A - A_1) \dfrac{\sin \psi \cos (\xi + \psi_1)}{\cos \xi \sin (\psi - \psi_1)}, \\ Y = B - (A - A_1) \dfrac{\cos \psi \cos (\xi + \psi_1)}{\cos \xi \sin (\psi - \psi_1)}; \end{cases}$$

oder, wenn man

$$100.\quad K = \frac{(A - A_1) \cos (\xi + \psi_1)}{\cos \xi \sin (\psi - \psi_1)}$$

setzt, die Formeln

$$101.\quad X = A - K \sin \psi,\ Y = B - K \cos \psi.$$

Die kürzeste Entfernung P des Mittelpunkts der Erde von der Sternschnuppen-Bahn, oder die Länge des von dem Mittelpunkte der Erde auf die Sternschnuppen-Bahn gefällten Perpendikels kann man auf folgende Art finden.

Die Gleichung der von dem Mittelpunkte der Erde durch den Durchschnittspunkt der Sternschnuppen-Bahn mit der Ebene des Aequators gezogenen geraden Linie ist nach dem Obigen

$$102.\quad y_1 = \frac{Y}{X} x_1,$$

oder, wenn wir

$$103.\quad \operatorname{tang} \Omega = \frac{Y}{X}$$

setzen, so sind vielmehr

$$104.\quad y_1 = x_1 \operatorname{tang} \Omega,\ z_1 = 0$$

die beiden Gleichungen der in Rede stehenden Linie. Weil ferner nach 94. und 96.

$$\frac{CE_1 - C_1E}{DE_1 - D_1E} = \text{tang}\, R,\ \frac{CD_1 - C_1D}{DE_1 - D_1E} = -\frac{\text{tang}\, \Delta}{\cos R}$$

ist; so sind nach 93.

$$105.\quad y_1 = x_1 \text{ tang } R,\ z_1 = \frac{\text{tang}\, \Delta}{\cos R}\, x_1$$

die Gleichungen der durch den Mittelpunkt der Erde mit der Sternschnuppen-Bahn parallel gezogenen geraden Linie. Bezeichnen wir nun jeden der beiden 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die Sternschnuppen-Bahn mit der durch den Mittelpunkt der Erde und ihren Durchschnittspunkt mit der Ebene des Aequators gezogenen Linie einschliesst, durch Θ; so ist vermöge der Gleichungen 104. und 105. nach den Principien der analytischen Geometrie

$$\cos \Theta = \pm \frac{1 + \text{tang}\, R\, \text{tang}\, \Omega}{\sqrt{(1 + \text{tang}\, \Omega^2)\,(1 + \text{tang}\, R^2 + \frac{\text{tang}\, \Delta^2}{\cos R^2})}},$$

und folglich, wenn man im Zähler und Nenner mit $\cos R \cos \Omega$ multiplicirt,

$$106.\quad \cos \Theta = \pm \cos \Delta \cos (R - \Omega).$$

Auf der Stelle erhellet nun aber, dass

$$P = \sin \Theta \sqrt{X^2 + Y^2} = \pm X \sin \Theta \sqrt{1 + \text{tang}\, \Omega^2},$$

und folglich

$$107.\quad P = \pm \frac{\sin \Theta}{\cos \Omega}\, X$$

ist, wo das Zeichen immer so genommen werden muss, dass P positiv wird.

Die Gleichungen 92. der Sternschnuppen-Bahn können nun auch auf folgenden einfachern Ausdruck gebracht werden.

Zuerst erhält man aus 92. und 97. auf der Stelle die Gleichungen

$$(CD_1 - C_1D)\,(x_1 - X) + (DE_1 - D_1E)z_1 = 0,$$
$$(CD_1 - C_1D)\,(y_1 - Y) + (CE_1 - C_1E)z_1 = 0.$$

Ferner ist nach 94. und 96.

$$CE_1 - C_1E = (DE_1 - D_1E) \text{ tang } R,$$
$$DE_1 - D_1E = -(CD_1 - C_1D) \cos R \cot \Delta,$$

und folglich

$$CE_1 - C_1E = -(CD_1 - C_1D) \sin R \cot \Delta.$$

Führt man diese Ausdrücke von $DE_1 - D_1E$ und $CE_1 - C_1E$ nun in die obigen Gleichungen ein, so erhält man

$$x_1 - X - z_1 \cos R \cot \Delta = 0,\ y_1 - Y - z_1 \sin R \cot \Delta = 0$$

oder

$$108.\quad x_1 = X + z_1 \cos R \cot \Delta,\ y_1 = Y + z_1 \sin R \cot \Delta,$$

welches die Gleichungen der Sternschnuppen-Bahn sind. Auch erhält man leicht

$$(x_1 - X) \sin R = (y_1 - Y) \cos R$$

oder

$$109. \quad x_1 \sin R - y_1 \cos R = X \sin R - Y \cos R.$$

Die Gleichungen der von dem Beobachtungsorte, dessen geocentrische Breite φ ist, nach dem Punkte der Sphäre, dessen Rectascension und Declination wir durch α und δ bezeichnet haben, gezogenen Gesichtslinie sind nach 85.

$$x_1 = A + z_1 \cos \alpha \cot \delta,\; y_1 = B + z_1 \sin \alpha \cot \delta.$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser geraden Linie mit der Sternschnuppen-Bahn durch ξ, η, ζ; so haben wir zur Bestimmung dieser Grössen nach dem Vorhergehenden die folgenden Gleichungen:

$$110. \begin{cases} \xi = A + \zeta \cos \alpha \cot \delta,\; \eta = B + \zeta \sin \alpha \cot \delta; \\ \xi = X + \zeta \cos R \cot \Delta,\; \eta = Y + \zeta \sin R \cot \Delta; \end{cases}$$

aus denen sich leicht

$$111. \quad \zeta = -\frac{A - X}{\cos \alpha \cot \delta - \cos R \cot \Delta} = -\frac{B - Y}{\sin \alpha \cot \delta - \sin R \cot \Delta}$$

ergiebt. Diese Ausdrücke reichen in Verbindung mit den Formeln

$$112. \begin{cases} \xi = A + \zeta \cos \alpha \cot \delta = X + \zeta \cos R \cot \Delta, \\ \eta = B + \zeta \sin \alpha \cot \delta = Y + \zeta \sin R \cot \Delta \end{cases}$$

oder

$$113. \begin{cases} \xi = \dfrac{X \cos \alpha \cot \delta - A \cos R \cot \Delta}{\cos \alpha \cot \delta - \cos R \cot \Delta}, \\ \eta = \dfrac{Y \sin \alpha \cot \delta - B \sin R \cot \Delta}{\sin \alpha \cot \delta - \sin R \cot \Delta} \end{cases}$$

zur Bestimmung der Coordinaten ξ, η, ζ hin.

Bezeichnen wir die Rectascension und geocentrische Breite des Punktes der Erdoberfläche, in welchem dieselbe von der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte $(\xi\eta\zeta)$ der Sternschnuppen-Bahn gezogenen geraden Linie geschnitten wird, durch $15t$ und μ; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$114. \quad \operatorname{tang} 15t = \frac{\eta}{\xi},$$

mit der Bestimmung, dass in dem Falle, wo ξ und η gleiche Vorzeichen haben, $15t$ zwischen 0 und 90° oder zwischen 180° und 270° genommen werden muss, jenachdem die Grössen ξ und η beide positiv oder beide negativ sind; dass dagegen in dem Falle, wo ξ und η ungleiche Vorzeichen haben, $15t$ zwischen 90° und 180° oder zwischen 270° und 360° genommen werden muss, jenachdem ξ negativ und η positiv oder ξ positiv und η negativ ist.

Bezeichnen wir die geographische Länge des in Rede stehenden Punktes der Erdoberfläche in Bezug auf den Beobachtungsort, dessen geocentrische Breite φ ist, als Anfang der Längen durch λ, so ist

$$\lambda = 15(T - t) \text{ oder } \lambda = 360° + 15(T - t),$$

jenachdem $T-t$ positiv oder negativ ist, und die geographische Länge des in Rede stehenden Punktes der Erdoberfläche ist nun, wenn L die geographische Länge des Beobachtungsorts, dessen geocentrische Breite φ ist, bezeichnet

$$L+\lambda \text{ oder } L+\lambda-360^{\circ},$$

jenachdem $L+\lambda$ kleiner oder grösser als 360° ist.

Ferner erhellet sogleich, dass in völliger Allgemeinheit

$$\operatorname{tang}\mu=\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^{2}+\eta^{2}}},$$

und folglich, weil ξ und $\cos 15t$ offenbar immer einerlei Vorzeichen haben, $\operatorname{tang}\mu$ aber immer dasselbe Vorzeichen wie ζ hat,

$$115. \quad \operatorname{tang}\mu \doteq \frac{\zeta}{\xi}\cos 15t.$$

Dass man ganz ähnliche Formeln auch für die Punkte der Sternschnuppen-Bahn, welche den nach den Punkten der Sphäre, deren Rectascensionen α', δ' und α_1, δ_1; α_1', δ_1' sind, von den Beobachtungsorten gezogenen Gesichtslinien entsprechen, entwickeln kann, versteht sich von selbst.

§. 7.

Man kann das Sternschnuppen-Problem noch aus einem ganz andern Gesichtspunkte auffassen, und dieser Gesichtspunkt würde eigentlich der strengste und allgemeinste sein, von dem man überhaupt ausgehen kann, weil derselbe gar keine andere Voraussetzung als dass der Weg einer beobachteten Sternschnuppe für die immer nur sehr kurze Dauer ihrer Sichtbarkeit geradlinig sei, in Anspruch nimmt, worüber wir hier nur Folgendes in der Kürze und bloss ganz im Allgemeinen bemerken, weil theils im Obigen, theils in dem vorhergehenden Aufsatze (Nr. XXI.), schon Alles enthalten ist, was zur Ausführung der Rechnungen, die wir jetzt andeuten wollen, erforderlich sein dürfte.

Wenn man sich durch die nahe Gleichzeitigkeit der Beobachtungen, wobei §. 3. zu vergleichen ist, die Ueberzeugung verschafft hat, dass in einem jeden von vier Beobachtungsorten eine und dieselbe Sternschnuppe wenigstens ein Mal beobachtet worden ist; so kennt man die Gleichungen der vier von diesen Beobachtungsorten nach der Sternschnuppe gezogenen geraden Linien entweder nach 15. in Bezug auf das System der xyz, dessen Anfang der Mittelpunkt der Sonne ist, wenn man auf die Bewegung der Erde um die Sonne während der Dauer des Phänomens gehörig Rücksicht nehmen will, wie es in der That erforderlich ist, wenn man die grösste Strenge zu erreichen beabsichtigt, oder nach 10. in Bezug auf das System der $x_1y_1z_1$, dessen Anfang der Mittelpunkt der Erde ist, wenn man die Bewegung der Erde um die Sonne während der immer nur sehr kurzen Dauer des Phänomens unberücksichtigt lassen will, und die Lage der Sternschnuppen-Bahn, als eine die vier in Rede stehenden gegebenen geraden Linien schneidende gerade Linie betrachtet, wird nun mittelst der im vorigen Aufsatze vollständig aufgelösten Aufgabe bestimmt werden können. Es ist auch hinreichend, wenn man aus einem jeden von zwei Beobachtungsorten eine, aus einem dritten Beobachtungsorte dagegen zwei Beobachtungen einer Sternschnuppe hat, und die Lage der Bahn würde auch in dem Falle, wenn man aus einem jeden von zwei Beobachtungsorten zwei Beobachtungen einer Sternschnuppe hat, mittelst der im vorigen Aufsatze aufgelösten Aufgabe zu bestimmen sein, wenn man auf die Bewegung der Erde um die Sonne während der Zwischenzeit der Beobachtungen gehörig Rücksicht nehmen wollte. Freilich lässt die im vorigen Aufsatze aufgelöste Aufgabe immer entweder zwei Auflösungen oder gar keine zu; jedoch wird man gewiss in jedem einzelnen Falle aus den bei demselben vorkommenden besondern Umständen zu beurtheilen im Stande sein, welche der beiden Auflösungen, wenn die Aufgabe überhaupt möglich ist, diesem Falle entspricht. Diese wenigen Andeutungen werden hinreichend sein, um unsere Ansicht *) über diesen Gegenstand deutlich darzulegen.

§. 8.

Wir wollen nun noch zeigen, wie man für einen Punkt der Erdoberfläche die geocentrische Breite φ und die Länge des nach diesem Punkte gezogenen Erdradius r aus der Polhöhe ω des in Rede stehenden Punktes der Erdoberfläche nach unserer Ueberzeugung auf die einfachste Weise finden kann, da diese beiden Elemente im Obigen häufig gebraucht worden sind.

Der Halbmesser des Erdäquators sei a, die halbe Erdaxe sei b; so ist

$$116.\quad (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$$

die Gleichung des durch den in Rede stehenden Punkt der Erdoberfläche gelegten Erdmeridians, wobei ohne weitere Erläuterung sogleich erhellen wird, wie das Coordinatensystem der xy angenommen worden ist.

Bezeichnen nun x, y die Coordinaten des in Rede stehenden Punktes der Erdoberfläche, so ist nach den Principien der höhern Geometrie

$$117.\quad z - y = -\frac{dx}{dy}(u - x)$$

die Gleichung der durch diesen Punkt gezogenen Normale des Erdsphäroids, und folglich, wenn wir, was offenbar verstattet ist, annehmen, dass die Coordinaten x, y beide positiv sind,

$$118.\quad \tang \omega = -\frac{dx}{dy}.$$

Nun ist aber offenbar

$$119.\quad \tang \varphi = \pm \frac{y}{x},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der Punkt der Erdoberfläche, dessen geocentrische Breite φ ist, in der nördlichen oder südlichen Hälfte der Erdoberfläche liegt. Also ist nach dem Vorhergehenden

*) Diese Ansicht würde nur erst dann vielleicht weiterer Berücksichtigung werth sein, wenn es möglich geworden ist, den Beobachtungen der Sternschnuppen ein höhern Grad von Genauigkeit zu geben.

$$120.\quad \frac{\tan g\,\varphi}{\tan g\,\omega} = \mp \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Differentiirt man aber die Gleichung 116., so erhält man

$$-\frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Also ist nach 120.

$$121.\quad \frac{\tan g\,\varphi}{\tan g\,\omega} = \pm \frac{b^2}{a^2},\ \tan g\,\varphi = \pm \frac{b^2}{a^2} \tan g\,\omega.$$

Setzt man die sogenannte Abplattung $\frac{a-b}{a} = n$, so ist $\frac{b}{a} = 1-n$, und folglich

$$122.\quad \tan g\,\varphi = \pm (1-n)^2 \tan g\,\omega,$$

immer das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem der Punkt der Erdoberfläche, dessen geocentrische Breite φ ist, in der nördlichen oder südlichen Hälfte der Erdoberfläche liegt.

Den nach dem in Rede stehenden Punkte der Erdoberfläche gezogenen Erdradius r kann man nun auf folgende Art finden. Weil nach 119.

$$y = \pm x \tan g\,\varphi$$

ist, so ist nach 116.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x \tan g\,\varphi}{b}\right)^2 = 1,$$

und folglich

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \tan g\,\varphi^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2 \cos \varphi^2}{a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2}.$$

Nun ist aber

$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2 (1 + \tan g\,\varphi^2) = x^2 \sec \varphi^2.$$

Also ist

$$123.\quad r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2}}.$$

Auch ist

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos \varphi^2 + \frac{a^2}{b^2} \sin \varphi^2}.$$

Nach 121. ist aber

$$\frac{a^2}{b^2} = \pm \frac{\tan g\,\omega}{\tan g\,\varphi} = \pm \frac{\cos \varphi \sin \omega}{\sin \varphi \cos \omega},$$

und folglich

$$\cos \varphi^2 + \frac{a^2}{b^2} \sin \varphi^2 = \frac{\cos \varphi}{\cos \omega} (\cos \varphi \cos \omega \pm \sin \varphi \sin \omega),$$

d. i.

$$\cos \varphi^2 + \frac{a^2}{b^2} \sin \varphi^2 = \frac{\cos \varphi}{\cos \omega} \cos (\varphi \mp \omega).$$

Also ist nach dem Obigen

$$124. \quad r = a\sqrt{\frac{\cos\omega}{\cos\varphi\ \cos(\varphi\mp\omega)}},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem der Punkt der Erdoberfläche, dessen geocentrische Breite φ ist, in der nördlichen oder südlichen Hälfte der Erdoberfläche liegt.

XXIII.

Ueber das vollständige Vierseit und vollständige Viereck.

Von dem

Herrn Doctor Rädell

zu Berlin.

1. Lehrsätze. α. Sind zwei Gerade nach vier Punktenpaaren projectivisch und bleiben sie auch projectivisch, wenn man in der einen Geraden die Reihenfolge der Punkte unverändert lässt, während man in der anderen Geraden zwei nicht unmittelbar neben einander liegende Punkte vertauscht, so sind die vier Punkte in der einen und anderen Geraden harmonisch liegende Punkte.

β. Sind zwei Strahlenbüschel nach vier Strahlenpaaren projectivisch und bleiben sie auch projectivisch, wenn man in dem einen Büschel die Reihenfolge der Strahlen unverändert lässt, während man in dem anderen Büschel zwei nicht unmittelbar neben einander liegende Strahlen vertauscht, so sind die vier Strahlen in dem einen und anderen Strahlenbüschel harmonisch liegende Strahlen.

Beweise. α. Sind die Geraden A und A' in Beziehung auf die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ projectivisch, so ist $\frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{ad}}:\frac{\mathfrak{cb}}{\mathfrak{cd}}=\frac{\mathfrak{a'b'}}{\mathfrak{a'd'}}:\frac{\mathfrak{c'b'}}{\mathfrak{c'd'}}$. Sind ferner dieselben Geraden A und A' in Beziehung auf die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$

projectivisch, so ist auch $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}} : \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'}{\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'} : \frac{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}'\mathfrak{d}'}$. Hieraus folgt $\frac{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}'\mathfrak{d}'} : \frac{\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'}{\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'} = \frac{\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'}{\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'} : \frac{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}'\mathfrak{d}'}$, also durch Mutiplication $(\frac{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}'\mathfrak{d}'})^2 = (\frac{\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'}{\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'})^2$, also auch $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' : \mathfrak{a}'\mathfrak{d}' = \mathfrak{c}'\mathfrak{b}' : \mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ d. h. $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ und folglich sind auch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ harmonisch liegende Punkte.

β. Sind die Strahlenbüschel $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ in Beziehung auf die Strahlen a und a', b und b', c und c', d und d' projectivisch, und legt man durch den ersten Büschel die Gerade A, welche die Strahlen desselben respective in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ schneidet, durch den Büschel B' aber die Gerade A', welche die Strahlen desselben respective in den Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ schneidet, so sind auch die Geraden A und A' nach den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ projectivisch. Sind nun auch die Strahlenbüschel $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ nach den Strahlen a und c', b und b', c und a', d und d' projectivisch, so sind auch die Geraden A und A' nach den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ projectivisch. Hieraus folgt nach (α), dass die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ zwei Gruppen harmonisch liegender Punkte bilden; folglich sind auch die Strahlen a, b, c, d, so wie a', b', c', d' harmonisch liegende Strahlen.

2. Lehrsätze. α. Die Endpunkte einer jeden Diagonale eines vollständigen Vierseits bilden mit den Durchschnittspunkten dieser Diagonale und der beiden anderen Diagonalen des Vierseits vier harmonisch liegende Punkte, und zwar sind die beiden ersteren und die beiden letzteren Punkte harmonisch zugeordnete Punkte.

β. Je zwei gegenüberstehende Seiten eines vollständigen Vierecks bilden mit den Verbindungslinien des Durchschnittspunktes dieser beiden Seiten und der Durchschnittspunkte der beiden anderen Paare gegenüberstehender Seiten des vollständigen Vierecks harmonisch liegende Strahlen und zwar sind die beiden ersteren Seiten nnd die beiden letzteren Verbindnngslinien harmonisch zugeordnete Gerade.

Beweise α. Betrachtet man in dem Vierseit I II III IV (Taf. II. Fig. 1.) die beiden Diagonalen $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}'$ $\mathfrak{b}'$ $\mathfrak{c}'$ $\mathfrak{d}'$, so sind sie nach den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ perspectivisch, weil sie ihren perspectivischen Mittelpunkt in $\mathfrak{B}$ haben. Dieselben Diagonalen sind aber auch nach den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ perspectivisch, weil sie für diesen Fall ihren perspectivischen Mittelpunkt in $\mathfrak{B}'$ haben; folglich sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ harmonisch liegende Punkte (1. α.). Auf dieselbe Weise lässt sich aber der Satz auch für die dritte Diagonale beweisen.

β. Betrachtet man in dem Viereck I II III IV (Taf. II. Fig. 2.) die Strahlenbüschel a b c d und a' b' c' d', so sind sie nach den Strahlen a und a', b und b', c und c', d und d' perspectivisch, weil sie ihren perspectivischen Durchschnitt in A haben. Dieselben Strahlenbüschel sind aber auch perspectivisch nach den Strahlen a und c', b und b', c und a', d und d', denn sie haben für diesen Fall ihren perspectivischen Durchschnitt in A'; folglich sind die Strahlen a, b, c, d nud a', b', c', d' harmonisch liegende Strahlen (1. β.). Ebenso lässt sich dies für das dritte Seitenpaar beweisen.

Anmerkung. Der unter (1) mitgetheilte Satz dürfte um so bemerkenswerther sein, da er ganz allgemein das Verhältniss angiebt, welches den harmonisch liegenden Punkten und Geraden in Beziehung auf die projectivischen Punkte und Strahlenbüschel zukommt. Er führt, wie wir gesehen, zum einfachsten Beweise des Lehrsatzes (2) und weist diesem, welcher in der neueren Geometrie eine so bedeutende Rolle spielt, seine eigentliche Stelle in der letzteren an.

XXIV.

Von der Projection der Figuren in einer und derselben Ebene.

Von dem

Herrn Doctor Rädell

zu Berlin.

Poncelet hat in seinem berühmten Werke Propriétés projectives des figures nach Monge's Vorgang die Projection der Figuren dazu angewandt, unregelmässige Figuren auf regelmässige zurückzuführen und die Eigenschaften der ersteren aus den leichter zu entwickelnden Eigenschaften der letzteren abzuleiten, indem er z. B. aus den Ecken einer beliebigen geradlinigten Figur nach irgend einem Punkte ausserhalb der Ebene gerade Linien zieht, die dadurch entstandene Pyramide durch eine neue Ebene dergestalt schneidet, dass der Schnitt eine einfachere Figur wird, als die ursprüngliche, und nun die Beziehungen dieses Vielecks aus den Eigenschaften des Durchschnitts ableitet. Wie man sieht, werden hiedurch stereometrische Betrachtungen eingeführt, welche der ursprünglichen Figur und ihren Eigenschaften an und für sich fremd sind, und es schien mir nicht uninteressant zu untersuchen, ob der Durchgang durch die Stereometrie nicht ganz und gar vermieden werden könnte. Die Möglichkeit ergab sich daraus, dass die zu projicirende Ebene und die Projectionsebene jeden beliebigen Winkel mit einander bilden können und dass man dieselben also nur um ihren Durchschnitt zu drehen hat, bis beide Ebenen auf einander fallen. — In der That habe ich meinen Zweck auf einfachem Wege erreicht und Resultate gewonnen, deren Entwickelung ich, wenn sie auch nicht neu sind, wenigstens noch nirgends so elementar gelesen habe. Da sich dieser Theil der Geometrie überdies von der Geometrie unserer Zeit ganz absondern lässt und in seinen Betrachtungen eben so einfach ist, als diese letztere, so halte ich ihn um so mehr für geeignet, hier mitgetheilt zu werden, als sich dadurch mancher Lehrer bewogen fühlen dürfte, vermittelst desselben seine Schüler mit den hauptsächlichsten Resultaten der neueren Geometrie bekannt zu machen. Man begreift leicht, dass sich nicht alle Anwendungen dieser Lehre hier ausgeführt finden, der Selbstlernenden willen glaubte ich aber in der Entwickelung der Prinzipien etwas ausführlicher sein zu dürfen.

Von der Projection der geradlinigten Figuren.

1. **Erklärung.** Wenn irgend eine vielseitige Figur 𝔞 𝔟 𝔠 𝔡 dergestalt gezeichnet ist, dass ihre Ecken in den Strahlen eines Strahlenbüschels $a\ b\ c\ d$ zu liegen kommen, so sagt man, die Figur und der Strahlenbüschel liegen perspectivisch und jede Ecke der Figur entspreche demjenigen Strahl, in welchem sie liegt, jede Seite der Figur aber demjenigen Winkel, welchen die durch ihre Endpunkte gehenden Strahlen des Strahlenbüschels mit einander bilden. In Taf. II. Fig. 3. entsprechen sich also 𝔞 und a, 𝔟 und b, 𝔠 und c, 𝔡 und d; so wie 𝔞𝔟 und $\angle(ab)$, 𝔞𝔠 und $\angle(ac)$, 𝔞𝔡 und $\angle(ad)$, 𝔟𝔠 und $\angle(bc)$, 𝔟𝔡 und $\angle(bd)$, 𝔠𝔡 und $\angle(cd)$ perspectivisch.

2. **Aufgabe.** Es sind drei Strahlen eines Strahlenbüschels und ein Dreieck gegeben, man soll beide Figuren in perspectivische Lage bringen, dergestalt, dass jedem gegebenen Strahle eine gegebene Ecke des Dreiecks entspricht.

Analyse. Ist Taf. II. Fig. 3. a, b, c der Strahlenbüschel und 𝔞 𝔟 𝔠 das Dreieck, sind 𝔞 und a, 𝔟 und b, 𝔠 und c entsprechende Stücke, 𝔛 aber derjenige Punkt, von welchem aus die nach 𝔞, 𝔟, 𝔠 gezogenen Strahlen einen dem a, b, c congruenten Strahlenbüschel bilden, so muss 𝔛 1, in der Peripherie eines Kreises liegen, welcher über der Sehne 𝔞𝔟 einen Peripheriewinkel gleich $\angle(ab)$ hat und 2, in der Peripherie eines anderen Kreises, welcher über der Sehne 𝔞𝔠 einen Peripheriewinkel gleich $\angle(ac)$ hat. Demnach wird 𝔛 also im Durchschnittspunkte beider Kreise liegen.

3. **Zusätze.** *a.* Jedes beliebige Dreieck kann mit jeden beliebigen drei Strahlen eines Strahlenbüschels perspectivisch gelegt werden und zwar so, dass jeder beliebige Strahl des Strahlenbüschels jeder beliebigen Ecke des Dreiecks entspricht, aber nur auf eine einzige Weise.

b. Eine mehrseitige Figur lässt sich nur unter besonderen Bedingungen mit den Strahlen des Strahlenbüschels perspectivisch legen und zwar auch in diesem Falle nur auf eine einzige Art.

c. Zwei Dreiecke (oder zwei mehrseitige Figuren) können nur auf zwei verschiedene Arten mit den Strahlen des Strahlenbüschels perspectivisch gelegt werden, wenn jeder Strahl des Strahlenbüschels einer gegebenen Ecke entsprechen soll; und zwar einmal so, dass beide Dreiecke (oder mehrseitige Figuren) entweder auf derselben Seite des Durchschnittspunktes der Strahlen oder auf verschiedenen Seiten desselben liegen.

4. **Erklärung.** Liegen zwei Dreiecke mit ein und demsel-

ben Strahlenbüschel perspectivisch, so sagt man, die Dreiecke liegen unter sich **perspectivisch**; betrachtet die drei Ecken des einen Dreiecks als **Projectionen** der drei Ecken des anderen, und die drei Seiten des einen Dreiecks als **Projectionen** der drei Seiten des anderen Dreiecks. Den Mittelpunkt des Strahlenbüschels nennt man den **Anfangspunkt der Projection.**

5. **Lehrsatz.** Liegen zwei Dreiecke perspectivisch, so liegen die Durchschnittspunkte ihrer entsprechenden Seiten in einer und derselben Geraden.

Beweis. Sind (Taf. II. Fig. 4.) $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'\ \mathfrak{b}'\ \mathfrak{c}'$ die beiden Dreiecke, welche dergestalt liegen, dass $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$ sich in dem Punkte $\mathfrak{B}$ schneiden, so sollen γ, β, α als respective Durchschnite von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ in einer und derselben Geraden liegen.

Man ziehe durch $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{b}\mathfrak{a}''$ parallel mit $\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{c}''$ parallel mit $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, verbinde $\mathfrak{a}''$ mit $\mathfrak{c}''$ und verlängere diese Verbindungslinie, so wie $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, bis sie sich in β' schneiden, ziehe endlich $\mathfrak{b}\beta'$. Es verhält sich nun

$\mathfrak{B}\mathfrak{b} : \mathfrak{B}\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}\mathfrak{a}' : \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' = \mathfrak{b}\mathfrak{a}'' : \mathfrak{b}\mathfrak{c}''$ und da überdies vermöge der Parallelität $\angle\, \mathfrak{a}''\mathfrak{b}\mathfrak{c}'' = \angle\, \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, so ist auch $\mathfrak{a}''\mathfrak{c}'' \# \mathfrak{a}'\mathfrak{c}'$. Weil nun $\mathfrak{b}\mathfrak{c}'' \# \mathfrak{c}'\alpha$ und $\mathfrak{c}''\mathfrak{b} \# \mathfrak{c}'\beta$, so verhält sich

$\mathfrak{c}\mathfrak{c}'' : \mathfrak{c}\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}\mathfrak{b} : \mathfrak{c}\alpha = \mathfrak{c}\mathfrak{b} : \mathfrak{c}\beta$, also sind die Scheiteldreiecke $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\beta$ und $\alpha\mathfrak{c}\beta$ ähnlich, mithin $\mathfrak{b}\beta' \# \alpha\beta$. Ebenso ist $\mathfrak{b}\beta' \# \alpha\gamma$ und folglich liegen α, β, γ in einer und derselben Geraden.

6. **Lehrsatz.** Liegen zwei Dreiecke in einer Ebene dergestalt, dass die drei Durchschnittspunkte der Seiten des einen Dreiecks mit den Seiten des anderen Dreiecks in einer und derselben Geraden liegen, so liegen die Dreiecke perspectivisch; je zwei und zwei Seiten, welche einen Durchschnittspunkt bilden, sind entsprechende Seiten und ihre Endpunkte entsprechende Ecken.

Der Beweis ergiebt sich sehr leicht aus der Umkehrung des vorhergehenden.

7. **Erklärung.** Die Gerade, in welcher die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten zweier perspectivisch liegenden Dreiecke liegen, nennt man den **Durchschnitt der Projection.**

8. **Zusätze.** *a.* Ein Projectionssystem ist festgestellt 1, durch zwei perspectivisch liegende Dreiecke, 2, durch drei Strahlen eines Strahlenbüschels, zwei ursprüngliche Punkte mit ihren Projectionspunkten und die Richtung des Durchschnitts der Projection, 3, durch den Anfangspunkt der Projection, den Durchschnitt derselben und einen ursprünglichen Punkt nebst seinem Projectionspunkte.

b. Sind in Taf. II. Fig. 4. in drei Strahlen a, b und c eines Strahlenbüschels beziehlich drei Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ als ursprüngliche und drei andere $\mathfrak{a}'$ $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$ als Projectionspunkte gegeben, so kann man dies als ein Projectionssystem ansehen, indem man $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ so wie $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{c}$ bis zu den Durchschnittspunkten γ und β verlängert und durch die Punkte γ und β den Durchschnitt A der Projection legt. Zu jedem neuen Punkte $\mathfrak{d}$ in irgend einem Strahle d des Strahlenbüschels findet man dann den Projectionspunkt, indem man $\mathfrak{d}$ mit einem der ursprünglichen Punkte z. B. $\mathfrak{a}$ verbindet, die Verbindungslinie $\mathfrak{d}\mathfrak{a}$ bis zum Durchschnitt der Projection verlängert, diesen Durchschnittspunkt δ mit dem Projectionspunkte

$\mathfrak{a}'$ des ursprünglichen Punktes $\mathfrak{a}$ verbindet und die Verbindungslinie bis zum Durchschnitt mit dem Strahl d verlängert. Dieser Durchschnittspunkt $\mathfrak{d}'$ ist alsdann der Projectionspunkt des gegebenen Punktes $\mathfrak{d}$.

Anmerkung. Wäre die Linie $\mathfrak{d}\mathfrak{a}'$ parallel dem Strahle d, so würde daraus hervorgehen, dass der Punkt $\mathfrak{d}$ keinen Projectionspunkt hat, oder dass für das zu Grunde liegende Projectionssystem, wie man zu sagen pflegt, der Projectionspunkt von $\mathfrak{d}$ im Unendlichen liegt.

c. In einem jeden festgestellten Projectionssysteme hat jeder gegebene Punkt nur einen einzigen Projectionspunkt, welcher mit ihm in demselben Strahle liegt. Jeder Punkt des Durchschnitts der Projection aber ist zugleich sein eigener Projectionspunkt; so wie jeder Strahl der Richtung nach sein eigener Projectionsstrahl ist.

d. Betrachtet man in einem Projectionssysteme die Projectionspunkte als ursprüngliche Punkte, so sind die ursprünglichen Punkte die Projectionspunkte dieser letzteren.

e. Alle Projectionspunkte der Punkte einer und derselben Geraden bilden gleichfalls eine Gerade, und umgekehrt: liegen die Projectionspunkte mehrerer Punkte in einer Geraden, so liegen die Punkte selbst in einer Geraden.

f. Um eine Gerade zu projiciren hat man nur zwei beliebige Punkte derselben zu projiciren und diese Projectionspunkte mit einander zu verbinden.

g. Eine Gerade und ihre Projection werden durch jeden durch den Anfangspunkt der Projection gehenden Strahl dergestalt geschnitten, dass der Durchschnittspunkt der ersteren den Durchschnittspunkt der letzteren zur Projection hat.

9. Zusätze. *a*. Die Projectionspunkte von vier harmonisch liegenden Punkten sind wiederum vier harmonisch liegende Punkte.

b. Projicirt man vier harmonisch liegende Punkte dergestalt, dass die Projection eines dieser Punkte in die Mitte der beiden anderen einander harmonisch zugeordneten Punkte fällt, so fällt die Projection des vierten Punktes ins Unendliche.

c. Projicirt man vier harmonisch liegende Punkte dergestalt, dass die Projection eines dieser Punkte ins Unendliche fällt, so fällt die Projection des demselben harmonisch zugeordneten Punktes in die Mitte der Projection der beiden anderen Punkte.

d. Lassen sich vier Punkte einer Geraden dergestalt projiciren, dass die Projection des einen derselben in die Mitte der Projectionen zweier anderen und die Projection des vierten Punktes ins Unendliche fällt, so sind die vier ursprünglichen Punkte harmonisch liegende Punkte, und der erste und vierte, so wie der zweite und dritte Punkt sind einander harmonisch zugeordnet.

10. Lehrsatz. Der Durchschnittspunkt zweier Projectionsgeraden ist der Projectionspunkt des Durchschnittspunktes der beiden projicirten Geraden.

Beweis. Ist $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ die Projection von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ die Projection von $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, so ist $\mathfrak{e}'$ der Projectionspunkt irgend eines Punktes sowohl der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ als auch der Geraden $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, weil er in $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ liegt, folglich ist $\mathfrak{e}'$ der Projectionspunkt von $\mathfrak{e}$ als Durchschnittspunkt von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$.

11. Zusätze. *a*. Schneiden sich drei oder mehrere Geraden in einem einzigen Punkte, so schneiden sich ihre Projectionen

gleichfalls in einem einzigen Punkte und umgekehrt: schneiden sich die Projectionen dreier oder mehrerer Geraden in einem einzigen Punkte, so schneiden sich die Geraden selbst in einem einzigen Punkte.

b. Die Projectionen von vier harmonisch liegenden Geraden sind gleichfalls vier harmonisch liegende Geraden und umgekehrt: liegen die Projectionen von vier Geraden harmonisch, so liegen die Geraden selbst harmonisch.

c. Projicirt man vier harmonisch liegende Geraden dergestalt, dass die Projectionen irgend zweier einander harmonisch zugeordneten Geraden auf einander senkrecht zu stehen kommen, so bilden die Projectionen der beiden anderen Geraden mit jeder Projection der beiden ersteren gleiche Winkel.

d. Projicirt man vier harmonisch liegende Geraden dergestalt, dass die Projectionen irgend zweier einander harmonisch zugeordneter Geraden mit den Projectionen der beiden anderen Geraden gleiche Winkel bilden, so stehen die Projectionen der beiden ersteren Geraden auf einander senkrecht.

e. Lassen sich vier Strahlen eines Strahlenbüschels dergestalt projiciren, dass die Projectionen zweier derselben auf einander senkrecht stehen, und die Projectionen der beiden anderen Geraden mit denen der beiden ersteren gleiche Winkel bilden, so sind es vier harmonisch liegende Strahlen, und die beiden ersten und die beiden letzten sind einander harmonisch zugeordnet.

12. Aufgabe. In einem beliebigen Strahl eines gegebenen Projectionssystems denjenigen Punkt zu finden, dessen Projection im Unendlichen liegt.

Analyse. Ist Taf. II. Fig. 5. das gegebene Projectionssystem, b der gewählte Strahl und $\mathfrak{x}$ derjenige Punkt desselben, dessen Projection im Unendlichen liegen soll, so muss, wenn man $\mathfrak{xa}$ dergestalt verlängert, dass es A in $\mathfrak{y}$ schneidet und durch $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{a}'$ die Linie $\mathfrak{zz}'$ zieht, diese Linie mit b parallel sein. Da nun der Punkt $\mathfrak{a}'$ mit dem Projectionssystem gegeben ist, so ist hierdurch die Richtung von $\mathfrak{zz}'$, so wie auch die von $\mathfrak{ya}$ mit bestimmt, folglich auch der Punkt $\mathfrak{x}$.

Zusatz. In einem jeden gegebenen Projectionssysteme existirt für jeden Strahl ein Punkt, dessen Projection im Unendlichen liegt.

13. Lehrsatz. Liegen die Projectionen zweier Punkte einer Geraden im Unendlichen, so liegt die Projection eines jeden anderen Punktes dieser Geraden gleichfalls im Unendlichen.

Beweis. Liegen die Projectionen zweier Punkte einer Geraden im Unendlichen, so liegt die Verbindungslinie dieser beiden Projectionen ihrer ganzen Richtung nach im Unendlichen, weil sie nicht durch den Anfangspunkt des Projectionssystems gehen kann. Es wird folglich auch jeder Punkt der ursprünglichen Geraden seine Projection im Unendlichen haben, weil diese sich in einer Geraden befindet, die ihrer ganzen Richtung nach im Unendlichen liegt.

Zusatz. Liegen die Projectionen dreier oder mehrerer Punkte eines Projectionssystems im Unendlichen, so liegen die Punkte selbst in einer und derselben Geraden.

14. Aufgabe. In einem gegebenen Projectionssysteme diejenige Gerade zu construiren, deren Projection im Unendlichen liegt.

Analyse. Ist (Taf. II. Fig. 5.) $\mathfrak{xw}$ die verlangte Gerade, so müssen die Projectionen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{w}$ im Unendlichen liegen und ist dieses der Fall, so hat jeder Punkt von $\mathfrak{xw}$ seine Projection im Unendlichen. Hieraus bestimmt sich $\mathfrak{xw}$ nach (12.).

Zusatz. In einem jeden gegebenen Projectionssysteme giebt es eine und zwar nur eine einzige Gerade, parallel mit dem Durchschnitte der Projection, deren Projection im Unendlichen liegt.

15. **Aufgabe.** In einem Projectionssysteme ist die Richtung des Durchschnitts unbestimmt gelassen, man soll denselben so bestimmen, dass die Projection eines gegebenen Punktes im Unendlichen liegt.

Analyse. Ist Taf. II. Fig. 5. das gegebene Projectionssystem, sind $\mathfrak{ab}$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ bis zum Durchschnittspunkt γ verlängert, so muss der gesuchte Durchschnitt der Projection A durch γ gehen. Ist ferner $\mathfrak{x}$ der Punkt, dessen Projection im Unendlichen liegen soll, zieht man $\mathfrak{xa}$, verlängert $\mathfrak{xa}$ bis zum Durchschnitt γ mit A und verbindet endlich $\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{a}'$, so muss diese Verbindungslinie $\mathfrak{z}\mathfrak{z}'$ parallel mit dem Strahle $\mathfrak{b}$ sein, in welchem $\mathfrak{z}\mathfrak{z}'$ liegt. Hierdurch ist zunächst die Lage von $\mathfrak{z}\mathfrak{z}'$ und dann vermittelst des Durchschnitts derselben mit $\mathfrak{xa}$ ein zweiter Punkt $\mathfrak{y}$ bestimmt, durch welchen die Gerade A gleichfalls gehen muss.

16. **Zusätze.** *a.* In jedem Projectionssysteme, in welchem die Richtung des Durchschnitts unbestimmt gelassen ist, lässt sich diese Richtung immer, aber nur auf eine einzige Weise dergestalt bestimmen, dass die Projection eines beliebig gegebenen Punktes im Unendlichen liegt.

b. In einem jeden Projectionssysteme, in welchem die Richtung des Durchschnitts der Projection unbestimmt gelassen ist, kann man diese Richtung immer, aber nur auf eine einzige Weise dergestalt bestimmen, dass die Projectionen zweier gegebenen Geraden parallel sind, indem man die Projection des Durchschnitts dieser Geraden ins Unendliche fallen lässt.

c. Schneiden sich drei oder mehrere Geraden in einem einzigen Punkte und sind die Projectionen zweier derselben parallel, so sind die Projectionen aller parallel.

d. Sind die Projectionen dreier oder mehrerer Geraden in irgend einem Projectionssysteme parallel, so schneiden sich diese Geraden in einem einzigen Punkte.

17. **Aufgabe.** In einem Projectionssysteme den Durchschnitt der Projection dergestalt zu bestimmen, dass die Projection einer gegebenen Geraden im Unendlichen liegt.

Analyse. Ist Taf. II. Fig. 5. das gegebene Projectionssystem, $\mathfrak{a}'$ die Projection von $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{xw}$ diejenige Linie, deren Projection im Unendlichen liegen soll, A endlich die verlangte noch unbekannte Lage des Durchschnitts, so muss der Durchschnittspunkt von $\mathfrak{xa}$ und die Parallele aus $\mathfrak{a}'$ mit dem Strahl b in A liegen; ebenso muss der Durchschnittspunkt von $\mathfrak{wa}$ und die Parallele aus $\mathfrak{a}'$ mit dem Strahle c in A liegen. Da nun die Lage beider Parallelen, so wie die der Verbindungslinien $\mathfrak{xa}$ und $\mathfrak{wa}$ als bekannt angenommen werden können, so lässt sich auch die Lage von A bestimmen.

Anmerkung. Schneiden sich $\mathfrak{xa}$ und die Parallele aus $\mathfrak{a}'$ mit dem Strahle b in $\mathfrak{x}'$, so kann man die Lage von A auch dadurch bestimmen, dass man durch $\mathfrak{r}'$ eine Parallele durch $\mathfrak{r}\mathfrak{w}$ zieht (14. Zusatz.).

18. Zusätze. *a.* Ist in einem Projectionssysteme die Lage des Durchschnitts der Projection unbestimmt gelassen, so kann man dieselbe immer, aber nur auf eine einzige Weise dergestalt bestimmen, dass die Projection einer beliebig gegebenen Geraden ins Unendliche fällt.

b. Ist in einem Projectionssysteme die Lage des Durchschnitts unbestimmt gelassen, so kann man dieselbe immer, aber nur auf eine einzige Weise dergestalt bestimmen, dass die Projection eines beliebig gegebenen Vierecks ein Parallelogramm wird, indem man die Projection der Durchschnittspunkte der gegenüberstehenden Seiten des Vierecks ins Unendliche fallen lässt.

Als Anwendung dieser Theorie mögen vorläufig folgende Beispiele dienen.

Lehrsatz 1. Die Endpunkte einer jeden Diagonale eines vollständigen Vierseits bilden mit den Durchschnittspunkten dieser Diagonale und der beiden anderen Diagonalen des Vierseits vier harmonisch liegende Punkte, und zwar sind die beiden ersteren und die beiden letzteren harmonisch zugeordnete Punkte.

Beweis. Man projicire (Taf. II. Fig. 1.) das vollständige Viereck I II III IV dergestalt, dass die Projection von $\mathfrak{B}\mathfrak{a}'\mathfrak{B}'\mathfrak{c}'$ ein Parallelogramm wird. Alsdann fällt die Projection von $\mathfrak{b}'$ in die Mitte von $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, die Projection von $\mathfrak{b}$ aber zugleich mit den Projectionen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ ins Unendliche, folglich sind $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{B}$, $'\mathfrak{b}$ in angegebener Reihenfolge harmonisch liegende Punkte (9. Zusatz *d.*).

Lehrsatz 2. Je zwei gegenüberstehende Seiten eines vollständigen Vierecks bilden mit den Verbindungslinien des Durchschnittspunktes dieser beiden Seiten und der Durchschnittspunkte der beiden anderen Paare gegenüberstehender Seiten des vollständigen Vierecks harmonisch liegende Strahlen und zwar sind die beiden ersteren Seiten und die beiden letzteren Verbindungslinien harmonisch zugeordnete Strahlen.

Beweis. Man projicire das Viereck I II III IV (Taf. II. Fig. 2.) dergestalt, dass seine Projection ein Parallelogramm wird, alsdann fällt die Projection von α in die Mitte der Projection von II und III, weil die Projection von $\alpha\beta$ durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen des projicirten Parallelogramms gehen muss. Die Projection von γ fällt aber ins Unendliche, folglich sind II, α, III, γ in der angegebenen Reihenfolge harmonisch liegende Punkte (9. Zusatz *d*), und mithin auch *a*, *b*, *c*, *d* harmonisch liegende Strahlen und zwar so, dass *a* dem *c* und *b* dem *d* zugeordnet sind.

Lehrsatz 3. Werden zwei Geraden von drei oder mehreren Strahlen eines Strahlenbüschels geschnitten, und verbindet man die wechselseitigen Durchschnittspunkte mit einander, so liegen die Durchschnittspunkte der entsprechenden Verbindungslinien mit dem Durchschnittspunkte der beiden Geraden in einer und derselben Geraden.

Beweis. Sind (Taf. II. Fig. 6.) A und A' die beiden Geraden, a, b, c die Strahlen des Strahlenbüschels, und man projicirt die Figur dergestalt, dass $\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'$ zur Projection ein Parallelogramm erhält, so wird auch $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$, weil es mit den Strahlen a und c den Punkt $\mathfrak{B}$ gemeinschaftlich hat, zur Projection eine Gerade haben, die mit $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ parallel ist (16. Zusatz c.). Es werden folglich die Projectionen von α, β, γ als Durchschnittspunkte der Diagonalen bei Parallelogrammen zwischen den parallelen Projectionen von $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'$ gleichen Abstand haben, die Projection von $\mathfrak{B}'$ aber wird ins Unendliche fallen, also liegen die Projectionen von α, β, γ und $\mathfrak{B}'$, folglich auch α, β, γ und $\mathfrak{B}'$ selbst in einer und derselben Geraden (8. Zusatz e.).

Anmerkung. Der umgekehrte Satz lässt sich auf ähnliche Weise darthun.

Lehrsatz 4. Liegen von den sechs Ecken eines Sechsecks drei und drei abwechselnd in zwei Geraden, so liegen die drei Durchschnittspunkte je zweier gegenüberstehenden Seiten in einer und derselben Geraden.

Beweis. Ist (Taf. II. Fig. 7.) $ABCDEF$ das in Rede stehende Sechseck, in welchem A, C, E in einer, B, D, F in einer anderen Geraden liegen, so projicire man dieses Sechseck in $abcdef$ dergestalt, dass ab parallel de und bc parallel ef wird; schneiden sich nun ace und bdf in k, so ist, weil ab parallel de ist,

$$ka : ke = kb : kd,$$

und weil bc parallel ef ist,

$$ke : kc = kf : kb,$$

also

$$ka : kc = kf : kd,$$

folglich cd parallel fa. Es liegen also die Projectionen der drei Punkte α, β, γ im Unendlichen, folglich diese Punkte selbst in einer und derselben Geraden (13. Zusatz.).

Lehrsatz 5. Schneiden sich von den sechs Seiten eines Sechsseits drei und drei abwechselnd in zwei Punkten, so schneiden sich die drei Verbindungslinien der gegenüberstehenden Ecken in einem einzigen Punkte.

Beweis. Es sei (Taf. II. Fig. 8.) $ABCDEF$ das gegebene Sechsseit, in welchem sich die Seiten 1, 3, 5 im Punkte G und 2, 4, 6 im Punkte H schneiden. Projicirt man nun dies Sechsseit dergestalt in $abcdef$, dass die Projectionen von G und H ins Unendliche fallen, und schneiden sich ad und be in i, so ziehe man ic, welche die de in k schneidet und verbinde c mit f. Weil nun dc parallel ba ist, so verhält sich

$$cl : lb = cd : ba,$$

und, weil de parallel lb ist,

$$lb : md = ba : ma,$$

also, weil überdies noch $md = cb$ und $ma = cf$ ist, auch

$$cl : lb = cd : ef.$$

Nun ist aber dc parallel ef, also

$$dc : ef = kd : ke,$$

mithin

$$kd : ke = cd : ef,$$

folglich liegen i, c, f in einer und derselben Geraden, oder ad, be und cf schneiden sich in einem und demselben Punkte i. Da nun diese drei Geraden Projectionen von AD, BE und CF sind, so schneiden sich auch diese in einem und demselben Punkte I (11. Zusatz a.).

(Diese Betrachtungen werden späterhin fortgesetzt werden.)

XXV.

Bemerkungen zu dem Aufsatze III. im Archive der Mathem. und Phys. I. Theil I. Heft.

Von dem

Herrn Professor Dr. Mensing

zu Erfurt.

Die vom Herrn Professor Dr. Grunert gegebene Auflösung der quadratischen Gleichung ist zwar sinnreich, aber nicht die kürzeste. Folgende möchte sich in dieser Hinsicht empfehlen.

Heisse die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2ax - b^2 = 0$$

so sind die Wurzeln $x' = -a + \sqrt{a^2 + b^2}$ kleinere Wurzel positiv

$x'' = -(a + \sqrt{a^2 + b^2})$ grössere - negativ.

Setze $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{b}{a}$, so wird $x' = a\left(\frac{1}{\cos 2\varphi} - 1\right)$

$$= a\,\frac{2\sin\varphi\sin\varphi}{\cos 2\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi} = a\,\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$x' = a \operatorname{tg} 2\varphi \,.\, \operatorname{tg}\varphi = b \operatorname{tg}\varphi,$$

und eben so $x'' = -\frac{b}{\operatorname{tg}\varphi}$.

Diese Gleichungen $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{b}{a}$ und $x' = b \,.\, \operatorname{tg} \varphi \ldots\ldots x'' = -\frac{b}{\operatorname{tg}\varphi}$ sind gewiss die bequemsten, welche sich auffinden lassen.

Es folge das im Archive berechnete Beispiel. Dafür ist

$$a = \frac{\frac{1}{2}\lambda}{\varkappa} \ldots\ldots b = \sqrt{\frac{\mu}{\varkappa}} \text{ also } \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\mu}{\varkappa}} \,.\, \frac{\varkappa}{\frac{1}{2}\lambda}.$$

Man lasse sich nicht verleiten, den letzten Ausdruck abzukürzen; er ist so am besten, wie sich gleich ergeben wird.

$$\begin{array}{lrll}
 & \log b^2 = & 1{,}2006710 & \\
 & \log \mu = & 2{,}0631006 & \\
:2 & \log \varkappa = & 0{,}8624296 & - \\
 & \log b = & 0{,}6003355 & \\
+ & c \,.\, \log \frac{\lambda}{2} = & 9{,}0054849 - 10 & \\
- & \log \operatorname{tg} 2\varphi = & 10{,}4682500 - 10 & \ldots\ldots 2\varphi = 71 \,.\, 12 \,.\, 39{,}82 \\
 & \log \operatorname{tg} \varphi = & 9{,}8549589 - 10 & \ldots\ldots \varphi = 35 \,.\, 36 \,.\, 19{,}91 \\
 & \log x' = & 0{,}4552944 & \ldots\ldots x' = 2{,}852952 \ldots \\
 & \log - x'' = & 0{,}7453766 & \ldots\ldots x'' = -5{,}563865 \ldots
\end{array}$$

Die zweite und dritte Zeile werden zuerst hingeschrieben, nach oben subtrahirt, dieser Rest durch 2 dividirt, wodurch die vierte Zeile entsteht u. s. w. Wäre $\varkappa$ nicht an die Stelle wo es steht gebracht, so hätte man es noch einmal schreiben müssen, deshalb ist auch der Werth von $\operatorname{tg} 2\varphi$ nicht abgekürzt.

Es wird kaum zu bemerken nöthig sein, dass für die Grundgleichung

$$x^2 - 2ax - b^2 = 0,$$

woraus $x' = \frac{b}{\operatorname{tg}\varphi}$ also die grössere Wurzel positiv wird und $x'' = -b \operatorname{tg} \varphi$ also die kleinere Wurzel negativ wird, die Auflösungsart ganz dieselbe wie oben bleibt.

Für die Grundgleichung .... $x^2 + 2ax + b^2 = 0$

erhält man $\left.\begin{aligned} x' &= -a + \sqrt{a^2 - b^2} \\ x'' &= -a - \sqrt{a^2 - b^2} \end{aligned}\right\}$ beide Wurzeln negativ.

Hier setzt man $\sin 2\varphi = \frac{b}{a}$, wodurch $x' = -b \operatorname{tg} \varphi$ und $x'' = -\frac{b}{\operatorname{tg}\varphi}$ werden.

Endlich entstehen aus der Grundgleichung .... $x^2 - 2ax + b^2 = 0$

die Wurzeln $\left.\begin{aligned} x' &= a + \sqrt{a^2 - b^2} \\ x'' &= a - \sqrt{a^2 - b^2} \end{aligned}\right\}$ beide Wurzeln positiv

welches die nämlichen, jedoch positive Resultate im Vergleich mit den vorigen giebt.

Ich habe diese Auflösung überall da recht nützlich gefunden, wo ich geometrische Aufgaben dadurch zu lösen hatte; um sie aber noch brauchbarer zu machen, wäre es sehr bequem, mit den trigonometrischen Funktionen noch die Tangenten für die **halben** Winkel gleich neben den ganzen zu haben.

XXVI.

Note sur les Tables Trigonométriques.

Par

Mr. C. J. D. Hill,

Prof. des math. à l'université de Lund.

Les Tables ordinaires ne donnent que sept décimales. Or il se trouve souvent qu'on a besoin de tables plus étendues, et même qu'on doute de l'exactitude d'un chiffre de ceux, qui s'y trouvent. Dans ces cas les formules suivantes seront d'un grand usage.

Soit π le rapport de la circonference au diamètre, et $\varphi = 11^{\circ}\ 15'$ (ou $\varphi = 0\overset{g}{,}125$ d'après la division nouvelle) et ψ un angle donné, dont l'arc correspondant x (savoir $= \frac{\pi\ .\ \psi}{180^{\circ}}$ ou $= \frac{\pi\psi}{2\overset{g}{,}00}$) est plus petit que $\frac{1}{10}$ (ou bien $\psi < 5^{\circ}\ 37'\ 30'' = 0\overset{g}{,}0625$).

Cela posé, on aura le sinus de ψ, ou

$$S(\psi) = x - \frac{x^3}{6}\ .\ (1 - \frac{x^2}{420})^{21}.$$

Cette formule algébrique très simple et même rationelle représente la fonction sinus (reputée jusqu'ici si transcendante) à un degré d'exactitude remarquable, puisque on trouve en employant les développements connus que la correction qu'il faut y appliquer est environ $= \frac{x^9}{4233600} +$ etc.

On peut aussi la vérifier par un exemple numérique. En effet, soit $x = 0{,}1$, et cette formule donnera Sin $(0{,}1) = 0{,}0998334166468284$, et cette valeur ne différera de la valeur juste (trouvée par interpolation ou autrement) que de deux unités dans la dernière place décimale. Dans les limites préscrites elle donne ainsi quinze chiffres exactes. En y joignant donc les formules connues:

$S\ (r\varphi + \psi) = Sr\varphi\ .\ C\psi + Cr\varphi\ .\ S\psi$ et $C\psi = S(q - \psi) = \sqrt{1 - (S\psi)^2}$,

on remplacera les tables trigonométriques à XV décimales complettes et à 5400 nombres calculés par une semblable à huit seulement, savoir celle-ci:

r	Cos. $(r\varphi)$	Sin. $(r\varphi)$	
1	0,98078 52804 03230	0,19509 03220 16128	7
2	0,92387 95325 11287	0,38268 34323 65090	6
3	0,83146 96123 02545	0,55557 02330 19602	5
4	0,70710 67811 86548	0,70710 67811 86548	4
	Sin. $(r'\varphi)$	Cos. $(r'\varphi)$	r

Et en y appliquant les formules précédentes, on trouvera le sinus d'un angle quelconque à quinze decimales exactes.

Si l'on se contentera de XIII décimales, on employera cette formule plus simple Cos. $x == 1 - \frac{x^2}{2} \cdot (1 - \frac{x^2}{60})^5$, dont la correction est $= + \frac{x^8}{604800}$. Dans une approximation plus rude on se contentera des formules Sin. $x = x\ (1 - \frac{x^2}{15})^{\frac{5}{2}}$ et Cos. $x = (1 - \frac{x^2}{3})^{\frac{3}{2}}$, qui sont plus applicables aux Logarithmes. La formule semblable Tang. $x = \frac{x}{(1 - \frac{7x^2}{15})^{\frac{5}{7}}}$ donne encore sept chiffres exacts, lorsque

$$x = 0{,}2 = \tfrac{1}{5},\ \text{ou}\ x^\circ = 11^\circ\ 18' \cdot 36''.$$

Au contraire, si les fonctions sont données, on trouvera l'arc correspondant moyennant une petite table des Logarithmes naturels ($\mathcal{L}$) d'après la formule

$$\text{Arc. Tang. } (x) = 2 \cdot (x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} +) - \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}\frac{1+x}{1-x} = \mathcal{L}x.$$

Qu'on demande p. ex. $\mathcal{L}\ \frac{1}{73}$ à XV chiffres exacts:

$$\text{Résol. } \frac{2}{73} = 0{,}027397^{\cdot}\ 260273^{:}\ 9726$$

$$\tfrac{2}{5}(\frac{1}{73})^5 = 0{,}000000^{\cdot}\ 000192^{:}\ 9503$$

$$-\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\frac{37}{36} = -\ 0{,}013699^{\cdot}\ 487094^{:}\ 0572$$

$$\text{Donc } \mathcal{L}\frac{1}{73} = 0{,}013697^{\cdot}\ 773372^{:}\ 866.$$

Les formules algébriques

$$\mathcal{L}x = \frac{x}{3} \cdot \frac{3024 + 2352\ x^2 + 204{,}8\ x^4}{1008 + 1120\ x^2 + 240\ x^4}$$

et Arc Sin $x = x \cdot \left(\frac{4}{9\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} + \frac{5}{18} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2 E_1}} + \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2 E'}}\right)\right)$,

$$E_1 = (1 + \sqrt{\tfrac{3}{5}})^2 \text{ et } E' = (1 - \sqrt{\tfrac{3}{5}})^2$$

sont encore très exactes, puisque les corrections sont $\frac{-15}{10080} \cdot x^{11}$ et $+\frac{x^7}{344064}$. La formule Arc. Sin. $x = \frac{x}{9} \cdot \left(4 + \frac{5}{\sqrt{1 - \frac{3}{5} x^2}}\right)$ est plus simple, mais elle exige une correction un peu plus grande $(+\frac{1}{140} \cdot x^7 + \ldots)$. Néanmoins elle donne Arc.Sin.$(0,1) = 0,100167 \cdot 420$, ou il manque moins qu'une unité decimale du IX^e ordre.

XXVII.

Ueber die Bestimmung der Anzahl der verschiedenen Arten, auf welche sich ein $n$eck durch Diagonalen in lauter $m$ecke zerlegen lässt, mit Bezug auf einige Abhandlungen der Herren Lamé, Rodrigues, Binet, Catalan und Duhamel in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. T. III. IV.

Von

dem Herausgeber.

In den Novis Commentariis Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. T. VII. p. 203 findet man eine Abhandlung von Segner, in welcher derselbe eine recurrirende Auflösung für die folgende, nach seiner eignen Angabe ihm von Euler mitgetheilte Aufgabe giebt:

Die Anzahl der verschiedenen Arten zu bestimmen, auf welche sich ein beliebiges Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen lässt.

In dem Summarium Dissertationum, quas continet novorum Commentariorum T. VII. wird bei der Angabe des Inhalts dieser Abhandlung erinnert, dass a summo quodam Geometra *) die Bemerkung gemacht worden sei, dass die von Segner berechnete Tafel nur bis zu dem Funfzehneck richtig sei, und zugleich wird ohne Beweis eine schöne, von demselben grossen Geometer gefundene ganz independente Formel zur Auflösung des in Rede stehenden Problems, so wie auch eine bis zum Fünfundzwanzigeck berechnete Tafel mitgetheilt.

In neuester Zeit ist diese Aufgabe von den Herren Lamé, Rodrigues, Binet und Catalan, so wie auch in gewisser Beziehung von Herrn Duhamel, wieder aufgenommen, und die Untersuchung vorzüglich darauf gerichtet worden, genügende Beweise für die von Euler gegebene ganz independente Auflösung zu finden, wobei jedoch nicht unerwähnt bleiben darf, dass die Herren Binet und Catalan auf ganz verschiedenen Wegen auch zu einer bis jetzt noch völlig unbekannten Relation gelangt sind. Alle diesen Gegenstand betreffende Abhandlungen findet man in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. T. III. et IV.

Der vorliegende Aufsatz hat nun zunächst den Zweck, die genannten Herren darauf aufmerksam zu machen, dass, was denselben völlig entgangen zu sein scheint, schon ein älterer trefflicher Mathematiker, Nicolaus Fuss, in den Novis Actis Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. T. IX. p. 243. eine weit allgemeinere Aufgabe, die ihm nach seiner eignen Angabe von Johann Friedrich Pfaff vorgelegt worden war, aufgelöst hat, nämlich die Aufgabe:

Die Anzahl der verschiedenen Arten zu bestimmen, auf welche sich ein $n$eck durch Diagonalen in lauter $m$ecke zerlegen lässt.

Die von Fuss für diese allgemeinere Aufgabe gegebene Auflösung, welche ebenfalls nur recurrirend zu der gesuchten Grösse gelangt, will ich jetzt in der Kürze mittheilen.

Zuerst ist klar, dass nicht jedes $n$eck durch Diagonalen in lauter $m$ecke getheilt werden kann, sondern dass, wenn dies möglich sein soll, zwischen den Zahlen n und m eine bestimmte Relation Statt finden muss, und man wird sich durch eine ganz einfache Betrachtung sogleich überzeugen, dass nur entweder $n = m$, oder, indem k eine beliebige positive ganze Zahl, die Null eingeschlossen, bezeichnet,

$$n = (m-1) + k(m-2) + (m-1) = (k+2)m - 2(k+1)$$

sein kann. Aus der letzten Formel erhält man $n = m$ für $k = -1$, und es kann also nur

$$n = (k+2)m - 2(k+1)$$

sein, für $k = -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Setzt man $k+2 = i$, also $k+1 = i-1$, so kann nur

*) Auf jeden Fall Euler.

$$n = im - (2i - 2)$$

sein, für $i = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, d. h. für jedes positive ganze i, mit Ausschluss der Null.

Aus der Betrachtung, durch welche man zu den Formeln

$$n = m \text{ oder } n = (k+2)m - 2(k+1)$$

für $k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ gelangt, geht zugleich auch unmittelbar hervor, dass die Anzahl der Diagonalen, welche zur Zerlegung des $n$ecks in lauter $m$ecke erforderlich sind, respective 0, $k+1$, und dass die Anzahl der $m$ecke, welche man dadurch erhält, respective 1, $k+2$ ist. Setzt man also allgemein

$$n = (k+2)m - 2(k+1)$$

für $k = -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, so ist die Anzahl der zu der Zerlegung des $n$ecks in lauter $m$ecke erforderlichen Diagonalen allgemein $k+1$, und die Anzahl der $m$ecke, welche man durch diese Zerlegung erhält, ist allgemein $k+2$. Wird also

$$n = im - (2i - 2)$$

für $i = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ gesetzt, so ist die Anzahl der zu der Zerlegung des $n$ecks in lauter $m$ecke erforderlichen Diagonalen allgemein $i - 1$, und die Anzahl der $m$ecke, welche man durch diese Zerlegung erhält, ist allgemein i.

Wir wollen nun für

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots i$$

die Anzahl der Zerlegungen der entsprechenden Vielecke in lauter $m$ecke, d. h. die Anzahl der Zerlegungen eines

$$m\text{ecks}, (2m-2)\text{ecks}, (3m-4)\text{ecks}, \ldots \{im - (2i-2)\}\text{ecks}$$

in lauter $m$ecke, respective durch

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots A_i$$

bezeichnen, und wollen zuvörderst bloss **eine** Winkelspitze, die im Allgemeinen durch K bezeichnet werden mag, eines $\{im-(2i-2)\}$ecks betrachten.

Aus der Winkelspitze K lassen sich offenbar zwei Diagonalen unsers $\{im - (2i-2)\}$ecks ausziehen, von deren jeder dasselbe in ein

$$m\text{eck und ein } \{(i-1)m - (2i-4)\}\text{eck}$$

getheilt wird. Da nun A_1 die Anzahl der Zerlegungen des erstern in lauter $m$ecke, A_{i-1} die Anzahl der Zerlegungen des letztern in lauter $m$ecke ist; so ergeben sich hieraus offenbar $2A_1\, A_{i-1}$ Zerlegungen unsers $\{im - (2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke.

Von der Winkelspitze K aus lassen sich ferner zwei Diagonalen unsers $\{im - (2i-2)\}$ecks ziehen, von deren jeder dasselbe in ein

$$(2m-2)\text{eck und ein } \{(i-2)m - (2i-6)\}\text{eck}$$

getheilt wird. Da nun A_2 die Anzahl der Zerlegungen des erstern in lauter $m$ecke, A_{i-2} die Anzahl der Zerlegungen des letztern in lauter $m$ecke ist; so ergeben sich hieraus offenbar $2A_2\, A_{i-2}$ Zerlegungen unsers $\{im - (2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke.

Ferner lassen sich von der Winkelspitze K aus zwei Diagonalen unsers $\{im - (2i - 2)\}$ecks ziehen, von deren jeder dasselbe in ein

$$(3m - 4)\text{eck und ein } \{(i - 3)\, m - (2i - 8)\}\text{eck}$$

getheilt wird. Da nun A_3 die Anzahl der Zerlegungen des erstern in lauter $m$ecke, A_{i-3} die Anzahl der Zerlegungen des letztern in lauter $m$ecke ist; so ergeben sich hieraus $2A_3\, A_{i-3}$ Zerlegungen unsers $\{im - (2i - 2)\}$ecks in lauter $m$ecke.

Ist nun i eine ungerade, also die Anzahl $i - 1$ der zur Zerlegung unsers $\{im - (2i - 2)\}$ecks in lauter $m$ecke nöthigen Diagonalen eine gerade Zahl; so wird man, auf die obige Weise fortgehend, immer endlich auf zwei von K ausgehende Diagonalen kommen, von deren jeder unser $\{im - (2i - 2)\}$eck in ein

$$\{\tfrac{1}{2}(i - 1)\, m - (i - 3)\}\text{eck und ein } \{\tfrac{1}{2}(i + 1)\, m - (i - 1)\}\text{eck}$$

getheilt wird, und da nun $A_{\frac{1}{2}(i-1)}$ die Anzahl der Zerlegungen des erstern in lauter $m$ecke, $A_{\frac{1}{2}(i+1)}$ die Anzahl der Zerlegungen des letztern in lauter $m$ecke ist, so ergeben sich hieraus $2A_{\frac{1}{2}(i-1)}$ $A_{\frac{1}{2}(i+1)}$ Zerlegungen unsers $\{im - (2i - 2)\}$ecks in lauter $m$ecke.

Wenn dagegen i eine gerade, also die Anzahl $i - 1$ der zur Zerlegung unsers $\{im - (2i - 2)\}$ecks in lauter $m$ecke nöthigen Diagonalen eine ungerade Zahl ist, so wird man, auf die obige Weise fortgehend, immer endlich auf eine von K ausgehende Diagonale kommen, von welcher unser $\{im - (2i - 2)\}$eck in zwei

$$\{\tfrac{1}{2}im - (i - 2)\}\text{ecke}$$

getheilt wird, und da nun $A_{\frac{1}{2}i}$ die Anzahl der Zerlegungen dieses $\{\frac{1}{2}im - (i - 2)\}$ecks in lauter $m$ecke ist, so ergeben sich hieraus $A_{\frac{1}{2}i}\, A_{\frac{1}{2}i}$ Zerlegungen unsers $\{im - (2i - 2)\}$ecks in lauter $m$ecke.

Die Anzahl aller auf die obige Weise sich ergebenden Zerlegungen unsers $\{im - (2i - 2)\}$ecks in lauter $m$ecke ist folglich

$$2A_1\, A_{i-1} + 2A_2\, A_{i-2} + 2A_3\, A_{i-3} + \ldots + 2A_{\frac{1}{2}(i-1)}\, A_{\frac{1}{2}(i+1)}$$

oder

$$2A_1\, A_{i-1} + 2A_2\, A_{i-2} + 2A_3\, A_{i-3} + \ldots + 2A_{\frac{1}{2}(i-2)} A_{\frac{1}{2}(i+2)} + A_{\frac{1}{2}i}\, A_{\frac{1}{2}i},$$

jenachdem i eine ungerade oder eine gerade Zahl ist, und also, wie leicht in die Augen fallen wird, für jedes gerade oder ungerade i

$$A_1\, A_{i-1} + A_2\, A_{i-2} + A_3\, A_{i-3} + \ldots + A_{i-2}\, A_2 + A_{i-1}\, A_1,$$

oder, mit Hülfe einer leicht verständlichen abkürzenden Bezeichnung,

$$\Sigma_{x=1,\; y=i-1}^{x=i-1,\; y=1} A_x\; A_y.$$

Da nun $im - (2i - 2)$ die Anzahl der Winkelspitzen unsers $\{im - (2i - 2)\}$ecks ist, die obigen Betrachtungen sich aber offenbar bei jeder einzelnen Winkelspitze anstellen lassen; so ist

$$.\{im - (2i - 2)\}\; \Sigma_{x=1,\; y=i-1}^{x=i-1,\; y=1} A_x\; A_y$$

die Anzahl der sich auf die in Rede stehende Weise ergebenden Zerlegungen unsers $\{im - (2i - 2)\}$ecks, und es frägt sich nun bloss noch, ob unter diesen Zerlegungen nicht vielleicht identische vorkommen, welche Frage auf folgende Art beantwortet werden kann.

Denken wir uns irgend eine bestimmte Zerlegung unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke; so erscheint dieselbe in der obigen Aufzählung offenbar in Bezug auf eine jede der in ihr vorkommenden Diagonalen, d. h. weil die Anzahl der zu der Zerlegung unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke erforderlichen Diagonalen $i-1$ ist, $i-1$ Mal. Ferner ist aber z. B. die Diagonale KL sowohl bei der Winkelspitze K, als auch bei der Winkelspitze L in Betrachtung, oder sowohl von K nach L, als auch von L nach K gezogen worden, woraus sich, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, ergiebt, dass die in Rede stehende bestimmte Zerlegung unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke in der obigen Aufzählung $2(i-1)$ Mal vorkommt, und da dies nun natürlich von einer jeden solchen Zerlegung gilt, so ist klar, dass

$$\frac{im-(2i-2)}{2i-2}\sum\nolimits_{x=1,\ y=i-1}^{x=i-1,\ y=1} A_x\ A_y$$

die Anzahl der wirklich von einander verschiedenen Zerlegungen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke, oder dass, weil nach dem Obigen die Anzahl dieser Zerlegungen durch A_i bezeichnet wird,

$$A_i=\frac{im-(2i-2)}{2i-2}\sum\nolimits_{x=1,\ y=i-1}^{x=i-1,\ y=1} A_x\ A_y$$

ist.

Aus dieser Formel ergeben sich, da offenbar $A_1=1$ ist, die folgenden Gleichungen zur Berechnung der Grössen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ...:

$$A_1=1,$$
$$A_2=\frac{2m-2}{2}\ A_1A_1,$$
$$A_3=\frac{3m-4}{4}\ (A_1A_2+A_2A_1),$$
$$A_4=\frac{4m-6}{6}\ (A_1A_3+A_2A_2+A_3A_1),$$
$$A_5=\frac{5m-8}{8}\ (A_1A_4+A_2A_3+A_3A_2+A_4A_1),$$

u. s. w.

oder

$$A_1=1,$$
$$A_2=\frac{2m-2}{2}\ A_1A_1,$$
$$A_3=\frac{3m-4}{4}\ .\ 2A_1A_2,$$
$$A_4=\frac{4m-6}{6}\ (2A_1A_3+A_2A_2),$$

$$A_5 = \frac{5m-8}{8}(2A_1A_4 + 2A_2A_3),$$

$$A_6 = \frac{6m-10}{10}(2A_1A_5 + 2A_2A_4 + A_3A_3),$$

$$A_7 = \frac{7m-12}{12}(2A_1A_6 + 2A_2A_5 + 2A_3A_4),$$

u. s. w.

deren Gesetz ganz deutlich vor Augen liegt.

Mit Hülfe dieser Gleichungen hat Fuss die folgende Tafel berechnet.

i	$m=3$	$m=4$	$m=5$
1	1	1	1
2	2	3	4
3	5	12	22
4	14	55	140
5	42	273	969
6	132	1428	7084
7	429	7752	53820
8	1430	43263	420732
9	4862	246675	3362260
i	$m=6$	$m=7$	$m=8$
1	1	1	1
2	5	6	7
3	35	51	70
4	285	506	819
5	2530	5481	10472
6	23751	62832	141778
7	231880	749398	1997688
8	2330445	9203634	28989675
9	23950355	115607310	430321633

Wenn man aus den obigen recurrirenden Formeln die Grössen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ... nach der Reihe entwickelt, so erhält man ohne alle Schwierigkeit

$$A_1 = 1,$$

$$A_2 = \frac{m-1}{1},$$

$$A_3 = \frac{(m-1)(3m-4)}{1\,.\,2};$$

$$A_4 = \frac{(m-1)(4m-5)(4m-6)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

$$A_5 = \frac{(m-1)(5m-6)(5m-7)(5m-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

u. s. w.

woraus man durch Induction schliesst, dass allgemein für $i > 2$

$$A_i = \frac{(m-1)(im-i-1)(im-i-2)(im-i-3)\ldots(im-(2i-2))}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,(i-1)}$$

ist, und es würde nun darauf ankommen, diese von **Fuss** nicht angegebene ganz independente Formel allgemein zu beweisen, welches Stoff zu einer nicht uninteressanten Untersuchung geben dürfte. Für $i=1$ und $i=2$ ist nach dem Obigen

$$A_1 = 1,\ A_2 = \frac{m-1}{1}.$$

Setzen wir $im-(2i-2)=n$, so erhalten wir

$$i = \frac{n-2}{m-2},$$

und folglich $i=n-2$ für $m=3$. Also ist nach dem Obigen für $m=3$ und $n-2>2$, d. i. $n>4$,

$$A_{n-2} = \frac{2n(n+1)(n+2)\ldots(2n-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,(n-3)}.$$

Für $n=3$ und $n=4$ ist nach dem Obigen, immer unter der Voraussetzung, dass $m=3$ ist,

$$A_1 = 1,\ A_2 = 2.$$

Nach **Euler** ist für den Fall $m=3$ allgemein

$$A_{n-2} = \frac{2\,.\,6\,.\,10\,.\,14\,.\,18\,\ldots\,(4n-10)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,\ldots\,(n-1)},$$

und es wird nun darauf ankommen, die Uebereinstimmung dieses Ausdrucks mit dem vorher gefundenen Ausdrucke von A_{n-2} zu beweisen, d. h. zu zeigen, dass für $n>4$ allgemein

$$\frac{2n(n+1)(n+2)\ldots(2n-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,(n-3)} = \frac{2\,.\,6\,.\,10\,.\,14\,.\,18\,\ldots\,(4n-10)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,\ldots\,(n-1)}$$

ist, welches sehr leicht auf folgende Art geschehen kann.

Ist die vorstehende Gleichung richtig, so ist auch die Gleichung

$$\frac{2n(n+1)(n+2)\ldots(2n-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,(n-3)} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,(2n-5)\,.\,2^{n-2}}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,\ldots\,(n-1)}$$

richtig, und umgekehrt. Ist aber die letzte Gleichung richtig, so ist auch die Gleichung

$$2\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(2n-5) = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,.(n-3)\,.\,1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,.(2n-5)\,.\,2^{n-2}$$

richtig, und umgekehrt. Wenn aber die letzte Gleichung richtig ist, so ist offenbar auch die Gleichung

$$2\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(2n-5) = 2\,.\,2\,.\,4\,.\,6\,.\,.(2n-6)\,.\,1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,.(2n-5),$$

d. i. die Gleichung

$$2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots (2n-5) = 2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots (2n-5)$$

richtig, und umgekehrt. Weil nun die letzte Gleichung eine identische Gleichung ist, so ist hierdurch offenbar die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{2n(n+1)\,(n+2)\,..\,(2n-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots (n-3)} = \frac{2 \,.\, 6 \,.\, 10 \,.\, 14 \,.\, 18 \ldots (4n-10)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \ldots (n-1)}$$

für $n > 4$ bewiesen.

Aus der Gleichung

$$A_{n-2} = \frac{2 \,.\, 6 \,.\, 10 \,.\, 14 \,.\, 18 \ldots (4n-10)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \ldots (n-1)}$$

ergiebt sich für $n=3$ und $n=4$ respective

$$A_1 = 1 \text{ und } A_2 = 2,$$

wie es nach dem Obigen sein muss; daher ist die für den Fall $m=3$ von Euler gegebene Gleichung ganz allgemein, und lässt sich, wie man sieht, aus dem Obigen ohne Schwierigkeit ableiten.

Euler hat mittelst seiner Formel die folgende Tafel berechnet:

$$\begin{aligned}
A_1 &= 1\\
A_2 &= 2\\
A_3 &= 5\\
A_4 &= 14\\
A_5 &= 42\\
A_6 &= 132\\
A_7 &= 429\\
A_8 &= 1430\\
A_9 &= 4862\\
A_{10} &= 16796\\
A_{11} &= 58786\\
A_{12} &= 208012\\
A_{13} &= 742900\\
A_{14} &= 2674440\\
A_{15} &= 9694845\\
A_{16} &= 35357670\\
A_{17} &= 129644790\\
A_{18} &= 477638700\\
A_{19} &= 1767263190\\
A_{20} &= 6564120420\\
A_{21} &= 24466267020\\
A_{22} &= 91482563640\\
A_{23} &= 343059613650
\end{aligned}$$

Der vorliegende Aufsatz ist lediglich geschrieben, nicht um den in Rede stehenden interessanten Gegenstand zu erschöpfen, sondern vielmehr um zu einer neuen Untersuchung desselben anzuregen, welche uns auch nach den von den oben genannten trefflichen französischen Mathematikern mitgetheilten Untersuchungen noch sehr nöthig und in jeder Beziehung wünschenswerth zu sein scheint. Vorzüglich würde es natürlich auf die Auffindung eines ganz allgemeinen Beweises für die oben von uns gegebene Gleichung

$$A_i = \frac{(m-1)\,(im-i-1)\,(im-i-2)\,(im-i-3)\ldots(im-(2i-2))}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(i-1)}$$

ankommen, und diese Gleichung würde entweder aus den von Fuss gefundenen recurrirenden Formeln durch allgemeine Schlüsse abzuleiten oder unabhängig von diesen Formeln zu beweisen sein. In letzterer Beziehung dürfte es vielleicht angemessen sein, zu untersuchen, ob die von den genannten französischen Mathematikern in dem Falle $m=3$ angewandten Methoden nicht vielleicht einer Verallgemeinerung fähig sind, zu welcher Untersuchung ich namentlich die genannten Herren selbst hier aufzufordern mir erlauben möchte. Da übrigens Fuss ausdrücklich bemerkt, dass ihm von Pfaff geschrieben worden sei, dass auch er eine allgemeine Auflösung unsers Problems gefunden habe, so würde sich Herr Professor Dr. Gartz in Halle die Mathematiker gewiss sehr verbinden, wenn er in den, wie wir wissen, in seinen Händen befindlichen nachgelassenen Papieren Pfaffs nachsuchen wollte, ob sich in denselben einige, der öffentlichen Mittheilung werthe Aufzeichnungen über diesen Gegenstand befinden. In dem Archive wird denselben sehr gern eine Stelle eingeräumt werden.

Fuss macht am Ende seines Aufsatzes noch die folgende nicht unbeachtet zu lassende Bemerkung. Man setze

$$Z = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots\ldots$$

und

$$Z^{m-1} = C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \ldots\ldots;$$

so ist

$$(m-1)\, l\,(1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots\ldots)$$
$$= l\,(C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \ldots\ldots),$$

und folglich, wenn man differentiirt,

$$(m-1)\,\frac{A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \ldots\ldots}{1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots\ldots}$$
$$= \frac{C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \ldots\ldots}{C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \ldots\ldots},$$

woraus sich ohne alle Schwierigkeit die folgenden Gleichungen ergeben:

$$C_1 = \frac{(m-1)\,A_1C}{1},$$

$$C_2 = \frac{(m-2)\,A_1C_1 + (2m-2)\,A_2C}{2},$$

$$C_3 = \frac{(m-3)\,A_1C_2 + (2m-3)\,A_2C_1 + (3m-3)\,A_3C}{3},$$

$$C_4 = \frac{(m-4)\,A_1C_3 + (2m-4)\,A_2C_2 + (3m-4)\,A_3C_1 + (4m-4)\,A_4C}{4},$$

u. s. w.

Offenbar muss nun $C=1$ sein, und wenn man

$$C=A_1,\ C_1=A_2,\ C_2=A_3,\ C_3=A_4,\ \ldots.$$

setzt; so werden die obigen Gleichungen

$$A_1=1,$$

$$A_2=\frac{2m-2}{2}\,A_1A_1,$$

$$A_3=\frac{3m-4}{4}\,2A_1A_2,$$

$$A_4=\frac{4m-6}{6}\,(2A_1A_3+A_2A_2),$$

$$A_5=\frac{5m-8}{8}\,(2A_1A_4+2A_2A_3),$$

$$A_6=\frac{6m-10}{10}\,(2A_1A_5+2A_2A_4+A_3A_3),$$

$$A_7=\frac{7m-12}{12}\,(2A_1A_6+2A_2A_5+2A_3A_4),$$

u. s. w.

Hieraus, in Verbindung mit dem Obigen, ergiebt sich nun unmittelbar, dass die oben durch

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ \ldots.$$

bezeichneten Grössen die Coefficienten in der Entwickelung der Function Z in eine Reihe sind, welche den beiden Bedingungen

$$Z=1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\ldots.,$$

$$Z^{m-1}=A_1+A_2x+A_3x^2+A_4x^3+A_5x^4+\ldots.,$$

d. h. welche der Gleichung

$$Z^{m-1}=\frac{Z-1}{x},$$

oder der Gleichung

$$Z^{m-1}-\frac{1}{x}\,Z+\frac{1}{x}=0$$

genügt, und man kann also die in Rede stehenden Grössen auch finden, wenn man die Function Z in eine Reihe entwickelt.

Von dieser schon von Fuss dem Wesentlichen nach angegebenen Methode der Entwickelung der Grössen A_1, A_2, A_3, A_4, ... ist die von Herrn Binet in dem Falle $m=3$ angewandte Methode nicht verschieden. In diesem Falle geht nämlich die obige allgemeine Gleichung in die quadratische Gleichung

$$Z^2-\frac{1}{x}\,Z+\frac{1}{x}=0$$

über, und durch Auflösung dieser Gleichung ergiebt sich

$$Z = \frac{1}{2x}(1 \pm \sqrt{1-4x}),$$

wo man aber offenbar das untere Zeichen nehmen, und folglich

$$Z = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x})$$

setzen muss, weil offenbar

$$\frac{1}{2x}(1 + \sqrt{1-4x})$$

für $x = 0$ nicht der Einheit gleich werden kann, wie es wegen der Gleichung

$$Z = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots.$$

erforderlich ist.

Entwickelt man nun $\sqrt{1-4x}$ nach dem Binomischen Lehrsatze in eine Reihe, so erhält man

$$Z = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}.4 + \frac{1}{2.4}.4^2 x + \frac{1.3}{2.4.6}.4^3 x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6.8}.4^4 x^3 + \ldots.\right\},$$

und folglich

$$A_{n-2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7\ldots(2n-5)}{2.4.6.8\ldots(2n-2)}.4^{n-1},$$

also, weil $4^{n-1} = 2^{2(n-1)}$ ist,

$$A_{n-2} = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-5)}{1.2.3.4\ldots(n-1)}.2^{n-2},$$

oder

$$A_{n-2} = \frac{2.6.10.14.18\ldots(4n-10)}{2.3.4.5.6\ldots(n-1)},$$

welches ganz die von **Euler** für den Fall $m = 3$ gegebene Formel ist, welche wir schon oben auf anderm Wege gefunden haben.

XXVIII.

Ueber die Differentialquotienten von log x und a^x in Bezug auf eine Bemerkung des Herrn Liouville in dessen Journal de Mathématiques. Août 1840. p. 280.

Von

dem Herausgeber.

Cauchy hat bekanntlich die Entwickelung der wichtigen Differentialquotienten der Functionen log x und a^x auf den Satz gegründet, dass sich die Grösse $(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$, wenn Θ sich der Null nähert, der Summe der convergirenden Reihe

$$1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \frac{1}{1.2.3.4}, \ldots.,$$

welche wir wie gewöhnlich durch e bezeichnen wollen, als ihrer Gränze nähert, und diese Entwickelung verdient allerdings ganz besondere Empfehlung, weil sie als eine völlig elementare bezeichnet werden kann, indem dabei ausser dem Binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten und der Lehre von den geometrischen Progressionen bloss noch der Satz vorausgesetzt wird, dass die obige Reihe eine convergirende Reihe ist, und folglich eine bestimmte, vorher durch e bezeichnete Summe hat, wovon man sich aber sehr leicht auf folgende Art überzeugen kann.

Man setze

$$s_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1\ldots n},$$

so ist offenbar für $n > 2$

$$s_n < 2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

und folglich nach der Lehre von den geometrischen Progressionen

$$s_n < 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

also immer $s_n < 3$, da $s_1 = 2$ und $s_2 = 2,5$ ist. Weil nun s_n, wenn n wächst, fortwährend wächst, aber, wie gross auch n werden mag, doch immer kleiner als 3 ist, so muss sich s_n offenbar einer gewissen bestimmten endlichen Gränze immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn n in's Unendliche wächst, wodurch die Convergenz der Reihe $1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1\,.\,2}, \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}, \ldots$ bewiesen ist.

Gegen den von Cauchy gegebenen Beweis des oben im Eingange erwähnten Satzes hat aber Herr Liouville in seinem Journal (Août. 1840. p. 280) die sehr gegründete Einwendung gemacht, dass demselben die Annahme zum Grunde liege, dass das Product $(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\ldots(1-\frac{n-1}{m})$ für $m=\infty$ der Einheit gleich werde, welches zwar dann seine Richtigkeit habe, wenn n eine bestimmte von m unabhängige Zahl sei, sich aber dann offenbar nicht mehr behaupten lasse, wenn n von m abhängig, z. B. $n=m$ oder $n=m-1$ sei, und sieht sich dadurch veranlasst, den folgenden Beweis des in Rede stehenden Satzes zu geben, welchen wir hier mittheilen wollen, da wir ihn für völlig streng halten, indem wir zugleich nicht unerwähnt lassen können, dass nach Herrn Liouvilles eigner Bemerkung Herr Lejeune-Dirichlet ähnliche Betrachtungen in einer seiner Abhandlungen sehr glücklich angewandt hat *).

Wir wollen zuerst annehmen, dass $\Theta=\frac{1}{\mu}$ sei, wo μ eine positive ganze Zahl bezeichnen soll. Dann wird unser Satz bewiesen sein, wenn wir zeigen können, dass die Grösse

$$(1+\frac{1}{\mu})^{\mu}$$

sich, wenn die positive ganze Zahl μ in's Unendliche wächst, der Grösse e als ihrer Gränze nähert. Diess lässt sich aber auf folgende Art beweisen.

Es ist

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\ldots+\frac{1}{1\,.\,.\,(n-1)}$$
$$+\frac{1}{1\,.\,.\,.\,n}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}+\ldots\right\},$$

und nach dem Binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten ist

---

*) In seinen so eben erschienenen Leçons de Calcul différentiel et de Calcul intégral, rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. Cauchy. T. I. Paris. 1840. p. XXII. hat sich zwar Herr Abbé Moigno gegen die obige Bemerkung des Herrn Liouville erklärt, aber, wie es uns scheint, aus wenig haltbaren Gründen. Auf jeden Fall müsste doch bewiesen werden, dass $(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$ sich wirklich einer bestimmten Gränze nähert, wenn Θ sich der Null nähert, dass $(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$ für $\Theta=0$ wirklich einen bestimmten Gränzwerth hat, auch für's Erste ganz abgesehen von der Grösse dieses Werths. Aber eben dieses erhellet aus dem auf p. 3. ff. von Herrn Abbé Moigno gegebenen Beweise gar nicht mit der nöthigen Strenge, und diesen Beweis trifft nach unserer Ueberzeugung ganz die obige von Herrn Liouville gemachte sehr richtige und beachtungswerthe Einwendung.

$$(1+\frac{1}{\mu})^\mu = 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{\mu}}{1\,.\,2}+\frac{(1-\frac{1}{\mu})\,(1-\frac{2}{\mu})}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{\mu})\,(1-\frac{2}{\mu})\,.\,.\,(1-\frac{n-2}{\mu})}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-1)}$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{\mu})\,(1-\frac{2}{\mu})\,.\,.\,(1-\frac{n-1}{\mu})}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n}\left\{1+\frac{1-\frac{n}{\mu}}{n+1}\right.$$

$$\left.+\frac{(1-\frac{n}{\mu})\,(1-\frac{n+1}{\mu})}{(n+1)\,(n+2)}+\ldots+\frac{(1-\frac{n}{\mu})\ldots(1-\frac{\mu-1}{\mu})}{(n+1)\,(n+2)\ldots\mu}\right\}.$$

Nun ist aber

$$1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}+\ldots\ldots$$

$$<1+\frac{1}{n+1}+(\frac{1}{n+1})^2+(\frac{1}{n+1})^3+\ldots\ldots,$$

und folglich nach der Lehre von den geometrischen Progressionen

$$1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}+\ldots\ldots<1+\frac{1}{n}.$$

Also kann man

$$1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}+\ldots\ldots=1+\frac{\xi}{n},$$

wo ξ einen positiven echten Bruch bezeichnet, und folglich nach dem Obigen

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\ldots+\frac{1}{1\ldots(n-1)}+\frac{1}{1\ldots n}\,(1+\frac{\xi}{n})$$

setzen.

Offenbar ist aber

$$1+\frac{1-\frac{n}{\mu}}{n+1}+\frac{(1-\frac{n}{\mu})\,(1-\frac{n+1}{\mu})}{(n+1)\,(n+2)}+\ldots+\frac{(1-\frac{n}{\mu})\ldots(1-\frac{\mu-1}{\mu})}{(n+1)\,(n+2)\ldots\mu}$$

$$<1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}+\ldots\ldots,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden um so mehr

$$1+\frac{1-\frac{n}{\mu}}{n+1}+\frac{(1-\frac{n}{\mu})\,(1-\frac{n+1}{\mu})}{(n+1)\,(n+2)}+\ldots+\frac{(1-\frac{n}{\mu})\ldots(1-\frac{\mu-1}{\mu})}{(n+1)\,(n+2)\ldots\mu}<1+\frac{1}{n},$$

also

$$1+\frac{1-\frac{n}{\mu}}{n+1}+\frac{(1-\frac{n}{\mu})\,(1-\frac{n+1}{\mu})}{(n+1)\,(n+2)}+\ldots+\frac{(1-\frac{n}{\mu})\ldots(1-\frac{\mu-1}{\mu})}{(n+1)(n+2)\ldots\mu}=1+\frac{\eta}{n},$$

wo η einen positiven echten Bruch bezeichnet; folglich nach dem Obigen

$$(1+\frac{1}{\mu})^\mu = 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{\mu}}{1\,.\,2}+\frac{(1-\frac{1}{\mu})\,(1-\frac{2}{\mu})}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{\mu})(1-\frac{2}{\mu})\ldots(1-\frac{n-2}{\mu})}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}+\frac{(1-\frac{1}{\mu})(1-\frac{2}{\mu})\ldots(1-\frac{n-1}{\mu})}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\,(1+\frac{\eta}{n}).$$

Hieraus folgt aber sehr leicht

$$(1+\frac{1}{\mu})^\mu = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\ldots+\frac{1}{1\ldots(n-1)}+\frac{1}{1\ldots n}(1+\frac{\eta}{n})+\varepsilon,$$

wo ε eine Grösse bezeichnet, welche für jedes bestimmte von μ unabhängige n sich der Null nähert, wenn μ wächst, und derselben beliebige nahe gebracht werden kann, wenn man nur μ gross genug werden lässt.

Aus dem Obigen ergiebt sich nun unmittelbar die Gleichung

$$e-(1+\frac{1}{\mu})^\mu = \frac{1}{1\ldots n}\,.\,\frac{\xi-\eta}{n}-\varepsilon.$$

Weil ξ und η positive echte Brüche sind, so ist der absolute Werth von

$$\frac{1}{1\ldots n}\,.\,\frac{\xi-\eta}{n}$$

nie grösser als

$$\frac{1}{1\ldots n}\,.\,\frac{1}{n},$$

und es ist folglich, wenn wir den absoluten Werth von ε im Allgemeinen durch ε' bezeichnen, der absolute Werth von

$$e-(1+\frac{1}{\mu})^\mu$$

nie grösser als

$$\frac{1}{1\ldots n}\,.\,\frac{1}{n}+\varepsilon'.$$

Nimmt man nun n nur gross genug an, so kann

$$\frac{1}{1\ldots n}\,.\,\frac{1}{n}$$

der Null beliebig nahe gebracht werden. Lässt man dann, indem n seinen jetzt bestimmten Werth fortwährend behält, μ in's Unendliche wachsen, so nähert sich nach dem Obigen ε' der Null bis zu jedem beliebigen Grade, und man sieht also nun hieraus, dass sich, wenn μ in's Unendliche wächst,

$$e-(1+\frac{1}{\mu})^\mu$$

der Null, also $(1+\frac{1}{\mu})^\mu$ der Gränze e bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wie behauptet wurde.

Ist ferner Θ kein positiver Bruch, dessen Zähler die Einheit, der Nenner eine positive ganze Zahl ist, sondern überhaupt nur eine positive Grösse, so seien μ und $\mu'=\mu+1$ die beiden positiven ganzen Zahlen, zwischen denen der Bruch $\frac{1}{\Theta}$ liegt. Dann ist

$$\frac{1}{\Theta}=\mu+x=\mu'-x',$$

wo x und x' zwei positive echte Brüche sind. Die Grösse $(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$ ist offenbar zwischen den Gränzen

$$\left\{(1+\frac{1}{\mu})^{\mu}\right\}^{1+\frac{x}{\mu}} \text{ und } \left\{(1+\frac{1}{\mu'})^{\mu'}\right\}^{1-\frac{x'}{\mu'}}$$

enthalten. Lässt man nun Θ sich der Null nähern, so werden μ und μ' sich dem Unendlichen, folglich nach dem Vorhergehenden die Grössen

$$(1+\frac{1}{\mu})^{\mu} \text{ und } (1+\frac{1}{\mu'})^{\mu'}$$

sich beide der Gränze e nähern. Weil ferner x und x' positive echte Brüche sind, so nähern sich, wenn Θ sich der Null nähert, $1+\frac{x}{\mu}$ und $1-\frac{x'}{\mu'}$ beide der Einheit als ihrer Gränze, und die Grössen

$$\left\{(1+\frac{1}{\mu})^{\mu}\right\}^{1+\frac{x}{\mu}} \text{ und } \left\{(1+\frac{1}{\mu'})^{\mu'}\right\}^{1-\frac{x'}{\mu'}}$$

nähern sich folglich offenbar beide der Grösse e als ihrer Gränze. Da nun aber zwischen diesen Grössen die Grösse $(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$ enthalten ist, so nähert sich auch diese Grösse, wenn Θ sich der Null nähert, offenbar der Grösse e als ihrer Gränze.

Wenn endlich Θ negativ ist, so kann, da man sich Θ der Null nähern lässt, immer angenommen werden, dass der absolute Werth von Θ kleiner als die Einheit ist. Setzt man nun unter dieser Voraussetzung

$$1+\Theta=\frac{1}{1+\omega},\ \Theta=-\frac{\omega}{1+\omega},\ \omega=-\frac{\Theta}{1+\Theta};$$

so ist offenbar ω positiv und nähert sich der Null, wenn Θ sich der Null nähert. Also nähert sich nach dem Vorhergehenden

$$(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$$

der Gränze e, wenn Θ sich der Null nähert, und $1+\omega$ nähert sich unter derselben Voraussetzung der Einheit als Gränze. Folglich nähert sich offenbar auch

$$\left\{(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}\right\}^{1+\omega}$$

der Grösse e als Gränze, wenn Θ sich der Null nähert. Nun ist aber

$$(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}=(\frac{1}{1+\omega})^{-\frac{1+\omega}{\omega}}=\left\{(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}\right\}^{1+\omega},$$

und es wird sich also auch $(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$ der Gränze e nähern, wenn Θ sich der Null nähert.

Hiermit ist nun ganz im Allgemeinen bewiesen, dass die Grösse

$$(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$$

sich, wenn Θ sich der Null nähert, immer der Grösse

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{1\ldots4} + \ldots\ldots$$

als ihrer Gränze nähert.

Von diesem Satze lässt sich jetzt die folgende Anwendung zur Entwickelung der Differentialquotienten der beiden Functionen

$$y = \log\, x \text{ und } y = a^x$$

machen.

Sei zuerst $y = \log\, x$, so ist

$$\Delta y = \log\, (x + \Delta x) - \log\, x = \log\, (1 + \frac{\Delta x}{x}),$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\, (1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}.$$

Setzen wir nun $\Delta x = \Theta x$, so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\, (1+\Theta)}{\Theta x} = \frac{\log\,.\,(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}}{x}.$$

Wenn Δx sich der Null nähert, so nähert sich offenbar auch Θ der Null, und $(1+\Theta)^{\frac{1}{\Theta}}$ nähert sich folglich der Gränze e, wie im Vorhergehenden gezeigt worden ist. Also nähert der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sich der Gränze $\frac{\log\, e}{x}$, wenn Δx sich der Null nähert. Die Gränze, welcher der Diffenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sich nähert, wenn Δx sich der Null nähert, ist aber bekanntlich der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, und es ist folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log\, e}{x} \text{ oder } d\, \log\, x = \frac{\log\, e}{x}\, dx.$$

Sei ferner $y = a^x$, so ist $\log\, y = x\, \log\, a$, und folglich

$$x = \frac{\log\, y}{\log\, a}.$$

Daher ist nach einem bekannten Elementarsatze der Differentialrechnung und nach dem Vorhergehenden

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\log\, a} \cdot \frac{d\, \log\, y}{dy} = \frac{\log\, e}{y\, \log\, a} = \frac{\log\, e}{a^x\, \log\, a}.$$

Nach einem andern bekannten Satze der Differentialrechnung ist aber

$$\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1,$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log a}{\log e}\, a^x \text{ oder } d\,.\,a^x = \frac{\log a}{\log e}\, a^x\, dx.$$

Die aus dem Obigen bekannte Zahl e betrachtet man bekanntlich als die Basis eines eignen logarithmischen Systems, welches man das natürliche oder hyperbolische System nennt, und bezeichnet die Logarithmen dieses Systems gewöhnlich bloss durch l. Ist nun b die Basis der durch log bezeichneten Logarithmen und N eine beliebige Zahl, so ist

$$N = b^{\log N} = e^{lN},$$

also, wenn man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt,

$$\log N\,.\,lb = lN \text{ oder } \log N = \frac{lN}{lb}.$$

Folglich ist

$$\log e = \frac{le}{lb} = \frac{1}{lb},$$

und daher nach dem Obigen

$$d \log x = \frac{dx}{xlb}, \text{ also } dlx = \frac{dx}{x}.$$

Ferner ist

$$\log a = \frac{la}{lb},\ \log e = \frac{le}{lb} = \frac{1}{lb}.$$

also

$$\frac{\log a}{\log e} = la,$$

und folglich nach dem Obigen

$$d\,.\,a^x = a^x\, la dx.$$

XXIX.

Mathematische Bemerkungen von dem Herrn Major und Ritter Dr. G. W. Müller zu Hannover.

I.

Euklid stellt folgenden Satz an die Spitze des 10ten Buchs: „Wenn zwei ungleiche Grössen gegeben sind und es wird von der grösseren mehr als die Hälfte (oder auch nur die Hälfte) weggenommen, von dem Reste abermals mehr als die Hälfte (oder auch nur die Hälfte), und dies immer so fort: so bleibt einmal ein Rest, welcher kleiner ist, als die gegebene kleinere Grösse.“

Man kann diesem Satze folgende Erweiterung geben: „Wenn von einer gegebenen Grösse G der $m$te Theil, d. h. $\frac{1}{m}G$, weggenommen wird, von dem bleibenden Reste wiederum dessen $m$ter Theil und dies immer so fort: so bleibt einmal ein Rest, welcher kleiner ist, als jeder gegebene $u$te Theil der Grösse G.“

Beweis: Es bezeichne $\underset{(r)}{G}$ den $r$ten Rest, so ist

$$\underset{(1)}{G} = G - \frac{1}{m} \, . \, G = \frac{m-1}{m} \, . \, G$$

$$\underset{(2)}{G} = \frac{(m-1)}{m} \, . \, \underset{(1)}{G} = \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 . \, G$$

$$\vdots$$

$$\underset{(r)}{G} = \left(\frac{m-1}{m}\right)^r . \, G$$

Nun wird $\underset{(r)}{G} < \frac{1}{u} \, . \, G$ sein, wenn $\left(\frac{m-1}{m}\right)^r < \frac{1}{u}$ oder $\left(\frac{m}{m-1}\right)^r > u$, also, auf beiden Seiten die Logarithmen genommen, wenn $r(\log m - \log (m-1)) > \log u$ d. h. $r > \frac{\log u}{\log m - \log (m-1)}$ ist. Da nun in dieser Beziehung m und u positive Zahlenwerthe bedeuten die grösser als 1 sind, so hat der Quotient $\frac{\log u}{\log m - \log (m-1)}$ einen in jedem vorliegenden Falle angebbaren positiven Zahlenwerth, mithin kann die für die ganze Zahl r geforderte Bedingung jedesmal erfüllt werden.

Es folgt also hieraus, dass durch Fortsetzung der Wegnahme des $m$ten Theils jedes Restes einmal ein Rest kommen wird kleiner wie jeder gegebene Theil der Grösse und noch um so mehr, wenn bei jeder Wegnahme noch mehr wie der *m*te Theil genommen wird. Bei der Lehre von der Convergenz der Reihen lässt sich von diesem erweiterten Satze nützliche Anwendung machen.

II.

Bei der Bildung successiver Differenzreihen aus einerlei Grundreihe lässt sich die Frage aufwerfen „wie und aus welchen Gliedern der Grundreihe ist das *n*te Glied der *m*ten Differenzreihe zusammengesetzt?“ Die Beantwortung wird durch folgende **combinatorische** Betrachtung sehr erleichtert.

Es sei a, b, c, d, . . eine Reihe von Elementen, aus denen durch Zusammenstellung von je zwei benachbarten eine Reihe von Complexionen ab, bc, cd, . . . gebildet wird, so entsteht in dieser letzteren jede nachfolgende Complexion dadurch aus der vorhergehenden Complexion, dass jedes Element mit dem nächsthöheren vertauscht wird. Wird aus der so gebildeten Reihe auf gleiche Weise eine neue Reihe von Complexionen $abbc$, $bccd$, . . . dargestellt, so gilt in dieser für die Entstehung einer nachfolgenden aus der vorhergehenden Complexion dasselbe Gesetz; das höchste Element der nachfolgenden kommt also nicht in der vorhergehenden und das niedrigste der vorhergehenden nicht in der nachfolgenden Complexion vor, die zwischenliegenden Elemente sind aber in beiden zugleich vorhanden. Eine neue Zusammenstellung von zwei benachbarten Complexionen wird also das niedrigste Element der vorhergehenden, das höchste der nachfolgenden und die zwischenliegenden Elemente beider enthalten.

Hieraus folgt, dass in jeder neuen Reihe von Complexionen, die durch Zusammenstellung von je zwei benachbarten Complexionen einer vorhergehenden Reihe gebildet wird,

1) jede nachfolgende Complexion aus der vorhergehenden durch Vertauschung der Elemente mit den nächsthöheren erhalten wird;
2) in die Zusammensetzung jeder Complexion ein successives Element mehr eingeht als in die der vorhergehenden Reihe.

Da nun in der 1ten Complexionen-Reihe in jeder Complexion 2 successive Elemente vorkommen, so enthalten die Complexionen der 2ten Reihe 3, der 3ten Reihe 4 und allgemein der *m*ten Reihe $(m + 1)$ successive Elemente. Das Anfangs-Element der Complexion bestimmt sich dabei durch die Stelle welche die Complexion in ihrer Reihe einnimmt; es ist das gleichhohe Element aus der Reihe der Elemente, d. h. das Element, welches in dieser in der gleichhohen Stelle vorkommt.

Die Zahlen welche die Zusammensetzung der Complexionen aus den successiven Elementen angeben, sind für die *m*te Complexionen-Reihe die Binomial-Coefficienten der *m*ten Potenz. Denn offenbar sind für die 1te Complexionen-Reihe ab, bc, cd, . . . jene Wiederholungszahlen 1 und 1 die Binomial-Coefficienten der 1ten Potenz, desgleichen für die 2te Complexionen-Reihe $abbc$, $bccd$, . . .

die Wiederholungszahlen 1, 2, 1 die Binomial-Coefficienten der 2ten Potenz, überhaupt aber setzen sich bei der Zusammenstellung von zwei benachbarten Complexionen der $r$ten Reihe zu einer Complexion der $(r+1)$ten Reihe ihre Wiederholungszahlen eben so für die neue Complexion zusammen, wie, bei der Zusammenstellung der beiden Partial-Produkte der $r$ten Potenz des Binomiums in den ersten und zweiten Theil des Binomiums zur Darstellung der $(r+1)$ten Potenz, sich die Binomial-Coefficienten der $r$ten Potenz zu denen der $(r+1)$ten Potenz zusammensetzen *).

Bis hieher ist für die arithmetische Beziehung der Zusammenstellung von je zwei benachbarten Gliedern der einen Reihe zu einem Gliede einer neuen Reihe nichts angenommen worden. Fügt man die Bedingung hinzu, dass das vorhergehende Glied mit entgegengesetztem Zeichen zum nachfolgenden hinzugesetzt werden soll, wie es das Schema

$$\begin{array}{l} a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots \\ \bar{a}b,\ \bar{b}c,\ \bar{c}d,\ \ldots\ldots \\ a\bar{b}\bar{b}c,\ b\bar{c}\bar{c}d,\ c\bar{d}\bar{d}e,\ \ldots \\ \bar{a}bbb\bar{c}\bar{c}\bar{c}d,\ \bar{b}ccc\bar{d}\bar{d}\bar{d}e,\ \bar{c}ddd\bar{e}\bar{e}\bar{e}f,\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

besagt, wo das — Zeichen über dem Elemente angedeutet ist, so haben die in zwei benachbarten Complexionen derselben Reihe enthaltenen gleichen Elemente entgegengesetzte Zeichen, und da bei der Zusammenstellung zu einer neuen Complexion das Zeichen in der vorhergehenden umgekehrt wird, so bekommen dadurch die gleichen Elemente aus beiden einerlei Zeichen, nämlich dasselbe was sie in der nachfolgenden hatten; es ändern sich also die Wiederholungszahlen nicht, welche für die neue Complexion hervorgehen. Nun hat in der ersten Complexionen-Reihe das letzte Element der Complexion das ursprüngliche $+$ Zeichen, mithin auch in jeder folgenden Complexionen-Reihe; da ferner in den Complexionen der 1sten Reihe das Zeichen von Element zu Element wechselt, so wird es auch in den Complexionen der folgenden Reihen von Element zu Element wechseln. Zur Anwendung auf die vorliegende Frage sei die Grundreihe durch

$$y_0 + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_n + \ldots$$

und die $m$te Differenzreihe durch

$$\underset{0}{{}^m\Delta y} + \underset{1}{{}^m\Delta y} + \underset{2}{{}^m\Delta y} + \ldots\ldots + \underset{n}{{}^m\Delta y} + \ldots\ldots$$

---

*)
$$\begin{array}{llllll} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ \hline 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ \hline 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

angedeutet, so dass das $n$te auf das Anfangsglied folgende Glied für die Grundreihe durch y_n, für die $m$te Differenzreihe durch ${}^m\underset{n}{\Delta y}$ bezeichnet wird. Lässt man nun die vorhin gebrauchten combinatorischen Elemente a, b, c, ... die Glieder dieser Grundreihe bedeuten und der Bequemlichkeit des Vorzeichens wegen in den Complexionen die Elemente in fallender Ordnung auf einander folgen, so ergiebt sich unmittelbar

$$ {}^m\underset{0}{\Delta y} = y_m - {}^m\mathfrak{B}_1 y_{m-1} + {}^m\mathfrak{B}_2 y_{m-2} - \ldots\ldots (-1)^r\, {}^m\mathfrak{B}_r . y_{m-r} \ldots\ldots (-1)^m . y_0 $$

$$ {}^m\underset{n}{\Delta y} = y_{m+n} - {}^m\mathfrak{B}_1 y_{m+n-1} + \ldots\ldots (-1)^r\, {}^m\mathfrak{B}_r . y_{m+n-r} \ldots\ldots (-1)^m y_n $$

wobei ${}^m\mathfrak{B}_r$ den $r$ten Binomial-Coefficienten der $m$ten Potenz, nämlich ${}^m\mathfrak{B}_r = \dfrac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots.(m-(r-1))}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,r}$ bezeichnet, so dass ${}^m\mathfrak{B}_0 = 1$, ${}^m\mathfrak{B}_1 = m$ ist.

Wenn man wiederum die Anfangsglieder der Grund- oder Hauptreihe und der successiven Differenzreihen je zwei und zwei, das nachfolgende zu dem vorhergehenden addirt, so erhält man der Folge nach die ersten Glieder dieser Reihen, aus diesen auf gleiche Weise die Reihe der zweiten Glieder u. s. w. f. Die Anfangsglieder in den so erhaltenen Reihen sind die successiven Glieder der Hauptreihe. Die vorhin angestellte combinatorische Betrachtung lässt sich hierauf unmittelbar anwenden, indem man die Anfangsglieder der Reihen als die Elemente und die paarweise Zusammenstellung als eine Addition ansieht. Man erhält also

$$ y_m = y_0 + {}^m\mathfrak{B}_1\, {}^1\underset{0}{\Delta y} + {}^m\mathfrak{B}_2\, {}^2\underset{0}{\Delta y} + \ldots. + {}^m\mathfrak{B}_r . {}^r\underset{0}{\Delta y} + \ldots + {}^m\underset{0}{\Delta y} $$

oder fallend geordnet

$$ y_m = {}^m\underset{0}{\Delta y} + {}^m\mathfrak{B}_1\, {}^{m-1}\underset{0}{\Delta y} + {}^m\mathfrak{B}_2\, {}^{m-2}\underset{0}{\Delta y} + . + {}^m\mathfrak{B}_r\, {}^{m-r}\underset{0}{\Delta y} + \ldots + y_0 . $$

Sieht man die Hauptreihe $y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots$ selbst als die erste Differenzreihe einer summatorischen Reihe an, deren Anfangsglied 0 ist, $0 + S_1 + S_2 + S_3 + \ldots. + S_m + \ldots.$, so hat man durch Anwendung derselben Betrachtung

$$ S_m = 0 + {}^m\mathfrak{B}_1 y_0 + {}^m\mathfrak{B}_2\, {}^1\underset{0}{\Delta y} + {}^m\mathfrak{B}_3\, {}^2\underset{0}{\Delta y} + \ldots. + {}^m\mathfrak{B}_r\, {}^{r-1}\underset{0}{\Delta y} + \ldots. + {}^{m-1}\underset{0}{\Delta y} $$

wodurch die Zusammensetzung des summatorischen Gliedes der Hauptreihe aus ihrem Anfangsgliede und aus den Anfangsgliedern der successiven Differenzreihen gegeben wird.

XXX.

Solutio casus irreducibilis optica oder Trisectio et multisectio anguli optica.

Von dem

Herrn Professor C. J. D. Hill

an der Universität zu Lund.

(Nach dem Schwedischen des Herrn Verfassers von dem Herrn Doctor Creplin zu Greifswald.) *)

Es seien OXX'' und $OX'X'''$ (Taf. II. Fig. 9.) zwei gegen dieselbe Ebene winkelrechte, um O bewegliche Planspiegel und φ ein Winkel, dessen Theilung bekannt ist **), z. B. ein rechter Winkel. Man nehme nun die Linie OX, die wir durch X bezeichnen wollen, an, und setze die bekannte Grösse $XS\varphi = c$. Soll dann z. B. der Winkel ψ in drei gleiche Theile getheilt werden, so nehme man die Linie $OX''' = X'''$ so an, dass $X'''S\psi = c$ ist, und findet dann

$$\tfrac{1}{3}\psi = \tfrac{1}{3}\varphi - \omega \text{ ***}),$$

wenn die Spiegel so um O gedreht werden, dass ein von dem Punkte X, welcher so wie der Punkt X''' vorher durch eine Metallspitze oder einen Diamant eingegraben sein kann, ausgehender Strahl $XX'X''$ nach zwei Reflexionen auf den Punkt X''' fällt. Denn dann ist der Winkel $\varphi' = \varphi'$, $\varphi'' = \varphi''$, ferner

$$\varphi' = \varphi - \omega,$$

$$\varphi'' = \varphi' - \omega = \varphi - 2\omega,$$

$$\varphi''' = \varphi'' - \omega = \varphi - 3\omega;$$

---

*) Ich hoffe, dass der Sinn des Herrn Verfs. überall richtig getroffen sein wird. G.

**) D. h. welchen man, wenn überhaupt die Aufgabe die Theilung eines gegebenen Winkels in n gleiche Theile zu theilen verlangt, in n gleiche Theile zu theilen im Stande ist. Einen solchen Winkel würde man sich immer leicht dadurch bilden können, dass man irgend einen beliebigen Winkel n mal neben einander legte. G.

***) Statt des hier gebrauchten Zeichens ω steht im Manuscripte und in den Figuren ein nur schwer erkennbares Zeichen, dessen Stelle durch den Buchstaben ω, wie ich glaube, zweckmässig vertreten werden kann. $S\varphi$ bedeutet immer sin φ. G.

und, wenn $OX' = X'$, $OX'' = X''$ gesetzt wird,

$$X : X' = S\varphi' : S\varphi,$$
$$X' : X'' = S\varphi'' : S\varphi',$$
$$X'' : X''' = S\varphi''' : S\varphi'';$$

also componendo

$$X : X''' = S\varphi''' : S\varphi,$$

folglich

$$X''' S\varphi''' = X S\varphi.$$

Wir machten aber

$$X''' S\psi = c = X S\varphi.$$

Also ist $S\varphi''' = S\psi$, und folglich $\varphi''' = \psi = \varphi - 3\omega$ (oder $\varphi''' = \psi - 2n\pi$, wenn $\psi > 2\pi$, u. s. w.), woraus $\frac{1}{3}\psi = \frac{1}{3}\varphi - \omega$, w. z. b. w.

So bekommt man auch, wenn $X^V S\varphi^V = c$ ist, nach vier Reflexionen $\frac{1}{5}\varphi^V$, wobei man Taf. II. Fig. 10. zu vergleichen hat. u. s. w.

Anm. 1. Es versteht sich, dass umgekehrt auch $OX^V = X^V$ nach Gefallen angenommen und $OX = \frac{X^V S\varphi^V}{S\varphi}$ gemacht werden kann. Dies ist jedoch nicht so genau in der Praxis wie das Vorige.

Anm. 2. Die Trisectio anguli kann auch durch eine einzige Reflexion bewerkstelligt werden.

Denn es sei der Winkel ACB (Taf. II. Fig. 11.) gegeben, ABD ein Kreis und D ein gegen den Radius CD und die Ebene des Kreises winkelrechter Planspiegel, und es werde ein unendlich weit entfernter Gesichtspunkt (Mire) M für den über B hinaus verlängerten Radius CB gesucht. Ferner werde der Spiegel D nebst dem Radius CD so lange gedreht, bis der Punkt M durch Reflexion von dem Spiegel D aus dem Punkte A gerade in dem durch einen Diamantstrich angedeuteten Durchschnittspunkte des Radius CD mit dem Spiegel gesehen wird. Verlängert man dann CD über C hinaus bis nach E, so ist der Winkel $ECB = \frac{1}{3} ACB$, oder der gegebene Winkel ACB dreigetheilt durch CE. Denn es ist der Winkel $ECB = EDM = EDA = \frac{1}{2} ACE$, und folglich $ACB = ACE + ECB = (2 + 1) \,.\, ECB = 3 \,.\, ECB$, wie behauptet wurde.

Anm. 3. Dies wird leicht auf dem Felde oder auf einer Theilmaschine bewerkstelligt.

XXXI.

Uebungsaufgaben für Schüler *).

1) Man soll beweisen, dass immer

$$\frac{(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(ab_1-a_1b)^2}{1+a_1^2+b_1^2} \overline{\underline{<}} (a-a_1)^2+(b-b_1)^2$$

ist.

2) Wenn man eine gerade Linie nach dem äussern und mittlern Verhältnisse theilt, so wird das Verhältniss der beiden Segmente zu einander durch den in's Unendliche fortlaufende Kettenbruch

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\text{etc.}}}}$$

ausgedrückt.

3) Die Zahlen x und y so zu bestimmen, dass die Summen $x+y$ und x^3+y^3 vollkommene Quadratzahlen werden.

4) Es sei AB ein beliebiger Kreisbogen, D dessen Mittelpunkt, so dass nämlich Arc AD = Arc BD ist, und E ein anderer beliebiger Punkt in demselben. Man soll beweisen, dass, wo man auch den Punkt E in dem Kreisbogen AB annehmen mag, immer Chord DA + Chord DB > Chord EA + Chord EB ist.

5) Die folgenden Eigenschaften der Tangenten der Parabel sind zu beweisen **).

Es seien an eine Parabel, deren Brennpunkt F ist, die drei Tangenten AB, CD, CE gezogen, so finden die folgenden Relationen Statt: ***)

a. Der von zwei Tangenten an ihrem Durchschnittspunkte gebildete Winkel ist der Summe der von ihnen mit den nach ihren Berührungspunkten gezogenen Vectoren eingeschlossenen Winkel gleich, d. h. es ist z. B. $\angle DCE = \angle CDF + \angle CEF$.

---

*) Nach einer von Herrn Professor Dr. Mensing zu Erfurt mir gemachten gütigen Mittheilung werden in Cambridge alljährlich die Aufgaben, welche bei den Prüfungen den Schülern gegeben werden, gedruckt. Es sind von mir die nöthigen Veranstaltungen getroffen worden, dass diese gewiss viel Gutes enthaltenden Aufgaben möglichst zeitig in meine Hände gelangen, und Herr Professor Dr. Mensing wird die Güte haben, das Brauchbare aus denselben im Archive mitzutheilen.

**) Diese Eigenschaften der Parabel sind aus einem sehr lesenswerthen kleinen Aufsatze des Herrn Directors Rümker zu Hamburg in dem Jahresberichte der dortigen mathem. Gesellsch. für 1840 entlehnt.

***) Die Figur wird sich ein Jeder leicht selbst entwerfen können. Die Tangente AB liegt zwischen den sich in C schneidenden, die Parabel in D und E berührenden Tangenten CD und CE, schneidet die erste in A, die zweite in B, und berührt die Parabel in G.

b. Der von zwei Tangenten an ihrem Durchschnittspunkte gebildete Winkel ist der Hälfte des von den nach ihren Berührungspunkten gezogenen Vectoren eingeschlossenen Winkels gleich, d. h. es ist z. B. $\angle DCE = \frac{1}{2} \angle DFE$.

c. Die vom Brennpunkte nach dem Durchschnittspunkte zweier Tangenten gezogene gerade Linie halbirt den von den nach den Berührungspunkten der beiden Tangenten gezogenen Vectoren eingeschlossenen Winkel.

d. Der um das durch die drei an die Parabel gezogenen Tangenten gebildete Dreieck ABC beschriebene Kreis geht jederzeit durch den Brennpunkt der Parabel.

e. Die Entfernung des Durchschnittspunktes zweier Tangenten vom Brennpunkte ist die mittlere Proportionale zwischen den nach den Berührungspunkten gezogenen Vectoren, d. h. es ist z. B.

$$DF : CF = CF : EF$$

f. Die Quadrate der Entfernungen des Durchschnittspunktes zweier Tangenten von ihren Berührungspunkten verhalten sich wie die nach den Berührungspunkten gezogenen Vectoren und wie die Producte der Entfernungen ihrer Endpunkte vom Brennpunkte. d. h. es ist immer z. B.

$$CD^2 : CE^2 = FD : FE$$

und

$$AB^2 : CD^2 : CE^2 = FA \times FB : FC \times FD : FC \times FE.$$

g. Zwischen den Seiten des Dreiecks ABC findet immer die Gleichung

$$AB \times FC = AC \times FB + BC \times FA$$

Statt.

h. Auch ist immer

$$AD : AC = BC : BE = GA : GB.$$

6) Es sind zwei Punkte A und B ihrer Lage nach gegeben; man soll die Lage zweier andern Punkte C und D bestimmen, wenn an denselben die Winkel ACD, BCD und ADC, BDC gemessen worden sind.

Diese, dem Pothenot'schen Probleme ähnliche Aufgabe, für welche in den Miscellen eine Auflösung durch die analytische Geometrie gegeben worden ist, soll sowohl durch blosse geometrische Constructionen, als auch durch die elementare Trigonometrie aufgelöst werden. Bei der Auflösung durch geometrische Construction wird man zugleich darauf zu sehen haben, dass dieselbe für die gewöhnliche Messtischpraxis (wie z. B. das sogenannte Rückwärtseinschneiden in der Feldmesskunst in Bezug auf das Pothenot'sche Problem) möglichst brauchbar wird.

7) Den Ausdruck $m \sin \alpha - n \sin \beta$ auf die Form $x \sin \varphi$ zu bringen.

8) Den Ausdruck $m \cos \alpha - n \cos \beta$ auf die Form $x \cos \varphi$ zu bringen.

9) Den Ausdruck $m \operatorname{tang} \alpha - n \operatorname{tang} \beta$ auf die Form $x \operatorname{tang} \varphi$ zu bringen.

10) Den Ausdruck $m \cot \alpha - n \cot \beta$ auf die Form $x \cot \varphi$ zu bringen.

11) Es sind AA, BB ein Paar in C sich schneidende gerade Linien, und D, E, F drei fixe Punkte oder Pole. Drei gerade Linien, welche durch diese Pole gehen, drehen sich so um dieselben, dass der Durchschnittspunkt der von D und E ausgehenden immer auf der Linie AA, der Durchschnittspunkt der von E und F ausgehenden immer auf der Linie BB liegt: man sucht den geometrischen Ort des Durchschnittspunkts der von D und F ausgehenden geraden Linien.

12) Ein gegebener Winkel dreht sich in seiner Ebene so, dass der eine Schenkel desselben immer durch einen der Lage nach gegebenen Punkt geht, der Scheitel aber sich immer auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie befindet: man sucht die Curve, welche von dem andern Schenkel des Winkels in seinen verschiedenen Lagen stetig berührt wird.

(Diese Aufgabe erfordert die Anwendung der Differentialrechnung.)

XXXII.

Miscellen.

In Nr. 419 der Astronomischen Nachrichten hat Herr Professor und Director Hansen in Seeberg eine interessante geodätische Aufgabe mitgetheilt und aufgelöst, welche dem längst bekannten Pothenot'schen Problem, das bekanntlich die Bestimmung der Lage eines Punktes aus drei gegebenen Punkten durch blosse Winkelmessungen an dem zu bestimmenden Punkte verlangt, an die Seite gesetzt zu werden verdient. Diese Aufgabe, welche übrigens nicht neu ist, und sich z. B. schon in J. H. van Swinden's Elementen der Geometrie, aus dem Holländischen übersetzt von C. F. A. Jacobi. Jena. 1834. S. 321 trigonometrisch aufgelöst findet, ist folgende:

Wenn zwei Punkte der Lage nach gegeben sind, so soll man die Lage zweier andern Punkte durch blosse Winkelmessungen an den letztern, ohne diese von den gegebenen Punkten aus zu beobachten, bestimmen.

Eine Auflösung dieses interessanten Problems lässt sich ohne besondere Schwierigkeit aus den in dem Aufsatze Nr. XIV. in dem ersten Hefte dieses Theils des Archivs gegebenen Formeln herleiten, wie wir jetzt in der Kürze zeigen wollen.

Die beiden der Lage nach gegebenen Punkte seien A' und A_1', und ihre Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem seien x', y' und x_1', y_1'. Die beiden Punkte, deren Lage bestimmt werden soll, seien A und A_1, und ihre Coordinaten in Bezug auf dasselbe System seien x, y und x_1, y_1. An dem Punkte A messe man nun die beiden 180° nicht übersteigenden Winkel $A'AA_1$, $A_1'AA_1$, und eben so messe man an dem

Punkte A_1 die beiden 180° nicht übersteigenden Winkel $A'A_1A$, $A_1'A_1A$, so hat man alle Data, welche zur Bestimmung der Coordinaten x, y und x_1, y_1 der beiden gesuchten Punkte A und A_1 nöthig sind, wie jetzt gezeigt werden soll.

Die Entfernungen des Punktes A von den Punkten A', A_1' wollen wir durch ϱ, ϱ_1, die Entfernungen des Punktes A_1 von den Punkten A', A_1' durch ϱ', ϱ_1', die Entfernung AA_1 der gesuchten Punkte A und A_1 von einander durch r bezeichnen. Denken wir uns ferner durch den Punkt A ein dem primitiven Systeme der xy paralleles Coordinatensystem der $\xi\eta$ gelegt, so soll der von der Linie AA_1 mit dem positiven Theile der Axe der ξ eingeschlossene Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der ξ an durch den rechten Winkel $(\xi\eta)$ hindurch von 0 bis 360° zählt, durch φ bezeichnet werden. Eben so wollen wir, wenn wir uns durch den Punkt A_1 ein dem primitiven Systeme der xy paralleles System der $\xi_1\eta_1$ gelegt denken, den von der Linie A_1A mit dem positiven Theile der Axe der ξ eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der ξ_1 an durch den rechten Winkel $(\xi_1\eta_1)$ hindurch von 0 bis 360° zählen, durch φ_1 bezeichnen. Dies vorausgesetzt haben wir nun nach den Gleichungen 2. in dem Aufsatze Nr. XIV. offenbar die folgenden Ausdrücke:

$$1.\quad\begin{cases}x_1=x+r\cos\varphi, & y_1=y+r\sin\varphi;\\ x'=x+\varrho\cos(\varphi+\alpha), & y'=y+\varrho\sin(\varphi+\alpha);\\ x_1'=x+\varrho_1\cos(\varphi+\beta), & y_1'=y+\varrho_1\sin(\varphi+\beta);\end{cases}$$

und

$$2.\quad\begin{cases}x=x_1+r\cos\varphi_1, & y=y_1+r\sin\varphi_1;\\ x'=x_1+\varrho'\cos(\varphi_1+\alpha_1), & y'=y_1+\varrho'\sin(\varphi_1+\alpha_1);\\ x_1'=x_1+\varrho_1'\cos(\varphi_1+\beta_1), & y_1'=y_1+\varrho_1'\sin(\varphi_1+\beta_1);\end{cases}$$

wo, wie sogleich erhellen wird, die Grössen α, β, α_1, β_1 aus den gemessenen Winkeln immer leicht gefunden werden können.

Aus den ersten Gleichungen in den Systemen 1. und 2. folgt

$$\sin\varphi=-\sin\varphi_1,\ \cos\varphi=-\cos\varphi_1,$$

also

$$\sin\varphi\cos\varphi_1-\cos\varphi\sin\varphi_1=\sin(\varphi-\varphi_1)=0,$$

und folglich

$$\varphi-\varphi_1=\varkappa\pi,\ \varphi_1=\varphi-\varkappa\pi,$$

wo $\varkappa$ eine ganze Zahl bezeichnet. Wäre diese ganze Zahl gerade, so wäre

$$\sin\varphi_1=\sin\varphi,\ \cos\varphi_1=\cos\varphi,$$

da doch nach dem Obigen

$$\sin\varphi_1=-\sin\varphi,\ \cos\varphi_1=-\cos\varphi$$

ist. Also ist $\varkappa$ eine ungerade Zahl, und folglich

$$\cos(\varphi_1+\alpha_1)=\cos(\varphi+\alpha_1-\varkappa\pi)=-\cos(\varphi+\alpha_1),$$

$$\sin(\varphi_1+\alpha_1)=\sin(\varphi+\alpha_1-\varkappa\pi)=-\sin(\varphi+\alpha_1),$$

$$\cos(\varphi_1+\beta_1)=\cos(\varphi+\beta_1-\varkappa\pi)=-\cos(\varphi+\beta_1),$$
$$\sin(\varphi_1+\beta_1)=\sin(\varphi+\beta_1-\varkappa\pi)=-\sin(\varphi+\beta_1).$$

Daher haben wir jetzt nach dem Obigen zwischen den zehn unbekannten Grössen x, y, x_1, y_1, ϱ, ϱ_1, ϱ', ϱ_1', r, φ die zehn folgenden Gleichungen:

$$3.\quad\begin{cases} x-x_1=-r\cos\varphi, & y-y_1=-r\sin\varphi;\\ x'=x+\varrho\cos(\varphi+\alpha), & y'=y+\varrho\sin(\varphi+\alpha),\\ x_1'=x+\varrho_1\cos(\varphi+\beta), & y_1'=y+\varrho_1\sin(\varphi+\beta);\\ x'=x_1-\varrho'\cos(\varphi+\alpha_1), & y'=y_1-\varrho'\sin(\varphi+\alpha_1),\\ x_1'=x_1-\varrho_1'\cos(\varphi+\beta_1), & y_1'=y_1-\varrho_1'\sin(\varphi+\beta_1); \end{cases}$$

aus denen also die in Rede stehenden zehn unbekannten Grössen zu bestimmen sind.

Eliminirt man ϱ, ϱ_1, ϱ', ϱ_1', so behält man die sechs folgenden Gleichungen:

$$4.\quad\begin{cases} x-x_1=-r\cos\varphi,\quad y-y_1=-r\sin\varphi;\\ \dfrac{y'-y}{x'-x}=\operatorname{tang}(\varphi+\alpha),\quad \dfrac{y_1'-y}{x_1'-x}=\operatorname{tang}(\varphi+\beta);\\ \dfrac{y'-y_1}{x'-x_1}=\operatorname{tang}(\varphi+\alpha_1),\quad \dfrac{y_1'-y_1}{x_1'-x_1}=\operatorname{tang}(\varphi+\beta_1) \end{cases}$$

zwischen den sechs unbekannten Grössen x, y, x_1, y_1, r, φ.

Durch Verbindung der beiden ersten mit den beiden letzten Gleichungen erhält man

$$\frac{y'-y-r\sin\varphi}{x'-x-r\cos\varphi}=\operatorname{tang}(\varphi+\alpha_1),\quad \frac{y_1'-y-r\sin\varphi}{x_1'-x-r\cos\varphi}=\operatorname{tang}(\varphi+\beta_1)$$

oder

$$5.\quad\begin{cases}(x'-x)\sin(\varphi+\alpha_1)-(y'-y)\cos(\varphi+\alpha_1)=r\sin\alpha_1,\\ (x_1'-x)\sin(\varphi+\beta_1)-(y_1'-y)\cos(\varphi+\beta_1)=r\sin\beta_1;\end{cases}$$

und folglich durch Division

$$6.\quad\frac{(x'-x)\sin(\varphi+\alpha_1)-(y'-y)\cos(\varphi+\alpha_1)}{(x_1'-x)\sin(\varphi+\beta_1)-(y_1'-y)\cos(\varphi+\beta_1)}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}.$$

Bringt man die zweiten Gleichungen in 4. auf die Form

$$\frac{y'-y}{x'-x}=\operatorname{tang}(\varphi+\alpha),\quad \frac{y'-y_1'-(y'-y)}{x'-x_1'-(x'-x)}=\operatorname{tang}(\varphi+\beta)$$

oder auf die Form

$$\frac{y'-y_1'+(y_1'-y)}{x'-x_1'+(x_1'-x)}=\operatorname{tang}(\varphi+\alpha),\quad \frac{y_1'-y}{x_1'-x}=\operatorname{tang}(\varphi+\beta);$$

so erhält man aus denselben leicht

$$x'-x=\frac{(y'-y_1')\cos(\varphi+\beta)-(x'-x_1')\sin(\varphi+\beta)}{\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\varphi+\alpha)}},$$

$$y'-y=\frac{(y'-y_1')\cos(\varphi+\beta)-(x'-x_1')\sin(\varphi+\beta)}{\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\varphi+\alpha)}};$$

$$x_1' - x = \frac{(y' - y_1')\cos(\varphi + \alpha) - (x' - x_1')\sin(\varphi + \alpha)}{\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\varphi + \beta)}},$$

$$y_1' - y = \frac{(y' - y_1')\cos(\varphi + \alpha) - (x' - x_1')\sin(\varphi + \alpha)}{\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\varphi + \beta)}}.$$

Führt man nun diese Ausdrücke für $x' - x$, $y' - y$, $x_1' - x$, $y_1' - y$ in die Gleichung 6. ein, so wird dieselbe

$$\frac{(x' - x_1')\sin(\varphi + \beta) - (y' - y_1')\cos(\varphi + \beta)}{(x' - x_1')\sin(\varphi + \alpha) - (y' - y_1')\cos(\varphi + \alpha)} \cdot \frac{\sin(\alpha - \alpha_1)}{\sin(\beta - \beta_1)} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}$$

oder

$$7.\quad \frac{(x' - x_1')\sin(\varphi + \beta) - (y' - y_1')\cos(\varphi + \beta)}{(x' - x_1')\sin(\varphi + \alpha) - (y' - y_1')\cos(\varphi + \alpha)} = \frac{\sin\alpha_1 \sin(\beta - \beta_1)}{\sin\beta_1 \sin(\alpha - \alpha_1)}.$$

Aus dieser Gleichung könnte man nun leicht $\operatorname{tang}\varphi$ entwickeln, und so zu der Auflösung der Aufgabe gelangen. Besser wird man aber auf folgende Art verfahren.

Aus den beiden Gleichungen

$$8.\quad x' - x_1' = R\cos E,\quad y' - y_1' = R\sin E$$

bestimme man auf bekannte Weise die beiden Grössen R und E, so hat man nach 7. die Gleichung

$$9.\quad \frac{\sin(\varphi + \beta - E)}{\sin(\varphi + \alpha - E)} = \frac{\sin\alpha_1 \sin(\beta - \beta_1)}{\sin\beta_1 \sin(\alpha - \alpha_1)};$$

also, wie man hieraus, wenn man auf beiden Seiten die Einheit addirt und subtrahirt, und dann dividirt, leicht findet:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\operatorname{tang}\{E - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - \varphi\} = \frac{\sin\alpha_1 \sin(\beta - \beta_1) + \sin\beta_1 \sin(\alpha - \alpha_1)}{\sin\alpha_1 \sin(\beta - \beta_1) - \sin\beta_1 \sin(\alpha - \alpha_1)},$$

und folglich

$$10.\quad \operatorname{tang}\{E - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - \varphi\} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\frac{\sin\alpha_1 \sin(\beta - \beta_1) + \sin\beta_1 \sin(\alpha - \alpha_1)}{\sin\alpha_1 \sin(\beta - \beta_1) - \sin\beta_1 \sin(\alpha - \alpha_1)}.$$

Berechnet man aber den Hülfswinkel Θ mittelst der Formel

$$11.\quad \operatorname{tang}\Theta = \frac{\sin\beta_1 \sin(\alpha - \alpha_1)}{\sin\alpha_1 \sin(\beta - \beta_1)},$$

so hat man zur Berechnung von φ nach 10. die Formel

$$12.\quad \operatorname{tang}\{E - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - \varphi\} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\operatorname{tang}(45^\circ + \Theta).$$

Aus 3. ergiebt sich

$$x' - x_1' = \varrho\cos(\varphi + \alpha) - \varrho_1\cos(\varphi + \beta),$$
$$y' - y_1' = \varrho\sin(\varphi + \alpha) - \varrho_1\sin(\varphi + \beta);$$

und folglich

$$13.\quad \begin{cases} \varrho = -\dfrac{(x' - x_1')\sin(\varphi + \beta) - (y' - y_1')\cos(\varphi + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}, \\[2ex] \varrho_1 = -\dfrac{(x' - x_1')\sin(\varphi + \alpha) - (y' - y_1')\cos(\varphi + \alpha)}{\sin(\alpha - \beta)}; \end{cases}$$

also nach 8.

$$14.\quad \varrho = -R\frac{\sin(\varphi+\beta-E)}{\sin(\alpha-\beta)},\quad \varrho_1 = -R\frac{\sin(\varphi+\alpha-E)}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Ferner ist nach 3.

$$x'-x_1' = -\varrho'\cos(\varphi+\alpha_1)+\varrho_1'\cos(\varphi+\beta_1),$$
$$y'-y_1' = -\varrho'\sin(\varphi+\alpha_1)+\varrho_1'\sin(\varphi+\beta_1);$$

und folglich

$$15.\quad \begin{cases} \varrho' = \dfrac{(x'-x_1')\sin(\varphi+\beta_1)-(y'-y_1')\cos(\varphi+\beta_1)}{\sin(\alpha_1-\beta)}, \\ \varrho_1' = \dfrac{(x'-x_1')\sin(\varphi+\alpha_1)-(y'-y_1')\cos(\varphi+\alpha_1)}{\sin(\alpha_1-\beta_1)}; \end{cases}$$

also nach 8.

$$16.\quad \varrho' = R\frac{\sin(\varphi+\beta_1-E)}{\sin(\alpha_1-\beta_1)},\quad \varrho_1' = R\frac{\sin(\varphi+\alpha_1-E)}{\sin(\alpha_1-\beta_1)}.$$

Die Coordinaten x, y und x_1, y_1 ergeben sich nun mittelst der Formeln

$$17.\quad \begin{cases} x = x'-\varrho\cos(\varphi+\alpha) = x_1'-\varrho_1\cos(\varphi+\beta), \\ y = y'-\varrho\sin(\varphi+\alpha) = y_1'-\varrho_1\sin(\varphi+\beta) \end{cases}$$

und

$$18.\quad \begin{cases} x_1 = x'+\varrho'\cos(\varphi+\alpha_1) = x_1'+\varrho_1'\cos(\varphi+\beta_1), \\ y_1 = y'+\varrho'\sin(\varphi+\alpha_1) = y_1'+\varrho_1'\sin(\varphi+\beta_1). \end{cases}$$

Die Entfernung r aber erhält man mittelst der Ausdrücke

$$19.\quad r = \frac{x_1-x}{\cos\varphi} = \frac{y_1-y}{\sin\varphi}.$$

Rücksichtlich des Winkels φ, welcher 360° nicht übersteigt, bemerken wir, dass für denselben die obigen Formeln zwei Werthe liefern, die im Allgemeinen von der Form φ und $\varphi+180°$ sind. Von diesen beiden Werthen hat man jederzeit denjenigen zu nehmen, welchem positive Werthe von ϱ und ϱ_1 entsprechen.

Die Anwendung, welche Herr Professor und Director Hansen von der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf diese Aufgabe gemacht hat, muss man a. a. O. nachsehen.

Es scheint uns wünschenswerth, dass für dieses interessante Problem auch recht elegante Auflösungen durch die elementare Trigonometrie und durch blosse geometrische Constructionen gegeben werden, letztere zugleich mit Berücksichtigung der Messtischpraxis, wie dies bei dem Pothenot'schen Problem unter dem Namen des Rückwärtseinschneidens in der Feldmesskunst bekanntlich schon vielfach geschehen ist. Wir werden solchen Auflösungen gern einen Platz in dem Archive einräumen.

XXXIII.

Correspondenz.

Auszug aus einem Schreiben des Herrn Directors Nizze am Gymnasium zu Stralsund an den Herausgeber.

Stralsund, 4. Junius 1841.

Erst in den gegenwärtigen Pfingstferien habe ich Zeit gewinnen können, das erste Heft Ihres Archivs zur Hand zu nehmen. Ueber das Unternehmen selbst habe ich mich ungemein gefreut, und sollte ich von Zeit zu Zeit Ihnen Kleinigkeiten beisteuern können, so wird es mit Vergnügen geschehen. Für diesmal Folgendes:

Ich fiel zuerst auf den Abschnitt: „Aufgaben für Schüler.“ Dabei interessirten mich die Buzengeigerschen Formeln, bei deren Nachrechnung ich aber einige Irrungen gefunden zu haben glaube, welche ich mir anzugeben erlaube.

Nr. 8. muss heissen

$$\sin(\alpha-\beta)\ldots\ldots=4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$$

Nr. 12. $\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\ldots\ldots=2(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$

Nr. 13. $\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\ldots\ldots=2(1-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$

Nr. 14. $\cos^2\alpha+\ldots\ldots\ldots=2(1+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\gamma)\cos(\beta+\gamma))$

Nr. 15. $\sin^2\alpha+\ldots\ldots=2(1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\gamma)\cos(\beta+\gamma))$

Hat Buzengeiger sich verschrieben, oder trägt der Setzer die Schuld? *)

Bei einer andern Ihrer Aufgaben bin ich sofort auf folgende Kleinigkeit gefallen:

Aufgabe. Es soll auf einer gegebenen geraden Linie ein Rehteck construirt werden, dessen zweite Seite halb so gross ist, als die Diagonale.

In Taf. II. Fig. 12. ist MN die gegebene gerade Linie, AB willkührlich, $BD=\frac{1}{2}AB$, $MN=AE\ (=AE')$.

Lehrsatz. Wenn die kürzere Seite eines Rechtecks halb so gross ist, als dessen Diagonale, und wenn man auf der kürzeren Seite desselben wiederum ein Rechteck construirt, dessen zweite Seite die Hälfte seiner Diagonale ist, imgleichen auf der kürzeren Seite dieses Rechtecks wieder ein Rechteck von derselben Beschaffenheit, und so in infinitum, so verhalten sich die längeren Seiten aller dieser Rechtecke wie

$$1:\sqrt{\frac{1}{3}}:\sqrt{\frac{1}{3^2}}:\sqrt{\frac{1}{3^3}}:\sqrt{\frac{1}{3^4}}:\sqrt{\frac{1}{3^5}}\ldots\ldots$$

Anm. Man würde die Aufgabe und den Lehrsatz auch auf das rechtwinklige Dreieck beziehen können, dessen eine Kathete halb so gross ist, als die Hypotenuse.

---

*) Weder der Herausgeber, noch der Setzer, noch der Corrector tragen die Schuld. Buzengeiger hat sich, wie ich durch das noch in meinen Händen befindliche Blatt nachweisen kann, allerdings verschrieben, und Herrn Director Nizze gebührt daher der grösste Dank für die Nachweisung dieser Schreibfehler. G.

XXXIV.

Analyse des équations déterminées par M Fourier, de l'institut royal de France, secrétaire perpétuel de l'académie des sciences. Première partie. Paris. 1831. 4. Grundzüge der Lehre von den numerischen Gleichungen nach ihren analytischen und geometrischen Eigenschaften. Ein Supplement zu den Lehrbüchern der Algebra und der Differentialrechnung von M. W. Drobisch, Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig. Leipzig, 1834. 8. *)

Von dem

Herrn Professor Dr. Gartz,

zu Halle.

Jean Baptiste Jos. Fourier (geboren zu Auxerre in der Bourgogne den 21. März 1768, gestorben zu Paris den 16. Mai 1830) ist als Verfasser einer scharfsinnigen Theorie der Wärme, die schon wegen der darin gebrauchten analytischen Methoden die Aufmerksamkeit jedes Mathematikers verdient, und mancher trefflichen der pariser Akademie der Wissenschaften vorgetragenen Abhandlungen und Biographien auch in Deutschland schon länger bekannt; erst nach seinem Tode aber lernten wir ihn als denjenigen Mann kennen, welchem die vorher seit geraumer Zeit gleichsam stillstehende Wissenschaft der Algebra ihre wichtigsten neuen Fortschritte und Erweiterungen verdankt. Der nun auch schon verstorbene Herausgeber des vorliegenden Werks, Navier, weist in seinem Vorberichte aus hinterlassenen Papieren F.'s nach, dass Fourier schon in sei-

---

*) Obgleich Fourier's berühmtes Werk schon im Jahre 1831 erschienen ist, so ist es doch bei Weitem noch nicht so allgemein bekannt und verbreitet, wie es nach seinem hochwichtigen Inhalte verdient. Deshalb dürfte die in diesem Aufsatze gegebene eben so gründliche als vollständige Analyse desselben auch jetzt noch vielen Lesern angenehm und dem Zwecke des Archivs vollkommen entsprechend sein, wobei es zugleich zweckmässig schien, eine kurze Analyse des Buches von Drobisch damit zu verbinden. G.

nem achtzehnten Jahre viele von den Entdeckungen gemacht hatte, welche in vorliegendem Werke mitgetheilt werden. Später, im Jahre 1789, überreichte F. der pariser Akademie eine Abhandlung ähnlichen Inhalts, und trug nachmals (im Jahre 1797) als Lehrer an der polytechnischen Schule seinen Schülern diese Entdeckungen vor. F. gehörte zu den Gelehrten, welche Bonaparte auf seinem Zuge nach Aegypten mitnahm, und suchte auch während seines Aufenthalts in jenem Lande seine neuen Ansichten weiter zu entwickeln und zu vervollständigen, wovon mehrere dem von den Franzosen errichteten „Institut von Cairo" überreichte Abhandlungen zeugen. Nach Frankreich zurückgekehrt kam er, wenn schon nicht ohne Unterbrechungen, welche zum Theil durch die Staatsveränderungen in seinem Vaterlande herbeigeführt wurden, wiederholentlich auf diesen Gegenstand zurück. Unter den schon erwähnten von ihm der neuen pariser Akademie mitgetheilten Abhandlungen, welche aber noch nicht alle gedruckt sind, beziehen sich vier auf die algebraische Analysis. Endlich entschloss sich F. alle seine hierauf bezüglichen Arbeiten in einem grösseren Werke zusammen zu fassen; kaum hatte jedoch der Druck dieses Werkes begonnen, als ihn der Tod übereilte. Leider fand sich unter seinen Papieren nur der vorliegende erste Theil vollständig für den Druck vorbereitet. Für das Uebrige fanden sich indessen, nach Navier's Aussage, zahlreiche Materialien gesammelt, und es ist nur zu wünschen, dass dieselben recht bald, wenn auch nicht verarbeitet, dem Publikum mitgetheilt werden mögen. — Wir wollen nun den Inhalt des vorliegenden ersten Theils angeben: Auf das Avertissement de l'éditeur (S. I—XXIV) folgt (S. 1—5) die Vorrede des Verfassers, worin er sich über die Wichtigkeit und den Nutzen der Algebra, über die Verdienste seiner Vorgänger und den Zweck seines eigenen Werkes ausspricht. Hieran schliesst sich (S. 7—24) eine Einleitung, welche zunächst in gedrängter Kürze die allmähligen Fortschritte der Algebra seit Diophant angiebt. F. erklärt sich hier schlechthin gegen alle Versuche, welche bezwecken die Wurzeln der Gleichungen aller Grade durch Formeln darzustellen, welche der cardanischen Formel analog wären, indem dadurch nur sehr verwickelte Transformationen erhalten würden, worin die Wahrheit, welche man sucht, mehr als in der gegebenen Gleichung selbst, versteckt wäre. Leibnitzens und Tschirnhausens Ansichten hierüber seien unausführbar. Des Verfassers eigenes Verfahren sei keine Combination der elementaren Regeln über die Wurzelausziehung, sondern eine Methode sui generis, welche auf gleichzeitigem Calcül aller Coefficienten der vorgelegten Gleichung beruhe; sie weiche von Lagrange's Auflösung der numerischen Gleichungen ab, und gelte auch für die Literalgleichungen. Vorausgesetzt wird bei dieser neuen Methode ausser den gewöhnlichen Elementen der Algebra, die Kenntniss der Differentialrechnung besonders die Entwickelung algebraischer Functionen in Reihen (nach dem Taylorschen Satze) jedoch mit Hinzufügung des Restes, wenn man eine solche Reihe bei einem beliebigen Gliede abbricht. Auch ist einige Kenntniss der analytischen Geometrie nothwendig, weil dadurch die trefflichste Versinnlichung der allmähligen Veränderungen in den Werthen einer Function $f(x)$ und eben dadurch Erleichterung in der Erforschung ihrer Eigenschaften möglich wird. Der Verfasser ist offenbar durch solche geometrische Betrachtungen auf die meisten seiner Entdeckungen gekommen. — Vor dem Beginne der in diesem ersten Theile enthaltenen zwei Bücher seines, dem Plane nach, aus sieben Büchern bestehenden Werkes, giebt F. eine Uebersicht aller von ihm für die Theorie der Gleichungen gewonnenen Resultate (S. 25—86), auf welche wir zurück kommen wollen, wenn wir die vorliegenden ersten zwei Bücher in nähere Betrachtung gezogen haben werden. — Buch 1. Methode für jede reelle Wurzel zwei Gränzen zu bestimmen, (zwischen welche diese Wurzel fällt,) und das Vorhandensein imaginärer Wurzeln zu erkennen. — Bedeutet m eine ganze positive Zahl und ist $X = f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} \ldots + a_{m-1} x + a_m$ und $X' = f'(x) = \frac{dX}{dx}$, $X'' = f''(x) = \frac{d^2X}{dx^2}, \ldots\ldots, X^{(m-1)} = f^{(m-1)}(x) = \frac{d^{m-1}X}{dx^{m-1}}$, $X^{(m)} = f^{(m)}(x) = \frac{d^mX}{dx^m}$, so ist klar, dass alle reelle Wurzeln der Gleichung $X = 0$ zwischen den Gränzen $-\frac{1}{0}$ und $+\frac{1}{0}$ liegen, und dass sowohl für $x = -\frac{1}{0}$ als für $x = +\frac{1}{0}$ jede der Functionen $X, X', X'' \ldots . X^{(m-1)}$ einen unendlichen Werth erhält, dessen Vorzeichen lediglich von dem jedesmaligen ersten Gliede der Function abhängt, während $X^{(m)} = 1 . 2 . 3 \ldots m$ eine positive Constante ist. Ordnet man daher die gedachten Functionen so:

$$X^{(m)},\ X^{(m-1)},\ \ldots.,\ X',\ X'',\ X$$

und setzt unter jede das ihr zukommende Vorzeichen, so erhält man offenbar

	$X^{(m)}$	$X^{(m-1)}$	$X^{(m-2)}$	$X^{(m-3)}$	....	X''	X'	X
(für $-\frac{1}{0}$)	$+$	$-$	$+$	$-$		$\pm$	$\mp$	$\pm$
(für $+\frac{1}{0}$)	$+$	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$

Nennt man also zwei auf einander folgende gleiche Vorzeichen, wie $++$ oder $--$, eine Vorzeichenfolge, dagegen zwei auf einander folgende einander entgegengesetzte Vorzeichen, wie $+-$ oder $-+$ einen Vorzeichenwechsel, so sieht man, dass in der Reihe für $-\frac{1}{0}$ lauter Vorzeichenwechsel, in der Reihe für $+\frac{1}{0}$ lauter Vorzeichenfolgen vorkommen, und zwar, wenn die Vorzeichen von $X^{(m)}$ und X nur einmal, jedes der übrigen aber doppelt, nämlich in Bezug auf das vorhergehende und in Bezug auf das folgende Vorzeichen berücksichtigt werden, erhält man in der Reihe $(-\frac{1}{0})$ grade so viel Vorzeichenwechsel, in der Reihe $(+\frac{1}{0})$ so viel Vorzeichenfolgen als der Grad der gegebenen Gleichung $X = 0$ beträgt, nämlich m. Es muss also die Reihe $X^{(m)}, X^{(m-1)}, \ldots . X', X$ beim Uebergange von $x = -\frac{1}{0}$ zu $x = +\frac{1}{0}$ alle Mal m Vorzeichenwechsel verlieren. Da jedes Glied dieser Reihe eine stetige Fnnction von x ist, so kann es nicht anders sein Vorzeichen ändern, also vom Positiven zum Negativen oder vom Negativen zum Positiven übergehen, als indem es den Zwischenwerth Null durchläuft. Fourier zeigt nun eben so einfach als klar 1) dass jedes Mal, wenn x einen Werth erreicht, der die Function $X = 0$ macht, ohne zugleich eine von den derivirten Functionen auf Null zu bringen, nothwendig ein Zeichenwechsel verloren gehe, d. h. sich in eine Zeichenfolge verwandele, und dass, wenn x nachher weiter bis $\frac{1}{0}$ ununterbrochen wächst, die Anzahl der Zeichenwechsel bei keinem auf a folgenden Werthe von x wieder zunehmen könne; 2) dass, wenn x einen Werth erreicht, der die beiden letzten oder mehrere von den letzten unmittelbar auf einander folgenden ... X'', X', X in der obigen Funktionenreihe verschwinden macht, (was bekanntlich ein Merkmal von eben so viel einander gleichen Wurzeln der Gleichung $X=0$ ist) alle Mal eben so viele Zeichenwechsel verloren gehen. 3) Wenn nicht die Stammfunction X, wohl aber eine von ihren Derivirten oder n auf einander folgende von diesen für einen bestimmten Werth von x verschwinden, werden alle Mal, wenn n gerade ist, auch n Zeichenwechsel verloren gehen; wenn aber n ungerade ist, entweder $n-1$ oder $n+1$ Zeichenwechsel. In den Fällen (2) und (3) so wenig als in dem Falle (1) nimmt die Anzahl der Zeichenwechsel jemals wieder zu, wenn man x fortdauernd wachsen lässt. — Hat die Gleichung $X=0$ lauter reelle Wurzeln, so muss die Function X, während x von $-\frac{1}{0}$ bis $+\frac{1}{0}$ ununterbrochen wächst, m Mal auf Null gebracht werden, wodurch dann alle m Zeichenwechsel sich in Zeichenfolgen verwandeln, und mithin kann dann durch den unter (3) aufgeführten Fall kein Zeichenwechsel verloren gehen. So oft also durch diesen Fall Zeichenwechsel verloren gehen, deutet diess auf imaginäre Wurzeln, und zwar jedes Mal auf eine gerade Anzahl derselben, wie es sein muss, da in einer rationalen Gleichung jede darin enthaltene imaginäre Wurzel $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ stets das Vorhandensein ihrer conjugirten $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ nothwendig macht. — Um nun zu entdecken, ob zwischen zweien Gränzen a und b eine Wurzel oder mehrere Wurzeln der gegebenen Gleichung liegen, substituire man für x erst a und nachher b in der oft erwähnten Reihe von Functionen, und untersuche, ob die Reihe für $x=b$ noch eben so viele Vorzeichenwechsel habe, als die für $x=a$. Ist diess der Fall, so liegt zwischen a und b gar keine Wurzel der Gleichung. Hat aber die Reihe für $x=b$ einen Vorzeichenwechsel weniger als die Reihe für $x=a$, so liegt zwischen a und b eine reelle Wurzel. Hat die Reihe für $x=b$ eine ungerade Anzahl $2n+1$ Vorzeichenwechsel weniger als die für $x=a$, so liegt zwischen a und b wenigstens eine reelle Wurzel; es können aber in diesem Falle auch 3 oder 5 u. s. w. überhaupt eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln zwischen a und b liegen, jedoch nicht mehr als $2n+1$. Liegen nur $2r+1$ reelle Wurzeln in diesem Zwischenraume, so sind $2n-2r$ imaginäre Wurzeln durch die verloren gegangenen Vorzeichenwechsel angedeutet, welche Wurzeln F. fehlende (racines manquantes), Herr Drobisch passender verloren gegangene Wurzel, nennt. — Hat endlich die Reihe für $x=b$ eine gerade Anzahl $2p$ Vorzeichenwechsel weniger als die für $x=a$, so hat die Gleichung $X=0$ in jenem Zwischenraume entweder gar keine oder 2, oder 4 u. s. w. oder überhaupt eine gerade Anzahl $2q$ reelle Wurzeln, die zwischen a und b fallen, jedoch nicht mehr als $2p$; zugleich erkennt man aber daraus, dass auch $2p-2q$ imaginäre Wurzeln vorhanden sind. — Stets also deutet die Anzahl der im Uebergange von $x=a$ zu $x=b$ verloren gegangenen Zeichenwechsel auf eine eben so grosse Anzahl von Wurzeln, welche entweder alle reell, oder von denen eine gerade Anzahl imaginär ist. Ist z. B. $X=x^3+2x^2-3x+2$ so ist $X'=3x^2+4x-3$, $X''=6x+4$, $X'''=6$. Wenn man also für x, wie es der leichten Berechnung wegen zunächst immer geschieht, die Glieder der Reihe ... $-100, -10, -1, 0, +1, +10$ ... setzt, so erhält man:

	X'''	X''	X'	X
(-10)	$+$	$-$	$+$	$-$
(-1)	$+$	$-$	$-$	$+$
(0)	$+$	$+$	$-$	$+$
(1)	$+$	$+$	$+$	$+$

woraus erhellet, dass zwischen -10 und -1 eine reelle Wurzel, zwischen -1 und 0 gar keine Wurzel liegt, und dass zwischen $x=0$ und $x=1$ entweder zwei reelle Wurzeln fallen, oder zwei dergleichen verloren gegangen sind, in welchem letzteren Falle die Gleichung zwei imaginäre Wurzeln hat. Wie man entdecke, von welcher Natur die zuletzt erwähnten beiden Wurzeln seien, darüber nachher. — Kommt es bei der Anwendung dieses höchst einfachen Verfahrens vor, dass ein für x substituirter Werth a ein Glied oder mehrere Glieder der Functionenreihe $X^{(m)}, X^{(m-1)}, \ldots, X', X$ auf Null bringt, so giebt eine leichte, aus dem Taylorschen Satze abgeleitete Regel an, welche Vorzeichen jenen Functionen beizulegen seien, sofern $x=a-\omega$ und so fern $x=a+\omega$ gesetzt wird, wo ω eine sehr wenig von Null verschiedene Grösse bedeutet. Man braucht nämlich dann in diesen beiden Reihen nur dieselben Vorzeichen wie in der Reihe für $x=a$ zu setzen, da aber, wo in letzterer Reihe Glieder verschwinden, hat man für $x=a-\omega$, Vorzeichenwechsel, für $x=a+\omega$, Vorzeichenfolgen zu setzen. Ist z. B. die Reihe

für a	$+$	$+$	0	0	0	0	$-$	0	0	0	$+$	0	$-$	so ist sie
für $a-\omega$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	und
für $a+\omega$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	

Ist nun die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Reihe für $x=a-\omega$ etwa $=h$, in der für $x=a+\omega$ aber $=k$, so deutet diess auf $h-k$ imaginäre Wurzeln, so in dem oben angeführten Beispiele auf 6 dergleichen. Fourier nennt diess die Regel vom doppelten Vorzeichen. —

Man sieht leicht, dass die Regel von Descartes, wonach man aus den Vorzeichen der Glieder einer Gleichung beurtheilt, wie viele reelle positive und wie viele negative Wurzeln die Gleichung höchstens habe (fälschlich die harriotsche Regel genannt), nichts weiter als ein Corollar der bisher angegebenen Sätze Fourier's sei. Denn setzt man in den Functionen $X, X', \ldots, X^{(m-1)}, X^{(m)}$ das $x=0$, so werden sie, zu Folge des Mac-Laurinschen Satzes, gleich Produkten aus den positiven Faktoren $1, 1, 1.2, 1.2.3, \ldots\ldots, 1.2\ldots m$ in die Coefficienten der Gleichung $X=0$. Wenn man daher nun die Vorzeichen dieser Coefficienten mit der Reihe von Vorzeichen für $x=-\frac{1}{0}$ und für $x=+\frac{1}{0}$ vergleicht, so giebt diess die Regel des Descartes. Offenbar ist aber die Regel Fourier's weit gehaltreicher, da sie zugleich bestimmte endliche Gränzen angiebt, zwischen welchen man einzig und allein reelle Wurzeln zu suchen hat, und auf die einfachste Weise zur annähernden Bestimmung dieser Wurzeln durch fortgesetzte Verengerung der Gränzen dienen kann, wovon nachher noch weiter die Rede sein wird. Es bleibt jetzt zunächst die Frage, wie man, wenn mehr als ein Vorzeichenwechsel durch den Uebergang von $x = a$ zu $x = b$ verloren geht, entscheiden könne, ob dadurch lauter reelle zwischen a und b liegende Wurzeln oder Paare von imaginären Wurzeln angedeutet werden, und wie man die reellen zwischen a und b liegenden Wurzeln, wenn dergleichen vorhanden sind, durch Gränzen, die man zwischen jede zwei einander am Nächsten kommende einschiebt, von einander trennen könne. Diess würde man nun zwar dadurch bewerkstelligen können, dass man nach der von Lagrange und Waring vorgeschlagenen Methode eine Grösse Δ bestimmte, welche entweder $=$ oder $<$ als die kleinste Differenz zweier reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung wäre, und sodann für x nach der Reihe die Zahlen $a + \Delta$, $a + 2\Delta$ u. s. w.... in der Function $f(x)$ substituirte; allein dazu gehören bei Gleichungen von einigermassen hohem Grade so weitläufige Rechnungen, dass ein anderes kürzeres Verfahren für die Praxis höchst wünschenswerth ist. Ein solches und zwar ein sehr einfaches, das in den meisten Fällen äusserst schnell zum Ziele führt, hat nun F. gefunden. Es gründet sich auf die Betrachtung der Subtangenten derjenigen Curve, welche die Veränderung in den Werthen der $f(x)$ veranschaulicht. Ist man nämlich durch hinreichende Zusammenziehung der Gränzen a und b dahin gelangt, dass zwischen diesen Gränzen nur zwei Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ und gar keine Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$ liegt, so hat die Curve $f(x)$ zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ eine Einbiegung gegen die Abscissenaxe (ein Minimum oder Maximum von $f(x)$), aber keinen Wendepunkt. Hieraus folgt leicht, dass die absoluten Zahlenwerthe der Subtangenten $\frac{f(a)}{f'(a)}$ und $\frac{f(b)}{f'(b)}$ sowohl einzeln als zusammen kleiner als $b - a$ sein müssen, wenn zwei reelle Wurzeln, also zwei Durchschnitte der Curve $f(x)$ mit der Abscissenaxe, zwischen $x = a$ und $x = b$ liegen sollen. Findet sich daher $\frac{f(a)}{f'(a)} + \frac{f(b)}{f'(b)} \geqq b - a$, so ist diess ein sicheres Zeichen, dass zwischen a und b zwei reelle Wurzeln verloren gegangen sind, statt deren dann $f(x) = 0$ zwei imaginäre Wurzeln hat. Nur der Fall ist hievon auszunehmen, wenn $f(x)$ und $f'(x)$ einen gemeinschaftlichen Theiler und daher $f(x) = 0$ zwei gleiche Wurzeln zwischen a und b hat, was aber bekanntlich leicht zu erforschen ist. Findet sich $\frac{f(a)}{f'(a)} + \frac{f(b)}{f'(b)} < b - a$, so kann man daraus noch nichts mit Sicherheit schliessen, sondern muss dann engere Gränzen statt a und b wählen, wodurch man aber endlich gewiss, wenn die beiden Wurzeln reell sind, dahin gelangt sie zu trennen, oder, wenn sie es nicht sind, die Summe zweier Subtangenten grösser als die Differenz der Abscissen der zugehörigen Punkte zu finden. Hat man durch das früher angegebene Verfahren entdeckt, dass nicht bloss zwei, sondern noch mehr Wurzeln zwischen den Gränzen a und b liegen oder verloren gegangen sind, so ist durch eben jenes Verfahren auch zugleich bekannt, welche von den Functionen $X^{(m)}$, $X^{(m-1)}$, ... X', X, wenn man sie $= 0$ setzt, nur eine oder zwei Wurzeln zwischen a und b habe oder verloren habe. Es sei nun $X^{(n)}$ die erste, von der Rechten an gezählt, unter jenen Functionen, welche, wenn man sie $=0$ setzt, nur eine Wurzel zwischen a und b hat, so hat $X^{(n-1)}=0$ nothwendig zwei Wurzeln zwischen denselben Gränzen, entweder wirklich oder verloren, und $X^{(n+1)}=0$ hat dann entweder gar keine, oder eine oder zwei reelle Wurzeln zwischen a und b, oder es sind für $X^{(n+1)}=0$ zwei zwischen a und b verloren gegangene Wurzeln angedeutet. Hat $X^{(n+1)}=0$ gar keine Wurzel zwischen a und b, weder wirklich noch verloren, so kann man nach demselben Verfahren, welches wir vorher auf die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ anwandten, entdecken, ob die beiden angezeigten Wurzeln von $X^{(n-1)}=0$ beide reell oder imaginär sind, und, wenn sie letzteres sind, daraus schliessen, dass auch $X=0$ zwischen a und b zwei reelle Wurzeln verloren habe. Dasselbe wird man schliessen, wenn die beiden Wurzeln von $X^{(n-1)}=0$ einander gleich sind, ohne, wenn man sie statt x setzt, alle die auf $X^{(n-1)}$ folgenden Functionen $X^{(n-2)}, \ldots, X', X$ auf Null zu bringen. Sind hingegen die beiden Wurzeln von $X^{(n-1)}=0$ gleich, und bringen sie, für x substituirt, alle auf $X^{(n-1)}$ folgende Functionen auf Null, so hat die Gleichung $X=0$ bekanntlich n Wurzeln, die jenen beiden gleich sind. Sind die gedachten beiden Wurzeln von $X^{(n-1)}=0$ reell aber ungleich, so muss man die Gränzen a und b verengern bis diese Wurzeln durch eine dazwischen fallende Gränze getrennt werden, wodurch dann die erste unter den Functionen $X^{(m)}, X^{(m-1)} \ldots, X$ von der Rechten an gezählt, welche, $=0$ gesetzt, nur eine Wurzel zwischen a und b hat, gewiss weiter rechts als vorher zu suchen sein wird. Sind für $X^{(n+1)}=0$ eine oder zwei Wurzeln zwischen a und b angezeigt, so muss man ebenfalls erst die Gränzen a und b verengern, wodurch man gewiss endlich dahin gelangt, dass unter den Functionen $X^{(m)}, X^{(m-1)}, \ldots X', X$ von der Rechten gegen die Linke gezählt die erste $X^{(r)}$, welche, $=0$ gesetzt, nur eine Wurzel zwischen a und b hat, vor sich eine andere $X^{(r+1)}$ habe, welche, $=0$ gesetzt, gar keine Wurzel zwischen a und b hat oder verloren hat, so dass dann die vorgetragene Subtangentenprüfung sogleich auf $X^{(r-1)}$ angewendet werden kann.

Buch 2. Methode die Werthe der Wurzeln, deren Gränzen bekannt sind, zu berechnen, und Bemerkungen über die Convergenz der Annäherungen und über die Unterscheidung der Wurzeln. — Das bekannte Newtonsche Näherungsverfahren ist zur wirklichen Berechnung der Wurzeln am Meisten geeignet. Diess Verfahren ist aber in der Anwendung einigen Schwierigkeiten unterworfen, welche genau zu untersuchen sind. F. beweist, dass es, wenn man sich dieses Verfahrens mit Sicherheit bedienen will, zuvor nöthig sei die Gränzen a und b, zwischen welchen eine reelle Wurzel der Gleichung $X=0$ liegt, einander so nahe zu bringen, dass zwischen denselben Gränzen keine einzige reelle Wurzel der Gleichungen $X'=0$, $X''=0$ liegt. Zugleich zeigt F., dass es alle Mal möglich sei, die eben erwähnte Bedingung zu erfüllen, ausgenommen: 1) wenn die Gleichung $X=0$ zwei oder mehr einander gleiche Wurzeln zwischen jenen Gränzen hat, was man aber leicht auf die bekannte, schon durch Hudde vorgetragene Art entdecken kann; 2) wenn X und X'' einen gemeinschaftlichen Theiler $\varphi(x)$ haben, wo dann die Gleichung $\varphi(x)=0$ statt der gegebenen $X=0$ in Bezug auf zwischen a und b liegende Wurzeln zu untersuchen ist. Unter obiger Bedingung ist nun, wie leicht aus der Taylorschen

Reibe folgt, wenn man die Ergänzung derselben mit beachtet, der genaue Werth der verlangten Wurzel $x = b - \frac{f(b)}{f'(a \dots b)}$ oder $a - \frac{f(a)}{f'(a \dots b)}$, wo $(a \dots . b)$ eine Grösse bedeutet, die zwischen den Gränzen a und b liegt. Da, dem Vorigen zu Folge, keine Wurzel der Gleichungen $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ zwischen den Gränzen a und b liegt, so ändern die Functionen $f'(x)$ und $f''(x)$ beim Uebergange von $x = a$ zu $x = b$ ihre Vorzeichen nicht, und zwar ist das Vorzeichen von $f'(a \dots b)$ dem Vorzeichen von $f(a)$ nothwendig entgegengesetzt, dagegen dem Vorzeichen von $f(b)$ gleich, weil, nach den Betrachtungen des ersten Buchs, die Reihe $X^{(m)}$, $X^{(m-1)}, \dots . X''$, X', X beim Uebergange von $x = a$ zu $x = b$ nur einen Zeichenwechsel verlieren darf, und $f(a)$ der $f(b)$ entgegengesetzt sein muss, wenn zwischen a und b nur eine Wurzel der Gleichung $X = 0$ liegt. Daraus folgt, dass $\frac{f(b)}{f'(a \dots b)}$ eine positive, hingegen $\frac{f(a)}{f'(a \dots b)}$ eine negative Grösse, und folglich $b - \frac{f(b)}{f'(a \dots b)} < b$, aber $a - \frac{f(a)}{f'(a \dots b)} > a$ sei. Auch muss die $f'(x)$ bei dem Uebergange von $x = a$ zu $x = b$ entweder ununterbrochen zu- oder ununterbrochen abnehmen, weil $f''(x)$ bei diesem Uebergange ihr Vorzeichen nicht ändert. Ist also 1) $f''(x)$ sowohl als $f'(x)$ während jenes Ueberganges positiv, so ist $f'(a) < f'(a \dots b) < f'(b)$. Ist hingegen 2) $f''(x)$ während jenes Ueberganges positiv, $f'(x)$ aber negativ, so ist $-f'(a) > -f'(a \dots b) > -f'(b)$. Eben so 3) wenn $f''(x)$ bei jenem Uebergange negativ, $f'(x)$ dagegen positiv bleibt, so ist $f'(a) > f'(a \dots b) > f'(b)$. Endlich 4) wenn $f''(x)$ bei jenem Uebergange, und eben so auch $f'(x)$, negativ bleibt, so ist $-f'(a) < -f'(a \dots b) < -f'(b)$. Im ersten und vierten Falle ist daher gewiss $\frac{(\pm) f(b)}{(\pm) f'(a \dots b)} > \frac{(\pm) f(b)}{(\pm) f'(b)}$ und $-\frac{(\mp) f(a)}{(\pm) f'(a \dots b)} > -\frac{(\mp) f(a)}{(\pm) f'(b)}$, im zweiten und dritten Falle aber ist $-\frac{(\pm) f(a)}{(\mp) f'(a \dots b)} > -\frac{(\pm) f(a)}{(\mp) f'(a)}$ und $\frac{(\mp) f(b)}{(\mp) f'(a \dots b)} > \frac{(\mp) f(b)}{(\mp) f'(a)}$. Wenn also $f'(x)$ mit $f''(x)$ gleiches Vorzeichen behält, während x von a zu b übergeht (d. i. im ersten und vierten der obigen Fälle), so wird der Werth von $b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ nothwendig kleiner als b, aber kleiner als der durch $\frac{f(b)}{f'(a \dots b)}$ angegebene genaue Werth der verlangten Wurzel, hingegen der Werth von $a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)}$ nothwendig grösser als a, aber kleiner als der durch $a - \frac{f(a)}{f'(a \dots b)}$ angegebene genaue Werth. Wenn aber $f'(x)$ nicht mit $f''(x)$ gleiches Vorzeichen hat, während x alle zwischen a und b liegenden Werthe durchläuft, (d. i. im zweiten und dritten der angegebenen Fälle), so wird, wenn man $a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ setzt, nothwendig a' grösser als a, aber kleiner als $a - \frac{f(a)}{f'(a \,.\,. b)}$, also kleiner als die wahre verlangte Wurzel, hingegen $b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)}$ gewiss kleiner als b, aber grösser als die genaue Wurzel $b - \frac{f(b)}{f'(a \ldots b)}$. Hiedurch wird die Newtonsche Näherungsmethode vervollständigt, indem man nun alle Mal zwei Näherungswerthe, oder, was eben so viel ist, zwei neue Gränzen $a' > a$, $b' < b$ beide zugleich erhält, zwischen welche die verlangte Wurzel fällt, also beurtheilen kann, indem man die Differenz $b' - a'$ bildet, wie gross der Fehler höchstens sei, wenn man den einen oder den anderen dieser Näherungswerthe statt der wahren Wurzel setzt. Auf dieselbe Weise lassen sich noch engere Gränzen a'', b'' und durch fernere Wiederholung des Verfahrens noch engere a''', b''' u. s. w. finden.

Alles diess wird wieder von dem Vf. durch Anwendung auf die Curve $f(x)$ anschaulich gemacht, wobei er zugleich noch einen Näherungswerth der Wurzel a findet, den die Secante zwischen den zu $f(a)$ und $f(b)$ gehörenden Punkten der Curve da angiebt, wo sie die Abscissenaxe schneidet; während die vorher gedachten Näherungswerthe durch Tangenten bestimmt werden. Zugleich macht es die Zeichnung sehr klar, dass man bei der gewöhnlichen Anwendung der Newtonschen Methode ohne die Fouriersche Verbesserung leicht für $a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ und für $b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ Werthe findet, die der wahren Wurzel a weniger nahe liegen als a und b. Fourier zeigt nun zunächst durch Anwendung der von ihm verbesserten Newtonschen Näherungsmethode auf den einfachsten Fall $x^m - A = 0$, dass die gewöhnlichen elementarischen Regeln der Wurzelausziehung nichts weiter sind, als besondere Fälle einer allgemeinen Methode, welche die Gleichungen aller Grade umfasst. Sodann giebt F. Anweisung seine Methode mit dem mindestmöglichen Zeitaufwande zu gebrauchen, indem er zeigt wie man am Besten jede überflüssige Rechnung vermeide. Besonders dienlich ist hiezu eine von ihm angegebene Art gemeine Zahlen in einander zu dividiren, welche er die geordnete Division (division ordonnèe) nennt, die hier zu erläutern aber zu weitläufig sein würde. Wie man die Berechnung der Werthe von $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ u. s. w. für $x = a$, $x = b$, $x = a'$, $x = b'$ u. s. w. am Bequemsten anstelle, ist zwar leicht einzusehen, wird aber ebenfalls der Vollständigkeit wegen von Fourier kurz erörtert. Wichtiger ist die darauf folgende leichte Bestimmung der Fehlergränze für jeden neuen Näherungswerth, wodurch man sich die Berechnung von nicht mehr sicheren Decimalstellen der Näherungswerthe a, a', a'' u. s. w. oder b, b', b'' u. s. w. erspart und zugleich erkennt, wie diese Näherungswerthe mit zunehmender Geschwindigkeit gegen die wahre Wurzel hin convergiren, wenn man sich genau an F.'s Verfahren hält. Durch viermalige Anwendung dieser Methode findet man z. B. die einzige reelle Wurzel der Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$ schon auf 16 Decimalstellen genau. Wegen der schnellen Annäherung, welche diese einfache Methode (Fourier nennt sie die lineare Methode, weil sie darauf beruht, dass in der Entwickelung von $f(a + \omega)$ oder $f(b - \omega)$ alle Glieder weggelassen werden, welche höhere Potenzen von ω als die erste enthalten) gewährt, ist es für die Praxis eigentlich nicht nöthig jemals Anwendung zu machen von anderen zusammengesetzteren Annäherungen, (wie die der zweiten Ordnung, wo man die Glieder beibehält, welche ω^2 enthalten, oder der dritten Ordnung, wo man auch die Glieder noch beibehält, welche ω^3 enthalten, oder überhaupt einer höheren Ordnung, wo man höhere Potenzen von ω beibehält als die erste): weil es aber für die Theorie interessant ist, auch bei diesen Methoden den zunehmenden Grad der Genauigkeit bei jedesmaliger Wiederholung ihrer Anwendung zu kennen, so hat F. auch darüber (S. 217—227) Untersuchungen angestellt. Zum Schlusse dieses Buches giebt der Vf. noch ein paar neue Verfahrungsweisen an, um das Vorhandensein imaginärer Wurzeln zu erkennen. Die im ersten Buche angegebene Verfahrungsart bleibt zwar ihrer Einfachheit halber die für den gewöhnlichen Gebrauch anwendbarste, allein die Wichtigkeit dieser Untersuchung und ihr Einfluss auf die Theorie der Gleichungen mit mehreren unbekannten Grössen ist so gross, dass es sehr vortheilhaft ist, hier mehr als ein sicheres Verfahren zu kennen. — Wir heben nun aus der schon oben erwähnten Uebersicht des ganzen Werkes in der Kürze hervor, was der Inhalt der noch fehlenden fünf Bücher sein soll. Das dritte Buch soll eine Vergleichung der verschiedenen Methoden zur Trennung der Wurzeln von einander und zu ihrer Berechnung enthalten. Die Auflösung durch Kettenbrüche wird hier als ein blosser besonderer Fall einer anderen weit allgemeineren Auflösungsmethode erscheinen. Die algebraischen Irrationalgrössen werden durch stetige Functionen entwickelt, denen merkwürdige geometrische Constructionen entsprechen. Auch auf transcendente Gleichungen ist diess Verfahren anwendbar. Jede genaue Näherungsmethode ist, wenn man das im ersten Buche angegebene Verfahren zur Trennung der Wurzeln benutzt, dazu brauchbar, das Vorhandensein imaginärer Wurzeln zu entdecken. Ausführlicher wird diess besonders an der Auflösung durch Kettenbrüche gezeigt werden. — Das vierte Buch wird die Auflösung der Literalgleichungen enthalten. Das Princip, worauf diese Auflösung beruht, befindet sich schon in den Schriften Newtons, Stirlings und Lagrange's. Der Verf. wird eine neue Construction für den wichtigsten Theil dieser Untersuchung angeben, welche einer allgemeineren Anwendung als die von Newton gegebene fähig ist, für den Fall einer einzigen Veränderlichen aber auf dasselbe Resultat, nämlich auf die von Lagrange erwiesene analytische Regel führt. Auch wird in diesem Buche von der gleichzeitigen Auflösung zweier Literalgleichungen mit zwei unbekannten Grössen, oder allgemein n solcher Gleichungen mit n unbekannten Grössen die Rede sein. Es ist hiebei gar keine Elimination, keine Veränderung der Coefficienten nöthig, vielmehr werden aus den gegebenen Gleichungen in ihrer primitiven Form gleichzeitig alle Wurzeln entwickelt. — Das fünfte Buch soll die Anwendung der in den vorhergehenden Büchern enthaltenen Principien der algebraischen Analysis auf die transcendenten Functionen zeigen. — Das sechste Buch wird über die Beziehungen der recurrirenden Reihen auf die Theorie der Gleichungen handeln, welche Beziehungen von weit grösserem Umfange sind, als man bisher geglaubt hat, indem sie sich sowohl auf die imaginären als auf die reellen Wurzeln erstrecken. — Das siebente Buch wird die Theorie der Ungleichheiten (d. h. solcher Ausdrücke wie $f(x) > a$ oder $< b$) enthalten. — Man sieht aus dieser Inhaltsanzeige, welche Schätze noch in den leider nicht ganz ausgearbeiteten Manuscripten F.'s stecken, und wir wiederholen den Wunsch, dass dieselben recht bald, wenn auch nur als Fragmente, herausgegeben werden mögen! Geschähe das Letztere, so würden sich gewiss diesseits wie jenseits des Rheins Mathematiker finden, welche im Geiste Fourier's das Werk zu restituiren suchen würden, wie diess zum Theil schon von Hrn. Dr. Stern in seiner „Theorie der Kettenbrüche" mit Glück versucht worden ist.

Wir wenden uns nun zu Hrn. Drobisch, der es sich zum Zwecke macht F.'s Entdeckungen auf deutschen Boden zu verpflanzen, jedoch in einer selbständigen Bearbeitung, welche nirgends blosse Uebersetzung ist. Hr. D. hat dazu den Weg einer historischen Entwickelung der verschiedenen Methoden zur Behandlung der höheren numerischen Gleichungen gewählt, so dass jede dieser Methoden in Beziehung auf die nächst vorhergehende als ein neuer Culturfortschritt erscheint, und F.'s Leistungen dann das Ganze krönen. Nach des Rec. Ueberzeugung kann kein sachverständiger und unpartheiischer Beurtheiler dem Verfasser das Zeugniss vorenthalten, welches er sich am Schlusse seiner Vorrede wünscht, dass nämlich sein Werk gründlich und brauchbar, und mithin des anständigen Gewandes, in welchem es erscheint, vollkommen würdig sei. Hr. D. bekämpft mit Recht das Vorurtheil, wonach die Theorie der Gleichungen, zu Folge der schwankenden Eintheilung der Analysis in einen niederen und höheren Theil, ganz zu jenem Theile gerechnet und daher jeder Einmischung der Differentialrechnung entzogen werden soll. Um die Elemente der Differentialrechnung gründlich vorzutragen, braucht man nicht die Theorie der höheren Gleichungen als bekannt vorauszusetzen, wohl aber bedarf diese Theorie zu ihrer Begründung und zur Vermeidung unnöthiger Weitschweifigkeit einiger Vorkenntnisse aus der Differentialrechnung. Eben so schädlich ist das Vorurtheil die reine Analysis habe sich von geometrischen Betrachtungen ganz frei zu erhalten. Einem solchen falschen Systematisiren zu Liebe entzieht man sich die trefflichste Veranschaulichung einer stetigen Folge von Zahlwerthen einer Function, raubt sich das einfachste und natürlichste Mittel zur Entdeckung neuer Wahrheiten. Diess ungefähr ist der Inhalt der lesenswerthen Vorrede. Wir wollen nun eine Uebersicht des Werkes geben und daran einige Bemerkungen knüpfen, die dem achtungswerthen Verf. als Beweis der Aufmerksamkeit dienen mögen, mit der wir sein Werk gelesen haben. — In der Einleitung (S. 1—8) giebt der Verf. die nöthigen Erklärungen, zeigt die Darstellung der hier zu betrachtenden Functionen durch parabolische Curven und legt (§. 5.) den Plan seiner Schrift in der Kürze vor. Wir finden hier nur bei §. 3., wo die Construction der Werthe von $y = f(x)$ durch auf der x Axe rechtwinklige Ordinaten gelehrt, und das ununterbrochene Zusammenhangen der die Endpunkte dieser Ordinaten verbindenden Curve behauptet wird, die kleine Erinnerung zu machen, dass es doch eigentlich nöthig sei von der Stetigkeit der Function $f(x)$ vorher überzeugt zu sein, wenn man die Nothwendigkeit des ununterbrochenen Zusammenhanges jener Curve einsehen soll, was indessen hier, wo nur von ganzen Functionen gehandelt wird, sehr leicht ist (vergl. Cauchy Cours d'analyse chap. II. §. 2.). — Der erste Abschnitt handelt von den Grenzwerthen polynomischer Ausdrücke (S. 6—28). Abschn. 2.

Von den Derivationen *) polynomischer Functionen (S. 29—52). — Von den drei Beweisen, welche der Verf. hier für den Taylorschen Satz giebt, beruht der erste auf dem binomischen Lehrsatze. Da nun die nach aufsteigenden Potenzen von Δx vorzunehmende Entwickelung des Binoms $(x+\Delta x)^a$ nur dann bei jedem Werthe von Δx gültig bleibt, wenn a eine ganze positive Zahl ist, bei gebrochenen positiven Exponenten aber, wie bei allen negativen, nur für solche Werthe von Δx gilt, die zwischen den Gränzen $-x$ und $+x$ liegen, so hätte der Verf. sagen sollen, dass sein erster Beweis voraussetze, die Function $f(x)$ sei entweder eine ganze Function von x, oder der numerische Werth von Δx sei stets kleiner als der von x. Die blosse Voraussetzung, dass die Exponenten von x in dem Polynom $f(x)$ positiv seien, ist noch nicht genügend. Der zweite Beweis setzt stillschweigend voraus, dass keiner der Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... unbestimmt oder unendlich gross werde, was wiederum für eine ganze Function $y=f(x)$ zwar gewiss ist, keineswegs aber für alle Functionen von x wahr bleibt. Der dritte Beweis endlich ist mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten geführt, setzt also voraus, dass sich $f(x+\Delta x)$ in eine Reihe entwickeln lasse, die nach Potenzen mit ganzen positiven Exponenten von Δx fortschreite, und dass diese Reihe convergire, was zwar für ganze Functionen, aber nicht für alle andern wahr ist. Da die höheren algebraischen Gleichungen nach gehöriger Reduction allemal nur ganze Functionen enthalten, so genügen allerdings die Beweise des Verf., nur hätte er bestimmter angeben sollen, dass er hier nur für solche Functionen von der Taylorschen Reihe Gebrauch mache. — Hr. D. zeigt ferner in diesem Abschnitte, welches der Ausdruck für den Rest sei, wenn man die Taylorsche Reihe bei einem beliebigen Gliede abbricht, wie sich der Werth eines Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ in dem Falle bestimmen lasse, wo $f(x)$ und $\varphi(x)$ für einen besonderen Werth von x beide verschwinden, und giebt sodann die Derivationen der Function einer Function, so wie der Summe, des Products, des Quotienten und der Potenz von Functionen an. — Abschn. 3. Vom Gebrauch der Derivationen in der Theorie der Curven (S. 53—83). Es ist in diesem Abschnitte nur dasjenige aus der analytischen Geometrie ausgehoben, was für die Veranschaulichung der Theorie der algebraischen Gleichungen nöthig ist, diess aber gründlich und durch Auffassung von mehreren Seiten sehr klar dargestellt. — Abschn. 4. Von den Wurzeln der Gleichungen im Allgemeinen (S. 84—119). Hier über die Zerlegung der algebraischen Functionen in reelle einfache oder quadratische Factoren, Cauchy's und Gauss's (erster) Beweis für die Möglichkeit dieser Zerlegung, Cotesischer und Moi-

---

*) Hr. Drobisch und mehrere andere deutsche Mathematiker gebrauchen die Wörter Derivation und Ableitung statt des bisher üblichen Derivirte (scil. Function). In vielen Fällen dürfte aber diese Neuerung unbequem sein und Zweideutigkeiten herbei führen; z. B. die Ableitung der Ableitung von $y=f(x)$ könnte sowohl die Grösse $\frac{d^2y}{dx^2}$, als die Herleitung der Grösse $\frac{dy}{dx}$ aus der Function y sein.

vrescher Lehrsatz. — Bei dem Gaussischen Beweise glaubt der Vf. (S. 100.) übergehen zu dürfen, dass nicht mehr als $2m$ Punkte der Curve χ und dem Kreise gemein sein können, allein dann ist der in §. 78 enthaltene Schluss nicht bündig, weil dann zwischen (1) und (3) mehr als ein Punkt der Curve χ liegen und also zwei solche Punkte mit einander verbunden sein könnten. — Abschn. 5. Von den allgemeinsten Relationen der Wurzeln (S. 120—149). Vieta's Satz von der Zusammensetzung der Coefficienten einer algebraischen Gleichung. Beweis dieses Satzes mittelst der Derivationen. Folgerung daraus. Hudde's Satz von Auffindung gleicher Wurzeln. Girard's und Newton's Relationen zwischen den Coefficienten und den Summen der Potenzen der Wurzeln. Descartes's Lehrsatz nach Gauss. — Abschn. 6. Von den Grenzen der Wurzeln im Allgemeinen (S. 150—175). Newtons, Maclaurin's, Rolle's u. A. Methoden zur Bestimmung der äussersten Grenzen. Waring's und Lagrange's Methode zur Begrenzung der einzelnen reellen und Erkennung der imaginären Wurzeln. — Abschn. 7. Von den älteren Methoden zur Unterscheidung der reellen und imaginären Wurzeln (S. 176—202). Der Vf. trägt Rolle's, De Gua's u. A. Methoden vor, zeigt aber die Unvollkommenheit derselben. — Abschn. 8. Fourier's erste Methode zur Unterscheidung der reellen und der imaginären Wurzeln (S. 203—257). — Abschn. 9. Von der Berechnung der Wurzeln aus ihren Grenzen (ebenfalls nach Fourier) S. 258—298. — Abschn. 10. Fourier's zweite und dritte Regel zur Erkennung der imaginären Wurzeln; von der Berechnung derselben (S. 299—341). — Die Lehren Fourier's sind in den drei letzten Abschnitten, mit Eindringung in den Geist derselben, zuweilen etwas abgekürzt und anders geordnet, ohne jedoch etwas Wesentliches zu übergehen, und mit Hinzufügung neuer Beispiele vorgetragen. Am Schlusse des Werkes wird Lagrange's Methode zur Berechnung der imaginären Wurzeln gelehrt, so wie auch einige andere hiezu dienliche Verfahrungsarten, namentlich die Legendre's, erwähnt und endlich, nach genauerer Erörterung der geometrischen Bedeutung von t und u in der Form $t+u\sqrt{-1}$, ein hierauf gegründetes neues Verfahren angegeben. —

XXXV.

Das Pothenot'sche Problem, in erweiterter Gestalt; nebst Bemerkungen über seine Anwendung in der Geodäsie.

Von

dem Herausgeber.

1.

Das Pothenot'sche Problem ist bekanntlich die Aufgabe: wenn in einer Ebene drei Punkte gegeben sind, und in einem vierten Punkte in derselben Ebene die Winkel gemessen werden, welche die von demselben nach den drei gegebenen Punkten gezogenen Gesichtslinien mit einander einschliessen, die Lage dieses vierten Punktes zu bestimmen. Man kann aber diese schöne und so vieler Anwendungen in der Praxis fähige Aufgabe auf folgende Art erweitern:

Wenn drei beliebige Punkte im Raume gegeben sind, und in einem vierten beliebigen Punkte im Raume die drei Winkel gemessen werden, welche die von demselben nach den drei gegebenen Punkten gezogenen Gesichtslinien mit einander einschliessen, die Lage dieses vierten Punktes im Raume zu bestimmen.

Diese erweiterte Aufgabe wollen wir im Folgenden aufzulösen suchen, und die Auflösung mit einigen Bemerkungen über die Anwendung des Problems in der Praxis begleiten.

Die drei gegebenen Punkte im Raume seien A, B, C, und eben so sollen die drei Winkel des ebenen Dreiecks ABC, also die denselben gegenüberstehenden Seiten dieses Dreiecks wie gewöhnlich durch a, b, c bezeichnet werden. In dem vierten Punkte O im Raume seien nun die drei 180° nicht übersteigenden Winkel $BOC=\alpha$, $AOC=\beta$, $AOB=\gamma$ gemessen worden, und die Entfernungen des Punktes O von den drei gegebenen Punkten C, B, A seien respective x, y, z; so liefert uns die ebene Trigonometrie sogleich die drei folgenden Gleichungen:

$$1.\quad \begin{cases} x^2+y^2-2xy\cos\alpha=a^2, \\ x^2+z^2-2xz\cos\beta=b^2, \\ y^2+z^2-2yz\cos\gamma=c^2; \end{cases}$$

aus denen nun die drei Entfernungen x, y, z bestimmt werden müssen. Setzt man

$$2. \quad y = px, \; z = qx;$$

so werden die drei vorhergehenden Gleichungen

$$3. \quad \begin{cases} (1 + p^2 - 2p \cos \alpha)\, x^2 = a^2, \\ (1 + q^2 - 2q \cos \beta)\, x^2 = b^2, \\ (p^2 + q^2 - 2pq \cos \gamma)\, x^2 = c^2; \end{cases}$$

und durch Division der ersten und zweiten durch die dritte erhält man nun sogleich, wenn der Kürze wegen

$$4. \quad \frac{a^2}{c^2} = m^2, \; \frac{b^2}{c^2} = n^2$$

gesetzt wird, die beiden folgenden, die Grösse x nicht mehr enthaltenden Gleichungen:

$$5. \quad \begin{cases} \dfrac{1 + p^2 - 2p \cos \alpha}{p^2 + q^2 - 2pq \cos \gamma} = m^2, \\ \dfrac{1 + q^2 - 2q \cos \beta}{p^2 + q^2 - 2pq \cos \gamma} = n^2; \end{cases}$$

oder

$$6. \quad \begin{cases} 1 + p^2 - 2p \cos \alpha = m^2 (p^2 + q^2 - 2pq \cos \gamma), \\ 1 + q^2 - 2q \cos \beta = n^2 (p^2 + q^2 - 2pq \cos \gamma); \end{cases}$$

aus denen die beiden unbekannten Grössen p und q bestimmt werden müssen.

Auf Null gebracht, erhalten diese beiden Gleichungen die Form

$$m^2 q^2 - 2m^2\, pq \cos \gamma + (m^2 - 1)\, p^2 + 2p \cos \alpha - 1 = 0,$$
$$(n^2 - 1)\, q^2 + 2\, (\cos \beta - n^2 p \cos \gamma)\, q + n^2 p^2 - 1 = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen q^2, und bestimmt aus der dadurch sich ergebenden Gleichung dann die Grösse q; so erhält man

$$7. \quad q = -\frac{(m^2 + n^2 - 1)\, p^2 - 2\, (n^2 - 1)\, p \cos \alpha - (m^2 - n^2 + 1)}{2m^2\, (\cos \beta - p \cos \gamma)}.$$

Führt man nun diesen Ausdruck von q in die erste der beiden vorhergehenden Gleichungen ein, und setzt für die Grössen m^2 und n^2 ihre aus dem Obigen bekannten Werthe $\frac{a^2}{c^2}$ und $\frac{b^2}{c^2}$; so erhält man nach einigen leichten Reductionen zur Bestimmung von p die folgende Gleichung des vierten Grades:

$$\begin{aligned} 8. \quad 0 = \; & \{(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2\, b^2 \cos \gamma^2\}\, p^4 \\ & - 4\{[(b^2 - c^2)\, (a^2 + b^2 - c^2) - 2a^2 b^2 \cos \gamma^2] \cos \alpha \\ & \qquad - a^2(b^2 + c^2 - a^2) \cos \beta \cos \gamma\}\, p^3 \\ & + 2\{2[(b^2 - c^2)^2 \cos \alpha^2 + a^2(a^2 - c^2) \cos \beta^2 + a^2(a^2 - b^2) \cos \gamma^2] \\ & \qquad - 4a^2(b^2 + c^2) \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - (a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)\}\, p^2 \\ & - 4\{[(c^2 - b^2)\, (a^2 + c^2 - b^2) - 2a^2 c^2 \cos \beta^2] \cos \alpha \\ & \qquad - a^2(b^2 + c^2 - a^2) \cos \beta \cos \gamma\}\, p \\ & + (a^2 + c^2 - b^2)^2 - 4a^2 c^2 \cos \beta^2. \end{aligned}$$

Bekanntlich ist aber

$$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A,\quad a^2+c^2-b^2=2ac\cos B,$$
$$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$$

und

$$a=b\cos C+c\cos B,\ b=c\cos A+a\cos C,\ c=a\cos B+b\cos A;$$

und folglich, wie man leicht findet,

$$(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2\cos\gamma^2=4a^2b^2(\cos C^2-\cos\gamma^2),$$
$$(a^2+c^2-b^2)^2-4a^2c^2\cos\beta^2=4a^2c^2(\cos B^2-\cos\beta^2);$$
$$(b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)-2a^2b^2\cos\gamma^2$$
$$=2a^2b\cos C(b\cos C-c\cos B)-2a^2b^2\cos\gamma^2,$$
$$(c^2-b^2)(a^2+c^2-b^2)-2a^2c^2\cos\beta^2$$
$$=2a^2c\cos B(c\cos B-b\cos C)-2a^2c^2\cos\beta^2;$$
$$(b^2-c^2)^2\cos\alpha^2+a^2(a^2-c^2)\cos\beta^2+a^2(a^2-b^2)\cos\gamma^2$$
$$=a^2(b\cos C-c\cos B)^2\cos\alpha^2+a^2b(a\cos C-c\cos A)\cos\beta^2$$
$$+a^2c(a\cos B-b\cos A)\cos\gamma^2;$$
$$a^2(b^2+c^2-a^2)\cos\beta\cos\gamma=2a^2bc\cos A\cos\beta\cos\gamma,$$
$$(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=4a^2bc\cos B\cos C.$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichung 8. ein, nnd dividirt dieselbe dann durch $4a^2$; so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned}
9.\quad 0= &\ b^2(\cos C^2-\cos\gamma^2)p^4\\
&-2b\{[\cos C(b\cos C-c\cos B)-b\cos\gamma^2]\cos\alpha\\
&\qquad -c\cos A\cos\beta\cos\gamma\}p^3\\
&+\{(b\cos C-c\cos B)^2\cos\alpha^2+b(a\cos C-c\cos A)\cos\beta^2\\
&\qquad +c(a\cos B-b\cos A)\cos\gamma^2-2(b^2+c^2)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\
&\qquad -2bc\cos B\cos C\}p^2\\
&-2c\{[\cos B(c\cos B-b\cos C)-c\cos\beta^2]\cos\alpha\\
&\qquad -b\cos A\cos\beta\cos\gamma\}p\\
&+c^2(\cos B^2-\cos\beta^2).
\end{aligned}$$

Diese Gleichung bringt man aber ferner, weil

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$

ist, und folglich

$$a=r\sin A,\ b=r\sin B,\ c=r\sin C$$

gesetzt werden kann, leicht auf folgende Form:

$$\begin{aligned}
10.\quad 0= &\ \sin B^2(\cos C^2-\cos\gamma^2)p^4\\
&-2\sin B\{[\cos C\sin(B-C)-\sin B\cos\gamma^2]\cos\alpha-\cos A\sin C\cos\beta\cos\gamma\}p^3\\
&+\{\sin(B-C)^2\cos\alpha^2+\sin B\sin(A-C)\cos\beta^2+\sin C\sin(A-B)\cos\gamma^2\\
&\qquad -2(\sin B^2+\sin C^2)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-2\sin B\cos B\sin C\cos C\}p^2\\
&-2\sin C\{[\cos B\sin(C-B)-\sin C\cos\beta^2]\cos\alpha-\cos A\sin B\cos\beta\cos\gamma\}p\\
&+\sin C^2(\cos B^2-\cos\beta^2).
\end{aligned}$$

Mittelst einiger bekannten goniometrischen Transformationen kann man diese Gleichung auch auf den folgenden Ausdruck bringen:

$$
\begin{aligned}
11.\quad 0= & \sin B^2 \sin(C+\gamma)\sin(C-\gamma)p^4 \\
& +2\sin B\,\{[\cos C\sin(B-C)-\sin B\cos\gamma^2]\cos\alpha \\
& \qquad\qquad -\cos A\sin C\cos\beta\cos\gamma\}p^3 \\
& -\{\sin(B-C)^2\cos\alpha^2+\sin B\sin(A-C)\cos\beta^2+\sin C\sin(A-B)\cos\gamma^2 \\
& -2[1-\cos(B+C)\cos(B-C)]\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\tfrac{1}{2}\sin 2B\sin 2C\}p^2 \\
& +2\sin C\,\{[\cos B\sin(C-B)-\sin C\cos\beta^2]\cos\alpha \\
& \qquad\qquad -\cos A\sin B\cos\beta\cos\gamma\}p \\
& +\sin C^2\sin(B+\beta)\sin(B-\beta).
\end{aligned}
$$

Hat man p mittelst dieser Gleichung gefunden, so ergiebt sich q mittelst des Ausdrucks 7., den man aber leicht auf folgende Form bringen kann:

$$12.\quad q=-\frac{p^2\sin B\cos C-p\cos\alpha\sin(B-C)-\cos B\sin C}{\sin A(\cos\beta-p\cos\gamma)}.$$

Die Entfernung x ergiebt sich mittelst eines der drei aus 3. sich unmittelbar ergebenden Ausdrücke:

$$13.\quad \begin{cases} x=\dfrac{a}{\sqrt{1+p^2-2p\cos\alpha}}, \\ x=\dfrac{b}{\sqrt{1+q^2-2q\cos\beta}}, \\ x=\dfrac{c}{\sqrt{p^2+q^2-2pq\cos\gamma}}; \end{cases}$$

denen man auch, wenn man die Hülfswinkel Θ, Θ', Θ'' mittelst der Formeln

$$14.\quad \tang\Theta=\frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\sqrt{p}}{1-p},\quad \tang\Theta'=\frac{2\sin\frac{1}{2}\beta\sqrt{q}}{1-q},\quad \tang\Theta''=\frac{2\sin\frac{1}{2}\gamma\sqrt{pq}}{p-q}$$

berechnet, die zur logarithmischen Rechnung bequemere Form

$$15.\quad x=\pm\frac{a\cos\Theta}{1-p},\quad x=\pm\frac{b\cos\Theta'}{1-q},\quad x=\pm\frac{c\cos\Theta''}{p-q},$$

wo die Zeichen immer so zu nehmen sind, dass x positiv wird, geben kann.

Die Entfernungen y und z ergeben sich nun endlich mittelst der aus dem Obigen (2.) bekannten Formeln

$$16.\quad y=px,\quad z=qx.$$

2.

Nachdem wir jetzt die Entfernungen des Punktes O von den drei Punkten A, B, C zu bestimmen im Stande sind, wollen wir uns, weil die Lage der drei Punkte A, B, C im Raume meistens durch ihre Coordinaten in Bezug auf ein gewisses rechtwinkliges

Coordinatensystem bestimmt sein wird, nun ferner überhaupt die folgende Aufgabe vorlegen:

Wenn in Bezug auf ein gewisses rechtwinkliges System die Coordinaten dreier Punkte im Raume und die Entfernungen eines vierten Punktes von diesen drei Punkten gegeben sind: die Coordinaten des in Rede stehenden vierten Punktes in Bezug auf das angenommene System zu finden.

Die Coordinaten der drei gegebenen Punkte seien

$$m,\ n,\ k;\ m_1,\ n_1,\ k_1;\ m_2,\ n_2,\ k_2;$$

und a, a_1, a_2 seien die Entfernungen des vierten Punktes, dessen Coordinaten x, y, z gesucht werden, von diesen drei Punkten; so hat man nach den Principien der analytischen Geometrie die folgenden Gleichungen:

$$17.\quad \begin{cases} (x-m)^2+(y-n)^2+(z-k)^2=a^2, \\ (x-m_1)^2+(y-n_1)^2+(z-k_1)^2=a_1^2, \\ (x-m_2)^2+(y-n_2)^2+(z-k_2)^2=a_2^2; \end{cases}$$

welche auch leicht auf die Form

$$(x-m)^2+(y-n)^2+(z-k)^2=a^2,$$

$$\{(x-m)+(m-m_1)\}^2+\{(y-n)+(n-n_1)\}^2 + \{(z-k)+(k-k_1)\}^2=a_1^2,$$

$$\{(x-m)+(m-m_2)\}^2+\{(y-n)+(n-n_2)\}^2 + \{(z-k)+(k-k_2)\}^2=a_2^2$$

gebracht werden können. Aus diesen drei Gleichungen ergeben sich aber ferner, wenn der Kürze wegen

$$18.\quad \begin{cases} i_1=\frac{1}{2}\{a_1^2-a^2-(m-m_1)^2-(n-n_1)^2-(k-k_1)^2\}, \\ i_2=\frac{1}{2}\{a_2^2-a^2-(m-m_2)^2-(n-n_2)^2-(k-k_2)^2\} \end{cases}$$

gesetzt wird, leicht die beiden folgenden Gleichungen:

$$(m-m_1)\ (x-m)+(n-n_1)\ (y-n)+(k-k_1)\ (z-k)=i_1,$$

$$(m-m_2)\ (x-m)+(n-n_2)\ (y-n)+(k-k_2)\ (x-k)=i_2;$$

welche nach gehöriger Elimination, wenn der Kürze wegen

$$19.\quad \begin{cases} p=\dfrac{(k-k_2)\ i_1-(k-k_1)\ i_2}{(n-n_1)\ (k-k_2)-(n-n_2)\ (k-k_1)}, \\ s=-\dfrac{(n-n_2)\ i_1-(n-n_1)\ i_2}{(n-n_1)\ (k-k_2)-(n-n_2)\ (k-k_1)}; \end{cases}$$

und

$$20.\quad \begin{cases} q=-\dfrac{(m-m_1)\ (k-k_2)-(m-m_2)\ (k-k_1)}{(n-n_1)\ (k-k_2)-(n-n_2)\ (k-k_1)}, \\ t=\dfrac{(m-m_1)\ (n-n_2)-(m-m_2)\ (n-n_1)}{(n-n_1)\ (k-k_2)-(n-n_2)\ (k-k_1)} \end{cases}$$

gesetzt wird, zu den folgenden Ausdrücken von $y-n$ und $z-k$ führen:

$$21.\quad y-n=p+q(x-m),\ z-k=s+t(x-m).$$

Setzt man diese Ausdrücke in die erste der Gleichungen 17.; so erhält man nach leichter Rechnung die folgende Gleichung des zweiten Grades:

22. $p^2+s^2-a^2+2(pq+st)(x-m)+(1+q^2+t^2)(x-m)^2=0,$

deren Auflösung auf gewöhnliche Weise zu dem folgenden Ausdrucke von $x-m$ führt:

23. $$x-m=\frac{-(pq+st)\pm\sqrt{(pq+st)^2-(1+q^2+t^2)(p^2+s^2-a^2)}}{1+q^2+t^2}.$$

Setzt man

24. $$x-m=\operatorname{tang}\xi,$$

so wird die Gleichung 22.

$$(p^2+s^2-a^2)\cos\xi^2+(pq+st)\sin 2\xi+(1+q^2+t^2)\sin\xi^2=0,$$

und folglich, wenn man

$$\cos\xi^2=\frac{1+\cos 2\xi}{2},\ \sin\xi^2=\frac{1-\cos 2\xi}{2}$$

setzt,

$$1+p^2+q^2+s^2+t^2-a^2-(1-p^2+q^2-s^2+t^2+a^2)\cos 2\xi$$
$$+2(pq+st)\sin 2\xi=0.$$

Setzt man nun

25. $$\operatorname{tang} 2\omega=\frac{2(pq+st)}{1-p^2+q^2-s^2+t^2+a^2},$$

so erhält man ohne Schwierigkeit

26. $$\cos 2(\xi+\omega)=\frac{1+p^2+q^2+s^2+t^2-a^2}{1-p^2+q^2-s^2+t^2+a^2}\cos 2\omega.$$

Bezeichnet man in dem Dreiecke, dessen Seiten a, a_1 und die Entfernung e_1 der Punkte (mnk) und $(m_1n_1k_1)$ von einander sind, den der Seite a_1 gegenüberstehenden Winkel durch α_1, in dem Dreiecke, dessen Seiten a, a_2 und die Entfernung e_2 der Punkte (mnk) und $(m_2n_2k_2)$ von einander sind, den der Seite a_2 gegenüberstehenden Winkel durch α_2; so ist

$$\cos\alpha_1=\frac{a^2+e_1^2-a_1^2}{2ae_1},\ \cos\alpha_2=\frac{a^2+e_2^2-a_2^2}{2ae_2},$$

und folglich

$$a^2+e_1^2-a_1^2=2ae_1\cos\alpha_1,\ a^2+e_2^2-a_2^2=2ae_2\cos\alpha_2,$$

d. i.

$$a_1^2-a^2-(m-m_1)^2-(n-n_1)^2-(k-k_1)^2=-2ae_1\cos\alpha_1,$$
$$a_2^2-a^2-(m-m_2)^2-(n-n_2)^2-(k-k_2)^2=-2ae_2\cos\alpha_2;$$

also nach 18.

27. $$i_1=-ae_1\cos\alpha_1,\ i_2=-ae_2\cos\alpha_2,$$

mittelst welcher Formeln die Grössen i_1 und i_2 sehr leicht berechnet werden können, wenn die Entfernungen e_1, e_2 und die Winkel α_1, α_2 bekannt sind.

Berechnet man die Hülfswinkel μ und φ, ψ, χ mittelst der Formeln

$$28.\quad \operatorname{tang} \mu = \frac{i_2}{i_1}$$

und

$$29.\quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{m-m_2}{m-m_1},\ \operatorname{tang} \psi = \frac{n-n_2}{n-n_1},\ \operatorname{tang} \chi = \frac{k-k_2}{k-k_1};$$

so hat man zur Berechnung der Grössen p, q, s, t die folgenden Formeln:

$$30.\quad \begin{cases} p = \dfrac{i_1}{n-n_1} \cdot \dfrac{\sin(\mu-\chi)\cos\psi}{\sin(\psi-\chi)\cos\mu}, \\[2ex] q = -\dfrac{m-m_1}{n-n_1} \cdot \dfrac{\sin(\varphi-\chi)\cos\psi}{\sin(\psi-\chi)\cos\varphi}, \\[2ex] s = \dfrac{i_1}{k-k_1} \cdot \dfrac{\sin(\mu-\psi)\cos\chi}{\sin(\chi-\psi)\cos\mu}, \\[2ex] t = -\dfrac{m-m_1}{k-k_1} \cdot \dfrac{\sin(\varphi-\psi)\cos\chi}{\sin(\chi-\psi)\cos\varphi}. \end{cases}$$

Nach dem Vorhergehenden lässt unsere Aufgabe, wenn sie überhaupt möglich ist, jederzeit zwei Auflösungen zu, und es erhellet auch auf der Stelle aus geometrischen Gründen, dass es, wenn die Aufgabe möglich ist, immer zwei derselben genügende Punkte geben muss, welche auf entgegengesetzten Seiten der durch die drei gegebenen Punkte (mnk), $(m_1n_1k_1)$, $(m_2n_2k_2)$ bestimmten Ebene liegen, übrigens aber gegen diese Ebene eine ganz gleiche Lage haben. Um also die Lage des gesuchten Punktes (xyz) mittelst des Obigen vollkommen bestimmen zu können, muss man aus andern Gründen wissen, auf welcher Seite der durch die drei gegebenen Punkte (mnk), $(m_1n_1k_1)$, $(m_2n_2k_2)$ bestimmten Ebene derselbe liegt.

3.

Die in 1. aufgelöste Aufgabe, in Verbindung mit dem in 2. gelösten Problem, würde sehr geeignet sein, mit Hülfe dreier ihrer Lage nach bekannter Punkte im Raume die Lage eines vierten Punktes im Raume zu bestimmen, wenn zu der Lösung derselben nicht, wie aus 1. bekannt ist, eine Gleichung des vierten Grades erforderlich wäre, deren Auflösung schon an sich weitläufig ist, und die auch, wenn die Aufgabe überhaupt möglich ist, jederzeit entweder zwei oder vier Auflösungen für dieselbe liefert. Ständen diese theoretischen Schwierigkeiten *) nicht entgegen, so würde man, wenn z. B. auf der Spitze eines Berges die drei Winkel gemessen worden wären, welche von den von derselben nach drei ihrer Lage nach bekannten Punkten im Raume gezogenen Gesichtslinien eingeschlossen werden, die Lage dieser Bergspitze im Raume, also auch, wenn man nur, was in allen Fällen das zweckmässigste sein dürfte, eine der drei Coordinatenebenen horizontal angenommen hat, ihre Höhe in Bezug auf diese Horizontalebene bestimmen

*) Als ein der Anwendung der in Rede stehenden Aufgabe im Wege stehendes Hinderniss, wenn man nämlich sehr grosse Genauigkeit verlangt, ist in praktischer Beziehung noch die Refraction zu bemerken.

können. Das eigentliche nach Pothenot benannte Problem liefert nur zwei Coordinaten des gesuchten Punktes, und kann seiner Natur nach nicht mehr liefern; unsere oben aufgelöste Aufgabe liefert dagegen *alle* drei Coordinaten des gesuchten Punktes, welches ein wesentlicher Vorzug derselben vor jenem Problem ist.

Die in Rede stehenden theoretischen Schwierigkeiten scheinen es aber nothwendig zu machen, dass man, wenn man die in 1. aufgelöste Aufgabe in der Praxis mit Leichtigkeit anwenden will, einen von der dort gegebenen allgemeinen Auflösung verschiedenen Weg einschlägt, den wir nun noch in der Kürze andeuten wollen.

Die drei gegebenen Punkte im Raume seien wie früher A, B. C, und O sei der gesuchte Punkt; auch sollen überhaupt die in 1. eingeführten Bezeichnungen jetzt ihre dortige Bedeutung behalten, und wir wollen nur bloss noch

$$\angle BAO=\varphi,\ \angle CAO=\varphi'$$
$$\angle CBO=\psi,\ \angle ABO=\psi'$$
$$\angle ACO=\chi,\ \angle BCO=\chi'$$

setzen; so ist offenbar

$$31.\quad \begin{cases}\psi+\chi'=180^\circ-\alpha,\\ \chi+\varphi'=180^\circ-\beta,\\ \varphi+\psi'=180^\circ-\gamma;\end{cases}$$

und

$$32.\quad \begin{cases}AO=\dfrac{b\sin\chi}{\sin\beta}=\dfrac{c\sin\psi'}{\sin\gamma},\\[2ex] BO=\dfrac{c\sin\varphi}{\sin\gamma}=\dfrac{a\sin\chi'}{\sin\alpha},\\[2ex] CO=\dfrac{a\sin\psi}{\sin\alpha}=\dfrac{b\sin\varphi'}{\sin\beta};\end{cases}$$

also wegen 31.

$$33.\quad \begin{cases}\dfrac{a\sin\psi}{\sin\alpha}=\dfrac{b\sin(\beta+\chi)}{\sin\beta},\\[2ex] \dfrac{b\sin\chi}{\sin\beta}=\dfrac{c\sin(\gamma+\varphi)}{\sin\gamma},\\[2ex] \dfrac{c\sin\varphi}{\sin\gamma}=\dfrac{a\sin(\alpha+\psi)}{\sin\alpha}.\end{cases}$$

Man messe nun ausser den drei Winkeln α, β, γ jederzeit entweder noch einen der drei Winkel φ, ψ, χ oder einen der drei Winkel φ', ψ', χ', welcher gerade die sicherste und bequemste Messung gestattet. Weil jedoch vermöge der Gleichungen 31., wenn einer der drei Winkel φ', ψ', χ' bekannt ist, immer auch einer der drei Winkel φ, ψ, χ bekannt ist; so sind wir berechtigt, bloss diesen letzten Fall in Betrachtung zu ziehen, und wollen zugleich, um die Begriffe zu fixiren, annehmen, dass der Winkel φ gemessen worden sei. Dann kann man mittelst der aus 33. und einem bekannten Satze der ebenen Trigonometrie fliessenden Ausdrücke

$$34.\quad \sin\chi=\frac{c\sin\beta}{b\sin\gamma}\sin(\gamma+\varphi)=\frac{\sin\beta\sin C}{\sin\gamma\sin B}\sin(\gamma+\varphi)$$

den Winkel χ berechnen, wodurch man aber für χ jederzeit zwei sich zu 180° ergänzende Werthe erhält, und mittelst der Ausdrücke

$$35.\quad \sin\psi = \frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}\sin(\beta+\chi) = \frac{\sin\alpha\sin B}{\sin\beta\sin A}\sin(\beta+\chi)$$

kann man ψ berechnen, wodurch man aber, da χ zwei Werthe hat, offenbar im Allgemeinen vier Werthe von ψ, überhaupt also vier Systeme von Werthen der Grössen χ, ψ erhält. Um nun zu entscheiden, welches dieser vier Systeme man zu wählen hat, muss man mittelst der Ausdrücke

$$36.\quad \sin\varphi = \frac{a\sin\gamma}{c\sin\alpha}\sin(\alpha+\psi) = \frac{\sin\gamma\sin A}{\sin\alpha\sin C}\sin(\alpha+\psi)$$

den Winkel φ berechnen, und muss untersuchen, welches der in Rede stehenden vier Systeme von Werthen der Grössen χ, ψ wieder, wenigstens so nahe als möglich, zu dem Werthe von φ, von welchem man ausging, zurückführt. Auf diese Weise erhält man Werthe von φ, ψ, χ, welche als erste Näherungswerthe dieser Grössen zu betrachten sind, und im Folgenden durch φ, ψ, χ selbst bezeichnet werden sollen. Bezeichnet man nun die wahren Werthe der Winkel

$$BAO,\ CBO,\ ACO$$

respective durch

$$\varphi+d\varphi,\ \psi+d\psi,\ \chi+d\chi,$$

und setzt der Kürze wegen

$$37.\quad \begin{cases} f = \dfrac{a\sin\gamma}{c\sin\alpha} = \dfrac{\sin\gamma\sin A}{\sin\alpha\sin C}, \\ g = \dfrac{b\sin\alpha}{a\sin\beta} = \dfrac{\sin\alpha\sin B}{\sin\beta\sin A}, \\ h = \dfrac{c\sin\beta}{b\sin\gamma} = \dfrac{\sin\beta\sin C}{\sin\gamma\sin B}; \end{cases}$$

so hat man nach 33. die drei folgenden Gleichungen:

$$\sin(\varphi+d\varphi) - f\sin(\alpha+\psi+d\psi) = 0,$$
$$\sin(\psi+d\psi) - g\sin(\beta+\chi+d\chi) = 0,$$
$$\sin(\chi+d\chi) - h\sin(\gamma+\varphi+d\varphi) = 0;$$

d. i. nach den bekannten Principien der Differentialrechnung die drei Gleichungen des ersten Grades in Bezug auf $d\varphi$, $d\psi$, $d\chi$ als unbekannte Grössen:

$$38.\quad \begin{cases} \sin\varphi - f\sin(\alpha+\psi) + \cos\varphi d\varphi - f\cos(\alpha+\psi)\,d\psi = 0, \\ \sin\psi - g\sin(\beta+\chi) + \cos\psi d\psi - g\cos(\beta+\chi)\,d\chi = 0, \\ \sin\chi - h\sin(\gamma+\varphi) + \cos\chi d\chi - h\cos(\gamma+\varphi)\,d\varphi = 0; \end{cases}$$

aus denen nun $d\varphi$, $d\psi$, $d\chi$ bestimmt werden müssen. Mittelst gewöhnlicher algebraischer Elimination und einiger leichten goniometrischen Transformationen erhält man, wenn der Kürze wegen

$$39.\quad N = \cos\varphi\cos\psi\cos\chi - fgh\cos(\alpha+\psi)\cos(\beta+\chi)\cos(\gamma+\varphi)$$

gesetzt wird, zur Bestimmung der gesuchten Correctionen $d\varphi$, $d\psi$, $d\chi$ die folgenden Ausdrücke:

$$40.\quad \begin{cases} -Nd\varphi = \sin\varphi\cos\psi\cos\chi - f\sin\alpha\cos\chi - fg\sin\beta\cos(\alpha+\psi) \\ \qquad -fgh\cos(\alpha+\psi)\cos(\beta+\chi)\sin(\gamma+\varphi), \\ -Nd\psi = \cos\varphi\sin\psi\cos\chi - g\sin\beta\cos\varphi - gh\sin\gamma\cos(\beta+\chi) \\ \qquad -fgh\sin(\alpha+\psi)\cos(\beta+\chi)\cos(\gamma+\varphi), \\ -Nd\chi = \cos\varphi\cos\psi\sin\chi - h\sin\gamma\cos\psi - hf\sin\alpha\cos(\gamma+\varphi) \\ \qquad -fgh\cos(\alpha+\psi)\sin(\beta+\chi)\cos(\gamma+\varphi). \end{cases}$$

Hat man aber z. B. $d\varphi$ mittelst des ersten dieser drei Ausdrücke gefunden, so kann man $d\psi$ und $d\chi$ auch leicht mittelst der folgenden aus den Gleichungen 38. sich unmittelbar ergebenden Ausdrücke finden:

$$41.\quad \begin{cases} d\psi = \dfrac{\sin\varphi - f\sin(\alpha+\psi) + \cos\varphi d\varphi}{f\cos(\alpha+\psi)} \\ d\chi = -\dfrac{\sin\chi - h\sin(\gamma+\varphi) - h\cos(\gamma+\varphi)\,d\varphi}{\cos\chi}. \end{cases}$$

Wie man auf dieselbe Art, wie man vorher von den Näherungswerthen φ, ψ, χ zu den neuen Näherungswerthen $\varphi+d\varphi$, $\psi+d\psi$, $\chi+d\chi$ gelangte, von diesen Näherungswerthen wieder zu neuen Näherungswerthen übergehen, und auf diese Art überhaupt immer weiter fortschreiten kann, bedarf hier keiner besondern Erläuterung. Bemerken wollen wir jedoch noch, dass die obigen Formeln die Correctionen $d\varphi$, $d\psi$, $d\chi$ natürlich in Theilen des Halbmessers, welcher bekanntlich immer der Einheit gleich gesetzt wird, ausgedrückt liefern. Will man aber diese Correctionen in Secunden ausdrücken, so dienen dazu die folgenden leicht verständlichen Formeln:

$$42.\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{\sin 1''} \text{ oder } 206264{,}8\,.\,d\varphi, \\ \dfrac{d\psi}{\sin 1''} \text{ oder } 206264{,}8\,.\,d\psi, \\ \dfrac{d\chi}{\sin 1''} \text{ oder } 206264{,}8\,.\,d\chi. \end{cases}$$

Hat man auf die vorhergehende Art die Winkel

$$BAO,\ CBO,\ ACO$$

gefunden; so erhält man die Entfernungen AO, BO, CO mittelst der Formeln

$$43.\quad \begin{cases} AO = \dfrac{b\sin ACO}{\sin\beta} = \dfrac{c\sin(\gamma+BAO)}{\sin\gamma}, \\ BO = \dfrac{c\sin BAO}{\sin\gamma} = \dfrac{a\sin(\alpha+CBO)}{\sin\alpha}, \\ CO = \dfrac{a\sin CBO}{\sin\alpha} = \dfrac{b\sin(\beta+ACO)}{\sin\beta}; \end{cases}$$

und kann dann ferner, wenn die Coordinaten der Punkte A, B, C gegeben sind, die Coordinaten des Punktes O mittelst der in 2. entwickelten Formeln berechnen.

Will man unsere Aufgabe bei geodätischen Messungen in Anwendung bringen, so muss man natürlich mit einem Instrumente versehen sein, welches, wie z. B. der Spiegelsextant, der Spiegelkreis, nnd insbesondere der Bordaische Kreis, die Messung der Winkel in allen Lagen derselben gegen den Horizont gestattet. Ein gewöhnlicher Theodolit, mit welchem sich bekanntlich bloss die horizontalen Projectionen der Winkel messen lassen, ist dagegen zn dem in Rede stehenden Gebrauche nicht geeignet, wohl aber zur Anwendung der gewöhnlichen Pothenotschen Aufgabe, für welche u. A. in No. XIV. S. 92. eine Auflösung gegeben worden ist, hinreichend.

XXXVI.

Untersuchungen über Projectionen und neuere Geometrie.

Von

Herrn O. Schlömilch

zu Weimar.

1.

Die perspectivische Projection in ihrer einfachsten Gestalt entsteht bekanntlich dadurch, dass man zwei auf einander senkrechte Ebenen MO, MQ, die wir kurz (E) nnd (e) nennen, annimmt und von allen Gebilden der Ebene (E) nach einem Projectionspunkt P Gerade (Strahlen) zieht, welche (e) in entsprechenden Punkten durchschneiden, die in ihrer Vereinigung die Projection des primitiven Gebildes abgeben. Wir wollen nun in dem Folgenden die Gebilde in E und e, von denen das letztere die Projection des ersteren ist, entsprechende Gebilde nennen.

Zuerst ist klar, dass die Projection einer Geraden wieder eine Gerade sein wird, dass es also für die Bestimmung der Lage der Projection hinreicht, wenn man zwei Punkte der primitiven Geraden projicirt. Ist nun MN (Taf. III. Fig. 1.) der Durchschnitt der Ebenen (E) und (e) nnd darin C der Punkt, in welchem MN von der zu projicirenden Geraden CT in (E) geschnitten wird, so fallen in C die einander entsprechenden Punkte zusammen, oder C ist die Projection seiner selbst. — Ferner ist klar, dass, je weiter man die Gerade CT verlängert, der Projectionsstrahl PT sich successive der Lage $Pt \parallel CT$ nähern wird. Lassen wir also T sich unendlich weit von MN entfernen, so geht der Projectionsstrahl PT ganz in die Lage $Pt \parallel CT$ über, und es ist dann t die Projection des unendlich entfernten Punktes T und die begränzte Gerade Ct die der unbegränzten CT. Die Bestimmung des Punktes t hat nicht die mindeste Schwierigkeit mehr, da die Ebene $Pot \parallel$ der Ebene (E) mithin auch $ot \parallel MN$ und wie vorher $Ot \parallel CT$ ist.

Man bemerkt aber leicht, dass diese Bestimmnng des Punktes t gar nicht von der Lage des Punktes C in MN abhängt, dass also für eine Gerade $C'T' \parallel CT$ ganz dieselbe Constrnktion gilt, und also $C't$ die Projectiou von $C'T'$ ist. Daraus ergiebt sich der Satz

„Einem Systeme paralleler Geraden in (E) entspricht ein Strahlbüschel in (e)."

Wenn sich der Winkel MCT ändert, wird offenbar t sich auf der Geraden $ot \parallel MN$ bewegen; also:

„Die Mittelpunkte aller Strahlbüschel, welche verschiedenen Systemen paralleler Geraden entsprechen, liegen in einer Gernden."

Unter den verschiedenen Werthen, die der Winkel MCT annehmen kann, sind besonders zwei hervorzuheben. Ist nämlich $\angle MCT = R$, so fällt t mit o zusammen; ist aber $\angle MCT = \frac{1}{2}R$, so wird $ot = Po$ nnd also schon bekannt, weil die Entfernung des Projectionspunktes gegeben ist. Daraus ergiebt sicb leicht ein Verfahren, um die Projection jedes beliebigen Punktes J aufzufinden Taf. III. Fig. 2. *). Denn fällen wir das Perpendikel HJ und machen $HK = HJ$, so lässt sich J als Durchschnitt zweier Geraden betrachten, von denen die eine MN unter einem rechten, die andere unter einem halben rechten Winkel schneidet. Ist ot wieder die Entfernung des Projectionspunktes von (e), so ist Ho die Projection der unbestimmt verlängerten HJ, kt die von KJ also der Durchschnitt i die Projection von J.

2.

Man kann aber auch von der Ebene (e) ausgehen, sich die Gebilde derselben als gegeben denken und von ihnen anf die der Ebene (E) zurückschliessen, indem man über ot einen Projectionspunkt denkt, durch welchen umgekehrt die Gebilde in (E) entstehen. Dann hat man folgenden Satz:

„Allen Strahlbüscheln in (e), deren Mittelpunkte in einer Geraden (ot) liegen, entsprechen in (E) gleich viele Systeme paralleler Geraden."

Aus diesem und dem ihm analogen Satze in (1) lassen sich nun für eine Menge von Sätzen aus der Situationsgeometrie die einfachsten Beweise berleiten, wofür nun einige Beispiele dienen sollen.

Sei Taf. III. Fig. 6. cpf ein beliebiger Winkel nnd ausser ihm ein Punkt q angenommen, von welchem aus durch jenen Winkel beliebig viele Strahlen aq, bq, cq . . gezogen sind. Zieht man in den so entstandenen Vierecken die Diagonalen, so liegen die Durchschnitte derselben mit p in einer Geraden.

*) Die Figur stellt Alles in einer Ebene dar, so dass man sich (E) um MN als Axe gedrebt denken kann, bis sie mit (e) zusammenfällt.

Denn nehmen wir die Gerade *pq* als die Gerade *ot* in Taf. III. Fig. 1. an, so entsprechen dem Winkel *cpf* zwei Parallelen *AC*, *DF*, den Strahlen *aq*, *bq*, *cq* .. die Parallelen *AD*, *BE*, *CF* .... Folglich sind die entsprechenden Vierecke Parallelogramme. Die Durchschnitte *M*, *M'* . . der Diagonalen in denselben liegen aber nach sehr bekannten Sätzen in einer Geraden, welche zugleich || *AC* und *DF* ist. Folglich müssen nach (1) die Projectionen von *M*, *M'*, . . ebenfalls in einer Geraden liegen, welche auch durch *p* geht, w. z. b. w.

Von diesem Satze lassen sich bekanntlich viele fruchtbare Anwendungen machen, die wie hier übergehen müssen.

3.

Taf. III. Fig. 4. Wenn die drei Geraden *aa'*, *bb'*, *cc'*, welche die Spitzen zweier Dreiecke mit einander verbinden, sich in einem Punkte schneiden, so liegen die drei Durchschnitte *p*, *q*, *r* der verlängerten gleichnamigen Seiten, *ab* und *a'b'*, *ac* und *a'c'*, *bc* und *b'c'*, in einer Geraden.

Nehmen wir die Gerade *pq* als die Linie *ot* in Taf. III. Fig. 1. an, so entspricht dem Strahlbüschel *am*, *bm*, *cm* ein anderer *AM*, *BM*, *CM*, in welchem *AB* || *A'B'*, *AC* || *A'C'*. Nun folgt daraus nach bekannten Eigenschaften ähnlicher Dreiecke *BC* || *B'C'*, also entsprechen diesen Geraden zwei andere *bc*, *b'c'*, deren Durchschnitt mit auf *pq* liegt.

4.

Taf. III. Fig. 5. In einem Dreiecke *LMNO* ist die Grundlinie *LN* in *M* halbirt, der Strahl *MO* und noch *OQ* || *MN* gezogen; der so entstandene Strahlbüschel heisst bekanntlich ein harmonischer und es giebt darüber die beiden Sätze:

> „Jede Gerade, die einen harmonischen Strahlbüschel schneidet, wird von demselben harmonisch getheilt;“

und

> „Jeder Strahlbüschel, dessen Strahlen durch die harmonischen Theilpunkte einer Geraden gehen, ist ein harmonischer.“

Nach dem ersteren Satze werden also *abcd* und *ABCD* harmonisch getheilt sein. Nun kann man sich aber diese beiden Geraden in ganz beliebigen verschiedenen Ebenen und *O* als Projectionspunkt dazu denken; dann hat man den Satz, dass die perspectivische Projection einer Harmonischen wieder eine Harmonische ist; oder:

> „Einer harmonisch getheilten Geraden entspricht jederzeit wieder eine Harmonische.“

Daraus ergiebt sich, wenn man über den beiden entsprechenden Harmonischen Strahlbüschel construirt und den einen als Projection des andern betrachtet, leicht der analoge Satz:

> „Einem harmonischen Strahlbüschel entspricht jederzeit wieder ein harmonischer Strahlbüschel.“

Diese einfachen Sätze werden die Quelle sehr fruchtbarer Untersuchungen, von denen wir einige andeuten wollen.

Taf. III. Fig. 6. Es sei *abcd* ein Viereck, dessen Gegenseiten sich in *m* und *n* schneiden. Wir betrachten die Gerade *mn* als die

Linie *ot* in Taf. III. Fig. 1., so dass den Strahlen *am*, *cm* die Parallelen *AM*, *CM*, ebenso *an*, *cn* die Parallelen *AN*, *CN* entsprechen. Dem Viereck *abcd* entspricht also das Parallelogramm *ABCD*. Da sich nun die Diagonalen *AC*, *BD* desselben halbiren, so können wir die unendlich verlängerten *AP*, *BQ* harmonisch getheilt nennen, und folglich sind es auch die Diagonalen *ap*, *bq*. Ziehen wir $JF \parallel CD$, $JG \parallel BC$, so läuft $FG \parallel DQ$ und wird von *JC* halbirt. Folglich ist der Strahlbüschel *JN*, *JP*, *JM*, *JQ* ein harmonischer, also ist es auch der entsprechende *in*, *im*, *ip*, *iq*, und daher muss auch *mq* harmonisch getheilt sein. Nennt man die Figur in (*e*) ein vollständiges Viereck und *ap*, *bq*, *mq* die Diagonalen desselben, so hat man den bekannten Satz:

„Die drei Diagonalen des vollständigen Vierecks theilen einander harmonisch,“

woraus sich noch eine Menge Folgerungen ziehen lässt.

5.

Taf. III. Fig. 7. Bekanntlich nennt man die Durchschnitte der äusseren und inneren Tangenten zweier ausser einander liegenden Kreise den äusseren und inneren Aehnlichkeitspunkt jener Kreise.

Nun kann man aber dieses Gebilde als Projection eines Cylinders ansehen, wenn man den Projectionspunkt irgend wo in dem durch *a* auf der Ebene der Zeichnung errichteten Perpendikel und die Projectionsebene (*e*) parallel den Ebenen jener Kreise annimmt. Vergleichen wir nun unsere Figur mit der daneben gestellten correspondirenden, so ergiebt sich gleich, dass *M*, *J*, *N* und der unendlich entfernte Punkt *H* harmonisch liegen, also ist diess auch links der Fall; oder:

„Die Mittelpunkte beider Kreise liegen mit den Aehnlichkeitspunkten harmonisch.“

Taf. III. Fig. 8. Projiciren wir ein System dreier Cylinder von gleichen Grundflächen, so entsteht ein System von drei ungleichen Kreisen (da die Grundflächen jener Cylinder ungleich weit von der ihnen parallelen Projectionsebene entfernt sind) zu welchen drei äussere und ebensoviel innere Aehnlichkeitspunkte gehören. Da nun links alle äusseren Tangenten einander parallel sind, so liegen rechts die Durchschnitte derselben in einer Geraden, (welche die Gerade *ot* in Taf. III. Fig. 1. ist); oder:

„Die äusseren Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen in einer Geraden.“

Betrachten wir links die inneren Aehnlichkeitspunkte J_1, J_3, so erhellt gleich, dass die Gerade $J_1 J_3 \parallel$ den äusseren Tangenten an *M* und *R* läuft. Dies giebt für die Figur rechts sogleich den Satz:

„Jeder der drei äusseren Aehnlichkeitspunkte liegt mit zwei inneren in einer Geraden.“

Also giebt es im Ganzen vier Aehnlichkeitsstrahlen.

6.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der Kegelschnitte, und zwar ist gerade hier die Untersuchung mittelst projectivischer Eigenschaften die zweckmässigste, da der Kegelschnitt seiner Entstehung nach nichts anders als die perspectivische Projection eines

Kreises ist. Wir nehmen wie bisher immer den einfachsten Fall an, dass die Projections- (hier die Schnitt-) ebene senkrecht auf (E) (der Basisebene) stehe, da sich hierauf jeder andere Fall leicht reduziren lässt.

Taf. III. Fig. 9. Hier gewinnt nun die Gerade ot Taf. III. Fig. 1., welche schon bisher die bedeutendste Rolle spielte eine ganz besondere Wichtigkeit und wir werden sie daher künftig die Polare des Kegelschnitts nennen. Sei nun k ein beliebiger Kegelschnitt, den wir als Projection eines Kreises K ansehen, ot die Polare (auf der sich also die Projectionen aller Geraden schneiden, die in (E) Parallelen sind) und m die Projection des Kreismittelpunkts, die wir den Pol des Kegelschnitts nennen, so ist klar, dass jede Gerade, die durch den Mittelpunkt des Kreises K geht, von M und dem Kreise halbirt, d. h. sammt dem unendlich entfernten Punkte harmonisch getheilt wird. Also wird jede Gerade, welche durch den Pol des Kegelschnitts geht, vom Pol, der Curve und der Polare harmonisch getheilt. Ziehen wir ferner irgend einen Durchmesser AB des Kreises und legen Tangenten an A und B, so laufen diese einander jederzeit parallel. Nun entsprechen: dem Durchmesser: eine durch den Pol gehende Gerade, welche Berührungssehne heissen mag, den parallelen Tangenten am Kreise: zwei Tangenten am Kegelschnitt, deren Durchschnitt, „das Berührungscentrum," auf der Polare liegt. Wie sich nun auch AB um M drehen mag, so bleiben doch die Tangenten an A und B Parallelen, d. h. wenn sich die Berührungsschne um den Pol dreht, so durchläuft das Berührungscentrum die Polare; oder:

> „Die Polare ist der Ort aller Berührungscentra, deren Berührungssehnen durch den Pol gehen,"

und auch umgekehrt

> „Der Pol ist der Punkt, durch den alle Berührungssehnen gehen, deren Berührungscentra auf der Polare liegen."

Daraus lassen sich leicht die Auflösungen der Aufgaben ableiten:

„Den Pol zu finden, wenn die Polare gegeben ist,"

„Die Polare zu finden, wenn der Pol gegeben ist."

7.

In dem Vorigen wurde das Ziehen von Tangenten an den Kegelschnitt verlangt, aber es ist noch nicht gezeigt worden, auf welche Weise diess geschieht, und deshalb geben wir folgende Construktion dazu:

Taf. III. Fig. 10. Wenn vom Punkte p an den Kegelschnitt k Tangenten gelegt werden sollen, so ziehe man beliebig zwei Strahlen ap, bp, die den Kegelschnitt noch in c und d schneiden werden. Dann ziehe man ab, cd, die sich in f, ad, bc die sich in g schneiden und die Gerade fg. Diese schneidet den Kegelschnitt in zwei Punkten u, v, welche die Berührungspunkte der, von p aus zu legenden Tangenten sind.

Denn man nehme p als Punkt einer beliebigen Polare und k als Projection eines Kreises K an, so entsprechen den Strahlen ac, bd zwei Parallelen AC, BD. Nun ist aber klar, dass durch die Construktion in (E), U und V die Berührungspunkte von Tangenten sind, welche $\| AC \| BD$ laufen. Also entsprechen ihnen in (c) die Berührungspunkte der Tangenten, welche durch p gehen, w. z. b. w.

Es hat nun auch die Lösung der umgekehrten Aufgabe: durch zwei gegebene Punkte eines Kegelschnitts an denselben Tangenten zu ziehen nicht die mindeste Schwierigkeit, weshalb wir sie übergehen.

8.

Die Durchschnitte der drei Paar Gegenseiten jedes, einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecks liegen in einer Geraden.

Taf. III. Fig. 11. $abcdef$ sei das Sechseck (Sehnensechseck). p, q mögen die Durchschnitte von den zwei Paar Gegenseiten af, cd und bc, ef heissen. Nimmt man pq als Polare und den Kegelschnitt als Projection eines Kreises an, so entsprechen jenen zwei Paaren die Sehnen $AF \parallel CD$ und $BC \parallel EF$. Aber bekanntlich fassen parallele Sehnen gleiche Bogen zwischen sich, also ist, wenn wir die Bogen stets rechts herum nennen:

$$\text{arc } AC = \text{arc } DF$$
$$\text{arc } CE = \text{arc } FB$$

also durch Addition arc AE (der grössere dieses Namens) $=$ arc DB (ebenso). Ziehen wir beide vom Kreisumfang ab, so bleibt arc $AE =$ arc BD, woraus $AB \parallel DE$ folgt.

Also liegt der Durchschnitt r von ab und de mit auf der Polare d. h. in einer Geraden mit p und q.

Der Satz gilt auch umgekehrt, was sich apagogisch sehr leicht zeigen lässt.

In jedem, einem Kegelschnitte umschriebenen Sechsecke schneiden sich die Diagonalen, welche zwei Gegenecken verbinden in einem Punkte.

Taf. III. Fig. 12. $abcdef$ sei dieses Sechseck (Tangentensechseck), ad, be, cf jene Diagonalen (Hauptdiagonalen). Man nehme den Durchschnitt m der ersten beiden als Pol des Kegelschnitts und diesen als Projection eines Kreises an, so entspricht dem Pol m der Mittelpunkt M und jenem Sechseck ein anderes, dessen beide ersten Hauptdiagonalen durch den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises gehen.

Es ist nun bloss zu zeigen, dass auch die 3te Hauptdiagonale CF durch M geht, was sehr leicht (namentlich apagogisch) geschieht. Daraus folgt denn, dass cf durch m geht.

Auch dieser Satz gilt umgekehrt.

Diese beiden Sätze bilden bekanntlich die Grundlage für die Theorie der Reciprocität bei den Kegelschnitten, indem man die Punkte der Gebilde in dem einen Kegelschnitt als Berührungscentra für einen zweiten Kegelschnitt ansieht, wodurch dann ein bekanntes Correlationssystem entsteht, dessen Ausführung hier aber zu weit führen würde.

Lässt man in den beiden vorigen Sätzen eine Seite verschwinden und zur Tangente werden, so gelangt man zu bekannten Sätzen vom Fünfeck, und ebenso vom Viereck und Dreieck, die sich natürlich auch leicht besonders beweisen lassen.

9.

Es kann endlich noch die Frage aufgeworfen werden, wie man, wenn der Kegelschnitt und der Pol oder die Polare gegeben ist, die Lage des Projectionspunktes P (Taf. III. Fig. 1.) d. h. die Spitze des Kegels findet, der dann die Eigenschaft hat, dass er von der Ebene (E) in einem Kreise geschnitten wird, was allerdings zur Vervollständigung dieser Anwendung der Projectionen durchaus nöthig ist. Diese Aufgabe ist jederzeit bestimmt und nach dem früher über Pole und Polaren, Berührungscentra und Berührungssehnen Gesagten sehr leicht zu lösen, wenn man die in (1) geführte Untersuchung über die Lage von o und t dabei zu Hülfe nimmt. Indess würde diess die Gränzen dieses Aufsatzes unnöthigerweise überschreiten, da ich ohnediess diesen Gegenstand ausführlich noch besonders behandeln werde.

XXXVII.

Neue Auflösung der cubischen Gleichungen von Herrn J. Cockle.

Aus Cambridge Mathematical Journal No. XII. (Mai, 1841). Vol. II. p. 248. frei übersetzt von

dem Herausgeber.

Jede cubische Gleichung kann auf die Form

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

gebracht werden.

Zuerst wollen wir den speciellen Fall betrachten, wenn zwischen den Coefficienten a, b, c die Gleichung $3ac=b^2$ Statt findet. Bringt man in diesem Falle die Gleichung auf die Form

$$-x^3=ax^2+bx+c$$

und multiplicirt auf beiden Seiten mit $3ab$, so erhält man

$$-3abx^3=3a^2x^2\,.\,b+3ax\,.\,b^2+3abc,$$

und folglich, weil nach der Voraussetzung $3ac=b^2$, also $3abc=b^3$ ist,

$$-3abx^3=3a^2x^2\,.\,b+3ax\,.\,b^2+b^3.$$

Addirt man jetzt auf beiden Seiten a^3x^3, so erhält man

$$a(a^2-3b)x^3=a^3x^3+3a^2x^2 \,.\, b+3ax \,.\, b^2+b^3,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten die Cubikwurzel auszieht,

$$x\sqrt[3]{a(a^2-3b)}=ax+b,$$

also

$$x=\frac{b}{\sqrt[3]{a(a^2-3b)}-a}.$$

Wenn ferner die Gleichung $3ac=b^2$ nicht Statt findet, so setze man $y+z$ für x, wodurch die gegebene Gleichung

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

die folgende Form erhält:

$$y^3+(3z+a)y^2+(3z^2+2az+b)y+z^3+az^2+bz+c=0,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$A=3z+a,$$
$$B=3z^2+2az+b,$$
$$C=z^3+az^2+bz+c$$

gesetzt wird, die Form

$$y^3+Ay^2+By+C=0.$$

Soll nun diese letztere Gleichung nach dem Vorhergehenden auflösbar sein, so ist erforderlich, dass die Gleichung

$$3AC=B^2,$$

d. i. die Gleichung

$$3(3z+a)\,(z^3+az^2+bz+c)=(3z^2+2az+b)^2$$

erfüllt ist, und aus dieser letztern Gleichung muss also die Grösse z bestimmt werden. Entwickelt man dieselbe gehörig, so findet man, dass die z^4 und z^3 enthaltenden Glieder sich gegenseitig aufheben, und die Gleichung daher eine Gleichung des zweiten Grades ist, die man leicht auf die Form

$$(a^2-3b)z^2+(ab-9c)z+b^2-3ac=0$$

oder

$$z^2+\frac{ab-9c}{a^2-3b}z+\frac{b^2-3ac}{a^2-3b}=0$$

bringt. Bestimmt man nun aus dieser Gleichung z auf gewöhnliche Weise, so erhält man nach dem Obigen ferner y mittelst der Formel

$$y=\frac{B}{\sqrt[3]{A(A^2-3B)}-A},$$

wo für A, B, C ihre aus dem Obigen bekannten Werthe zu setzen sind, und x ergiebt sich endlich mittelst der Formel

$$x=y+z=\frac{B}{\sqrt[3]{A(A^2-3B)}-A}+z.$$

Führt man für A, B, C ihre obigen Werthe wirklich ein, so ergiebt sich nach leichter Rechnung für x der Ausdruck

$$x = z + \frac{3z^2 + 2az + b}{\sqrt[3]{(a^2 - 3b)(3z + a)} - (3z + a)},$$

wo nach dem Obigen z aus der quadratischen Gleichung

$$z^2 + \frac{ab - 9c}{a^2 - 3b} z + \frac{b^2 - 3ac}{a^2 - 3b} = 0$$

zu bestimmen ist. Den Ausdruck von z kann man auch unter der Form

$$x = z + \frac{(3z + a)z + az + b}{\sqrt[3]{(a^2 - 3b)(3z + a)} - (3z + a)}$$

darstellen.

Ist die gegebene cubische Gleichung z. B.

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 3 = 0,$$

so ist $3ac = 36 = b^2$, und folglich nach dem Obigen

$$x = \frac{b}{\sqrt[3]{a(a^2 - 3b)} - a} = \frac{6}{\sqrt[3]{8} + 4}.$$

Berücksichtigt man nun jetzt bloss den reellen Werth von $\sqrt[3]{8}$, nämlich 2, so erhält man $x = 1$. Die beiden imaginären Werthe, welche $\sqrt[3]{8}$ noch hat, würden für x noch zwei imaginäre Werthe liefern.

Ist die gegebene cubische Gleichung ferner

$$x^3 - 7x^2 + 17x - 14 = 0,$$

wo nicht $3ac = b^2$ ist, so ist die quadratische Gleichung, aus welcher z bestimmt werden muss, folgende:

$$z^2 - \frac{7}{2} z = -\frac{5}{2}.$$

Diese Gleichung hat die beiden reellen Wurzeln 1 und $\frac{5}{2}$. Setzt man $z = 1$, so ergiebt sich nach dem Obigen

$$x = 1 + \frac{6}{\sqrt[3]{8} + 4},$$

und folglich, wenn man jetzt wieder bloss den reellen Werth 2 von $\sqrt[3]{8}$ berücksichtigt, $x = 2$. Die beiden imaginären Werthe, welche $\sqrt[3]{8}$ noch haben kann, liefern für x natürlich noch zwei imaginäre Werthe. Dass man auch $z = \frac{5}{2}$ setzen könnte, versteht sich von selbst; natürlich würde aber dieser Werth von z zu denselben Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung führen wie der vorhergehende Werth von z.

Weitere Betrachtungen über den Fall, wenn die quadratische Gleichung, aus welcher die Grösse z bestimmt werden muss, zwei imaginäre Wurzeln hat, überlassen wir dem Leser, da dieselben keine Schwierigkeiten haben, und sich leicht mit der gewöhnlichen Theorie der Auflösung der cubischen Gleichungen werden in Verbindung setzen lassen.

Wenn uns auch diese neue Auflösung der cubischen Gleichungen des Herrn Cockle vor der bekannten Auflösung des Cardanus keine wesentlichen Vorzüge zu haben, und die Theorie der Gleichungen des dritten Grades durch dieselbe nicht eben gefördert zu werden scheint, so verdiente sie doch in dem Archive aufbewahrt zu werden.

XXXVIII.

Beiträge zur Entwickelung der Integrale in Reihen.

Von

Herrn N. W. Schulze,

Lehrer der Mathematik zu Rudolstadt.

Es sei ein zu integrirendes Differenzial vorerst dieses:

$$\frac{dx}{1+x}.$$

Man füge dem Nenner eine identische Gleichung bei,

$$p-p=0,$$

nämlich: $\frac{dx}{1+x}=\frac{dx}{(1+p)-(p-x)}=[(1+p)-(p-x)]^{-1}.dx$,

und entwickele nach dem Binomischen Satze, so dass $p-x$ in aufsteigenden Potenzen fortgeht, so ist

$$1)\ [(1+p)-(p-x)]^{-1}.dx=\left[\frac{1}{1+p}+\frac{(p-x)}{(1+p)^2}+\frac{(p-x)^2}{(1+p)^3}+\ldots\right]dx.$$

Man integrire und nehme p als beständig, also

$$2)\ \int\left[\frac{1}{1+p}+\frac{(p-x)}{(1+p)^2}+\ldots\right].dx$$

$$=\frac{x}{1+p}+\frac{px-\frac{1}{2}x^2}{(1+p)^2}+\frac{p^2x-px^2+\frac{1}{3}x^3}{(1+p)^3}+\frac{p^3x-\frac{3}{2}p^2x^2+px^3-\frac{1}{4}x^4}{(1+p)^4}+\ldots\ldots$$

Es kommt nun darauf an, p so zu bestimmen, dass die Reihe schnell convergirt; dies würde sich ergeben, wenn man auf einander folgende Glieder, was vom 2ten an geschehen darf, zusammen $=0$

setzte, den Werth für p suchte und selbigen in das erste Glied und etwa noch in die übrigen letzteren substituirte. Da aber durch die höheren Gleichungen die Rechnung unbequem würde, so setze ich bloss das 2te Glied $=0$, nämlich

$$\frac{px-\frac{1}{2}x^2}{(1+p)^2}=0, \text{ also } p=\tfrac{1}{2}x.$$

Setzt man in 2) rechter Hand überall $\frac{1}{2}x$ statt p, dann gestaltet sich die Reibe so, dass das 4te, 6te, 8te u. s. w. Glied auch $=0$ sind, und wir bekommen nach gehöriger Abkürzung:

$$3) \int\frac{dx}{1+x}=\log\,(1+x)=$$

$$2\left[\frac{x}{2+x}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{2+x}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{x}{2+x}\right)^5+\tfrac{1}{7}\left(\frac{x}{2+x}\right)^7+\ldots\right]+[\text{Const.}=0]$$

also eine auf anderm Wege bereits schon gefundene bekannte Reihe; und ist die Uebereinstimmung des Resultats dieser Methode mit dem anderer für **dieses Beispiel** nur ein besonderer Fall, wie wir an den folgenden sehen werden.

Es sei das Differenzial der Kreisfläche gegeben, so ist, nach Beifügung des obigen p,

$$dx\sqrt{2x-x^2}=dx.x^{\frac{1}{2}}.(2-x)^{\frac{1}{2}}=[(2+p)-(p+x)]^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}.dx;$$

also

$$4) \int[(2+p)-(p+x)]^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}.dx$$

$$=\int\left[x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2+p}-\frac{(px^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}})}{2\sqrt{2+p}}-\frac{(p^2x^{\frac{1}{2}}+2px^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}})}{8(2+p)\sqrt{2+p}}-\ldots\right].dx$$

$$=\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2+p}-\frac{(\frac{2}{3}px^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}})}{2\sqrt{2+p}}-\frac{(\frac{2}{3}p^2x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{5}px^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}})}{8(2+p)\sqrt{2+p}}-\ldots.$$

Setzt man wiederum in letzterer Reihe das 2te Glied $=0$, woraus erhalten wird $p=-\frac{3}{5}x$, und substituirt diesen Werth für p in den Ausdruck des Integrals 4), so wird nach gehöriger Abkürzung erhalten:

$$5) \int dx\sqrt{2x-x^2}=\frac{2x\sqrt{x}\sqrt{10-3x}}{3\sqrt{5}}-$$

$$\left[\frac{1}{35}-\frac{2x}{315(10-3x)}+\frac{29x^2}{924(10-3x)^2}-\ldots\right].\frac{x^3\sqrt{x}.\sqrt{5}}{(10-3x)\sqrt{10-3x}}+(C=0).$$

Für $x=1$ erhält man, wenn A das Integral bezeichnet,

$$6) A=\frac{2\times2{,}64575}{3\times2{,}23606}-(0{,}0285714-0{,}0009070+0{,}0006405)\times\frac{2{,}23606}{7\times2{,}64575}$$

$$=0{,}78881306-\frac{0{,}0283049\times2{,}23606}{7\times2{,}64575}=0{,}78539|56$$

Diese vier Glieder sind demnach hinreichend, um den Flächeninhalt des Quadranten für den Radius $=1$ bis zur fünften Decimalstelle genau zu geben.

Es sei ferner vorgelegt das sich **nicht** direct integriren lassende Differenzial

$$dx\sqrt{x+2\sqrt{x}}=dx.x^{\frac{1}{4}}(2+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}},$$

so ist nach dieser Methode:

$$7)\ \int dx \,.\, x^{\frac{1}{4}}\,[(2+p)-(p-x^{\frac{1}{2}})]^{\frac{1}{2}} = \tfrac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}\sqrt{2+p}$$
$$-\frac{(\frac{4}{5}px^{\frac{5}{4}}-\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}})}{2\sqrt{2+p}}-\frac{(\frac{4}{5}p^2x^{\frac{5}{4}}-\frac{8}{7}px^{\frac{7}{4}}+\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}})}{8\,(2+p)\sqrt{2+p}}-\ldots.$$

Wird, wie gewöhnlich, das zweite Glied annullirt, so ergiebt sich $p=\frac{5}{7}x^{\frac{1}{2}}$, und durch Substitution desselben in 7) erhält man, wenn A' das Integral bedeutet,

$$8)\ A' = \tfrac{4}{5}x\sqrt[4]{x}\times\frac{\sqrt{14+5\sqrt{x}}}{\sqrt{7}}$$
$$-\left[\frac{1}{63\,(14+5\sqrt{x})}+\frac{2}{231\,(14+5\sqrt{x})^2}\right]\times\frac{2x\sqrt[4]{x}\,.\sqrt{7}}{\sqrt{14+5\sqrt{x}}}.$$

Für $x=1$ erhält man die sehr schnell zusammenlaufende Reihe:

$$9)\ A' = 1{,}318000 - [0{,}0008350 + 0{,}0000235] \times 0{,}60697 \times 2$$
$$= 1{,}318000 - 0{,}0010421 = 1{,}316958\,..$$

Wenn die Entwickelung von $\int dx \,.\, x^{\frac{1}{4}}(2+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ durch eine gewöhnliche Reihe bewerkstelligt wird, so erhält man erst nach Entwickelung von 8 Gliedern das Resultat 1,316967.., mit dem jenes, nur aus 3 Gliedern entstanden, beinahe bis zur fünften Stelle übereinstimmt.

Nicht für jede Form liefert der directe Gebrauch dieser Methode durch Annullirung des zweiten Gliedes eine schnell convergirende Reihe. Dies ist der Fall bei dieser Form:

$$\frac{dx}{1+x^2}.$$

Denn wenn man nach obiger Verfahrungsweise aus selbiger die weiteren Resultate zieht, so ergiebt sich, dass vom dritten Gliede an die schnelle Convergenz nachlässt. Durch eine passende Umformung wird aber selbige wieder hergestellt. Es sei daher

$$x=z^{\frac{1}{2m}}, \text{ also } dx=\frac{1}{2m}z^{\frac{1-2m}{2m}}.dz, \text{ daher } \frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2m}.z^{\frac{1-2m}{2m}}\times(1+z^{\frac{1}{m}}).^{-1}\,dz.$$

Der Ausdruck rechter Hand lässt sich in folgende Brüche zerlegen:

$$10)\ \frac{dz}{z^{\frac{2m-1}{2m}}\,.\,(1+z^{\frac{1}{m}})} = \frac{dz}{z^{\frac{2m-1}{2m}}} - \frac{dz}{z^{\frac{2m-3}{2m}}} + \frac{dz}{z^{\frac{2m-5}{2m}}}$$
$$-\frac{dz}{z^{\frac{2m-7}{2m}}}+\frac{dz}{z^{\frac{2m-9}{2m}}}-\ldots\pm\frac{dz}{z^{\frac{1}{2m}}[1+z^{\frac{1}{m}}]}.$$

Die Zahl der Glieder dieser Reihe hängt sonach von der Grösse m ab, und wir haben
für $m=1$

$$11)\ \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\,(1+z)} = \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\,(1+z)};$$

für $m=2$

$$12)\ \frac{dz}{z^{\frac{3}{4}}\,(1+z^{\frac{1}{2}})} = \frac{dz}{z^{\frac{3}{4}}} - \frac{dz}{z^{\frac{1}{4}}\,(1+z^{\frac{1}{2}})};$$

für $m=3$

$$13)\ \frac{dz}{z^{\frac{5}{6}}(1+z^{\frac{1}{3}})}=\frac{dz}{z^{\frac{5}{6}}}-\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}}+\frac{dz}{z^{\frac{1}{6}}(1+z^{\frac{1}{3}})}$$

u. s. w.

Das letzte Glied, allgemein genommen wie in 10), nach unserer Methode durch Beifügung von $p-p$ behandelt, ist

$$14)\int z^{-\frac{1}{2m}}.\left[(1+p)-(p-z^{\frac{1}{m}})\right]^{-1}.dz$$

$$=\frac{2mz^{\frac{2m-1}{2m}}}{(2m-1)(1+p)}+\frac{\frac{pz^{\frac{2m-1}{2m}}}{2m-1}-\frac{z^{\frac{2m+1}{2m}}}{2m+1}}{(1+p)^2}.2m$$

$$+\frac{\frac{p^2z^{\frac{2m-1}{2m}}}{2m-1}-\frac{2pz^{\frac{2m+1}{2m}}}{2m+1}+\frac{z^{\frac{2m+3}{2m}}}{2m+3}}{(1+p)^3}.2m$$

$$+\frac{\frac{p^3z^{\frac{2m-1}{2m}}}{2m-1}-\frac{3p^2z^{\frac{2m+1}{2m}}}{2m+1}+\frac{3pz^{\frac{2m+3}{2m}}}{2m+3}-\frac{z^{\frac{2m+5}{2m}}}{2m+5}}{(1+p)^4}.2m$$

$$+\frac{\frac{p^4z^{\frac{2m-1}{2m}}}{2m-1}-\frac{4p^3z^{\frac{2m+1}{2m}}}{2m+1}+\frac{6p^2z^{\frac{2m+3}{2m}}}{2m+3}-\frac{4pz^{\frac{2m+5}{2m}}}{2m+5}+\frac{z^{\frac{2m+7}{2m}}}{2m+7}}{(1+p)^5}.2m$$

$$+\frac{\left\{\begin{matrix}\frac{p^5z^{\frac{2m-1}{2m}}}{2m-1}-\frac{5p^4z^{\frac{2m+1}{2m}}}{2m+1}+\frac{10p^3z^{\frac{2m+3}{2m}}}{2m+3}\\-\frac{10p^2z^{\frac{2m+5}{2m}}}{2m+5}+\frac{5pz^{\frac{2m+7}{2m}}}{2m+7}-\frac{z^{\frac{2m+9}{2m}}}{2m+9}\end{matrix}\right\}.2m}{(1+p)^6}$$

$$+\frac{\left\{\begin{matrix}\frac{p^6z^{\frac{2m-1}{2m}}}{2m-1}-\frac{6p^5z^{\frac{2m+1}{2m}}}{2m+1}+\frac{15p^4z^{\frac{2m+3}{2m}}}{2m+3}-\frac{20p^3z^{\frac{2m+5}{2m}}}{2m+5}\\+\frac{15p^2z^{\frac{2m+7}{2m}}}{2m+7}-\frac{6pz^{\frac{2m+9}{2m}}}{2m+9}+\frac{z^{\frac{2m+11}{2m}}}{2m+11}\end{matrix}\right\}.2m}{(1+p)^7}+\ldots$$

Man erhält, nach Annullirung des zweiten Gliedes,

$$p=\frac{(2m-1)z^{\frac{1}{m}}}{2m+1}.$$

Diesen Werth in den vorigen Ausdruck (14) gesetzt und zugleich durch $2m$ dividirt, ergiebt sich

$$15)\ \frac{1}{2m}\cdot\int z^{-\frac{1}{2m}}.\left(1+z^{\frac{1}{m}}\right)^{-1}.dz$$

$$=\frac{(2m+1)z^{\frac{2m-1}{2m}}}{(2m-1)\left[2m+1+(2m-1)z^{\frac{1}{m}}\right]}+\frac{4(2m+1)z^{\frac{2m+3}{2m}}}{(2m+3)\left[2m+1+(2m-1)z^{\frac{1}{m}}\right]^3}$$

$$+\frac{16(2m-3)(2m+1)z^{\frac{2m+6}{2m}}}{(2m+3)(2m+5)\left[2m+1+(2m-1)z^{\frac{1}{m}}\right]^4}+\ldots.$$

Stellt man die Werthe von x wieder her, und dividirt überall, wie zuletzt geschehen, durch $2m$, so bekommt man:

$$16)\ \text{Arc.}\,[\text{tang}=x]=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$$

$$+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{11}x^{11}+\frac{1}{13}x^{13}-\ldots.$$

$$\pm(2m+1).x^{2m}\times\left[\frac{x-1}{(2m-1).\left[2m+1+(2m-1)x^2\right]}\right.$$

$$\left.+\frac{4x^3}{(2m+3)[2m+1+(2m-1)x^2]^3}+\frac{16(2m-3)x^5}{(2m+3)(2m+5)[2m+1+(2m-1)x^2]^4}\right]$$

Erstere Reihe, welche die nämliche ist wie die sogenannte Leibnitzische, will ich die Grundreihe, und letztere, aus dem involutorischen Integraltheile entstanden, die Ergänzungsreihe nennen. Diese Reihe, in welcher die Constante $=0$ ist, convergirt für $x<1$ bis $x=1$.

16 [a]. Es kommt nun darauf an, zu bestimmen, wie viel man Glieder aus der Grundreihe sowohl als aus der Ergänzungsreihe mit einander verbinden müsse, um für einen gewissen Werth von m das entsprechende Resultat zu erhalten. Die Ergänzungsreihe gestaltet sich so, dass sie in ihrer Convergenz um so weiter geht, je grösser m wird und für ein bestimmtes m irgendwo aufhört, schnell zusammenzulaufen.

Für $m=1$ convergirt sie bis zum 2ten Gliede. für $m=2$ bis zum 3ten, für $m=3$ bis zum 4ten u. s. f., wie man aus folgenden Beispielen ersieht, wenn nämlich $x=1$ genommen wird.

Es sei nun $m=1$, so ist nach 10, 11, 12 u. f. aus der Grundreihe noch kein Glied zu nehmen. Bezeichne ich die auf einanderfolgenden Näherungswerthe mit B, B', $B''\ldots$, so ist

$$17)\ B=3\,[0{,}25000+0{,}01250-0{,}00178]=0{,}78\,|\,216.$$

Für $m=2$ hat man aus der Grundreihe ein Glied zu nehmen, folglich

$$18)\ B'=1-5.\,[0{,}041666+0{,}001116+0{,}000062]$$
$$=1-5\times0{,}042844=0{,}785\,|\,780\,..$$

Für $m=3$ kommen auf die Grundreihe 2 Glieder, also:

$$19)\ B''=1-\tfrac{1}{3}+7\,(0.0166666+0{,}0002829+0{,}00002338+0{,}0000109)$$
$$=0{,}6666666+7\times0{,}016960=0{,}7853\,|\,87\ldots$$

Für $m = 4$ ist Obigem zufolge

$$20)\ B''' = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 9 \times (0,0089286$$

$$+ 0,0000888 + 0,0000085 + 0,0000030 + 0,0000007 + \ldots)$$

$$= 0,8666667 - 9 \times 0,0090297 = 0,78539 \mid 94 \ldots$$

wenn nämlich in einigen Gliedern des letzteren Falles die 8te Stelle weggelassen und die 7te um 1 grösser genommen wird.

Für $m = 5$ ist ferner

$$21)\ B'''' = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + 11\ (0,00555556$$

$$+ 0,00003847 + 0,00000359 + 0,00000106 + 0,00000023 + 0,00000006 + \ldots)$$

$$= 0,72380952 + 11 \times 0,00559897 = 0,7853981 \mid 9 \ldots$$

Hier ist die 8te Stelle um 1 vergrössert und die folgende dafür weggelassen.

Hier sieht man eine hinlängliche Convergenz unserer Reihe, nnd wie die Näherungswerthe von B, B', B''... jeder folgende dem wahren Werthe, welcher den halben Quadranten für deu Radius $= 1$ ausdrückt, mehr als um eine Stelle näher kommt, und dass der von B'''' mit dem 4ten Theil der Ludolphischen Zahl bis zur 7ten Stelle genau übereinstimmt.

22) Nimmt man aus 17) für B bloss die ersten 2 Glieder, so ist das Resulat 0,7875000, also etwas genauer als obiges $B = 0,78216$..

Und entwickelt man für B' (18) in der Ergänzungsreihe 4 Glieder, so ist das 4te $5 \times 0,000061$ ..., also fast eben nicht kleiner als das 3te $5 \times 0,000062$ ...

Auf das Letztere (22) ist das (16°) Gesagte bezogen.

(Diese Beiträge werdeu späterhin fortgesetzt werden.)

XXXIX.

Entwickelung einiger Formeln aus der Theorie der bestimmten Integrale.

Von

Herrn O. Schlömilch

zu Weimar.

---

§. 1.

Vorerst müssen wir uns die bekannte Formel

$$\tfrac{1}{2}x = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x \ldots \quad (1)$$

ins Gedächtniss zurückrufen. Die Reihe rechts, welche offenbar immer convergirt, gilt dem Ausdrucke links so lange gleich, als $x < \pi$ ist: an dieser Gränze selbst aber tritt eine Unstetigkeit in ihren Werthen ein, und daher kann in diesem Falle obige Gleichung nicht mehr bestehen.

Schreiben wir $\pi - x$ für x, so wird das allgemeine Glied $\sin n(\pi - x) = -\cos n\pi \sin nx$ d. i. $= \mp \sin nx$ jenachdem n gerade oder ungerade ist; also aus (1)

$$\tfrac{1}{2}(\pi - x) = \sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \ldots \quad (2).$$

Diese Gleichung besteht umgekehrt zwar für $x = \pi$, aber nicht für $x = 0$.

§. 2.

Nach diesen vorläufigen Erörterungen beschäftigen wir uns mit dem Ausdrucke

$$1 + 2\{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots\} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} \cos nx$$

den wir kurz mit Fx bezeichnen wollen. Von einer Summe dieser Reihe kann offenbar gar nicht die Rede sein, da dieselbe nicht convergirt. Man braucht z. B. nur x gleich einem aliquoten Theile von π zu nehmen, um sofort zu einem Resultate der Form

$$a - a + a - a + \ldots$$

zu gelangen.

Nichtsdestoweniger ist aber doch der Ausdruck

$$Fx = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} \cos nx \ldots \quad (3)$$

in so fern von Werth, als derselbe mit dx multiplicirt und integrirt, eine convergente Reihe liefert, nämlich

$$\int Fx\,dx = x + 2\sum_1^\infty \frac{1}{n}\sin nx + \text{Const}$$

Integriren wir, um die Const. wegzuschaffen, zwischen 0 und c, so kommt

$$\int_0^c Fx\,dx = c + 2\sum_1^\infty \frac{1}{n}\sin nc \;\ldots\; (4)$$

Ist nun $c > 0$ und $\leqq \pi$, so findet (2) seine Anwendung und giebt sogleich

$$\int_0^c Fx\,dx = \pi.$$

Ist $c > \pi$ uud $< 2\pi$, so kann man $c = \pi + b$ setzen, wo $b < \pi$ ist. Dann wird das allgemeine Glied $\frac{1}{n}\sin n(\pi + b)$ $= \frac{1}{n}\cos n\pi\,.\,\sin nb = \pm\frac{1}{n}\sin nb$ jenachdem n gerade oder ungerade ist; also weil die Reihe mit $n = 1$, ungerade, anfängt

$$\int_0^c Fx\,dx = \pi + b - 2\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nb,$$

wobei rechts die Formel (1) anwendbar ist und giebt

$$\int_0^c Fx\,dx = \pi.$$

Also haben wir

$$\int_0^c Fx\,dx = \pi,\; 2\pi > c > 0 \;\ldots\; (5).$$

§. 3.

Wir wollen nun die beiden Integrale

$$\int_0^c Fx\cos hx\,dx,\; \int_0^c Fx\sin hx\,dx,$$

worin h eine ganze Zahl ist, betrachten.

Setzen wir für Fx seinen Werth (3) und zerlegen $2\cos nx \cos hx$ in eine Cosinussumme, so ist

$$\int Fx\cos hx\,dx = \frac{\sin hx}{h} + \sum_1^\infty \int [\cos (h-n)x + \cos (h+n)x]\,dx$$

$$= \frac{\sin hx}{h} + \sum_1^\infty \left[\frac{\sin (h-n)x}{h-n} + \frac{\sin (h+n)x}{h+n}\right].$$

Bemerkt man, dass das vordere Glied dem Werthe $n = 0$ entspricht, so ist für $h \pm n = m$

$$\int Fx\cos hx\,dx = \sum_{-\alpha}^{+\infty} \frac{\sin mx}{m}$$

oder weil für negative m der Ausdruck der nämliche wie für positive ist und wenn wir noch das Glied worin $h - n = m = 0$ ist, ausscheiden

$$\int Fx\cos hx\,dx = \frac{\sin 0x}{0} + 2\sum_1^\infty \frac{\sin mx}{m}$$

d. i. weil $\frac{\sin mx}{m}$ für $m = 0$ sich in x verwandelt

$$\int Fx \cos hx\, dx = x + 2\sum_1^{\infty} \frac{\sin mx}{m}$$

Nehmen wir, um die etwaige Constante der Integration wegzuschaffen, die Gränzen 0 und c, so wird

$$\int_0^c Fx \cos hx\, dx = c + 2\sum_1^{\infty} \frac{\sin mc}{m}$$

d. i. wenn $2\pi > c > 0$, wie früher schon

$$\int_0^c Fx \cos hx\, dx = \pi,\ 2\pi > c > 0 \ldots \quad (6).$$

Zerlegen wir ähnlich 2sin hx cos nx in eine Sinussumme, so ist

$$\int Fx \sin hx\, dx = \frac{-\cos hx}{h} + \sum_1^{\infty} \int [\sin(h-n)x + \sin(h+n)x]\, dx$$

$$= \frac{-\cos hx}{h} - \sum_1^{\infty} \left[\frac{\cos(h-n)x}{h-n} + \frac{\cos(h+n)x}{h+n}\right]$$

d. i. für $h \pm n = m$,

$$\int Fx \sin hx\, dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{m}.$$

Da nun $\frac{\cos mx}{m}$ für negative m, $= \frac{-\cos mx}{m}$ wird, so bleibt bloss das dem Werthe $h - n = m = 0$ entsprechende Glied übrig; also

$$\int Fx \sin hx\, dx = \frac{\cos 0x}{0},$$

und wenn wir die Gränzen 0, c nehmen

$$\int_0^c Fx \sin hx\, dx = \frac{\cos 0c}{0} - \frac{\cos 0}{0}$$

$$= \frac{\cos 0}{0} - \frac{\cos 0}{0}.$$

Obgleich nun $\frac{\cos 0}{0} = \frac{1}{0} = \infty$ ist, so wird doch unser Integral $= 0$, da beide ∞ durch die nämliche Operation entstanden sind; mithin

$$\int_0^c Fx \sin hx\, dx = 0 \ldots (7).$$

§. 4.

Wendet man auf die beiden Formeln (6) und (7) den bekannten Satz von den besimmten Integralen an, dass für

$$u = \int_a^b f(x, h)\, dx,\ \frac{du}{dh} = \int_a^b \frac{df(x, h)}{dh}\, dx$$

ist, so erhält man durch mehrmaliges Differenziiren nach h, leicht aus (6)

$$\int_0^c x \sin hx\, Fx\, dx = 0$$

$$\int_0^c x^2 \cos hx\, Fx\, dx = 0$$

$$\int_0^c x^3 \sin hx\, Fx\, dx = 0$$

$$\int_0^c x^4 \cos hx\, Fx\, dx = 0$$

etc.

und aus (7)

$$\int_0^c x \cos hx\, Fx\, dx = 0$$

$$\int_0^c x^2 \sin hx\, Fx\, dx = 0$$

$$\int_0^c x^3 \cos hx\, Fx\, dx = 0$$

etc.

Ist also m eine ganze Zahl, so kann man durch Differenzialquotienten der einen oder der anderen Gleichung (6) oder (7) immer zu dem Ausdrucke

$$\int_0^c x^m \cos hx\, Fx\, dx = 0$$

gelangen. Da nun h eine beliebige ganze Zahl sein kann, so nehmen wir $h = 0$, und erhalten

$$\int_0^c x^m\, Fx\, dx = 0\ . \quad (8).$$

§. 5.

Wir können nun leicht ein sehr allgemeines Theorem beweisen. Bezeichnen wir die successiven Differenzialquotienten von fx nach x mit f^1x, f^2x, . . . etc.; so ist bekanntlich nach Maclaurin's Satze

$$fx = f(0) + \frac{x}{1} f^1(0) + \frac{x^2}{1\,.\,2} f^2(0) + \ldots$$

also, weil $f(0)$, $f^1(0)$, $f^2(0)$ . . Constanten sind,

$$\int_0^c Fx\, fx\, dx = f(0) \int_0^c Fx\, dx + \frac{f^1(0)}{1}$$

$$\int_0^c x\, Fx\, dx + \frac{f^2(0)}{1\,.\,2} \int_0^c x^2\, Fx\, dx + \ldots$$

d. i. nach (5) und (8)

$$\int_0^c Fx\, fx\, dx = \pi f(0),\ 2\pi > c > 0. \quad (9).$$

Von diesem Theoreme werden wir nun eine sehr fruchtbare Anwendung machen.

In dem Ausdrucke (3) möge $z - \alpha$ für x stehen; multipliciren wir noch mit den Faktoren $fz\, dz$, und integriren zwischen den Gränzen 0, π, so wird

$$\int_0^\pi F(z-\alpha) fz\, dz = \int_0^\pi fz\, dz + 2\sum_1^\infty \int_0^\pi fz \cos n(z-\alpha) dz \quad (10)$$

Für $z - \alpha = \Theta$ wird $fz = f(\Theta + \alpha)$ und, wenn $z = \pi$, ist $\Theta = \pi - \alpha$, wenn $z = 0$, ist $\Theta = -\alpha$ geworden; also

$$\int_0^\pi F(z-\alpha)fz\ dz = \int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} F\Theta\ f(\Theta+\alpha)d\Theta$$
$$= \int_0^{\pi-\alpha} F\Theta\ f(\Theta+\alpha)d\Theta - \int_0^{-\alpha} F\Theta\ f(\Theta+\alpha)d\Theta.$$

Nehmen wir im zweiten Integrale Θ negativ, so ist, weil $F(-\Theta)=F\Theta$, unser Ausdruck

$$= \int_0^{\pi-\alpha} F\Theta\ f(\alpha+\Theta)\ d\Theta + \int_0^{\alpha} F\Theta\ f(\alpha-\Theta)\ d\Theta.$$

Knüpfen wir nun an α die Bedingung, dass es >0 und $<\pi$ sei, so ist auf jedes dieser Integrale die Formel (9) anwendbar, und

$$\int_0^\pi F(z-\alpha)\ fz\ dz = \pi\ f(\alpha+0) + \pi\ f(\alpha-0)$$
$$= 2\pi\ f\alpha;$$

also durch Einführung dieses Werthes in (10)

$$f\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi fz\ dz + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \int_0^\pi fz\ \cos n(z-\alpha)\ dz. \quad (11).$$

Nehmen wir in (10) α negativ, so wird links für $z+\alpha=\Theta$,

$$\int_0^\pi F(z+\alpha)\ fz\ dz = \int_\alpha^{\pi+\alpha} F\Theta\ f(\Theta-\alpha)\ d\Theta$$
$$= \int_0^{\pi+\alpha} F\Theta\ f(\Theta-\alpha)\ d\Theta - \int_0^{\alpha} F\Theta\ f(\Theta-\alpha)\ d\Theta$$

und wenn wieder $\alpha>0$ und $<\pi$,

$$\int_0^\pi F(z+\alpha)\ fz\ dz = \pi\ f(-\alpha) - \pi\ f(-\alpha) = 0.$$

also

$$0 = \int_0^\pi fz\ dz + 2\sum_1^\infty \int_0^\pi fz\ \cos n\ (z+\alpha)\ dz$$

oder auch

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi fz\ dz + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \int_0^\pi fz\ \cos n(z+\alpha)\ dz. \quad (12).$$

Ziehen wir (12) von (11) ab und beachten, dass $\cos n(z-\alpha) - \cos n(z+\alpha) = 2\sin n\alpha\ .\ \sin nz$, so ist

$$f\alpha = \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \sin n\alpha \int_0^\pi fz\ \sin nz\ dz \quad (13)$$

und in ähnlicher Weise, wenn wir (12) zu (11) addiren,

$$f\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi fz\ dz + \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \cos n\alpha \int_0^\pi fz\ \cos nz\ dz \quad (14).$$

Diess sind die beiden wichtigen Formeln, deren u. A. Poisson in seiner Mechanik §. 325. gedenkt.

Setzt man $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi fz\ \sin nz\ dz = a_n$, $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi fz\ \cos nz\ dz = b_n$, und schreibt x für α, so hat man

$$fx = \sum_1^\infty a_n \sin nx,\ fx = \tfrac{1}{2}b_0 + \sum_1^\infty b_n \cos nx$$

so dass sich mithin allgemein jede Function in eine Reihe von den Formen

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots$$

$$\text{oder } \tfrac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \ldots$$

entwickeln lässt, sobald man a_n und b_n jenen bestimmten Integralen gleich nimmt.

XL.

Ueber die Bedingungen der Ungleichheit, von den Mittelgrössen und von den imaginären Grössen *).

Von

dem Herausgeber.

I.

Von den Bedingungen der Ungleichheit.

§. 1.

Erklärung. Die Grösse a ist der Grösse b gleich, es ist $a = b$, wenn die Differenz

$$a - b$$

verschwindet. Die Grösse a ist grösser als die Grösse b, es ist $a > b$, wenn die Differenz

$$a - b$$

*) Wenn auch die in dieser Abhandlung bewiesenen Sätze fast sämmtlich nicht neu sind, so hielten wir es jedoch für nöthig, was auch dem Zwecke des Archivs ganz gemäss ist, dieselben einmal in einem geordneten Ganzen möglichst vollständig zusammenzustellen. Eine solche Zusammenstellung so bald als möglich dem Archive einzuverleiben, war aber um so nöthiger, weil diese Sätze die vorzüglichste Grundlage vieler Untersuchungen aus den höheren Theilen der Mathematik, vorzüglich über die Convergenz und Divergenz der Reihen, bilden, welche in den folgenden Heften mitgetheilt werden sollen. Ohne eine solche Zusammenstellung, auf welche nun im Folgenden in jedem Falle verwiesen werden kann, würde eine zu häufige und zu unangenehme Unterbrechung der in Rede stehenden, zum Theil sehr schwierigen Untersuchungen nöthig gewesen sein. Dies wird sich schon im nächst folgenden Hefte, so weit sich jetzt schon über dessen Inhalt urtheilen lässt, zeigen.

positiv ist und nicht verschwindet. Die Grösse a ist kleiner als die Grösse b, es ist $a < b$, wenn die Differenz

$$a - b$$

negativ ist.

§. 2.

Lehrsatz. Wenn

$$a > b,\ a_1 > b_1,\ a_2 > b_2,\ a_3 > b_3,\ \ldots.$$

ist, so ist auch

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots > b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$a > b,\ a_1 > b_1,\ a_2 > b_2,\ a_3 > b_3,\ \ldots.$$

ist, so verschwindet nach §. 1. keine der Differenzen

$$a - b,\ a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3,\ \ldots.$$

und diese Differenzen sind sämmtlich positiv. Also verschwindet offenbar auch die Summe

$$(a - b) + (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots.$$

dieser Differenzen nicht und ist positiv. Weil nun

$$(a - b) + (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots.$$
$$= (a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) - (b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots.)$$

ist, so verschwindet auch die Grösse

$$(a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) - (b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$$

nicht und ist positiv, woraus sich nach §. 1. unmittelbar ergiebt, dass

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots > b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

ist, wie bewiesen werden sollte.

§. 3.

Zusatz. Wenn

$$a < b,\ a_1 < b_1,\ a_2 < b_2.\ a_3 < b_3,\ \ldots.$$

ist, so ist auch

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots < b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung offenbar

$$b > a,\ b_1 > a_1,\ b_2 > a_2,\ b_3 > a_3,\ \ldots.$$

ist, so ist nach §. 2.

$$b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots > a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

und folglich

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots < b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 4.

Lehrsatz. Wenn

$$a > b,\ a_1 > b_1,\ a_2 > b_2,\ a_3 > b_3,\ \ldots;$$
$$\alpha = \beta,\ \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \alpha_3 = \beta_3, \ldots$$

ist, so ist

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$$
$$> b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots$$

Beweis. Weil nach §. 2.

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots > b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

ist, so verschwindet die Differenz

$$(a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) - (b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$$

nicht und ist positiv. Nach der Voraussetzung und nach §. 1. verschwinden die Differenzen

$$\alpha - \beta,\ \alpha_1 - \beta_1,\ \alpha_2 - \beta_2,\ \alpha_3 - \beta_3, \ldots.$$

sämmtlich, und es verschwindet folglich auch die Summe

$$(\alpha - \beta) + (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) + (\alpha_3 - \beta_3) + \ldots.$$

dieser Differenzen, d. i. die Grösse

$$(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) - (\beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \ldots).$$

Hieraus geht hervor, dass die Summe der Differenzen

$$(a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) - (b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$$

und

$$(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) - (\beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots),$$

d. i. die Grösse

$$(a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots)$$
$$- (b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots)$$

nicht verschwindet und positiv ist. Folglich ist nach §. 1.

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$$
$$> b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 5.

Zusatz. Wenn

$$a < b,\ a_1 < b_1,\ a_2 < b_2,\ a_3 < b_3,\ \ldots;$$
$$\alpha = \beta,\ \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \alpha_3 = \beta_3, \ldots$$

ist, so ist

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$$
$$< b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \ldots.$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung

$$b > a,\ b_1 > a_1,\ b_2 > a_2,\ b_3 > a_3, \ldots;$$
$$\beta = \alpha,\ \beta_1 = \alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_2,\ \beta_3 = \alpha_3, \ldots.$$

ist, so ist nach §. 4.

$$b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots$$
$$> a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots,$$

und folglich

$$a + a_1 + a_2 + a_3 \ldots + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots.$$
$$< b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots.,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 6.

Lehrsatz. Wenn

$$a > b \text{ und } a_1 \overset{=}{<} b_1$$

ist, so ist

$$a - a_1 > b - b_1.$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$a > b \text{ und } b_1 \overset{=}{>} a_1$$

ist, so ist nach §. 4.

$$a + b_1 > b + a_1.$$

Weil nun

$$-a_1 - b_1 = -a_1 - b_1$$

ist, so ist nach §. 4.

$$a + b_1 - a_1 - b_1 > b + a_1 - a_1 - b_1,$$

d. i.

$$a - a_1 > b - b_1,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 7.

Zusatz. Wenn

$$a < b \text{ und } a_1 \overset{=}{>} b_1$$

ist, so ist

$$a - a_1 < b - b_1.$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung

$$b > a \text{ und } b_1 \overset{=}{<} a_1$$

ist, so ist nach §. 6.

$$b - b_1 > a - a_1,$$

und folglich

$$a - a_1 < b - b_1,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 8.

Lehrsatz. Wenn

$$a = b \text{ und } a_1 > b_1$$

ist, so ist

$$a - a_1 < b - b_1.$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$a = b \text{ und } b_1 < a_1$$

ist, so ist nach §. 5.

$$a + b_1 < b + a_1.$$

Weil nun

$$-a_1 - b_1 = -a_1 - b_1$$

ist, so ist nach §. 5.

$$a + b_1 - a_1 - b_1 < b + a_1 - a_1 - b_1,$$

d. i.

$$a - a_1 < b - b_1,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 9.

Zusatz. Wenn

$$a = b \text{ und } a_1 < b_1$$

ist, so ist

$$a - a_1 > b - b_1.$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung

$$b = a \text{ und } b_1 > a_1$$

ist, so ist nach §. 8.

$$b - b_1 < a - a_1,$$

und folglich

$$a - a_1 > b - b_1,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 10.

Lehrsatz. Wenn die Grössen

$$a, a_1, a_2, \ldots a_n; b, b_1, b_2, \ldots b_n$$

sämmtlich positiv sind, und

$$a > b, a_1 > b_1, a_2 > b_2, \ldots a_n > b_n$$

ist, so ist auch

$$aa_1 a_2 \ldots a_n > bb_1 b_2 \ldots b_n.$$

Beweis. Nach der Voraussetzung sind die Differenzen

$$a - b, a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, \ldots.$$

sämmtlich positiv und keine derselben verschwindet. Weil nun die Grössen

$$a, a_1, a_2, \ldots a_n; b, b_1, b_2, \ldots b_n$$

nach der Voraussetzung sämmtlich positiv sind, so sind auch die Producte

$$(a-b)\,a_1\,a_2\,a_3\ldots a_n = aa_1\,a_2\,a_3\ldots a_n - ba_1\,a_2\,a_3\ldots a_n,$$
$$(a_1-b_1)\,ba_2\,a_3\ldots a_n = ba_1\,a_2\,a_3\ldots a_n - bb_1\,a_2\,a_3\ldots a_n,$$
$$(a_2-b_2)\,bb_1\,a_3\ldots a_n = bb_1\,a_2\,a_3\ldots a_n - bb_1\,b_2\,a_3\ldots a_n,$$

u. s. w.

$$(a_{n-1}-b_{n-1})\,bb_1\ldots b_{n-2}a_n = bb_1\ldots b_{n-2}a_{n-1}a_n - bb_1\ldots b_{n-2}b_{n-1}a_n,$$
$$(a_n-b_n)\,bb_1\,b_2\ldots b_{n-1} = bb_1\,b_2\ldots b_{n-1}\,a_n - bb_1\,b_2\,b_3\ldots b_n$$

sämmtlich positiv. Weil die Grössen

$$a, a_1, a_2, \ldots a_n; b, b_1\, b_2, \ldots b_n$$

sämmtlich positiv sind, und

$$a > b,\ a_1 > b_1,\ a_2 > b_2, \ldots a_n > b_n$$

ist, so verschwindet offenbar keine der Grössen $a, a_1, a_2, \ldots a_n$, und auch die Differenz $a-b$ verschwindet nicht. Also verschwindet auch das erste der obigen Producte, nämlich das Product

$$(a-b)\,a_1\,a_2\,a_3\ldots\ldots a_n$$

nicht. Weil nun die obigen Producte sämmtlich positiv sind und das erste nicht verschwindet, so ist auch die Summe aller dieser Producte, d. i. nach dem Obigen die Differenz

$$aa_1\,a_2\,a_3\ldots a_n - bb_1\,b_2\,b_3\ldots b_n$$

positiv und verschwindet nicht, woraus sich nach §. 1. unmittelbar ergiebt, dass

$$aa_1\,a_2\,a_3\ldots a_n > bb_1\,b_2\,b_3\ldots b_n$$

ist, wie bewiesen werden sollte.

§. 11.

Zusatz. Wenn die Grössen

$$a, a_1, a_2, \ldots a_n; b, b_1, b_2, \ldots b_n$$

sämmtlich positiv sind, und

$$a < b,\ a_1 < b_1,\ a_2 < b_2, \ldots a_n < b_n$$

ist, so ist

$$aa_1\,a_2\ldots a_n < bb_1\,b_2\ldots b_n.$$

Dies ist eine unmittelbare Folge aus dem vorigen Lehrsatze.

§. 12.

Lehrsatz. Wenn $a > b$ ist und die Grösse n nicht verschwindet, so ist $na > nb$ oder $na < nb$, jenachdem n positiv oder negativ ist.

Beweis. Weil nach der Voraussetzung $a > b$ ist, so ist nach §. 1. die Differenz $a-b$ positiv und verschwindet nicht. Ist nun das nicht verschwindende n positiv, so ist offenbar auch das Product

$$n(a-b)=na-nb$$

positiv und verschwindet nicht; also ist nach §. 1. $na > nb$. Ist aber n negativ, so ist das Product

$$n(a-b)=na-nb$$

offenbar negativ, und nach §. 1. ist folglich $na < nb$.

Anmerkung. Für $n=0$ wäre natürlich $na=nb=0$.

§. 13.

Zusatz. Wenn $a<b$ ist und die Grösse n nicht verschwindet, so ist $na<nb$ oder $na>nb$, jenachdem n positiv oder negativ ist.

Weil nämlich nach der Voraussetzung $b>a$ ist, so ist nach dem vorigen Paragraphen $nb>na$ oder $nb<na$, d. i. $na<nb$ oder $na>nb$, jenachdem n positiv oder negativ ist, wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Für $n=o$ wäre natürlich $na=nb=0$.

§. 14.

Lehrsatz. Wenn $a>b$ ist und n nicht verschwindet, so ist $\frac{a}{n}>\frac{b}{n}$ oder $\frac{a}{n}<\frac{b}{n}$, jenachdem n positiv oder negativ ist.

Beweis. Weil

$$\frac{a}{n}=a\,.\,\frac{1}{n},\quad \frac{b}{n}=b\,.\,\frac{1}{n}$$

und $\frac{1}{n}$ mit n gleichzeitig positiv und negativ ist, so folgt der Satz unmittelbar aus §. 12.

§. 15.

Zusatz. Wenn $a<b$ ist und n nicht verschwindet, so ist $\frac{a}{n}<\frac{b}{n}$ oder $\frac{a}{n}>\frac{b}{n}$, jenachdem n positiv oder negativ ist.

Weil nämlich nach der Voraussetzung $b>a$ ist, so ist nach dem vorigen Paragraphen $\frac{b}{n}>\frac{a}{n}$ oder $\frac{b}{n}<\frac{a}{n}$, d. i. $\frac{a}{n}<\frac{b}{n}$ oder $\frac{a}{n}>\frac{b}{n}$, jenachdem n positiv oder negativ ist, wie bewiesen werden sollte.

§. 16.

Lehrsatz. Wenn die Grössen a, b; a_1, b_1 sämmtlich positiv sind und

$$a \geqq b,\quad a_1<b_1$$

ist, in dem Falle $a=b$ aber die Grössen a, b nicht verschwinden, auch nicht $a_1=0$ ist, so ist

$$\frac{a}{a_1}>\frac{b}{b_1}.$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$b_1 > a_1, \ a \overline{\underline{>}} b$$

ist, so ist nach §. 10. und §. 12.

$$ab_1 > a_1 b,$$

und folglich nach §. 14.

$$\frac{ab_1}{a_1 b_1} > \frac{a_1 b}{a_1 b_1}, \text{ d. i. } \frac{a}{a_1} > \frac{b}{b_1},$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 17.

Zusatz. Wenn die Grössen a, b; a_1, b_1 sämmtlich positiv sind und

$$a \overline{\underline{<}} b, \ a_1 > b_1$$

ist, in dem Falle $a = b$ aber die Grössen a, b nicht verschwinden, auch nicht $b_1 = 0$ ist, so ist

$$\frac{a}{a_1} < \frac{b}{b_1}.$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung

$$b \overline{\underline{>}} a, \ b_1 < a_1$$

ist, so ist nach §. 16.

$$\frac{b}{b_1} > \frac{a}{a_1}, \text{ also } \frac{a}{a_1} < \frac{b}{b_1}.$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 18.

Lehrsatz. Wenn die Grössen a, b positiv sind und $a > b$ ist, so ist $a^n > b^n$ oder $a^n < b^n$, jenachdem das nicht verschwindende n positiv oder negativ ist.

Beweis. Weil die Grössen a, b positiv sind und $a > b$ ist, so ist

$$\frac{b}{a} < 1.$$

Also ist offenbar

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n < 1 \text{ oder } \left(\frac{b}{a}\right)^n > 1,$$

jenachdem das nicht verschwindende n positiv oder negativ ist. Weil nun

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

ist, so ist

$$\frac{b^n}{a^n} < 1 \text{ oder } \frac{b^n}{a^n} > 1,$$

d. i. $a^n > b^n$ oder $a^n < b^n$, jenachdem das nicht verschwindende n positiv oder negativ ist, wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Für $n = 0$ ist $a^n = b^n = 1$.

§. 19.

Zusatz. Wenn die Grössen a, b positiv sind und $a < b$ ist, so ist $a^n < b^n$ oder $a^n > b^n$, jenachdem das nicht verschwindende n positiv oder negativ ist.

Weil nämlich nach der Voraussetzung $b > a$ ist, so ist nach dem vorigen Paragraphen $b^n > a^n$ oder $b^n < a^n$, d. i. $a^n < b^n$ oder $a^n > b^n$, jenachdem das nicht verschwindende n positiv oder negativ ist, wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Für $n = 0$ ist $a^n = b^n = 1$.

§. 20.

Lehrsatz. Wenn a positiv und $m > n$ ist, so ist $a^m > a^n$ oder $a^m < a^n$, jenachdem $a > 1$ oder $a < 1$ ist, die Grössen m und n mögen positiv oder negativ sein.

Beweis. Weil nach der Voraussetzung die Differenz $m - n$ positiv ist und nicht verschwindet, so ist offenbar

$$a^{m-n} > 1 \text{ oder } a^{m-n} < 1,$$

jenachdem $a > 1$ oder $a < 1$ ist.

Weil nun

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

ist, so ist auch

$$\frac{a^m}{a^n} > 1 \text{ oder } \frac{a^m}{a^n} < 1,$$

$$\text{d. i. } a^m > a^n \text{ oder } a^m < a^n,$$

jenachdem $a > 1$ oder $a < 1$ ist, wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Für $a = 1$ ist $a^m = a^n = 1$.

§. 21.

Lehrsatz. Wenn die beiden Grössen a und b nicht einander gleich sind, so ist immer

$$a^2 + b^2 > 2ab.$$

Beweis. Bekanntlich ist

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2.$$

Weil nun nach der Voraussetzung die Grössen a und b nicht einander gleich sind, so verschwindet die Grösse $(a - b)^2$ nicht und ist, wie jedes Quadrat, positiv. Also verschwindet die Differenz

$$a^2 + b^2 - 2ab$$

nicht und ist positiv. Folglich ist nach §. 1.

$$a^2 + b^2 > 2ab,$$

wie bewiesen werden sollte.

Anmerkuug. Wenn $a = b$ ist, so ist

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 = 0,$$

und folglich

$$a^2 + b^2 = 2ab.$$

§. 22.

Lehrsatz. Wenn, unter der Voraussetzung, dass n grösser als die Einheit ist, die n Grössen $a, b, c, d, e, \ldots$ nicht sämmtlich unter einander gleich sind, und der Kürze wegen

$$S = a + b + c + d + e + \ldots\ldots$$

und

$$\begin{aligned} \Sigma = ab + ac &+ ad + ae + \ldots\\ + bc &+ bd + be + \ldots\\ &+ cd + ce + \ldots\\ &\qquad + de + \ldots \end{aligned}$$

gesetzt wird, so ist immer

$$(n-1)\,S^2 > 2n\Sigma.$$

Beweis. Nach dem in §. 21. bewiesenen Satze ist

$$a^2 + b^2 \overline{\overline{>}} 2ab,\ a^2 + c^2 \overline{\overline{>}} 2ac,\ a^2 + d^2 \overline{\overline{>}} 2ad,\ a^2 + e^2 \overline{\overline{>}} 2ae, \ldots$$

$$b^2 + c^2 \overline{\overline{>}} 2bc,\ b^2 + d^2 \overline{\overline{>}} 2bd,\ b^2 + e^2 \overline{\overline{>}} 2be, \ldots$$

$$c^2 + d^2 \overline{\overline{>}} 2cd,\ c^2 + e^2 \overline{\overline{>}} 2ce, \ldots$$

$$d^2 + e^2 \overline{\overline{>}} 2de, \ldots$$

Weil nun nach der Voraussetzung die Grössen $a, b, c, d, e, \ldots$ nicht sämmtlich unter einander gleich sind, so sind im Vorhergehenden nach §. 21. nicht überall die oberen Zeichen zu nehmen, und man erhält also, wenn man auf beiden Seiten der Zeichen addirt, nach §. 4.

$$(n-1)\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \ldots) > 2\Sigma.$$

Also ist, wenn man auf beiden Seiten die Grösse $2(n-1)\Sigma$ addirt, nach §. 4. auch

$$(n-1)\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \ldots + 2\Sigma) > 2n\Sigma.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\begin{aligned} S^2 = a^2 + b^2 &+ c^2 + d^2 + e^2 + \ldots\ldots\\ + 2ab &+ 2ac + 2ad + 2ae + \ldots\ldots\\ &+ 2bc + 2bd + 2be + \ldots\ldots\\ &\qquad + 2cd + 2ce + \ldots\ldots\\ &\qquad\qquad + 2de + \ldots\ldots \end{aligned}$$

d. i.

$$S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \ldots + 2\Sigma,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$(n-1)\,S^2 > 2n\Sigma,$$

wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Wenn die Grössen $a, b, c, d, e, \ldots$ sämmtlich unter einander gleich sind, so ist

$$a^2 + b^2 = 2ab,\ a^2 + c^2 = 2ac,\ a^2 + d^2 = 2ad,\ a^2 + e^2 = 2ae, \ldots$$
$$b^2 + c^2 = 2bc,\ b^2 + d^2 = 2bd,\ b^2 + e^2 = 2be, \ldots$$
$$c^2 + d^2 = 2cd,\ c^2 + e^2 = 2ce, \ldots$$
$$d^2 + e^2 = 2de, \ldots$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen addirt,

$$(n-1)\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \ldots) = 2\Sigma.$$

Also ist, wenn man auf beiden Seiten $2(n-1)\Sigma$ addirt,

$$(n-1)\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \ldots + 2\Sigma) = 2n\Sigma.$$

Nun ist aber wie oben

$$S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \ldots + 2\Sigma,$$

und folglich in diesem Falle

$$(n-1)\,S^2 = 2n\Sigma.$$

§. 23.

Lehrsatz. Wenn a und b zwei ungleiche positive Grössen sind und n eine die Einheit übersteigende positive ganze Zahl ist, so ist immer

$$na^n + b^n > a^n + na^{n-1}b.$$

Beweis. Weil

$$(na^n + b^n) - (a^n + na^{n-1}b) = na^{n-1}(a-b) - (a^n - b^n),$$

und, wie man leicht durch gewöhnliche Multiplication findet,

$$a^n - b^n = (a-b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

ist, so ist

$$(na^n + b^n) - (a^n + na^{n-1}b)$$
$$= (a-b)\,(na^{n-1} - a^{n-1} - a^{n-2}b - \ldots - ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

Ist nun $a > b$, so ist offenbar

$$na^{n-1} > a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1},$$

und eben so leicht erhellet, dass, wenn $a < b$ ist, jederzeit

$$na^{n-1} < a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

ist. Also haben die beiden Factoren des Products

$$(a-b)\,(na^{n-1} - a^{n-1} - a^{n-2}b - \ldots - ab^{n-2} - b^{n-1})$$

jederzeit gleiche Vorzeichen, und keiner dieser beiden Factoren verschwindet. Daher ist dieses Product, und nach dem Obigen also auch die Differenz

$$(na^n + b^n) - (a^n + na^{n-1}b),$$

jederzeit positiv und verschwindet nicht. Folglich ist nach §. 1.

$$na^n + b^n > a^n + na^{n-1}b,$$

wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Für $n = 1$ ist offenbar

$$na^n + b^n = a^n + na^{n-1}b = a + b.$$

Für $a = b$ ist immer

$$na^n + b^n = a^n + na^{n-1}b = (n + 1)\, a^n.$$

§. 24.

Zusatz. Weil unter denselben Voraussetzungen wie vorher

$$na^n + b^n > a^n + na^{n-1}b,$$
$$b^n + na^{n-1}b = b^n + na^{n-1}b$$

ist, so ist nach §. 6.

$$na^n + b^n - b^n - na^{n-1}b > a^n + na^{n-1}b - b^n - na^{n-1}b,$$

d. i.

$$na^n - na^{n-1}b > a^n - b^n$$

oder

$$na^n\,(1 - \frac{b}{a}) > a^n\,\{1 - (\frac{b}{a})^n\}.$$

Dividirt man nun auf beiden Seiten durch die positive Grösse a^n, so erhält man nach §. 14.

$$n\,(1 - \frac{b}{a}) > 1 - (\frac{b}{a})^n.$$

§. 25.

Lehrsatz. Wenn die Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots\ldots a_n$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind und $n > 1$ ist, so ist der absolute Werth der Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$

jederzeit kleiner als das Product

$$\sqrt{n}\,.\,\sqrt{(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + a_4{}^2 + \ldots + a_n{}^2)}.$$

Beweis. Ohne alle Schwierigkeit erhellet die Richtigkeit der Gleichung

$$\begin{aligned}
&(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n)^2\\
&+ (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_1 - a_4)^2 + \ldots\ldots + (a_1 - a_n)^2\\
&\qquad + (a_2 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 + \ldots\ldots + (a_2 - a_n)^2\\
&\qquad\qquad + (a_3 - a_4)^2 + \ldots\ldots + (a_3 - a_n)^2\\
&\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + (a_{n-1} - a_n)^2\\
&= n\,(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + a_4{}^2 + \ldots + a_n)^2.
\end{aligned}$$

Weil nun nach der Voraussetzung die Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots . a_n$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind, so verschwinden die Differenzen

$$\begin{array}{r} a_1 - a_2,\ a_1 - a_3,\ a_1 - a_4, \ldots . a_1 - a_n; \\ a_2 - a_3,\ a_2 - a_4, \ldots . a_2 - a_n; \\ a_3 - a_4, \ldots . a_3 - a_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} - a_n \end{array}$$

nicht sämmtlich, und es ist also

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots . + a_n)^2$$
$$< n(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2);$$

folglich ist offenbar der absolute Werth von

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$

kleiner als

$$\sqrt{n} \,.\, \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2)},$$

wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Wenn die Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots . a_n$$

sämmtlich unter einander gleich sind, so ergiebt sich aus dem Beweise des obigen Satzes leicht, dass der absolute Werth der Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots . + a_n$$

der Grösse

$$\sqrt{n} \,.\, \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2)}$$

gleich ist.

§. 26.

Zusatz. Wenn die Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots . a_n$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind und $n > 1$ ist, so ist der absolute Werth von

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots . + a_n}{n}$$

kleiner als die Grösse

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

§. 27.

Lehrsatz. Wenn $n > 1$ ist und die Brüche

$$\frac{a_1}{\alpha_1}, \frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_3}{\alpha_3}, \frac{a_4}{\alpha_4}, \ldots \frac{a_n}{\alpha_n}$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind, so ist der Werth der Summe

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + \ldots + a_n\alpha_n$$

immer kleiner als das Product

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2)} \,.\, \sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \ldots + \alpha_n^2)}.$$

Beweis. Weil, wie leicht erhellet,

$$\begin{aligned}&(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + \ldots + a_n\alpha_n)^2\\
&+(a_1\alpha_2-a_2\alpha_1)^2+(a_1\alpha_3-a_3\alpha_1)^2+(a_1\alpha_4-a_4\alpha_1)^2+\ldots+(a_1\alpha_n-a_n\alpha_1)^2\\
&\qquad+(a_2\alpha_3-a_3\alpha_2)^2+(a_2\alpha_4-a_4\alpha_2)^2+\ldots+(a_2\alpha_n-a_n\alpha_2)^2\\
&\qquad\qquad+(a_3\alpha_4-a_4\alpha_3)^2+\ldots+(a_3\alpha_n-a_n\alpha_3)^2\\
&\qquad\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+(a_{n-1}\alpha_n-a_n\alpha_{n-1})^2\\
&=(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+\ldots+a_n^2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2+\ldots+\alpha_n^2)\end{aligned}$$

ist, und weil nach der Voraussetzung die Brüche

$$\frac{a_1}{\alpha_1},\ \frac{a_2}{\alpha_2},\ \frac{a_3}{\alpha_3},\ \frac{a_4}{\alpha_4},\ \ldots\ \frac{a_n}{\alpha_n}$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind, die Differenzen, deren Quadrate in der obigen Gleichung vorkommen, also nicht sämmtlich verschwinden, so ist

$$\begin{aligned}&(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + \ldots + a_n\alpha_n)^2\\
&<(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+\ldots+a_n^2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2+\ldots+\alpha_n^2),\end{aligned}$$

und folglich offenbar der absolute Werth von

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + \ldots a_n\alpha_n$$

kleiner als die Grösse

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2)} \,.\, \sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \ldots + \alpha_n^2)},$$

wie behauptet wurde.

Anmerkung. Wenn die Brüche

$$\frac{a_1}{\alpha_1},\ \frac{a_2}{\alpha_2},\ \frac{a_3}{\alpha_3},\ \frac{a_4}{\alpha_4},\ \ldots\ \frac{a_n}{\alpha_n}$$

sämmtlich unter einander gleich sind, so ist, wie sich aus dem Beweise des obigen Satzes leicht ergiebt, der absolute Werth der Summe

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + \ldots + a_n\alpha_n$$

jederzeit dem Producte

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2)} \,.\, \sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \ldots + \alpha_n^2)}$$

gleich.

§. 28.

Zusatz. Wenn $n > 1$ und die Brüche

$$\frac{a_1}{\alpha_1},\ \frac{a_2}{\alpha_2},\ \frac{a_3}{\alpha_3},\ \frac{a_4}{\alpha_4},\ \ldots\ \frac{a_n}{\alpha_n}$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind, so ist der absolute Werth der Grösse

$$\frac{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + \ldots + a_n\alpha_n}{n}$$

jederzeit kleiner als das Product

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \ldots + \alpha_n^2}{n}}.$$

§. 29.

Lehrsatz. Wenn $n > 1$ ist und die positiven Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind, so ist jederzeit

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n}{n},$$

oder das sogenannte geometrische Mittel zwischen mehreren positiven nicht sämmtlich unter einander gleichen Grössen ist immer kleiner als das sogenannte arithmetische Mittel zwischen diesen Grössen.

Beweis. 1. Für die zwei Grössen a_1, a_2 ist, wie leicht erhellet,

$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2,$$

und folglich, weil nach der Voraussetzung die Grössen a_1, a_2 ungleich sind,

$$a_1 a_2 < \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2,$$

also

$$\sqrt{a_1 a_2} < \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Für $a_1 = a_2$ ist offenbar

$$\sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

2. Sind die vier Grössen a_1, a_2, a_3, a_4 gegeben, so muss es unter denselben nach der Voraussetzung wenigstens zwei einander nicht gleiche geben. Wenn nun a_1, a_2 diese beiden einander nicht gleichen Grössen sind, so ist nach 1.

$$a_1 a_2 < \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2, \quad a_3 a_4 \leqq \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2,$$

und folglich

$$a_1 a_2 a_3 a_4 < \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2.$$

Nach 1. ist aber

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} \leqq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^2,$$

und folglich

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2 \overset{=}{<} \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$a_1a_2a_3a_4 < \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4$$

oder

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} < \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}.$$

Für $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ ist offenbar

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}.$$

3. Sind die acht Grössen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 gegeben; so wird es nach der Voraussetzung unter denselben immer vier geben, die nicht sämmtlich unter einander gleich sind. Wenn nun a_1, a_2, a_3, a_4 diese vier Grössen sind; so ist nach 2.

$$a_1a_2a_3a_4 < \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4,\quad a_5a_6a_7a_8 \overset{=}{<} \left(\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}\right)^4,$$

und folglich

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 < \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\cdot\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}\right)^4.$$

Nach 1. ist aber

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\cdot\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4} \overset{=}{<} \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}\right)^2,$$

und folglich

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\cdot\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}\right)^4$$
$$\overset{=}{<} \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}\right)^8.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 < \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}\right)^8$$

oder

$$\sqrt[8]{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8} < \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}.$$

Für $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8$ ist offenbar

$$\sqrt[8]{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}.$$

4. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Ueberhaupt ist nach dem Vorhergehenden, wenn wir der Kürze wegen $2^m = \mu$ setzen,

$$a_1a_2a_3a_4\ldots\ldots a_\mu<\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_\mu}{\mu}\right)^\mu$$

oder

$$\sqrt[\mu]{a_1a_2a_3a_4\ldots\ldots a_\mu}<\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_\mu}{\mu}.$$

5. Man nehme nun, welches offenbar immer möglich ist, m so gross, dass $2^m>n$ oder $\mu>n$ ist, und setze

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n}{n}=x.$$

Dann ist nach 4.

$$a_1a_2a_3a_4\ldots a_nx^{\mu-n}$$
$$<\left\{\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n+(\mu-n)x}{\mu}\right\}^\mu$$

oder

$$a_1a_2a_3a_4\ldots a_nx^{\mu-n}$$
$$<\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n-nx+\mu x}{\mu}\right)^\mu,$$

d. i., weil

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n=nx$$

ist,

$$a_1a_2a_3a_4\ldots a_nx^{\mu-n}<x^\mu,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit $x^{\mu-n}$ dividirt,

$$a_1a_2a_3a_4\ldots a_n<x^n,$$

d. i.

$$a_1a_2a_3a_4\ldots a_n<\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n}{n}\right)^n$$

oder

$$\sqrt[n]{a_1a_2a_3a_4\ldots a_n}<\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n}{n},$$

wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Wenn die Grössen $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$ sämmtlich unter einander gleich sind; so ist offenbar

$$\sqrt[n]{a_1a_2a_3a_4\ldots a_n}=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n}{n}.$$

§. 30.

Zusatz. Wenn a und b zwei ungleiche positive Grössen und m und n zwei positive ganze Zahlen sind; so ist nach §. 29.

$$\sqrt[m+n]{(a^{m+n})^n\,.\,(b^{m+n})^m}<\frac{na^{m+n}+mb^{m+n}}{m+n}$$

oder

$$\sqrt[m+n]{(a^nb^m)^{m+n}}<\frac{na^{m+n}+mb^{m+n}}{m+n};$$

folglich

$$a^n b^m < \frac{na^{m+n} + mb^{m+n}}{m+n}$$

oder

$$na^{m+n} + mb^{m+n} > (m+n)a^n b^m.$$

§. 31.

Lehrsatz. Wenn a, b zwei positive Grössen sind und $a > b$ ist; so ist $\log a > \log b$ oder $\log a < \log b$, jenachdem die Basis des Systems, welchem diese Logarithmen angehören, grösser oder kleiner als die Einheit ist.

Beweis. Bezeichnet B die Basis des logarithmischen Systems, so ist

$$a = B^{\log a},\ b = B^{\log b},$$

und folglich

$$\frac{a}{b} = B^{\log a - \log b}.$$

Weil nun nach der Voraussetzung

$$\frac{a}{b} > 1$$

ist; so ist offenbar

$$\log a - \log b > 0 \text{ oder } \log a - \log b < 0,$$

d. i. $\log a > \log b$ oder $\log a < \log b$, jenachdem $B > 1$ oder $B < 1$ ist, wie behauptet wurde.

§. 32.

Lehrsatz. Wenn a und b zwei positive Grössen sind und $\log a > \log b$ ist; so ist $a > b$ oder $a < b$, jenachdem die Basis des Systems, welchem die in Rede stehenden Logarithmen angehören, grösser oder kleiner als die Einheit ist.

Beweis. Wir wollen zuerst annehmen, dass die Basis des logarithmischen Systems grösser als die Einheit sei. Wäre unter dieser Voraussetzung $a < b$, so wäre nach dem vorigen Satze $\log a < \log b$; wäre $a = b$, so wäre $\log a = \log b$. Da Beides gegen die Voraussetzung $\log a > \log b$ streitet, so kann weder $a < b$, noch $a = b$ sein. und es ist folglich $a > b$, wie behauptet wurde.

Ferner wollen wir annehmen, dass die Basis des logarithmischen Systems kleiner als die Einheit sei. Wäre unter dieser Voraussetzung $a > b$, so wäre nach dem vorigen Satze $\log a < \log b$; wäre $a = b$, so wäre $\log a = \log b$. Da Beides gegen die Voraussetzung $\log a > \log b$ streitet, so kann weder $a > b$, noch $a = b$ sein, und es ist also $a < b$, wie behauptet wurde.

Hierdurch ist unser Satz nun vollständig bewiesen.

II.

Von den Mittelgrössen.

§. 33.

Erklärung. Jede Grösse, welche nicht kleiner als die kleinste und nicht grösser als die grösste unter mehreren gegebenen Grössen a, a_1, a_2, a_3, a_4, ... ist, heisst eine Mittelgrösse oder ein Mittel zwischen diesen Grössen, und soll im Folgenden überhaupt durch

$$M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots .)$$

bezeichnet werden.

Es erhellet aus dieser Definition, dass es zwischen Grössen, die nicht sämmtlich unter einander gleich sind, unendlich viele verschiedene Mittelgrössen geben kann. Sind aber die gegebenen Grössen sämmtlich unter einander gleich, so kann man nur jede dieser Grössen selbst eine Mittelgrösse zwischen allen nennen.

§. 34.

Zusatz. Jede Grösse, welche eine Mittelgrösse zwischen zwei beliebigen der Grössen a, a_1, a_2, a_3, a_4, ... ist, ist eine Mittelgrösse zwischen allen diesen Grössen.

§. 35.

Lehrsatz. Wenn a und b zwei beliebige Grössen sind; so ist das Product

$$\{a - M(a,\ b)\}\ \{M(a,\ b) - b\},$$

wo $M(a, b)$ eine beliebige Mittelgrösse zwischen a und b bezeichnet, jederzeit positiv, wenn man nur dieses Product auch dann, wenn es verschwindet, als positiv betrachtet.

Beweis. Wenn $a > b$ ist, so sind nach §. 33. die Differenzen

$$a - M(a,\ b),\ M(a,\ b) - b$$

beide positiv, und das Product

$$\{a - M(a,\ b)\}\ \{M(a,\ b) - b\}$$

ist folglich positiv.

Wenn $a < b$ ist, so ist nach dem so eben Bewiesenen das Product

$$\{b - M(a,\ b)\}\ \{M(a,\ b) - a\}$$

positiv. Folglich ist auch das Product

$$\{a - M(a,\ b)\}\ \{M(a,\ b) - b\}$$

positiv.

Wenn $a = b$ ist, so verschwinden die Differenzen

$$a - M(a,\ b),\ M(a,\ b) - b$$

beide, und das Product

$$\{a - M(a,\ b)\}\ \{M(a,\ b) - b\}$$

ist folglich, weil es verschwindet, wieder positiv.

§. 36.

Lehrsatz. Wenn das Product

$$(a - A)\ (A - b)$$

positiv ist, so ist A jederzeit eine Mittelgrösse zwischen a und b, oder es ist

$$A = M(a, b).$$

Beweis. Wenn das Product

$$(a - A)(A - b)$$

verschwindet, so ist entweder $A = a$ oder $A = b$, in beiden Fällen also A nach §. 33. eine Mittelgrösse zwischen a und b. Wenn aber das Product

$$(a - A)(A - b)$$

nicht verschwindet; so verschwindet keiner seiner beiden Factoren, und die beiden Factoren haben, weil das in Rede stehende Product nach der Voraussetzung positiv ist, gleiche Vorzeichen. Ist also $a - A > 0$, so ist auch $A - b > 0$, oder es ist $a > A > b$, und folglich A nach §. 33. eine Mittelgrösse zwischen a und b. Ist dagegen $a - A < 0$, so ist auch $A - b < 0$, oder es ist $a < A < b$, und folglich A nach §. 33. wieder eine Mittelgrösse zwischen a und b. Im ersten Falle ist offenbar $a > b$, im zweiten ist $a < b$.

§. 37.

Lehrsatz. Wenn

$$A = M(a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$$

ist, so ist für jedes positive oder negative ϱ

$$\varrho A = M(\varrho a, \varrho a_1, \varrho a_2, \varrho a_3, \varrho a_4, \ldots).$$

Beweis. Die kleinste und grösste unter den Grössen

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

seien respective α und γ; so ist nach der Voraussetzung und nach §. 33.

$$A = M(\alpha, \gamma).$$

Folglich ist nach §. 35. das Product

$$(\alpha - A)(A - \gamma)$$

positiv. Weil nun ϱ^2 positiv ist, so ist auch das Product

$$\varrho^2(\alpha - A)(A - \gamma),$$

d. i. das Product

$$\varrho(\alpha - A) \, . \, \varrho(A - \gamma)$$

oder das Product

$$(\varrho\alpha - \varrho A)(\varrho A - \varrho\gamma)$$

positiv, und folglich nach §. 36.

$$\varrho A = M(\varrho\alpha, \varrho\gamma).$$

Weil nun die Grössen $\varrho\alpha$ und $\varrho\gamma$ offenbar unter den Gliedern der Reihe

$$\varrho a, \varrho a_1, \varrho a_2, \varrho a_3, \varrho a_4, \ldots$$

vorkommen; so ist nach §. 34.

$$\varrho A = M(\varrho a, \varrho a_1, \varrho a_2, \varrho a_3, \varrho a_4, \ldots.),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 38.

Lehrsatz. Wenn

$$A = M(a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots.)$$

ist; so ist für jedes ϱ mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$A \pm \varrho = M(a \pm \varrho, a_1 \pm \varrho, a_2 \pm \varrho, a_3 \pm \varrho, \ldots.).$$

Beweis. Die kleinste und grösste unter den Grössen

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots..$$

seien respective α und γ; so ist nach der Voraussetzung und nach §. 33.

$$A = M(\alpha, \gamma).$$

Also ist nach §. 35. das Product

$$(\alpha - A)(A - \gamma),$$

und folglich offenbar auch das Product

$$\{\alpha \pm \varrho - (A \pm \varrho)\}\ \{A \pm \varrho - (\gamma \pm \varrho)\}$$

positiv. Daher ist nach §. 36.

$$A \pm \varrho = M(\alpha \pm \varrho, \gamma \pm \varrho).$$

Weil nun die Grössen $\alpha \pm \varrho$ und $\gamma \pm \varrho$ offenbar beide unter den Gliedern der Reihe

$$a \pm \varrho, a_1 \pm \varrho, a_2 \pm \varrho, a_3 \pm \varrho, a_4 \pm \varrho, \ldots.$$

vorkommen; so ist nach §. 34.

$$A \pm \varrho = M(a \pm \varrho, a_1 \pm \varrho, a_2 \pm \varrho, a_3 \pm \varrho, \ldots.),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 39.

Lehrsatz. Wenn die Grössen $a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots.$ sämmtlich positiv sind und

$$A = M(a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots.)$$

ist; so ist für jedes ϱ

$$A^\varrho = M(a^\varrho, a_1^\varrho, a_2^\varrho, a_3^\varrho, a_4^\varrho, \ldots.).$$

Beweis. Die kleinste und grösste unter den Grössen

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots.$$

seien respective α und γ; so ist nach der Voraussetzung und nach §. 33.

$$A = M(\alpha, \gamma).$$

Ist nun A einer der beiden Grössen α, γ gleich, so verschwindet das Product

$$(\alpha^\varrho - A^\varrho)(A^\varrho - \gamma^\varrho),$$

und ist folglich positiv. Ist aber A keiner der beiden Grössen α, γ gleich, so ist

$$\alpha < A < \gamma.$$

Ist nun ϱ positiv, so ist, weil die Grössen α, γ nach der Voraussetzung positiv sind, und auch

$$A \doteq M(a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots .)$$

offenbar positiv ist, nach §. 19.

$$\alpha^\varrho < A^\varrho < \gamma^\varrho.$$

Folglich sind die Differenzen

$$\alpha^\varrho - A^\varrho,\ A^\varrho - \gamma^\varrho$$

beide negativ, und das Product

$$(\alpha^\varrho - A^\varrho)\ (A^\varrho - \gamma^\varrho)$$

ist folglich positiv. Ist dagegen ϱ negativ, so ist nach §. 19.

$$\alpha^\varrho > A^\varrho > \gamma^\varrho,$$

und die Differenzen

$$\alpha^\varrho - A^\varrho,\ A^\varrho - \gamma^\varrho$$

sind folglich beide positiv, das Product

$$(\alpha^\varrho - A^\varrho)\ (A^\varrho - \gamma^\varrho)$$

ist also wieder positiv. Weil nun das Product

$$(\alpha^\varrho - A^\varrho)\ (A^\varrho - \gamma^\varrho)$$

stets positiv ist, so ist nach §. 36.

$$A^\varrho = M(\alpha^\varrho, \gamma^\varrho).$$

Da aber die Grössen α^ϱ und γ^ϱ offenbar unter den Gliedern der Reihe

$$a^\varrho, a_1^\varrho, a_2^\varrho, a_3^\varrho, a_4^\varrho, \ldots .$$

vorkommen; so ist nach §. 34.

$$A^\varrho = M(a^\varrho, a_1^\varrho, a_2^\varrho, a_3^\varrho, a_4^\varrho, \ldots .),$$

wie behauptet wurde.

§. 40.

Lehrsatz. Wenn $a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots ..$ beliebige Grössen sind, ϱ aber positiv und

$$A = M(a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots .)$$

ist; so ist jederzeit

$$\varrho^A = M(\varrho^a, \varrho^{a_1}, \varrho^{a_2}, \varrho^{a_3}, \varrho^{a_4}, \ldots .).$$

Beweis. Die kleinste und grösste unter den Grössen

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots .$$

seien respective α und γ; so ist nach §. 33.

$$A = M(\alpha, \gamma).$$

Ist nun A einer der beiden Grössen α, γ gleich, so verschwindet das Product

$$(\varrho^\alpha - \varrho^A)\ (\varrho^A - \varrho^\gamma),$$

und ist folglich positiv. Ist dagegen A keiner der Grössen α, γ gleich, so ist

$$\alpha < A < \gamma.$$

Weil nun nach der Voraussetzung ϱ positiv ist; so ist nach §. 20.

$$\varrho^\alpha < \varrho^A < \varrho^\gamma$$

oder

$$\varrho^\alpha > \varrho^A > \varrho^\gamma,$$

jenachdem $\varrho > 1$ oder $\varrho < 1$ ist. Für $\varrho = 1$ wäre

$$\varrho^\alpha = \varrho^A = \varrho^\gamma.$$

In allen Fällen haben folglich die Differenzen

$$\varrho^\alpha - \varrho^A,\ \varrho^A - \varrho^\gamma$$

gleiche Vorzeichen, und das Product

$$(\varrho^\alpha - \varrho^A)\ (\varrho^A - \varrho^\gamma)$$

ist also positiv. Daher ist nach §. 36.

$$\varrho^A = M(\varrho^\alpha,\ \varrho^\gamma).$$

Weil aber die Grössen ϱ^α und ϱ^γ unter den Gliedern der Reihe

$$\varrho^a,\ \varrho^{a_1},\ \varrho^{a_2},\ \varrho^{a_3},\ \varrho^{a_4},\ \ldots.$$

vorkommen; so ist nach §. 34.

$$\varrho^A = M(\varrho^a,\ \varrho^{a_1},\ \varrho^{a_2},\ \varrho^{a_3},\ \varrho^{a_4},\ \ldots),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 41.

Lehrsatz. Wenn a, a_1, a_2, a_3, a_4, ... positive Grössen sind und

$$A = M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots.)$$

ist; so ist für jedes logarithmische System

$$\log A = M(\log a,\ \log a_1,\ \log a_2,\ \log a_3, \ldots.).$$

Beweis. Die kleinste und grösste unter den Grössen

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots.$$

seien respective α und γ; so ist nach der Voraussetznng und nach §. 33.

$$A = M(\alpha,\ \gamma).$$

Ist nun A einer der beiden Grössen α, γ gleich; so verschwindet das Product

$$(\log \alpha - \log A)\ (\log A - \log \gamma),$$

und ist folglich positiv. Ist dagegen A keiner der beiden Grössen α, γ gleich, nnd folglich

$$\alpha < A < \gamma;$$

so haben, wie aus §. 31. sogleich hervorgeht, die Factoren des Products

$$(\log \alpha - \log A)\ (\log A - \log \gamma)$$

jederzeit gleiche Vorzeichen, und dieses Product ist also wieder positiv. Folglich ist nach §. 36.

$$\log A = M(\log \alpha,\ \log \gamma).$$

Weil aber die Grössen $\log \alpha$ und $\log \gamma$ offenbar unter den Grössen

$$\log a,\ \log a_1,\ \log a_2,\ \log a_3,\ \log a_4,\ \ldots.$$

vorkommen; so ist nach §. 34.

$$\log A = M(\log a,\ \log a_1,\ \log a_2,\ \log a_3,\ \log a_4,\ \ldots.),$$

wie behauptet wurde.

§. 42.

Lehrsatz. Wenn $a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots.$ beliebige, dagegen $b, b_1, b_2, b_3, \ldots.$ sämmtlich Grössen mit einerlei Vorzeichen sind, deren Anzahl in beiden Reihen dieselbe ist; so ist jederzeit

$$\frac{a+a_1+a_2+a_3+\ldots.}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots.} = M(\frac{a}{b},\ \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ldots.).$$

Beweis. Wenn α und γ die kleinste und grösste unter den Grössen

$$\frac{a}{b},\ \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ldots.$$

sind; so sind die Differenzen

$$\frac{a}{b}-\alpha,\ \frac{a_1}{b_1}-\alpha,\ \frac{a_2}{b_2}-\alpha,\ \frac{a_3}{b_3}-\alpha,\ldots..$$

und auch die Differenzen

$$\gamma-\frac{a}{b},\ \gamma-\frac{a_1}{b_1},\ \gamma-\frac{a_2}{b_2},\ \gamma-\frac{a_3}{b_3},\ldots..$$

sämmtlich positiv. Da nun nach der Voraussetzung die Grössen $b, b_1, b_2, b_3, \ldots.$ alle gleiche Vorzeichen haben; so haben auch die Producte

$$b(\frac{a}{b}-\alpha),\ b_1(\frac{a_1}{b_1}-\alpha),\ b_2(\frac{a_2}{b_2}-\alpha),\ b_3(\frac{a_3}{b_3}-\alpha),\ldots..;$$

$$b(\gamma-\frac{a}{b}),\ b_1(\gamma-\frac{a_1}{b_1}),\ b_2(\gamma-\frac{a_2}{b_2}),\ b_3(\gamma-\frac{a_3}{b_3}),\ldots..;$$

und folglich auch die diesen Producten gleichen Differenzen

$$a-\alpha b,\ a_1-\alpha b_1,\ a_2-\alpha b_2,\ a_3-\alpha b_3,\ldots.;$$

$$\gamma b-a,\ \gamma b_1-a_1,\ \gamma b_2-a_2,\ \gamma b_3-a_3,\ldots.$$

sämmtlich gleiche Vorzeichen. Also haben auch die Summen

$$a+a_1+a_2+a_3+\ldots.-\alpha(b+b_1+b_2+b_3+\ldots.),$$

$$\gamma(b+b_1+b_2+b_3+\ldots.)-(a+a_1+a_2+a_3+\ldots.),$$

und folglich auch die Quotienten

$$\frac{a+a_1+a_2+a_3+\ldots.}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots.}-\alpha,\quad \gamma-\frac{a+a_1+a_2+a_3+\ldots.}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots.}$$

oder

$$a - \frac{a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots}, \quad \frac{a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots} - \gamma$$

gleiche Vorzeichen. Daher ist das Product

$$\left(a - \frac{a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots}\right)\left(\frac{a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots} - \gamma\right)$$

positiv, und folglich nach §. 36.

$$\frac{a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots} = M(a, \gamma).$$

Also ist nach §. 34. auch

$$\frac{a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots\ldots\right),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 43.

Zusatz. Setzt man im vorigen Satze $b = b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 1$, und bezeichnet die Anzahl der in jeder der beiden Reihen $a, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ und $b, b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots$ enthaltenen Glieder durch n; so ergiebt sich aus dem vorigen Satze die Gleichung

$$\frac{a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots}{n} = M(a, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots),$$

wo $a, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ ganz beliebige Grössen bezeichnen.

Hieraus sieht man, dass das arithmetische Mittel

$$\frac{a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots}{n}$$

zwischen den n beliebigen Grössen $a, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ in der That jederzeit eine Mittelgrösse zwischen diesen Grössen ist.

§. 44.

Zusatz. Sind die Brüche

$$\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots\ldots$$

sämmtlich unter einander gleich, so fällt jede Mittelgrösse zwischen ihnen mit ihnen selbst zusammen, und es ist folglich nach §. 42. unter dieser Voraussetung

$$\frac{a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots} = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots\ldots$$

§. 45.

Zusatz. Sind $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots\ldots$ beliebige Grössen mit einerlei Vorzeichen; so haben, da auch die Grössen $b, b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots$ gleiche Vorzeichen haben, auch die Produkte

$$b\varrho, b_1\varrho_1, b_2\varrho_2, b_3\varrho_3, \ldots\ldots$$

sämmtlich einerlei Vorzeichen, und es ist folglich nach §. 42.

$$\frac{a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots\ldots}{b\varrho + b_1\varrho_1 + b_2\varrho_2 + b_3\varrho_3 + \ldots\ldots} = M\left(\frac{a\varrho}{b\varrho}, \frac{a_1\varrho_1}{b_1\varrho_1}, \frac{a_2\varrho_2}{b_2\varrho_2}, \frac{a_3\varrho_3}{b_3\varrho_3}, \ldots\ldots\right),$$

d. i.

$$\frac{a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots}{b\varrho+b_1\varrho_1+b_2\varrho_2+b_3\varrho_3+\ldots}=M(\frac{a}{b},\ \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ldots).$$

Für $b=b_1=b_2=b_3=\ldots=1$ ist also

$$\frac{a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots}{\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots}=M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots)$$

oder

$$a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots\ldots$$

$$=(\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots)\ M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots).$$

In dieser Gleichung ist der folgende Satz enthalten:

Wenn a, a_1, a_2, a_3, ... beliebige, dagegen ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 .... Grössen mit einerlei Vorzeichen sind; so wird das Aggregat

$$a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots$$

erhalten, wenn man das Aggregat

$$\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots\ldots$$

mit einer gewissen Mittelgrösse zwischen den Grössen a, a_1, a_2, a_3, ... multiplicirt.

§. 46.

Lehrsatz. Seien a, a_1, a_2, a_3,.... und b, b_1, b_2, b_3,.... zwei Reihen positiver Grössen, und in jeder dieser beiden Reihen sei die Anzahl der Glieder dieselbe; so ist

$$(aa_1a_2a_3\ldots)^{\frac{1}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots}}=M(a^{\frac{1}{b}},\ a_1^{\frac{1}{b_1}},\ a_2^{\frac{1}{b_2}},\ a_3^{\frac{1}{b_3}},\ldots).$$

Beweis. Die Logarithmen der Grössen

$$(aa_1a_2a_3\ldots)^{\frac{1}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots}}$$

und

$$a^{\frac{1}{b}},\ a_1^{\frac{1}{b_1}},\ a_2^{\frac{1}{b_2}},\ a_3^{\frac{1}{b_3}},\ldots\ldots$$

sind respective

$$\frac{\log a+\log a_1+\log a_2+\log a_3+\ldots}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots}$$

und

$$\frac{\log a}{b},\ \frac{\log a_1}{b_1},\ \frac{\log a_2}{b_2},\ \frac{\log a_3}{b_3},\ldots\ldots,$$

und nach §. 42. ist

$$\frac{\log a+\log a_1+\log a_2+\log a_3+\ldots}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots}$$

$$=M(\frac{\log a}{b},\ \frac{\log a_1}{b_1},\ \frac{\log a_2}{b_2},\ \frac{\log a_3}{b_3},\ldots).$$

Geht man nun von den Logarithmen zu den entsprechenden Zahlen über, welches nach §. 40. offenbar verstattet ist; so erhält man

$$(aa_1a_2a_3\ldots.)^{\frac{1}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots.}}=M(a^{\frac{1}{b}},\ a_1^{\frac{1}{b}},\ a_2^{\frac{1}{b_1}},\ a_3^{\frac{1}{b_2}},\ldots.),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 47.

Zusatz. Für $b=b_1=b_2=b_3=\ldots=1$ erhält man, wenn die Anzahl dieser Grössen und also auch der Grössen a, a_1, a_2, a_3, ... durch n bezeichnet wird,

$$\sqrt[n]{aa_1a_2a_3\ldots\ldots}=M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots.).$$

Die Grösse $\sqrt[n]{aa_1a_2a_3,\ldots.}$ nennt man bekanntlich das geometrische Mittel zwischen den n positiven Grössen a, a_1, a_2, a_3, ..., und aus dem Vorhergehenden erhellet also, dass das geometrische Mittel zwischen beliebigen positiven Grössen in der That eine Mittelgrösse zwischen diesen Grössen ist.

§. 48.

Zusatz. Wenn die Grössen

$$a^{\frac{1}{b}},\ a_1^{\frac{1}{b_1}},\ a_2^{\frac{1}{b_2}},\ a_3^{\frac{1}{b_3}},\ldots\ldots$$

sämmtlich unter einander gleich sind; so ist, wie sich aus §. 46. unmittelbar ergiebt,

$$(aa_1a_2a_3\ldots.)^{\frac{1}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots.}}=a^{\frac{1}{b}}=a_1^{\frac{1}{b_1}}=a_2^{\frac{1}{b_2}}=a_3^{\frac{1}{b_3}}=\ldots.$$

§. 49.

Lehrsatz. Wenn die Brüche

$$\frac{a}{b},\ \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ldots\ldots$$

alle einander gleich sind; so ist

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\pm\frac{\sqrt{a^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots.}}{\sqrt{b^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots.}},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jennchdem die in Rede stehenden Brüche sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ sind.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a_1^2}{b_1^2}=\frac{a_2^2}{b_2^2}=\frac{a_3^2}{b_3^2}=\ldots\ldots,$$

und folglich nach §. 44.

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a_1^2}{b_1^2}=\frac{a_2^2}{b_2^2}=\frac{a_3^2}{b_3^2}=\ldots.=\frac{a^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots.}{b^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots.},$$

woraus der zu beweisende Satz unmittelbar durch Ausziehung der Quadratwurzel auf beiden Seiten folgt.

III.

Von den imaginären Grössen.

§. 50.

Erklärung. Den Modulus der imaginären Grösse $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, wo α und β beliebige reelle Grössen sind, nennt man die Grösse

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}},$$

die Quadratwurzel stets positiv genommen.

Zwei imaginäre Grössen

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1}$$

heissen einander gleich, wenn sowohl die beiden reellen Theile α, γ, als auch die beiden ebenfalls reellen Factoren β, δ von $\sqrt{-1}$ einander gleich sind, d. h. wenn $\alpha=\gamma$ und $\beta=\delta$ ist.

Zwei imaginäre Grössen von der Form

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha-\beta\sqrt{-1}$$

heissen conjugirte imaginäre Grössen.

Sowohl einander gleiche, als auch conjugirte imaginäre Grössen haben offenbar gleiche Moduli.

§. 51.

1. Die Summe der imaginären Grössen

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha_1+\beta_1\sqrt{-1},\ \alpha_2+\beta_2\sqrt{-1},\ \alpha_3+\beta_3\sqrt{-1},\ldots\ldots$$

ist

$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+(\beta+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots)\sqrt{-1}.$$

2. Die Differenz der imaginären Grössen

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1}$$

ist

$$\alpha-\gamma+(\beta-\delta)\sqrt{-1}.$$

3. Das Product der imaginären Grössen

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1}$$

ist

$$\alpha\gamma-\beta\delta+(\alpha\delta+\beta\gamma)\sqrt{-1}.$$

4. Setzt man

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}=p+q\sqrt{-1},$$

so muss

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=(\gamma+\delta\sqrt{-1})\ (p+q\sqrt{-1}),$$

d. i. nach 3.

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\gamma p-\delta q+(\delta p+\gamma q)\sqrt{-1},$$

und folglich nach §. 50.

$$\alpha = \gamma p - \delta q,\ \beta = \delta p + \gamma q$$

sein. Bestimmt man aus diesen beiden Gleichungen p und q, so erhält man

$$p = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2},\ q = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2},$$

und folglieh nach dem Obigen

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\sqrt{-1}.$$

Für $\delta = 0$ ergiebt sich hieraus

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\sqrt{-1}.$$

5. Nach 3. ist

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1}) = \alpha\lambda - \beta\mu + (\alpha\mu + \beta\lambda)\sqrt{-1},$$
$$(\gamma + \delta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1}) = \gamma\lambda - \delta\mu + (\gamma\mu + \delta\lambda)\sqrt{-1},$$

und folglich

$$\frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})}{(\gamma + \delta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})} = \frac{\alpha\lambda - \beta\mu + (\alpha\mu + \beta\lambda)\sqrt{-1}}{\gamma\lambda - \delta\mu + (\gamma\mu + \delta\lambda)\sqrt{-1}}.$$

Also ist nach 4.

$$\frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})}{(\gamma + \delta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})} = \frac{(\alpha\lambda - \beta\mu)(\gamma\lambda - \delta\mu) + (\alpha\mu + \beta\lambda)(\gamma\mu + \delta\lambda)}{(\gamma\lambda - \delta\mu)^2 + (\gamma\mu + \delta\lambda)^2}$$
$$+ \frac{(\alpha\mu + \beta\lambda)\ (\gamma\lambda - \delta\mu) - (\alpha\lambda - \beta\mu)\ (\gamma\mu + \delta\lambda)}{(\gamma\lambda - \delta\mu)^2 + (\gamma\mu + \delta\lambda)^2}\sqrt{-1},$$

oder, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$\frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})}{(\gamma + \delta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\sqrt{-1}.$$

Weil nun nach 4.

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\sqrt{-1}$$

ist, so ist

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})}{(\gamma + \delta\sqrt{-1})\ (\lambda + \mu\sqrt{-1})},$$

d. h. der Bruch

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}}$$

bleibt unverändert, wenn man seinen Zähler und seinen Nenner mit derselben Grösse multiplicirt.

Also ist auch

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})\ (\gamma - \delta\sqrt{-1})}{(\gamma + \delta\sqrt{-1})\ (\gamma - \delta\sqrt{-1})},$$
$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})\ (\alpha - \beta\sqrt{-1})}{(\gamma + \delta\sqrt{-1})\ (\alpha - \beta\sqrt{-1})};$$

d. i. nach 3.

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}=\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\gamma-\delta\sqrt{-1})}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta-(\alpha\delta-\beta\gamma)\sqrt{-1}}{\gamma^2+\delta^2},$$

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\gamma+\delta\sqrt{-1})(\alpha-\beta\sqrt{-1})}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\gamma+\beta\delta+(\alpha\delta-\beta\gamma)\sqrt{-1}}.$$

6. Weil nach 4.

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=\frac{\alpha\lambda+\beta\mu}{\lambda^2+\mu^2}+\frac{\beta\lambda-\alpha\mu}{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{-1},$$

$$\frac{\gamma+\delta\sqrt{-1}}{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=\frac{\gamma\lambda+\delta\mu}{\lambda^2+\mu^2}+\frac{\delta\lambda-\gamma\mu}{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{-1}$$

ist, so ist

$$\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})}{(\gamma+\delta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})}=\frac{\alpha\lambda+\beta\mu+(\beta\lambda-\alpha\mu)\sqrt{-1}}{\gamma\lambda+\delta\mu+(\delta\lambda-\gamma\mu)\sqrt{-1}},$$

und folglich nach 4.

$$\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})}{(\gamma+\delta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})}=\frac{(\alpha\lambda+\beta\mu)(\gamma\lambda+\delta\mu)+(\beta\lambda-\alpha\mu)(\delta\lambda-\gamma\mu)}{(\gamma\lambda+\delta\mu)^2+(\delta\lambda-\gamma\mu)^2}$$
$$+\frac{(\beta\lambda-\alpha\mu)(\gamma\lambda+\delta\mu)-(\alpha\lambda+\beta\mu)(\delta\lambda-\gamma\mu)}{(\gamma\lambda+\delta\mu)^2+(\delta\lambda-\gamma\mu)^2}\sqrt{-1},$$

oder, wie man mittelst leichter Rechnung findet,

$$\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})}{(\gamma+\delta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\sqrt{-1}.$$

Weil nun nach 4.

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\sqrt{-1}$$

ist, so ist

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}=\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})}{(\gamma+\delta\sqrt{-1}):(\lambda+\mu\sqrt{-1})},$$

und der Bruch

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}$$

wird also nicht geändert, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Grösse dividirt.

§. 52.

Lehrsatz. Jede imaginäre Grösse $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ kann, wenn der Modulus derselben der Kürze wegen durch ϱ bezeichnet wird, auf die Form

$$\varrho\,(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})$$

gebracht werden, wo die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen.

Beweis. Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir zeigen, dass sich die Grössen ϱ und φ so bestimmen lassen, dass der Gleichung

$$\alpha \pm \beta \sqrt{-1} = \varrho (\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})$$

genügt wird, und dass bei dieser Bestimmung ϱ den Werth des Modulus $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ erhält. Der obigen Gleichung wird aber zufolge §. 50. genügt, wenn man die Grössen ϱ und φ so bestimmt, dass sie den beiden Gleichungen

$$\varrho \cos\varphi = \alpha, \quad \varrho \sin\varphi = \beta$$

zugleich genügen. Quadrirt man auf beiden Seiten dieser Gleichungen, und addirt sie dann zu einander, so erhält man

$$\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

wo die Quadratwurzel positiv genommen werden muss, da ϱ den Werth des Modulus der gegebenen imaginären Grösse haben soll. Dividirt man mit der ersten der beiden obigen Gleichungen in die zweite, so erhält man

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\beta}{\alpha},$$

und folglich, wenn wir durch $\operatorname{Arctang}\frac{\beta}{\alpha}$ den der goniometrischen Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$ entsprechenden Bogen bezeichnen, welcher den kleinsten absoluten Werth hat,

$$\varphi = \operatorname{Arctang}\frac{\beta}{\alpha} + \varkappa\pi,$$

wo $\varkappa$ eine ganze Zahl bezeichnet, über die nun die folgende Bestimmung gegeben werden muss.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt

$$\cos\varphi = (-1)^\varkappa . \cos\operatorname{Arctang}\frac{\beta}{\alpha}, \quad \sin\varphi = (-1)^\varkappa . \sin\operatorname{Arctang}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Da nun $\operatorname{Arctang}\frac{\beta}{\alpha}$ den der goniometrischen Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$ entsprechenden Bogen bezeichnet, welcher den kleinsten absoluten Werth hat, so ist $\cos\operatorname{Arctang}\frac{\beta}{\alpha}$ immer positiv, $\sin\operatorname{Arctang}\frac{\beta}{\alpha}$ dagegen ist positiv oder negativ, jenachdem $\frac{\beta}{\alpha}$ positiv oder negativ ist. Also ist

$$\cos\operatorname{Arctang}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}}, \quad \sin\operatorname{Arctang}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}},$$

die Quadratwurzel positiv genommen, und folglich

$$\cos\operatorname{Arctang}\frac{\beta}{\alpha} = \pm\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin\operatorname{Arctang}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem α positiv oder negativ ist, woraus sich ferner unmittelbar ergiebt, dass immer

$$\cos \operatorname{Arctang} \frac{\beta}{\alpha} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin \operatorname{Arctang} \frac{\beta}{\alpha} = \pm \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

und folglich

$$\varrho \cos \operatorname{Arctang} \frac{\beta}{\alpha} = \pm \alpha, \quad \varrho \sin \operatorname{Arctang} \frac{\beta}{\alpha} = \pm \beta$$

ist, wenn man nur immer die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem α positiv oder negativ ist. Folglich ist nach dem Obigen

$$\varrho \cos \varphi = \pm (-1)^{x} . \alpha, \quad \varrho \sin \varphi = \pm (-1)^{x} . \beta,$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem α positiv oder negativ ist. Nimmt man nun aber die ganze Zahl x gerade oder ungerade, jenachdem α positiv oder negativ ist, so ist jederzeit

$$\varrho \cos \varphi = \alpha, \quad \varrho \sin \varphi = \beta,$$

wie es dem Obigen zufolge erforderlich ist.

Also ist

$$\varphi = \operatorname{Arctang} \frac{\beta}{\alpha} + x\pi,$$

wenn man nur die an sich übrigens ganz willkührliche ganze Zahl x gerade oder ungerade nimmt, jenachdem α positiv oder negativ ist, wodurch nun sowohl ϱ, als auch φ, vollkommen bestimmt, und unser Satz mit aller Strenge bewiesen ist.

§. 53.

Lehrsatz. Das Product der imaginären Grössen

$$\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1}, \cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1\sqrt{-1}, \cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_2\sqrt{-1}, \ldots,$$

wo $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ ganz beliebige Bogen oder Winkel bezeichnen, ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$\cos(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots) \pm \sin(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots)\sqrt{-1}.$$

Beweis. Nach §. 51. 3. ist

$$\begin{aligned}(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})(\cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1\sqrt{-1}) \\ = \cos\varphi\cos\varphi_1 - \sin\varphi\sin\varphi_1 \\ \pm (\sin\varphi\cos\varphi_1 + \cos\varphi\sin\varphi_1)\sqrt{-1},\end{aligned}$$

d. i. nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\begin{aligned}(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})(\cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1\sqrt{-1}) \\ = \cos(\varphi + \varphi_1) \pm \sin(\varphi + \varphi_1)\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}&(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})(\cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1\sqrt{-1})(\cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_2\sqrt{-1}) \\ &= \{\cos(\varphi + \varphi_1) \pm \sin(\varphi + \varphi_1)\sqrt{-1}\}(\cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_2\sqrt{-1}) \\ &= \cos(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2) \pm \sin(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2)\sqrt{-1},\end{aligned}$$

und folglich

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})(\cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1\sqrt{-1})(\cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_2\sqrt{-1})$$
$$(\cos\varphi_3 \pm \sin\varphi_3\sqrt{-1})$$
$$= \{\cos(\varphi+\varphi_1+\varphi_2) \pm \sin(\varphi+\varphi_1+\varphi_2)\sqrt{-1}\}(\cos\varphi_3 \pm \sin\varphi_3\sqrt{-1})$$
$$= \cos(\varphi+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3) \pm \sin(\varphi+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\sqrt{-1}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und die allgemeine Gültigkeit unsers Satzes liegt mit völliger Deutlichkeit vor Augen.

§. 54.

Lehrsatz. Für jedes positive oder negative ganze n ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi\sqrt{-1}.$$

Beweis. Wenn n eine positive ganze Zahl ist, so ergiebt sich aus §. 53. auf der Stelle, wenn man dort $\varphi=\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\ldots$ setzt, und sich die Reihe $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ aus n Gliedern bestehend denkt,

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi\sqrt{-1}.$$

Wenn ferner n eine negative ganze Zahl ist, so setze man

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \frac{1}{(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{-n}}.$$

Weil nun $-n$ eine positive ganze Zahl ist, so ist nach dem so eben Bewiesenen

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{-n} = \cos(-n\varphi) \pm \sin(-n\varphi)\sqrt{-1}.$$

Nach bekannten goniometrischen Sätzen ist aber

$$\cos(-n\varphi) = \cos n\varphi,\quad \sin(-n\varphi) = -\sin n\varphi,$$

und folglich

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{-n} = \cos n\varphi \mp \sin n\varphi\sqrt{-1};$$

also

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \frac{1}{\cos n\varphi \mp \sin n\varphi\sqrt{-1}}.$$

Weil nun nach §. 51. 5.

$$\frac{1}{\cos n\varphi \mp \sin n\varphi\sqrt{-1}} = \frac{\cos n\varphi \pm \sin n\varphi\sqrt{-1}}{\cos n\varphi^2 + \sin n\varphi^2},$$

d. i. nach einer bekannten goniometrischen Formel

$$\frac{1}{\cos n\varphi \mp \sin n\varphi\sqrt{-1}} = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi\sqrt{-1}$$

ist, so ist

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1},$$

und unser Satz ist also jetzt vollständig bewiesen.

§. 55.

Zusatz. Wenn m und n positive oder negative ganze Zahlen sind, so ist immer

$$(\cos\frac{m}{n}\varphi \pm \sin\frac{m}{n}\varphi\sqrt{-1})^n = (\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^m.$$

Nach §. 54. ist nämlich

$$(\cos\frac{m}{n}\varphi \pm \sin\frac{m}{n}\varphi\sqrt{-1})^n = \cos m\varphi \pm \sin m\varphi\sqrt{-1}$$

und

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^m = \cos m\varphi \pm \sin m\varphi\sqrt{-1},$$

woraus der zu beweisende Satz unmittelbar erhellet.

§. 56.

Die Gleichung

$$1.\quad (\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \varrho(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1}),$$

wo m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, n eine beliebige positive ganze Zahl, ϱ eine reelle positive Grösse, ψ ein reeller Bogen sein soll, ist jederzeit erfüllt, wenn die Gleichung

$$2.\quad (\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^m = \varrho^n(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^n$$

erfüllt ist. Weil aber nach §. 54.

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^m = \cos m\varphi \pm \sin m\varphi\sqrt{-1},$$

$$(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^n = \cos n\psi + \sin n\psi\sqrt{-1}$$

ist, so ist die Gleichung 2., und folglich auch die Gleichung 1. jederzeit erfüllt, wenn die Gleichung

$$3.\quad \cos m\varphi \pm \sin m\varphi\sqrt{-1} = \varrho^n(\cos n\psi + \sin n\psi\sqrt{-1})$$

erfüllt ist. Diese Gleichung ist aber erfüllt, wenn die beiden Gleichungen

$$4.\quad \cos m\varphi = \varrho^n\cos n\psi,\ \pm\sin m\varphi = \varrho^n\sin n\psi,$$

oder die beiden Gleichungen

$$5.\quad \cos(\pm m\varphi) = \varrho^n\cos n\psi,\ \sin(\pm m\varphi) = \varrho^n\sin n\psi$$

erfüllt sind. Quadrirt man auf beiden Seiten dieser Gleichungen und addirt die erhaltenen Gleichungen dann zu einander, so ergiebt sich

$$\varrho^{2n} = 1,$$

und folglich, weil ϱ reell und positiv sein soll, $\varrho = 1$. Hierdurch ist ϱ bestimmt, und man muss nun also ψ noch so bestimmen, dass den beiden Gleichungen

$$6.\quad \cos(\pm m\varphi) = \cos n\psi,\ \sin(\pm m\varphi) = \sin n\psi$$

genügt wird.

Nach bekannten goniometrischen Sätzen erfordert die erste dieser beiden Gleichungen, dass, indem x eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, entweder

$$n\psi = 2x\pi \pm m\varphi$$

oder

$$n\psi = 2\varkappa\pi \mp m\varphi$$

ist. Die zweite der beiden obigen Gleichungen erfordert dagegen, dass entweder

$$n\psi = 2\varkappa\pi \pm m\varphi$$

oder

$$n\psi = (2\varkappa + 1)\pi \mp m\varphi$$

ist. Da nun den beiden in Rede stehenden Gleichungen zugleich genügt werden soll, so muss man

$$n\psi = 2\varkappa\pi \pm m\varphi,$$

also

$$\psi = \frac{2\varkappa\pi \pm m\varphi}{n}$$

setzen, und es ist also nach dem Obigen für jedes positive oder negative ganze $\varkappa$

$$7.\quad (\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{2\varkappa\varphi \pm m\varphi}{n} + \sin\frac{2\varkappa\pi \pm m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

oder, weil

$$\cos\frac{2\varkappa\pi \pm m\varphi}{n} = \cos\frac{\pm(m\varphi \pm 2\varkappa\pi)}{n} = \cos\frac{m\varphi \pm 2\varkappa\pi}{n},$$

$$\sin\frac{2\varkappa\pi \pm m\varphi}{n} = \sin\frac{\pm(m\varphi \pm 2\varkappa\pi)}{n} = \pm\sin\frac{m\varphi \pm 2\varkappa\pi}{n}$$

ist, für jedes positive oder negative ganze $\varkappa$

$$8.\quad (\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\varphi \pm 2\varkappa\pi}{n} \pm \sin\frac{m\varphi \pm 2\varkappa\pi}{n}\sqrt{-1},$$

wo aber auf der Stelle erhellet, dass man, unbeschadet der nöthigen Allgemeinheit,

$$9.\quad (\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n} \pm \sin\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$

setzen kann.

Man sieht hieraus, dass die Grösse

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

weil $\varkappa$ jede beliebige positive oder negative ganze Zahl sein kann, nicht bloss einen, sondern eigentlich unendlich viele Werthe hat, wobei sich aber immer noch fragen lässt, ob diese unendlich vielen Werthe auch sämmtlich unter einander ungleich sind, oder ob nicht vielleicht unter denselben welche vorkommen, die einander gleich sind. Bei der Beantwortung dieser wichtigen Frage unterscheiden wir die folgenden Fälle.

I. n sei eine gerade Zahl, nämlich

$$n = 2\mu.$$

Ueberhaupt sei nun

$$\varkappa = \pm(\lambda\mu + \mu'),$$

wo λ eine positive ganze Zahl und $\mu' < \mu$ sein soll, so ist

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\pm2(\lambda\mu+\mu')\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\pm2(\lambda\mu+\mu')\pi}{n};$$

d. i., weil $n=2\mu$ ist,

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\cos\left(\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}\pm\lambda\pi\right),$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\sin\left(\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}\pm\lambda\pi\right).$$

Ist nun λ eine gerade Zahl, so ist

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n};$$

folglich

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$=\cos\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$=\cos\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Ist aber λ eine ungerade, also $\lambda+1$ eine gerade Zahl, so kann man

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\cos\left\{\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}\pm(\lambda+1)\pi\mp\pi\right\},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\sin\left\{\frac{m\varphi\pm2\mu'\pi}{n}\pm(\lambda+1)\pi\mp\pi\right\}$$

oder

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\cos\left\{\frac{m\varphi\mp2(\mu-\mu')\pi}{n}\pm(\lambda+1)\pi\right\},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\sin\left\{\frac{m\varphi\mp2(\mu-\mu')\pi}{n}\mp(\lambda+1)\pi\right\}$$

setzen. Dann ist, weil $\lambda+1$ eine gerade Zahl ist,

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\mp2(\mu-\mu')\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\mp2(\mu-\mu')\pi}{n},$$

und folglich

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$=\cos\frac{m\varphi\mp2(\mu-\mu')\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\mp2(\mu-\mu')\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi+2x\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi+2x\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$=\cos\frac{m\varphi\mp2(\mu-\mu')\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\mp2(\mu-\mu')\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Aus dieser Darstellung geht deutlich hervor, dass man in der Gleichung

$$(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}=\cos\frac{m\varphi+2x\pi}{n}\pm\sin\frac{m\varphi+2x\pi}{n}\sqrt{-1}$$

bloss

$$x=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots\ \pm\mu$$

zu setzen braucht, weil nach dem Vorhergehenden unter den Werthen von

$$(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

welche man auf diese Art erhält, in der That alle übrigen enthalten sind.

Für

$$(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

erhält man auf diese Art die folgenden Werthe:

$$\cos\frac{m\varphi}{n}+\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}\sqrt{-1};$$

und eben so erhält man für

$$(\cos\varphi-\sin\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden Werthe:

$$\cos\frac{m\varphi}{n}-\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

In jeder dieser beiden Reihen sind offenbar $n+1$ Werthe enthalten, und es frägt sich nun, ob in jeder der beiden Reihen diese $n+1$ Werthe sämmtlich unter einander ungleich sind. Sollten aber zwei Werthe in einer der beiden Reihen einander gleich sein, so müsste, indem weder $2\lambda'$, noch $2\lambda''$ grösser als n ist, entweder zugleich

$$\cos\frac{m\varphi\pm 2\lambda'\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\pm 2\lambda''\pi}{n},\ \sin\frac{m\varphi\pm 2\lambda'\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\pm 2\lambda''\pi}{n}$$

oder zugleich

$$\cos\frac{m\varphi\pm 2\lambda'\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\mp 2\lambda''\pi}{n},\ \sin\frac{m\varphi\pm 2\lambda'\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\mp 2\lambda''\pi}{n}$$

sein. Im ersten Falle müsste, wenn x eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, nach bekannten goniometrischen Sätzen

$$\frac{m\varphi\pm 2\lambda'\pi}{n}=\frac{m\varphi\pm 2\lambda''\pi}{n}+2x\pi,$$

d. i.

$$\pm\lambda'=\pm\lambda''+xn,\ \pm(\lambda'-\lambda'')=xn$$

sein, welches, da weder λ', noch λ'' grösser als $\frac{1}{2}n$ ist, offenbar ungereimt ist. Im zweiten Falle müsste

$$\frac{m\varphi\pm 2\lambda'\pi}{n}=\frac{m\varphi\mp 2\lambda''\pi}{n}+2x\pi,$$

d. i.

$$\pm\lambda'=\mp\lambda''+xn,\ \pm(\lambda'+\lambda'')=xn$$

sein, welches, weil weder λ', noch λ'' grösser als $\frac{1}{2}n$ ist, nur dann möglich ist, wenn

$$\lambda'=\lambda''=\tfrac{1}{2}n,\ 2\lambda'=2\lambda''=n$$

ist, und in der That ist auch

$$\cos\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}=\cos\left(\frac{m\varphi}{n}\pm\pi\right)=-\cos\frac{m\varphi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}=\sin\left(\frac{m\varphi}{n}\pm\pi\right)=-\sin\frac{m\varphi}{n},$$

so dass sich also sowohl die beiden Werthe

$$\cos\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}\sqrt{-1},$$

als auch die beiden Werthe

$$\cos\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}\sqrt{-1}$$

auf einen Werth reduciren.

In den beiden obigen Reihen sind also, mit Ausnahme der beiden letzten, alle Werthe unter einander ungleich.

Für

$$(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

erhält man die folgenden n, sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\cos\frac{m\varphi}{n}+\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi\pm (n-2)\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm (n-2)\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$-\cos\frac{m\varphi}{n}-\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}$$

oder

$$\pm\left(\cos\frac{m\varphi}{n}+\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi\pm (n-2)\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm (n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Für

$$(\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

erhält man die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\cos\frac{m\varphi}{n}-\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi\pm (n-2)\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm (n-2)\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$-\cos\frac{m\varphi}{n}+\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}$$

oder

$$\pm\left(\cos\frac{m\varphi}{n}-\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi\pm(n-2)\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

II. n sei eine ungerade Zahl, nämlich

$$n=2\mu+1.$$

Ueberhaupt sei

$$2\varkappa=\pm\{(2\mu+1)\lambda+\mu'\},$$

wo λ eine positive ganze Zahl und $\mu'<2\mu+1$ ist, so ist

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\pm\{(2\mu+1)\lambda+\mu'\}\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\pm\{(2\mu+1)\lambda+\mu'\}\pi}{n};$$

d. i., weil $n=2\mu+1$ ist,

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\cos\left(\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n}\pm\lambda\pi\right),$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\sin\left(\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n}\pm\lambda\pi\right).$$

Ist nun λ eine gerade Zahl, so ist

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n}$$

$$\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n},$$

und folglich

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$=\cos\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi+2\varkappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$=\cos\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm\mu'\pi}{n}\sqrt{-1},$$

wobei man zu bemerken hat, dass in diesem Falle, wegen der Gleichung

$$2\varkappa = \pm \{(2\mu + 1)\lambda + \mu'\},$$

μ' eine gerade Zahl und nicht grösser als 2μ ist.

Ist λ eine ungerade, also $\lambda + 1$ eine gerade Zahl, so kann man wieder

$$\cos\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n} = \cos\left\{\frac{m\varphi \pm \mu'\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi \mp \pi\right\},$$

$$\sin\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n} = \sin\left\{\frac{m\varphi \pm \mu'\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi \mp \pi\right\}$$

oder

$$\cos\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n} = \cos\left\{\frac{m\varphi \mp (n - \mu')\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi\right\},$$

$$\sin\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n} = \sin\left\{\frac{m\varphi \mp (n - \mu')\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi\right\};$$

d. i., weil $\lambda + 1$ eine gerade Zahl ist,

$$\cos\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n} = \cos\frac{m\varphi \mp (n - \mu')\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n} = \sin\frac{m\varphi \mp (n - \mu')\pi}{n}$$

setzen, so dass also in diesem Falle

$$\cos\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$= \cos\frac{m\varphi \mp (n - \mu')\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \mp (n - \mu')\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$= \cos\frac{m\varphi \mp (n - \mu')\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \mp (n - \mu')\pi}{n}\sqrt{-1}$$

ist. Wegen der Gleichung

$$2\varkappa = \pm \{(2\mu + 1)\lambda + \mu'\}$$

ist in diesem Falle μ' ungerade, und folglich, weil n ungerade ist, $n - \mu'$ gerade; auch erhellet auf der Stelle, dass $n - \mu'$ nicht grösser als 2μ sein kann.

Aus dieser Darstellung geht hervor, dass man im vorliegenden Falle in der Gleichung

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n} \pm \sin\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$

bloss

$$\varkappa = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm \mu$$

zu setzen braucht, weil auf die dadurch sich ergebenden Werthe von

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

nach dem Vorhergehenden offenbar alle übrigen zurückkommen.

Für

$$(\cos\varphi + \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

erhält man auf diese Weise die folgenden Werthe:

$$\cos\frac{m\varphi}{n} + \sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n}\sqrt{-1}$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n}\sqrt{-1};$$

und eben so ergeben sich für

$$(\cos\varphi - \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden Werthe:

$$\cos\frac{m\varphi}{n} - \sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

In jeder dieser beiden Reihen sind offenbar n Werthe enthalten, und es frägt sich nun, ob in jeder derselben alle darin enthaltenen n Werthe sämmtlich unter einander ungleich sind. Sollten aber in einer der beiden Reihen zwei Werthe einander gleich sein, so müsste, indem weder $2\lambda'$, noch $2\lambda''$ grösser als $n-1$ ist, entweder zugleich

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \cos\frac{m\varphi \pm 2\lambda''\pi}{n},\quad \sin\frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \sin\frac{m\varphi \pm 2\lambda''\pi}{n}$$

oder zugleich

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \cos\frac{m\varphi \mp 2\lambda''\pi}{n},\quad \sin\frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \sin\frac{m\varphi \mp 2\lambda''\pi}{n}$$

sein. Im ersten Falle erhält man wie in I.

$$\pm(\lambda' - \lambda'') = \varkappa n,$$

im zweiten dagegen

$$\pm(\lambda' + \lambda'') = \varkappa n.$$

Beides ist unmöglich, weil weder λ', noch λ'' grösser als $\frac{1}{2}(n-1)$ ist. Daher sind die in jeder der beiden obigen Reihen enthaltenen Werthe sämmtlich unter einander ungleich. Die erste Reihe liefert n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe von

$$(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}};$$

die zweite Reihe liefert n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe von

$$(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}.$$

III. Fasst man alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich, dass man, um die sämmtlichen n unter einander ungleichen Werthe der Grösse

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

zu erhalten, in der Gleichung

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n} \pm \sin\frac{m\varphi + 2\varkappa\pi}{n}\sqrt{-1}$$

die Grösse $\varkappa$ nicht grösser als $+\frac{1}{2}n$ und nicht kleiner als $-\frac{1}{2}n$ zu nehmen braucht, so dass man also für $\varkappa$ immer bloss alle die von $-\frac{1}{2}n$ bis $+\frac{1}{2}n$ sich findenden ganzen Zahlen zu setzen braucht, wobei man jedoch zu bemerken hat, dass, wenn n eine gerade Zahl ist, der erste und letzte der auf diese Weise erhaltenen Werthe von

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

einander gleich sind, in dem in Rede stehenden Falle folglich immer der eine der beiden in Rede stehenden äussersten Werthe, etwa der letzte, d. i. der dem Werthe $+\frac{1}{2}n$ von $\varkappa$ entsprechende Werth, weggelassen werden muss. Befolgt man diese Regeln, so erhält man immer n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe von

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}.$$

§. 57.

I. Soll man die imaginären Grössen

$$\alpha \pm \beta\sqrt{-1},\ \alpha_1 \pm \beta_1\sqrt{-1},\ \alpha_2 \pm \beta_2\sqrt{-1},\ \alpha_3 \pm \beta_3\sqrt{-1}, \ldots\ldots$$

in einander multipliciren, so bringe man dieselben zuvörderst nach §. 52. auf die Form

$$\varrho(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1}),$$

$$\varrho_1(\cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1\sqrt{-1}),$$

$$\varrho_2(\cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_2\sqrt{-1}),$$

$$\varrho_3(\cos\varphi_3 \pm \sin\varphi_3\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

Dann ist nach §. 53.

$$(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})(\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1})(\alpha_2\pm\beta_2\sqrt{-1})(\alpha_3\pm\beta_3\sqrt{-1})\ldots\ldots$$
$$=\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3\ldots\{\cos(\varphi+\varphi_1+\varphi_2+\ldots.)\pm\sin(\varphi+\varphi_1+\varphi_2+\ldots)\sqrt{-1}\}.$$

II. Soll man die imaginäre Grösse $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ durch die imaginäre Grösse $\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1}$ dividiren; so bringe man diese beiden Grössen nach §. 52. erst respective auf die Form

$$\varrho(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1}) \text{ und } \varrho_1(\cos\varphi_1\pm\sin\varphi_1\sqrt{-1}).$$

Dann ist

$$\frac{\alpha\pm\beta\sqrt{-1}}{\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1}}=\frac{\varrho}{\varrho_1}\cdot\frac{\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1}}{\cos\varphi_1\pm\sin\varphi_1\sqrt{-1}}$$

oder

$$\frac{\alpha\pm\beta\sqrt{-1}}{\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1}}=\frac{\varrho}{\varrho_1}(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})(\cos\varphi_1\pm\sin\varphi_1\sqrt{-1})^{-1}.$$

Weil nun aber nach §. 54.

$$(\cos\varphi_1\pm\sin\varphi_1\sqrt{-1})^{-1}=\cos\varphi_1\mp\sin\varphi_1\sqrt{-1}$$

ist; so ist

$$\frac{\alpha\pm\beta\sqrt{-1}}{\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1}}=\frac{\varrho}{\varrho_1}(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})(\cos\varphi_1\mp\sin\varphi_1\sqrt{-1})$$

oder

$$\frac{\alpha\pm\beta\sqrt{-1}}{\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1}}=\frac{\varrho}{\varrho_1}(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})\{\cos(-\varphi_1)\pm\sin(-\varphi_1)\sqrt{-1}\},$$

und folglich nach §. 53.

$$\frac{\alpha\pm\beta\sqrt{-1}}{\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1}}=\frac{\varrho}{\varrho_1}\{\cos(\varphi-\varphi_1)\pm\sin(\varphi-\varphi_1)\sqrt{-1}\}.$$

III. Soll man die imaginäre Grösse $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ auf die $n$te Potenz, wo n eine positive oder negative ganze Zahl sein soll, erheben; so bringe man dieselbe nach §. 52. wieder zuerst auf die Form

$$\varrho(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1}).$$

Dann ist

$$(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})^n=\varrho^n(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})^n,$$

und folglich nach §. 54.

$$(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})^n=\varrho^n(\cos n\varphi\pm\sin n\varphi\sqrt{-1}).$$

IV. Auch wenn man die imaginäre Grösse $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ auf die Potenz mit dem Exponenten $\frac{m}{n}$ erheben soll, bringe man dieselbe nach §. 52. zuerst auf die Form

$$\varrho(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1}),$$

und unterscheide dann die folgenden Fälle.

1. Wenn n eine gerade Zahl ist; so hat nach §. 56.

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden n sämmtlich von einander verschiedenen Werthe:

$$\pm\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi}{n}+\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm(n-2)\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1});$$

und

$$(\alpha-\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

hat die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\pm\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi}{n}-\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm(n-2)\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}).$$

2. Wenn n eine ungerade Zahl ist; so hat

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi}{n}+\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1});$$

und

$$(\alpha-\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

hat die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi}{n}-\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi\pm(n-1)\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}).$$

Weil nun aber für jedes ψ und ψ_1 bekanntlich

$$(\cos\psi\pm\sin\psi\sqrt{-1})(\cos\psi_1\pm\sin\psi_1\sqrt{-1})$$
$$=\cos(\psi+\psi_1)\pm\sin(\psi+\psi_1)\sqrt{-1}$$

ist; so kann man, wenn der Kürze wegen

$$\cos\frac{m\varphi}{n}+\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}=\Phi,\quad\cos\frac{m\varphi}{n}-\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1}=\Phi_1$$

gesetzt wird, die obigen Werthe von

$$(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

auch auf folgende Art ausdrücken.

1. Wenn n eine gerade Zahl ist; so hat

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\pm\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi,$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{2\pi}{n}\pm\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{4\pi}{n}\pm\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{6\pi}{n}\pm\sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}).$$

Dagegen hat

$$(\alpha-\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\pm\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1,$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{2\pi}{n}\pm\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{4\pi}{n}\pm\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{6\pi}{n}\pm\sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}).$$

2. Wenn n eine ungerade Zahl ist; so hat

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi,$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{2\pi}{n}\pm\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{4\pi}{n}\pm\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{6\pi}{n}\pm\sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi(\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}).$$

Dagegen hat

$$(\alpha - \beta\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1,$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{2\pi}{n} \pm \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{4\pi}{n} \pm \sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{6\pi}{n} \pm \sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\Phi_1(\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}).$$

§. 58.

Lehrsatz. Der Modulus des Products zweier imaginären Grössen ist das Product der Moduli der beiden imaginären Factoren.

Beweis. Die beiden gegebenen imaginären Grössen seien

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1};$$

so sind die Moduli respective

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}},\ (\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Das Product der beiden in Rede stehenden imaginären Grössen ist nach §. 51. 3.

$$\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 + (\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1)\sqrt{-1},$$

und der Modulus dieses Products ist also

$$\{(\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1)^2 + (\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Weil nun aber, wie man leicht findet,

$$(\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1)^2 + (\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\ (\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2)$$

ist; so ist auch

$$\{(\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1)^2 + (\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1)^2\}^{\frac{1}{2}} = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2)^{\frac{1}{2}},$$

woraus die Richtigkeit des Satzes unmittelbar erhellet.

§. 59.

Zusatz. Der Modulus des Products einer beliebigen Anzahl imaginärer Grössen ist das Product der Moduli aller imaginären Factoren.

Durch successive Anwendung des im vorigen Paragraphen bewiesenen Satzes erhellet auf der Stelle die Richtigkeit des vorliegenden Satzes.

§. 60.

Lehrsatz. **Der Modulus der Summe und der Modulus der Differenz zweier imaginären Grössen sind jederzeit Mittelgrössen zwischen der Summe und dem absoluten Werthe der Differenz der Moduli dieser beiden imaginären Grössen.**

Beweis. Bezeichnen wir die beiden gegebenen imaginären Grössen durch

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1};$$

so ist nach §. 51. 1. 2.

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}\pm(\gamma+\delta\sqrt{-1})=\alpha\pm\gamma+(\beta\pm\delta)\sqrt{-1},$$

und der Modulus von

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}\pm(\gamma+\delta\sqrt{-1})$$

ist folglich

$$\{(\alpha\pm\gamma)^2+(\beta\pm\delta)^2\}^{\frac{1}{2}}=\{\alpha^2+\beta^2\pm2(\alpha\gamma+\beta\delta)+\gamma^2+\delta^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Weil nun, wie man durch leichte Rechnung findet,

$$(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2=(\alpha^2+\beta^2)\ (\gamma^2+\delta^2)$$

ist; so ist

$$(\alpha\gamma+\beta\delta)^2 \overline{\overline{<}} (\alpha^2+\beta^2)\ (\gamma^2+\delta^2),$$

und der absolute Werth von $\alpha\gamma+\beta\delta$ ist folglich nie grösser als

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Daher ist offenbar die Grösse

$$\alpha\gamma+\beta\delta$$

jederzeit eine Mittelgrösse zwischen den beiden Grössen

$$-(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}},\ (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}},$$

oder nach der aus §. 33. bekannten Bezeichnung der Mittelgrössen ist

$$\alpha\gamma+\beta\delta=M\{-(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}},\ (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Dass aber auch

$$-(\alpha\gamma+\beta\delta)$$

eine Mittelgrösse zwischen den beiden Grössen

$$-(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}},\ (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}$$

ist, ist klar, und man kann also auch die vorstehende Gleichung auf folgende Art schreiben:

$$\pm(\alpha\gamma+\beta\delta)=M\{-(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}},\ (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Hieraus ergiebt sich nach §. 37.

$$\pm2(\alpha\gamma+\beta\delta)=M\{-2(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}},\ 2(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}\},$$

und folglich nach §. 38.

$$\alpha^2+\beta^2\pm 2(\alpha\gamma+\beta\delta)+\gamma^2+\delta^2$$

$$=M\left\{\begin{matrix}\alpha^2+\beta^2-2(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}+\gamma^2+\delta^2,\\ \alpha^2+\beta^2+2(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\ (\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}+\gamma^2+\delta^2\end{matrix}\right\},$$

d. i.

$$\alpha^2+\beta^2\pm 2(\alpha\gamma+\beta\delta)+\gamma^2+\delta^2$$

$$=M\{[(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}-(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}]^2,\ [(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}+(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}]^2\}.$$

Folglich ist nach §. 39.

$$\{\alpha^2+\beta^2\pm 2(\alpha\gamma+\beta\delta)+\gamma^2+\delta^2\}^{\frac{1}{2}}$$

eine Mittelgrösse zwischen dem absoluten Werthe der Differenz

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}-(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}$$

und der Summe

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}+(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Also ist nach dem Obigen auch

$$\{(\alpha\pm\gamma)^2+(\beta\pm\delta)^2\}^{\frac{1}{2}},$$

d. h. der Modulus der Grösse

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}\pm(\gamma+\delta\sqrt{-1}),$$

eine Mittelgrösse zwischen dem absoluten Werthe von

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}-(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}$$

und der Grösse

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}+(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}},$$

d. h. zwischen dem absoluten Werthe der Differenz und zwischen der Summe der Moduli der beiden imaginären Grössen

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1},$$

womit unser Satz also jetzt vollständig bewiesen ist.

§. 61.

Zusatz. Der Modulus der Summe mehrerer imaginären Grössen in beliebiger Anzahl ist nie grösser als die Summe der Moduli aller einzelnen zu einander addirten imaginären Grössen.

Weil der absolute Werth der Differenz zwischen zwei positiven Grössen nie grösser als die Summe dieser beiden positiven Grössen ist; so ergiebt sich aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze unmittelbar, dass der Modulus der Summe zweier imaginären Grössen nie grösser als die Summe der Moduli dieser beiden imaginären Grössen ist. Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes überzeugt man sich aber auf der Stelle von der Richtigkeit des zu beweisenden Satzes *).

---

*) An die in diesem Aufsatze in einem möglichst systematischen Ganzen zusammengestellten und mit strengen Beweisen versehenen Sätzen wird sich im folgenden Hefte unmittelbar eine Darstellung der neuesten höchst wichtigen Untersuchungen Cauchy's über die Entwickelung der Functionen in convergirende Reihen anschliessen. Dies wird die Zusammenstellung dieses meistens schon bekannten Sätze gewiss rechtfertigen.

XLI.

Noch etwas über Turners Eigenschaft der ungeraden Zahlen (Archiv T. I. Heft I. VII.).

Von dem

Herrn Doctor Hellerung

zu Wismar.

A. Die Summe der ersten N oder N_1 ungeraden Zahlen ist $= N^2$ oder $N_1{}^2$, wovon die grösste $= 2N - 1$ oder $2N_1 - 1$.

Setzt man nun $N = \frac{(n+1)n}{2}$ und $N_1 = \frac{n(n-1)}{2}$; so ist auch:

$$N^2 - N_1{}^2 = n^3 \text{ und } N - N_1 = n.$$

Daraus folgt nun:

1) Die Summe der n auf einander folgenden ungeraden Zahlen, deren kleinste $= 2N_1 + 1 = n(n-1) + 1$ und deren grösste $= 2N - 1 = (n+1)n - 1$ ist, ist $= n^3$ *).

2) folgt ebenso leicht:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = N^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

B. Die Summe der ersten N oder N_1 Zahlen der Form $4.\nu + 1$, ist $= N(2N-1)$ oder $N_1(2N_1 - 1)$, und die grösste dieser Zahlen ist $= 4N - 3$ oder $4N_1 - 3$.

Setzt man aber $N = n^2$ und $N_1 = (n-1)^2$; so wird:

$$N(2N-1) - N_1(2N_1 - 1) = (2n-1)^3 \text{ und } N - N_1 = 2n - 1;$$

daher ist also:

1) Die Summe der $2n - 1$ auf einander folgenden Zahlen der Form $4.\nu + 1$, deren kleinste $= 4N_1 + 1 = 4.(n-1)^2 + 1$ und deren grösste $= 4N - 3 = 4.n^2 - 3$ ist, ist $= (2n-1)^3$.

2) ist nun auch:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = N(2N-1) = n^2(2n^2 - 1).$$

Setzt man aber in A. 2. nun $2n$ statt n so ist auch:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (2n)^3 = n^2(2n+1)^2;$$

---

*) Dies ist der von Turner gefundene Satz, den aber schon Kaestner am Ende seiner Anal. endl. Grössen behandelt. H.

Hr. Doctor Hellerung hat mich zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass sich Turners Satz schon in Kaestners Analysis endlicher Grössen findet. Eine neue Behandlung desselben war aber, wie die Leser aus diesem Aufsatze jetzt sehen werden, immer wünschenswerth, interessant und erspriesslich. G.

daher subtrahendo:

$$2^3+4^3+6^3+\ldots.+(2n)^3=2\,.\,n^2(n+1)^2.$$

Ebendasselbe Resultat erhält man auch aus den Reihen, deren νte Glieder $=2\,.\,\nu$ und $4\,.\,\nu$ sind.

C. Die Summe der ersten N oder N_1 Glieder der Reihe aller geraden Zahlen, ist $=N\,.\,(N+1)$ oder $N_1\,.\,(N_1+1)$, und nimmt man den Werth von N und N_1 aus $A.$; so hat man

$$N\,.\,(N+1)-N_1\,.\,(N_1+1)=n^3+n;\text{ und } N-N_1=n.$$

Also ist 1) die Summe der n auf einander folgenden Glieder aller geraden Zahlen, deren kleinste $=2N_1+2=n\,(n-1)+2$ und deren grösste $=2N=(n+1)\,.\,n$ ist, $=n^3+n$; und

2) ist auch

$$\left.\begin{array}{l}1^3+2^3+3^3+\ldots.+n^3\\+1\;+2\;+3\;+\ldots.+n\end{array}\right\}=N(N+1)=\frac{(n+1)^2\,.\,n^2}{4}+\frac{(n+1)n}{4};$$

daher etc.

Und die Summe der ersten N oder N_1 Zahlen der Form $4\,.\,\nu$ ist $=2N(N+1)$ oder $2N_1\,.\,(N_1+1)$; nimmt man aber die Werthe von N und N_1 aus B., so hat man:

$$2N(N+1)-2N_1\,.\,(N_1+1)=(2n-1)^3+3(2n-1);\text{ und } N-N_1=2n-1;$$

d. h. 1) die Summe der $2n-1$ auf einander folgenden Zahlen von der Form $4\,.\,\nu$, deren kleinste $=4N_1+4=4(n-1)^2+4$ und deren grösste $=4N=4\,.\,n^2$ ist, ist $=(2n-1)^3+3\,.\,(2n-1)$.

2) Es ist

$$\left.\begin{array}{l}1^3+3^3+5^3+\ldots.+(2n-1)^3\\+3.[1\;+3\;+5\;+\ldots.+(2n-1)]\end{array}\right\}=2N(N+1)=2n^2(n^2+1)$$

daher: $1^3+3^3+5^3+\ldots.+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$, wie oben.

D. Wir wollen hier noch einen kurzen Beweis für die Summen der Quadrate der geraden und der ungeraden Zahlen, zur Ergänzung des in B. Gefundenen, geben.

Da man hat:

$$\begin{aligned}1^2&=1\\2^2&=1+3\\3^2&=1+3+5\\&\;\;\vdots\\n^2&=1+3+5+7+\ldots.+(2n-1)\end{aligned}$$

so ist auch:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=1\,.\,n+3\,.\,(n-1)+5\,.\,(n-2)+\ldots.+(2n-1)\,(n-n+1)$$

$$=\left\{\begin{array}{l}n\,.\,[(1+3+5+\ldots.+(2n-1)]\\-[1\,.\,3+2\,.\,5+3\,.\,7+\ldots.+(n-1)\,(2n-1)]\end{array}\right.$$

d. i. $Sn^2=n^3-S(2\,.\,n^2-3n+1)$; daher

$3\,.\,Sn^2=n^3+S(3n-1)=n^3+\frac{n(3n+1)}{2}$; woraus sogleich folgt:

$Sn^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; und wenn wir $2n$ statt n setzen, so ist auch $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$. Bezeichnen wir nun noch die Summen der Quadrate der ersten n geraden und ungeraden Zahlen mit $\Sigma(2n)^2$ und $\Sigma(2n-1)^2$, so haben wir auch

$\Sigma(2n)^2 + \Sigma(2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$; und nach oben ist auch:

$$\Sigma(2n)^2 - \Sigma(2n-1)^2 = 3 + 7 + 11 + \ldots + (4n-1) = n(2n+1)$$

daher $\Sigma(2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2$

und $\Sigma(2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2$.

Hierbei ist es nur etwas auffallend, dass man die Summen der Kuben der geraden und ungeraden Zahlen, und zwar auf zweifache Weise, leichter findet, als die Summe ihrer Quadrate, und dabei erhält man noch den Beweis der Lehrsätze A. 1. und B. 1. so wie C. 1. und 1. in den Kauf. Sollte es vielleicht auch noch für die Summen der Quadrate einen leichteren Weg geben?

Aber nicht allein findet man die Summen der dritten Potenzen der geraden und der ungeraden Zahlen leichter, sondern es ist nun auch der Fortschritt zu den höheren ungeraden Potenzen dieser Zahlen gegeben. Denn

E. 1) Wenn (wie in A.) N die $n$te und N_1 die $(n-1)$te Trigonalzahl ist, so ist allgemein, für alle ganze Werthe von ν

$$N^\nu - N_1{}^\nu = \frac{n^\nu}{2^{\nu-1}} \cdot \left[\frac{\nu}{1} \cdot n^{\nu-1} + \frac{\nu.(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3} \cdot n^{\nu-3} + \ldots + \left\{\begin{matrix} \ldots + 1 \\ \ldots + \nu . n \end{matrix}\right.\right]$$

worin $+1$ bei ungeradem ν, und $+\nu . n$ bei geradem ν die Reihe schliesst. Und es folgt sehr leicht daraus, wie in A.:

$$Sn^{2\nu-1} = \frac{2^{\nu-1}}{\nu} . N^\nu - \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2.3} . Sn^{2\nu-3} - \frac{(\nu-1)\ldots(\nu-4)}{2.3.4.5} . Sn^{2\nu-5} - \ldots$$

$$\ldots - \left\{\begin{matrix} \ldots - \frac{1}{\nu} . Sn^\nu \\ \ldots - Sn^{\nu+1} \end{matrix}\right\}$$ wenn überhaupt Glieder mit dem — Zeichen statt haben, also wenn $\nu > 2$ ist.

Wir fanden aber: $Sn^1 = N$

$Sn^3 = N^2$; wie dies auch aus der allgemeinen Gleichung folgt.

Daher ist also ferner: $Sn^5 = \frac{1}{3} . N^2 . (4N - 1)$

$$Sn^7 = \frac{1}{3} . N^2 . (6N^2 - 4N + 1)$$

$$Sn^9 = \frac{1}{5} . N^2 . (16N^3 - 20N^2 + 12N - 3)$$

etc. etc.

2) Wenn wir (wie in B.) $N = n^2$ und $N_1 = (n-1)^2$ setzen, so ist auch eben so allgemein für ganze ν:

$$N^\nu - N_1{}^\nu = \frac{\nu}{2^{2\nu-2}} \cdot [(2n-1)^{2\nu-1} + \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)}{2\,.\,3} \cdot (2n-1)^{2\nu-3}$$

$$+ \frac{(2\nu-1)\ldots(2\nu-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \cdot (2n-1)^{2\nu-5} + \ldots \frac{(2\nu-1)\ldots(2\nu-2\nu+2)}{2\,\ldots\ldots(2\nu-1)} \cdot (2n-1)]$$

worin alle Coefficienten, wenn sie mit ν oder (wenn $\nu = 2^x\mu$ ist) mit μ multiplicirt werden, ganze Zahlen sind, und der reducirte allgemeine Factor ist eigentlich $= \frac{\mu}{2^{2\nu-2-x}}$; (auch ist diese Bemerkung auf die obige Gleichung $Sn^{2\nu-1} = \ldots$ anwendbar.)

Es folgt aber nun wieder sehr leicht:

$$\Sigma(2n-1)^{2\nu-1} = \frac{2^{\nu-2-x}}{\mu} \cdot N^\nu - \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)}{2\,.\,3} \cdot \Sigma(2n-1)^{2\nu-3}$$

$$- \frac{(2\nu-1)\ldots(2\nu-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \cdot \Sigma(2n-1)^{2\nu-5} - \ldots \Sigma(2n-1)^1$$

Wir fanden aber schon, wie es die allgemeine Gleichung auch ergiebt:

$$\Sigma(2n-1)^1 = N$$

$$\Sigma(2n-1)^3 = N(2N-1)$$

daher weiter: $\Sigma(2n-1)^5 = \frac{1}{3} . N . (16N^2 - 20N + 7)$

$$\Sigma(2n-1)^7 = \frac{1}{3} . N . (48N^3 - 112N^2 + 98N - 31)$$

$$\Sigma(2n-1)^9 = \frac{1}{5} . N . (2^8 . N^4 - 2^6 . 15 . N^3 + 2^5 . 49 . N^2 - 2^3 . 155 . N + 381)$$

etc. etc.

3) Es ist also jedes $\Sigma(2n-1)^{2\nu-1}$ eine algebraische Function von n^2, und jedes $Sn^{2\nu-1}$ ist eine solche Function von der $n$ten Trigonalzahl $= \frac{n(n+1)}{2}$; setzt man hier nun $2n$ statt n, und zieht alsdann $\Sigma(2n-1)^{2\nu-1}$ ab, so ist die Differenz $= \Sigma(2n)^{2\nu-1}$, wodurch nun auch die Summen der ungeraden Potenzen der ganzen Zahlen mit abwechselndem Vorzeichen gegeben sind *).

Uebrigens ist hier nicht der Ort, eine weitere Ausführung dieser Andeutungen zu machen, wenngleich wir uns nicht erinnern, die hier so leicht gefundene einfache Form von $Sn^{2\nu-1}$ und $\Sigma(2n-1)^{2\nu-1}$ anderswo gesehen zu haben.

---

*) Die Resultate unserer (sei es ohne Eitelkeit gesagt) einfachen und klaren Darstellung weichen nun aber von den allgemein geltenden für den Fall, dass man $n = \infty$ setzt, ganz ungemein ab. M. s. Klügel's mathem. Wörterb. Art. Potenz §. 49. sqq. Nach Klügel haben alsdann alle diese unendlichen divergirenden Reihen endliche Werthe, wogegen wir lauter ∞ finden. Wie ist nun diese Discrepanz zu beseitigen? Wahrhaftig, wir wissen es nicht. Im Gegentheil scheinen uns Abel und der Herr Herausgeber sehr Recht zu haben, wenn sie so stark gegen jene Beweisart eifern, wie dies im Archiv Bd. I. Hft. 1. pag. 19—21 des literar. Berichtes zu lesen ist.

XLII.

Einiges von den Kegelschnitten.

Von

dem Herausgeber.

Wenn p den Parameter einer Parabel bezeichnet, Θ der Winkel ist, welchen der Radius Vector r mit einer von dem Brennpunkte aus gezogenen geraden Linie einschliesst, indem man diese Winkel von der in Rede stehenden geraden Linie an immer nach derselben Seite hin von 0 bis 360° zählt, und ω den von der von dem Brennpunkte nach dem Scheitel der Parabel gezogenen geraden Linie mit der in Rede stehenden geraden Linie eingeschlossenen und auf dieselbe Weise wie Θ genommenen Winkel bezeichnet, so hat man bekanntlich die Gleichung

$$1.\quad r = \frac{p}{2\{1-\cos(\Theta-\omega)\}}$$

oder

$$2.\quad \frac{1}{2}p = r\{1-\cos(\Theta-\omega)\}.$$

Folglich hat man für die drei Vectoren r, r_1, r_2 und die drei entsprechenden Winkel Θ, Θ_1, Θ_2 die drei folgenden Gleichungen:

$$3.\quad \begin{cases} \frac{1}{2}p = r\{1-\cos(\Theta-\omega)\}, \\ \frac{1}{2}p = r_1\{1-\cos(\Theta_1-\omega)\}, \\ \frac{1}{2}p = r_2\{1-\cos(\Theta_2-\omega)\}; \end{cases}$$

aus denen wir nun die beiden Grössen p und ω eliminiren wollen.

Durch Elimination von p erhält man sogleich

$$4.\; r\{1-\cos(\Theta-\omega)\} = r_1\{1-\cos(\Theta_1-\omega)\} = r_2\{1-\cos(\Theta_2-\omega)\},$$

und folglich

$$r - r_1 = r\cos(\Theta-\omega) - r_1\cos(\Theta_1-\omega)$$
$$= (r\cos\Theta - r_1\cos\Theta_1)\cos\omega + (r\sin\Theta - r_1\sin\Theta_1)\sin\omega,$$
$$r - r_2 = r\cos(\Theta-\omega) - r_2\cos(\Theta_2-\omega)$$
$$= (r\cos\Theta - r_2\cos\Theta_2)\cos\omega + (r\sin\Theta - r_2\sin\Theta_2)\sin\omega;$$

also, wie man leicht findet,

$$5.\quad \begin{cases} \sin\omega = \dfrac{r(r_2-r_1)\cos\Theta + r_1(r-r_2)\cos\Theta_1 + r_2(r_1-r)\cos\Theta_2}{rr_1\sin(\Theta-\Theta_1) + r_1r_2\sin(\Theta_1-\Theta_2) + r_2r\sin(\Theta_2-\Theta)}, \\ \cos\omega = -\dfrac{r(r_2-r_1)\sin\Theta + r_1(r-r_2)\sin\Theta_1 + r_2(r_1-r)\sin\Theta_2}{rr_1\sin(\Theta-\Theta_1) + r_1r_2\sin(\Theta_1-\Theta_2) + r_2r\sin(\Theta_2-\Theta)}. \end{cases}$$

Weil nun

$$\sin \omega^2 + \cos \omega^2 = 1$$

ist, so erhält man die Gleichung

6. $\{r(r_2 - r_1) \cos \Theta + r_1 (r - r_2) \cos \Theta_1 + r_2 (r_1 - r) \cos \Theta_2\}^2$
$+ \{r(r_2 - r_1) \sin \Theta + r_1 (r - r_2) \sin \Theta_1 + r_2 (r_1 - r) \sin \Theta_2\}^2$
$= \{rr_1 \sin (\Theta - \Theta_1) + r_1 r_2 \sin (\Theta_1 - \Theta_2) + r_2 r \sin (\Theta_2 - \Theta)\}^2;$

oder

$$\begin{aligned}
7.\ & r^2(r_2 - r_1)^2 + r_1^2 (r - r_2)^2 + r_2^2(r_1 - r)^2 \\
& - 2rr_1 (r - r_2) (r_1 - r_2) \cos (\Theta - \Theta_1) \\
& - 2r_1 r_2 (r_1 - r) (r_2 - r) \cos (\Theta_1 - \Theta_2) \\
& - 2r_2 r (r_2 - r_1) (r - r_1) \cos (\Theta_2 - \Theta) \\
= & r^2 r_1^2 \sin(\Theta - \Theta_1)^2 + r_1^2 r_2^2 \sin (\Theta_1 - \Theta_2)^2 + r_2^2 r^2 \sin(\Theta - \Theta)^2 \\
& + 2rr_1 r_2 \{r \sin(\Theta - \Theta_1) \sin(\Theta_2 - \Theta) + r_1 \sin (\Theta_1 - \Theta_2) \sin (\Theta - \Theta^1) \\
& + r_2 \sin (\Theta_2 - \Theta) \sin (\Theta_1 - \Theta_2)\},
\end{aligned}$$

oder, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned}
8.\ & 2(r^2 r_1^2 + r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r^2) - 2rr_1 r_2 (r + r_1 + r_2) \\
& - 2rr_1 (r - r_2) (r_1 - r_2) \cos (\Theta - \Theta_1) \\
& - 2r_1 r_2 (r_1 - r) (r_2 - r) \cos (\Theta_1 - \Theta_2) \\
& - 2r_2 r (r_2 - r_1) (r - r_1) \cos (\Theta_2 - \Theta) \\
= & r^2 r_1^2 \sin(\Theta - \Theta_1)^2 + r_1^2 r_2^2 \sin(\Theta_1 - \Theta_2)^2 + r_2^2 r^2 \sin (\Theta_2 - \Theta)^2 \\
& + 2rr_1 r_2 \{r \sin (\Theta - \Theta_1) \sin(\Theta_2 - \Theta (+ r_1 \sin (\Theta_1 - \Theta_2) \sin (\Theta - \Theta_1) \\
& + r_2 \sin (\Theta_2 - \Theta) \sin (\Theta_1 - \Theta_2)\}.
\end{aligned}$$

Bringt man nun Alles, was auf der rechten Seite steht, auf die linke Seite, so erhält man nach einigen leichten Verwandlungen

$$\begin{aligned}
9.\quad 0 = & r^2 r_1^2 \{1 + \cos (\Theta - \Theta_1)^2\} \\
& + r_1^2 r_2^2 \{1 + \cos (\Theta_1 - \Theta_2)^2\} \\
& + r_2^2 r^2 \{1 + \cos (\Theta_2 - \Theta)^2\} \\
& - 2rr_1 r_2 \left\{\begin{array}{l} r\ [1 + \sin (\Theta - \Theta_1) \sin (\Theta_2 - \Theta)] \\ + r_1 [1 + \sin (\Theta_1 - \Theta_2) \sin (\Theta - \Theta_1)] \\ + r_2 [1 + \sin (\Theta_2 - \Theta) \sin (\Theta_1 - \Theta_2)] \end{array}\right\} \\
& - 2rr_1 (r - r_2) (r_1 - r_2) \cos (\Theta - \Theta_1) \\
& - 2r_1 r_2 (r_1 - r) (r_2 - r) \cos (\Theta_1 - \Theta_2) \\
& - 2r_2 r (r_2 - r_1) (r - r_1) \cos (\Theta_2 - \Theta).
\end{aligned}$$

Weil nun aber

$$\begin{aligned}
(r - r_2) (r_1 - r_2) &= rr_1 - r_2 (r + r_1 - r_2), \\
(r_1 - r) (r_2 - r) &= r_1 r_2 - r (r_1 + r_2 - r), \\
(r_2 - r_1) (r - r_1) &= r_2 r - r_1 (r_2 + r - r_1)
\end{aligned}$$

ist, so ist, wie leicht erhellen wird,

$$10.\quad 0 = r^2 r_1^2 \{1 - \cos(\Theta - \Theta_1)^2\}$$
$$+ r_1^2 r_2^2 \{1 - \cos(\Theta_1 - \Theta_2)^2\}$$
$$+ r_2^2 r^2 \{1 - \cos(\Theta_2 - \Theta)^2\}$$
$$- 2rr_1r_2 \left\{\begin{array}{l} r\ [1 + \sin(\Theta - \Theta_1)\sin(\Theta_2 - \Theta)] \\ + r_1\ [1 + \sin(\Theta_1 - \Theta_2)\sin(\Theta - \Theta_1)] \\ + r_2\ [1 + \sin(\Theta_2 - \Theta)\sin(\Theta_1 - \Theta_2)] \end{array}\right\}$$
$$+ 2rr_1r_2 \left\{\begin{array}{l} (r + r_1 - r_2)\cos(\Theta - \Theta_1) \\ + (r_1 + r_2 - r)\cos(\Theta_1 - \Theta_2) \\ + (r_2 + r - r_1)\cos(\Theta_2 - \Theta) \end{array}\right\},$$

d. i.

$$11.\quad 0 = 4r^2 r_1^2 \sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta_1)^4$$
$$+ 4r_1^2 r_2^2 \sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_2)^4$$
$$+ 4r_2^2 r^2 \sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2 - \Theta)^4$$
$$-2rr_1r_2 \left\{\begin{array}{r} r\left[1 - \cos(\Theta - \Theta_1) + \cos(\Theta_1 - \Theta_2) - \cos(\Theta_2 - \Theta) \right. \\ \left. + \sin(\Theta - \Theta_1)\sin(\Theta_2 - \Theta)\right] \\ + r_1\left[1 - \cos(\Theta_1 - \Theta_2) + \cos(\Theta_2 - \Theta) - \cos(\Theta - \Theta_1) \right. \\ \left. + \sin(\Theta_1 - \Theta_2)\sin(\Theta - \Theta_1)\right] \\ + r_2\left[1 - \cos(\Theta_2 - \Theta) + \cos(\Theta - \Theta_1) - \cos(\Theta_1 - \Theta_2) \right. \\ \left. + \sin(\Theta_2 - \Theta)\sin(\Theta_1 - \Theta_2)\right] \end{array}\right\}.$$

Es ist aber, wie man mittelst einiger leichten goniometrischen Verwandlungen findet,

$$1 - \cos(\Theta - \Theta_1) + \cos(\Theta_1 - \Theta_2) - \cos(\Theta_2 - \Theta) + \sin(\Theta - \Theta_1)\sin(\Theta_2 - \Theta)$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2 - \Theta)^2 \sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta_1)^2,$$
$$1 - \cos(\Theta_1 - \Theta_2) + \cos(\Theta_2 - \Theta) - \cos(\Theta - \Theta_1) + \sin(\Theta_1 - \Theta_2)\sin(\Theta - \Theta_1)$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta_1)^2 \sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_2)^2,$$
$$1 - \cos(\Theta_2 - \Theta) + \cos(\Theta - \Theta_1) - \cos(\Theta_1 - \Theta_2) + \sin(\Theta_2 - \Theta)\sin(\Theta_1 - \Theta_2)$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_2)^2 \sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2 - \Theta)^2;$$

und folglich

$$12.\quad 0 = r^2 r_1^2 \sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta_1)^4$$
$$+ r_1^2 r_2^2 \sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_2)^4$$
$$+ r_2^2 r^2 \sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2 - \Theta)^4$$
$$- 2rr_1r_2 \left\{\begin{array}{l} r\sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta_1)^2 \sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2 - \Theta)^2 \\ + r_1\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_2)^2 \sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta_1)^2 \\ + r_2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2 - \Theta)^2 \sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_2)^2 \end{array}\right\}$$

oder

$$13.\quad 0 = \left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_2)}{\sqrt{r}}\right\}^4 + \left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_2 - \Theta)}{\sqrt{r_1}}\right\}^4 + \left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta - \Theta_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}^4$$
$$- 2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_2)}{\sqrt{r}}\right\}^2 \left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_2 - \Theta)}{\sqrt{r_1}}\right\}^2$$

$$-2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)}{\sqrt{r_1}}\right\}^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}^2$$

$$-2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)}{\sqrt{r}}\right\}^2.$$

Ueberhaupt ist aber

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$$

$$=(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2=(a^2+2ab+b^2-c^2)(a^2-2ab+b^2-c^2)$$

$$=\{(a+b)^2-c^2\}\{(a-b)^2-c^2\}$$

$$=(a+b+c)(a-b-c)(a-b+c)(a+b-c),$$

und wenn also

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2=0$$

ist, so muss nothwendig mindestens eine der Grössen

$$a+b+c,\ a-b-c,\ a-b+c,\ a+b-c$$

verschwinden. Wenden wir dies auf die Gleichung 13. an, so ergiebt sich, dass immer mindestens eine der vier Grössen

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)}{\sqrt{r}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}{\sqrt{r_2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)}{\sqrt{r}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}{\sqrt{r_2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)}{\sqrt{r}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}{\sqrt{r_2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)}{\sqrt{r}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}{\sqrt{r_2}}$$

verschwindet.

Wenn keine der Grössen

$$\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1),\ \sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2),\ \sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)$$

verschwindet, so kann immer nur eine der vier obigen Grössen verschwinden. Denn nähme man an, dass zwei derselben verschwänden, so würde sich durch deren Addition oder Subtraction immer leicht ergeben, dass auch eine der Grössen $\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$, $\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)$, $\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)$ verschwinden müsste. Wir wollen jetzt den Scheitel der Parabel durch S, ihren Brennpunkt durch F, die Endpunkte der drei Vectoren r, r_1, r_2 respective durch A, A_1, A_2 bezeichnen, so dass also $r=FA$, $r_1=FA_1$, $r_2=FA_2$ ist, und wollen annehmen, dass diese drei Vectoren auf einer und derselben Seite der Axe der Parabel liegen, und ihrer Grösse nach aufsteigend von dem kleinsten bis zum grössten in der Ordnung r, r_1, r_2 oder FA, FA_1, FA_2 auf einander folgen. Setzen wir nun, was offenbar verstattet ist, $\Theta=SFA$, $\Theta_1=SFA_1$, $\Theta_2=SFA_2$, wo jeder dieser Winkel kleiner als 180° ist, so ist $\Theta_2-\Theta_1=A_1FA_2$, $\Theta_2-\Theta=AFA_2$, $\Theta_1-\Theta=AFA_1$, und nach dem vorher Bewiesenen muss also jederzeit eine der vier folgenden Gleichungen richtig sein:

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}+\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}=0,$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}-\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}=0,$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}-\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}=0,$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}+\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}=0$$

oder

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}=\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}+\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}=-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}+\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}=-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}-\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}=\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}-\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}.$$

Welche dieser vier Gleichungen nun aber richtig ist, kann auf folgende Art entschieden werden.

Weil die Wiukel AFA_2, A_1FA_2, AFA_1 sämmtlich kleiner als 180°, also die Winkel $\frac{1}{2}AFA_2$, $\frac{1}{2}A_1FA_2$, $\frac{1}{2}AFA_1$ sämmtlich kleiner als 90°, folglich die Grössen $\sin\frac{1}{2}AFA_2$, $\sin\frac{1}{2}A_1FA_2$, $\sin\frac{1}{2}AFA_1$ sämmtlich positiv sind, so ist die dritte der vier obigen Gleichungen offenbar unstatthaft.

Weil ferner $AFA_2 > AFA_1$, also auch $\frac{1}{2}AFA_2 > \frac{1}{2}AFA_1$, und jeder dieser beiden Winkel kleiner als 90° ist, so ist auch $\sin\frac{1}{2}AFA_2 > \sin\frac{1}{2}AFA_1$, und folglich, weil $FA_1 < FA_2$, also auch $\sqrt{FA_1} < \sqrt{FA_2}$ ist, auch

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}} > \frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}},$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass auch die zweite der vier obigen Gleichungen nicht Statt finden kann, wobei man immer zu beachten hat, dass

$$\sin\tfrac{1}{2}AFA_2,\ \sin\tfrac{1}{2}A_1FA_2,\ \sin\tfrac{1}{2}AFA_1,$$

lauter positive Grössen sind.

Daher bleibt jetzt bloss noch zu entscheiden, welche von deu beiden Gleichungen

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}}=\frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}}\pm\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}$$

die richtige ist, worüber man auf folgende Art ins Klare kommen kann.

Man lasse, FA und FA_1 als constant betrachtend, FA_2 von FA_1 an stetig wachsen, so werden sich auch die Grössen

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}},\ \frac{\sin\frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}},\ \frac{\sin\frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}$$

stetig verändern. Sollte es nun einen endlichen völlig bestimmten Werth des veränderlichen Radius Vector FA_2, den wir von jetzt an durch (FA_2) bezeichnen wollen, von solcher Beschaffenheit geben können dass für demselben unendlich nahe kommende Werthe des veränderlichen Radius Vector auf beiden Seiten dieses endlichen völlig bestimmten Werthes (FA_2), die wir durch FA'_2 und FA''_2 bezeichnen wollen, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\frac{\sin \frac{1}{2}AFA'_2}{\sqrt{FA_1}} = \frac{\sin \frac{1}{2}A_1FA'_2}{\sqrt{FA}} \pm \frac{\sin \frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA'_2}},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}AFA''_2}{\sqrt{FA_1}} = \frac{\sin \frac{1}{2}A_1FA''_2}{\sqrt{FA}} \mp \frac{\sin \frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA''_2}}$$

wäre; so wäre

$$\frac{\sin \frac{1}{2}AFA'_2}{\sqrt{FA_1}} - \frac{\sin \frac{1}{2}AFA''_2}{\sqrt{FA_1}}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}A_1FA'_2}{\sqrt{FA}} - \frac{\sin \frac{1}{2}A_1FA''_2}{\sqrt{FA}} \pm \left(\frac{\sin \frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA'_2}} + \frac{\sin \frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA''_2}}\right).$$

Lässt man nun FA'_2 und FA''_2 sich dem Radius Vector (FA_2) nähern, so nähern die Differenzen

$$\frac{\sin \frac{1}{2}AFA'_2}{\sqrt{FA_1}} - \frac{\sin \frac{1}{2}AFA''_2}{\sqrt{FA_1}}, \quad \frac{\sin \frac{1}{2}A_1FA'_2}{\sqrt{FA}} - \frac{\sin \frac{1}{2}A_1FA''_2}{\sqrt{FA}}$$

sich offenbar der Null als ihrer Gränze bis zu jedem beliebigen Grade. Also nähert sich nach dem Obigen offenbar auch die Summe

$$\frac{\sin \frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2'}} + \frac{\sin \frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2''}}$$

der Null als ihrer Gränze bis zu jedem beliebigen Grade. Die Grösse, welcher sich diese Summe als ihrer Gränze bis zu jedem beliebigen Grade nähert, ist aber offenbar

$$\frac{2\sin \frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{(FA_2)}},$$

und es müsste also unter den gemachten Voraussetzungen offenbar

$$\frac{2\sin \frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{(FA_2)}} = 0, \text{ d. i. } \frac{1}{\sqrt{(FA_2)}} = 0 \text{ oder } \frac{1}{(FA_2)} = 0$$

sein, welches ungereimt ist, da (FA_2) eine endliche völlig bestimmte Grösse sein soll. Also kann offenbar nie für gewisse Werthe von FA_2

$$\frac{\sin \frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}} = \frac{\sin \frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}} + \frac{\sin \frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}},$$

für andere Werthe von FA_2

$$\frac{\sin \frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}} = \frac{\sin \frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}} - \frac{\sin \frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}$$

sein, sondern es muss immer entweder die erste oder die zweite Gleichung Statt finden. Für $FA_2 = FA_1$ ergiebt sich aber aus der zweiten dieser beiden Gleichungen, da in diesem Falle $A_1FA_2 = 0$ ist, die offenbar ungereimte Gleichung

$$\frac{\sin \frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_1}} = -\frac{\sin \frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_1}}.$$

Daher ist die zweite Gleichung in dem im Rede stehenden Falle unstatthaft, und gilt folglich nach dem Vorhergehenden überhaupt nicht. Also ist unter den gemachten Voraussetzungen immer

$$\frac{\sin \frac{1}{2}AFA_2}{\sqrt{FA_1}} = \frac{\sin \frac{1}{2}A_1FA_2}{\sqrt{FA}} + \frac{\sin \frac{1}{2}AFA_1}{\sqrt{FA_2}}.$$

Weiterer Untersuchungen über diesen Gegenstand uns für jetzt enthaltend, wollen wir nun sogleich zu den folgenden Betrachtungen über die Ellipse fortschreiten.

Bei der Ellipse hat man, wenn a die halbe grosse Axe, e die Excentricität bezeichnet, $k = \frac{e}{a}$ gesetzt wird, Θ der von dem Radius Vector r mit einer von dem entsprechenden Brennpunkte aus gezogenen geraden Linie eingeschlossene, von 0 bis 360° gezählte Winkel, und ω der mit derselben Linie von der von dem in Rede stehenden Brennpunkte nach dem nächsten Scheitel der grossen Axe gezogenen Linie eingeschlossene, auf dieselbe Weise wie Θ genommene Winkel ist, bekanntlich die Gleichung

$$14. \quad r = \frac{a(1-k^2)}{1+k\cos(\Theta-\omega)},$$

oder

$$15. \quad a(1-k^2) = r\,\{1+k\cos(\Theta-\omega)\}.$$

Für vier Vectoren r, r_1, r_2, r_3 und die entsprechenden Winkel Θ, Θ_1, Θ_2, Θ_3 hat man daher die vier Gleichungen

$$16. \quad \begin{cases} a(1-k^2) = r\,\{1+k\cos(\Theta-\omega)\}, \\ a(1-k^2) = r_1\{1+k\cos(\Theta_1-\omega)\}, \\ a(1-k^2) = r_2\{1+k\cos(\Theta_2-\omega)\}, \\ a(1-k^2) = r_3\{1+k\cos(\Theta_2-\omega)\}; \end{cases}$$

aus denen durch Elimination von $a(1-k^2)$ sich

$$\begin{aligned} & r\,\{1+k\cos(\Theta-\omega)\} \\ = & r_1\{1+k\cos(\Theta_1-\omega)\} \\ = & r_2\{1+k\cos(\Theta_2-\omega)\} \\ = & r_3\{1+k\cos(\Theta_3-\omega)\} \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} r-r_1 &= -k\{r\cos(\Theta-\omega)-r_1\cos(\Theta_1-\omega)\}, \\ r-r_2 &= -k\{r\cos(\Theta-\omega)-r_2\cos(\Theta_2-\omega)\}, \\ r-r_3 &= -k\{r\cos(\Theta-\omega)-r_3\cos(\Theta_3-\omega)\}; \end{aligned}$$

also durch Division

$$\frac{r-r_1}{r-r_2} = \frac{r\cos(\Theta-\omega)-r_1\cos(\Theta_1-\omega)}{r\cos(\Theta-\omega)-r_2\cos(\Theta_2-\omega)},$$

$$\frac{r-r_1}{r-r_3} = \frac{r\cos(\Theta-\omega)-r_1\cos(\Theta_1-\omega)}{r\cos(\Theta-\omega)-r_3\cos(\Theta_3-\omega)}$$

oder

$$\frac{r-r_1}{r-r_2} = \frac{r\cos\Theta-r_1\cos\Theta_1+(r\sin\Theta-r_1\sin\Theta_1)\operatorname{tang}\omega}{r\cos\Theta-r_2\cos\Theta_2+(r\sin\Theta-r_2\sin\Theta_2)\operatorname{tang}\omega},$$

$$\frac{r-r_1}{r-r_3} = \frac{r\cos\Theta-r_1\cos\Theta_1+(r\sin\Theta-r_1\sin\Theta_1)\operatorname{tang}\omega}{r\cos\Theta-r_3\cos\Theta_3+(r\sin\Theta-r_3\sin\Theta_3)\operatorname{tang}\omega}$$

ergiebt. Hieraus folgt aber ferner

$$17.\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\omega = -\dfrac{r(r_2-r_1)\cos\Theta + r_1(r-r_2)\cos\Theta_1 + r_2(r_1-r)\cos\Theta_2}{r(r_2-r_1)\sin\Theta + r_1(r-r_2)\sin\Theta_1 + r_2(r_1-r)\sin\Theta_2}, \\ \operatorname{tang}\omega = -\dfrac{r(r_3-r_1)\cos\Theta + r_1(r-r_3)\cos\Theta_1 + r_3(r_1-r)\cos\Theta_3}{r(r_3-r_1)\sin\Theta + r_1(r-r_3)\sin\Theta_1 + r_3(r_1-r)\sin\Theta_3}; \end{cases}$$

woraus sich nun die Gleichung

$$\frac{r(r_2-r_1)\cos\Theta + r_1(r-r_2)\cos\Theta_1 + r_2(r_1-r)\cos\Theta_2}{r(r_2-r_1)\sin\Theta + r_1(r-r_2)\sin\Theta_1 + r_2(r_1-r)\sin\Theta_2}$$
$$= \frac{r(r_3-r_1)\cos\Theta + r_1(r-r_3)\cos\Theta_1 + r_3(r_1-r)\cos\Theta_3}{r(r_3-r_1)\sin\Theta + r_1(r-r_3)\sin\Theta_1 + r_3(r_1-r)\sin\Theta_3}$$

ergiebt, die man leicht auf die Form

$$\begin{aligned} 18.\quad 0 = &\ r\,r_1(r_3-r_2)\sin(\Theta-\Theta_1) \\ &+ r\,r_2(r_1-r_3)\sin(\Theta-\Theta_2) \\ &+ r\,r_3(r_2-r_1)\sin(\Theta-\Theta_3) \\ &+ r_1r_2(r_3-r)\sin(\Theta_1-\Theta_2) \\ &+ r_1r_3(r-r_2)\sin(\Theta_1-\Theta_3) \\ &+ r_2r_3(r_1-r)\sin(\Theta_2-\Theta_3) \end{aligned}$$

bringt. Diese Gleichung lässt sich aber auch unter der Gestalt

$$\begin{aligned} 19.\quad 0 = &\ r\,r_1r_2\{\sin(\Theta-\Theta_1) + \sin(\Theta_1-\Theta_2) + \sin(\Theta_2-\Theta)\} \\ &- r\,r_1r_3\{\sin(\Theta-\Theta_1) + \sin(\Theta_1-\Theta_3) + \sin(\Theta_3-\Theta)\} \\ &+ r\,r_2r_3\{\sin(\Theta-\Theta_2) + \sin(\Theta_2-\Theta_3) + \sin(\Theta_3-\Theta)\} \\ &- r_1r_2r_3\{\sin(\Theta_1-\Theta_2) + \sin(\Theta_2-\Theta_3) + \sin(\Theta_3-\Theta_1)\}, \end{aligned}$$

oder unter der Gestalt

$$\begin{aligned} 20.\quad 0 = &\ r\,r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2-\Theta) \\ &- r\,r_1r_3\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_3)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_3-\Theta) \\ &+ r\,r_2r_3\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_2)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2-\Theta_3)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_3-\Theta) \\ &- r_1r_2r_3\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_2-\Theta_3)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta_3-\Theta_1), \end{aligned}$$

oder auch unter der Gestalt

$$\begin{aligned} 21.\quad 0 = &\ \frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta_3)\sin\frac{1}{2}(\Theta_3-\Theta_1)}{r} \\ &- \frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_2)\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta_3)\sin\frac{1}{2}(\Theta_3-\Theta)}{r_1} \\ &+ \frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_3)\sin\frac{1}{2}(\Theta_3-\Theta)}{r_2} \\ &- \frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)\sin\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta)}{r_3} \end{aligned}$$

darstellen. Die Gleichung 18. kann man auch auf die Form

$$\begin{aligned} 22.\quad 0 = &\ \left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\sin(\Theta-\Theta_1) \\ &+ \left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)\sin(\Theta-\Theta_2) \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\sin(\theta-\theta_3)$$
$$+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)\sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$+\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\right)\sin(\theta_1-\theta_3)$$
$$+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\sin(\theta_2-\theta_3)$$

bringen.

Aehnliche Betrachtungen würden sich auch über die Hyperbel anstellen lassen, wobei wir aber hier nicht länger verweilen wollen, da dieselben nach dem Vorhergehenden keine Schwierigkeit haben.

XLIII.

Uebungsaufgaben für Schüler *).

1. Man soll zeigen, dass die Quadratwurzel aus der Grösse $a+\sqrt{b}$ in der Form $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ ausgezogen werden kann, wenn a^2-b ein vollkommenes Quadrat ist, und in der Form $\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}$, wenn $1-\frac{a^2}{b}$ ein vollkommenes Quadrat ist.

2. Wenn die Grössen a, b, c nicht alle drei unter einander gleich sind, so ist immer $(a+b+c)^3>27abc<9(a^3+b^3+c^3)$.

3. Man soll den Bruch

$$\frac{8x^3-10x^2+7x-2}{6x^3-11x^2+8x-2}$$

auf seinen einfachsten Ausdruck bringen.

4. Wenn zwei Kreise sich in A und B schneiden, durch den Punkt A die beiden Durchmesser AD und AD', und die beiden Sehnen AC und AC', von denen eine jede denjenigen der beiden Kreise berührt, von dem sie keine Sehne ist, dieser beiden Kreise gezogen sind, ferner die Linie AEE' den Winkel DAD' halbirt und die beiden Kreise in E und E' schneidet; so ist die gemeinschaftliche Tangente der beiden Kreise die mittlere Proportionale zwischen den beiden Sehnen DE und $D'E'$, und die gemeinschaftliche Sehne AB der beiden Kreise ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Sehnen BC und BC'.

5. Wenn p die Länge des von dem Mittelpunkte eines mit

*) Grösstentheils ausgezogen aus Cambridge Senate-House Problems. 1837. 1840 von dem Herausgeber.

dem Radius r beschriebenen Kreises auf eine Seite eines in denselben beschriebenen regulären Fünfecks gefällten Perpendikels, und q die halbe Seite eines in denselben Kreis beschriebenen regulären Zehnecks ist, so ist immer $r^3 = 2(p^3 - q^3)$.

6. Wenn von einem Punkte C' in der einen AB von drei sich in den Punkten A, B, C schneidenden Geraden in beliebiger Anzahl gerade Linien gezogen werden, welche die Linien AC, BC schneiden, z. B. in den Punkten B', A', so liegen die Durchschnittspunkte eines jeden Paars der von B, A nach den Durchschnittspunkten B', A' gezogenen geraden Linien BB', AA' in einer durch den Punkt C gehenden Geraden.

7. Wenn drei sich in A, B, C schneidende gerade Linien AB, BC, CA von einer dritten geraden Linie respective in C', A', B' geschnitten werden, so ist immer (bekanntlich) $AB' \,.\, BC' \,.\, CA' = A'B \,.\, B'C \,.\, C'A$, und das Product der Flächenräume der drei Dreiecke $A'BC'$, $B'CA'$, $C'AB'$ ist jederzeit

$$\frac{(A'B' \,.\, B'C' \,.\, C'A' \,.\, \sin A' \sin B' \sin C')^2}{8 \sin A \sin B \sin C}.$$

8. Wenn α, β, γ die Entfernungen des Durchschnittspunkts der die Winkel eines ebenen Dreiecks ABC halbirenden geraden Linien von den Spitzen A, B, C des Dreiecks sind, so ist immer

$$\alpha^2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) + \beta^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \gamma^2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = 0.$$

9. Wenn man die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks ABC durch Bogen grösster Kreise halbirt, und α, β, γ die zwischen deren gemeinschaftlichem Durchschnittspunkte und den Spitzen A, B, C des Dreiecks liegenden Bogen sind, so ist jederzeit

$$\cos\alpha \sin(b-c) + \cos\beta \sin(c-a) + \cos\gamma \sin(a-b) = 0.$$

10. Wenn drei Durchmesser einer mit dem Halbmesser r beschriebenen Kugel sich unter den Winkeln α, β, γ schneiden und $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$ gesetzt wird, so ist der körperliche Inhalt des von den die Kugel in den Endpunkten der drei Durchmesser berührenden Ebenen eingeschlossenen Parallelepipedons

$$\frac{4r^3}{\sqrt{\sin\sigma \sin(\sigma-\alpha) \sin(\sigma-\beta) \sin(\sigma-\gamma)}}.$$

11. Wenn ein mit dem Halbmesser r beschriebener Kreis eine Parabel, deren Parameter p ist, in vier Punkten schneidet, so ist das Product der Entfernungen der vier Durchschnittspunkte von der Axe der Parabel, $= p^2(a^2 - r^2)$, wo a die Entfernung des Scheitels der Parabel von dem Mittelpunkte des Kreises bezeichnet.

12. Wenn PT, QT zwei an die Punkte P, Q einer Parabel, deren Brennpunkt F ist, gezogene Tangenten sind, so ist immer $FP \,.\, FQ = FT^2$, und wenn FP, FQ einen gegebenen Winkel α einschliessen, so ist der geometrische Ort des Punktes T eine Hyperbel, welche näher zu bestimmen ist.

13. Wenn ϱ, ϱ_1 die Krümmungshalbmesser in den Endpunkten zweier conjugirten Diameter einer Ellipse sind, so ist die Summe $\varrho^{\frac{2}{3}} + \varrho_1^{\frac{2}{3}}$ eine constante Grösse.

14. Die grösste Projection eines Cubus ist ein reguläres Sechseck, dessen Seite sich zu der Seite einer Seitenfläche des Cubus wie $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ verhält.

(Diese Aufgaben, unter denen sich übrigens einiges Bekannte findet, werden fortgesetzt.)

XLIV.

Miscellen.

In Dinglers polytechnischem Journal. Band LXXIV. Heft 3. S. 194. hat Herr Doctor Mohr in Coblenz folgendes Verfahren, Barometer ohne Auskochen luftleer zu machen, angegeben.

„Das Verfahren setzt nur den Gebrauch einer Luftpumpe voraus. Man wird hieraus schon leicht errathen können, dass durch Wegnahme des atmosphärischen Drucks dieselbe Erscheinung hervorgebracht wird, als wenn man durch Hinzubringung von Wärme den Quecksilberdämpfen eine dem atmosphärischen Drucke gleiche Spannung ertheilt, und in der That beruht hierin das neue Verfahren.

Auf den Teller der Luftpumpe setzt man vermittelst eines gut geschliffenen Trichters den auf Taf. IV. Fig. 3. abgebildeten sehr einfachen Apparat, den man in kurzer Zeit aus Glasröhren und Korkstöpseln zusammensetzen kann. Der Trichter *a* in Taf. IV. Fig. 3. ist mit einer guten Kautschuckröhre an die Bleiröhre *b* befestigt, diese mit einem Korke in die etwa 14 Linien weite und 5 bis 6 Zoll lange Glasröhre, welche von irgend einem Stative getragen wird, und letztere mittelst eines Korks an die kleine Röhre *d*, an welche nun mit Kautschuckröhren die auszukochenden Barometer befestigt werden.

Nehmen wir an, man habe zu einem Gefässbarometer eine ganz gerade Röhre mit Quecksilber zu füllen. Zuerst macht man die Röhre vollkommen trocken, indem man sie erwärmt und mit dem Vacuum in Verbindung setzt; man wiederholt diese Operation einigemal, welches sehr rasch geht. Nun giesst man das Quecksilber, welches ebenfalls in einer Porzellanschale erwärmt wurde, durch einen unten sehr engen Papiertrichter in die Röhre, befestigt diese an den Apparat und pumpt die Luft aus. Die Barometerröhre liegt sehr flach auf dem Tische. Beim Entziehen der Luft schwellen alle im Quecksilber gebliebenen Luftblasen stark an und die meisten gehen von selbst nach Oben, ohne dass man etwas Weiteres zu thun nöthig hätte. Man stellt nun, wenn keine Luftblasen mehr aufsteigen, ein möglichst vollkommenes Vacuum dar, und fängt an die Barometerröhre leise schüttelnd zu bewegen, gerade wie man bei dem Auskochen auf Feuer zu thun pflegt. Die beiden Kautschuckröhren erlauben eine schon heftige Erschütterung, ohne dass der Apparat dadurch aus einander käme. Man bemerkt in der Barometerröhre ein hartes Prellen und Kliken des Quecksilbers gegen das Glas, ebenfalls wie beim Auskochen, und grosse Luftblasen erscheinen an allen Stellen, wo die kleinsten Luftbläschen sitzen geblieben sind.

Durch schüttelnde Bewegung wird momentan der schwache Druck des Quecksilbers in der geneigten Röhre aufgehoben, die Luftblasen vergrössern sich, und in diesem Augenblick steigen sie, weil sie ein grösseres Volumen einnehmen, aufwärts. Durch wiederholtes Schütteln bringt man so die kleinsten Luftbläschen zum Aufwärtssteigen. Man kann auch das Aufwärtssteigen der Blasen beschleunigen, wenn man die Röhre über den Rand des Tisches etwas hinabhält, wodurch sie steiler zu liegen kommt. Einzelne sehr kleine Bläschen, welche allein nicht Steigkraft genug besitzen, weiter zu rücken, vereinigt man zu einer grössern Blase, indem man die Röhre aufrichtet. Das Quecksilber ergiesst sich in die weite Röhre *c*, und in der Barometerröhre entsteht ein Vacuum, welches nun alle jene Luftbläschen aufnimmt. Biegt man nun die Röhre wieder vorsichtig hinab, so bringt man durch dieselbe Manipulation auch diese in der Spitze gesammelte Luftblase heraus. Es ist eine bekannte Erfahrung, dass frisch ausgekochte Barometer von Neuem ein Luftbläschen zeigen, wenn man sie durch Aufrichten hat spielen lassen. Alle einzelnen noch so kleinen Luftspuren sammeln sich alsdann im leeren Raume und werden beim Wiederanlaufenlassen sichtbar. Die allerschärfste Probe eines luftleeren Barometers ist immer das sichtbar bleibende Luftbläschen beim Vollaufen der Röhre. Beim Auskochen kann man diese Probe erst nach dem Erkalten machen, bei unserm Apparate in jedem Augenblicke wiederholen. Ein 10 Linien weites Barometer war innerhalb 10 Minuten so vollkommen luftleer, dass es ein kaum sichtbares Luftbläschen zeigte. Besondere Schwierigkeiten machen Röhren, die durch Anschmelzen einer engern Röhre eine Verdünnung des Kalibers haben. Die kleinen Luftbläschen gehen nur durch heftiges Schütteln der sehr steilen Röhre über jene Einschnürung hinweg. Schmutz an der innern Seite der Röhre hält ebenfalls leicht Luftbläschen zurück.

Heberbarometer und gewöhnliche Barometer befestigt man ebenfalls mit einer Kautschuckröhre auf die Taf. IV. Fig. 3. angedeutete Art an den Apparat. Man füllt die Röhre nur bis an ihre Biegung und lässt alles übrige Quecksilber auslaufen; die fernere Behandlung wie oben." Auf diese Art hat Dr. Mohr nach seiner Angabe mehrere Barometer auf ihren Scalen luftleer gemacht, und fügt hinzu, dass dieses Verfahren sogar das sicherste sei, weil die Röhre mehr gegen mechanische Verletzung geschützt ist.

„Es ist übrigens auch gut, die Barometer erst halb mit Quecksilber zu füllen und alsdann luftleer zu machen, weil man bei dem geringeren Drucke des Quecksilbers desto stärker erschüttern kann, um gerade die äusserste Spitze des Barometers, auf die es doch besonders ankommt, luftleer zu machen. Man füllt zuletzt die ganze Röhre voll und wiederholt die Operation mit dem nachgefüllten Theile. Es geschieht auch wohl zuweilen, besonders in nicht sehr glatten Röhren, dass eine Luftblase beim Aufsteigen in mehrere kleinere zerfällt, welche schwierig aufsteigen. Man muss alsdann durch wiederholtes Tummeln und Entleeren dieselben herauszuschaffen suchen."

Jeder, wer die Unannehmlichkeiten des gewöhnlichen für Ungeübte immer schwierigen Auskochens der Barometer aus eigner Erfahrung kennt, wird mit uns die Ueberzeugung theilen, dass die obige Methode des Herrn Dr. Mohr verdient, weiter geprüft zu werden. Bewährt sie sich, so werden Liebhaber im Stande sein, sich mittelst derselben auf wohlfeile Weise gute, zu wissenschaftlichem Gebauche taugliche Barometer zu verschaffen und sich bei einiger Uebung selbst zu verfertigen, in welcher Beziehung wir vorzüglich die Lehrer an Gymnasien und andern Schulen auf dieselbe aufmerksam machen und zu ihrer Prüfung auffordern möchten. Gute Barometer sind jetzt so kostspielige Instrumente, dass eine wohlfeilere Herstellung derselben für die physikalischen Apparate der Schulen jedenfalls sehr zu wünschen ist. Dann werden sich auch die so nützlichen Barometer-Beobachtungen gewiss noch mehr vervielfältigen als es jetzt der Fall ist.

Maupertuis lag einmal gähnend in seinem Lehnstuhle ausgestreckt und sagte: „Ich wünschte jetzt ein schönes Problem zu lösen, was nicht schwer wäre." Diese Aeusserung mahlt ihn ganz. (Aus Chamforts Werken).

Mehrere Züge, welche Maupertuis's ungemeine Eitelkeit und Sucht Aufsehen zu erregen bekunden, findet man in Bossut's Geschichte der Mathematik. Theil II. S. 337 der deutschen Uebersetzung. Er war bekanntlich einer der Mathematiker, welche im Jahre 1736 auf Veranlassung der französischen Akademie der Wissenschaften nach Lappland geschickt wurden, um dort die Grösse eines Meridiangrades der Erde zu messen. Als die Commission aus Lappland zurückgekehrt war, hatte Maupertuis nichts Angelegentlicheres zu thun, als überall, in der Akademie, im Publikum, in der grossen Welt, worin er viel lebte, das Resultat einer Operation zu verkündigen, von welcher er sich gewissermassen allen Ruhm zueignete, an welcher er indess als Mitarbeiter nur einen sehr geringen Antheil hatte. Er liess sich sogar in lappländischer Kleidung und auf die Erdkugel sich lehnend, gleichsam als wollte er ihr die sphäroidische Gestalt geben, abmahlen, und Voltaire, damals sein Freund, setzte unter den Kupferstich die vier folgenden schlechten Verse:

Ce globe mal connu, qu'il a su mesurer,
Devient un monument où sa gloire se fonde:
Son sort est de fixer la figure du monde,
De lui plaire et de l'éclairer.

Von dem am 23. Juli 1836 verstorbenen berühmten Cometenentdecker Jean Felix Adolphe Gambart, Director der Sternwarte zu Marseille, geboren zu Cette im Mai 1800 erzählt Pontécoulant in seinem kürzlich erschienenen Traité élémentaire de Physique céleste ou Précis d'Astronomie théorique et pratique. Paris. 1840. p. XXVIII. folgenden Zug: Je ne puis me défendre de citer ici une anecdote bien propre à faire juger, je crois, de la pénétration de Gambart, et de l'expérience qu'il avait acquise par son étude continuelle du mouvement des astres. Je me trouvais avec lui à l'Observatoire, en 1835, lorsqu'on y reçut la première nouvelle de l'apparition de la comète de Halley, et les observations envoyées de Rome par M. Dumouchel. A peine Gambart y eut-il jeté à la hâte un coup d'oeil rapide, qu'il me dit: „Pour quel jour avez-vous annoncé le retour de la comète au périhélie? — Pour le 13. Novembre (je n'avais point alors fait à la masse de Jupiter la correction qui m'a conduit à reculer cette époque jusqu'au 15. Novembre). — Et M. Damoiseau? continue Gambart. — Il annonce son passage pour le 4. — C'est vous qui avez raison, s'écrie-t-il, la comète sera au périhélie du 15 au 17. — Elle y passa le 16, comme on sait; ainsi un simple regard jeté sur le mouvement, pendant quelques jours, de cet astre en ascension droite et en déclinaison, avait suffi à l'habile observateur pour deviner toutes les circonstances de sa marche. — Eine Biographie Gambarts findet man in der Bibliothèque universelle de Genève. Nouvelle Série. T. IV. p. 345.

XLV.

Correspondenz.

Auszug aus einem Schreiben des Herrn Majors und Ritter Dr. G. W. Müller zu Hannover an den Herausgeber.

Hannover, 18. Mai 1841.

Durch Ihre gütigen Zeilen bin ich veranlasst worden mir das erschienene erste Heft des Archivs kommen zu lassen, dessen Inhalt bereits viel Interesse gewährt. Zu der schönen Abhandlung Nr. XIV. von Ihnen selbst darf ich mir die Bemerkung erlauben, dass eine vollständige Auflösung des Pothenot'schen Problems von mir, als Beispiel der Anwendung der Lehre vom Zuge im 3ten Hefte XV. Bandes des Crelle'schen Journals gegeben worden ist. Der Gang der Auflösung ist folgender:

Damit die Aufgabe eine bestimmte bleibe, darf weder der Umkreis der drei bekannten Punkte A, B, C, noch eine von den drei geraden Linien AB, AC, BC durch den Messungs-Standpunkt D führen. Von den drei Umkreisen, die demnach durch D und zwei von den drei bekannten Punkten führen, wähle ich nun einen, z. B. den Umkreis ABD, und bestimme durch die allgemeine Eigenschaft der Peripherie-Winkel aus den in D gemessenen Winkeln und aus den rechtwinkligen Coordinaten der Punkte A, B zuerst die Coordinaten des Punktes E, in welchem die gerade Linie DC den Umkreis ausser in D noch trifft, und darauf mit Zuziehung der Coordinaten des Punkts C die des Punkts D. Es ergeben sich dabei die letzteren durch Vermittelung der relativen Polar-Coordinaten des Punkts D, sowohl von A, B als E aus.

Zur Vergleichung beider Auflösungen mit einander füge ich folgende Uebersicht meines Rechnungsgangs an. Es mögen die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte durch die nebengesetzten Buchstaben $A(a, b)$, $B(a', b')$, $C(a'', b'')$, $E(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $D(x, y)$, ferner die durch Messung in D bekannt werdenden Winkel $A\hat{D}B$ durch α, $A\hat{D}C$ durch β, $B\hat{D}C$ durch $\gamma = -\alpha + \beta$ bezeichnet sein, so erhält man vorbereitend die relativen Polar-Coordinaten (Θ, r) des Punkts B vom Anfangspunkte A aus durch $\operatorname{tang} \Theta = \frac{b' - b}{a' - a}$, $r = \frac{b' - b}{\sin \Theta} = \frac{a' - a}{\cos \Theta}$.

Setzt man nun 1) $\Theta + \gamma = \Theta'$, 2) $r \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = r'$, so sind (Θ', r') die relativen Polar-Coordinaten des Punkts E vom Anfangspunkte A aus und es ist 3) $\mathfrak{A} = a + r' \cos \Theta'$, 4) $\mathfrak{B} = b + r' \sin \Theta$. Setzt man ferner

$$\left\{\begin{array}{ll} 5. & \frac{b'' - \mathfrak{B}}{a'' - \mathfrak{A}} = \operatorname{tang} \psi \\ 6. & \psi - \beta = u \\ 7. & \psi - \gamma = u' \end{array}\right. \quad \text{desgleichen} \quad \left\{\begin{array}{ll} 8. & r \,.\, \frac{\sin (u - \Theta')}{\sin \alpha} = \mathfrak{r} \\ 9. & r \,.\, \frac{\sin (\psi - \Theta')}{\sin \alpha} = f \\ 10. & r \,.\, \frac{\sin (u - \Theta)}{\sin \alpha} = f' \end{array}\right.$$

so sind respective $(\psi, \mathfrak{r})$, (u, f), (u', f') die relativen Polar-Coordinaten des Punkts D von den Anfangspunkten E, A und B aus. Man hat dann

$$11. \quad \left\{\begin{array}{l} x = \mathfrak{A} + \mathfrak{r} \,.\, \cos \psi \\ y = \mathfrak{B} + \mathfrak{r} \,.\, \sin \psi \end{array}\right.$$

$$12. \quad \left\{\begin{array}{l} x = a + f \,.\, \cos u \\ y = b + f \,.\, \sin u \end{array}\right.$$

$$13. \quad \left\{\begin{array}{l} x = a' + f' \cos u' \\ y = b' + f' \sin u' \end{array}\right.$$

Für die Vergleichung selbst bemerke ich, dass α und β in beiden Auflösungen dasselbe bedeuten, und dass das Resultat Nr. 12. von dem Ihrigen Nr. 14. nur darin sich unterscheidet, dass für die relativen Polar Coordinaten zur gegenseitigen Lagen-Bestimmung der Punkte D und A bei mir der bekannte Punkt A bei Ihnen der unbekannte Punkt D als der relative Anfangspunkt betrachtet wird. Man hat also $f = -\varrho$ und $\operatorname{tang} u = \operatorname{tang} \varphi$.

Nur bemerke ich noch, dass die Lehre vom Zuge voraussetzt, dass der Radius-Vector-Zug eben sowohl negativ als positiv ausfallen kann, und dass die übliche Ausschliessung negativer Werthe zwar in einzelnen Fällen nützlich ist, allein mit der wahrhaft allgemeinen Auffassung im Widerspruche steht. So wird z. B. der Winkel φ, der bei Ihnen in Nr. 11. durch seine Tangente gegeben wird, stets als ein spitzer Winkel genommen werden dürfen, nämlich als ein positiver oder als ein negativer spitzer Winkel, jenachdem die Zahl, welche Nr. 11. für $\operatorname{tang} \varphi$ giebt, eine positive oder eine negative Zahl ist. Es ergiebt sich dann durch Nr. 13. von selbst, ob ϱ eine positive oder eine negative Zahl ist.

XLI.

Untersuchungen über die geometrische Bedeutung der constanten Coefficienten in den allgemeinen Gleichungen der Flächen des zweiten und dritten Grades *).

Von

Herrn L. Mossbrugger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

I. Ueber die geometrische Bedeutung der Constanten in der allgemeinen Gleichung der Flächen des zweiten Grades.

§. 1.

Der allgemeinen Gleichung

$$z^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B'xz + 2C'yz + 2A''z + 2B''y + 2C''x + D = 0 \;\ldots\; 1)$$

der Flächen des zweiten Grades können wir noch folgende zwei Formen geben:

$$z^2 + 2z\{B'x + C'y + A''\} + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B''y + 2C''x + D = 0 \;..\; 2)$$

$$y^2 + 2y\left\{\frac{A'}{B}x + \frac{C'}{B}z + \frac{B''}{B}\right\} + \frac{z^2}{B} + \frac{C}{B}x^2 + \frac{2B'}{B}xz + \frac{2A''}{B}z + \frac{2C''}{C}x + D = 0 \;\ldots\; 3)$$

In diesen Gleichungen berücksichtigen wir kein besonderes Coordinatenssystem. Setzen wir in die zweite derselben statt x und y irgend bestimmte, übrigens aber durchaus willkührliche Werthe x', y', so erhalten wir die mit der Ordinatenachse der z parallelen Ordinaten derjenigen Punkte, in welchen die Fläche, welche wir durch eine der Gleichungen 1), 2) oder 3) ausgedrückt haben, und die wir künftig, der Kürze wegen, die Fläche F nennen wollen, von der Linie $x = x'$, $y = y'$ geschnitten wird.

---

*) Auszug aus einem bald erscheinenden Werke über analytische Geometrie des Raums vom Vf. dieses Aufsatzes.

Durch die so eben genannte Substitution wird also die Gleichung 2) zu:

$$z^2 + 2z\{B'x' + C'y' + A''\} + B'y^2 + C'x^2 + 2A'x'y' + 2B''y' + 2C''x' + D = 0 \ldots . 4)$$

Bezeichnen wir die Ordinaten der obenbenannten Durchschnittspunkte mit z' und $z_{,}$, so wissen wir aus der Theorie der Gleichungen, dass:

$$z' + z_{,} = -2(B'x' + C'y' + A'') \ldots\ldots\ldots 5)$$

Wiederholen wir dieses Verfahren, indem wir in die Gleichung 2) für y die gleiche Ordinate y' wie oben, statt x aber irgend einen anderen bestimmten übrigens aber willkührlichen Werth x'' einführen, und mit z'' und $z_{,,}$ die Ordinaten der Durchschnittspunkte der Linie $x = x''$, $y = y'$ mit der Fläche F bezeichnen; diese Ordinaten werden zugleich die Wurzeln der durch jene Substitution aus 2) entstandenen Gleichung sein, wie dieses auch bei den Ordinaten z' und $z_{,}$ in Beziehung auf die Gleichung 4) der Fall ist, und wir bekommen wie vorhin die Gleichung:

$$z'' + z_{,,} = -2(B'x'' + C'y' + A'') \ldots\ldots 6)$$

Subtrahiren wir 5) von 6), so ist:

$$z'' - z' + z_{,,} - z_{,} = -2B'(x'' - x'), \text{also } B' = -\frac{z'' - z' + z_{,,} - z_{,}}{2(x'' - x')} \ldots . 7)$$

Um diesen Ausdruck von B' durch eine geometrische Construction zu bestimmen, schneiden wir Taf. IV. Fig. 1. die Fläche F in den Entfernungen $OK' = x'$, $OK'' = x''$ von der Ebene der yz durch zwei mit dieser parallele Ebenen $Z'K'Y'$, $Z''K''Y''$, und alsdann noch in der Entfernung $OR = y'$ von der Ebene der xz durch eine mit dieser parallele Ebene $Z'''RX'$; diese letztere wird die beiden ersteren Ebenen in zwei mit der Achse der z parallelen Linien $P'H'$, $P''H''$ schneiden; die Fläche F selbst aber wird von den beiden ersteren Ebenen in irgend zwei Linien zweiten Grades $V'M_{,}U'M'$, $V''M_{,,}U''M''$, und von der letzteren Ebene in einer eben solchen Linie $LM_{,}M_{,,}FM''M'$ geschnitten, diese letzte Curve wird jede der beiden vorgenannten im Allgemeinen in zwei Punkten $M_{,}$, M'; $M_{,,}$, M'', welche zugleich auf den Durchschnittslinien $P'H'$, $P''H''$ liegen werden, schneiden, und wir haben daher im Sinne der oben angenommenen Bezeichnung $P'M_{,} = z_{,}$, $P'M' = z'$, $P''M_{,,} = z_{,,}$, $P''M'' = z''$, also, wenn wir uns in der Ebene $Z'''RX'$ die Linien $M_{,}N_{,,}$, $M'N''$ parallel mit der Achse der x gezogen denken:

$$z'' - z' = M''N'', \quad z_{,,} - z_{,} = M_{,,}N_{,,}, \quad x'' - x' = P'P'';$$

mithin ist aus 7)

$$B' = -\frac{M''N'' + M_{,,}N_{,,}}{2P'P''} \ldots . . 8)$$

Setzen wir hingegen in der Gleichung 2) zuerst x' und y', alsdann x' und y'' statt x und y, so finden wir wie vorhin:

$$z' + z_{,} = -2(B'x' + C'y' + A'') \ldots\ldots\ldots 9)$$

$$z''' + z_{,,,} = -2(B'x' + C'y'' + A'') \ldots\ldots . 10)$$

worin z''' und $z_{,,,}$ die Wurzeln der zufolge jener Substitution aus

2) entstandenen Gleichung bezeichnen. Durch Subtraction dieser Gleichungen erhalten wir:

$$z''' - z' + z_{,,,} - z_{,} = -2C'(y'' - y'), \text{ also } C' = -\frac{z''' - z' + z_{,,,} - z_{,}}{2(y'' - y')}.$$

Ohne dass eine besondere Zeichnung nöthig ist, können wir uns in den Entfernungen $OR = y'$, $OR'' = y''$ von der Ebene der xz, mit dieser zwei parallele die Fläche F schneidende Ebenen $Z''RX'$, $Z'''R''X''$, und in der Entfernung $OK' = x'$ von der Ebene der yz parallel mit ihr eine ebenfalls die Fläche F schneidende Ebene $Z'K'Y'$ denken, und analog mit dem Vorhergehenden die mit der Achse der z parallelen Durchschnittslinien $p'h'$, $p''h''$, und die Durchschnittspunkte dieser mit der Fläche F respective durch m', $m_{,}$; m'', $m_{,,}$ bezeichnen, und endlich $m'n''$, $m_{,}n_{,,}$ in der Ebene $Z'K'Y'$ parallel mit der Ebene der yz bis zu ihren Durchschnitten $n_{,,}$ und n'' mit $p''h''$ ziehen, alsdann haben wir wieder:

$$z''' - z' = m''n'', \quad z_{,,,} - z_{,} = m_{,,}n_{,,}, \quad y'' - y' = p''p',$$

$$\text{also } C' = -\frac{m''n'' + m_{,,}n_{,,}}{2p''p'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Führen wir endlich in der Gleichung 3) nach einander x' und z', x'' und z' statt x und y ein, wo x', z', x'' ebenfalls bestimmte aber willkührliche Werthe haben können, so entstehen zwei Gleichungen des zweiten Grades in Beziehung auf y; bezeichnen wir die Wurzeln derselben respective mit y', $y_{,}$; y'', $y_{,,}$; so geben diese zugleich die Grössen der mit der Achse der y parallelen Ordinaten der Durchschnittspunkte μ', $\mu_{,}$; μ'', $\mu_{,,}$ der Linien $(x = x', z = z')$, $(x = x'', z = z')$ oder $(\pi'h')$, $(\pi''h'')$, mit der Fläche F, und wir erhalten, wenn wir uns $\mu'\nu''$, $\mu_{,}\nu_{,,}$ parallel mit der Achse der x gezogen denken, wie oben:

$$y' + y_{,} = -2\left\{\frac{A'}{B}x' + \frac{C'}{C}z' + \frac{C''}{C}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 12)$$

$$y'' + y_{,,} = -2\left\{\frac{A'}{B}x'' + \frac{C'}{C}z' + \frac{C''}{C}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 13)$$

$$\text{und } -\frac{y'' - y' + y_{,,} - y_{,}}{2(x'' - x')} = \frac{A'}{B}, \text{ also auch } \frac{A'}{B} = -\frac{\mu''\nu'' + \mu_{,,}\nu_{,,}}{2\pi''\pi'} \ldots\ldots 14)$$

Sobald nun B bestimmt ist, kann dieser Ausdruck einen bestimmten Werth von A' geben. Wie wir auch die Hülfsebenen $Z'K'Y'$, $Z''K''Y''$, $Z'''RX'$ (Taf. IV. Fig. 1.), oder bei der Bestimmung von C' (wo keine Figur beigefügt ist) $Z'K'Y'$, $Z''RX'$, $Z'''R''X''$ u. s. w. parallel mit sich selbst verrücken mögen, die ersten Theile der Gleichungen 8), 11) und 14) behalten immer einen und denselben Werth, es ist auch über die Lage der Coordinatenachsen durchaus keine Bestimmung angenommen worden, mithin können wir auch die Lage der vorgenannten schneidenden Ebenen immerhin beliebig annehmen, nur muss die parallele Lage der beziehlichen Ebenen beibehalten werden. Die in Rede stehende Eigenschaft bezieht sich auch auf die besonderen Fälle, wenn die Fläche F in ein System zweier paralleler Ebenen degenerirt. Die Gleichungen 5), 9), 10), 12), 13) bestehen auch dann noch, wenn die obengenannten schneidenden Ebenen der Fläche F nicht mehr begegnen, denn, auch für den Fall imaginärer Wurzeln einer quadratischen Gleichung, bleibt die Summe derselben doch reell, bloss fällt in diesem Falle die geometrische Deutung hinweg.

Wir können die in 8), 11) und 14) gefundenen Ausdrücke für die Coefficienten B', C'', $\frac{A'}{B}$ für besondere Fälle noch vereinfachen, indem wir die beziehlichen schneidenden Ebenen so bestimmen, dass

$$z_{,,} = z_{,}, \quad y_{,,} = y_{,}$$

wird. Wir brauchen zu diesem Ende in der Fläche F nur Linien respective parallel mit der Achse der x und y zu ziehen, und durch die Durchschnitte derselben mit der Fläche F die parallelen Ebenen zu legen. Hierdurch fallen die Punkte $M_{,,}$ und $N_{,,}$; $m_{,,}$ und $n_{,,}$; $\mu_{,,}$ und $\nu_{,,}$ zusammen, und wir haben statt der vorgenannten Gleichungen folgende:

$$B' = -\frac{M''N''}{2P''P'}, \quad C' = -\frac{m''n''}{2p''p'}, \quad \frac{A'}{B} = -\frac{\mu''\nu''}{\pi''\pi'} \quad \ldots\ldots 15)$$

Wir bemerken noch, dass wir aus den Gleichungen 5) oder 9) erhalten:

$$\frac{z' + z_{,}}{2} = -(B'x' + C'y' + A'').$$

Der erste Theil dieser Gleichung bezeichnet die Ordinate der Mitte des von der Fläche interceptirten Stücks der geradenLinie ($x = x'$, $y = y'$); bezeichnen wir diese Ordinate mit z, und lassen die Accente von x', y' weg, so erhalten wir

$$z + B'x + C'y + A'' = 0 \ldots\ldots 16)$$

Diese Gleichung erkennen wir, indem wir x, y und z als veränderlich betrachten, als eine solche, welche diejenige Diametralebene der Fläche F ausdrückt, welche alle der Achse der z parallele Sehnen halbirt. Auf gleiche Weise erhalten wir aus 12) die Gleichung

$$\frac{y' + y_{,}}{2} = -\left(\frac{A'}{B}x' + \frac{C'}{B}z' + \frac{C''}{C}\right)$$

oder, wenn wir $\frac{y' + y_{,}}{2} = y$ setzen und die Accente weglassen,

$$By + A'x + C'z + C'' = 0 \ldots . 17)$$

Diese Gleichung drückt aber diejenige Diametralebene aus, welche alle mit der Achse der y parallelen Sehnen halbirt.

§. 2.

Wenn wir in der allgemeinen Gleichung

$$z^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B'xz + 2C'yz + 2A''z + 2B''y + 2C''x + D = 0 \ldots\ldots 1)$$

der Flächen des zweiten Grades zuerst x und y, alsdann x und z, und zuletzt y und z gleich Null setzen, so erhalten wir die drei Gleichungen

$$z^2 + 2A''z + D = 0; \; By^2 + 2B''y + D = 0; \; Cx^2 + 2C''x + D = 0 \ldots 2)$$

Diese Gleichungen werden uns die Durchschnittspunkte der Coordinatenachsen mit der Fläche F (welche wieder durch die Gleichung 1) ausgedrückt werden soll) gehen; bezeichnen wir nämlich respective mit z', z''; y', y''; x', x'' die Wurzeln dieser Gleichungen, so ist bekannt, dass

$$z'z''=D;\ y'y''=\frac{D}{B};\ x'x''=\frac{D}{B}\ \ldots\ldots\ 3)$$

ist; bezeichnen wir den Anfang des Coordinatensystems mit O, die Durchschnittspunkte der Achsen der z, der y und der x mit der Fläche F, respective durch R, R'; Q, Q'; P, P'; so erhalten wir aus 3)

$$OR\,.\,OR'=D,\ \frac{OR\,.\,OR'}{OQ\,.\,OQ'}=B,\ \frac{OR\,.\,OR'}{OP\,.\,OP'}=C\ \ldots\ldots\ 4)$$

Führen wir den so eben gefundenen Werth des Coefficienten B in dem in §. 1. 14) gefundenen Werth von $\frac{A'}{B}$ ein, so bekommen wir

$$A'=-\frac{(\mu''\nu''+\mu_{,,}\nu_{,,})\,.\,OR\,.\,OR'}{2\pi''\pi'\,.\,OQ\,.\,OQ'}\ \ldots\ldots\ldots\ 5)$$

Aus §. 1. 15) folgt auch, dass

$$A'=-\frac{\mu''\nu''\,.\,OR\,.\,OR'}{2\pi''\pi'\,.\,OQ\,.\,OQ'}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 6)$$

Da in der allgemeinen Gleichung 1) der Werth von B und C der gleiche bleibt, wie wir auch den Coordinatenanfang O mit Beibehaltung der gleichen Achsenrichtung verlegen mögen, so bleibt der Quotient der Producte $OR\,.\,OR'$ und $OQ\,.\,OQ'$, wie auch jener der Producte $OR\,.\,OR'$ und $OP\,.\,OP'$ derselbe für alle beliebigen Punkte, durch die wir nach bestimmter Achsenrichtung drei gerade Linien legen. Da aber auch der Quotient $\frac{\mu''\nu''+\mu_{,,}\nu_{,,}}{\pi''\pi'}$ für jede mit sich selbst parallele Lage den Ebenen $Z'K'Y'$, $Z''K''Y''$ (Taf. IV. Fig. 1.) beständig bleibt, so bleiben es auch unter der Bedingung der parallelen Achsenrichtung die in 5) und 6) gefundenen Ausdrücke für den Coefficienten A'. Die Construction des Ausdrucks von D ist in dem Falle, dass die Achse der z der Fläche wirklich begegnet, immer möglich. In demjenigen Falle aber, wenn diese Achse der Fläche F nicht begegnet, giebt die Gleichung

$$z^2+2A''z+D=0$$

imaginäre Wurzeln, deren Product jedoch immer reell ist. Im ersten Falle, wenn nämlich die Achse der z der Fläche begegnet, ist D positiv, wenn die beiden Durchschnittspunkte R, R' auf derselben Seite des Coordinaten-Anfangs liegen, negativ hingegen im entgegengesetzten Falle. Für das Ellipsoid, das eintheilige Hyperboloid und beide Paraboloide ist also D positiv oder negativ jenachdem der Coordinatenanfang ausserhalb oder innerhalb der Fläche genommen wird. Beim zweitheiligen Hyperboloid ist, wenn die Achse der z beide Flächentheile trifft und der Coordinatenanfang O innerhalb des einen liegt, D positiv; liegt der Punkt O aber zwischen beiden Flächentheilen, so ist D negativ; trifft die Achse der z nur einen Flächentheil und liegt der Coordinatenanfang ausserhalb desselben, so ist D positiv, liegt er aber innerhalb, so ist D negativ. Das Zeichen von B und C hängt davon ab, ob die Producte $OR\,.\,OR'$ und $OQ\,.\,OQ'$ der auf den Coordinatenachsen OZ, OY abgeschnittenen Stücke, ebenso die Producte $OR \,.\, OR'$ und $OP \,.\, OP'$ der auf den Achsen der z und der x abgeschnittenen Stücke von gleichem oder ungleichem Zeichen sind.

Setzen wir in der allgemeinen Gleichung 1) $B = C = 1$, so wird $OR \,.\, OR' = OQ \,.\, OQ' = OP \,.\, OP'$. In diesem speciellen Falle ist die Fläche F eine Kugel.

§. 3.

Zur Bestimmung der Coefficienten A'', B'', C'' bedienen wir uns wieder der Gleichungen 2) des vorigen Paragraphen. Aus der ersten

$$z^2 + 2A''z + D = 0$$

ist, wenn z' und z'' die Wurzeln derselben bezeichnen,

$$z' + z'' = -2A''; \text{ also } A'' = -\frac{z' + z''}{2} \text{ oder } A'' = -\frac{OR + OR'}{2}.$$

Bezeichnen wir mit M die Mitte des Segments RR', so ist

$$A'' = -OM \ldots\ldots 1)$$

Aus den beiden anderen Gleichungen 2) in §. 2 erhalten wir

$$\frac{B''}{B} = -\frac{y' + y''}{y}, \quad \frac{C''}{C} = -\frac{x' + x''}{2} \ldots\ldots 1')$$

Bezeichnen wir mit M' und M'' die Mitten der Segmente QQ'' und PP', so erhalten wir zufolge der Gleichungen 4) des vorigen Paragraphen:

$$B'' = -\frac{OM' \,.\, OR \,.\, OR'}{OQ \,.\, OQ'} \ldots\ldots 2); \quad C'' = -\frac{OM'' \,.\, OR \,.\, OR'}{OP \,.\, OP'} \ldots 3)$$

Wir können also in dem Falle, dass die Achsen der z, y und x die Fläche F wirklich schneiden, die Werthe von A'', B'' und C'' leicht construiren. A'' ist nämlich gleich dem mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Abstande der Mitte der auf der Achse der z von der Fläche abgeschnittenen Chorde. In demjenigen Falle aber, wo die Achsen der Fläche nicht begegnen, müssen wir diese Coefficienten auf andere Weise bestimmen. Wir wollen diese Bestimmung zuerst bei dem Coefficienten A'' vornehmen. Gebrauchen wir hierzu die in §. 1. 16) gefundene Gleichung derjenigen Diametralebene, die alle der Achse der z parallele Chorden halbirt, nämlich die Gleichung:

$$z + B'x + C'y + A'' = 0 \ldots\ldots\ldots 4)$$

in welcher A'' die Ordinate des Durchschnittspunkts dieser Ebene mit der Achse der z ist, jedoch mit entgegengesetztem Zeichen genommen. Ziehen wir daher irgend drei mit der Achse der z parallele Sehnen, so bestimmt diejenige Ebene, welche durch die drei Halbirungspunkte dieser drei Sehnen geht, auf der Achse der z eine Ordinate, die gleich $-A''$ ist. Die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Ebene 4) mit den beiden anderen Coordinatenachsen sind $-\frac{A''}{B'}$ und $-\frac{A''}{C'}$. Nehmen wir die Gleichungen

$$A'x + By + C'z + B'' = 0 \ldots\ldots 5)$$

$$Cx + A'y + B'z + C'' = 0 \ldots\ldots 6)$$

der beiden anderen Diametralebenen, welche respective die mit der Achse der y und der x parallelen Sehnen halbiren, so finden wir für die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Ebene 5) mit den Coordinatenachsen der z, y und x:

$$z_{,} = -\frac{B''}{C'},\ y_{,} = -\frac{B''}{B'},\ x_{,} = -\frac{B''}{A'};$$

und für jene der Ebene 6) mit den gleichen Achsen:

$$z_{2} = -\frac{C''}{B'},\ y_{2} = -\frac{C''}{A'};\ x_{2} = -\frac{C''}{C}.$$

Bezeichnen wir mit C, B und A die Durchschnittspunkte der Diametralebene 4) mit den Achsen der z, y und x, ebenso mit C', B', A' und C'', B'', A'' die Durchschnittspunkte der Ebenen 5) und 6) mit jenen Achsen, so haben wir:

$$OC = -A'',\ OB = -\frac{A''}{C'},\ OA = -\frac{A''}{B'};$$

$$OC' = -\frac{B''}{C'},\ OB' = -\frac{B''}{B'};\ OA' = -\frac{B''}{A'};$$

$$OC'' = -\frac{C''}{B'},\ OB'' = -\frac{C''}{A'},\ OA'' = -\frac{C''}{C}.$$

Aus diesen folgt aber: $\frac{A''}{B''} = \frac{OB}{OC'}$, $\frac{A''}{C''} = \frac{OA}{OC''}$, mithin

$$B'' = -\frac{OC\,.\,OC'}{OB},\ C'' = -\frac{OC\,.\,OC''}{OA},\ A'' = -OC \ldots 7)$$

Wir haben also allen Coefficienten ihre geometrische Bedeutung gegeben; zur deutlichern Uebersicht wollen wir diese mit ihren zukommenden Werthen hier in der gleichen Ordnung, wie sie gefunden wurden, anschliessen:

$$B' = -\frac{M''N'' + M_{,,}N_{,,}}{2P''P'}\ (\S.1.8) \text{ oder auch } B' = -\frac{M''N''}{2P''P'}\ (\S.\ 1.\ 15)\} \ldots 8)$$

$$C' = -\frac{m''n'' + m_{,,}n_{,,}}{2p''p'}\ (\S.\ 1.\ 11) \text{ oder auch } C' = -\frac{m''n''}{2p''p'}(\S.1.15)\} \ldots 9)$$

$$A' = -\frac{(\mu''\nu'' + \mu_{,,}\nu_{,,})\,.\,OR\,.\,OR'}{2\pi''\pi'OQ\,.\,OQ'}\ (\S.\ 1.\ 14) \text{ oder auch } A'$$

$$= -\frac{\mu''\nu''\,.\,OR\,.\,OR'}{2\pi''\pi'OQ\,.\,OQ'}\ (\S.\ 1.\ 15)\} \ldots 10)$$

$$B = \frac{OR\,.\,OR'}{OQ\,.\,OQ'} \ldots (\S.\ 2.\ 4) \ldots 11);\ C = \frac{OR\,.\,OR'}{OP\,.\,OP'}(\S.\ 2.\ 4) \ldots 12;$$

$$D = OR\,.\,OR'\ (\S.\ 2.\ 4) \ldots 13)$$

Wenn die Fläche F von den Achsen getroffen wird; so ist

$$A'' = -OM\ (\S.\ 3.\ 1) \ldots 14;\ B'' = -\frac{OM'\,.\,OR\,.\,OR'}{OQ\,.\,OQ'}\ (\S.\ 3.\ 2) \ldots 15);$$

$$C'' = -\frac{OM'\,.\,OR\,.\,OR'}{OQ\,.\,OQ'}\ (\S.3.3) \ldots 16)$$

Wenn die Fläche F von den Achsen nicht getroffen wird; so ist

$$A'' = - OC \text{ (§. 3. 7) .. 17; } B'' = - \frac{OC \, . \, OC'}{OB} \text{ (§. 3. 7) .. 18);}$$

$$C'' = - \frac{OC \, . \, OC''}{OA} \text{ (§. 3. 7) .. 19)}$$

§. 4.

Wir wollen, bevor wir weitere Anwendungen von diesen Bestimmungeu machen, noch untersuchen, welche geometrische Deutung die übrigen Coefficienten zulassen, wenn einer oder mehrere in der allgemeinen Gleichung

$$z^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B'xz + 2C'yz + 2A''z + 2B''y$$
$$2C''x + D = 0 \dots 1)$$

der Flächen des zweiten Grades Null werden.

Wir sehen aus §. 1. 8), §. 2. 4) und §. 3. 1), dass keiner der Coefficienten B', C'; B, C, D und A'' von den übrigen abhängig ist, mithin kann einer oder mehrere der übrigen Coefficienten A', B'', C'' zugleich Null werden, ohne dass die geometrische Bedeutung der erstern eine Aenderung erleidet. Wohl aber erkennen wir aus §. 1. 14) und §. 3. 1'), dass A' und B'' von B, C'' hingegen von C abhängig ist, und dass für $B = 0$ und $C = 0$ im Allgemeinen auch A', B'', C'' zu Null werden, in welchem Falle auch die Fläche F niemals ein Ellipsoid sein kann, welches schon daraus erhellet, dass die Gleichung $By^2 + 2B''y + D = 0$, wenn $B = 0$ ist, in $2B''y + D = 0$ übergeht, welche nur eine einzige, aber eine reelle Wurzel hat, weshalb die Transversale OQQ' weder eine Tangente an die Fläche sein, noch dieselbe in zwei Punkten treffen kann, was doch nothwendig Statt finden müsste, wenn die Fläche F ein Ellipsoid wäre und der Punkt O nicht auf der Oberfläche desselben läge, welches wir aber bis jetzt noch vorausgesetzt haben. Ist aber auch $D = 0$, so folgt aus §. 3. 13), dass einer der Factoren OR oder OR' gleich Null ist, dies kann aber nur dann Statt finden, wenn der Coordinatenanfang O auf der Fläche F selbst liegt, in welchem Falle aber alsdann sowohl einer der Factoren OQ oder OQ', wie auch OP oder OP', zu Null werden muss, dadurch alsdann B, C, A', B'', C'' unbestimmt werden. Diese Coefficienten müssen in diesem Fall wie in §. 3. mittelst der Diametralebenen 4) 5) 6) bestimmt werden. Am gleichen Orte haben wir gefunden, dass $B'' = - \frac{OC \, . \, OC'}{OB}$, und dass $OA' = - \frac{B''}{A'}$ ist, woraus $A' = \frac{OC \, . \, OC'}{OB \, . \, OA'}$ wird. Wir bemerken ferner noch, dass, wenn B und C zugleich negativ sind, alsdann eines der Segmente OR oder OR' in Beziehung auf das andere eine entgegengesetzte Richtung haben muss; dies kann aber bei dem Ellipsoid nur dann stattfinden, wenn der Punkt O innerhalb der Fläche liegt, in diesem Falle haben aber auch die Segmente OP, OP' wie auch OQ und OQ' entgegengesetzte Richtung, also sind die Producte $OP \, . \, OP'$, $OQ \, . \, OQ'$, so wie das Product $OR \, . \, OR'$ negativ, folglich die Quotienten $\frac{OR \, . \, OR'}{OQ \, . \, OQ'}$, $\frac{OR \, . \, OR'}{OP \, . \, OP'}$ positiv, woraus hervorgeht, dass bei dem Ellipsoid die Coefficienten B und C immer positiv sein müssen. Ganz auf gleiche Art können wir zeigen, dass, wenn z^2 das Vorzeichen $+$ hat, die beiden Coefficienten B und C beim zweitheiligen Hyperboloid zugleich negativ sein müssen, beim eintheiligen Hyperboloid aber nur einer von beiden.

Ist ferner $A''=0$, $B''=0$, $C''=0$, so folgt nach §. 2. 3) und §. 3. 1'), dass $\frac{z'+z''}{2}=0$, $\frac{y'+y''}{2}=0$, $\frac{x'+x''}{2}=0$, also $OR=-OR'$, $OQ=-OQ'$, $OP=-OP'$ ist; die Punkte R und R'; Q, Q'; P, P' liegen also nicht nur auf entgegengesetzten Seiten des Punktes O, sondern auch gleich weit von demselben entfernt, auch erhellet, dass der Punkt O, weil kein besonderes Coordinatensystem berücksichtigt wurde, der Mittelpunkt der Fläche sein muss. Wir erhalten auch nach der zu Ende von §. 3. gegebenen Tabelle $D=-OR^2$, $B=\frac{OR^2}{OQ^2}$, $C=\frac{OR^2}{OP^2}$. Wir sehen schon aus dem so eben Angegebenen, dass, wenn auf diesem Wege die Discussion der Flächen vorgenommen würde, dieselbe weit anschaulichere Resultate als die bisher gefundenen liefern würde.

§. 5.

Aus den am Ende von §. 3. angegebenen Coefficientenwerthen lassen sich viele merkwürdige Eigenschaften der Flächen des zweiten Grades deduciren.

Wir haben nämlich für jedes beliebige Coordinatensystem gefunden, dass

$$B=\frac{OR.OR'}{OQ.OQ'},\ C=\frac{OR.OR'}{OP.OP'}.$$

Verlegen wir den Coordinatenanfang O nach irgend einem andern beliebigen Punkt O_1 der Achse der z oder der Linie ORR', und ziehen durch O_1 mit den vorigen Achsen der x und y respective die parallelen $O_1P_1P_1'$, $O_1Q_1Q_1'$, welche die Fläche F ebenfalls in den reellen oder imaginären Punkten P_1, P_1'; Q_1, Q_1' treffen, so folgt aus der Bemerkung, dass die Coefficienten B und C durch eine parallele Verschiebung des Coordinatensystems durchaus keine Veränderung erleiden, dass ebenfalls

$$B=\frac{O_1R.O_1R'}{O_1Q_1.O_1Q_1'},\ C=\frac{O_1R.O_1R'}{O_1P_1.O_1P_1'}.$$

Setzen wir die Werthe von B, wie auch die von C einander gleich, so erhalten wir:

$$\frac{OR.OR'.O_1Q_1.O_1Q_1'}{OQ.OQ'.O_1R.O_1R'}=1;\ \frac{OR.OR_1.O_1P_1.O_1P_1'}{OP.OP'.O_1R.O_1R'}=1\ldots 1)$$

Verlegen wir ferner den Coordinatenanfang in einen ganz beliebigen Ort O_2 und nehmen ein ganz beliebiges Coordinatensystem, dessen Achsen O_2R_1', O_2Q_2', O_2P_2' mit jenen des vorhergehenden Systems durchaus in keiner Beziehung stehen, bezeichnen endlich mit B_1, C_1 die Coefficienten von y^2 und x^2 in der allgemeinen Gleichung der Fläche F (wo jedoch B_1 und C_1 ganz andere Werthe haben als B und C), so ist ebenfalls nach §. 3. 11). 12)

$$B_1=\frac{O_2R_1.O_2R_1'}{O_2Q_2.O_2Q_2'},\ C_1=\frac{O_2R_1.O_2R_1'}{O_2P_2.O_2P_2'}.$$

Es bezeichnen R_1, R_1'; Q_2, Q_2'; P_2, P_2' die Durchschnittspunkte der neuen Achsen O_2R_1', O_2Q_2', O_2P_2' der z, y und x mit der Fläche F. Verlegen wir jetzt den Coordinatenanfang O_2 nach irgend einem andern Punkt O_3 der Achse O_2R_1' der z, und ziehen O_3Q_3',

$O_3P'_3$ respective parallel mit den Achsen $O_2Q'_2$, $O_2P'_2$ der y und x des nächstvorhergehenden Coordinatensystems, so haben wir, weil bei dieser Coordinaten-Veränderung die Werthe von B_1 und C_1 unverändert bleiben, wenn Q_3, Q'_3, P_3, P'_3 die Durchschnittspunkte der neuen Achsen der y und x mit der Fläche F bezeichnen, nach den gleichen Nummern:

$$B_1 = \frac{O_3R_1 \cdot O_3R'_1}{O_3Q_3 \cdot O_3Q'_3},\quad C_1 = \frac{O_3R_1 \cdot O_3R'_1}{O_3P_3 \cdot O_3P'_3}.$$

Setzen wir diese Werthe von B_1 und C_1 jenen vorhin gefundenen gleich, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{O_2R_1 \cdot O_2R'_1 \cdot O_3Q_3 \cdot O_3Q'_3}{O_2Q_2 \cdot O_2Q'_2 \cdot O_3R_1 \cdot O_3R'_1} = 1 \\[2ex] \dfrac{O_2R_1 \cdot O_2R'_1 \cdot O_3P_3 \cdot O_3P'_3}{O_2P_2 \cdot O_2P'_2 \cdot O_3R_1 \cdot O_3R'_1} = 1 \end{array}\right\} \ldots\ldots 2)$$

Setzen wir dieses Verfahren, wodurch wir die Gleichungen 1) und 2) erhalten haben, weiter fort, und bezeichnen die Durchschnittspunkte der Fläche F mit den aufeinanderfolgenden Achsen der z, y und x respective mit

$$R_2,\ R'_2,\ R_3,\ R'_3,\ \ldots\ldots R_n,\ R'_n;$$
$$Q_4,\ Q'_4,\ Q_5,\ Q'_5,\ Q_6,\ Q'_6,\ \ldots\ldots Q_{2n+1},\ Q'_{2n+1};$$
$$P_4,\ P'_4,\ P_5,\ P'_5,\ P_6,\ P'_6,\ \ldots\ldots P_{2n+1},\ P'_{2n+1};$$

so erhalten wir:

$$\frac{O_4R_2 \cdot O_4R'_2 \cdot O_5Q_5 \cdot O_5Q'_5}{O_4Q_4 \cdot O_4Q'_4 \cdot O_5R_2 \cdot O_5R'_2} = 1;\ \frac{O_4R_2 \cdot O_4R'_2 \cdot O_5P_5 \cdot O_5P'_5}{O_4P_4 \cdot O_4P'_4 \cdot O_5R_2 \cdot O_5R'_2} = 1 \Big\}\ 3)$$

$$\frac{O_6R_3 \cdot O_6R'_3 \cdot O_7Q_7 \cdot O_7Q'_7}{O_6Q_6 \cdot O_6Q'_6 \cdot O_7R_3 \cdot O_7R'_3} = 1;\ \frac{O_6R_3 \cdot O_6R'_3 \cdot O_7P_7 \cdot O_7P'_7}{O_6P_6 \cdot O_6P'_6 \cdot O_7R_3 \cdot O_7R'_3} = 1 \Big\}\ 4)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{O_{2n}R_n \cdot O_{2n}R'_n \cdot O_{2n+1}Q_{2n+1} \cdot O_{2n+1}Q'_{2n+1}}{O_{2n}Q_{2n} \cdot O_{2n}Q'_{2n} \cdot O_{2n+1}R_n \cdot O_{2n+1}R'_n} = 1; \\[2ex] \qquad \dfrac{O_{2n}R_n \cdot O_{2n}R'_n \cdot O_{2n+1}P_{2n+1} \cdot O_{2n+1}P'_{2n+1}}{O_{2n}P_{2n} \cdot O_{2n}P'_{2n} \cdot O_{2n+1}R_n \cdot O_{2n+1}R'_n} = 1 \end{array}\right\} 5)$$

Aus der Multiplication der Gleichungen 1) 2) ... 5) erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\dfrac{OR \cdot OR' \cdot O_2R_1 \cdot O_2R'_1 \cdot O_4R_2 \cdot O_4R'_2 \ldots\ldots O_{2n}R_n \cdot O_{2n}R'_n}{O_1R \cdot O_1R' \cdot O_3R_1 \cdot O_3R'_1 \cdot O_5R_2 \cdot O_5R'_2 \ldots\ldots O_{2n+1}R_n \cdot O_{2n+1}R'_n}\right\}^2 = \\[2ex] \dfrac{OP \cdot OP' \cdot OQ \cdot OQ' \cdot O_2P_2 \cdot O_2P'_2 \cdot O_2Q_2 \cdot O_2Q'_2 \cdot\cdot}{O_1P_1 \cdot O_1P'_1 \cdot O_1Q_1 \cdot O_1Q'_1 \cdot O_3P_3 \cdot O_3P'_3 \cdot O_3Q_3 \cdot O_3Q'_3 \cdot\cdot} \\[2ex] \qquad \dfrac{\ldots O_{2n}P_{2n} \cdot O_{2n}P'_{2n} \cdot O_{2n}Q_{2n} \cdot O_{2n}Q'_{2n}}{\ldots O_{2n+1}P_{2n+1} \cdot O_{2n+1}P'_{2n+1} \cdot O_{2n+1}Q_{2n+1} \cdot O_{2n+1}Q'_{2n+1}} \end{array}\right\} 6)$$

Hätten wir die mit ungeraden Stellenzahlen versehenen Anfangspunkte der Coordinaten auf den Linien OQ', $O_2Q'_2$, $O_4Q'_4$ ...... oder auch auf OP', $O_2P'_2$, $O_4P'_4$ ...... genommen, so würden wir ähnliche Gleichungen, wie die in 6) erhalten haben.

Sind die sämmtlichen Achsen der z nemlich OR', O_1R', $O_2R'_1$, ... so gezogen, dass sie die Fläche F berühren, so haben wir $OR = OR'$, $O_1R = O_1R'$, $O_2R_1 = O_2R'_1$, u. s. w. und die Gleichung 6. geht in folgende über:

$$\left\{\frac{OR \,.\, O_2R_2 \,.\, O_4R_4 \,\ldots\ldots\, O_{2n}R_{2n}}{O_1R \,.\, O_3R_1 \,.\, O_5R_3 \ldots\ldots O_{2n+1}R_n}\right\}^4 = \frac{OP \,.\, OP' \,.\, OQ \,.\, OQ' \ldots\ldots O_{2n}P_{2n} \,.\, O_{2n}P'_{2n} \,.\, O_{2n}Q_{2n} \,.\, O_{2n}Q'_{2n}}{OP_1 \,.\, O_1P'_1 \,.\, O_1Q_1 \,.\, O_1Q'_1 \ldots\ldots O_{2n+1}P_{2n+1} \,.\, O_{2n+1}P'_{2n+1} \,.\, O_{2n+1}Q_{2n+1} \,.\, O_{2n+1}Q'_{2n+1}} \quad 7)$$

Nehmen wir aber die beiden andern Achsen jedesmal tangirend, so dass also OQ', $O_1Q'_1$, $O_2Q'_2$,......; OP', $O_1P'_1$, $O_2P'_2$...... die Fläche F berühren, so wird $OQ=OQ'$, $O_1Q_1=O_1Q'_1$, $O_2Q_2=O_2Q'_2$,....; $OP=OP'$, $O_1P_1=O_1P'_1$, $O_2P_2=O_2P'_2$...... und wir erhalten aus 6) folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{OR\,.\,OR'\,.\,O_2R_1\,.\,O_2R'_1\,.\,O_4R_2\,.\,O_4R'_2\,...\,O_{2n}R_n\,.\,O_{2n}R'_n}{O_1R\,.\,O_1R'\,.\,O_3R_1\,.\,O_3R'_1\,.\,O_5R_2\,.\,O_5R'_2\,...\,O_{2n+1}R_n\,.\,O_{2n+1}R'_n}=\\&=\frac{OP\,.\,OQ\,.\,O_2P_2\,.\,O_2Q_2\,.\,O_4P_4\,.\,O_4Q_4\,....\,O_{2n}P_n\,.\,O_{2n}Q_{2n}}{O_1P\,.\,O_1Q\,.\,O_3P_3\,.\,O_3Q_3\,.\,O_5P_5\,.\,O_5Q_5\,....\,O_{2n+1}P_{2n+1}\,.\,O_{2n+1}Q_{2n+1}}\end{aligned}\right\}\ 8)$$

Sind endlich in jedem Coordinatensystem alle drei Achsen tangirend, so ist aus 6)

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\frac{OR\,.\,O_2R_2\,.\,O_4R_4\,.....\,O_{2n}R_n}{O_1R\,.\,O_3R_1\,.\,O_5R_2\,.....\,O_{2n+1}R_n}\right\}^2\\&\qquad=\frac{OP\,.\,OQ\,.\,O_2P_2\,.\,O_2Q_2\,.....\,O_{2n}P_{2n}\,.\,O_{2n}Q_{2n}}{O_1P\,.\,O_1Q\,.\,O_3P_3\,.\,O_3Q_3\,.....\,O_{2n+1}P_{2n+1}\,.\,O_{2n+1}Q_{2n+1}}\end{aligned}\right\}\ 9)$$

Vervielfachen wir die Gleichungen der nemlichen Nummern 1, 2, ... 5, jedoch so, dass die rechts und die links besondere Producte bilden, so erhalten wir:

$$\frac{OR.OR'.O_1Q_1.O_1Q'_1.O_2R_1.O_2R'_1......O_{2n}R_n.O_{2n}R'_n.O_{2n+1}Q_{2n+1}.O_{2n+1}Q'_{2n+1}}{OQ.OQ'.O_1R.O_1R'.O_2Q_2.O_2Q'_2......O_{2n}Q_{2n}.O_{2n}Q'_{2n}.O_{2n+1}R_n.O_{2n+1}R'_n}=1...10)$$

$$\frac{OR.OR'.O_1P_1.O_1P'_1.O_2R_1.O_2R'_1......O_{2n}R_n.O_{2n}R'_n.O_{2n+1}P_{2n+1}.O_{2n+1}P'_{2n+1}}{OP.OP'.O_1R.O_1R'.O_2P_2.O_2P'_2......O_{2n}P_{2n}.O_{2n}P'_{2n}.O_{2n+1}R_n.O_{2n+1}R'_n}=1...11)$$

Nehmen wir auch diesmal alle Achsen der x, y und z tangirend an die Fläche F, so ergeben sich aus diesen Gleichungen folgende:

$$\left.\begin{aligned}\frac{OR\cdot O_2R_1\cdot O_4R_2\ldots\ldots O_{2n}R_n}{O_1R\cdot O_3R_1\cdot O_5R_2\ldots\ldots O_{2n+1}R_n}&=\frac{OQ\cdot O_2Q_2\cdot O_4Q_4\ldots\ldots O_{2n}Q_{2n}}{O_1Q\cdot O_3Q_1\cdot O_5Q_5\ldots O_{2n+1}Q_{2n+1}}\\&=\frac{OP\cdot O_2P_2\cdot O_4P_4\ldots\ldots O_{2n}P_{2n}}{O_1P\cdot O_3P_1\cdot O_5P_5\ldots\ldots O_{2n+1}P_{2n+1}}\end{aligned}\right\}\ldots 12)$$

Addiren wir endlich die Gleichungen 1, 2, ... 5 in der nemlichen Ordnung, so ist:

$$\frac{OR.OR'.O_1Q_1.O_1Q'_1}{OQ.OQ'.O_1R.O_1R'}+\frac{O_2R_1.O_2R'_1.O_3Q_3.O_3Q'_3}{O_2Q_2.O_2Q'_2.O_3R_1.O_3R'_1}+\ldots+\frac{O_{2n}R_n.O_{2n}R'_n.O_{2n+1}Q_{2n+1}.O_{2n+1}Q'_{2n+1}}{O_{2n}Q_{2n}.O_{2n}Q'_{2n}.O_{2n+1}R_n.O_{2n+1}R'_n}=n+1\ldots 13)$$

$$\frac{OR.OR'.O_1P_1.O_1P'_1}{OP.OP'.O_1R.O_1R'}+\frac{O_2R_1.O_2R'_1.O_3P_3.O_3P'_3}{O_2P_2.O_2P'_2.O_3R_1.O_3R'_1}+\ldots+\frac{O_{2n}R_n.O_{2n}R'_n.O_{2n+1}P_{2n+1}.O_{2n+1}P'_{2n+1}}{O_{2n}P_{2n}.O_{2n}P'_{2n}.O_{2n+1}R_n.O_{2n+1}R'_n}=n+1\ldots 14)$$

Sind alle diese Linien Tangenten an die Fläche F, so ist:

$$\left\{\frac{OR}{O_1R}\right\}^2\left\{\frac{O_1Q_1}{OQ}\right\}^2+\left\{\frac{O_2R_1}{O_3R_1}\right\}^2\left\{\frac{O_3Q_3}{O_2Q_2}\right\}^2+\left\{\frac{O_4R_2}{O_5R_2}\right\}^2\left\{\frac{O_5Q_5}{O_4Q_4}\right\}^2+\ldots+\left\{\frac{O_{2n}R_n}{O_{2n+1}R_n}\right\}^2\left\{\frac{O_{2n+1}Q_{2n+1}}{O_{2n}Q_{2n}}\right\}^2=n+1\ldots 15)$$

$$\left\{\frac{OR}{O_1R}\right\}^2\left\{\frac{O_1P_1}{OP}\right\}^2+\left\{\frac{O_2R_1}{O_3R_1}\right\}^2\left\{\frac{O_3P_3}{O_2P_2}\right\}^2+\left\{\frac{O_4R_2}{O_5R_2}\right\}^2\left\{\frac{O_5P_5}{O_4P_4}\right\}^2+\ldots+\left\{\frac{O_{2n}R_n}{O_{2n+1}R_n}\right\}^2\left\{\frac{O_{2n+1}P_{2n+1}}{O_{2n}P_{2n}}\right\}^2=n+1\ldots 16)$$

II. Bestimmung der geometrischen Bedeutung der Coefficienten der Gleichung der Flächen des dritten Grades.

§. 1.

Da der Gang, den wir bei diesen Bestimmungen einschlagen, öfters mit jenem des in I. bearbeiteten Gegenstandes übereinstimmt, so werden wir uns in den betreffenden Fällen, um Wiederholungen zu vermeiden, auf denselben beziehen. Der allgemeinen Gleichung

$$\left.\begin{array}{r} z^3+By^3+Cx^3+3Ayz^2+3Dxz^2+3Ey^2z+3Fxyz \\ +3Gx^2z+3Kxy^2+3Lyx^2 \\ +3A'z^2+3B'y^2+3C'x^2+3D'xy+3E'xz+3F'yz \\ +3A''z+3B''x+3C''y+D''' \end{array}\right\} = 0 \ldots 1)$$

der Flächen des dritten Grades geben wir folgende zu unserm Zwecke dienliche Formen:

$$\left.\begin{array}{r} z^3+3z^2\{Ay+Dx+A'\}+3z\{Ey^2+Fxy+Gx^2 \\ +F'y+E'x+A''\} \\ +By^3+3y^2\{Kx+B'\}+3y\{Lx^2+D'x+B''\} \\ +Cx^3+3C'x^2+3C''x+D''' \end{array}\right\} = 0 \ldots\ldots 2)$$

$$\left.\begin{array}{r} y^3+3y^2\left\{\frac{E}{B}z+\frac{K}{B}x+\frac{B'}{B}\right\}+3y\left\{\frac{A}{B}z^2+\frac{F}{B}xz+\frac{L}{B}x^2\right. \\ \left.+\frac{F}{B}z+\frac{D'}{B}x+\frac{B''}{B}\right\} \\ +\frac{z^3}{B}+3z^2\left\{\frac{D}{B}+\frac{A'}{B}\right\}+3z\left\{\frac{G}{B}x^2+\frac{E}{B}x+\frac{A''}{B}\right\}+\frac{C}{B}x^3 \\ +3\frac{C'}{B}x^2+3\frac{C''}{B}x+\frac{D''}{B} \end{array}\right\} = 0 \ldots . 3)$$

$$\left.\begin{array}{r} x^3+3x^2\left\{\frac{G}{C}z+\frac{L}{C}y+\frac{C'}{C}\right\}+3x\left\{\frac{D}{C}z^2+\frac{F}{C}yz+\frac{K}{C}y^2\right. \\ \left.+\frac{E'}{C}z+\frac{D'}{C}y+\frac{C''}{C}\right\} \\ +\frac{z^3}{C}+3z^2\left\{\frac{A}{C}y+\frac{A'}{C}\right\}+3z\left\{\frac{E}{C}y^2+\frac{F}{C}y+\frac{A''}{C}\right\}+\frac{B}{C}y^3 \\ +3\frac{B'}{C}y^2+3\frac{B''}{C}y+\frac{D''}{C} \end{array}\right\} = 0 \ldots . 4)$$

Wir haben hiebei wie in I. kein besonderes Coordinaten-berücksichtiget.

Wenden wir das gleiche Verfahren wie in I. §. 1. an, und bezeichnen die Wurzeln der aus 2) durch die auf einander folgenden Substitutionen von x', y'; x'', y'; x', y'' statt x, y entstandenen Gleichungen respective mit z'_1, z'_2, z'_3; z''_1, z''_2, z''_3; z'''_1, z'''_2. z'''_3; so erhalten wir nach der Theorie der Gleichungen des dritten Grades:

$$z'_1 + z'_2 + z'_3 = -3(Ay' + Dx' + A') \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

$$z''_1 + z''_2 + z''_3 = -3(Ay' + Dx'' + A') \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

$$z'''_1 + z'''_2 + z'''_3 = -3(Ay'' + Dx' + A') \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Aus diesen ist:

$$D = -\frac{z''_1 - z'_1 + z''_2 - z'_2 + z''_3 - z'_3}{3(x'' - x')} \ldots\ldots \quad 8)$$

$$A = -\frac{z'''_1 - z'_1 + z'''_2 - z'_2 + z'''_3 - z'_3}{3(y'' - y')} \ldots\ldots \quad 9)$$

Bei der Construction dieser beiden Coefficienten-Werthe verfahren wir ganz gleich wie bei jener der Werthe von B', C' in I. §. 1. Bezeichnen wir die Durchschnittspunkte der mit der Achse der z parallelen Linien $(x = x', \ y = y')$, $(x = x'', \ y = y')$, $(x = x', \ y = y'')$, die wir $P'L'$, $P''L''$, $P'''L'''$ (Taf. IV. Fig. 2.) nennen wollen, und der durch die Gleichung 1) ausgedrückten Fläche F_1 respective mit M'_1, M'_2, M'_3; M''_1, M''_2, M''_3; M'''_1, M'''_2, M'''_3; und denken uns von M'_1, M'_2, M'_3 die Linien $M'_1N''_1$, $M'_2N''_2$, $M'_3N''_3$ parallel mit der Achse der x bis an die Linie $P''L''$, und $M'_1N'''_1$, $M'_2N'''_2$, $M'_3N'''_3$ parallel mit der Achse der y bis an die Linie $P'''L'''$ gezogen, so erhalten wir, wie am oben angegebenen Orte:

$$D = -\frac{M''_1N''_1 + M''_2N''_2 + M''_3N''_3}{3P''P'} \ldots\ldots \quad 10)$$

$$A = -\frac{M'''_1N'''_1 + M'''_2N'''_2 + M'''_3N'''_3}{3P'''P'} \ldots\ldots \quad 11)$$

Durch ein ähnliches Verfahren mit den Gleichungen 3) und 4) erhalten wir:

$$\frac{K}{B} = -\frac{m''_1n''_1 + m''_2n''_2 + m''_3n''_3}{3p''p'} \ldots\ldots \quad 12)$$

$$\frac{E}{B} = -\frac{m'''_1n'''_1 + m'''_2n'''_2 + m'''_3n'''_3}{3p'''p'} \ldots\ldots \quad 13)$$

$$\frac{L}{C} = -\frac{\mu''_1\nu''_1 + \mu''_2\nu''_2 + \mu''_3\nu''_3}{3\pi''\pi'} \ldots\ldots \quad 14)$$

$$\frac{G}{C} = -\frac{\mu'''_1\nu'''_1 + \mu'''_2\nu'''_2 + \mu'''_3\nu'''_3}{3\pi'''\pi'} \ldots\ldots \quad 15)$$

In diesen Ausdrücken bedeuten m''_1, m''_2, m''_3, n''_1 u. s. w. in Beziehung auf die Fläche F_1 und die Linien $(x = x', \ z = z')$; $(x = x'', \ z = z')$; $(x = x', \ z = z'')$; $(y = y', \ z = z')$; $(y = y'', \ z = z')$; $(y = y', \ z = z'')$; die wir respective mit $p'l'$, $p''l''$, $p'''l'''$ $\pi'\lambda'$, $\pi''\lambda''$, $\pi'''\lambda'''$ bezeichnen wollen (diese Linien sind alle in der Figur angezeigt, die Punkte $m'_1, \ldots \mu'_1 \ldots \mu'''_3$, wie auch die Linie $m'_1n'_1$ u. s. w. sind weggelassen) das Gleiche, was M''_1, M''_2, M''_3, N''_1 u. s. w. in Beziehung auf die Fläche F_1 und die Linien $P'L'$, $P''L''$, $P'''L'''$ bedeuten.

Ganz auf gleiche Art wie in I. §. 1. 15. können wir für besondere Fälle die in 10, 11, ... 15) gefundenen Werthe von D, A .... u. s. w. noch vereinfachen, so dass sie die Formen

$$\left.\begin{array}{l} D = -\frac{M''_2N''_2 + M''_3N''_3}{3P''P'};\ A = -\frac{M'''_2N'''_2 + M'''_3N'''_3}{3P'''P'}; \\ \frac{K}{B} = -\frac{m''_2n''_2 + m''_3n''_3}{3p''p'};\ \frac{E}{B} = -\frac{m'''_2n'''_2 + m'''_3n'''_3}{3p'''p'}; \\ \frac{L}{C} = -\frac{\mu''_2\nu''_2 + \mu''_3\nu''_3}{3\pi''\pi'};\ \frac{G}{C} = -\frac{\mu'''_2\nu'''_2 + \mu'''_3\nu'''_3}{3\pi'''\pi'} \end{array}\right\} \ldots 16)$$

erhalten.

§. 2.

Setzen wir zuerst in der Gleichung 2) x und y; alsdann in 3) x und z; und endlich in 4) y und z, gleich Null, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$z^3 + 3A'z^2 + 3A''z + D''' = 0 \ldots\ldots 1)$$

$$y^3 + \frac{3B'}{B}y^2 + \frac{3B''}{B}y + \frac{D'''}{B} = 0 \ldots\ldots 2)$$

$$x^3 + \frac{3C'}{C}x^2 + \frac{3C''}{C}x + \frac{D'''}{C} = 0 \ldots\ldots 3)$$

Bezeichnen wir respective die Wurzeln dieser Gleichungen mit z_1, z_2, z_3; y_1, y_2, y_3; x_1, x_2, x_3; so ist bekanntlich:

$$-z_1z_2z_3 = D'''; \ -y_1y_2y_3 = \frac{D'''}{B}; \ -x_1x_2x_3 = \frac{D'''}{C};$$

oder wenn wir, wie früher, den Coordinaten-Anfang mit O, die Durchschnittspunkte der Achsen der z, y und x mit der Fläche F beziehlich durch R, R', R''; Q, Q', Q''; P, P', P'' bezeichnen, so ist:

$$D''' = -OR.OR'.OR''; \frac{D'''}{B} = -OQ.OQ'.OQ''; \frac{D'''}{C} = -OP.OP'.OP'';$$

woraus wir sogleich:

$$D''' = -OR.OR'.OR'', \ B = \frac{OR.OR'.OR''}{OQ.OQ'.OQ''}, \ C = \frac{OR.OR'.OR''}{OP.OP'.OP''} \ldots 4)$$

erhalten. Da wir hiebei kein besonderes Coordinaten-System zu berücksichtigen brauchen, so nehmen wir dasselbe so an, dass es mit jenem in §. 1. entweder das gleiche, oder doch mit ihm parallel ist; alsdann werden wir mittelst der Substitution der soeben gefundenen Werthe von B und C in den Gleichungen 12, 13, .. 16 folgende Coordinaten-Werthe erhalten:

$$K = -\frac{(m''_1n''_1 + m''_2n''_2 + m''_3n''_3) . OR . OR' . OR''}{3p''p' . OQ . OQ' . OQ''} \ldots\ldots 5)$$

$$E = -\frac{(m'''_1n'''_1 + m'''_2n'''_2 + m'''_3n'''_3) . OR . OR' . OR''}{3p'''p' . OQ . OQ' . OQ''} \ldots\ldots 6)$$

$$L = -\frac{(\mu''_1\nu''_1 + \mu''_2\nu''_2 + \mu''_3\nu''_3) . OR . OR' . OR''}{3\pi''\pi' . OP . OP' . OP''} \ldots\ldots 7)$$

$$G = -\frac{(\mu'''_1\nu'''_1 + \mu'''_2\nu'''_2 + \mu'''_3\nu'''_3) . OR . OR' . OR''}{3\pi'''\pi' . OP . OP' . OP''} \ldots\ldots 8)$$

Die abgekürzten Werthe dieser Coordinaten sind aus §. 1. 16. ebenso zu bestimmen.

§. 3.

Wir gelangen zur Bestimmung der Coefficienten A', B', C' indem wir bemerken, dass bei der gleichen Bezeichnung wie in §. 2. aus den Gleichungen 1, 2, 3 jenes Paragraphen folgt, dass:

$$A' = -\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}, \quad \frac{B'}{B} = -\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad \frac{C'}{C} = -\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

ist, und wenn wir in diese Ausdrücke die Werthe von z_1, z_2, z_3, y_1 .... und von B und C einführen, so erhalten wir alsdann:

$$\left.\begin{array}{l} A' = -\frac{(OR + OR' + OR'')}{3}, \quad B' = -\frac{(OQ + OQ' + OQ'')OR.OR'.OR''}{3\,OQ.OQ'.OQ''} \\ \quad C' = -\frac{(OP + OP' + OP'')OR.OR'.OR''}{3\,OP.OP'.OP''}. \end{array}\right\} 1)$$

Nun ist aber, wenn alle drei Wurzeln der Gleichung §. 2. 2) positiv sind, $\frac{OR + OR' + OR''}{3} = OR + \frac{RR' + RR''}{3}$, und wenn wir $RL = \frac{RR' + RR''}{3}$ gleich dem dritten Theile der Summe der Abstände der beiden letzten Durchschnittspunkte R' und R'' vom ersten R machen, so ist OL die Entfernung des auf die eben angegebene Weise bestimmten Punktes L vom Coordinatenanfange. Sind M und N auf den Achsen der y und x in Beziehung auf die Punkte Q, Q' Q''; P, P', P'' ebenso bestimmt wie L in Beziehung auf die Punkte R, R', R''; so haben wir auch zufolge 1):

$$\left.A' = -OL^{*}); \quad B' = -\frac{OM.OR.OR'.OR''}{OQ.OQ'.OQ''}; \quad C' = -\frac{ON.OR.OR'.OR''}{OP.OP'.OP''}\right\} 2)$$

Aus den nemlichen Gleichungen §. 2. 1. 2. 3. folgt aber auch noch, dass:

$$A'' = \frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{3}, \quad \frac{B''}{B} = \frac{y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3}{3},$$

$$\frac{C''}{C} = \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{3}$$

ist. Führen wir statt z_1, z_2, u. s. w., wie auch statt B und C ihre Werthe in diese Ausdrücke ein, so erhalten wir:

---

*) Der oben angegebene Werth von A' hängt jedoch noch auf verschiedene Art von dem Vorzeichen der Wurzeln z_1, z_2 und z_3 ab, nemlich A' kann in Beziehung auf diese Vorzeichen noch folgende Werthe haben: $-\frac{z_1 - z_2 + z_3}{3}$, $-\frac{z_1 + z_2 - z_3}{3}$, $-\frac{-z_1 + z_2 + z_3}{3}$, $-\frac{z_1 - z_2 - z_3}{3}$, $-\frac{-z_1 - z_2 + z_3}{3}$, $-\frac{-z_1 + z_2 - z_3}{3}$, von welchen jedoch die drei letztern nur das Entgegengesetzte der drei erstern sind; für diese drei finden wir auf gleiche Art wie im Texte respective: $A' = -(OR - \frac{RR' - RR''}{3})$, $A' = -(OR + \frac{RR' - RR''}{3})$, $A' = -(-OR + \frac{RR' + RR''}{3})$; ganz auf gleiche Art lassen sich auch noch für jeden der Coefficienten B', C' drei verschiedene Werthe finden.

$$\left.\begin{aligned}
A''&=\frac{OR.OR'+OR.OR''+OR'.OR''}{3},\\
B''&=\frac{(OR.OR'+OR.OR''+OR'.OR'')}{3OQ.OQ'.OQ''}.OR.\,OR'.\,OR''\\
C''&=\frac{(OR.OR'+OR.OR''+OR'.OR'')}{3OP.OP'.OP''}.\,OR.\,OR'.\,OR''
\end{aligned}\right\}3)$$

§. 4.

Um geometrische Ausdrücke für die vier noch unbestimmten Coefficienten F, E', D', F' zu erhalten, kehren wir zu der Gleichung §. 1. 2. zurück, und setzen in jene nacheinander x', y'; x', y''; x'', y'; x'', y''; bezeichnen alsdann die Wurzeln der resultirenden Gleichungen respective mit z'_1, z'_2, z'_3; z''_1, z''_2, z''_3; z'''_1, z'''_2, z'''_3; z^{IV}_1, z^{IV}_2, z^{IV}_3; so haben wir zufolge der Eigenschaften der cubischen Gleichungen:

$$z'_1z'_2+z'_1z'_3+z'_2z'_3=3(Ey'^2+Fx'y'+Gx'^2+F'y'+E'x'+A'')\;\ldots\ldots\;1)$$

$$z''_1z''_2+z''_1z''_3+z''_2z''_3=3(Ey''^2+Fx'y''+Gx'^2+F'y''+E'x'+A'')\;\ldots\ldots\;2)$$

$$z'''_1z'''_2+z'''_1z'''_3+z'''_2z'''_3=3(Ey'^2+Fx''y'+Gx''^2+F'y'+E'x''+A'')\;\ldots\ldots\;3)$$

$$z^{IV}_1z^{IV}_2+z^{IV}_1z^{IV}_3+z^{IV}_2z^{IV}_3=3(Ey''^2+Fx''y''+Gx''^2+F'y''+E'x''+A'')\;\ldots\ldots\;4)$$

Subtrahiren wir die erste von der zweiten, und dividiren den Rest durch $y''-y'$, so ist

$$\frac{z''_1z''_2-z'_1z'_2+z''_1z''_3-z'_1z'_3+z''_2z''_3-z'_2z'_3}{3(y''-y')}=E(y''+y')+Fx'+F' \;.\;.\;.\;.\;.\; 5)$$

Aus der Subtraction der 3ten von der 4ten Gleichung folgt:

$$\frac{z^{IV}_1z^{IV}_2-z'''_1z'''_2+z^{IV}_1z^{IV}_3-z'''_1z'''_3+z^{IV}_2z^{IV}_3-z'''_2z'''_3}{3(y''-y')}=E(y''+y')+Fx''+F' \;.\;.\;.\;.\;.\; 6)$$

Ziehen wir endlich die Gleichung 5) von der Gleichung 6) ab, so ist:

$$F=\frac{z^{IV}_1z^{IV}_2-z'''_1z'''_2-z''_1z''_2+z'_1z'_2+z^{IV}_1z^{IV}_3-z'''_1z'''_3-z''_1z''_3+z'_1z'_3+z^{IV}_2z^{IV}_3-z'''_2z'''_3-z''_2z''_3+z'_2z'_3}{3(y''-y')\,(x''-x')} \;.\;.\;.\;.\;.\; 7)$$

Es sind aber nach unserer in §. 1. angenommenen Bezeichnung M'_1, M'_2, M'_3; M''_1, M''_2, M''_3; M'''_1, M'''_2, M'''_3; M^{IV}_1, M^{IV}_2, M^{IV}_3 die Durchschnittspunkte der Fläche F und der mit der Achse der z parallelen Linien $P'L'$, $P''L''$, $P'''L'''$, $P^{IV}L^{IV}$, so dass also $z'_1 = P'M'_1$, $z'_2 = P'M'_2$ u. s. w......

Durch die Einführung dieser Linien in die letzte Gleichung wird:

$$F = \frac{\left\{\begin{array}{l} P^{IV}M^{IV}_1.P^{IV}M^{IV}_2 - P'''M'''_1.P'''M'''_2 - P''M''_1.P''M''_2 + P'M'_1.P'M'_2 \\ + P^{IV}M^{IV}_1.P^{IV}M^{IV}_3 - P'''M'''_1.P'''M'''_3 - P''M''_1.P''M''_3 + P'M'_1.P'M'_3 \\ + P^{IV}M^{IV}_2.P^{IV}M^{IV}_3 - P'''M'''_2.P'''M'''_3 - P''M''_2.P''M''_3 + P'M'_2.P'M'_3 \end{array}\right\}}{3P''P'.P'''P'}$$

Construiren wir, um diesen Ausdruck kürzer darzustellen, zwischen $P^{IV}M^{IV}_1$ und $P^{IV}M^{IV}_2$, $P'''M'''_1$ und $P'''M'''_2$, $P''M''_1$ und $P''M''_2$, $P'M'_1$ und $P'M'_2$, $P^{IV}M^{IV}_1$ und $P^{IV}M^{IV}_3$, u. s. w....... $P'M'_2$ und $P'M'_3$ die mittleren Proportionalen $S^{IV}_1T^{IV}_2$, $S'''_1T'''_2$, $S''_1T''_2$, $S'_1T'_2$, $S^{IV}_1T^{IV}_3$, $S'''_1T'''_3$, $S''_1T''_3$, $S'_1T'_3$, $S^{IV}_2T^{IV}_3$, $S'''_2T'''_3$, $S''_2T''_3$, $S'_2T'_3$; bilden alsdann aus $S^{IV}_1T^{IV}_2$ und $S'_1T'_2$ ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse $s^{IV}_1s'_2$ sein soll, ebenso bezeichnen wir:

die Hypotenuse d. rechtw. Dreiecks aus $S'''_1T'''_2$ u. $S''_1T''_2$ mit $s'''_1s''_2$,
– – – – – – $S^{IV}_1T^{IV}_3$ – $S'_1T'_3$ – $s^{IV}_1s'_3$,
– – – – – – $S'''_1T'''_3$ – $S''_1T''_3$ – $s'''_1s''_3$,
– – – – – – $S^{IV}_2T^{IV}_3$ – $S'_2T'_3$ – $s^{IV}_2s'_3$,
– – – – – – $S'''_2T'''_3$ – $S''_2T''_3$ – $s'''_2s''_3$.

Führen wir diese Hypotenusen in den obigen Werth von F ein, so erhalten wir:

$$F = \frac{(s^{IV}_1s'_2)^2 + (s^{IV}_1s'_3)^2 + (s^{IV}_2s'_3)^2 - \{(s'''_1s''_2)^2 + (s'''_1s''_3)^2 + (s'''_2s''_3)^2\}}{3P''P'.P'''P'} \quad 8)$$

Wir erkennen aber hierin, dass die Summe der drei ersten Quadrate der Diagonale $s^{IV}_1s^{IV}_2$ eines rechtwinkligen Parallelepipeds $s^{IV}_1s'_1s'_3s^{IV}_2$, dessen Kanten $s^{IV}_1s'_2$, $s^{IV}_1s'_3$, $s^{IV}_2s'_3$ sind, gleich ist, und ebenso ist die Summe der drei andern Quadrate dem Quadrate der Diagonale $s'''_1s'''_2$ eines andern rechtwinkligen Parallelepipeds $s'''_1s''_1s''_3s'''_2$ gleich, dessen Kanten $s'''_1s''_1$, $s'''_1s''_3$, $s'''_2s''_3$ sind, und es wird daher der letzte Ausdruck zu:

$$F = \frac{(s^{IV}_1s^{IV}_2)^2 - (s'''_1s'''_2)^2}{3P''P'.P'''P'} \text{ oder } F = \frac{(s^{IV}_1s'''_1)^2}{3P''P'.P'''P'} \ldots\ldots 9)$$

wo $s^{IV}_1s'''_1$ die zweite Cathete eines rechtwinkligen Dreiecks bezeichnet, dessen Hypotenuse $s^{IV}_1s^{IV}_2$, und dessen erste Cathete $s'''_1s'''_2$ ist. Mittelst dieses Werthes von F, und des in §. 2. 6) gefundenen Werths von E erhalten wir aus der Gleichung 5), wenn wir die oben angegebenen Bezeichnungen und Hülfsconstructionen gebrauchen:

$$F' = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(S''_1 T''_2)^2 + (S''_1 T''_3)^2 + (S''_2 T''_2)^2 - \{(S'_1 T')^2 + (S'_1 T'_3)^2 + (S'_1 T'_2)^2\}}{3P'''P'} \\ + \dfrac{\{m'''_1 n'''_1 + m'''_2 n'''_2 + m'''_3 n'''_3\}(K'P''' + K'P')OR\,.\,OR'\,.\,OR''}{3p'''p'\,.\,OQ\,.\,OQ'\,.\,OQ''} \\ - \dfrac{(s^{IV}_1 s'''_1)^2\,.\,OK'}{3P''P'\,.\,P'''P'} \end{array} \right\} \ldots\ldots 10)$$

Auch in diesem Ausdrucke kann das erste Glied des zweiten Theils, wie in 8., einfacher dargestellt werden. Subtrahiren wir 2. von 4. und dividiren den Rest mit $3(x''-x')$, so ist:

$$E' + G(x''+x') + Fy'' = \frac{z^{IV}_1 z^{IV}_2 + z^{IV}_1 z^{IV}_3 + z^{IV}_2 z^{IV}_3 - \{z''_1 z''_2 + z''_1 z''_3 + z''_2 z''_3\}}{3(x''-x')}.$$

Substituiren wir hierin den vorhin gefundenen Werth von F, und den in §. 2. 8. angegebenen Werth von G, und gebrauchen die im Anfange dieses Paragraphen angegebenen Bezeichnungen, so erhalten wir wie in 10.

$$E' = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(S^{IV}_1 T^{IV}_2)^2 + (S^{IV}_1 T^{IV}_3)^2 + (S^{IV}_2 T^{IV}_3)^2 - \{(S''_1 T''_2)^2 + (S''_1 T''_3)^2 + (S''_2 T''_3)^2\}}{3P'P} \\ + \dfrac{\{\mu'''_1 \nu'''_1 + \mu'''_2 \nu'''_2 + \mu'''_3 \nu'''_3\}(OK' + OK'')OR.OR'.OR''}{3\pi''\pi'.OP.OP'.OP''} \\ - \dfrac{(s^{IV}_1 s''_1)^2.K'P''}{3P'P'.P''P} \end{array} \right\} \quad \ldots .11)$$

Um endlich den Coefficienten D' zu bestimmen, setzen wir in der Gleichung §. 1. 3. nach einander x', z'; x'', z' statt x und z; so folgt wie oben, dass, wenn wir mit y'_1, y'_2, y'_3; y''_1, y''_2, y''_3 die Wurzeln der resultirenden Gleichungen bezeichnen:

$$y'_1 y'_2 + y'_1 y'_3 + y'_2 y'_3 = 3\left\{\frac{A}{B}z'^2 + \frac{F}{B}x'z' + \frac{L}{B}x'^2 \quad \frac{F}{B}z' + \frac{D'}{B}x' + \frac{B''}{B}\right\} \quad 12)$$

$$y''_1 y''_2 + y''_1 y''_3 + y''_2 y''_3 = 3\left\{\frac{A}{B}z'^2 + \frac{F}{B}x''z' + \frac{L}{B}x''^2 + \frac{F}{B}z' + \frac{D'}{B}x'' + \frac{B''}{B}\right\} \quad 13)$$

Diese Gleichungen von einander subtrahirt, und den Rest mit $3(x'' - x')$ dividirt, geben:

$$\frac{D'}{B}+\frac{L}{B}(x''+x')+\frac{F}{B}z'=\frac{y''_1y''_2+y''_1y''_3+y''_2y''_3-\{y'_1y'_2+y'_1y'_3+y'_2y'_3\}}{3(x''-x')}.$$

Aus dieser Gleichung finden wir durch Einführung der Werthe von y'_1, y'_2, u. s. w., ferner von B, L und F, folgenden Werth von D':

$$D'=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{OR.OR'.OR''}{OQ.OQ'.OQ''}\cdot\dfrac{p''m''_1.p''m''_2+p''m''_1.p''m''_3+p''m''_2.p''m''_3-(p'm'_1.p'm'_2+p'm'_1.p'm'_3+p'm'_2.p'm'_3)}{3p''p'}\\ -\dfrac{(s^{IV}{}_1s_1{}''')^2.P'M'_1}{3P''P'.P'''P}-\dfrac{(\mu''_1\nu''_1+\mu''_2\nu''_2+\mu''_3\nu''_3)(OK''+OK').OR.OR'.OR''}{3\pi''\pi'.OP.OP'.OP''}\end{array}\right\}\quad\ldots\,14)$$

Da die Coefficienten $B, C, A, D, E, F, G, K, L$ ihre Werthe unverändert beibehalten, wohin wir auch das Coordinatensystem parallel mit sich selbst verrücken, so können wir ähnliche Eigenschaften der Transversalen in Beziehung auf die Flächen des dritten Grades herleiten, wie wir es in I. §. 5. bei den Flächen des zweiten Grades gethan haben; da aber die Herleitung ganz die gleiche ist, wie a. a. O., so brechen wir hier diese Untersuchungen ab, bis wir an einem andern Orte diesen Gegenstand ausführlicher behandeln.

XLVII.

Ueber Bernoullische Zahlen und die Coefficienten der Sekantenreihen.

Von

Herrn O. Schlömilch

zu Weimar.

Die folgenden Entwickelungen beruhen auf zwei wichtigen bestimmten Integralen, nämlich

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\Theta d\Theta}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}+e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}} = \frac{1}{e^x+e^{-x}} \quad (1)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi\Theta}+1}{e^{\pi\Theta}-1} \sin x\,\Theta\, d\Theta = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \quad (2)$$

die sich im Zusammenhange mit der Lehre von den bestimmten Integralen nebst einer Menge ähnlicher leicht entwickeln lassen, die man aber auch mittelst der beiden Formeln von Fourier

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \eta\Theta d\eta \int_0^\infty \varphi(\Theta) \cos x\Theta d\Theta$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin \eta\Theta d\eta \int_0^\infty \varphi(\Theta) \sin x\Theta d\Theta$$

leicht verificiren kann, indem man im ersten Fall $\varphi(\Theta) = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}+e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}$ und im zweiten $\varphi(\Theta) = \frac{e^{\pi\Theta}+1}{e^{\pi\Theta}-1}$ setzt. Durch die erste Integration, welche man nach (1) und (2) ausführt, gelangt man zu einem Ausdrucke, der wieder ganz ähnlich aussieht und sich auf gleiche Weise integriren lässt, so dass man zuletzt ein identisches Resultat bekommt, wie diess der Fall sein muss, wenn die Integrale (1) und (2) richtig sein sollen.

Multipliciren wir (1) mit (2), so wird auf der rechten Seite

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})} = \frac{1}{\cos\sqrt{-1}x} = \sec\sqrt{-1}x.$$

Nun giebt aber die Division $\frac{1}{\cos x}$, wenn man für $\cos x$ die bekannte, nach Potenzen von x geordnete Reihe setzt, eine neue Reihe von der Form

$$\sec x = B_0 + \frac{B_2}{1.2}x^2 + \frac{B_4}{1.2.3.4}x^4 + \ldots$$

wo B_0, B_2, B_4, ... gewisse Zahlen sind, die eine interessante Analogie zu den Bernoullischen Zahlen B_1, B_3, B_5, ... besitzen, welche letztere bekanntlich in der Cosecantenreihe eine wichtige Rolle spielen.

Schreiben wir $\sqrt{-1}x$ für x, so wird

$$\sec\sqrt{-1}x = B_0 - \frac{B_2}{1.2}x^2 + \frac{B_4}{1.2.3.4}x^4 - \ldots$$

also, wenn wir diese Reihe substituiren

$$2\int_0^\infty \frac{\cos x\Theta d\Theta}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta} + e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}} = B_0 - \frac{B_2}{1.2}x^2 + \ldots$$

Den Nenner des Integrals wollen wir kurz mit N bezeichnen, und $\cos x\Theta$ in die bekannte Reihe entwickeln, wobei wir die Potenzen von x, welches in Bezug auf die Integration Constante ist, vor das Integralzeichen setzen können. Wir erhalten dann

$$2\left[\int_0^\infty \frac{d\Theta}{N} - \frac{x^2}{1.2}\int_0^\infty \frac{\Theta^2 d\Theta}{N} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\int_0^\infty \frac{\Theta^4 d\Theta}{N} - \ldots\right]$$
$$= B_0 - \frac{x^2}{1.2}B_2 + \frac{x^4}{1.2.3.4}B_4 - \ldots,$$

also durch Vergleichung beider Reihen

$$2\int_0^\infty \frac{d\Theta}{N} = B_0,\ 2\int_0^\infty \frac{\Theta^2 d\Theta}{N} = B_2, \ldots$$

oder allgemein $2\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n} d\Theta}{N} = B_{2n}$, d. i., wenn wir den Werth von N wieder einsetzen,

$$2\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n} d\Theta}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta} + e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}} = B_{2n}. \quad (3)$$

Durch ein ähnliches Verfahren erhalten wir aus (2) ein bestimmtes Integral, welches die $(2n-1)$te Bernoullische Zahl ausdrückt.

Multipliciren wir nämlich beide Seiten von (2) mit $\sqrt{-1}$, so wird rechts

$$\sqrt{-1}\,.\,\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\frac{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})} = \frac{\cos\sqrt{-1}x}{-\sin\sqrt{-1}x} = -\cot\sqrt{-1}x;$$

also

$$\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{e^{\pi\Theta}+1}{e^{\pi\Theta}-1}\sin x\Theta d\Theta = -\cot\sqrt{-1}x.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{e^{\pi\Theta}+1}{e^{\pi\Theta}-1} = M$ und gehen vermöge der Relation $\operatorname{tang} z = \cot z - 2\cot 2z$ zur Tangente über, so ist

$$\sqrt{-1}\int_0^\infty M(2\sin 2x\Theta - \sin x\Theta)d\Theta = \operatorname{tang}\sqrt{-1}x.$$

Entwickeln wir nun $\operatorname{tang}\sqrt{-1}x$ in die bekannte Reihe, welche die Bernoullischen Zahlen involvirt, und ebenso $\sin 2x\Theta$, $\sin x\Theta$ in die nach Potenzen von $x\Theta$ fortschreitenden Reihen, so haben wir

$$\sqrt{-1}\left\{\frac{2^2-1}{1}x\int_0^\infty Md\Theta - \frac{2^4-1}{1.2.3}x^3\int_0^\infty M\Theta^3 d\Theta + \frac{2^6-1}{1\ldots5}x^5\int_0^\infty M\Theta^5 d\Theta - \ldots\right\}$$

$$= \sqrt{-1}\left\{\frac{2^2-1}{1}x\,.\,\frac{2^2}{2}B_1 - \frac{2^4-1}{1.2.3}x^3\,.\,\frac{2^4}{4}B_3 + \frac{2^6-1}{1..5}x^5\,.\,\frac{2^6}{6}B_5 - \ldots\right\}$$

und vergleichen wir beide Reihen, Glied für Glied, so entstehen die Relationen

$$\int_0^\infty Md\Theta = \frac{2^2}{2}B_1,\ \int_0^\infty M\Theta^3 d\Theta = \frac{2^4}{4}B_3,\ \ldots,\ \int_0^\infty M\Theta^{2n-1}d\Theta = \frac{2^{2n}}{2n}B_{2n-1},$$

oder, wenn wir für M seinen Werth schreiben,

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi\Theta}+1}{e^{\pi\Theta}-1}\Theta^{2n-1}d\Theta = \frac{2^{2n-1}}{n}B_{2n-1}\,.\ (4).$$

Die Ausdrücke (3) und (4) sind zwar schon an sich bemerkenswerth, in so fern sie jeden der interessanten Coefficienten B_{2n}, B_{2n-1} durch ein bestimmtes Integral, also in geschlossener Form darstellen; interessanter aber ist folgende Entwickelung, durch welche man zu einer Relation zwischen B_{2n} und B_{2n-1} selbst gelangt.

Wir setzen in (1) $\sqrt{-1}x$ für x, multipliciren beide Seiten mit $2\sin x$, und haben so

$$\int_0^\infty \frac{2\sin x\,.\cos\sqrt{-1}x\Theta d\Theta}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}+e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}} = \frac{2\sin x}{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}} = \operatorname{tang} x.$$

Zerlegen wir ferner das Produkt $2\sin x\,.\cos\sqrt{-1}x\Theta$ in die Summe $\sin(1+\sqrt{-1}\Theta)x + \sin(1-\sqrt{-1}\Theta)x$, entwickeln dann beide Ausdrücke, links die beiden Sinus und rechts die Tangente, in Reihen, so sind deren $(2n-1)$te allgemeinen Glieder

$$(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{1.2..(2n-1)}\int_0^\infty \frac{(1+\sqrt{-1}\Theta)^{2n-1}+(1-\sqrt{-1}\Theta)^{2n-1}}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}+e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}d\Theta$$

$$= \frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots.(2n-1)}\,.\,\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_{2n-1},$$

oder, wenn wir den Nenner unter dem Integralzeichen wieder mit N bezeichnen

$$\int_0^\infty \frac{(1+\sqrt{-1}\,\Theta)^{2n-1}+(1-\sqrt{-1}\,\Theta)^{2n-1}}{N}d\Theta=(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_{2n-1} \quad (5)$$

Entwickeln wir nun die Potenzen $(1\pm\sqrt{-1}\;\Theta)^{2n-1}$ nach dem Binomialtheorem, wobei wir die Binomialcoefficienten mit $\overline{(2n-1)}_0$, $\overline{(2n-1)}_1$, ... bezeichnen, so ist unser Integral

$$=2\int_0^\infty \frac{1-\overline{(2n-1)}_2\Theta^2+\overline{(2n-1)}_4\Theta^4-\ldots\pm\overline{(2n-1)}_{2n-2}\Theta^{2n-2}}{N}\,d\Theta$$

oder

$$=2\int_0^\infty\frac{d\Theta}{N}-\overline{(2n-1)}_2\,.\,2\int_0^\infty\frac{\Theta^2d\Theta}{N}+\ldots\pm\overline{(2n-1)}_{2n-2}.2\int_0^\infty\frac{\Theta^{2n-2}d\Theta}{N}.$$

Aber jedes dieser Integrale lässt sich nach (3) ausführen; und wir erhalten mit Rücksicht auf (5)

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n}2^{2n-1}(2^{2n}-1)\;B_{2n-1}=\overline{(2n-1)}_0B_0-\overline{(2n-1)}_2B_2$$
$$+\overline{(2n-1)}_4B_4-\ldots\pm\overline{(2n-1)}_{2n-2}B_{2n-2}\,. \quad (6)$$

eine sehr einfache Relation zwischen den auf einander folgenden Sekantencoefficienten, einer Bernoullischen Zahl und den Binomialcoefficienten ihres Index.

Dieses Resultat lässt sich noch anders schreiben.

Wenn man nämlich die Sekantenreihe

$$\sec x=B_0+\frac{B_2x^2}{1.2}+\ldots+\frac{B_{2n}x^{2n}}{1\ldots.2n}+\ldots$$

$2n$ mal differenziirt, so ist

$$\frac{d^{2n}\sec x}{dx^{2n}}=B_{2n}+\ldots..$$

wobei die nachfolgenden Glieder noch x enthalten. Also für $x=0$

$$\frac{d^{2n}\sec x}{dx^{2n}}=B_{2n};\; x=0.$$

Ebenso erhält man aus der Tangentenreihe

$$\operatorname{tang} x=\frac{2^2(2^2-1)}{1.2}B_1x+\frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4}B_3x^3+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{1.2\ldots2n}B_{2n-1}x^{2n-1}+\ldots$$

durch $(2n-1)$malige Differenziation und für $x=0$

$$\frac{d^{2n-1}\operatorname{tang}x}{dx^{2n-1}}=\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_{2n-1},\; x=0.$$

Führen wir diese Werthe in (6) ein, so ist

$$(-1)^{n+1}\frac{d^{2n-1}\operatorname{tang}x}{dx^{2n-1}}=1-\overline{(2n-1)}_2\frac{d^2\sec x}{dx^2}+\overline{(2n-1)}_4\frac{d^4\sec x}{dx^4}-\ldots \quad (7)$$
$$x=0.$$

XLVIII.

Ueber Cauchy's neueste Untersuchungen über die Entwickelung der gesonderten Functionen mit einer veränderlichen Grösse in nach den positiven ganzen Potenzen dieser veränderlichen Grösse fortschreitende convergirende Reihen *).

Nach den Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence von Cauchy in dessen Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. 9e Livraison. Paris. 1840, frei bearbeitet und mit erläuternden Zusätzen vermehrt

von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Erklärung. Von der Grösse $X + Y\sqrt{-1}$, wo X und Y reelle unabhängige oder abhängige veränderliche Grössen bezeichnen sollen, sagt man, dass sie einen endlichen völlig bestimmten Werth habe, wenn die Grössen X und Y beide endliche völlig bestimmte Werthe haben.

Der Null unendlich nahe kommende Veränderungen der einen endlichen völlig bestimmten Werth habenden Grösse $X + Y\sqrt{-1}$, wo X und Y reelle unabhängige oder abhängige veränderliche Grössen bezeichnen sollen, heissen solche Veränderungen dieser Grösse, welche der Null unendlich nahe kommenden Veränderungen der reellen Grössen X und Y entsprechen oder durch solche Veränderungen dieser Grössen herbeigeführt werden.

Eine Function $f(x)$ einer beliebigen reellen oder imaginären Grösse x heisst für einen gewissen endlichen völlig bestimmten Werth, oder in der Nähe eines gewissen endlichen völlig bestimmten Werths dieser veränderlichen Grösse stetig, wenn diesem endlichen völlig bestimmten Werthe der veränderlichen Grösse x ein endlicher völlig bestimmter Werth

---

*) Unter gesonderten Functionen werden hier die sonst sogenannten functiones explicitae verstanden; da diese Functionen wirklich von ihren veränderlichen Grössen gesondert sind, so scheint der hier gebrauchte Ausdruck nicht unpassend zu sein.

der Function $f(x)$ entspricht, und wenn durch der Null unendlich nahe kommende Veränderungen des in Rede stehenden endlichen völlig bestimmten Werths von x der Null unendlich nahe kommende Veränderungen des diesem endlichen völlig bestimmten Werthe von x entsprechenden Werths der Function $f(x)$ herbeigeführt werden. Sind dagegen diese Bedingungen nicht vollständig erfüllt, so sagt man, dass für den in Rede stehenden endlichen völlig bestimmten Werth der veränderlichen Grösse x eine Unterbrechung der Stetigkeit Statt findet.

Wenn für keinen reellen Werth von x, welcher eine Mittelgrösse zwischen den beiden reellen Werthen a und b von x ist, eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $f(x)$ Statt findet, so sagt man. dass diese Function zwischen den Gränzen a und b oder von a bis b stetig sei.

Die Function $f(x)$ heisst ferner zwischen den reellen Werthen r und R des Modulus ihrer veränderlichen Grösse x als dessen Gränzen stetig, wenn für keinen Werth der veränderlichen Grösse x, dessen Modulus eine Mittelgrösse zwischen r und R *) ist, eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $f(x)$ Statt findet, oder, was dasselbe ist, wenn für jeden Werth oder in der Nähe jedes Werths der veränderlichen Grösse x, dessen Modulus eine Mittelgrösse zwischen r und R ist, die Function $f(x)$ stetig ist.

§. 2.

Lehrsatz. Wenn die Function $y=f(x)$ für einen bestimmten reellen Werth ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse, welcher der Einfachheit wegen durch x selbst bezeichnet werden mag, reell und stetig, und der entsprechende Werth $f'(x)$ des ersten Differentialquotienten dieser Function eine endliche völlig bestimmte reelle, aber nicht verschwindende Grösse ist; so wird, indem man die unabhängige veränderliche Grösse von dem bestimmten reellen Werthe x an sich reell und stetig verändern lässt:

1. wenn $f'(x)$ positiv ist, die gegebene Function von dem Werthe $f(x)$ an zu- oder abnehmen, wenn die unabhängige veränderliche Grösse von dem reellen Werthe x an respective zu- oder abnimmt; dagegen wird

2. wenn $f'(x)$ negativ ist, die gegebene Function von dem Werthe $f(x)$ an zu- oder abnehmen, wenn die unabhängige veränderliche Grösse von dem reellen Werthe x an respective ab- oder zunimmt.

Beweis. Die der beliebigen Aenderung Δx von x entsprechende Aenderung von $f(x)$ sei Δy. Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten ist $f'(x)$ die Gränze, welcher $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sich bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn man sich Δx bis

*) Ueber den allgemeinen Begriff einer Mittelgrösse zwischen zwei anderen Grössen s. m. die Abhandlung XI., §. 33. im dritten Hefte, so wie denn die in dieser Abhandlung bewiesenen Sätze, wie wir sehen werden, überhaupt eine Hauptgrundlage der gegenwärtigen Untersuchungen über die Reihen bilden.

zu jedem beliebigen Grade der Null nähern lässt. Für der Null unendlich nahe kommende $\varDelta x$ hat also $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ mit $f'(x)$ offenbar einerlei Vorzeichen. Ist folglich $f'(x)$ positiv, so ist, immer für der Null unendlich nahe kommende $\varDelta x$, auch $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ positiv, und $\varDelta x$ und $\varDelta y$ haben folglich gleiche Vorzeichen, d. h. die unabhängige veränderliche Grösse und die Function nehmen respective von den Werthen x und $f(x)$ an gleichzeitig zu und ab, wie behauptet wurde. Ist dagegen $f'(x)$ negativ, so ist für der Null unendlich nahe kommende $\varDelta x$ auch $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ negativ, und $\varDelta x$ und $\varDelta y$ haben folglich entgegensetzte Vorzeichen, d. h. die Function nimmt von dem Werthe $f(x)$ an ab oder zu, wenn die unabhängige veränderliche Grösse von dem Werthe x an respective zu- oder abnimmt, welches der zweite Theil der Behauptung war.

§. 3.

Erster Zusatz. Wenn sowohl die Function $f(x)$, als auch ihr erster Differentialquotient $f'(x)$ zwischen den reellen Gränzen a und b reell und stetig ist, und letzterer sein Zeichen niemals ändert, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt; so wird die Function $f(x)$ entweder stets wachsen oder stets abnehmen, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt.

Wenn $f'(x)$ in dem Intervalle ab niemals verschwindet, so folgt der Satz unmittelbar aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze. Wenn aber $f'(x)$ z. B. für den zwischen a und b liegenden Werth c von x verschwindet, so dass $f'(c)=0$ ist, so denke man sich das Intervall ab in die beiden Intervalle ac und cb getheilt; dann wird $f(x)$ nach dem vorhergehenden Paragraphen sowohl in dem Intervalle ac, als auch in dem Intervalle cb, und folglich auch in dem ganzen Intervalle ab entweder stets wachsen oder stets abnehmen, wobei man nur immer festzuhalten hat, dass nach der Voraussetzung die Function $f(x)$ zwischen den Gränzen a und b reell und stetig ist. Dass man ganz auf ähnliche Art schliessen könnte, wenn $f'(x)$ für mehrere zwischen a und b liegende Werthe von x verschwände, fällt sogleich in die Augen.

§. 4.

Zweiter Zusatz. Wenn sowohl die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, als auch die Functionen $\mathfrak{F}(x)$, $\mathfrak{F}'(x)$, zwischen den reellen Gränzen a und b reell und stetig sind, und $f'(x)$ $\mathfrak{F}(x)$ ihre Zeichen niemals ändern, aber immer entgegengesetzte Vorzeichen haben, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt, so dass nämlich, wenn $f'(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ stets positiv oder stets negativ ist, $\mathfrak{F}'(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ respective stets negativ oder stets positiv ist; so wird immer die eine der beiden Functionen $f(x)$, $\mathfrak{F}(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ stets wachsen, die andere dagegen von $x=a$ bis $x=b$ stets abnehmen.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem ersten Zusatze und aus dem in §. 2. bewiesenen Satze.

§. 5.

Lehrsatz. **Wenn sowohl die Functionen $f(x)$, $\mathfrak{F}(x)$, als auch ihre ersten Differentialquotienten zwischen den reellen Gränzen a und b reell und stetig sind, und der Differentialquotient $\mathfrak{F}'(x)$ sein Zeichen nicht ändert, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt; so ist der Bruch**

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}$$

jederzeit eine Mittelgrösse zwischen dem kleinsten und grössten Werthe A und B unter allen den Werthen, welche die Function

$$\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}$$

erhält, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt, oder es ist jederzeit

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}=M(A,\ B)\ ^{*}).$$

Erster Beweis. Weil A und B der kleinste und grösste unter allen den Werthen sind, welche der Bruch

$$\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}$$

erhält, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt, so haben die Grössen

$$\mathfrak{F}'(x)\left\{\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}-A\right\},\ \mathfrak{F}'(x)\left\{\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}-B\right\},$$

d. i. die Grössen

$$f'(x)-A\mathfrak{F}'(x),\ f'(x)-B\mathfrak{F}'(x),$$

für jedes x von $x=a$ bis $x=b$ offenbar entgegengesetzte Vorzeichen, und keine dieser Grössen ändert ihr Zeichen, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt. Diese beiden Grössen sind aber die Differentialquotienten der Functionen

$$f(x)-A\mathfrak{F}(x),\ f(x)-B\mathfrak{F}(x).$$

Also wird nach dem vorigen Paragraphen jederzeit die eine dieser beiden Functionen stets wachsen, die andere dagegen stets abnehmen, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt. Daher haben offenbar die beiden Differenzen

$$f(b)-A\mathfrak{F}(b)-\{f(a)-A\mathfrak{F}(a)\},\ f(b)-B\mathfrak{F}(b)-\{f(a)-B\mathfrak{F}(a)\},$$

oder

$$f(b)-f(a)-A\,\{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)\},\ f(b)-f(a)-B\,\{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)\},$$

und folglich natürlich auch die beiden Quotienten

---

*) Wegen der Bezeichnung $M(A,\ B)$ s. m. den Aufsatz XL. §. 33.

$$\frac{f(b)-f(a)-A\{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)\}}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)},\ \frac{f(b)-f(a)-B\{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)\}}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)},$$

d. i.

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}-A,\ \frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}-B,$$

jederzeit entgegengesetzte, also die beiden Grössen

$$A-\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)},\ \frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}-B$$

jederzeit gleiche Vorzeichen, woraus sich ergiebt, dass immer

$$\left\{A-\frac{f(b)-fa)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}\right\}\left\{\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}-B\right\}\overline{\gt}0,$$

folglich nach XL. §. 36. jederzeit

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}$$

eine Mittelgrösse zwischen A und B, oder

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}=M(A,\ B)$$

ist, wie bewiesen werden sollte.

Zweiter Beweis. Man theile die Differenz $b-a$ in n gleiche Theile und setze

$$\frac{b-a}{n}=k,\text{ also } b=a+nk;$$

so ist in der aus der Differenzenrechnung bekannten Bezeichnung

$$f(a+k)-f(a)=\Delta f(a),$$
$$f(a+2k)-f(a+k)=\Delta f(a+k),$$
$$f(a+3k)-f(a+2k)=\Delta f(a+2k),$$

u. s. w.

$$f(a+nk)-f(a+(n-1)k)=\Delta f(a+(n-1)k)$$

und

$$\mathfrak{F}(a+k)-\mathfrak{F}(a)=\Delta\mathfrak{F}(a),$$
$$\mathfrak{F}(a+2k)-\mathfrak{F}(a+k)=\Delta\mathfrak{F}(a+k),$$
$$\mathfrak{F}(a+3k)-\mathfrak{F}(a+2k)=\Delta\mathfrak{F}(a+2k),$$

u. s. w.

$$\mathfrak{F}(a+nk)-\mathfrak{F}(a+(n-1)k)=\Delta\mathfrak{F}(a+(n-1)k).$$

Addirt man nun auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen und setzt $a+nk=b$, so erhält man die beiden Gleichungen

$$f(b)-f(a)=\Delta f(a)+\Delta f(a+k)+\Delta f(a+2k)+\ldots+\Delta f(a+(n-1)k),$$
$$\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)=\Delta\mathfrak{F}(a)+\Delta\mathfrak{F}(a+k)+\Delta\mathfrak{F}(a+2k)+\ldots+\Delta\mathfrak{F}(a+(n-1)k);$$

und folglich

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}=\frac{\frac{\Delta f(a)}{k}+\frac{\Delta f(a+k)}{k}+\frac{\Delta f(a+2k)}{k}+\ldots+\frac{\Delta f(a+(n-1)k)}{k}}{\frac{\Delta\mathfrak{F}(a)}{k}+\frac{\Delta\mathfrak{F}(a+k)}{k}+\frac{\Delta\mathfrak{F}(a+2k)}{k}+\ldots+\frac{\Delta\mathfrak{F}(a+(n-1)k)}{k}}.$$

Die Gränzen, denen sich der Zähler und der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nähern, wenn n in's Unendliche wächst, k sich also der Null immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, sind offenbar die Summen aller der Werthe, welche die Differentialquotienten $f'x$ und $\mathfrak{F}'(x)$ erhalten, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt. Da nun die vorstehende Gleichung für jedes positive ganze n gilt, so ist, wenn wir die in Rede stehenden Summen respective durch

$$\Sigma_{x=a}^{x=b} f'(x),\ \Sigma_{x=a}^{x=b} \mathfrak{F}'(x)$$

bezeichnen, offenbar auch

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}=\frac{\Sigma_{x=a}^{x=b} f'x}{\Sigma_{x=a}^{x=b} \mathfrak{F}'(x)}.$$

Weil aber nach der Voraussetzung die sämmtlichen einzelnen Theile, aus denen die Summe

$$\Sigma_{x=a}^{x=b} \mathfrak{F}'(x)$$

besteht, gleiche Vorzeichen haben, so ist nach XL. §. 42.

$$\frac{\Sigma_{x=a}^{x=b} f'(x)}{\Sigma_{x=a}^{x=b} \mathfrak{F}'(x)}$$

jederzeit eine Mittelgrösse zwischen allen den Werthen, welche der Bruch

$$\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}$$

erhält, wenn man x sich von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt, folglich auch eine Mittelgrösse zwischen dem kleinsten und grössten Werthe A und B unter allen diesen Werthen des obigen Bruchs, und man kann also

$$\frac{\Sigma_{x=a}^{x=b} f'(x)}{\Sigma_{x=a}^{x=b} \mathfrak{F}'(x)}=M(A,\ B),$$

folglich nach dem Obigen auch

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}=M(A,\ B)$$

setzen, wie bewiesen werden sollte.

§. 6.

Nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Lehrsatze ist

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}$$

eine Mittelgrösse zwischen dem kleinsten und grössten unter den Werthen, welche

$$\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}$$

erhält, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt. Unter der Voraussetzung nun, dass

$$\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}$$

eine zwischen den Gränzen $x=a$ und $x=b$ stetige Function ist, ergiebt sich aus dem Obigen unmittelbar und ganz unzweideutig, dass die Grösse

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}$$

jederzeit unter den Werthen, welche

$$\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}$$

erhält, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt, vorkommen, oder dass jederzeit einer dieser Werthe der Grösse

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}$$

gleich sein muss, so dass also immer, wenn μ eine gewisse Mittelgrösse zwischen a und b bezeichnet,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}=\frac{f'(\mu)}{\mathfrak{F}'(\mu)}$$

gesetzt werden kann. Setzen wir nun, was offenbar in allen Fällen verstattet ist,

$$\mu=a+\Theta(b-a);$$

so ist, weil nach der Voraussetzung μ eine Mittelgrösse zwischen a und b ist,

$$a+\Theta(b-a)=M(a,\ b),$$

und folglich nach XL. §. 38., wenn man nämlich von der Grösse auf der linken Seite, und von den beiden Grössen zwischen den Parenthesen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die Grösse a subtrahirt,

$$\Theta(b-a)=M(0,\ b-a),$$

also nach XL. §. 37., wenn man nämlich die Grösse auf der linken Seite und jede der beiden Grössen zwischen den Parenthesen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens durch $b-a$ dividirt,

$$\Theta=M(0,\ 1),$$

woraus sich also ergiebt, dass Θ immer eine Mittelgrösse zwischen 0 und 1, d. h. eine positive die Einheit nicht übersteigende Grösse ist. Hieraus und aus dem Obigen ergiebt sich, dass immer

$$\frac{f(b)-fa)}{\mathfrak{F}(b)-\mathfrak{F}(a)}=\frac{f'(a+\Theta(b-a))}{\mathfrak{F}'(a+\Theta(b-a))},$$

wo Θ eine gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet, gesetzt werden kann, wenn man alle im Obigen gemachte Voraussetzungen als erfüllt anzunehmen berechtigt ist.

Setzen wir jetzt $\mathfrak{F}(x)=x$, also $\mathfrak{F}'(x)=1$, und nehmen an, dass die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ zwischen den reellen Gränzen a und b reell und stetig sind, so sind, weil $\mathfrak{F}'(x)$ als eine constante Grösse sein Zeichen nicht ändert, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt, und

$$\frac{f'(x)}{\mathfrak{F}'(x)}=f'(x)$$

ist, offenbar alle im Obigen gemachte Voraussetzungen erfüllt, und es ist folglich, wenn Θ eine gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a+\Theta(b-a)),$$

oder

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\Theta(b-a)),$$

oder

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+\Theta(b-a)).$$

Für $b=x$ ist unter der Voraussetzung, dass die Functionen $f(x)$, $f'(x)$ zwischen den reellen Gränzen a und x reell und stetig sind,

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a+\Theta(x-a)).$$

Für $a=0$ ist unter der Voraussetzung, dass die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ zwischen den reellen Gränzen 0 und x reell und stetig sind,

$$f(x)=f(0)+xf'(\Theta x).$$

Setzen wir in der Gleichung

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a+\Theta(x-a))$$

für a und x respective x und $x+i$, so erhalten wir, unter der Voraussetzung, dass die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ zwischen den reellen Gränzen x und $x+i$ reell und stetig sind, die Gleichung

$$f(x+i)=f(x)+if'(x+\Theta i).$$

In allen diesen Gleichungen bezeichnet Θ eine gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grösse.

§. 7.

Es sei jetzt

$$y=f\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}=\Phi(x)+\Psi(x)\sqrt{-1},$$

wo, indem wir uns für x irgend einen bestimmten reellen Werth gesetzt denken, sowohl $\varphi(x)$, $\psi(x)$, als auch $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ reelle Grössen sein sollen.

Weil nun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta\Psi(x)}{\Delta x}\sqrt{-1}$$

ist, und offenbar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}}\cdot\frac{\Delta\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta x}$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}} \cdot \left\{\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x}\sqrt{-1}\right\}$$

gesetzt werden kann, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\Delta f\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}} \cdot \left\{\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x}\sqrt{-1}\right\} = \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta\Psi(x)}{\Delta x}\sqrt{-1}$$

oder

$$\frac{\Delta f\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}} = \frac{\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta\Psi(x)}{\Delta x}\sqrt{-1}}{\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x}\sqrt{-1}}.$$

Lässt man nun Δx sich der Null nähern, so nähern

$$\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x},\ \frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x} \text{ und } \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x},\ \frac{\Delta\Psi(x)}{\Delta x}$$

sich bekanntlich respective den Gränzen

$$\varphi'(x),\ \psi'(x) \text{ und } \Phi'(x),\ \Psi'(x),$$

und

$$\frac{\Delta f\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}}$$

nähert sich also nach dem Obigen der Gränze

$$\frac{\Phi'(x) + \Psi'(x)\sqrt{-1}}{\varphi'(x' + \psi'(x)\sqrt{-1}}.$$

Weil

$$\Delta\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\} = \Delta\varphi(x) + \Delta\psi(x)\sqrt{-1}$$

ist, so nähert sich

$$\Delta\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}$$

offenbar der Null, wenn Δx sich der Null nähert, und

$$\frac{\Phi'(x) + \Psi'(x)\sqrt{-1}}{\varphi'(x) + \psi'(x)\sqrt{-1}}$$

ist also die Gränze, welcher

$$\frac{\Delta f\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}}$$

sich nähert, wenn

$$\Delta\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}$$

sich der Null nähert. Weil nun nach den Grundbegriffen der Differentialrechnung letztere Gränze

$$f'\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}$$

ist, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\Phi'(x)+\Psi'(x)\sqrt{-1}}{\varphi'(x)+\psi'(x)\sqrt{-1}}=f'\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}$$

oder

$$\Phi'(x)+\Psi'(x)\sqrt{-1}=\{\varphi'(x)+\psi'(x)\sqrt{-1}\}f'\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}.$$

Wegen der Gleichung

$$y=\Phi(x)+\Psi(x)\sqrt{-1}$$

ist aber

$$\frac{dy}{dx}=\Phi'(x)+\Psi'(x)\sqrt{-1},$$

und die vorige Gleichung kann daher auch unter der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{dy}{dx}=\{\varphi'(x)+\psi'(x)\sqrt{-1}\}f'\{\varphi(x)+\psi(x)\sqrt{-1}\}.$$

§. 8.

Sind jetzt a und x beliebige reelle oder imaginäre Grössen, so kann nach XL. §. 52.

$$x-a=r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}),$$

also

$$x=a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}),$$

und folglich

$$f(x)=f\{a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\}$$

gesetzt werden.

Sei nun

$$f(x)=f\{a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\}=\varphi(r)+\psi(r)\sqrt{-1};$$

so ist nach §. 6., wenn die Functionen $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$ und $\psi(r)$, $\psi'(r)$ zwischen den Gränzen 0 und r stetig sind,

$$f(x)=\varphi(0)+r\varphi'(\Theta r)+\{\psi(0)+r\psi'(\Theta_1 r)\}\sqrt{-1}$$

oder

$$f(x)=\varphi(0)+\psi(0)\sqrt{-1}+r\{\varphi'(\Theta r)+\psi'(\Theta_1 r)\sqrt{-1}\},$$

wo Θ und Θ_1 gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grössen sind. Nach dem Obigen ist aber

$$r=\frac{x-a}{\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}}$$

und

$$f(a)=\varphi(0)+\psi(0)\sqrt{-1};$$

also ist

$$f(x)=f(a)+(x-a)\,\frac{\varphi'(\Theta r)+\psi'(\Theta_1 r)\sqrt{-1}}{\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}}.$$

Differentiiren wir die Gleichung

$$f\{a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\}=\varphi(r)+\psi(r)\sqrt{-1}$$

mittelst des im vorigen Paragraphen bewiesenen Satzes in Bezug auf r als veränderliche Grösse, so erhalten wir

$$(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\,f'\{a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\}$$
$$=\varphi'(r)+\psi'(r)\sqrt{-1},$$

und folglich

$$\frac{\varphi'(r)+\psi'(r)\sqrt{-1}}{\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}}=f'\{a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\},$$

aus welcher Gleichung erhellet, dass

$$\frac{\varphi'(\Theta r)+\psi'(\Theta_1 r)\sqrt{-1}}{\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}}=f'(a)+J,$$

wo J eine für $r=0$, d. i. für $x=a$, verschwindende Grösse bezeichnet, gesetzt werden kann. Also ist nach dem Obigen

$$f(x)=f(a)+(x-a)\,\{f'(a)+J\},$$

wo J eine für $x=a$ verschwindende Grösse bezeichnet.

Diese Gleichung fordert nach dem Obigen, dass die Functionen $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$ und $\psi(r)$, $\psi'(r)$ zwischen den Gränzen 0 und r stetig sind. Weil aber nach dem Obigen

$$f(x)=f\{a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\}=\varphi(r)+\psi(r)\sqrt{-1},$$

$$f'(x)=f'\{a+r(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1})\}=\frac{\varphi'(r)+\psi'(r)\sqrt{-1}}{\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}}$$

ist; so ist klar, dass, wenn die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ in der Nähe des bestimmten Werthes a von x stetig sind, jederzeit auch die Functionen $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$ und $\psi(r)$, $\psi'(r)$ in der Nähe des bestimmten Werths 0 von r stetig sein müssen, indem ohne die Erfüllung dieser letzten Bedingung offenbar auch die erstere nicht erfüllt sein könnte, wobei man §. 1. zu vergleichen hat. Hieraus, in Verbindung mit dem Obigen, ergiebt sich nun unmittelbar das folgende wichtige Theorem:

Wenn die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ in der Nähe des bestimmten Werths a von x, wo a und x ganz beliebige reelle oder imaginäre Grössen bezeichnen, stetig sind; so ist für dem Werthe a unendlich nahe kommende Werthe von x jederzeit

$$f(x)=f(a)+(x-a)\,\{f'(a)+J\},$$

wo J eine für $x=a$ verschwindende Grösse bezeichnet.

Setzt man für a und x respective x und $x+i$, wo i eine der Null unendlich nahe kommende reelle oder imaginäre Grösse bezeichnen soll, so ergiebt sich der folgende Satz:

Unter der Voraussetzung, dass man für x bloss solche reelle oder imaginäre Werthe setzt, in deren Nähe die Functionen $f(x)$ und $f(x)$ stetig sind, ist für der

Null unendlich nahe kommende reelle oder imaginäre Werthe von i jederzeit

$$f(x+i)=f(x)+i\,\{f'(x)+J\},$$

wo J eine für $i=0$ verschwindende Grösse bezeichnet.

§. 9.

Lehrsatz. Es sei x eine beliebige veränderliche imaginäre Grösse, deren Modulus im Allgemeinen durch r bezeichnet werden mag, und $f(x)$ sei eine Function von x, welche, so wie ihr erster Differentialquotient $f'(x)$ zwischen den Gränzen $r=r_0$ und $r=R$ stetig ist. Setzen wir nun, indem n eine positive ganze Zahl bezeichnet und π seine gewöhnliche Bedeutung hat,

$$\Theta=\cos\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}$$

und

$$\frac{f'(r)+\Theta f'(\Theta r)+\Theta^2 f'(\Theta^2 r)+\ldots+\Theta^{n-1} f'(\Theta^{n-1} r)}{n}=M;$$

so ist für jeden Werth von r, welcher eine Mittelgrösse zwischen r_0 und R ist, mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist, und mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, wenn man nur n gross genug nimmt, $M=0$.

Beweis. Nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze ist für jeden Werth von x, in dessen Nähe die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ stetig sind, und für der Null unendlich nahe kommende Werthe von i

$$f(x+i)-f(x)=i\,\{f'(x)+J\},$$

wo J eine für $i=0$ verschwindende Grösse bezeichnet.

Weil nach der Voraussetzung

$$\Theta=\cos\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}$$

ist, so ist nach XL. §. 54.

$$r=r\,(\cos\frac{0\pi}{n}+\sin\frac{0\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\Theta r=r\,(\cos\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\Theta^2 r=r\,(\cos\frac{4\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$\Theta^3 r=r\,(\cos\frac{6\pi}{n}+\sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$\Theta^{n-1}r=r\,(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1});$$

und die Grössen

$$r,\ \Theta r,\ \Theta^2 r,\ \Theta^3 r,\ \ldots\ \Theta^{n-1} r$$

haben also sämmtlich den Modulus r. Weil nun nach der Voraussetzung die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ zwischen den Gränzen $r=r_0$ und $r=R$ stetig sind, so sind nach §. 1. diese Functionen in der Nähe eines jeden Werths von x, dessen Modulus eine Mittelgrösse zwischen r_0 und R ist, stetig, und man kann also, unter der Voraussetzung, dass r eine Mittelgrösse zwischen r_0 und R ist, in der obigen Gleichung

$$f(x+i)-f(x)=i\,\{f'(x)+J\}$$

offenbar

$$x=r,\ \Theta r,\ \Theta^2 r,\ \Theta^3 r,\ \ldots\ \Theta^{n-1}r$$

setzen.

Ferner ist nach XL. §. 54. für jedes positive ganze k

$$\Theta^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1},$$

woraus sich ergiebt, dass, wenn $\Theta-1$ eine der Null unendlich nahe kommende Grösse ist, jederzeit die Grössen

$$(\Theta-1)r,\ (\Theta-1)\Theta r,\ (\Theta-1)\Theta^2 r,\ \ldots\ (\Theta-1)\Theta^{n-1}r$$

sämmtlich der Null unendlich nahe kommende Grössen sind, so dass man also, wenn man, unter der Voraussetzung, dass r eine Mittelgrösse zwischen r_0 und R ist, in der Gleichung

$$f(x+i)-f(x)=i\,\{f'(x)+J\}$$

für x die Werthe

$$r,\ \Theta r,\ \Theta^2 r,\ \Theta^3 r,\ \ldots\ \Theta^{n-1}r$$

setzt, für i gleichzeitig die Werthe

$$(\Theta-1)r,\ (\Theta-1)\Theta r,\ (\Theta-1)\Theta^2 r,\ \ldots\ (\Theta-1)\Theta^{n-1}r$$

setzen kann.

Nimmt man nun diese Substitution wirklich vor, und bemerkt zugleich, dass

$$\begin{aligned}
r+(\Theta-1)r&=\Theta r,\\
\Theta r+(\Theta-1)\Theta r&=\Theta^2 r,\\
\Theta^2 r+(\Theta-1)\Theta^2 r&=\Theta^3 r,\\
\Theta^3 r+(\Theta-1)\Theta^3 r&=\Theta^4 r,
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\Theta^{n-1}r+(\Theta-1)\Theta^{n-1}r=\Theta^n r$$

ist; so erhält man die folgenden für jedes r, welches eine Mittelgrösse zwischen r_0 und R ist, und jedes der Null unendlich nahe kommende $\Theta-1$ geltenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
f(\Theta r)-f(r)&=(\Theta-1)r\{f'(r)+J_0\},\\
f(\Theta^2 r)-f(\Theta r)&=(\Theta-1)\Theta r\{f'(\Theta r)+J_1\},\\
f(\Theta^3 r)-f(\Theta^2 r)&=(\Theta-1)\Theta^2 r\{f'(\Theta^2 r)+J_2\},\\
f(\Theta^4 r)-f(\Theta^3 r)&=(\Theta-1)\,\Theta^3 r\{f'(\Theta^3 r)+J_3\},
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$f(\Theta^n r)-f(\Theta^{n-1}r)=(\Theta-1)\Theta^{n-1}r\{f'(\Theta^{n-1}r)+J_{n-1}\};$$

wo die Grössen

$$J_0,\ J_1,\ J_2,\ J_3,\ \ldots\ J_{n-1}$$

nach dem Obigen für $\Theta-1=0$ sämmtlich verschwinden.

Setzen wir nun statt der Grössen

$$J_0,\ \Theta J_1,\ \Theta^2 J_2,\ \Theta^3 J_3,\ \ldots\ \Theta^{n-1}J_{n-1}$$

der Kürze wegen die Symbole

$$M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots\ M_{n-1};$$

so bezeichnen diese Symbole offenbar auch Grössen, welche für $\Theta-1=0$ verschwinden, und die obigen Gleichungen erhalten dann die Form:

$$f(\Theta r)-f(r)=(\Theta-1)r\{f'(r)+M_0\},$$
$$f(\Theta^2 r)-f(\Theta r)=(\Theta-1)r\{\Theta f'(\Theta r)+M_1\},$$
$$f(\Theta^3 r)-f(\Theta^2 r)=(\Theta-1)r\{\Theta^2 f'(\Theta^2 r)+M_2),$$
$$f(\Theta^4 r)-f(\Theta^3 r)=(\Theta-1)r\{\Theta^3 f'(\Theta^3 r)+M_3\},$$

u. s. w.

$$f(\Theta^n r)-f(\Theta^{n-1}r)=(\Theta-1)r\{\Theta^{n-1}f'(\Theta^{n-1}r)+M_{n-1}\}.$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man, wenn der Kürze wegen

$$\frac{M_0+M_1+M_2+M_3+\ldots+M_{n-1}}{n}=-M$$

gesetzt, d. h. das arithmetische Mittel zwischen M_0, M_1, M_2, M_3,.. .. M_{n-1} durch $-M$ bezeichnet wird, die Gleichung

$$\frac{f(\Theta^n r)-f(r)}{(\Theta-1)r}=f'(r)+\Theta f'(\Theta r)+\Theta^2 f'(\Theta^2 r)+..+\Theta^{n-1}f'(\Theta^{n-1}r)-nM,$$

und folglich, weil nach XL. §. 54. offenbar $\Theta^n=1$, also $f(\Theta^n r)=f(r)$ ist,

$$f'(r)+\Theta f'(\Theta r)+\Theta^2 f'(\Theta^2 r)+\ldots+\Theta^{n-1}f'(\Theta^{n-1}r)-nM=0,$$

also

$$\frac{f'(r)+\Theta f'(\Theta r)+\Theta^2 f'(\Theta^2 r)+\ldots+\Theta^{n-1}f'(\Theta^{n-1}r)}{n}=M.$$

Nach XL. §. 61. ist der Modulus der Summe mehrerer imaginärer Grössen in beliebiger Anzahl nie grösser als die Summe der Moduli aller einzelnen zu einander addirten Grössen, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass der Modulus von $-M$ den grössten der Moduli der Grössen M_0, M_1, M_2, M_3, ... M_{n-1} nicht übersteigt, und weil nun nach dem Obigen diese Grössen für $\Theta-1=0$, d. h., wie leicht erhellet, wenn n unendlich gross wird, sämmtlich verschwinden, so muss offenbar auch $-M$ oder M verschwinden, wenn n unendlich gross wird, wodurch die Richtigkeit unsers Satzes bewiesen ist.

Weil die Grösse

$$\frac{f'(r)+\Theta f'(\Theta r)+\Theta^2 f'(\Theta^2 r)+\ldots+\Theta^{n-1}f'(\Theta^{n-1}r)}{n}$$

das arithmetische Mittel zwischen allen den Werthen der Grösse $\Theta^q f'(\Theta^q r)$ ist, welche dieselbe erhält, wenn man für q nach und nach die positiven ganzen Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots n-1$ setzt; so kann, wenn wir in einer bekannten Bezeichnung dieses arithmetische Mittel durch das Symbol

$$\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{q=n-1}\Theta^q f'(\Theta^q r)$$

bezeichnen, der obige Satz auch auf den folgenden Ausdruck gebracht werden:

Es sei x eine beliebige veränderliche imaginäre Grösse, deren Modulus im Allgemeinen durch r bezeichnet werden mag, und $f(x)$ sei eine Function von x, welche, so wie ihr erster Differentialquotient $f'(x)$, zwischen den Gränzen $r=r_0$ und $r=R$ stetig ist. Setzen wir nun, indem n eine positive ganze Zahl bezeichnet und π seine gewöhnliche Bedeutung hat,

$$\Theta=\cos\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1};$$

so ist für jeden Werth von r, welcher eine Mittelgrösse zwischen r_0 und R ist, mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist, und mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, wenn man nur n gross genug nimmt,

$$\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{q=n-1}\Theta^q f'(\Theta^q r)=0.$$

§. 10.

Lehrsatz. Es sei x eine beliebige imaginäre Grösse, deren Modulus im Allgemeinen durch r bezeichnet werden mag, und $f(x)$ sei eine Function von x, welche, so wie ihr erster Differentialquotient $f'(x)$, zwischen den Gränzen $r=r_0$ und $r=R$ stetig ist. Setzen wir nun, indem n eine positive ganze Zahl bezeichnet und π seine gewöhnliche Bedeutung hat,

$$\Theta=\cos\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1};$$

so ist die Grösse

$$\mathfrak{F}(r)=\frac{f(r)+f(\Theta r)+f(\Theta^2 r)+\ldots+f(\Theta^{n-1}r)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{q=n-1}f(\Theta^q r)$$

zwischen den Gränzen $r=r_0$ und $r=R$ mit desto grösserer Genauigkeit constant, je grösser n ist, und kann mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit zwischen den in Rede stehenden Gränzen constant gemacht werden, wenn man nur n gross genug nimmt.

Beweis. Sei r eine beliebige Mittelgrösse zwischen r_0 und R. Theilt man nun das Intervall $r-r_0$ in n gleiche Theile, und bezeichnet jeden dieser Theile durch ϱ, so dass

$$\frac{r-r_0}{n}=\varrho,\quad r=r_0+n\varrho$$

ist; so ist, wovon man sich durch ähnliche Schlüsse wie im vorigen Paragraphen leicht überzeugt, nach §. 8. für ein unendlich grosses n

$$f(r_0+\varrho)-f(r_0)=\varrho\{f'(r_0)+N_0\},$$
$$f\{\Theta(r_0+\varrho)\}-f(\Theta r_0)=\varrho\{\Theta f'(\Theta r_0)+N_1\},$$
$$f\{\Theta^2(r_0+\varrho)\}-f(\Theta^2 r_0)=\varrho\{\Theta^2 f'(\Theta^2 r_0)+N_2\},$$
$$f\{\Theta^3(r_0+\varrho)\}-f(\Theta^3 r_0)=\varrho\{\Theta^3 f'(\Theta^3 r_0)+N_3\},$$

u. s. w.

$$f\{\Theta^{n-1}(r_0+\varrho)\}-f(\Theta^{n-1}r_0)=\varrho\{\Theta^{n-1}f(\Theta^{n-1}r_0)+N_{n-1}\};$$

wo die Grössen N_0, N_1, N_2, N_3, ... N_{n-1} für ein unendlich grosses n sämmtlich verschwinden. Addirt man nun auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen, dividirt sodann auf beiden Seiten durch n, und setzt der Kürze wegen

$$\frac{N_0+N_1+N_2+N_3+\ldots+N_{n-1}}{n}=N$$

und

$$\frac{f'(r_0)+\Theta f'(\Theta r_0)+\Theta^2 f'(\Theta^2 r_0)+\ldots+\Theta^{n-1}f'(\Theta^{n-1}r_0)}{n}=M;$$

so erhält man

$$\frac{f(r_0+\varrho)+f\{\Theta(r_0+\varrho)\}+f\{\Theta^2(r_0+\varrho)\}+\ldots+f\{\Theta^{n-1}(r_0+\varrho)\}}{n}$$
$$-\frac{f(r_0)+f(\Theta r_0)+f(\Theta^2 r_0)+\ldots+f(\Theta^{n-1}r_0)}{n}$$
$$=\varrho(M+N),$$

d. i., weil oben überhaupt die Grösse

$$\frac{f(r)+f(\Theta r)+f(\Theta^2 r)+\ldots+f(\Theta^{n-1}r)}{n}$$

durch $\mathfrak{F}(r)$ bezeichnet worden ist,

$$\mathfrak{F}(r_0+\varrho)-\mathfrak{F}(r_0)=\varrho(M+N).$$

Von der Grösse M ist im vorigen Paragraphen bewiesen worden, dass dieselbe verschwindet, wenn n unendlich gross wird, und aus der Gleichung

$$\frac{N_0+N_1+N_2+N_3+\ldots+N_{n-1}}{n}=N$$

kann man auf ganz ähnliche Art wie im vorigen Paragraphen aus der Gleichung

$$\frac{M_0+M_1+M_2+M_3+\ldots+M_{n-1}}{n}=-M$$

ableiten, dass auch N verschwindet, wenn n unendlich gross wird, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass auch die Grösse $M+N$ verschwindet, wenn n unendlich gross wird. Nach dem Obigen kann man also immer

$$\mathfrak{F}(r_0+\varrho)-\mathfrak{F}(r_0)=\varrho K_0$$

setzen, wo K_0 eine für ein unendlich grosses n verschwindende Grösse bezeichnet.

Durch ganz ähnliche Raisonnements überzeugt man sich nun überhaupt von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{F}(r_0+\varrho)-\mathfrak{F}(r_0)=\varrho\ K_0,$$
$$\mathfrak{F}(r_0+2\varrho)-\mathfrak{F}(r_0+\varrho)=\varrho\ K_1,$$
$$\mathfrak{F}(r_0+3\varrho)-\mathfrak{F}(r_0+2\varrho)=\varrho\ K_2,$$
$$\mathfrak{F}(r_0+4\varrho)-\mathfrak{F}(r_0+3\varrho)=\varrho\ K_3,$$

u. s. w.

$$\mathfrak{F}(r_0+n\varrho)-\mathfrak{F}(r_0+(n-1)\varrho)=\varrho\, K_{n-1};$$

wo die Grössen K_0, K_1, K_2, K_3, ... K_{n-1} für ein unendlich grosses n sämmtlich verschwinden. Durch Addition dieser Gleichungen erhält man, weil nach dem Obigen bekanntlich $r_0+n\varrho=r$ ist,

$$\mathfrak{F}(r)-\mathfrak{F}(r_0)=\varrho\ (K_0+K_1+K_2+K_3+\ldots+K_{n-1})$$

oder

$$\mathfrak{F}(r)-\mathfrak{F}(r_0)=(r-r_0)\ \frac{K_0+K_1+K_2+K_3+\ldots+K_{n-1}}{n},$$

oder, wenn wir

$$\frac{K_0+K_1+K_2+K_3+\ldots+K_{n-1}}{n}=K$$

setzen,

$$\mathfrak{F}(r)-\mathfrak{F}(r_0)=(r-r_0)K.$$

Da die Grössen K_0, K_1, K_2, K_3, ... K_{n-1} sämmtlich verschwinden wenn n unendlich gross wird, so verschwindet auch K, wenn n unendlich gross wird, wobei man den vorigen Paragraphen zu vergleichen hat. Also verschwindet wegen der obigen Gleichung offenbar auch die Differenz $\mathfrak{F}(r)-\mathfrak{F}(r_0)$ für ein unendlich grosses n, oder für ein unendlich grosses n ist $\mathfrak{F}(r)=\mathfrak{F}(r_0)$, und da dies nun für jedes r gilt, welches eine Mittelgrösse zwischen r_0 und R ist, so ist durch das Vorhergehende unser Satz vollständig bewiesen.

Einen von dem vorhergehenden von Cauchy gegebenen Beweise verschiedenen kürzern Beweis des obigen Satzes hat Moigno in seinen Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, redigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. A. L. Cauchy. T. 1. Paris 1840. p. 153 gegeben. Es ist nämlich, wobei man §. 7. zu vergleichen hat,

$$\frac{df(r)}{dr}=f'(r),$$

$$\frac{df(\Theta r)}{dr}=\Theta f'(\Theta r),$$

$$\frac{df(\Theta^2 r)}{dr}=\Theta^2 f'(\Theta^2 r),$$

u. s. w.

$$\frac{df(\Theta^{n-1} r)}{dr}=\Theta^{n-1} f'(\Theta^{n-1} r);$$

und folglich, wenn man addirt,

$$\frac{df(r)}{dr}+\frac{df(\Theta r)}{dr}+\frac{df(\Theta^2 r)}{dr}+\ldots+\frac{df(\Theta^{n-1}r)}{dr}$$

$$=f'(r)+\Theta f'(\Theta r)+\Theta^2 f'(\Theta^2 r)+\ldots+\Theta^{n-1}f'(\Theta^{n-1}r),$$

also, wenn wie im vorigen Paragraphen

$$\frac{f'(r)+\Theta f'(\Theta r)+\Theta^2 f'(\Theta^2 r)+\ldots+\Theta^{n-1}f'(\Theta^{n-1}r)}{n}=M$$

gesetzt wird,

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{df(r)}{dr}+\frac{df(\Theta r)}{dr}+\frac{df(\Theta^2 r)}{dr}+\ldots+\frac{df(\Theta^{n-1}r)}{dr}\right\}=M.$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$\frac{f(r)+f(\Theta r)+f(\Theta^2 r)+\ldots+f(\Theta^{n-1}r)}{n}=\mathfrak{F}(r),$$

und folglich

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{df(r)}{dr}+\frac{df(\Theta r)}{dr}+\frac{df(\Theta^2 r)}{dr}+\ldots+\frac{df(\Theta^{n-1}r)}{dr}\right\}=\mathfrak{F}'(r);$$

also ist

$$\mathfrak{F}'(r)=M.$$

Für jeden Werth von r, welcher eine Mittelgrösse zwischen r_0 und R ist, und für ein unendlich grosses n verschwindet M nach dem vorigen Paragraphen; also verschwindet auch $\mathfrak{F}'(r)$ für jedes r, welches eine Mittelgrösse zwischen r_0 und R ist, und für ein unendlich grosses n, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass für ein unendlich grosses n die Grösse $\mathfrak{F}(r)$ zwischen den Gränzen $r=r_0$ und $r=R$ constant ist, wie bewiesen werden sollte.

So leicht dieser Beweis auch an sich ist und so sehr sich derselbe von selbst darbietet, so halten wir doch den ersten von Cauchy gegebenen Beweis für strenger und für der Natur der Sache weit angemessener.

§. 11.

Aus dem im vorigen Paragrapben bewiesenen Satze ergiebt sich unmittelbar, dass unter den demselben zum Grunde liegenden Voraussetzungen die Grösse

$$\mathfrak{F}(r)=\frac{f(r)+f(\Theta r)+f(\Theta^2 r)+\ldots+f(\Theta^{n-1}r)}{n}$$

oder

$$\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{q=n-1}f(\Theta^q r)$$

sich einer gewissen Gränze nähert, wenn n wächst, nnd dieser Gränze beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug werden lässt. Diese Gränze soll im Folgenden der Kürze wegen der dem Modulus r der veränderlichen Grösse x entsprechende mittlere Werth der Function $f(x)$ oder auch der mittlere Werth der Function $f(x)$ für den Modulus r der veränderlichen Grösse x genannt werden.

§. 12.

Es sei jetzt $\mathfrak{F}(z)$ eine Function der imaginären Grösse z, deren Modulus im Allgemeinen durch r bezeichnet werden mag, und die Function $\mathfrak{F}(z)$ sowohl, als auch ihr erster Differentialquotient $\mathfrak{F}'(z)$, sei zwischen den Gränzen $r=0$ und $r=R$ stetig. Unter diesen Voraussetzungen wollen wir

$$f(z)=\frac{\mathfrak{F}(z)-\mathfrak{F}(x)}{z-x}z$$

setzen.

Da $f(0)=0$ und nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\mathfrak{F}(r)=\frac{f(r)+f(\Theta r)+f(\Theta^2 r)+\ldots+f(\Theta^{n-1}r)}{n}$$

ist, so ist offenbar auch $\mathfrak{F}(0)=0$. Weil nun nach §. 10. für ein unendlich grosses n und für jedes r, welches eine Mittelgrösse zwischen 0 und R oder nicht grösser als R ist,

$$\mathfrak{F}(r)=\mathfrak{F}(0)$$

ist, so ist für ein unendlich grosses n und für jedes r, welches eine Mittelgrösse zwischen 0 und R oder nicht grösser als R ist, nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\mathfrak{F}(r)=0.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$\varphi(z)=\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z),\ \psi(z)=\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(x),$$

so ist

$$f(z)=\varphi(z)-\psi(z),$$

und folglich offenbar

$$\frac{f(r)+f(\Theta r)+f(\Theta^2 r)+\ldots+f(\Theta^{n-1}r)}{n}$$
$$=\frac{\varphi(r)+\varphi(\Theta r)+\varphi(\Theta^2 r)+\ldots+\varphi(\Theta^{n-1}r)}{n}$$
$$-\frac{\psi(r)+\psi(\Theta r)+\psi(\Theta^2 r)+\ldots+\psi(\Theta^{n-1}r)}{n},$$

also, wenn der Kürze wegen

$$\Phi(r)=\frac{\varphi(r)+\varphi(\Theta r)+\varphi(\Theta^2 r)+\ldots+\varphi(\Theta^{n-1}r)}{n},$$

$$\Psi(r)=\frac{\psi(r)+\psi(\Theta r)+\psi(\Theta^2 r)+\ldots+\psi)\Theta^{n-1}r)}{n}$$

gesetzt wird,

$$\mathfrak{F}(r)=\Phi(r)-\Psi(r),$$

und folglich nach dem Obigen für ein unendlich grosses n und jedes r, welches eine Mittelgrösse zwischen 0 und R oder nicht grösser als R ist,

$$\Phi(r)-\Psi(r)=0.$$

Setzen wir nun

$$z = r(\cos\omega + \sin\omega\sqrt{-1}),\quad x = r_1(\cos\omega_1 + \sin\omega_1\sqrt{-1});$$

so ist nach der Lehre von den geometrischen Progressionen und nach der Lehre von den imaginären Grössen

$$1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{x^3}{z^3} + \ldots + \frac{x^k}{z^k} = \frac{1 - \left\{\frac{r_1(\cos\omega_1 + \sin\omega_1\sqrt{-1})}{r(\cos\omega + \sin\omega\sqrt{-1})}\right\}^{k+1}}{1 - \frac{r_1(\cos\omega_1 + \sin\omega_1\sqrt{-1})}{r(\cos\omega + \sin\omega\sqrt{-1})}}$$

$$= \frac{z}{z-x} - \left(\frac{r_1}{r}\right)^{k+1} \cdot \frac{\cos((k+1)(\omega_1-\omega)) + \sin((k+1)(\omega_1-\omega))\sqrt{-1}}{1 - \frac{r_1}{r}\left\{\cos(\omega_1-\omega) + \sin(\omega_1-\omega)\sqrt{-1}\right\}}.$$

Wenn man die Grösse

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^{k+1} \cdot \frac{\cos((k+1)(\omega_1-\omega)) + \sin((k+1)(\omega_1-\omega))\sqrt{-1}}{1 - \frac{r_1}{r}\left\{\cos(\omega_1-\omega) + \sin(\omega_1-\omega)\sqrt{-1}\right\}}$$

auf die Form

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^{k+1} \cdot (P + Q\sqrt{-1})$$

bringt, wodurch man nach leichter Rechnung den Ausdruck

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^{k+1} \cdot \left\{\frac{\cos((k+1)(\omega_1-\omega)) - \frac{r_1}{r}\cos k(\omega_1-\omega)}{1 - 2\frac{r_1}{r}\cos(\omega_1-\omega) + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{\sin((k+1)(\omega_1-\omega)) - \frac{r_1}{r}\sin k(\omega_1-\omega)}{1 - 2\frac{r_1}{r}\cos(\omega_1-\omega) + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2}\sqrt{-1}\right\}$$

erhält, so überzeugt man sich auf der Stelle, dass die Grösse

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^{k+1} \cdot \frac{\cos((k+1)(\omega_1-\omega)) + \sin((k+1)(\omega_1-\omega))\sqrt{-1}}{1 - \frac{r_1}{r}\left\{\cos(\omega_1-\omega) + \sin(\omega_1-\omega)\sqrt{-1}\right\}}$$

sich unter der Voraussetzung, dass der Modulus r_1 kleiner als der Modulus r ist, der Null nähert, wenn k wächst, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur k gross genug annimmt, woraus sich ergiebt, dass unter der Voraussetzung, dass der Modulus von x kleiner als der Modulus von z ist, jederzeit

$$\frac{z}{z-x} = 1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{x^3}{z^3} + \ldots = \Sigma_{q=0}^{q=\infty} z \quad x^q$$

ist. Weil nun nach dem Obigen

$$\Psi(r) = \frac{1}{n}\left\{\frac{r}{r-x} + \frac{\Theta r}{\Theta r - x} + \frac{\Theta^2 r}{\Theta^2 r - x} + \ldots + \frac{\Theta^{n-1}}{\Theta^{n-1}r - x}\right\}\mathfrak{F}(x)$$

ist, so ist unter der Voraussetzung, dass der Modulus von x kleiner als der Modulus von z ist,

$$\Psi(r)=$$

$$\frac{\mathfrak{F}(x)}{n}\left\{\Sigma_{q=0}^{q=\infty} r^{-q} x^q + \Sigma_{q=0}^{q=\infty} \Theta^{-q} r^{-q} x^q + \ldots + \Sigma_{q=0}^{q=\infty} \Theta^{-(n-1)q} r^{-q} x^q\right\},$$

oder, weil der Factor $r^{-q}x^q$ unter allen Summenzeichen vorkommt, wie sogleich erhellen wird,

$$\Psi(r)=\frac{\mathfrak{F}(x)}{n}\Sigma_{q=0}^{q=\infty}\{1+\Theta^{-q}+\Theta^{-2q}+\Theta^{-3q}+\ldots+\Theta^{-(n-1)q}\}r^{-q}x^q,$$

oder auch

$$\Psi(r)=\mathfrak{F}(x)\Sigma_{q=0}^{q=\infty}\frac{1+\Theta^{-q}+\Theta^{-2q}+\Theta^{-3q}+\ldots+\Theta^{-(n-1)q}}{n}r^{-q}x^q.$$

Weil bekanntlich

$$\Theta=\cos\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

und folglich nach bekannten Sätzen von den imaginären Grössen (XL. §. 54.)

$$\begin{aligned}
&1+\Theta^{-q}+\Theta^{-2q}+\Theta^{-3q}+\ldots+\Theta^{-(n-1)q}\\
&=1+\cos\frac{2q\pi}{n}-\sin\frac{2q\pi}{n}\sqrt{-1}\\
&+\cos\frac{4q\pi}{n}-\sin\frac{4q\pi}{n}\sqrt{-1}\\
&+\cos\frac{6q\pi}{n}-\sin\frac{6q\pi}{n}\sqrt{-1}\\
&\text{u. s. w.}\\
&+\cos\frac{2(n-1)q\pi}{n}-\sin\frac{2(n-1)q\pi}{n}\sqrt{-1}
\end{aligned}$$

ist, so ist klar, dass für jeden durch n ohne Rest theilbaren Werth von q

$$1+\Theta^{-q}+\Theta^{-2q}+\Theta^{-3q}+\ldots+\Theta^{-(n-1)q}=n,$$

und folglich

$$\frac{1+\Theta^{-q}+\Theta^{-2q}+\Theta^{-3q}+\ldots+\Theta^{-(n-1)q}}{n}=1$$

ist. Weil ferner nach der Lehre von den geometrischen Progressionen

$$1+\Theta^{-q}+\Theta^{-2q}+\Theta^{-3q}+\ldots+\Theta^{-(n-1)q}=\frac{1-\Theta^{-nq}}{1-\Theta^{-q}},$$

also diese Summe der Grösse

$$\frac{1-(\cos\frac{2nq\pi}{n}-\sin\frac{2nq\pi}{n}\sqrt{-1})}{1-(\cos\frac{2q\pi}{n}-\sin\frac{2q\pi}{n}\sqrt{-1})},$$

d. i. der Grösse

$$\frac{0}{1-(\cos\frac{2q\pi}{n}-\sin\frac{2q\pi}{n}\sqrt{-1})}$$

gleich ist, und der Nenner dieses Bruchs offenbar nicht verschwindet, wenn q eine durch n nicht ohne Rest theilbare ganze Zahl ist*), so ist klar, dass für jeden nicht ohne Rest durch n theilbaren Werth von q

$$1+\Theta^{-q}+\Theta^{-2q}+\Theta^{-3q}+\ldots+\Theta^{-(n-1)q}=0,$$

und folglich auch

$$\frac{1+\Theta^{-q}+\Theta^{-2q}+\Theta^{-3q}+\ldots+\Theta^{-(n-1)q}}{n}=0$$

ist.

Wendet man dies nun auf den obigen Ausdruck von $\Psi(r)$ an, so erhält man, immer unter der Voraussetzung, dass der Modulus von x kleiner als der Modulus von z ist,

$$\Psi(r)=\{1+\left(\frac{x}{r}\right)^n+\left(\frac{x}{r}\right)^{2n}+\left(\frac{x}{r}\right)^{3n}+\ldots.\}\mathfrak{F}(x).$$

Es ist aber

$$1+\left(\frac{x}{r}\right)^n+\left(\frac{x}{r}\right)^{2n}+\left(\frac{x}{r}\right)^{3n}+\ldots+\left(\frac{x}{r}\right)^{kn}$$

$$=1+\left(\frac{r_1}{r}\right)^n(\cos\omega_1+\sin\omega_1\sqrt{-1})^n$$

$$+\left(\frac{r_1}{r}\right)^{2n}(\cos\omega_1+\sin\omega_1\sqrt{-1})^{2n}$$

$$+\left(\frac{r_1}{r}\right)^{3n}(\cos\omega_1+\sin\omega_1\sqrt{-1})^{3n}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left(\frac{r_1}{r}\right)^{kn}(\cos\omega_1+\sin\omega_1\sqrt{-1})^{kn}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{r_1}{r}\right)^{(k+1)n}(\cos\omega_1+\sin\omega_1\sqrt{-1})^{(k+1)n}}{1-\left(\frac{r_1}{r}\right)^n(\cos\omega_1+\sin\omega_1\sqrt{-1})^n}$$

---

*) Geht nämlich n in q nicht auf, so ist $\frac{2q}{n}$ entweder keine oder eine ganze Zahl. Im ersten Falle ist offenbar nicht

$$1-(\cos\frac{2q\pi}{n}-\sin\frac{2q\pi}{n}\sqrt{-1})=0.$$

Im zweiten Falle sei $\frac{2q}{n}=k$, so kann k keine gerade Zahl sein, weil sonst $\frac{q}{n}=\frac{1}{2}k$ eine ganze Zahl sein würde, welches gegen die Voraussetzung streitet, und in diesem Falle ist also

$$1-(\cos\frac{2q\pi}{n}-\sin\frac{2q\pi}{n}\sqrt{-1})=2,$$

d. h. es ist wieder nicht

$$1-(\cos\frac{2q\pi}{n}-\sin\frac{2q\pi}{n}\sqrt{-1})=0.$$

$$=\frac{1}{1-\left(\frac{x}{r}\right)^n}-\left(\frac{r_1}{r}\right)^{(k+1)n}\cdot\frac{\cos(k+1)n\omega_1+\sin(k+1)n\omega_1\cdot\sqrt{-1}}{1-\left(\frac{r_1}{r}\right)^n(\cos n\omega_1+\sin n\omega_1\sqrt{-1})}$$

$$=\frac{1}{1-\left(\frac{x}{r}\right)^n}$$

$$-\left(\frac{r_1}{r}\right)^{(k+1)n}\cdot\left\{\frac{\cos(k+1)n\omega_1-\left(\frac{r_1}{r}\right)^n\cos kn\omega_1}{1-2\left(\frac{r_1}{r}\right)\cos n\omega_1+\left(\frac{r_1}{r}\right)^{2n}}\right.$$

$$\left.+\frac{\sin(k+1)n\omega_1-\left(\frac{r_1}{r}\right)^n\sin kn\omega_1}{1-2\left(\frac{r_1}{r}\right)^n\cos n\omega_1+\left(\frac{r_1}{r}\right)^{2n}}\sqrt{-1}\right\}.$$

Weil nun nach der Voraussetzung $r_1 < r$ ist, so nähert sich der zweite Theil des Ausdrucks auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der Null, wenn k wächst, und kann derselbe beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur k gross genug nimmt, woraus sich

$$1+\left(\frac{x}{r}\right)^n+\left(\frac{x}{r}\right)^{2n}+\left(\frac{x}{r}\right)^{3n}+\ldots=\frac{1}{1-\left(\frac{x}{r}\right)^n},$$

und folglich nach dem Obigen

$$\Psi(r)=\frac{\mathfrak{F}(x)}{1-\left(\frac{x}{r}\right)^n},$$

also für ein unendlich grosses n offenbar

$$\Psi(r)=\mathfrak{F}(x)$$

ergiebt. Nach dem Obigen ist aber für ein unendlich grosses n und jedes r, welches eine Mittelgrösse zwischen 0 und R oder nicht grösser als R ist,

$$\Phi(r)-\Psi(r)=0,\ \text{d. i. }\ \Phi(r)=\Psi(r),$$

woraus sich in Verbindung mit dem Vorhergehenden ergiebt, dass für ein unendlich grosses n und jedes r, welches eine Mittelgrösse zwischen 0 und R oder nicht grösser als R ist,

$$\mathfrak{F}(x)=\Phi(r),$$

d. i. nach dem Obigen

$$\mathfrak{F}(x)=\frac{\varphi(r)+\varphi(\Theta r)+\varphi(\Theta^2 r)+\ldots+\varphi(\Theta^{n-1}r)}{n}$$

oder

$$\mathfrak{F}(x)=\frac{1}{n}\left\{\frac{r}{r-x}\mathfrak{F}(r)+\frac{\Theta r}{\Theta r-x}\mathfrak{F}(\Theta r)+\ldots+\frac{\Theta^{n-1}r}{\Theta^{n-1}r-x}\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)\right\}$$

ist.

Nach §. 11. ist die Gränze, welcher sich die Grösse

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{r}{r-x}\mathfrak{F}(r)+\frac{\Theta r}{\Theta r-x}\mathfrak{F}(\Theta r)+\ldots+\frac{\Theta^{n-1}r}{\Theta^{n-1}r-x}\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)\right\}$$

bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn n in's Unendliche wächst, der dem Modulus r der veränderlichen Grösse z entsprechende mittlere Werth der Function

$$\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z),$$

und nach dem Vorhergehenden ist die Function $\mathfrak{F}(x)$ diesem dem Modulus r der veränderlichen Grösse z entsprechenden mittlern Werthe der Function

$$\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)$$

gleich oder kann durch denselben dargestellt oder ausgedrückt werden, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Function $\mathfrak{F}(z)$ sowohl, als auch ihr erster Differentialquotient $\mathfrak{F}'(z)$, muss für jeden Werth des Modulus r der Grösse z, welcher eine Mittelgrösse zwischen 0 und R ist oder die Grösse R nicht übersteigt, stetig sein.

2. Der Modulus r der Grösse z muss eine Mittelgrösse zwischen 0 und R sein oder darf die Grösse R nicht übersteigen.

3. Der Modulus der Grösse x muss kleiner als der Modulus r der Grösse z sein.

Dies führt unmittelbar zu dem folgenden Satze:

Die Function $\mathfrak{F}(x)$ kann jederzeit durch den dem Modulus r der Grösse z entsprechenden mittlern Werth der Function

$$\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)$$

dargestellt oder ausgedrückt werden, wenn nicht bloss für den Modulus r der Grösse z, sondern auch für jeden kleinern Modulus dieser Grösse die Functionen $\mathfrak{F}(z)$ und $\mathfrak{F}'(z)$ stetig sind, und der Modulus der Grösse x kleiner als der Modulus der Grösse z ist.

Man kann aber diesen Satz offenbar auch auf folgende Art aussprechen:

Für jeden Modulus der Grösse x, welcher kleiner ist als der kleinste der Moduli dieser Grösse, für welche eine der beiden Functionen $\mathfrak{F}(x)$ und $\mathfrak{F}'(x)$ aufhört stetig zu sein, kann die Function $\mathfrak{F}(x)$ durch den, einem den in Rede stehenden Modulus der Grösse x übersteigenden Modulus r der Grösse z entsprechenden mittlern Werth der Function

$$\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)$$

dargestellt oder ausgedrückt werden.

§. 13.

Nach dem vorigen Paragraphen kann die Function $\mathfrak{F}(x)$ jederzeit durch den dem Modulus r der Grösse z entsprechenden mittlern Werth der Function

$$\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)$$

dargestellt oder ausgedrückt werden, wenn nicht bloss für den Modulus r der Grösse z, sondern auch für jeden kleineren Modulus dieser Grösse die Functionen $\mathfrak{F}(z)$ und $\mathfrak{F}'(z)$ stetig sind, und der Modulus der Grösse x kleiner als der Modulus der Grösse z ist, d. h. es ist unter den gemachten Voraussetzungen, wenn wir den dem Modulus r der veränderlichen Grösse z entsprechenden mittlern Werth der Function

$$\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)$$

durch

$$\mathfrak{M}_r\left\{\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)\right\}$$

bezeichnen und eine ähnliche Bezeichnung im Folgenden auch bei andern Functionen gebrauchen,

$$\mathfrak{F}(x)=\mathfrak{M}_r\left\{\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)\right\}.$$

Nun erhellet aber aus dem vorigen Paragraphen, dass unter den gemachten Voraussetzungen

$$\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)=\mathfrak{F}(z)+\frac{x}{z}\mathfrak{F}(z)+\frac{x^2}{z^2}\mathfrak{F}(z)+\frac{x^3}{z^3}\mathfrak{F}(z)+\ldots.,$$

und folglich nach dem aus §. 11. bekannten Begriffe des mittlern Werths

$$\mathfrak{F}(x)=\mathfrak{M}_r\left\{\frac{z}{z-x}\mathfrak{F}(z)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\mathfrak{F}(r)+\frac{x}{r}\mathfrak{F}(r)+\frac{x^2}{r^2}\mathfrak{F}(r)+\frac{x^3}{r^3}\mathfrak{F}(r)+\ldots.\right\}$$

$$+\frac{1}{n}\left\{\mathfrak{F}(\Theta r)+\frac{x}{\Theta r}\mathfrak{F}(\Theta r)+\frac{x^2}{(\Theta r)^2}\mathfrak{F}(\Theta r)+\frac{x^3}{(\Theta r)^3}\mathfrak{F}(\Theta r)\ldots\right\}$$

$$+\frac{1}{n}\left\{\mathfrak{F}(\Theta^2 r)+\frac{x}{(\Theta^2 r)}\mathfrak{F}(\Theta^2 r)+\frac{x^2}{(\Theta^2 r)^2}\mathfrak{F}(\Theta^2 r)+\frac{x^3}{(\Theta^2 r)^3}\mathfrak{F}(\Theta^2 r)+\ldots.\right\}$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{n}\left\{\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)+\frac{x}{\Theta^{n-1}r}\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)+\frac{x^2}{(\Theta^{n-1}r)^2}\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)\right.$$

$$\left.+\frac{x^3}{(\Theta^{n-1}r)^3}\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)+\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\{\mathfrak{F}(r)+\mathfrak{F}(\Theta r)+\mathfrak{F}(\Theta^2 r)+\ldots+\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)\}$$

$$+\frac{1}{n}\left\{\frac{\mathfrak{F}(r)}{r}+\frac{\mathfrak{F}(\Theta r)}{\Theta r}+\frac{\mathfrak{F}(\Theta^2 r)}{\Theta^2 r}+\ldots+\frac{\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)}{\Theta^{n-1}r}\right\}x$$

$$+\frac{1}{n}\left\{\frac{\mathfrak{F}(r)}{r^2}+\frac{\mathfrak{F}(\Theta r)}{(\Theta r)^2}+\frac{\mathfrak{F}(\Theta^2 r)}{(\Theta^2 r)^2}+\ldots+\frac{\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)}{(\Theta^{n-1}r)^2}\right\}x^2$$

$$+\frac{1}{n}\left\{\frac{\mathfrak{F}(r)}{r^3}+\frac{\mathfrak{F}(\Theta r)}{(\Theta r)^3}+\frac{\mathfrak{F}(\Theta^2 r)}{(\Theta^2 r)^3}+\ldots+\frac{\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)}{(\Theta^{n-1}r)^3}\right\}x^3$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

für ein unendlich grosses n, also nach §. 11. offenbar

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{M}_r\{\mathfrak{F}(z)\} + x\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z}\right\} + x^2\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^2}\right\}$$
$$+ x^3\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^3}\right\} + \ldots\ldots$$

ist, woraus sich ergiebt, dass sich unter den gemachten Voraussetzungen die Function $\mathfrak{F}(x)$ jederzeit in eine nach den aufsteigenden positiven ganzen Potenzen der veränderlichen Grösse x geordnete convergirende Reihe entwickeln lässt, und wir werden also hierdurch zu dem folgenden Lehrsatze geführt:

Wenn die Functionen $\mathfrak{F}(z)$ und $\mathfrak{F}'(z)$ nicht bloss für den Modulus r der veränderlichen Grösse z, sondern auch für jeden kleinern Modulus dieser Grösse stetig sind, und der Modulus der Grösse x kleiner als der Modulus der Grösse z ist; so kann die Function $\mathfrak{F}(x)$ jederzeit in eine nach den aufsteigenden positiven ganzen Potenzen der veränderlichen Grösse x geordnete convergirende Reihe entwickelt werden.

Dieser Satz lässt sich aber offenbar auch auf folgende Art ausdrücken:

Für jeden Modulus der Grösse x, welcher kleiner ist als der kleinste der Moduli dieser Grösse, für welche eine der beiden Functionen $\mathfrak{F}(x)$ und $\mathfrak{F}'(x)$ aufhört stetig zu sein, kann die Function $\mathfrak{F}(x)$ in eine nach den aufsteigenden positiven ganzen Potenzen der veränderlichen Grösse x geordnete convergirende Reihe entwickelt werden.

§. 14.

Das allgemeine Glied der im vorigen Paragraphen gefundenen Reihe ist

$$x^k\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^k}\right\}.$$

Für dieses allgemeine Glied, aus welchem die sämmtlichen Glieder der in Rede stehenden Reihe erhalten werden, wenn man für k nach und nach die positiven ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... setzt, lässt sich aber noch ein anderer sehr bemerkenswerther Ausdruck finden, zu dessen Entwickelung wir nun übergehen wollen.

Zuerst hat man zu berücksichtigen, dass unter der Voraussetzung, dass die positive ganze Zahl k grösser als Null ist, allgemein

$$\mathfrak{M}_r\{z^{-k}\} = 0$$

ist. Nach dem allgemeinen Begriffe des einem bestimmten Modulus ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse entsprechenden mittlern Werths einer Function ist nämlich

$$\mathfrak{M}_r\{z^{-k}\} = \frac{r^{-k} + (\Theta r)^{-k} + (\Theta^2 r)^{-k} + \ldots + (\Theta^{n-1}r)^{-k}}{n}$$
$$= r^{-k} \cdot \frac{1 + \Theta^{-k} + \Theta^{-2k} + \Theta^{-3k} + \ldots + \Theta^{-(n-1)k}}{n}$$

für ein unendlich grosses n. Weil nun nicht $k = 0$ und n unendlich gross ist, so geht offenbar n in k nicht auf, und nach §. 12. ist also

$$\frac{1+\Theta^{-k}+\Theta^{-2k}+\Theta^{-3k}+\ldots+\Theta^{-(n-1)k}}{n}=0,$$

folglich nach dem Obigen

$$\mathfrak{M}_r\{z^{-k}\}=0,$$

wie behauptet wurde.

Ferner ist nach dem allgemeinen Begriffe des einem bestimmten Modulus ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse entsprechenden mittlern Werths einer Function, indem wir wieder k grösser als Null annehmen, offenbar

$$\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)-\mathfrak{F}(0)-\frac{z}{1}\mathfrak{F}'(0)-\frac{z^2}{1\,.\,2}\mathfrak{F}''(0)-\ldots-\frac{z^{k-1}}{1\,..\,(k-1)}\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{z^k}\right\}$$

$$=\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^k}\right\}-\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(0)}{z^k}\right\}-\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}'(0)}{1\,.\,z^{k-1}}\right\}$$

$$-\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}''(0)}{1\,.\,2\,.\,z^{k-2}}\right\}-\ldots-\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{1\ldots(k-1)\,.\,z}\right\}$$

$$=\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^k}\right\}-\mathfrak{F}(0)\,\mathfrak{M}_r\{z^{-k}\}-\frac{\mathfrak{F}'(0)}{1}\,\mathfrak{M}_r\{z^{-(k-1)}\}$$

$$-\frac{\mathfrak{F}''(0)}{1\,.\,2}\,\mathfrak{M}_r\{z^{-(k-2)}\}-\ldots-\frac{\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{1\ldots(k-1)}\,\mathfrak{M}_r\{z^{-1}\},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^k}\right\}$$

$$=\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)-\mathfrak{F}(0)-\frac{z}{1}\mathfrak{F}'(0)-\frac{z^2}{1\,.\,2}\mathfrak{F}''(0)-\ldots-\frac{z^{k-1}}{1\,..\,(k-1)}\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{z^k}\right\}.$$

Hiernach und nach dem allgemeinen Begriffe des einem bestimmten Modulus ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse entsprechenden mittlern Werths einer Function ist unter den gemachten Voraussetzungen der mittlere Werth

$$\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^k}\right\}$$

offenbar dem Werthe der Function

$$\frac{\mathfrak{F}(z)-\mathfrak{F}(0)-\frac{z}{1}\mathfrak{F}'(0)-\frac{z^2}{1\,.\,2}\mathfrak{F}''(0)-\ldots-\frac{z^{k-1}}{1\,..\,(k-1)}\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{z^k}$$

für $z=0$ gleich. Weil für $z=0$ Zähler und Nenner dieses Bruchs verschwinden, so muss man nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung Zähler und Nenner in Bezug auf z differentiiren, wodurch man

$$\frac{\mathfrak{F}'(z)-\mathfrak{F}'(0)-\frac{z}{1}\mathfrak{F}''(0)-\frac{z^2}{1\,.\,2}\mathfrak{F}'''(0)-\ldots-\frac{z^{k-2}}{1\,..\,(k-2)}\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{kz^{k-1}}$$

erhält, und muss in diesem Bruche $z=0$ setzen. Weil aber für diesen Werth von z Zähler und Nenner wieder verschwinden, so muss man von Neuem differentiiren, wodurch man

$$\frac{\mathfrak{F}''(z) - \mathfrak{F}''(0) - \frac{z}{1}\mathfrak{F}'''(0) - \frac{z^2}{1.2}\mathfrak{F}^{IV}(0) - \ldots - \frac{z^{k-3}}{1\ldots(k-3)}\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{(k-1)\,kz^{k-2}}$$

erhält, und muss in diesem Bruche $z=0$ setzen. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Endlich wird man offenbar den Bruch

$$\frac{\mathfrak{F}^{(k-2)}(z) - \mathfrak{F}^{(k-2)}(0) - \frac{z}{1}\,\mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{3.4.5\ldots kz^2}$$

erhalten, in welchem $z=0$ gesetzt werden muss. Weil aber für diesen Werth von z Zähler und Nenner wieder verschwinden, so muss man von Neuem differentiiren, wodurch man den Bruch

$$\frac{\mathfrak{F}^{(k-1)}(z) - \mathfrak{F}^{(k-1)}(0)}{2.3.4.5\ldots kz}$$

erhält, in welchem man $z=0$ setzen muss. Differentiirt man nun, weil für $z=0$ auch Zähler und Nenner dieses Bruchs verschwinden, nochmals, so erhält man den Bruch

$$\frac{\mathfrak{F}^{(k)}(z)}{1.2.3\ldots k},$$

in dem man $z=0$ setzen muss, welches endlich

$$\frac{\mathfrak{F}^{(k)}(0)}{1.2.3\ldots k}$$

giebt, so dass also

$$\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^k}\right\} = \frac{\mathfrak{F}^{(k)}(0)}{1.2.3\ldots k},$$

und folglich

$$x^k\mathfrak{M}_r\left\{\frac{\mathfrak{F}(z)}{z^k}\right\} = \frac{\mathfrak{F}^{(k)}(0)}{1.2.3\ldots k}x^k$$

ist, wobei wir angenommen haben, dass k grösser als Null ist, zugleich aber auch bemerken, dass unter den gemachten Voraussetzungen offenbar

$$\mathfrak{M}_r\{\mathfrak{F}(z)\} = \mathfrak{F}(0)$$

ist.

Hieraus, in Verbindung mit dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze, ergiebt sich nun das folgende Theorem:

Für jeden Modulus der Grösse x, welcher kleiner ist als der kleinste der Moduli dieser Grösse, für welche eine der beiden Functionen $\mathfrak{F}(x)$ und $\mathfrak{F}'(x)$ aufhört stetig zu sein, ist

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{F}(0) + \frac{\mathfrak{F}'(0)}{1}x + \frac{\mathfrak{F}''(0)}{1.2}x^2 + \frac{\mathfrak{F}'''(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots$$

Weil

$$\frac{z}{z-x}\,\mathfrak{F}(z) = \mathfrak{F}(z) + \frac{x}{z}\,\mathfrak{F}(z) + \frac{x^2}{z^2}\,\mathfrak{F}(z) + \ldots + \frac{x^{k-1}}{z^{k-1}}\,\mathfrak{F}(z)$$
$$+ \frac{x^k}{z^{k-1}(z-x)}\,\mathfrak{F}(z)$$

ist; so ist, wenn man in der vorher gefundenen Gleichung

$$\mathfrak{F}(x)=\mathfrak{F}(0)+\frac{\mathfrak{F}'(0)}{1}x+\frac{\mathfrak{F}''(0)}{1.2}x^2+\frac{\mathfrak{F}'''(0)}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots$$

die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens bis zu ihrem $k$ten Gliede fortsetzt. der Rest, durch welchen die Reihe dann noch vervollständigt werden muss, nach dem Obigen offenbar der mittlere Werth der Function

$$\frac{x^k}{z^{k-1}(z-x)}\mathfrak{F}(z)$$

von z für einen den Modulus von x übersteigenden Modulus von z. Da nun dieser mittlere Werth bekanntlich die Grösse

$$\frac{\frac{x^k}{r^{k-1}(r-x)}\mathfrak{F}(r)+\frac{x^k}{(\Theta r)^{k-1}(\Theta r-x)}\mathfrak{F}(\Theta r)+\ldots+\frac{x^k}{(\Theta^{n-1}r)^{k-1}(\Theta^{n-1}r-x)}\mathfrak{F}(\Theta^{n-1}r)}{n}$$

für ein unendlich grosses n ist; so ist, wenn wir den grössten der Moduli der Grössen

$$\mathfrak{F}(r),\ \mathfrak{F}(\Theta r),\ \mathfrak{F}(\Theta^2 r),\ \mathfrak{F}(\Theta^3 r),\ldots.$$

durch R und den Modulus von x durch ϱ bezeichnen, nach dem in XL. §. 61. bewiesenen Satze der Modulus des in Rede stehenden Rests offenbar nie grösser als

$$\frac{\varrho^k}{r^{k-1}(r-\varrho)}R \text{ oder } (\frac{\varrho}{r})^{k-1}.\frac{\varrho R}{r-\varrho},$$

d. i. nicht grösser als der Rest der geometrischen Progression. welche man durch Entwickelung von

$$\frac{\varrho R}{r-\varrho}$$

nach den positiven ganzen Potenzen von ϱ erhält.

§. 15.

Um den im vorigen Paragraphen bewiesenen wichtigen Satz durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die Function

$$\mathfrak{F}(x)=(1+x)^\alpha$$

betrachten. Setzen wir die imaginäre Grösse $x=\xi+\eta\sqrt{-1}$, also $1+x=1+\xi+\eta\sqrt{-1}$, und der Kürze wegen, indem wir die Quadratwurzel positiv nehmen,

$$\varrho=\{(1+\xi)^2+\eta^2\}^{\frac{1}{2}};$$

so kann nach XL. §. 52.

$$1+x=\varrho\{\cos(\text{Arctang}\,\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin(\text{Arctang}\,\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}$$

gesetzt werden, wo der Bogen Arctang $\frac{\eta}{1+\xi}$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, und die ganze Zahl k gerade oder ungerade genommen werden muss, jenachdem $1+\xi$ positiv oder negativ ist. Nach XL. §. 54. §. 55. ist

$$\varrho^\alpha \{\cos\alpha\,(\operatorname{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin\alpha\,(\operatorname{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}$$

immer ein Werth von $(1+x)^\alpha$, und diesen Werth von $(1+x)^\alpha$ wollen wir jetzt allein in's Auge fassen und unter $\mathfrak{F}(x)$ verstehen, also auch

$$\mathfrak{F}(x)=\varrho^\alpha\{\cos\alpha(\operatorname{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin\alpha(\operatorname{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}$$

setzen. Bekanntlich ist

$$\mathfrak{F}'(x)=\alpha\,\frac{\mathfrak{F}(x)}{1+x},$$

also

$$\mathfrak{F}''(x)=\alpha\frac{(1+x)\mathfrak{F}'(x)-\mathfrak{F}(x)}{(1+x)^2},$$

d. i., weil nach dem Vorhergehenden

$$(1+x)\mathfrak{F}'(x)=\alpha\mathfrak{F}(x)$$

ist,

$$\mathfrak{F}''(x)=\alpha(\alpha-1)\,\frac{\mathfrak{F}(x)}{(1+x)^2}.$$

Folglich ist, wie man leicht durch fernere Differentiation findet,

$$\mathfrak{F}'''(x)=\alpha(\alpha-1)\,\frac{(1+x)\mathfrak{F}'(x)-2\mathfrak{F}(x)}{(1+x)^3},$$

also, weil nach dem Obigen

$$(1+x)\mathfrak{F}'(x)=\alpha\mathfrak{F}(x)$$

ist,

$$\mathfrak{F}'''(x)=\alpha(\alpha-1)\,(\alpha-2)\,\frac{\mathfrak{F}(x)}{(1+x)^3}.$$

Hieraus ergiebt sich durch neue Differentiation

$$\mathfrak{F}^{IV}(x)=\alpha(\alpha-1)\,(\alpha-2)\,\frac{(1+x)\mathfrak{F}'(x)-3\mathfrak{F}(x)}{(1+x)^4},$$

also, weil nach dem Obigen

$$(1+x)\mathfrak{F}'(x)=\alpha\mathfrak{F}(x)$$

ist,

$$\mathfrak{F}^{IV}(x)=\alpha(\alpha-1)\,(\alpha-2)\,(\alpha-3)\,\frac{\mathfrak{F}(x)}{(1+x)^4}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist folglich allgemein

$$\mathfrak{F}^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\,..\,(\alpha-n+1)\,\frac{\mathfrak{F}(x)}{(1+x)^n},$$

also

$$\mathfrak{F}^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\,\,.\,\,.\,\,(\alpha-n+1)\mathfrak{F}(0).$$

Weil nun

$$\mathfrak{F}'(x) = \alpha \frac{\mathfrak{F}(x)}{1+x}$$

ist, so ist nach dem Obigen

$$\mathfrak{F}'(x) = \alpha \frac{\varrho^{\alpha}\{\cos\alpha(\text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin\alpha(\text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}}{\varrho\{\cos(\text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin(\text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}},$$

also nach XL. §. 53. §. 54.

$$\mathfrak{F}'(x) = \alpha\varrho^{\alpha-1}\{\cos\,(\alpha-1)\,(\text{Arctang}\,\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)$$

$$+\sin\,(\alpha-1)\,(\text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}.$$

Der Modulus von x ist $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$. Ist nun $\sqrt{\xi^2+\eta^2}<1$ oder $\xi^2+\eta^2<1$, so ist immer $1+\xi>0$, weil, wenn $1+\xi \overline{\overline{<}} 0$, d. i. $\xi \overline{\overline{<}} -1$ wäre, offenbar $\xi^2 \overline{\overline{>}} 1$, und folglich $\xi^2+\eta^2 \overline{\overline{>}} 1$ sein würde, welches gegen die Voraussetzung $\sqrt{\xi^2+\eta^2}<1$ streitet. Ist also der Modulus von x kleiner als die Einheit, so ist immer $1+\xi>0$, der Bruch $\frac{\eta}{1+\xi}$ hat also einen endlichen völlig bestimmten Werth, und die ganze Zahl k ist eine gerade Zahl und kann, wie sich auch ξ und η ändern mögen, als constant angenommen werden, woraus sich, in Verbindung mit dem Obigen ergiebt, dass, so lange der Modulus von x, d. i. die Grösse $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, kleiner als die Einheit ist, weder eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $\mathfrak{F}(x)$, noch eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $\mathfrak{F}'(x)$ Statt findet. Wenn der Modulus von x, d. i. die Grösse $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, der Einheit gleich ist, erhält z. B. schon für $\xi=-1$, $\eta=0$ der Bruch $\frac{\eta}{1+\xi}$ den völlig unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$.

Hieraus und aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen wichtigen Satze ergiebt sich also, dass für

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2}<1$$

jederzeit

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{F}(0) + \frac{\mathfrak{F}'(0)}{1}x + \frac{\mathfrak{F}''(0)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{\mathfrak{F}'''(0)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots\ldots$$

ist. Weil nun nach dem Obigen

$$\mathfrak{F}(x) = \varrho^{\alpha}\{\cos\alpha(\text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin\alpha(\text{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}$$

und $x=\xi+\eta\sqrt{-1}$, also für $x=0$ auch $\xi=0$ und $\eta=0$, folglich $\varrho=1$ und

$$\frac{\eta}{1+\xi}=0,\ \text{Arctang}\,\frac{\eta}{1+\xi}=0$$

ist, wobei man nicht zu übersehen hat, dass Arctang $\frac{\eta}{1+\xi}$ nach dem Obigen immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss; so ist offenbar

$$\mathfrak{F}(0)=\cos\alpha k\pi+\sin\alpha k\pi\sqrt{-1}.$$

und also, weil nach dem Obigen allgemein

$$\mathfrak{F}^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\mathfrak{F}(0)$$

ist,

$$\mathfrak{F}^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\ (\cos\alpha k\pi+\sin\alpha k\pi\sqrt{-1}),$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{F}^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1.2.3\ldots n}(\cos\alpha k\pi+\sin\alpha k\pi\sqrt{-1}),$$

oder, wenn wir in einer bekannten Bezeichnung

$$\alpha_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1.2.3\ldots.n}$$

setzen,

$$\frac{\mathfrak{F}^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}=\alpha_n(\cos\alpha k\pi+\sin\alpha k\pi\sqrt{-1}).$$

Führen wir dies in den oben gefundenen Ausdruck von $\mathfrak{F}(x)$ ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{F}(x)=(\cos\alpha k\pi+\sin\alpha k\pi\sqrt{-1})\ (1+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots.),$$

wo k jede gerade ganze Zahl bezeichnen kann.

Also ist nach dem Obigen unter der Voraussetzung, dass

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2}<1$$

ist,

$$\{(1+\xi)^2+\eta^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos\alpha(\mathrm{Arctg}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin\alpha(\mathrm{Arctg}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}$$
$$=(\cos\alpha k\pi+\sin\alpha k\pi\sqrt{-1})\left\{\begin{array}{l}1+\alpha_1(\xi+\eta\sqrt{-1})\\+\alpha_2(\xi+\eta\sqrt{-1})^2\\+\alpha_3(\xi+\eta\sqrt{-1})^3\\+\alpha_4(\xi+\eta\sqrt{-1})^4\\+\ \ldots\ldots\ldots\end{array}\right\},$$

wo k jede gerade ganze Zahl sein kann, und Arctang $\frac{\eta}{1+\xi}$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss. Setzen wir, was verstattet ist, $k=0$, so erhalten wir, immer unter der Voraussetzung, dass

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2}<1$$

ist und Arctang $\frac{\eta}{1+\xi}$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen wird,

$$\{(1+\xi)^2+\eta^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\ \mathrm{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi})+\sin(\alpha\ \mathrm{Arctang}\frac{\eta}{1+\xi})\sqrt{-1}\}$$

$$=1+\alpha_1(\xi+\eta\sqrt{-1})+\alpha_2(\xi+\eta\sqrt{-1})^2$$
$$+\alpha_3(\xi+\eta\sqrt{-1})^3$$
$$+\alpha_4(\xi+\eta\sqrt{-1})^4$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Für $\eta=0$ erhält man hieraus unter der Voraussetzung, dass $\sqrt{(\xi^2)}<1$, d. h. der absolute Werth von ξ kleiner als die Einheit, oder

$$-1<\xi<+1$$

ist,

$$(1+\xi)^\alpha=1+\alpha_1\xi+\alpha_2\xi^2+\alpha_3\xi^3+\alpha_4\xi^4+\ldots\ldots$$

Man sieht, wie leicht der im vorigen Paragraphen bewiesene, von Cauchy gefundene Satz zu diesen Resultaten die bekanntlich auf andern Wegen nur ziemlich weitläufig und schwierig bewiesen werden können, führt.

Bemerken wollen wir noch, dass, wie schon in der elementaren Analysis gezeigt wird, in dem Falle, wo α eine positive ganze Zahl ist, für jedes ξ und η

$$(1+\xi+\eta\sqrt{-1})^\alpha=1+\alpha_1(\xi+\eta\sqrt{-1})+\alpha_2(\xi+\eta\sqrt{-1})^2$$
$$+\alpha_3(\xi+\eta\sqrt{-1})^3$$
$$+\alpha_4(\xi+\eta\sqrt{-1})^4$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ist. Weil nun nach dem Obigen

$$1+\xi+\eta\sqrt{-1}$$

$$=\varrho\{\cos(\text{Arctang}\,\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin\,(\text{Arctang}\,\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}$$

ist, wo Arctang $\frac{\eta}{1+\xi}$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, und die ganze Zahl k gerade oder ungerade genommen werden muss, jenachdem $1+\xi$ positiv oder negativ ist; so ist ganz unter denselben Voraussetzungen nach XL. §. 54.

$$(1+\xi+\eta\sqrt{-1})^\alpha$$

$$=\varrho^\alpha\{\cos\alpha(\text{Arctang}\,\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin\alpha(\text{Arctang}\,\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}.$$

Also ist nach dem Obigen, wenn α eine positive ganze Zahl ist, für jedes ξ und η

$$\{(1+\xi)^2+\eta^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos\alpha(\text{Arctg}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)+\sin\alpha(\text{Arctg}\frac{\eta}{1+\xi}+k\pi)\sqrt{-1}\}$$
$$=1+\alpha_1(\xi+\eta\sqrt{-1})+\alpha_2(\xi+\eta\sqrt{-1})^2+\alpha_3(\xi+\eta\sqrt{-1})^3$$
$$+\alpha_4(\xi+\eta\sqrt{-1})^4$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wenn man Arctang $\frac{\eta}{1+\xi}$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, und die ganze

Zahl k gerade oder ungerade nimmt, jenachdem $1+\xi$ positiv oder negativ ist.

Der Raum gestattet für jetzt nicht, diesen wichtigen und interessanten Gegenstand weiter auszuführen; wir werden aber späterhin auf denselben zurückkommen.

XLIX.

Anwendung der Lehre vom Zuge auf die Nachweisung der geometrischen Bedeutung der Form $a+b.\sqrt{-1}$.

Von dem

Herrn Major und Ritter Dr. G. W. Müller

zu Hannover.

Die von Gauss hervorgehobene und in Anwendung gebrachte geometrische Bedeutung der sogenannten imaginären Form $a+b.\sqrt{-1}$ darf zu denjenigen neueren Erweiterungen der Mathematik gezählt werden, die eine besondere Aufmerksamkeit für sich in Anspruch nehmen. Wie diese Bedeutung sich auf eine einfache Art aus der Lehre vom Zuge *) nachweisen lässt, welche das Beschreiben oder Durchfahren des Raums als den eigentlichen Gegenstand der analytischen Auffassung der Geometrie betrachtet, dieses soll durch nachfolgenden Versuch gezeigt werden.

Wenn der Zug eines beschreibenden Punkts die Seiten ähnlicher Figuren nach der Ordnung der Aehnlichkeit durchfährt, so wird offenbar die unter den ähnlichen Seiten Statt findende Proportion auch unter den beschreibenden Zügen Statt finden, indem dem Begriffe der Aehnlichkeit die Voraussetzung entspricht, dass in ähnlichen Figuren die ähnlichzeigenden Richtungen, und damit also auch die Grössen der Züge, die einen ähnlichen Uebergang darstellen, als gleichnamige zu betrachten sind. Es sei z. B. in einem beliebigen Punkte A einer geraden Linie BC ein Perpendikel errichtet und der Punkt D, wo solches den von B nach C führenden Halbkreis über dem Durchmesser BC trifft, geradlinig mit B und C verbunden, so sind BAD und $D'A'C$ ähnliche Dreiecke. — (Anmerkung. Die Bezeichnung ohne oder mit Accent soll hier bei

*) Darstellung der Lehre vom Zuge u. s. w. in Crelle's Journal für Mathematik. B. XV. H. 3.

den Punkten, die zu beiden Dreiecken gehören, unterscheiden, ob sie für das erste oder für das letztere betrachtet werden, auch soll in der Angabe eines Zuges, der zwei Punkte verbindet, der voranstehende Buchstabe den Anfangspunkt des Zuges bezeichnen.) — Der zusammengesetzte Zug des beschreibenden Punkts der von B nach A, dann von A nach D, von D' nach A' und von A' nach C führt, durchfährt offenbar die Seiten der ähnlichen Dreiecke BAD, $D'A'C$ nach der Ordnung der Aehnlichkeit. Man hat also unter den einzelnen Theilen seiner Zusammensetzung, die als Züge aufgefasst werden müssen, die Proportion $BA : AD = D'A' : A'C$.

Nun kann man für ein rechtwinkliges Coordinatensystem in der Ebene den Ausdruck $a\alpha + b\beta$ als die allgemeine Form für die analytische Darstellung des Coordinatenzuges ansehen, der, wenn er von einem Punkte P ausgeht und zu dem Punkte Q hinführt, dadurch des letzteren Lage gegen den ersteren bestimmt. Es bedeutet dann α die Grösse des geradlinigen Zuges, der die Längeneinheit in der Ebene mit einer Richtung beschreibt, die mit der positiven Richtung in der Abscissenaxe einer und derselben Richtung im Raume parallel zeigt, und β die Grösse des geradlinigen Zuges, der die Längeneinheit in der Ebene mit einer Richtung beschreibt, die mit der positiven Richtung in der Ordinatenaxe einer und derselben Richtung im Raume parallel zeigt. Die Coefficienten a und b sind numerische Factoren, die das Setzen der Grössen α und β zur Bildung der beiden Theile des ganzen Zuges näher bestimmen; ihr absoluter Werth muss sich zu 1 verhalten, wie die Länge ihres Theils zur Längeneinheit, ausserdem können sie positiv oder negativ sein, je nachdem die Beschreibung der Theile mit der Richtung der Grössen α und β selbst oder mit der entgegengesetzten zur Ausführung kommen soll. Es sind also a und b dieselben Zahlen, die nach der gewöhnlichen Auffassung die Abscisse und Ordinate des Punkts Q gegen den Anfangspunkt P einzeln für sich darstellen.

Die Eigenthümlichkeit dieses Coordinatensystems besteht darin, dass jeder Punkt der Ebene von dem Coordinatenzuge nach vier verschiedenen Richtungen, wie sie den Grössen $+\alpha$, $-\alpha$, $+\beta$, $-\beta$ entsprechen, durchfahren werden kann. Die durch das Zusammenliegen dieser Grössen in einem Punkte A der Ebene, als ihrem gemeinschaftlichen Anfangspunkte oder Endpunkte, unter ihnen entstehende Beziehung findet also für jeden Punkt der Ebene statt. Lässt man von dem Punkte A aus AB den Zug $+\alpha$, AC den Zug $-\alpha$, AD den Zug $+\beta$, AE den Zug $-\beta$ darstellen, so entsteht eine Lagenbeziehung unter ähnlichen neben einander liegenden Dreiecken BAD und DAC, DAC und CAE, CAE und EAB, EAB und BAD ganz mit derjenigen übereinstimmend, welche oben betrachtet wurde. Man hat also unter jenen Grössen, insofern ein beschreibender Punkt sie vermittelst eines zusammenhängenden Zuges durchläuft, je nach der Folge $BADAC$, $DACAE$, $CAEAB$, $EABAD$ die Proportionen $-\alpha : \beta = -\beta : -\alpha$, $-\beta : -\alpha = \alpha : -\beta$, $\alpha : -\beta = \beta : \alpha$, $\beta : \alpha = -\alpha : \beta$. Sämmtliche Proportionen geben die Beziehung $\beta\beta = -\alpha\alpha$, also $\beta = \alpha . \sqrt{-1}$ oder $\beta = \alpha . i$, wenn $+\sqrt{-1}$ durch i bezeichnet wird. Deutet man α, als den ursprünglichen Einheitszug, durch $+1$ an, so erhält man $\beta = +\sqrt{-1} = i$. Es ist demnach $a + b . i$ die analytische Form, welche der Grösse des rechtwinkligen Cordinatenzuges zukommt, wenn derselbe als ein zusammenhängendes Ganzes aufgefasst wird. Der, der Einheit des zweiten Theils sich beifügende Factor i deutet dabei an, dass die Längeneinheit, welche für die Einheit des ersten Theils mit der positiven Abscissenrichtung beschrieben wird, für die Einheit des zweiten Theils mit rechtwinklig abweichender Richtung zu beschreiben ist.

Wenn $a + b . i$ den Coordinatenzug darstellt, der vom Punkte P zum Punkte Q überführt und der geradlinige oder Radius-Vector-Zug von P nach Q durch r bezeichnet wird, so dass r dessen Länge in Theilen der Längeneinheit ausdrückt mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem in der geraden Linie PQ die Richtung von P nach Q als die positive oder als die negative betrachtet wird, und wenn ferner e die Elongation jenes Radius-Vector ist, d. h. die Grösse des Winkels bezeichnet, der im Scheitelpunkte P aus der Richtung, die mit der positiven Abscissenrichtung einer und derselben Richtung des Raums parallel ist, in diejenige überführt, die in der geraden Linie PQ als die positive betrachtet wird, so hat man allgemein $a = r \cos e$, $b = r \sin e$, $a + b . i = r (\cos e + \sin e . i)$. Die Grösse e lässt sich durch die Zahl ausdrücken, welche die Länge des Bogens des Elongationswinkels in Theilen des Halbmessers angiebt mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem dieser Winkel durch positive oder negative Drehung zu beschreiben sein wird. Es stellen dann a und b die rechtwinkligen, e und r die Polar-Coordinaten des Punkts Q gegen den Anfangspunkt P nach ihrer einzelnen Grösse dar, und zwar die absoluten oder die relativen Coordinaten, je nachdem P der Anfangspunkt des Coordinaten-Systems selbst oder ein anderer Punkt der Ebene ist.

Die durch Cauchy aufgekommene Benennung „complexe Zahl" für die Zahl von der Form $a + b . i$ scheint bereits das Bürgerrecht gewonnen zu haben. Die von ihm befolgte Ausschliessung negativer Werthe für den Modulus der complexen Zahl oder für die Grösse r in der Form $r . (\cos e + \sin e . i)$ hat zwar für einzelne Fälle ihren Nutzen, stört aber die Allgemeinheit der Auffassung.

Die durchgreifende Allgemeinheit der Darstellung der Grösse des Coordinatenzuges durch die complexe Zahlenform erhellet am auffallendsten bei der Rechnung mit complexen Zahlen. Es sei z. B. A der Anfangspunkt des Coordinatensystems, AB die mit positiver Abscissenrichtung beschriebene Längeneinheit, so stellt der Zug die ursprüngliche Einheit dar, die dem Coordinatenzuge zum Grunde liegt. Nun bezeichne $a + b . i = r (\cos e + \sin e . i)$ die Grösse des Coordinatenzuges, der aus A nach dem Punkte C führt, so tritt durch das Setzen dieser complexen Zahl der Zug von A nach C an die Stelle des Einheitszuges von A nach B. Denkt man sich die complexe Zahl $a + b . i$ als eine Summe von aliquoten Theilen, so wird das Setzen derselben zu einer Folge von Punkten hinführen, die Endpunkte von entsprechenden aliquoten Theilen des Radius-Vector-Zuges AC sind, und da ein Zug als die Gränzvorstellung des Aneinanderreihens einer Summe von unendlich vielen unendlich kleinen aliquoten Theilen aufgefasst werden kann, so ist mit dem Setzen der complexen Zahl $a + b . i$ in der That auch das Setzen des Radius-Vector-Zuges AC selbst verknüpft. Man darf also sagen, dass das Setzen der complexen Zahl $a + b . i = r (\cos e + \sin e . i)$ aus dem Einheitszuge AB den $R. V.$ Zug AC hervor-geben lässt und dass dabei e den Uebergang aus der positiven Richtung des Einheitszuges in die des $R.V.$ Zuges und r als Factor von 1 die aus der Einheit hervorgehende lineare Grösse des Zuges AC anzeigt. Nun sei die complexe Zahl $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}.i = \mathfrak{R}.(\cos \mathfrak{E} + \sin \mathfrak{E}.i)$, welche von A zum Punkte D hinführt, das Product aus den beiden complexen Zahlen $a + b.i = r.(\cos e + \sin e.i)$ und $a' + b'.i = r'.(\cos e' + \sin e'.i)$, so wird, wenn die erstere dabei als Multiplicand angesehen wird, diese für die Ausführung der Multiplication an die Stelle der Einheit des Multiplicators treten, es wird also der Radius-Vector-Zug AD so aus dem $R.V.$ Zug AC hervorgehen, wie es das Setzen des Multiplicators für die Bildung eines $R.V.$ Zuges aus dem Einheitszuge AB vorschreibt, d. h. es wird e' den Uebergang aus der positiven Richtung des $R.V.$ Zuges AC in die des $R.V.$ Zuges AD angeben, und r' als Factor von r die lineare Grösse des $R.V.$ Zuges AD hervorbringen. Man würde also hiernach $\mathfrak{R} = rr'$ und $\mathfrak{E} = e + e'$ erhalten, welches vollkommen mit dem wirklichen Multiplicationsproducte der complexen Zahlen selbst übereinstimmt, indem

$$r.(\cos e + \sin e.i).r'(\cos e' + \sin e'.i)$$
$$= rr'.\{\cos(e+e') + \sin(e+e').i)$$

ist.

L.

Anwendung der Fresnel'schen Formeln zur Bestimmung der von einer beliebigen Anzahl paralleler durchsichtiger Platten reflectirten und gebrochenen polarisirten Lichtintensitäten.

Von

Herrn J. Fleschl,

Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften an der Realschule zu Düsseldorf.

1.

Die Phänomene des Lichts werden hervorgebracht gedacht durch Vibrationen eines äusserst feinen höchst elastischen, das ganze Universum erfüllenden hypothetischen Fluidums, welches man Licht-Aether nennt. Die Vibrationen der Aethertheilchen erfolgen immer und jederzeit senkrecht zum Lichtstrahl, also stets in einer auf diesem letzteren senkrechten Ebene. Bleibt die Schwingungsrichtung der Aethertheilchen constant, d. h. sich immer parallel, so heisst das Licht polarisirt; ändert sich dieselbe aber continuirlich, so heisst das Licht unpolarisirt. Ich nenne mit den französischen Physikern dasjenige polarisirte Licht, dessen Vibrationen senkrecht gegen die Einfallsebene erfolgen, in der Einfallsebene, dasjenige hingegen, dessen Oscillationen in der Einfallsebene geschehen, senkrecht zur Einfallsebene polarisirt. Da sich das unpolarisirte Licht betrachten lässt als eine continnirliche Aufeinanderfolge nach allen möglichen Richtungen polarisirten Lichts, so dass in einer sehr kleinen Zeit nach jeder Richtung gleich viele und gleich starke Schwingungen erfolgen: so kann dasselbe also, wenn es nach der Einfallsebene und senkrecht gegen dieselbe zerlegt wird, angesehen werden als ein System senkrecht zu einander polarisirter Strahlen, jeder von der halben Intensität des unzerlegten unpolarisirten. Deshalb also, weil es der einfachere Fall ist, und weil das unpolarisirte Licht als aus polarisirtem bestehend angesehen werden kann, verdient mit der Betrachtung des polarisirten Lichts der Anfang gemacht zu werden.

2.

Fällt in der Einfallsebene polarisirtes Licht, dessen Vibrationen also senkrecht gegen diese Ebene erfolgen, von einer als Einheit angenommenen Intensität, unter dem Winkel i auf die Trennungsfläche zweier durchsichtigen Media von verschiedener Dichtigkeit und wird dasselbe unter dem Winkel i' refractirt: so sind die Intensitäten des reflectirten und durchgehenden Lichts respective ausgedrückt durch folgende Formeln:

$$A^2 = \frac{\sin^2(i - i')}{\sin^2(i + i')} \text{ und } C^2 = 1 - A^2 = \frac{\sin 2i \,.\, \sin 2i'}{\sin^2(i + i')}.$$

Auf gleiche Weise sind die Intensitäten des gespiegelten und durchgehenden senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirten Lichts, dessen Schwingungen also in dieser Ebene erfolgen, unter übrigens ganz gleichen Umständen, gegeben durch die Ausdrücke:

$$B^2 = \frac{\operatorname{tang}^2(i - i')}{\operatorname{tang}^2(i + i')} \text{ und } D^2 = 1 - B^2 = \frac{\sin 2i \,.\, \sin 2i'}{\sin^2(i + i')\cos^2(i - i')}.$$

Diese 4 Formeln wurden gegeben von Fresnel in den Mémoires de l'académie des sciences und tragen seinen ehrenvollen Namen. Man findet sie gleichfalls ausführlich entwickelt in Radicke's Handbuch der Optik. 1. Band. Seite 231. ff., so wie auch in den neueren Lehrbüchern der Physik, z. B. in Cours de physique à l'école polytechnique par Lamé, Tome II. §. 637. u. s. w., weshalb ich von ihnen, als von allgemein bekannten Formeln, in meiner kleinen Arbeit ausgeben zu dürfen geglaubt habe.

3.

Fällt ein Lichtstrahl unter einem beliebigen Winkel auf die Trennungsfläche zweier durchsichtigen Media von verschiedener Dichtigkeit, so wird derselbe im Auffallspunkte im Allgemeinen in zwei Strahlen getheilt, von denen der eine unter dem Auffallswinkel ins erstere Medium zurückgeworfen, der andere unter einem andern Winkel ins zweite Medium gebrochen wird. Fällt also in der Einfallsebene polarisirtes Licht unter den oben (Art. 2.) bezeichneten Bedingungen auf die obere Fläche einer Glasplatte mit parallelen

Begrenzungsebenen, so wird ein Theil A^2 in die Luft reflectirt, ein anderer Theil C^2 dringt unter dem Winkel i' in die Glasmasse ein und trifft unter demselben Winkel i' auf die untere Grenzebene der Platte. In diesem Punkte theilt sich dieser letztere Theil C^2 wieder in zwei Strahlen, von denen der eine ins Innere der Glasmasse gespiegelt wird, der andere unter dem Winkel i, also parallel der auffallenden Lichteinheit, aus der Platte heraustritt. Da sich nun die Werthe von A^2 und C^2 nicht ändern, wenn i und i' unter einander vertauscht werden, da also die Intensitäten des reflectirten und gebrochenen Lichtes aus der entsprechenden Intensität des auffallenden stets auf dieselbe Weise bestimmt werden, das Licht mag unter dem Winkel i aufs dichtere, oder unter dem Winkel i' aufs minder dichte Medium auffallen: so erhalten wir also in diesem Falle, wie im ersteren, die Intensität des ins Innere der Glasmasse zurückgeworfenen und aus derselben heraustretenden Lichtes, wenn wir die Intensität C^2 des auffallenden respective mit A^2 und C^2 multipliciren. Die Intensität des ersteren Strahles ist also C^2A^2, die des andern C^4, so dass

$$C^2 = C^2A^2 + C^4 = C^2(A^2 + C^2).$$

Wenn wir auf diese Weise die Sache verfolgen, so ergiebt sich, dass innerhalb der Glasplatte zwischen deren beiden parallelen Begrenzungsebenen eine unendliche Menge von Reflexionen Statt haben. Alle diese reflectirten Strahlen haben das gemeinschaftlich, dass sie sämmtlich in der Einfallsebene liegen und unter dem Winkel i' reflectirt werden. Und da man die Intensität des gespiegelten Strahls erhält, wenn man die Intensität des auffallenden mit A^2 multiplicirt, so werden die Intensitäten aller im Innern der Glasmasse reflectirten Strahlen also eine geometrische Progression bilden, deren erstes Glied C^2 und deren Quotient A^2 ist. Diese Reihe ist also:

$$C^2 + C^2A^2 + C^2A^4 + \text{etc.} = C^2(1 + A^2 + A^4 + \text{etc.}) = \frac{C^2}{1-A^2} = 1.$$

Um nun die Intensitäten der aus der oberen oder unteren Grenzebene der Platte heraustretenden parallelen Strahlen zu erhalten, haben wir nur die betreffenden auffallenden Lichtintensitäten, aus deren Zerlegung sie hervorgegangen sind, jedes Mal mit C^2 zu multipliciren. Die von der oberen Grenzebene der Platte unter dem Winkel i ausgehende Lichtintensität wird also gleich sein der Summe folgender Reihe, deren Glieder die Lichtstärke der einzelnen Strahlen ausdrücken:

$$A^2 + C^4A^2 + C^4A^6 + C^4A^{10} = A^2 + A^2C^4(1 + A^4 + A^8 + \text{etc.}) =$$

$$A^2 + A^2 \cdot \frac{1-A^2}{1+A^2} = \frac{A^2}{1+A^2}(1 + A^2 + 1 - A^2) = \frac{2A^2}{1+A^2}.$$

Auf gleiche Weise erhält man die Intensität des aus der unteren Fläche der Platte heraustretenden Lichts durch die Summation der Reihe:

$$C^4 + C^4A^4 + C^4A^8 + \text{etc.} = C^4(1 + A^4 + A^8 + \text{etc.}) =$$

$$\frac{1-A^2}{1+A^2}.$$

Folgende Gleichungen stellen die jedesmaligen auffallenden

Lichtintensitäten mit ihren respectiven reflectirten und gebrochenen Strahlen dar, in welche sie sich bei ihrer Zerlegung theilen:

$$1 = A^2 + C^2$$
$$C^2 = C^2A^2 + C^4 = C^2(A^2 + C^2),$$
$$C^2A^2 = C^2A^4 + C^4A^2 = C^2A^2(A^2 + C^2),$$
$$C^2A^4 = C^2A^6 + C^4A^4 = C^2A^4(A^2 + C^2),$$
$$C^2A^6 = C^2A^8 + C^4A^6 = C^2A^6(A^2 + C^2), \text{ u. s. w.,}$$

deren Richtigkeit evident ist.

Aus der vorangehenden Entwicklung ergiebt sich übersichtlich dargestellt folgendes Resultat:

Fällt in der Einfallsebene polarisirtes Licht von der Intensität $= 1$ unter dem Winkel i aus Luft auf die obere Fläche einer Glasplatte mit parallelen Begrenzungsebenen, so ist die Intensität alles von der obern Seite der Platte unter demselben Winkel i ausgehenden Lichts gegeben durch den Ausdruck

$$\frac{2A^2}{1 + A^2} = A_1^2,$$

und die Intensität des unter dem Winkel i, also parallel der auffallenden Lichteinheit, aus der untern Fläche der Platte austretenden Lichts wird dargestellt durch den Ausdruck

$$\frac{1 - A^2}{1 + A^2} = C_1^2.$$

Wir finden also das von der obern oder untern Fläche der Platte kommende Licht, wenn wir die Intensität des auffallenden respective mit A_1^2 oder C_1^2 multipliciren.

4.

Wir denken uns nun n parallele Platten auf einander liegend und bezeichnen, analog dem Vorigen, das unter ganz denselben Umständen von der obern Fläche der obersten Platte ausgehende Licht durch A_n^2 und das aus der untern Fläche der untersten heraustretende durch C_n^2. Wir fügen noch eine Platte hinzu und wollen bestimmen die bei der Vereinigung von $(n + 1)$ Platten von der obersten und untersten Platte kommenden Lichtintensitäten, also A_{n+1}^2 und C_{n+1}^2.

Vor Allem ist einleuchtend, dass zwischen der untern Fläche der $n$ten und der obern Fläche der darunterliegenden $(n + 1)$ten Platte eine unendliche Menge von Lichtintensitäten sich befinden werden. Wie oben (Art. 3.), so haben auch hier alle diese Strahlen das gemein, dass sie sämmtlich in der Einfallsebene liegen, dagegen aber alle unter dem Winkel i von den bezeichneten beiden Flächen herkommen. Wir finden nun die Intensität irgend eines dieser Strahlen, wenn wir die Intensität desjenigen auffallenden, aus dessen Zerlegung er hervorgeht, respective mit A_1^2 oder A_n^2 multipliciren, jenachdem der auffallende Strahl auf die eine einzelne oder die n vereinigten Platten trifft. Diese Strahlen sind also

$$C_n^2 + C_n^2A_1^2 + C_n^2A_1^2A_n^2 + C_n^2A_1^4A_n^2 + C_n^2A_1^4A_n^4 + \text{etc.}$$

Aus diesen letzteren sich zwischen den beiden Plattensystemen bewegenden Strahlen finden wir nun die einzelnen, von ihnen herrührenden, aus der unteren Fläche der einen einzelnen, oder der oberen Fläche des Systems von n Platten parallel unter einander heraustretenden Lichtintensitäten, wenn wir die betreffenden (auffallenden) Strahlen respective mit $C_1{}^2$ oder $C_n{}^2$ multipliciren, je nachdem dieselben auf die einzelne oder die n Platten auffielen. Also wird die Intensität alles von der obern Fläche der $(n+1)$ auf einander liegenden Platten kommenden Lichts gleich sein der Summe folgender Reihe, deren Glieder die Lichtstärke der einzelnen Strahlen bezeichnen:

$$\begin{aligned} A_{n+1}{}^2 &= A_n{}^2 + C_n{}^4 A_1{}^2 + C_n{}^4 A_1{}^4 A_n{}^2 + C_n{}^4 A_1{}^6 A_n{}^4 + \text{etc.} = \\ &= A_n{}^2 + C_n{}^4 A_1{}^2 \{1 + A_1{}^2 A_n{}^2 + A_1{}^4 A_n{}^4 + \text{etc.}\} \\ &= A_n{}^2 + \frac{C_n{}^4 A_1{}^2}{1 - A_1{}^2 A_n{}^2}. \end{aligned}$$

Ebenso ist die Intensität aller aus der untersten $(n+1)$ten Platte heraustretenden parallelen Strahlen gleich der Summe folgender Reihe:

$$\begin{aligned} C_{n+1}{}^2 &= C_n{}^2 C_1{}^2 + C_n{}^2 A_1{}^2 A_n{}^2 C_1{}^2 + C_n{}^2 A_1{}^4 A_n{}^4 C_1{}^2 + \text{etc.} \\ &= C_1{}^2 C_n{}^2 \{1 + A_1{}^2 A_n{}^2 + A_1{}^4 A_n{}^4 + \text{und}\} \\ &= \frac{C_1{}^2 C_n{}^2}{1 - A_1{}^2 A_n{}^2}. \end{aligned}$$

Folgende Gleichungen stellen die auffallenden Lichtintensitäten mit ihren respectiven reflectirten und refractirten Strahlen dar, in welche sie sich zerlegen:

$$1 = A_n{}^2 + C_n{}^2,$$

$$C_n{}^2 = C_n{}^2 A_1{}^2 + C_n{}^2 C_1{}^2 = C_n{}^2 (A_1{}^2 + C_1{}^2),$$

$$C_n{}^2 A_1{}^2 = C_n{}^4 A_1{}^2 + C_n{}^2 A_1{}^2 A_n{}^2 = C_n{}^2 A_1{}^2 (A_n{}^2 + C_n{}^2),$$

$$\begin{aligned} C_n{}^2 A_1{}^2 A_n{}^2 &= C_n{}^2 A_1{}^4 A_n{}^2 + C_n{}^2 A_1{}^2 A_n{}^2 C_1{}^2 \\ &= C_n{}^2 A_1{}^2 A_n{}^2 (A_1{}^2 + C_1{}^2) \end{aligned}$$

u. s. w., deren Richtigkeit sich von selbst ergiebt.

Setzt man in den für $A_{n+1}{}^2$ und $C_{n+1}{}^2$ gefundenen allgemeinen Ausdrücken successive

$$n = 1,\ n = 2,\ n = 3 \text{ u. s. w.},$$

so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$\left\{\begin{aligned} A_2{}^2 &= \frac{4A^2}{1+3A^2}, \\ C_2{}^2 &= \frac{1-A^2}{1+3A^2}. \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} A_3{}^2 &= \frac{6A^2}{1+5A^2}, \\ C_3{}^2 &= \frac{1-A^2}{1+5A^2}. \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} A_4{}^2 &= \frac{8A^2}{1+7A^2}, \\ C_4{}^2 &= \frac{1-A^2}{1+7A^2}. \end{aligned}\right. \quad \text{u. s. w.}$$

Hieraus schliessen wir allgemein:

$$A_n{}^2 = \frac{2nA^2}{1+(2n-1)A^2} \text{ und } C_n{}^2 = \frac{1-A^2}{1+(2n-1)A^2} \dots \ (a).$$

so dass jederzeit

$$1 = A_n{}^2 + C_n{}^2.$$

Wir fassen zusammen. Fällt in der Einfallsebene polarisirtes

Licht von einer als Einheit angenommenen Intensität unter dem Winkel i aus Luft auf n über einander liegende parallele Glasplatten auf, so ist die Intensität alles von der obersten Platte unter demselben Winkel ausgehenden Lichtes $= A_n^2$ und die Intensität des aus der untersten Platte parallel der auffallenden Lichteinheit heraustretenden Lichts $= C_n^2$. Beide Theile bleiben in der Einfallsebene polarisirt.

5.

Da für Licht, welches senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirt ist, an die Stelle von A^2 in den vorhergehenden Entwicklungen B^2 tritt, übrigens unter denselben Bedingungen alles genau dasselbe bleibt, so werden also, analog den beiden vorigen (α), die Formeln

$$B_n^2 = \frac{2nB^2}{1+(2n-1)B^2},\ D_n^2 = \frac{1-B^2}{1+(2n-1)B^2} \dots (\beta)$$

die von der obersten und untersten Platte für diesen Fall kommenden polarisirten Lichtintensitäten ausdrücken, so dass wiederum

$$1 = B_n^2 + D_n^2.$$

Fällt nun aber unter denselben Umständen gewöhnliches unpolarisirtes Licht auf von der Intensität $= 2$, und denken wir uns dasselbe auf die oben (Art. 1.) angedeutete Weise in ein System senkrecht zu einander polarisirter Strahlen zerlegt, jeder von der Intensität $= 1$, und von denen die Vibrationen des einen in der Einfallsebene, die des andern senkrecht gegen diese Ebene erfolgen, so wird also die Intensität alles von der obersten Platte ausgehenden Lichts durch

$$A_n^2 + B_n^2,$$

und des aus der untersten Platte heraustretenden durch

$$C_n^2 + D_n^2$$

ausgedrückt werden können. Ueber die Natur dieser beiden Lichtintensitäten wollen wir keinen voreiligen Schluss machen.

6.

Formt man den Ausdruck

$$A^2 = \frac{\sin^2(i-i')}{\sin^2(i+i')}$$

vermöge der Fundamentalgleichung der Brechung des Lichts

$$\sin i = \mu \sin i'$$

um, so sieht man, dass derselbe sein Minimum $= \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^2$ oder Maximum $= 1$ erreicht, je nachdem

$$i = 0 \text{ oder } i = \frac{\pi}{2} \text{ ist.}$$

Auch lässt sich durch Differentiation leicht nachweisen, dass der Werth von A^2 von der einen Grenze zur andern mit dem Auffallswinkel continuirlich wächst.

Der Werth von

$$B^2 = \frac{\tang^2(i - i')}{\tang^2(i + i')}$$

hingegen erreicht sein Minimum $= 0$, wenn

$$i + i' = \frac{\pi}{2} \text{ ist.}$$

Alsdann aber ist

$$\sin i' = \cos i,$$

folglich

$$\sin i = \mu \sin i' = \mu \cos i$$

und

$$\tang i = \mu.$$

Fällt also senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirtes Licht, unter dem durch diese Gleichung bestimmten Winkel auf die Trennungsfläche zweier durchsichtiger Media auf, so wird durchaus keine Spur von Licht reflectirt, sondern alles dringt ins zweite Medium ein. Fällt hingegen gewöhnliches unpolarisirtes Licht auf, so enthält das gespiegelte Licht

$$A^2 + B^2,$$

weil $B^2 = 0$ ist, nur in der Einfallsebene polarisirtes Licht und man sagt deshalb, das Licht sei durch Reflexion vollkommen polarisirt. Und daher heisst dieser Auffallswinkel auch der Polarisationswinkel oder der Winkel der vollkommenen Polarisation. Es ist leicht zu zeigen, dass, weil

$$i + i' = \frac{\pi}{2}$$

ist, der reflectirte Strahl auf dem gebrochenen senkrecht steht.

$$\text{Für } i = 0 \text{ ist } B^2 = \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1}\right)^2;$$

$$\text{Für } i = \operatorname{arc}(\tang = \mu),\ B^2 = 0, \text{ also Minimum.}$$

$$\text{Für } i = \frac{\pi}{2},\ B^2 = 1, \text{ also Maximum.}$$

Aus dem Vorangehenden ergeben sich folgende Gesetze:

1) Fällt polarisirtes Licht auf die Trennungsfläche zweier durchsichtigen Media, so wird bei senkrechter Incidenz nur ein Theil reflectirt, bei horizontaler dagegen alles, das auffallende Licht mag polarisirt sein in der Einfallsebene oder senkrecht gegen dieselbe.

2) Ist das Licht in der Einfallsebene polarisirt, so wächst die Intensität des gespiegelten Lichts mit der Schiefe der Incidenz.

3) Wenn hingegen das Licht polarisirt ist senkrecht zur Einfallsebene, so wird bei einem gewissen von der lichtbrechenden Kraft des zweiten Mittels abhängigen schiefen Auffallswinkel (Polarisationswinkel) keine Spur gespiegelt, sondern alles dringt ins zweite Mittel ein. Je weiter sich aber das auffallende Licht nach der einen oder der andern Seite von dieser Grenze entfernt, desto mehr wird reflectirt.

7.

Die Werthe von A_n^2 und B_n^2 sind abhängig von A^2 und B^2

einerseits, andererseits von der Plattenanzahl n. Wir wollen versuchen, die Gesetze dieser Abhängigkeit zu bestimmen.

I. Es seien A^2 und B^2 constant, n variabel.

a) Wenn n wächst, so nähert sich der reciproke Werth von A_n^2, nämlich

$$\frac{1}{A_n^2} = 1 + \frac{1 - A^2}{2nA^2},$$

der Einheit und ist $n = \infty$, so ist $\frac{1}{A_\infty^2} = 1$, folglich auch $A_\infty^2 = 1$.

b) Offenbar gilt von B_n^2 dasselbe, so lange $B^2 > 0$.

c) Ist aber $B^2 = 0$, so ist $B_n^2 = 0$ unabhängig von n, selbst für $n = \infty$.

d) Weil

$$C_n^2 = 1 - A_n^2 \text{ und } D_n^2 = 1 - B_n^2,$$

so gilt von dem alle Platten durchdringenden Lichte das Entgegengesetzte des eben Angeführten.

II. Es sei n constant, A^2 und B^2 aber veränderlich.

e) Wächst A^2, so wird in dem Bruche

$$\frac{1 - A^2}{2nA^2}$$

der Zähler kleiner, der Nenner grösser, also aus beiden Gründen der Werth des Bruches, mithin auch der Werth von

$$\frac{1}{A_n^2} = 1 + \frac{1 - A^2}{2nA^2}$$

kleiner; folglich wächst A_n^2, wenn A^2 zunimmt.

f) Nimmt B^2 ab, so nähert sich in dem Bruche

$$\frac{1 - B^2}{2nB^2}$$

der Zähler der Einheit, der Nenner immer mehr der 0; es wächst folglich der ganze Bruch, mithin auch der Werth von

$$\frac{1}{B^2} = 1 + \frac{1 - B^2}{2nB^2};$$

also muss B_n^2 selbst kleiner werden, wenn B^2 kleiner wird.

g) Wenn $i = 0$ oder $i = \frac{\pi}{2}$, so ist $A^2 = B^2$ (Art. 6.) folglich $A_n^2 = B_n^2$.

Hieraus schliessen wir folgende Gesetze:

1) Fällt polarisirtes Licht unter einem beliebigen Winkel auf ein System über einander liegender paralleler durchsichtiger Platten, so wird im Allgemeinen um so mehr reflectirt (von der oberen Fläche der obersten Platte ausgehen), also um so weniger die Platten durchdringen, je grösser deren Anzahl ist.

2) Ist die Anzahl der Platten unendlich, so wird alles Licht reflectirt und keine Spur dringt durch, welches auch der Auffallswinkel sei.

Dieses gilt im Allgemeinen, das auffallende Licht mag in der Einfallsebene oder senkrecht gegen diese polarisirt sein.

3) Ist das Licht in der Einfallsebene polarisirt, so wird bei unveränderlicher Plattenzahl um so mehr reflectirt, also um so weniger durchgehen, je schiefer das Licht auffällt.

4) Ist dagegen das Licht senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirt, so wird, wenn die Anzahl der Platten dieselbe bleibt, um so mehr reflectirt, also um so weniger durchdringen, je weiter sich nach der einen oder der andern Seite der Einfallswinkel vom Polarisationswinkel entfernt.

5) Fällt aber für diesen letzteren Fall das Licht unter dem Polarisationswinkel selbst auf, so dringt alles durch die Platten hindurch und es wird keine Spur mehr reflectirt, selbst dann nicht, wenn die Anzahl der Platten unendlich gross wäre.

Dieses ist der einzige Fall der Ausnahme, welcher uns nöthigte, so eben bei 1 und 2 den Ausdruck „im Allgemeinen" hinzuzufügen.

6) Fällt gewöhnliches Licht senkrecht auf oder horizontal, so ist man nicht im Stande dasselbe zu polarisiren weder durch Reflexion, noch durch Refraction, mag man sich hierzu bloss einer spiegelnden Fläche bedienen oder eine beliebige Anzahl von Platten anwenden.

8.

Es wurde oben (Art. 1) berührt, dass gewöhnliches unpolarisirtes Licht sich betrachten lasse als ein System senkrecht zu einander polarisirter Strahlen von gleicher Intensität. Ebenso lassen sich umgekehrt senkrecht zu einander polarisirte Strahlen von gleicher Lichtstärke ansehen als gewöhnliches unpolarisirtes Licht. Auch in Bezug auf ihre Wirkungen zeigt die Beobachtung keinen Unterschied. Fällt also nun auf unser Plattensystem gewöhnliches Licht, so enthält, wie bereits (Art. 5) gezeigt wurde, sowohl das zurückgeworfene, als durchgehende Licht senkrecht zu einander polarisirte Strahlen. In dem reflectirten Lichte z. B. bildet nun der minder intensive Strahl mit einem gleichen Theile des andern gewöhnliches Licht und es bleibt also ausserdem noch ein Ueberschuss polarisirten Lichtes von der Beschaffenheit des lichtstärkeren Strahles. Ein Gleiches gilt vom refractirten Lichte. Da nun, wie wir bewiesen haben (Art. 4 und 5)

$$1 = A_n^2 + C_n^2,\ 1 = B_n^2 + D_n^2,$$

so folgt daraus

$$A_n^2 - B_n^2 = D_n^2 - C_n^2 \quad \dots\dots \quad (\gamma)$$

Und hieraus schliessen wir folgenden Satz;

In dem reflectirten und durchgehenden Lichte finden sich ausser dem in jedem enthaltenen gewöhnlichen Lichte gleiche Intensitäten senkrecht zu einander polarisirter Strahlen, die Plattenzahl und der Einfallswinkel seien, welche sie wollen.

Für eine Platte ist dieses Gesetz das bekannte Theorem von Arago.

9.

Unter der Vibrationsebene eines polarisirten Strahles verstehen wir diejenige Ebene, welche durch den betreffenden Strahl und die constante Schwingungsrichtung seiner Aethertheilchen geht. Unter Polarisationsebene aber die durch den Strahl auf die Oscillationsrichtung senkrecht geführte Ebene. Es stehen also beide Ebenen stets auf einander senkrecht. Denkt man sich nun durch denjenigen Punkt, in welchem ein Lichtstrahl die Grenze zweier durchsichtiger Media trifft, auf die Richtung des Strahls eine Ebene senkrecht gelegt, so werden in dieser oder ihr parallel die Schwingungen der Aethertheilchen erfolgen können nach jeder beliebigen Richtung. Dreht sich die Vibrationsrichtung in dieser Ebene um den Auffallspunkt im Kreise herum, so dreht sich also auch die Vibrationsebene und mit ihr die Polarisationsebene um den einfallenden Strahl. Macht die Schwingungsrichtung mit der im Auffallspunkt auf die Einfallsebene errichteten Senkrechten den Winkel α, so bildet denselben Winkel α also auch die Polarisationsebene mit der Einfallsebene und man sagt, das Licht sei in dem Azimuth α polarisit. In untenstehender Figur (s. am Ende der Abhandlung) sei nun ACB die Einfallsebene, CD die Polarisationsebene, $DCA = \alpha$ das Azimuth der letzteren, CE die Schwingungsrichtung des Aethertheilchens C, $CM = 1$ die halbe Oscillationsweite desselben, deren Componenten nach der Einfallsebene und senkrecht gegen diese respective

$$CB = \sin\alpha \text{ und } MB = \cos\alpha$$

sein werden, da

$$\angle DCE = \frac{\pi}{2}.$$

Und es lässt sich also, weil die Lichtintensitäten proportional sind dem Quadrate der Oscillationsgeschwindigkeiten, die in dem Azimuth α polarisirte Lichteinheit in zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen von deu Intensitäten $\sin^2\alpha$ und $\cos^2\alpha$ zerlegen, so dass wiederum

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha.$$

Auf gleiche Weise können umgekehrt zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen in einen einzigen zusammengesetzt werden, dessen Azimuth $\tang^2\alpha$ offenbar gefunden wird, wenn man die Intensität des in der Einfallsebene schwingenden Strahles durch die Intensität des senkrecht gegen diese Ebene vibrirendeu dividirt. Fällt also auf unser Plattensystem gewöhnliches Licht, so ist sowohl das reflectirte, als durchgehende polarisirt, jedes in einem besondern Azimuth. Nennen wir das Azimuth des reflectirten α_n, das des refractirten β_n, so ist also

$$\tang^2\alpha_n = \frac{B_n^2}{A_n^2} = \frac{2nB^2}{1+(2n-1)B^2}\cdot\frac{1+(2n-1)A^2}{2nA^2} =$$
$$\frac{1+(2n-1)A^2}{1+(2n-1)B^2}\cdot\frac{B^2}{A^2} = \frac{1+(2n-1)A^2}{1+(2n-1)B^2}\cdot\tang^2\alpha;$$

und

$$\tang^2\beta_n = \frac{D_n^2}{C_n^2} = \frac{1-B^2}{1+(2n-1)B^2}\cdot\frac{1+(2n-1)A^2}{1-A^2} =$$
$$\frac{1+(2n-1)A^2}{1+(2n-1)B^2}\cdot\frac{1-B^2}{1-A^2} = \frac{1+(2n-1)A^2}{1+(2n-1)B^2}\cdot\tang^2\beta;$$

wenn der Kürze halber gesetzt wird

$$\frac{B^2}{A^2} = \text{tang }^2\alpha \text{ und } \frac{1-B^2}{1-A^2} = \text{tang }^2\beta.$$

Folglich ist allgemein

$$\text{tang }^2\alpha_n : \text{tang }^2\beta_n = \text{tang }^2\alpha : \text{tang }^2\beta.$$

Aus Art. 2 aber folgt

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{\cos^2(i+i')}{\cos^2(i-i')} \text{ und}$$

$$\frac{1-A^2}{1-B^2} = \cos^2(i-i'),$$

mithin ist

$$\text{tang }^2\alpha : \text{tang }^2\beta = \cos^2(i+i'), \text{ also auch}$$

$$\text{tang }^2\alpha_n : \text{tang }^2\beta_n = \cos^2(i+i') \text{ oder}$$

$$\text{tang } \alpha_n = \mp \cos(i+i') \text{ tang } \beta_n \ldots\ldots \quad (\delta)$$

Beide Azimuthe stehen also immer in dieser einfachen Beziehung zu einander. Jedes ist eine Function des Einfallswinkels und der Plattenzahl, und wir wollen die Gesetze dieser Abhängigkeit zu bestimmen suchen.

10.

Wir haben gefunden

$$\text{tang } \alpha_n = \pm \cos(i+i') \,.\, \text{tang } \beta_n.$$

Da

$$\cos(i+i') < 1,$$

so ist

$$\text{tang } \alpha_n < \text{tang } \beta_n, \text{ und}$$

$$\alpha_n < \beta_n$$

unabhängig von i und n.

I. Es sei n constant, i also auch A^2 und B^2 variabel.

a) So oft $A^2 = B^2$, so ist tang $^2\alpha_n = 1 =$ tang $^2\beta_n$, also $\alpha_n = \frac{\pi}{4} = \beta_n$.

b) Ist $i = 0$, so ist $A^2 = B^2$ (Art. 6), mithin $\alpha_n = \frac{\pi}{4} = \beta_n$.

c) Ist $i = \text{arc}(\text{tang} = \mu)$, so ist $B^2 = 0$, folglich auch $B_n{}^2 = 0$. Und da

$$\text{tang }^2\alpha_n = \frac{B_n{}^2}{A_n{}^2} \text{ (Art. 9)},$$

so ist für diesen Fall tang $\alpha_n = 0$, folglich $\alpha_n = 0$. Aber

$$\text{tang }^2\beta_n = \frac{1+(2n-1)A^2}{1-A^2} = 1 + \frac{2nA^2}{1-A^2} > 1, \text{ also}$$

$$\beta_n > \frac{\pi}{4}. \text{ Für } n = \infty \text{ ist } \beta_\infty = \frac{\pi}{2}.$$

d) Ist $i > \text{arc}(\text{tang} = \mu)$, so ist $B^2 > 0$, folglich $B_n{}^2 > 0$, also $\alpha_n > 0$. Aber tang $^2\beta_n < \infty$, also $\beta_n < \frac{\pi}{2}$.

e) Ist $i=\frac{\pi}{2}$, so ist $A^2=B^2$ (Art. 6), folglich $\alpha_n=\frac{\pi}{4}=\beta_n$.

Hieraus ergeben sich folgende Gesetze:

1) Die Polarisationsebene des reflectirten Lichtes bildet mit der Einfallsebene immer einen kleineren Winkel, als die Polarisationsebene des durchgehenden, der Einfallswinkel und die Plattenzahl seien, welche sie wollen.

2) Fällt das Licht senkrecht auf, so ist das Azimuth jeder der beiden Polarisationsebenen $=\frac{\pi}{4}$, folglich sowohl das reflectirte, als durchgehende Licht unpolarisirt.

3) Wächst der Einfallswinkel, so wird das Azimuth des reflectirten Lichtes kleiner, das des refractirten grösser. Erreicht der Einfallswinkel den Polarisationswinkel, so fällt die Polarisationsebene des reflectirten Lichtes zusammen mit der Einfallsebene. Das Azimuth des durchgehenden Lichtes aber wächst mit der Plattenzahl und ist $=\frac{\pi}{2}$, wenn diese unendlich gross ist.

4) Wächst der Einfallswinkel über den Polarisationswinkel hinaus, so wächst das Azimuth des reflectirten Lichtes wieder, das des durchgehenden nimmt ab.

5) Fällt das Licht horizontal auf, so ist das Azimuth des reflectirten Lichtes wieder gleich $\frac{\pi}{4}$, folglich das reflectirte Licht selbst unpolarisirt. In diesem Falle dringt kein Licht durch.

II. Es sei der Einfallswinkel, also auch A^2 und B^2 constant und n veränderlich.

Es ist

$$B^2=\frac{\operatorname{tang}^2(i-i')}{\operatorname{tang}^2(i+i')}=\frac{\cos^2(i+i')}{\cos^2(i-i')}\cdot\frac{\sin^2(i-i')}{\sin^2(i+i')}=\frac{\cos^2(i+i')}{\cos^2(i-i')}\cdot A^2.$$

Da aber

$$\frac{\cos^2(i+i')}{\cos^2(i-i')}<1,$$

so ist

$$B^2<A^2.$$

Vergleicht man nun die reciproken Werthe von A_n^2 und B_n^2, nämlich

$$\frac{1}{A_n^2}=1+\frac{1-A^2}{2nA^2},\quad \frac{1}{B_n^2}=1+\frac{1-B^2}{2nB^2},$$

so folgt

$$\frac{1}{A_n^2}<\frac{1}{B_n^2},$$

folglich

$$A_n^2>B_n^2.$$

Und da

$$C_n^2=1-A_n^2,\quad D_n^2=1-B_n^2,$$

so ist also

$$D_n^2>C_n^2.$$

Nun aber ist

$$\operatorname{tang}^2 \alpha_n = \frac{B_n^2}{A_n^2} < 1, \text{ folglich } \alpha_n < \frac{\pi}{4} \text{ und}$$

$$\operatorname{tang}^2 \beta_n = \frac{D_n^2}{C_n^2} > 1, \text{ also } \beta_n > \frac{\pi}{4}.$$

Wächst n, so nähert sich das Verhältniss von $\frac{B_n^2}{A_n^2}$ der Einheit und für $n = \infty$ ist dasselbe $= 1$, folglich $\alpha_\infty = \frac{\pi}{4}$. Es dringt alsdann kein Licht durch die Platten hindurch, es sei denn, dass dasselbe unter dem Polarisationswinkel auffalle, wo $\beta_\infty = \frac{\pi}{2}$ ist.

Hieraus ergiebt sich folgendes Gesetz:

Ist die Plattenzahl endlich, so ist das Azimuth des reflectirten Lichtes kleiner, das des durchgehenden grösser als $\frac{\pi}{4}$. Mit der Plattenzahl wächst das Azimuth des reflectirten Lichtes und nähert sich $\frac{\pi}{4}$. Ist

$$n = \infty, \text{ so ist } \alpha_\infty = \frac{\pi}{4} \text{ und } \beta_\infty = \frac{0}{0}.$$

Fällt hingegen das Licht auf eine unendlich grosse Anzahl von Platten unter dem Polarisationswinkel, so ist

$$\alpha_\infty = \frac{\pi}{4} \text{ und } \beta_\infty = \frac{\pi}{2}.$$

11.

Wir können nicht umhin, mit einem Worte einer Discontinuität in unsern Formeln zu erwähnen, die wir in den Erscheinungen der Natur nicht leicht anzunehmen geneigt sind. Es wird nämlich senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirtes Licht, welches auf eine unendlich grosse Plattenanzahl auffällt, stets und in allen Fällen ganz reflectirt, welches auch der Einfallswinkel von der senkrechten bis zur horizontalen Incidenz sein möge; erreicht derselbe aber den Polarisationswinkel, so dringt plötzlich alles Licht durch die Platten hindurch. Es möchte vielleicht nicht weniger gewagt sein, die Natur eines solchen Sprunges in ihren Erscheinungen ohnmächtig, als unsere Formeln deshalb falsch nennen zu wollen. Das Unendliche ist bloss eine Grenze, der wir uns vielleicht nicht einmal nähern können, die wir also um so weniger zu erreichen vermögen; und ebenso wenig, wie wir uns durch irgend einen Sprung, wie gross derselbe auch immerhin sein möge, vom Endlichen an jene Grenze, das Unendliche, versetzen können: ebenso wenig können wir aber auch behaupten, dass die Natur nicht im Stande wäre, wenn man sie veranlassen könnte, sich unter solchen Verhältnissen zu äussern, eine ähnliche Discontinuität in ihren Erscheinungen zu zeigen.

12.

Fragen wir, unter welchem Winkel das Licht auf eine beliebige Anzahl paralleler Platten auffallen müsse, damit die Intensität des reflectirten Lichtes gleich sei der des durchgehenden, so haben wir, da die Intensität des auffallenden Lichtes $= 2$ angenommen wurde, zu dieser Bestimmung offenbar die Gleichung:

$$A_n^2 + B_n^2 = 1$$

oder

$$\frac{2nA^2}{1+(2n-1)A^2} + \frac{2nB^2}{1+(2n-1)B^2} = 1,$$

welche entwickelt auf folgende Bedingung führt:

$$A^2 + B^2 + (4n^2 - 1)A^2B^2 = 1.$$

Nun aber ist

$$A^2 = \frac{\sin^2(i-i')}{\sin^2(i+i')} = \left\{\frac{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 i} - \cos i}{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 i} + \cos i}\right\}^2 = \left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2$$

$$B^2 = \frac{\operatorname{tang}^2(i-i')}{\operatorname{tang}^2(i+i')} = \left\{\frac{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 i} - \mu^2 \cos i}{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 i} + \mu^2 \cos i}\right\}^2 = \left(\frac{p-\mu^2 q}{p+\mu^2 q}\right)^2,$$

wenn der Kürze halber gesetzt wird

$$\sqrt{\mu^2 - \sin^2 i} = p \text{ und } \cos i = q.$$

Diese Werthe für A^2 und B^2 substituirt geben:

$$\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2 + \left(\frac{p-\mu^2 q}{p+\mu^2 q}\right)^2 + (4n^2-1)\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2 \left(\frac{p-\mu^2 q}{p+\mu^2 q}\right)^2 = 1.$$

Wir können diese Gleichung nach und nach folgendergestalt verändern:

$$(p-q)^2(p+\mu^2 q)^2 + (p-\mu^2 q)^2(p+q)^2 + (4n^2-1)(p-q)^2(p-\mu^2 q)^2$$
$$= (p+q)^2 (p+\mu^2 q)^2.$$

$$(p+\mu^2 q)^2 \{(p-q)^2 - (p+q)^2\}$$
$$- (p-\mu^2 q)\{(p-q)^2 - (p+q)^2\} + 4n^2 (p-q)^2 (p-\mu^2 q) = 0,$$

$$\{(p-q)^2 - (p+q)^2\}\{(p+\mu^2 q)^2 - (p-\mu^2 q)^2\}$$
$$+ 4n^2 (p-q)^2 (p-\mu^2 q)^2 = 0,$$

$$-4\mu^2 p^2 q^2 + n^2(p-q)^2 (p-\mu^2 q)^2 = 0,$$

$$n^2(p-q)^2 (p-\mu^2 q)^2 = 4\mu^2 p^2 q^2,$$

$$(p-q)(p-\mu^2 q) = \mp \frac{2\mu}{n} \cdot pq.$$

Dividirt man durch pq und setzt $\frac{p}{q} = x$, so kommt

$$(x-1)\left(1 - \frac{\mu^2}{x}\right) = \mp \frac{2\mu}{n}, \text{ also}$$

$$x^2 - \left(1 + \mu^2 \pm \frac{2\mu}{n}\right)x = -\mu^2,$$

und setzt man

$$1 + \mu^2 \pm \frac{2\mu}{n} = P, \text{ so ist}$$

$$x = \frac{P \mp \sqrt{P^2 - 4\mu^2}}{2} = Q,$$

und hieraus

$$x^2 = \frac{\mu^2 - \sin^2 i}{1 - \sin^2 i} = Q^2$$

folglich

$$\sin^2 i = \frac{Q^2 - \mu^2}{Q^2 - 1} \quad \ldots\ldots (\varepsilon)$$

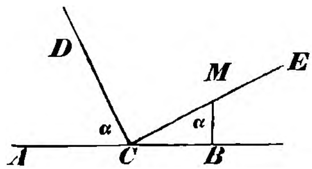
Durch diese Gleichung ist also der Winkel bestimmt, unter dem das Licht auf eine beliebige Anzahl paralleler Platten auffallen muss, damit gleiche Mengen reflectirt werden und durchgehen. Zugleich aber geht aus derselben auch hervor, dass einen solchen Winkel zu finden jedesmal dann unmöglich ist, wenn

$$\mu < 1,$$

oder was dasselbe heisst, wenn das Licht aus einem Mittel von stärkerer auf eins von einer minder starken lichtbrechenden Kraft auffällt.

13.

Nach den Fresnel'schen Formeln (Art. 2.) für die Intensität des gespiegelten und durchgehenden polarisirten Lichts ist die reflectirte Lichtstärke so lange Null, als sich die Dichtigkeit des durchsichtigen Mittels nicht ändert; und es müsste folglich bei einem in seiner ganzen Masse vollkommen homogenen und gleich dichten durchsichtigen Körper alles Licht auf seine untere Fläche auffallen, was auf der oberen Fläche in den Körper eindrang. Da aber in der Natur wohl kaum ein solcher Körper existiren wird, indem die Schwerkraft, der beständige Temperaturwechsel und dergleichen Umstände mehr, leicht eine verschiedene Dichtigkeit an verschiedenen Punkten des Körpers hervorbringen: so folgt daraus, dass sich das Licht beim Durchgang durch durchsichtige Körper offenbar schwächen muss. Betrachten wir z. B. eine ruhige Flüssigkeit, auf deren eine horizontale Grenzfläche Licht auffällt. Da strenge genommen die Flüssigkeit in jedem horizontalen Schnitte eine andere Dichtigkeit hat, so müssen nothwendigerweise auch im Innern derselben Reflexionen des eingedrungenen Lichts Statt finden und es gelten mithin für einen solchen Fall ähnliche Formeln, wie wir sie für die Intensität des gespiegelten und durchgehenden Lichts bei einer beliebigen Anzahl paralleler durchsichtiger Schichten entwickelt haben.



LI.

Eigenschaften der ungeraden Zahlen in Bezug auf beliebige Potenzen der einzelnen Glieder der natürlichen Zahlenreihe.

Von

Herrn Prof. C. A. Bretschneider

zu Gotha.

Der im ersten Hefte des gegenwärtigen Archivs bewiesene Turner'sche Lehrsatz von den ungeraden Zahlen ist nur ein specieller Fall eines weit allgemeineren Theorems, das ich schon vor mehreren Jahren gefunden, aber nicht für neu gehalten habe. Es ist nämlich:

$$1^{2n} = 1$$
$$2^{2n} = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2.2^n - 1)$$
$$3^{2n} = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2.3^n - 1)$$
$$\vdots$$
$$p^{2n} = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2.p^n - 1),$$

d. h. jede Potenz einer ganzen Zahl p von dem geraden Exponenten $2n$ ist gleich der Summe aller ungeraden Zahlen von der ersten an bis zur p^nten; ingleichen:

$$1^{2n+1} = 1$$
$$2^{2n+1} = (2^n.1 + 1) + (2^n.1 + 3) + \ldots + [2^n.1 + (2.2^n - 1)]$$
$$3^{2n+1} = (3^n.2 + 1) + (3^n.2 + 3) + \ldots + [3^n.2 + (2.3^n - 1)]$$
$$\vdots$$
$$p^{2n+1} = [p^n(p-1)+1] + [p^n(p-1)+3] + \ldots + [p^n(p-1) + (2p^n - 1)]$$

d. h. jede Potenz einer ganzen Zahl p von dem ungeraden Exponenten $2n+1$ ist gleich der Summe von p^n auf einander folgenden ungeraden Zahlen, deren erste gleich $p^n(p-1)+1$ ist.

Der Beweis dieser Sätze ist höchst einfach. Bezeichnen nämlich a, d und z beziehungsweise das erste Glied, die Differenz und die Gliederzahl einer arithmetischen Reihe erster Ordnung, so ist deren Summe $s = az + \frac{1}{2}z(z-1)d$. Im vorliegenden Falle ist nun für einen geraden Exponenten der Potenz

$$a=1,\ d=2,\ z=p^n.$$

mithin wird

$$s=1\,.\,p^n+\tfrac{1}{2}p^n(p^n-1)\,.\,2=p^{2n}.$$

Für einen ungeraden Exponenten der Potenz hingegen wird:

$$a=p^n(p-1)+1,\quad d=2,\quad z=p^n$$

und folglich:

$$s=[p^n(p-1)+1]\,p^n+\tfrac{1}{2}p^n(p^n-1)\,.\,2=p^{2n+1}.$$

Hieraus ergeben sich sofort durch Addition von p^n die Ausdrücke:

$$p^{2n}+p^n=p^n(p^n+1)=2+4+6+8+\ldots+2\,.\,p^n$$

$$p^{2n+1}+p^n=p^n(p^{n+1}+1)=[p^n(p-1)+2]+[p^n(p-1)+4]$$
$$+\ldots+[p^n(p-1)+2p^n],$$

welche die entsprechenden Eigenschaften der auf einander folgenden geraden Zahlen enthalten, wie dies von dem Herrn Herausgeber bereits für die dritten Potenzen bemerkt worden ist. Demnach ist also z. B.

$1^2=1$
$2^2=1+3$
$3^2=1+3+5$
.
.
$p^2=1+3+5+\ldots+(2p-1)$
$1^3=1$
$2^3=3+5$
$3^3=7+9+11$
.
.
.
$p^3=[p(p-1)+1]+[p(p-1)+3]+\ldots+[p(p-1)+(2p-1)]$
$1^4=1$
$2^4=1+3+5+7$
$3^4=1+3+5+7+9+11+13+15+17$
.
.
$p^4=1+3+5+7+\ldots+(2p^2-1)$
$1^5=1$
$2^5=5+7+9+11$
$3^5=19+21+23+25+27+29+31+33+35$
$4^5=49+51+53+\ldots+77+79$
.
.
$p^5=[p^2(p-1)+1]+[p^2(p-1)+3]+\ldots+[p^2(p-1)+(2p^2-1)]$

u. s. w.

Bei ihrer grossen Einfachheit dürften die vorliegenden Lehrsätze ein zweckmässiges Beispiel zur Anwendung der arithmetischen Progressionen darbieten.

LII.

Zur Theorie der bestimmten Integrale.

Von

Herrn O. Schlömilch

zu Weimar.

Die Entwickelung der schönen Theoreme von Lagrange und Fourier beruht bekanntlich auf der Untersuchung der Gränze, welcher sich das bestimmte Integral

$$\int_0^c \frac{\sin(2n+1)\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta,\ \pi > c > 0,$$

für ganze, positive, wachsende n nähert, vorausgesetzt, dass die Funktion $f(\Theta)$ während des Integrationsintervalles weder unendlich gross, noch unstetig werde *).

Diese Aufgabe lässt sich, wie ich glaube, völlig streng und kurz, folgendermassen lösen.

1) Wir nehmen erstlich $c=\frac{\pi}{2}$, $2n+1=m$ (der Kürze wegen) und führen in das Integral

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta$$

eine neue Veränderliche $z=m\Theta$, also $\Theta=\frac{z}{m}$, $d\Theta=\frac{dz}{m}$ ein. Dadurch wird

$$J=\int_0^{\frac{m\pi}{2}} \frac{\sin z}{m\sin\frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right)dz.$$

Dieses Integral zerlegen wir in eine Reihe anderer, welche sämmtlich nach dem Intervall $\frac{\pi}{2}$ fortschreiten, wobei wir $\frac{\sin z}{m\sin\frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right)$ kurz mit $F(z)$ bezeichnen. Also

*) Man sehe hierüber die vortreffliche Abhandlung des Hrn. Prof. Lejeune Dirichlet im Journal f. r. u. a. Mathematik v. Crelle, B. IV. S. 157.

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(z)dz+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} F(z)dz+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} F(z)dz+\ldots+\int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{n\pi} F(z)dz$$

$$+\int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} F(z)dz.$$

Zwei auf einander folgende allgemeine Glieder dieser Reihe sind

$$\int_{(r-\frac{1}{2})\pi}^{r\pi} F(z)dz,\ \int_{r\pi}^{(r+\frac{1}{2})\pi} F(z)dz$$

Diese beiden Integrale lassen sich leicht auf die Gränzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bringen, indem man im ersten $z=r\pi-x$, im zweiten $z=r\pi+x$ setzt, wo x eine neue Veränderliche bedeutet. Dann hat man, abgesehen vom Vorzeichen:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} F(r\pi-x)dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(r\pi+x)dx;$$

und wenn man dem ersten Integrale das entgegengesetzte Vorzeichen giebt, so vertauschen die Gränzen ihre Plätze, und stehen dann genau so wie im zweiten.

Die Vorzeichen unserer Integrale finden sich durch ein leichtes Raisonnement. Der Zeichenwechsel in jenen Integralen hängt bloss von dem Vorzeichen des $\sin z$ in $F(z)$ ab. Da nun der Sinus positiv ist von $z=0$ bis $z=\pi$, negativ von $z=\pi$ bis $z=2\pi$, positiv von $z=2\pi$ bis $z=3\pi$, u. s. f., so ist auch das erste Paar unserer Integrale positiv, das zweite negativ, das dritte positiv u. s. f. So haben wir

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\pi-x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\pi+x)dx$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(2\pi-x)dx+\ldots$$

indem wir den Index $r=1, 2, \ldots n$ setzen; oder

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} [F(x)+F(\pi-x)-F(\pi+x)-F(2\pi-x)+\ldots]dx.$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe ist

$$F(r\pi\pm x)=\frac{\sin(r\pi\pm x)}{m\sin\frac{r\pi\pm x}{m}}f\left(\frac{r\pi\pm x}{m}\right)=\frac{\sin x}{m\sin\frac{r\pi\pm x}{m}}f\left(\frac{r\pi\pm x}{m}\right),$$

wobei das Vorzeichen nicht beachtet zu werden braucht, weil wir den Wechsel schon kennen.

Wollen wir nun die Gränze bestimmen, welcher sich das Integral J für wachsende $n (m=2n+1)$ nähert, so haben wir die Gränze von $F(r\pi\pm x)$ für wachsende m zu untersuchen, wobei zu berücksichtigen ist, dass r die Reihe der ganzen Zahlen von 1 bis n durchläuft. Wir haben daher 2 Fälle zu unterscheiden.

1) Es sei r endlich, also das zugehörige Glied endlich weit vom Anfange entfernt. Dann ist $r\pi \pm x$ etwas Endliches $= u$, $F(r\pi \pm x) = \dfrac{\sin x}{m \sin \frac{u}{m}} f(\frac{u}{m})$ oder, wenn man den sich hebenden Faktor u einsetzt,

$$\text{Lim } F(r\pi \pm x) = \frac{\sin x}{u} \,.\, \text{Lim } \frac{\frac{u}{m}}{\sin \frac{u}{m}} f(\frac{u}{m}) = \frac{\sin x}{u} f(0)$$

oder

$$\text{Lim } F(r\pi \pm x) = \frac{\sin x}{r\pi \pm x} f(0).$$

2) Wäre r so gross, das schon $\dfrac{r\pi \pm x}{m}$ eine endliche Grösse v wäre, so ist

$$\text{Lim } F(r\pi \pm x) = \text{Lim } \frac{\sin x}{m \sin v} f(v) = 0,$$

so dass also die unendlich weit vom Anfange entfernten Glieder verschwinden.

So haben wir endlich

$$\text{Lim } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin x}{x} f(0) + \frac{\sin x}{\pi - x} f(0) - \frac{\sin x}{\pi + x} f(0) - \ldots\right] dx$$

oder, weil $f(0)$ eine Constante ist,

$$\text{Lim } J = f(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \ldots\right] \sin x \, dx$$

$$= f(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{x} + 2x \left\{\frac{1}{\pi^2 - x^2} - \frac{1}{4\pi^2 - x^2} + \frac{1}{9\pi^2 - x^2} - \ldots\right\}\right] \sin x \, dx.$$

Um nun dieses Integral weiter ausführen zu können, müssen wir die eingeklammerte Reihe summiren. Diese Summe P kann man aus zwei anderen sich bestehend denken:

$$U = \frac{1}{x} - 2x \left\{\frac{1}{\pi^2 - x^2} + \frac{1}{4\pi^2 - x^2} + \frac{1}{9\pi^2 - x^2} + \ldots\right\},$$

$$V = \qquad 4x \left\{\frac{1}{\pi^2 - x^2} + \frac{1}{9\pi^2 - x^2} + \frac{1}{25\pi^2 - x^2} + \ldots\right\},$$

$$P = U + V.$$

Nun findet sich aber leicht

$$\int U \, dx = \log n \; x + \log n \left(\frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2}\right) + \log n \left(\frac{4\pi^2 - x^2}{4\pi^2}\right) + \ldots$$

$$= \log n \; x \; \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \ldots$$

$$= \log n \sin x;$$

also durch Differenziation

$$U = \cot x.$$

Aehnlich hat man

$$-\int V dx = 2 \log n\left(\frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2}\right) + 2 \log n\left(\frac{9\pi^2 - x^2}{9\pi^2}\right) + 2 \log n\left(\frac{25\pi^2 - x^2}{25\pi^2}\right) + \ldots$$

$$= 2 \log n \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{25\pi^2}\right) \ldots$$

$$= 2 \log n \cos \tfrac{1}{2} x;$$

folglich

$$V = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x.$$

Also $P = \cot x + \operatorname{tang} \frac{1}{2} x$, oder weil $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\operatorname{tang} \frac{1}{2} x = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ ist, $P = \frac{1}{\sin x}$; oder

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2x \left\{ \frac{1}{\pi^2 - x^2} - \frac{1}{4\pi^2 - x^2} + \frac{1}{9\pi^2 - x^2} - \ldots \right\}.$$

Substituiren wir diesen Werth, so findet sich

$$\operatorname{Lim} J = f(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \frac{dx}{\sin x} = \frac{\pi}{2} f(0); \text{ oder}$$

$$\operatorname{Lim} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (2n+1)\Theta}{\sin \Theta} f(\Theta)\, d\Theta = \frac{\pi}{2} f(0) \ldots \quad (1)$$

2) Wäre die obere Gränze des Integrals $c < \frac{\pi}{2}$, so geht unser Integral

$$J = \int_0^c \frac{\sin m\Theta}{\sin \Theta} f(\Theta)\, d\Theta,$$

wenn wie früher $m\Theta = z$ gesetzt wird, über in

$$\int_0^{mc} \frac{\sin z}{m \sin \frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right) dz.$$

Da nun $c < \frac{\pi}{2}$, so ist $mc < \frac{m\pi}{2}$, also etwa $mc = h\frac{\pi}{2} + b$, wo $h < m$, $b < \frac{\pi}{2}$ ist. Also haben wir

$$J = \int_0^{\frac{h\pi}{2}} \frac{\sin z}{m \sin \frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right) dz + \int_{\frac{h\pi}{2}}^{\frac{h\pi}{2}+b} \frac{\sin z}{m \sin \frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right) dz.$$

Da nun h gleichzeitig mit m wächst, so sind auf das erste Integral alle die früheren Schlüsse anwendbar und geben

$$\operatorname{Lim} J = \frac{\pi}{2} f(0) + \operatorname{Lim} \int_{\frac{h\pi}{2}}^{\frac{h\pi}{2}+b} \frac{\sin z}{m \sin \frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right) dz.$$

Um das zweite Integral beurtheilen zu können, nehmen wir $z = h\frac{\pi}{2} + x$ und haben so

$$\int_0^b \frac{\sin(h\frac{\pi}{2}+x)}{m\sin(\frac{h}{m}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{x}{m})} f(\frac{h}{m}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{x}{m})\,dx.$$

Da h und m gleichzeitig wachsen, so wird $\frac{h}{m}$, also auch $\frac{h}{m}\cdot\frac{\pi}{2}$ eine gewisse endliche Grösse α, und

$$\operatorname{Lim}\int_0^b \frac{\sin(h\frac{\pi}{2}+x)}{m\sin(\alpha+\frac{x}{m})} f(\alpha+\frac{x}{m})dx = \frac{f(\alpha)}{m\sin\alpha}\int_0^b \sin(h\frac{\pi}{2}+x)dx.$$

So gross nun auch h sein mag, so giebt die Ausführung des Integrals doch nur eine endliche Grösse, und da m im Nenner steht, verschwindet der ganze Ausdruck.

Wir haben also zusammen

$$\operatorname{Lim}\int_0^c \frac{\sin(2n+1)\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)\,d\Theta = \frac{\pi}{2} f(0),\ \frac{\pi}{2} > c > 0 \ldots\ldots (2)$$

3) Wenn c zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegt, so können wir $c = \pi - \alpha$ setzen, wobei $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$ ist. Mithin

$$\int_0^{\pi-\alpha}\frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta$$
$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta - \int_{\pi-\alpha}^{\pi}\frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta.$$

Im zweiten und dritten Integrale nehmen wir $\Theta = \pi - x$ und erhalten

$$\int_0^{\pi-\alpha}\frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta$$
$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin mx}{\sin x} f(\pi-x)dx - \int_0^{\alpha}\frac{\sin mx}{\sin x} f(\pi-x)dx.$$

Das erste und zweite Integral führen wir nach (1), das dritte nach (2) aus und haben so

$$\operatorname{Lim}\int_0^{\pi-\alpha}\frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta = \frac{\pi}{2} f(0) + \frac{\pi}{2} f(\pi) - \frac{\pi}{2} f(\pi)$$

oder

$$\operatorname{Lim}\int_0^c \frac{\sin(2n+1)\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta = \frac{\pi}{2} f(0),\ \pi > c > \frac{\pi}{2} \ldots\ldots (3)$$

4) Fassen wir nun zusammen was in 1, 2, 3 gefunden wurde, so ergiebt sich auf der Stelle das Resultat

$$\text{Lim}\int_0^c \frac{\sin(2n+1)\Theta}{\sin\Theta} f(\Theta)d\Theta = \frac{\pi}{2} f(0),\ \pi > c > 0 \ldots\ldots (4)$$

Diess ist das schöne Theorem, dessen fruchtbare Anwendung auf der Eigenschaft von $\frac{\sin(2n+1)\frac{\Theta}{2}}{\sin\frac{\Theta}{2}}$ die Reihe

$$1 + 2\{\cos\Theta + \cos 2\Theta + \ldots + \cos n\Theta\}$$

zu summiren, beruht. Es lässt sich also vermöge der vorigen Formel jede Reihe summiren, deren allgemeines Glied $\int_0^c f(\Theta)\cos n\Theta\, d\Theta$, $\pi > c > 0$, ist; oder man hat

$$\int_0^c \frac{\sin(2n+1)\frac{\Theta}{2}}{\sin\frac{\Theta}{2}} f(\Theta)d\Theta = \int_0^c f(\Theta)d\Theta + 2\sum_1^n \int_0^c f(\Theta)\cos n\Theta\, d\Theta$$

oder, wenn man die Reihe ins Unendliche fortsetzt, ($n = \infty$ nimmt) und links 2Θ für Θ setzt,

$$\text{Lim}\, 2\int_0^{\frac{c}{2}} \frac{\sin(2n+1)\Theta}{\sin\Theta} f(2\Theta)d\Theta = \int_0^c f(\Theta)d\Theta + 2\sum_1^\infty \int_0^c f(\Theta)\cos n\Theta\, d\Theta$$

wobei links das Resultat $\pi f(0)$ erscheint. Aus diesem Satze lassen sich die Theoreme von Lagrange und Fourier leicht ableiten.

5) Die hier angewandte Methode der Gränzenzerlegung lässt sich mit vielem Vortheil öfter anwenden.

So giebt z. B. das bestimmte Integral $\int_0^\infty \frac{\sin\Theta}{\Theta} d\Theta$, wenn man sich die obere Gränze als ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ denkt, und es in eine Reihe anderer, sämmtlich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ genommen, zerlegt, das nämliche Resultat, wie die vorhin geführte Entwickelung, wenn man darin $f(\Theta)$ constant $= 1$ nimmmt. Nämlich

$$\int_0^\infty \frac{\sin\Theta}{\Theta} d\Theta = \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man $a\Theta$ für Θ, wo a eine ganz beliebige Grösse ist, so hat man auch

$$\int_0^\infty \frac{\sin\Theta}{\Theta} d\Theta = \frac{\pi}{2} \ldots\ldots (5)$$

welches Resultat sich hier auf einem ebenso leichten als gründlichen Wege findet.

LIII.

Ueber eine geodätische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Das Problem, mit dessen Auflösung wir uns in diesem Aufsatze beschäftigen wollen, kann auf folgende Art ausgesprochen werden:

In einer Ebene seien drei Punkte, die wir durch O, O_1, O_2 bezeichnen wollen, ihrer Lage nach gegeben, und S, S_1 seien zwei andere ihrer Lage nach unbekannte Punkte in derselben Ebene. Wenn nun in den gegebenen Punkten O, O_1, O_2 die 180° nicht übersteigenden Winkel SOS_1, SO_1S_1, SO_2S_1, welche die von den Punkten O, O_1, O_2 nach den Punkten S, S_1 gezogenen Gesichtslinien mit einander einschliessen, und ausserdem noch in dem einen der drei gegebenen Punkte O, O_1, O_2, etwa in dem Punkte O, der 180° nicht übersteigende Winkel, welchen die von dem Punkte O nach dem einen der beiden Punkte S, S_1, etwa nach dem Punkte S, gezogene Gesichtslinie OS mit der einen der beiden Linien OO_1, OO_2, etwa mit der Linie OO_1, einschliesst, also der 180° nicht übersteigende Winkel SOO_1, gemessen worden sind; so soll man die Lage der beiden Punkte S und S_1 bestimmen.

Die bekannten rechtwinkligen Coordinaten der drei gegebenen Punkte O, O_1, O_2 in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xy seien respective m, n; m_1, n_1; m_2, n_2. Ferner wollen wir die Entfernungen OS, O_1S, O_2S respective durch ϱ, ϱ_1, ϱ_2, die Entfernungen OS_1, O_1S_1, O_2S_1 respective durch r, r_1, r_2 bezeichnen. Nun denke man sich durch die Punkte O, O_1, O_2 als Anfangspunkte die mit dem Systeme der xy parallelen Systeme der $x'y'$, $x'_1y'_1$, $x'_2y'_2$ gelegt, und bezeichne die von den Linien OS, O_1S, O_2S und OS_1, O_1S_1, O_2S_1 mit den positiven Theilen der Axen der x', x'_1, x'_2 eingeschlossenen Winkel, indem man alle diese Winkel von der Seite der positiven x an nach der Seite der positiven y hin von 0 bis 360° zählt, respective durch φ, φ_1, φ_2 und χ, χ_1, χ_2. Dies vorausgesetzt, sind offenbar in völliger Allgemeinheit in Bezug auf die Systeme der $x'y'$, $x'_1y'_1$, $x'_2y'_2$ die Coordinaten des Punktes S respective:

$$\varrho \cos \varphi, \ \varrho \sin \varphi;$$

$$\varrho_1 \cos \varphi_1, \ \varrho_1 \sin \varphi_1;$$

$$\varrho_2 \cos \varphi_2, \ \varrho_2 \sin \varphi_2;$$

und die Coordinaten des Punktes S_1 in Bezug auf dieselben Systeme sind respective:

$$r \cos \chi,\ r \sin \chi;$$
$$r_1 \cos \chi_1,\ r_1 \sin \chi_1;$$
$$r_2 \cos \chi_2,\ r_2 \sin \chi_2.$$

Also hat man nach bekannten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten, wenn man durch x, y und x_1, y_1 die gesuchten Coordinaten der Punkte S und S_1 in dem Systeme der xy bezeichnet, die folgenden Gleichungen:

$$1.\quad \begin{cases} x = m + \varrho \cos \varphi,\ y = n + \varrho \sin \varphi; \\ x = m_1 + \varrho_1 \cos \varphi_1,\ y = n_1 + \varrho_1 \sin \varphi_1; \\ x = m_2 + \varrho_2 \cos \varphi_2,\ y = n_2 + \varrho_2 \sin \varphi_2; \end{cases}$$

und

$$2.\quad \begin{cases} x_1 = m + r \cos \chi,\ y_1 = n + r \sin \chi; \\ x_1 = m_1 + r_1 \cos \chi_1,\ y_1 = n_1 + r_1 \sin \chi_1; \\ x_1 = m_2 + r_2 \cos \chi_2,\ y_2 = n_2 + r_2 \sin \chi_2. \end{cases}$$

Weil nach der Voraussetzung die 180° nicht übersteigenden Winkel SOS_1, SO_1S_1, SO_2S_1 gemessen worden sind, so können offenbar die Differenzen $\chi - \varphi$, $\chi_1 - \varphi_1$, $\chi_2 - \varphi_2$ jederzeit als bekannt angesehen werden, und man kann daher, indem α, α_1, α_2 bekannte Grössen bezeichnen,

$$3.\quad \chi - \varphi = \alpha,\ \chi_1 - \varphi_1 = \alpha_1,\ \chi_2 - \varphi_2 = \alpha_2$$

oder

$$4.\quad \chi = \alpha + \varphi,\ \chi_1 = \alpha_1 + \varphi_1,\ \chi_2 = \alpha_2 + \varphi_2$$

setzen, wodurch die Gleichungen 2. die folgende Gestalt erhalten:

$$5.\quad \begin{cases} x_1 = m + r \cos(\alpha + \varphi),\ y_1 = n + r \sin(\alpha + \varphi); \\ x_1 = m_1 + r_1 \cos(\alpha_1 + \varphi_1),\ y_1 = n_1 + r_1 \sin(\alpha_1 + \varphi_1); \\ x_1 = m_2 + r_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_2),\ y_1 = n_2 + r_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_2). \end{cases}$$

Der Winkel φ kann offenbar immer als bekannt angesehen werden, weil nach der Voraussetzung der 180° nicht übersteigende Winkel SOO_1 gemessen worden ist, und die zwölf Gleichungen in 1. und 5. reichen also zur Bestimmung der in ihnen enthaltenen zwölf unbekannten Grössen x, y, x_1, y_1, ϱ, ϱ_1, ϱ_2, r, r_1, r_2, φ_1, φ_2 hin, so dass folglich unser Problem durch dieselben aufgelöst ist. Man kann sich aber, wie es mir scheint, die Auflösung auf folgende Art erleichtern.

Wir wollen nämlich jetzt den Punkt O als den Anfang und die Linie OS als den positiven Theil der Axe der ξ eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems der $\xi\eta$ annehmen, und wollen die Coordinaten der Punkte O_1, O_2 in Bezug auf dieses System respective durch a_1, b_1; a_2, b_2; die Coordinaten der Punkte S und S_1 in Bezug auf dasselbe System aber durch ξ, η und ξ_1, η_1 bezeichnen. Dies vorausgesetzt, hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$m_1 = m + a_1 \cos\varphi - b_1 \sin\varphi,\quad n_1 = n + a_1 \sin\varphi + b_1 \cos\varphi;$$
$$m_2 = m + a_2 \cos\varphi - b_2 \sin\varphi,\quad n_2 = n + a_2 \sin\varphi + b_2 \cos\varphi;$$

oder

$$m_1 - m = a_1 \cos\varphi - b_1 \sin\varphi,\quad n_1 - n = a_1 \sin\varphi + b_1 \cos\varphi;$$
$$m_2 - m = a_2 \cos\varphi - b_2 \sin\varphi,\quad n_2 - n = a_2 \sin\varphi + b_3 \cos\varphi;$$

und folglich, wie man leicht findet,

$$6.\quad \begin{cases} a_1 = (n_1 - n)\sin\varphi + (m_1 - m)\cos\varphi, \\ \qquad b_1 = (n_1 - n)\cos\varphi - (m_1 - m)\sin\varphi; \\ a_2 = (n_2 - n)\sin\varphi + (m_2 - m)\cos\varphi, \\ \qquad b_2 = (n_2 - n)\cos\varphi - (m_2 - m)\sin\varphi. \end{cases}$$

Mittelst dieser Formeln kann man die Coordinaten a_1, b_1 und a_2, b_2 leicht berechnen, weil, was man immer festzuhalten hat, der Winkel φ jederzeit als bekannt angesehen werden kann, da nach der Voraussetzung der 180° nicht übersteigende Winkel SOO_1 gemessen worden ist. Bezeichnet man die von den Linien OO_1 und OO_2 mit dem positiven Theile der Axe der x' eingeschlossenen, von der Seite der positiven x' nach der Seite der positiven y' hin von 0 bis 360° gezählten Winkel durch Θ_1 und Θ_2; so ist offenbar

$$7.\quad \begin{cases} m_1 - m = OO_1 \,.\, \cos\Theta_1,\quad n_1 - n = OO_1 \,.\, \sin\Theta_1; \\ m_2 - m = OO_2 \,.\, \cos\Theta_2,\quad n_2 - n = OO_2 \,.\, \sin\Theta_2; \end{cases}$$

und folglich

$$8.\quad \tang\Theta_1 = \frac{n_1 - n}{m_1 - m},\quad \tang\Theta_2 = \frac{n_2 - n}{m_2 - m}.$$

Hat man mittelst dieser Formeln Θ_1 und Θ_2 gefunden; so hat man nach 6. zur Berechnung der Coordinaten a_1, b_1 und a_2, b_2 die folgenden Formeln:

$$9.\quad \begin{cases} a_1 = (m_1 - m)\dfrac{\cos(\Theta_1 - \varphi)}{\cos\Theta_1},\quad b_1 = (m_1 - m)\dfrac{\sin(\Theta_1 - \varphi)}{\cos\Theta_1}; \\ a_2 = (m_2 - m)\dfrac{\cos(\Theta_2 - \varphi)}{\cos\Theta_2},\quad b_2 = (m_2 - m)\dfrac{\sin(\Theta_2 - \varphi)}{\cos\Theta_2}. \end{cases}$$

Ferner ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$10.\quad \begin{cases} x = m + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi, \\ y = n + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi; \end{cases}$$

oder, weil offenbar $\eta = 0$ ist,

$$11.\quad \begin{cases} x = m + \xi\cos\varphi, \\ y = n + \xi\sin\varphi; \end{cases}$$

und auf ähnliche Art hat man

$$12.\quad \begin{cases} x_1 = m + \xi_1\cos\varphi - \eta_1\sin\varphi, \\ y_1 = n + \xi_1\sin\varphi + \eta_1\cos\varphi. \end{cases}$$

Endlich haben wir, wenn jetzt φ_1, φ_2; χ, χ_1, χ_2; α, α_1, α_2 in Bezug auf das System der $\xi\eta$ eine ganz ähnliche Bedeutung wie vorher dieselben Symbole in Bezug auf das System der xy, aber natürlich nicht ganz gleiche Bedeutung wie dort haben, nach 1. und 5. die folgenden Gleichungen:

$$13.\quad \begin{cases} \xi=\varrho, & \eta=0; \\ \xi=a_1+\varrho_1\cos\varphi_1, & \eta=b_1+\varrho_1\sin\varphi_1; \\ \xi=a_2+\varrho_2\cos\varphi_2, & \eta=b_2+\varrho_2\sin\varphi_2; \end{cases}$$

und

$$14.\quad \begin{cases} \xi_1=r\cos\alpha, & \eta_1=r\sin\alpha; \\ \xi_1=a_1+r_1\cos(\alpha_1+\varphi_1), & \eta_1=b_1+r_1\sin(\alpha_1+\varphi_1); \\ \xi_1=a_2+r_2\cos(\alpha_2+\varphi_2), & \eta_1=b_2+r_2\sin(\alpha_2+\varphi_2). \end{cases}$$

Dies sind wieder zwölf Gleichungen zwischen den zwölf unbekannten Grössen ξ, η, ξ_1, η_1, ϱ, ϱ_1, ϱ_2, r, r_1, r_2, φ_1, φ_2, und reichen also zu deren Bestimmung hin, wie wir jetzt mit Mehrerem zeigen wollen.

Durch Elimination von ξ, η, ξ_1, η_1 erhält man

$$\varrho=a_1+\varrho_1\cos\varphi_1=a_2+\varrho_2\cos\varphi_2,$$
$$0=b_1+\varrho_1\sin\varphi_1=b_2+\varrho_2\sin\varphi_2$$

und

$$r\cos\alpha=a_1+r_1\cos(\alpha_1+\varphi_1)=a_2+r_2\cos(\alpha_2+\varphi_2),$$
$$r\sin\alpha=b_1+r_1\sin(\alpha_1+\varphi_1)=b_2+r_2\sin(\alpha_2+\varphi_2).$$

Also ist

$$a_1-\varrho=-\varrho_1\cos\varphi_1,\quad a_2-\varrho=-\varrho_2\cos\varphi_2;$$
$$b_1=-\varrho_1\sin\varphi_1,\qquad b_2=-\varrho_2\sin\varphi_2$$

und

$$a_1-r\cos\alpha=-r_1\cos(\alpha_1+\varphi_1),\quad a_2-r\cos\alpha=-r_2\cos(\alpha_2+\varphi_2);$$
$$b_1-r\sin\alpha=-r_1\sin(\alpha_1+\varphi_1),\quad b_2-r\sin\alpha=-r_2\sin(\alpha_2+\varphi_2).$$

Dividirt man nun, um die Grössen ϱ_1, ϱ_2, r_1, r_2 zu eliminiren, diese Gleichungen durch einander; so erhält man

$$15.\quad \cot\varphi_1=\frac{a_1-\varrho}{b_1},\quad \cot\varphi_2=\frac{a_2-\varrho}{b_2}$$

und

$$16.\quad \cot(\alpha_1+\varphi_1)=\frac{a_1-r\cos\alpha}{b_1-r\sin\alpha},\quad \cot(\alpha_2+\varphi_2)=\frac{a_2-r\cos\alpha}{b_2-r\sin\alpha};$$

und diese vier Gleichungen enthalten nun bloss noch die vier unbekannten Grössen ϱ, r, φ_1, φ_2.

Weil bekanntlich

$$\cot(\alpha_1+\varphi_1)=\frac{\cot\alpha_1\cot\varphi_1-1}{\cot\alpha_1+\cot\varphi_1},\quad \cot(\alpha_2+\varphi_2)=\frac{\cot\alpha_2\cot\varphi_2-1}{\cot\alpha_2+\cot\varphi_2}$$

ist, so ist nach 16.

$$\frac{a_1-r\cos\alpha}{b_1-r\sin\alpha}=\frac{\cot\alpha_1\cot\varphi_1-1}{\cot\alpha_1+\cot\varphi_1},$$
$$\frac{a_2-r\cos\alpha}{b_2-r\sin\alpha}=\frac{\cot\alpha_2\cot\varphi_2-1}{\cot\alpha_2+\cot\varphi_2};$$

woraus sich

$$17.\quad \begin{cases} \cot\varphi_1 = -\dfrac{(a_1 - r\cos\alpha)\cos\alpha_1 + (b_1 - r\sin\alpha)\sin\alpha_1}{(a_1 - r\cos\alpha)\sin\alpha_1 - (b_1 - r\sin\alpha)\cos\alpha_1}, \\ \cot\varphi_2 = -\dfrac{(a_2 - r\cos\alpha)\cos\alpha_2 + (b_2 - r\sin\alpha)\sin\alpha_2}{(a_2 - r\cos\alpha)\sin\alpha_2 - (b_2 - r\sin\alpha)\cos\alpha_2} \end{cases}$$

oder

$$18.\quad \begin{cases} \cot\varphi_1 = -\dfrac{a_1\cos\alpha_1 + b_1\sin\alpha_1 - r\cos(\alpha-\alpha_1)}{a_1\sin\alpha_1 - b_1\cos\alpha_1 + r\sin(\alpha-\alpha_1)}, \\ \cot\varphi_2 = -\dfrac{a_2\cos\alpha_2 + b_2\sin\alpha_2 - r\cos(\alpha-\alpha_2)}{a_2\sin\alpha_2 - b_2\cos\alpha_2 + r\sin(\alpha-\alpha_2)} \end{cases}$$

ergiebt.

Also ist nach dem Obigen

$$19.\quad \begin{cases} \dfrac{a_1-\varrho}{b_1} = -\dfrac{a_1\cos\alpha_1 + b_1\sin\alpha_1 - r\cos(\alpha-\alpha_1)}{a_1\sin\alpha_1 - b_1\cos\alpha_1 + r\sin(\alpha-\alpha_1)}, \\ \dfrac{a_2-\varrho}{b_2} = -\dfrac{a_2\cos\alpha_2 + b_2\sin\alpha_2 - r\cos(\alpha-\alpha_2)}{a_2\sin\alpha_2 - b_2\cos\alpha_2 + r\sin(\alpha-\alpha_2)}; \end{cases}$$

und diese Gleichungen enthalten bloss noch die zwei unbekannten Grössen ϱ und r. Bestimmt man nun ϱ, so erhält man

$$20.\quad \begin{cases} \varrho = a_1 + b_1\,\dfrac{a_1\cos\alpha_1 + b_1\sin\alpha_1 - r\cos(\alpha-\alpha_1)}{a_1\sin\alpha_1 - b_1\cos\alpha_1 + r\sin(\alpha-\alpha_1)}, \\ \varrho = a_2 + b_2\,\dfrac{a_2\cos\alpha_2 + b_2\sin\alpha_2 - r\cos(\alpha-\alpha_2)}{a_2\sin\alpha_2 - b_2\cos\alpha_2 + r\sin(\alpha-\alpha_2)} \end{cases}$$

oder

$$21.\quad \begin{cases} \varrho = \dfrac{(a_1^2+b_1^2)\sin\alpha_1 + \{a_1\sin(\alpha-\alpha_1) - b_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}r}{a_1\sin\alpha_1 - b_1\cos\alpha_1 + r\sin(\alpha-\alpha_1)}, \\ \varrho = \dfrac{(a_2^2+b_2^2)\sin\alpha_2 + \{a_2\sin(\alpha-\alpha_2) - b_2\cos(\alpha-\alpha_2)\}r}{a_2\sin\alpha_2 - b_2\cos\alpha_2 + r\sin(\alpha-\alpha_2)}; \end{cases}$$

und hieraus ergiebt sich die folgende Gleichung zur Bestimmung von r:

$$22.\quad \frac{a_1\sin\alpha_1 - b_1\cos\alpha_1 + r\sin(\alpha-\alpha_1)}{a_2\sin\alpha_2 - b_2\cos\alpha_2 + r\sin(\alpha-\alpha_2)}$$

$$= \frac{(a_1^2+b_1^2)\sin\alpha_1 + \{a_1\sin(\alpha-\alpha_1) - b_1\cos(\alpha-\alpha_1)\}r}{(a_2^2+b_2^2)\sin\alpha_2 + \{a_2\sin(\alpha-\alpha_2) - b_2\cos(\alpha-\alpha_2)\}r}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$K_1 = \sin(\alpha-\alpha_1),$$
$$K_2 = \sin(\alpha-\alpha_2),$$
$$L_1 = (a_1^2+b_1^2)\sin\alpha_1,$$
$$L_2 = (a_2^2+b_2^2)\sin\alpha_2,$$
$$M_1 = a_1\sin\alpha_1 - b_1\cos\alpha_1,$$
$$M_2 = a_2\sin\alpha_2 - b_2\cos\alpha_2,$$
$$N_1 = a_1\sin(\alpha-\alpha_1) - b_1\cos(\alpha-\alpha_1),$$
$$N_2 = a_2\sin(\alpha-\alpha_2) - b_2\cos(\alpha-\alpha_2);$$

so erhält die vorhergehende Gleichung die folgende Form:

$$23. \quad \frac{M_1+K_1r}{M_2+K_2r}=\frac{L_1+N_1r}{L_2+N_2r},$$

oder nach gehöriger Entwickelung

$$24. \quad 0= \quad L_1M_2-M_1L_2$$
$$-\{(K_1L_2-L_1K_2)+(M_1N_2-N_1M_2)\}r$$
$$-(K_1N_2-N_1K_2)r^2.$$

Um die Grössen K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2 mit Leichtigkeit berechnen zu können, suche man die beiden Hülfswinkel ω_1 und ω_2 mittelst der Formeln

$$25. \quad \operatorname{tang}\omega_1=\frac{b_1}{a_1}, \quad \operatorname{tang}\omega_2=\frac{b_2}{a_2}.$$

Dann ist nach dem Obigen, wie man leicht findet,

$$K_1=\sin(\alpha-\alpha_1),$$
$$K_2=\sin(\alpha-\alpha_2),.$$
$$L_1=\frac{a_1{}^2\sin\alpha_1}{\cos\omega_1{}^2},$$
$$L_2=\frac{a_2{}^2\sin\alpha_2}{\cos\omega_2{}^2},$$
$$M_1=\frac{a_1\sin(\alpha_1-\omega_1)}{\cos\omega_1},$$
$$M_2=\frac{a_2\sin(\alpha_2-\omega_2)}{\cos\omega_2},$$
$$N_1=\frac{a_1\sin(\alpha-\alpha_1-\omega_1)}{\cos\omega_1},$$
$$N_2=\frac{a_2\sin(\alpha-\alpha_2-\omega_2)}{\cos\omega_2}.$$

Weitere Erläuterungen über den Gang, welchen man bei der Auflösung zu nehmen hat, fügen wir der Kürze wegen nicht bei, da dies schon aus dem Vorhergehenden deutlich genug von selbst erhellen wird.

§. 2.

Bemerken wollen wir aber noch, dass, wenn vier Punkte O, O_1, O_2, O_3 durch ihre Coordinaten m, n; m_1, n_1; m_2, n_2; m_3, n_3 gegeben, und in diesen Punkten die 180° nicht übersteigenden Winkel SOS_1, SO_1S_1, SO_2S_1, SO_3S_1 gemessen worden sind, auch diese Data zur Bestimmung der Coordinaten x, y und x_1, y_1 der Punkte S und S_1, d. i. der Lage dieser Punkte hinreichen.

Nach 1. und 5. hat man nämlich sechzehn Gleichungen von der Form

$$x=m+\varrho\cos\varphi,\ y=n+\varrho\sin\varphi;$$
$$x=m_1+\varrho_1\cos\varphi_1,\ y=n_1+\varrho_1\sin\varphi_1;$$

$$x = m_2 + \varrho_2 \cos \varphi_2, \; y = n_2 + \varrho_2 \sin \varphi_2;$$
$$x = m_3 + \varrho_3 \cos \varphi_3, \; y = n_3 + \varrho_3 \sin \varphi_3;$$

$$x_1 = m + r \cos (\alpha + \varphi), \; y_1 = n + r \sin (\alpha + \varphi);$$
$$x_1 = m_1 + r_1 \cos (\alpha_1 + \varphi_1), \; y_1 = n_1 + r_1 \sin (\alpha_1 + \varphi_1);$$
$$x_1 = m_2 + r_2 \cos (\alpha_2 + \varphi_2), \; y_1 = n_2 + r_2 \sin (\alpha_2 + \varphi_2);$$
$$x_1 = m_3 + r_3 \cos (\alpha_3 + \varphi_3), \; y_1 = n_3 + r_3 \sin (\alpha_3 + \varphi_3);$$

und diese sechzehn Gleichungen reichen zur Bestimmung der sechzehn in ihnen enthaltenen unbekannten Grössen x, y; x_1, y_1; ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3; r, r_1, r_2, r_3; φ, φ_1, φ_2, φ_3 hin. Die Auflösung dieser Gleichungen ist aber Schwierigkeiten unterworfen, nnd wir wollen dieselben hier daher nur so weit entwickeln, dass sie bloss noch die vier unbekannten Grössen x, y; x_1, y_1 enthalten, welches ohne Schwierigkeit geschehen kann. Dnrch Elimination von ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 und r, r_1, r_2, r_3 erhält man nämlich

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{y-n}{x-m}, \; \operatorname{tnng} (\alpha + \varphi) = \frac{y_1 - n}{x_1 - m};$$
$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{y-n_1}{x-m_1}, \; \operatorname{tang} (\alpha_1 + \varphi_1) = \frac{y_1 - n_1}{x_1 - m_1};$$
$$\operatorname{tang} \varphi_2 = \frac{y-n_2}{x-m_2}, \; \operatorname{tang} (\alpha_2 + \varphi_2) = \frac{y_1 - n_2}{x_1 - m_2};$$
$$\operatorname{tang} \varphi_3 = \frac{y-n_3}{x-m_3}, \; \operatorname{tang} (\alpha_3 + \varphi_3) = \frac{y_1 - n_3}{x_1 - m_3}.$$

Setzt man nun

$$\frac{\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \varphi}{1 - \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \varphi} = \frac{y_1 - n}{x_1 - m},$$
$$\frac{\operatorname{tang} \alpha_1 + \operatorname{tang} \varphi_1}{1 - \operatorname{tang} \alpha_1 \operatorname{tang} \varphi_1} = \frac{y_1 - n_1}{x_1 - m_1},$$
$$\frac{\operatorname{tang} \alpha_2 + \operatorname{tang} \varphi_2}{1 - \operatorname{tang} \alpha_2 \operatorname{tang} \varphi_2} = \frac{y_1 - n_2}{x_1 - m_2},$$
$$\frac{\operatorname{tang} \alpha_3 + \operatorname{tang} \varphi_3}{1 - \operatorname{tang} \alpha_3 \operatorname{tang} \varphi_3} = \frac{y_1 - n_3}{x_1 - m_3};$$

und bestimmt $\operatorname{tang} \varphi$, $\operatorname{tang} \varphi_1$, $\operatorname{tang} \varphi_2$, $\operatorname{tang} \varphi_2$ aus diesen Gleichungen, so erhält man

$$\operatorname{tang} \varphi = -\frac{(x_1 - m) \sin \alpha - (y_1 - n) \cos \alpha}{(x_1 - m) \cos \alpha + (y_1 - n) \sin \alpha},$$
$$\operatorname{tang} \varphi_1 = -\frac{(x_1 - m_1) \sin \alpha_1 - (y_1 - n_1) \cos \alpha_1}{(x_1 - m_1) \cos \alpha_1 + (y_1 - n_1) \sin \alpha_1},$$
$$\operatorname{tang} \varphi_2 = -\frac{(x_1 - m_2) \sin \alpha_2 - (y_1 - n_2) \cos \alpha_2}{(x_1 - m_2) \cos \alpha_2 + (y_1 - n_2) \sin \alpha_3},$$
$$\operatorname{tang} \varphi_3 = -\frac{(x_1 - m_3) \sin \alpha_3 - (y_1 - n_3) \cos \alpha_3}{(x_1 - m_3) \cos \alpha_3 + (y_1 - n_3) \sin \alpha_3}.$$

Also hat man jetzt die vier folgenden Gleichungen:

$$\frac{y-n}{x-m} = -\frac{(x_1 - m) \sin \alpha - (y_1 - n) \cos \alpha}{(x_1 - m) \cos \alpha + (y_1 - n) \sin \alpha},$$

$$\frac{y-n_1}{x-m_1}=-\frac{(x_1-m_1)\sin\alpha_1-(y_1-n_1)\cos\alpha_1}{(x_1-m_1)\cos\alpha_1+(y_1-n_1)\sin\alpha_1},$$
$$\frac{y-n_2}{x-m_2}=-\frac{(x_1-m_2)\sin\alpha_2-(y_1-n_2)\cos\alpha_2}{(x_1-m_2)\cos\alpha_2+(y_1-n_3)\sin\alpha_2},$$
$$\frac{y-n_3}{x-m_3}=-\frac{(x_1-m_3)\sin\alpha_3-(y_1-n_3)\cos\alpha_3}{(x_1-m_3)\cos\alpha_3+(y_1-n_3)\sin\alpha_3};$$

aus denen die vier unbekannten Grössen x, y; x_1, y_1 bestimmt werden müssen. Diese Gleichungen bringt man aber leicht auf die Form

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{(x-m)(y_1-n)-(y-n)(x_1-m)}{(x-m)(x_1-m)+(y-n)(y_1-n)},$$
$$\operatorname{tang}\alpha_1=\frac{(x-m_1)(y_1-n_1)-(y-n_1)(x_1-m_1)}{(x-m_1)(x_1-m_1)+(y-n_1)(y_1-n_1)},$$
$$\operatorname{tang}\alpha_2=\frac{(x-m_2)(y_1-n_2)-(y-n_2)(x_1-m_2)}{(x-m_2)(x_1-m_2)+(y-n_2)(y_1-n_2)},$$
$$\operatorname{tang}\alpha_3=\frac{(x-m_3)(y_1-n_3)-(y-n_3)(x_1-m_3)}{(x-m_3)(x_1-m_3)-(y+n_3)(y_1-n_3)};$$

oder

$$\operatorname{tang}\alpha=-\frac{n(x-x_1)-m(y-y_1)-(xy_1-yx_1)}{m^2+n^2-m(x+x_1)-n(y+y_1)+xx_1+yy_1},$$
$$\operatorname{tang}\alpha_1=-\frac{n_1(x-x_1)-m_1(y-y_1)-(xy_1-yx_1)}{m_1^2+n_1^2-m_1(x+x_1)-n_1(y+y_1)+xx_1+yy_1},$$
$$\operatorname{tang}\alpha_2=-\frac{n_2(x-x_1)-m_2(y-y_1)-(xy_1-yx_1)}{m_2^2+n_2^2-m_2(x+x_1)-n_2(y+y_1)+xx_1+yy_1},$$
$$\operatorname{tang}\alpha_3=-\frac{n_3(x-x_1)-m_3(y-y_1)-(xy_1-yx_1)}{m_3^2+n_3^2-m_3(x+x_1)-n_3(y+y_1)+xx_1+yy_1};$$

oder

$$\begin{aligned}0=(nx-my)\cos\alpha&+(m^2+n^2-mx-ny)\sin\alpha\\&-\{(m-x)\sin\alpha+(n-y)\cos\alpha\}x_1\\&+\{(m-x)\cos\alpha-(n-y)\sin\alpha\}y_1,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}0=(n_1x-m_1y)\cos\alpha_1&+(m_1{}^2+n_1{}^2-m_1x-n_1y)\sin\alpha_1\\&-\{(m_1-x)\sin\alpha_1+(n_1-y)\cos\alpha_1\}x_1\\&+\{(m_1-x)\cos\alpha_1-(n_1-y)\sin\alpha_1\}y_1,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}0=(n_2x-m_2y)\cos\alpha_2&+(m_2{}^2+n_2{}^2-m_2x-n_2y)\sin\alpha_2\\&-\{(m_2-x)\sin\alpha_2+(n_2-y)\cos\alpha_2\}x_1\\&+\{(m_2-x)\cos\alpha_2-(n_2-y)\sin\alpha_2\}y_1,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}0=(n_3x-m_3y)\cos\alpha_3&+(m_3{}^2+n_3{}^2-m_3x-n_3y)\sin\alpha_3\\&-\{(m_3-x)\sin\alpha_3+(n_3-y)\cos\alpha_3\}x_1\\&+\{(m_3-x)\cos\alpha_3-(n_3-y)\sin\alpha_3\}y_1.\end{aligned}$$

Die fernere Auflösung dieser vier Gleichungen scheint aber in grosse Weitläufigkeiten zu führen.

LIV.

Einige Eigenschaften der Binomialcoefficienten.

Von

Herrn O. Schlömilch

zu Weimar.

Wir wollen zuerst die Entstehungsweise der Binomialcoefficienten durch ein sehr einfaches Verfahren zeigen, welches wir durchgängig in diesem Aufsatze beibehalten werden.

Es seien u und z beliebige Grössen, so ist bekanntlich

$$u^z(u+1)=u^{z+1}+u^z.$$

Setzen wir $z+1$ für z und addiren zu der so entstehenden Gleichung die obige unverändert, so ist

$$u^{z+1}(u+1)+u^z(u+1)=u^{z+2}+u^{z+1}+(u^{z+1}+u^z),$$

$$\text{d. i. } u^z(u+1)^2=u^{z+2}+2u^{z+1}+u^z.$$

Wiederholen wir das angegebene Verfahren, so kommt

$$u^{z+1}(u+1)^2+u^z(u+1)^2=u^{z+3}+2u^{z+2}+u^{z+1}$$
$$+u^{z+2}+2u^{z+1}+u^z$$

oder

$$u^z(u+1)^3=u^{z+3}+3u^{z+2}+3u^{z+1}+u^z.$$

Man übersieht gleich, dass bei n maliger Anwendung dieses Verfahrens eine Gleichung von der Form

$$u^z(u+1)^n=u^{z+n}+{}^nA_1u^{z+n-1}+\ldots$$
$$+{}^nA_{r-1}u^{z+n-r+1}+{}^nA_ru^{z+n-r}+\ldots \quad (1)$$

und ebenso bei $(n+1)$ maliger eine ähnliche

$$u^z(u+1)^{n+1}=u^{z+n+1}+{}^{n+1}A_1u^{z+n}+\ldots$$
$$\ldots+{}^{n+1}A_ru^{z+n+1-r}+\ldots \quad (2)$$

zum Vorschein kommen würde. Nun entsteht aber (2) aus (1), indem man in (1) $z+1$ für z schreibt und die Gleichung noch addirt, ganz so, wie dies gleich anfangs geschah. Also

$$u^z(u+1)^{n+1}=u^{z+n+1}+{}^nA_1u^{z+n}+\ldots+{}^nA_ru^{z+n+1-r}+\ldots.$$
$$+u^{z+n}+\ldots.+{}^nA_{r-1}u^{z+n-r+1}+\ldots.$$

Vergleicht man diess mit (2), so findet sich aus den allgemeinen Gliedern die Relation

$$^nA_{r-1}+{}^nA_r={}^{n+1}A_r.\ldots \quad (3)$$

Diese Coefficienten nennt man **Binomialcoefficienten** für positive ganze Exponenten, und bezeichnet ${}^nA_1$, ${}^nA_2$ .. kurz mit $n_1, n_2, \ldots$, wobei $n_0 = n_n = 1$ ist.

Aus (1) folgt noch, wenn man mit u^x hebt, und $u = \frac{1}{x}$ setzt,

$$\frac{(1+x)^n}{x^n} = \frac{1}{x^n} + n_1 \frac{1}{x^{n-1}} + \ldots$$

oder

$$(1+x)^n = n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + \ldots + n_n x^n.$$

Ganz das nämliche Verfahren werden wir zur Entdeckung von Eigenschaften der Binomialcoefficienten selbst gebrauchen, und dazu bloss die Fundamentalformel

$$(m+1)_r = m_{r-1} + m_r \ldots . \quad (4)$$

anwenden.

In so fern nun jeder Binomialcoefficient m_r von 2 Elementen zugleich abhängt, können wir auch nach den Veränderungen fragen, die derselbe erleiden wird, wenn sich eins dieser Elemente ändert.

a) Für ein constantes m ändere sich r.

Schreiben wir in (4) $r+1$ für r, so haben wir

$$(m+1)_{r+1} = m_r + m_{r+1}$$

ebenso

$$(m+1)_{r+2} = \qquad m_{r+1} + m_{r+2};$$

wenn wir also addiren und auf die linke Seite wieder die Relation (4) anwenden:

$$(m+2)_{r+2} = m_r + 2m_{r+1} + m_{r+2}$$

ebenso

$$(m+2)_{r+3} = \qquad m_{r+1} + 2m_{r+2} + m_{r+3}$$

also durch Addition und wegen (4)

$$(m+3)_{r+3} = m_r + 3m_{r+1} + 3m_{r+2} + m_{r+3}.$$

Verallgemeinert giebt diess den Satz

$$(m+n)_{r+n} = n_0 m_r + n_1 m_{r+1} + n_2 m_{r+2} + \ldots \quad (5)$$

Daraus folgt u. A. für $r = 0$, $n = m$,

$$(2m)_m = m_0{}^2 + m_1{}^2 + m_2{}^2 + \ldots \quad (7)$$

d. h. **Die Quadratsumme der Binomialcoefficienten ist dem mittelsten Binomialcoefficienten für den doppelten Exponenten gleich.**

b) Für ein constantes r ändere sich m.

Wir brauchen jetzt die Relation (4) unter der Form

$$m_{r-1} = (m+1)_r - m_r, \ldots \quad (7)$$

und schreiben darin $m+1$ für m, so wird

$$(m+1)_{r-1} = (m+2)_r - (m+1)_r.$$

Ziehen wir die erste Gleichung von der zweiten ab, so ist

$$(m+1)_{r-1} - m_{r-1} = (m+2)_r - 2(m+1)_r + m_r$$

oder, wenn wir die linke Seite nach (7) zusammenziehen,

$$m_{r-2} = (m+2)_r - 2(m+1)_r + m_r.$$

Schreiben wir wieder $m+1$ für m und ziehen davon die Formel für m_{r-2} ungeändert ab, so kommt

$$(m+1)_{r-2} - m_{r-2} = (m+3)_r - 2(m+2)_r + (m+1)_r$$
$$- \{(m+2)_r - 2(m+1)_r + m_r\}$$

d. i.

$$m_{r-3} = (m+3)_r - 3(m+2)_r + 3(m+1)_r - m_r.$$

Bei n maliger Anwendung haben wir

$$m_{r-n} = n_0(m+n)_r - n_1(m+n-1)_r + n_2(m+n-2)_r - \ldots \quad (8).$$

Diese Reihe ist sehr vieler Folgerungen fähig.

Z. B. für $r = n$ ist

$$1 = n_0(m+n)_n - n_1(m+n-1)_n + n_2(m+n-2)_n - \ldots \quad (9)$$

Für $n = m$ ergiebt sich, weil $r < m$ sein muss,

$$0 = m_0(2m)_r - m_1(2m-1)_r + m_2(2m-2)_r - \ldots \quad (10).$$

Für $r = 0$ erhält man

$$0 = n_0 - n_1 + n_2 - \ldots \quad (11)$$

was auch sonst bekannt ist.

Nimmt man endlich $r = m$, so wird, weil $m_{m-n} = m_n$ ist,

$$m_n = n_0(m+n)_m - n_1(m+n-1)_m + n_2(m+n-2)_m - \ldots \quad (12)$$

eine Reihe, welche einen Binomialcoefficienten durch die höheren Exponenten ausdrückt *).

Das bisher gebrauchte Verfahren lässt sich auch auf goniometrische Funktionen sehr vortheilhaft anwenden. Z. B. ist bekanntlich

$$2\cos x \,.\, \cos mx = \cos(m+1)x + \cos(m-1)x.$$

Man multiplicire beiderseits mit $2\cos x$ und zerlege rechts jedes doppelte Cosinusprodukt wieder in eine Summe, so wird

$$(2\cos x)^2 \cos mx = \cos(m+2)x + \cos mx$$
$$+ \cos mx + \cos(m-2)x$$
$$= \cos(m+2)x + 2\cos mx + \cos(m-2)x$$

Man multiplicire wieder mit $2\cos x$, und zerlege weiter, so ist

$$(2\cos x)^3 \mathrm{cs}\, mx = \mathrm{cs}(m+3)x + \mathrm{cs}(m+1)x$$
$$+ 2\mathrm{cs}(m+1)x + 2\mathrm{cs}(m-1)x$$
$$+ \mathrm{cs}(m-1)x + \mathrm{cs}(m-3)x$$
$$= \cos(m+3)x + 3\cos(m+1)x + 3\cos(m-1)x + \cos(m-3)x.$$

Also hat man allgemein

$$(2\cos x)^n \cos mx = n_0 \cos(m+n)x + n_1 \cos(m+n-2)x + \ldots \quad (13)$$

---

*) Soviel ich weiss, scheint diese Reihe noch nicht bekannt zu sein.

wobei von $m+n$ successive die geraden Zahlen abgezogen werden.

Behandelt man ebenso den Ausdruck $2\cos x \,.\, \sin mx$, so erhält man analog:

$$(2\cos x)^n \sin mx = n_0 \sin (m+n)x + n_1 \sin (m+n-2)x + \ldots \quad (14).$$

Nehmen wir in beiden Ausdrücken m negativ und der Grösse nach $= n$, so entstehen die Gleichungen

$$(2\cos x)^m \cos mx = m_0 + m_1 \cos 2x + m_2 \cos 4x + \ldots$$

$$(2\cos x)^m \sin mx = m_1 \sin 2x + m_2 \sin 4x + \ldots$$

oder für $x = \frac{1}{2}\Theta$,

$$(2\cos \tfrac{1}{2}\Theta)^m \cos \frac{m}{2}\Theta = m_0 + m_1 \cos \Theta + m_2 \cos 2\Theta + \ldots \quad (15)$$

$$(2\cos \tfrac{1}{2}\Theta)^m \sin \frac{m}{2}\Theta = m_1 \sin \Theta + m_2 \sin 2\Theta + \ldots \quad (16).$$

Daraus folgt auch

$$\frac{(2\cos \frac{1}{2}\Theta)^m \cos\frac{m}{2}\Theta - 1}{m} = \cos\Theta + \frac{m-1}{2}\cos 2\Theta + \frac{(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}\cos 3\Theta + \ldots$$

$$\frac{(2\cos \frac{1}{2}\Theta)^m \sin\frac{m}{2}\Theta}{m} = \sin\Theta + \frac{m-1}{2}\sin 2\Theta + \frac{(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}\sin 3\Theta + \ldots$$

Lassen wir nun m abnehmen, so nähert sich im ersten Falle $\cos \frac{m}{2}\Theta$ der Einheit und $\frac{(2\cos\frac{1}{2}\Theta)^m - 1}{m}$ bekanntlich dem Ausdruck $\mathrm{Log}\,(2\cos\frac{1}{2}\Theta)$; im zweiten Falle nähert sich $\sin\frac{m}{2}\Theta$ dem Bogen $\frac{m}{2}\Theta$, also $\frac{\sin\frac{m}{2}\Theta}{m}$ dem Ausdrucke $\frac{1}{2}\Theta$, und der andere Faktor $(2\cos\frac{1}{2}\Theta)^m$ der Einheit.

Gehen wir also zur Abnahmsgrenze 0 über, so wird

$$\mathrm{Log}\,(2\cos\tfrac{1}{2}\Theta) = \cos\Theta - \tfrac{1}{2}\cos 2\Theta + \tfrac{1}{3}\cos 3\Theta - \ldots \text{ in inf.} \quad (17)$$

$$\tfrac{1}{2}\Theta = \sin\Theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\Theta + \tfrac{1}{3}\sin 3\Theta - \ldots \text{ in inf.} \quad (18)$$

Diese Entwickelung der bekannten Reihen hat vor den bisherigen den Vorzug der Einfachheit und der Vermeidung des Imaginären, welches bei elementaren Vorträgen immer Schwierigkeiten darbietet und nur eine Art Hülfsconstruktion ausmacht, da es bei den Endresultaten wieder verschwindet.

Anmerkung. Die zuletzt in diesem Aufsatze gebrauchten Schlüsse scheinen mir nicht von allem Zweifel frei zu sein. G.

LV.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Herr Professor und Director Strehlke zu Danzig hat im Programm der dortigen Petrischule von 1840 zum ersten Male die den Verfassern von Programmen an andern Lehranstalten zur Nachahmung dringend zu empfehlende Einrichtung getroffen, dass er unter der Ueberschrift Pädagogische Mittheilungen jedem Programme eine Anzahl von Aufgaben, Lehrsätzen, Fragen oder wissenschaftlichen Bemerkungen beifügen wird, die im Unterrichte wirklich vorgekommen sind, und sich in irgend einer Weise als anregend und fruchtbar bei der Bildung der Jugend gezeigt haben. Da solche kleine meistens nicht in den Buchhandel kommende Schriften wie Programme, Dissertationen u. dergl. leider nur zu häufig der Vergessenheit anheim fallen, so werde ich pädagogische Mittheilungen von der vorher bezeichneten Art, in so fern dieselben den Zwecken des Archivs entsprechen und zu deren Förderung beitragen, in demselben mit der Erlaubniss der Verfasser wieder abdrucken lassen. Die von Herrn Professor Strehlke in dem Programm von 1840 mitgetheilten Aufgaben sind folgende:

1. Fläche des ebenen Vierecks.

Das Quadrat der Fläche eines ebenen Vierecks ist gleich dem Quadrate der Fläche eines Kreisvierecks mit denselben Seiten, vermindert um das Produkt aller 4 Seiten in das Quadrat des Cosinus der halben Summe zweier Gegenwinkel des Vierecks.

Der Beweis dieses Satzes wird leicht geführt durch Zerfällung des Vierecks in 2 Dreiecke, auf welche man den Hauptsatz der ebenen Trigonometrie zwei Mal anwendet, und indem man zu beiden Seiten der hieraus erhaltenen Gleichung die doppelten Produkte der beiden an die zerfällende Diagonale anstossenden Seiten hinzuaddirt *).

Indem man auf ähnliche Weise das sphärische Viereck behandelt, so erhält man den Satz:

Das Quadrat der dreifachen Summe der kubischen Inhalte der beiden Tetraeder, welche die Sehne der sphärischen Diagonale mit den Sehnen zweier Seiten und drei Radien bildet, ist

$$=\sin\left(\frac{s}{2}-a\right).\sin\left(\frac{s}{2}-b\right).\sin\left(\frac{s}{2}-c\right).\sin\left(\frac{s}{2}-d\right)$$

$$-\sin a.\sin b.\sin c.\sin d.\cos\left(\frac{B+D}{2}\right).\cos\left(\frac{B+D}{2}\right),$$

*) Die Anwendung des eben mitgetheilten Satzes führt auch zu einem leichten Beweise der sogenannten Umkehrung des Ptolemäischen Lehrsatzes.

wenn a, b, c, d die auf einander folgenden Seiten des Vierecks, s die Summe aller Seiten, B den von a und b, D den von c und d eingeschlossenen Winkel bedeutet.

Gewiss giebt es für das sphärische Viereck einen Ausdruck von $(\tang \frac{1}{4}F)^2$, der den Lexell'schen Ausdruck der Fläche des sphärischen Kreisvierecks als einen besondern Fall enthält. Bis jetzt habe ich diesen Satz nicht gefunden.

2. Quadratur des hyperbolischen Sektors.

Für eine Ellipse mit den Halbaxen a und b ist bekanntlich der Sektor zwischen der grossen Halbaxe, dem aus dem Mittelpunkte nach einem Punkte (x, y) gezogenen Radius Vektor und dem elliptischen Bogen

$$=\tfrac{1}{2}ab\,.\,\mathrm{arc}\,(\sin = \frac{y}{b}).$$

Da nun $\sqrt{-1}\,.\,\vartheta = \log.(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\,.\,\sin\vartheta)$, so ist für eine Ellipse mit den Halbaxen a und $b\sqrt{-1}$ oder eine Hyperbel mit den Halbaxen a und b der entsprechende hyperbolische Sektor $=\frac{1}{2}ab\,.\,\log.(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})$.

3. Cubatur der dreiseitigen Pyramide.

Wenn man in einem Tetraeder eine beliebige Kante in n gleiche Theile theilt, und durch die Theilungspunkte parallele Ebenen zu einer an die getheilte Kante anstossenden Dreiecksfläche des Tetraeders legt, und aus den Durchschnittspunkten der Ebenen und Kanten Gerade parallel zu der getheilten Kante zieht, so ist der Gesammt-Cubikinhalt aller dreiseitigen äussern Prismen (durch Hülfe der Summation der Quadratzahlen) $=F\,.\,h\,.(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2})$, wenn F die Dreiecksfläche und h die Höhe des Tetraeders auf diese Fläche bedeutet. Die Betrachtung der Gränze dieses Ausdrucks führt zum cubischen Inhalte der dreiseitigen Pyramide.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

LVI.

Miscellen.

In dem 22sten Bande des Crelle'schen Journals hat Gauss einen neuen sehr sinnreichen Beweis für das aus der sphärischen Trigonometrie bekannte, für die Geodäsie so wichtige Legendre'sche Theorem gegeben, den wir im Folgenden mit einigen uns hier nöthig scheinenden Erläuterungen mittheilen wollen.

Bezeichnen wir den sogenannten **sphärischen Excess** eines sphärischen Dreiecks, dessen drei Seiten a, b, c sind, durch 3ω, und die den Seiten a, b, c gegenüberstehenden Winkel dieses Dreiecks respective durch $A+\omega$, $B+\omega$, $C+\omega$, so ist offenbar, wenn π seine gewöhnliche Bedeutung hat, $A+B+C=\pi$, weil bekanntlich

$$3\omega=(A+\omega)+(B+\omega)+(C+\omega)-\pi$$

ist. Bezeichnen wir nun die halbe Summe der drei Winkel $A+\omega$, $B+\omega$, $C+\omega$ durch S, so ist, wie man leicht findet,

$$S=\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{3}{2}\omega,$$
$$S-(A+\omega)=\tfrac{1}{2}\pi-(A-\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$S-(B+\omega)=\tfrac{1}{2}\pi-(B-\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$S-(C+\omega)=\tfrac{1}{2}\pi-(C-\tfrac{1}{2}\omega);$$

und folglich

$$\cos S=-\sin\tfrac{3}{2}\omega,$$
$$\cos\{S-(A+\omega)\}=\sin(A-\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$\cos\{S-(B+\omega)\}=\sin(B-\tfrac{1}{2}\omega),$$
$$\cos\{S-(C+\omega)\}=\sin(C-\tfrac{1}{2}\omega).$$

Also ist nach zwei sehr bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a=\frac{\sin\tfrac{3}{2}\omega\,\sin(A-\tfrac{1}{2}\omega)}{\sin(B+\omega)\,\sin(C+\omega)},$$
$$\cos^2\tfrac{1}{2}a=\frac{\sin(B-\tfrac{1}{2}\omega)\,\sin(C-\tfrac{1}{2}\omega)}{\sin(B+\omega)\,\sin(C+\omega)};$$

und folglich, wie man hieraus leicht findet,

$$\frac{\sin^6\tfrac{1}{2}a}{\cos^2\tfrac{1}{2}a}=\frac{\sin^3\tfrac{3}{2}\omega\,\sin^3(A-\tfrac{1}{2}\omega)}{\sin^2(B+\omega)\,\sin(B-\tfrac{1}{2}\omega)\,\sin^2(C+\omega)\,\sin(C-\tfrac{1}{2}\omega)}.$$

Ganz eben so ist aber

$$\frac{\sin^6\tfrac{1}{2}b}{\cos^2\tfrac{1}{2}b}=\frac{\sin^3\tfrac{3}{2}\omega\,\sin^3(B-\tfrac{1}{2}\omega)}{\sin^2(A+\omega)\,\sin(A-\tfrac{1}{2}\omega)\,\sin^2(C+\omega)\,\sin(C-\tfrac{1}{2}\omega)}.$$

Dividirt man jetzt mit dem zweiten der beiden vorhergehenden Ausdrücke in den ersten, und zieht aus den erhaltenen gleichen Quotienten auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Quadratwurzel aus; so ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{\sin^3\tfrac{1}{2}a}{\cos\tfrac{1}{2}a}\cdot\frac{\cos\tfrac{1}{2}b}{\sin^3\tfrac{1}{2}b}=\frac{\sin(A+\omega)\,\sin^2(A-\tfrac{1}{2}\omega)}{\sin(B+\omega)\,\sin^2(B-\tfrac{1}{2}\omega)},$$

die man, wenn der Kürze wegen

$$D=\frac{a^3\cos\tfrac{1}{2}a}{8\sin^3\tfrac{1}{2}a}\cdot\frac{8\sin^3\tfrac{1}{2}b}{b^3\cos\tfrac{1}{2}b}\cdot\frac{\sin(A+\omega)\sin^2(A-\tfrac{1}{2}\omega)}{\sin^3 A}\cdot\frac{\sin^3 B}{\sin(B+\omega)\sin^2(B-\tfrac{1}{2}\omega)}$$

gesetzt wird, auch unter der Form

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}\sqrt[3]{D}$$

schreiben kann.

Die vier Factoren der Grösse D wollen wir nun etwas näher betrachten.

Weil zuerst nach einer bekannten goniometrischen Formel

$$\sin^3 \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{4}(3 \sin \tfrac{1}{2}a - \sin \tfrac{3}{2}a)$$

ist, so ist

$$8 \sin^3 \tfrac{1}{2}a - a^3 \cos \tfrac{1}{2}a = 2(3 \sin \tfrac{1}{2}a - \sin \tfrac{3}{2}a) - a^3 \cos \tfrac{1}{2}a.$$

Entwickelt man nun $\sin \frac{1}{2}a$, $\sin \frac{3}{2}a$, $\cos \frac{1}{2}a$ auf bekannte Weise in Reihen, so erhält man nach leichter Rechnung

$$8 \sin^3 \tfrac{1}{2}a - a^3 \cos \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{240}a^7 - \ldots,$$

und sieht also, dass in Bezug auf a als eine Grösse der ersten Ordnung

$$8 \sin^3 \tfrac{1}{2}a - a^3 \cos \tfrac{1}{2}a$$

eine Grösse der siebenten, folglich

$$1 - \frac{a^3 \cos \frac{1}{2}a}{8 \sin^3 \frac{1}{2}a}$$

eine Grösse der vierten Ordnung, also der Factor

$$\frac{a^3 \cos \frac{1}{2}a}{8 \sin^3 \frac{1}{2}a}$$

der Grösse D von der Einheit um eine Grösse der vierten Ordnung verschieden ist.

Ganz auf ähnliche Art zeigt man, dass der Factor

$$\frac{8 \sin^3 \frac{1}{2}b}{b^3 \cos \frac{1}{2}b}$$

der Grösse D von der Einheit in Bezug auf b als eine Grösse der ersten Ordnung um eine Grösse der vierten Ordnung verschieden ist.

Nach bekannten goniometrischen Formeln ist ferner

$$\begin{aligned} &\sin^3 A - \sin(A+\omega) \sin^2(A - \tfrac{1}{2}\omega) \\ &= \sin^3 A - \tfrac{1}{2} \sin(A+\omega) \{1 - \cos(2A-\omega)\} \\ &= \sin^3 A - \tfrac{1}{2} \sin(A+\omega) + \tfrac{1}{2} \sin(A+\omega) \cos(2A-\omega) \\ &= \sin^3 A - \tfrac{1}{2} \sin(A+\omega) + \tfrac{1}{4} \sin 3A - \tfrac{1}{4} \sin(A-2\omega), \end{aligned}$$

und folglich. weil bekanntlich

$$\sin^3 A = \tfrac{3}{4} \sin A - \tfrac{1}{4} \sin 3A$$

ist,

$$\begin{aligned} &\sin^3 A - \sin(A+\omega) \sin^2(A - \tfrac{1}{2}\omega) \\ &= \tfrac{3}{4} \sin A - \tfrac{1}{2} \sin(A+\omega) - \tfrac{1}{4} \sin(A-2\omega) \\ &= \tfrac{3}{4} \sin A - \tfrac{1}{2} \sin A(\cos\omega + \tfrac{1}{2}\cos 2\omega) - \tfrac{1}{2} \cos A(\sin\omega - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega). \end{aligned}$$

Entwickelt man jetzt $\cos\omega$, $\cos 2\omega$, $\sin\omega$, $\sin 2\omega$ auf bekannte Weise in Reihen, so erhält man nach leichter Rechnung

$$\sin^3 A - \sin(A+\omega) \sin^2(A - \tfrac{1}{2}\omega) = \tfrac{3}{4}\omega^2 \sin A - \ldots,$$

und sieht also, dass in Bezug auf ω als eine Grösse der ersten Ordnung die Grösse

$$\sin^3 A - \sin(A+\omega) \sin^2(A - \tfrac{1}{2}\omega)$$

eine Grösse der zweiten, folglich

$$1-\frac{\sin(A+\omega)\sin^2(A-\frac{1}{2}\omega)}{\sin^3 A}$$

ebenfalls eine Grösse der zweiten Ordnung, also der Factor

$$\frac{\sin(A+\omega)\sin^2(A-\frac{1}{2}\omega)}{\sin^3 A}$$

der Grösse D von der Einheit um eine Grösse der zweiten Ordnung verschieden ist.

Auf ganz ähnliche Art überzeugt man sich, dass der Factor

$$\frac{\sin^3 B}{\sin(B+\omega)\sin^2(B-\frac{1}{2}\omega)}$$

der Grösse D von der Einheit um eine Grösse verschieden ist, welche in Bezug auf ω als eine Grösse der ersten Ordnung von der zweiten Ordnung ist.

In der sphärischen Trigonometrie °) wird aber folgender merkwürdige Ausdruck für den sphärischen Excess 3ω bewiesen:

$$\operatorname{tang}\tfrac{3}{4}\omega=\sqrt{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-a)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-b)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-c)},$$

wo $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ ist. Aus diesem Ausdrucke erhellet sehr leicht, dass in Bezug auf die Seiten a, b, c als Grössen der ersten Ordnung die Grösse ω jederzeit eine Grösse der zweiten, also ω^2 eine Grösse der vierten Ordnung ist, und wenn man dies nun mit dem Obigen zusammenhält, so ergiebt sich auf der Stelle, dass jeder der vier Factoren der Grösse D von der Einheit um eine Grösse verschieden ist, welche in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks als Grössen erster Ordnung von der vierten Ordnung ist.

Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}\sqrt[3]{D}$$

ist, so kann offenbar in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks als Grössen erster Ordnung mit Vernachlässigung von Grössen der vierten Ordnung

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B},$$

und überhaupt also in Bezug auf die Seiten a, b, c des sphärischen Dreiecks als Grössen erster Ordnung mit Vernachlässigung von Grössen der vierten Ordnung

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B},\quad \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C},\quad \frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}$$

gesetzt werden, wo nach dem Obigen

$$A+B+C=\pi$$

ist.

°) M. s. z. B. des Herausgebers Elemente der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie. Leipzig. 1837. S. 180.

Nimmt man nun hierzu, dass $A+\omega$, $B+\omega$, $C+\omega$ die Winkel des sphärischen Dreiecks sind, und durch ω der dritte Theil des sphärischen Excesses desselben bezeichnet worden ist, so ergiebt sich unmittelbar das folgende merkwürdige und wichtige Theorem:

Jedes sphärische Dreieck, dessen Seiten gegen den Halbmesser der Kugel, auf welcher es liegt, sehr klein sind, kann näherungsweise, und zwar nur erst mit Vernachlässigung von Grössen, welche in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks als Grössen erster Ordnung von der vierten Ordnung sind, als ein ebenes Dreieck, dessen Seiten den Seiten des sphärischen Dreiecks gleich, und dessen Winkel die um den dritten Theil des Excesses des sphärischen Dreiecks verminderten Winkel des letztern sind, betrachtet und als ein solches ebenes Dreieck berechnet werden.

Diesen merkwürdigen, besonders für die Geodäsie so überans wichtigen, von Legendre gefundenen Satz hat Gauss in der wichtigen Abhandlung: Disquisitiones generales circa superficies curvas. Gottingae. 1828. auf Dreiecke, die auf einer beliebigen krummen Fläche von Bogen kürzester Linien eingeschlossen werden, erweitert, worüber man auch das fünfte Kapitel in des Herausgebers Sphäroidischer Trigonometrie. Berlin. 1833. 4. nachsehen kann.

Die allgemeine Gleichung des Kreises zwischen rechtwinkligen Coordinaten ist

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

oder

$$x^2+y^2-2(ax+by)+a^2+b^2=r^2.$$

Ist nun aber der Anfang der Coordinaten selbst ein Punkt des Kreises, so wird diese Gleichung auch durch $x=0$, $y=0$ erfüllt, und es ist folglich in diesem Falle

$$a^2+b^2=r^2,$$

also

$$x^2+y^2=2(ax+by).$$

Seien jetzt m, n; m_1, n_1; m_2, n_2 die Coordinaten dreier beliebiger Punkte des Kreises, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned}&(m^2+n^2)\,(m_1n_2-m_2n_1)\\ +&(m_1{}^2+n_1{}^2)\,(m_2n-mn_2)\\ +&(m_2{}^2+n_2{}^2)\,(mn_1-m_1n)\end{aligned}$$

$$= 2(am + bn)\,(m_1n_2 - m_2n_1)$$
$$+ 2(am_1 + bn_1)\,(m_2n - mn_2)$$
$$+ 2(am_2 + bn_2)\,(mn_1 - m_1n).$$

Weil nun, wie man leicht findet, die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens verschwindet, so findet zwischen den rechtwinkligen Coordinaten dreier beliebiger Punkte eines Kreises, wenn der Anfang der Coordinaten selbst ein Punkt des Kreises ist, jederzeit die Relation

$$0 = (m^2 + n^2)\,(m_1n_2 - m_2n_1)$$
$$+ (m_1{}^2 + n_1{}^2)\,(m_2n - mn_2)$$
$$+ (m_2{}^2 + n_2{}^2)\,(mn_1 - m_1n)$$

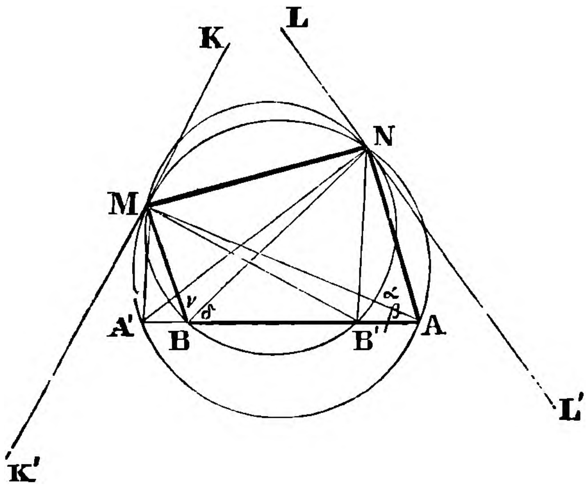
Statt.

Für die im zweiten Hefte dieses Theils S. 219 durch Rechnung aufgelöste Aufgabe:

Wenn zwei Punkte der Lage nach gegeben sind, so soll man die Lage zweier andern Punkte durch blosse Winkelmessungen an den letztern, ohne diese von den gegebenen Punkten aus zu beobachten, bestimmen;

hat Clausen in dem neuesten bis jetzt erschienenen Stücke der astronomischen Nachrichten (Bd. XVIII. Nr. 430. S. 367) die folgende geometrische, auch bei der Messtischpraxis anwendbare Auflösung gegeben.

In der unten stehenden Figur



seien M und N die beiden bekannten, A und B die beiden unbekannten Punkte, deren Lage bestimmt werden soll. Da man nach der durch die Aufgabe gestellten Bedingung die unbekannten Pnnkte A, B nicht von den bekannten Punkten M, N, sondern bloss die letzteren von den ersteren aus beobachten soll, so kann man nur in dem Punkte A die Winkel $MAN = \alpha$ und $MAB = \beta$, in dem Punkte B die Winkel $MBN = \gamma$ und $NBA = \delta$ messen, und diese Winkel sind daher nebst der bekannten Lage der Punkte M und N die einzigen Data, mittelst welcher die Punkte A und B bestimmt werden müssen.

Beschreibt man um das Dreieck MAN einen Kreis, welcher die Linie AB in A' schneiden mag, und zieht die Linien MA' und NA', so ist der Winkel $MNA' = \beta$, und die Lage der Linie NA' also bekannt, weil die Lage von MN und der Winkel β bekannt ist; zieht man ferner an den um das Dreieck MAN beschriebenen Kreis durch M die Tangente KK', so ist der Winkel $KMN = \alpha$, der Winkel $K'MA' = \beta$, und es ist folglich sowohl die Lage von KK', als auch die Lage von MA' bekannt, weil die Lage von MN, der Winkel α und der Winkel β bekannt ist; also ist auch die Lage des Punktes A' bekannt, weil man die Lage der Linien NA' und MA' kennt. Auf ganz ähnliche Art beschreibe man um das Dreieck MBN einen Kreis, welcher die Linie AB in B' schneiden mag, nnd ziehe die Linien MB' und NB', so ist der Winkel $NMB' = \delta$, und die Lage der Linie MB' also bekannt, weil die Lage der Linie MN und der Winkel δ bekannt ist; zieht man ferner an den um das Dreieck MBN beschriebenen Kreis durch N die Tangente LL', so ist der Winkel $LNM = \gamma$, der Winkel $L'NB' = \delta$, und es ist folglich sowohl die Lage von LL' als auch die Lage von NB' bekannt, weil die Lage von MN, der Winkel γ, nud der Winkel δ bekannt ist; also ist auch die Lage des Punktes B' bekannt, weil man die Lage der Linien MB' und NB' kennt. Weil man nun die Lage der beiden in der Linie AB liegenden Punkte A' und B' kennt, so kennt man auch die Lage der Linie AB selbst. Der Punkt A ist der andere Durchschnittspunkt der Linie $A'B'$ und des um das bekannte Dreieck $MA'N$ beschriebenen Kreises, und eben so ist der Punkt B der andere Durchschnittspunkt der Linie $A'B'$ und des um das bekannte Dreieck $MB'N$ beschriebenen Kreises.

Aus dieser Analysis lässt sich nun unmittelbar die folgende Construction ableiten. Durch den gegebenen Punkt M lege man die Linie KK', welche mit der gegebenen Linie MN den Winkel $KMN = \alpha$ einschliesst, und mache hierauf den Winkel $MNA' = K'MA' = \beta$, so erhält man den Durchschnittspunkt A' der Linien MA' und NA'. Auf ähnliche Art lege man durch den gegebenen Punkt N die Linie LL', welche mit der gegebenen Linie MN den Winkel $LNM = \gamma$ einschliesst, und mache hierauf den Winkel $NMB' = L'NB' = \delta$, so erhält man den Durchschnittspunkt B' der Linien MB' nnd NB'. Zieht man nun die Linie $A'B'$ und beschreibt um die bekannten Dreiecke $MA'N$ und $MB'N$ Kreise, so sind die, von A' und B' verschiedenen Durchschnittspunkte dieser Kreise mit der nöthigenfalls gehörig verlängerten Linie $A'B'$ die beiden gesuchten Pnnkte A und B.

Bei der Messtischpraxis kann man von dieser Auflösung den folgenden Gebrauch machen, wobei wir die auf dem Messtische gegebene, der Linie MN auf dem Felde entsprechende Linie durch mn bezeichnen wollen. Man begebe sich mit dem Messtische auf den Punkt A, stelle m vertikal über A, lege die Kippregel an mn, orientire das Tischblatt auf N, richte die an m liegende Kippregel auf den Punkt M, und ziehe an der Schärfe des Lineals der Kippregel eine Linie, so ist diese Linie die der Linie KK' entsprechende Linie kk' auf dem Messtische. Hierauf lege man die Kippregel in umgekehrter Lage an kk', so dass das Ocular auf die Seite des Objectivs kommt, orientire das Tischblatt auf M, richte die an m liegende Kippregel nach B, und ziehe an der Schärfe des Lineals der Kippregel eine Linie, so ist diese Linie die der Linie MA' entsprechende Linie ma' auf dem Messtische. Jetzt stelle man n vertikal über A, lege die Kippregel an nm, orientire das Tischblatt auf M, richte die an n liegende Kippregel nach B, und ziehe an der Schärfe des Lineals der Kippregel eine Linie, so ist diese Linie die der Linie NA' entsprechende Linie na' anf dem Messtische, und der Durchschnittspunkt a' der Linien ma' und na' ist der dem Punkte A' entsprechende Punkt auf dem Messtische. Indem man sich jetzt mit dem Messtische auf den Punkt B begiebt, und hier anf ganz ähnliche Art wie vorher auf dem Punkte A operirt, erhält man den dem Punkte B' entsprechenden Punkt b' auf dem Messtische. Jetzt ziehe man die Linie $a'b'$, lege die Kippregel an dieselbe und orientire das Tischblatt auf den Punkt A; dann lege man die Kippregel an m oder n und visire nach M oder N, so giebt der Durchschnittspunkt der an der Schärfe des Lineals gezogenen Linie mit der Linie $a'b'$ den gesuchten Punkt b, welcher dem Punkte B auf dem Felde entspricht, und da man durch Anlegnng der Kippregel an m und n zwei Bestimmungen für den gesuchten Punkt b erhält, so hat man in deren Uebereinstimmung mit einander zugleich ein Kriterium für die Richtigkeit der Operation. Den dem Punkte A auf dem Felde entsprechenden Punkt a auf dem Messtische kann man auf ganz ähnliche Art bestimmen, wenn man sich mit dem Messtische wieder nach A begiebt. Wenn die Punkte a' und b' nahe mit einander zusammenfallen, wird die Auflösung unsicher.

Bemerken wollen wir bei dieser Gelegenheit noch, dass schon in dem 1825 erschienenen 3ten Bande der astronomischen Nachrichten. Nr. 62. S. 233 von Gerling die folgende trigonometrische Auflösung nnsers Problems gegeben worden ist.

Man setze der Kürze wegen in obiger Figur den Winkel $AMN = x$, den Winkel $BNM = y$; so ist

$$\frac{AB}{AN} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\delta)}{\sin\delta},\quad \frac{AN}{MN} = \frac{\sin x}{\sin\alpha}$$

und

$$\frac{AB}{BM} = \frac{\sin(\beta+\gamma+\delta)}{\sin\beta},\quad \frac{BM}{MN} = \frac{\sin y}{\sin\gamma}.$$

Folglich ist

$$\frac{AB}{MN} = \sin x\,\frac{\sin(\alpha+\beta+\delta)}{\sin\alpha\sin\delta} = \sin y\,\frac{\sin(\beta+\gamma+\delta)}{\sin\beta\sin\gamma},$$

also

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin\alpha\sin\delta\sin(\beta+\gamma+\delta)}{\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\delta)}.$$

Berechnet man nun den Hülfswinkel φ mittelst der Formel

$$\tang \varphi = \frac{\sin\alpha \sin\delta \sin(\beta+\gamma+\delta)}{\sin\beta \sin\gamma \sin(\alpha+\beta+\delta)},$$

so ist

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \tang \varphi,$$

und folglich

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = -\frac{1-\tang\varphi}{1+\tang\varphi},$$

d. i.

$$\tang \tfrac{1}{2}(x-y) \cot \tfrac{1}{2}(x+y) = -\tang(45^\circ-\varphi),$$

also

$$\tang \tfrac{1}{2}(x-y) = -\tang \tfrac{1}{2}(x+y) \tang(45^\circ-\varphi).$$

Nun ist aber offenbar $x+y=\beta+\delta$, und folglich

$$\tang \tfrac{1}{2}(x-y) = -\tang \tfrac{1}{2}(\beta+\delta) \tang(45^\circ-\varphi).$$

Weil man jetzt $x+y$ und $x-y$ kennt, so kann man auch x und y selbst finden. Hat man aber x und y, so ergeben sich AM, AN, BM, BN mittelst der folgenden Formeln:

$$AM = \frac{\sin(\alpha+x)}{\sin\alpha} . MN, \quad AN = \frac{\sin x}{\sin\alpha} . MN;$$

$$BM = \frac{\sin y}{\sin\gamma} . MN, \quad BN = \frac{\sin(\gamma+y)}{\sin\gamma} . MN;$$

und auf diese Weise ist nun die Lage der Punkte A und B gegen M und N bestimmt, wie verlangt wurde.

Einfache Beweise zweier Lehrsätze. Von dem Herrn Doctor Rädell zu Berlin.

1) In einem jeden Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten weniger dem doppelten Produkte dieser beiden Seiten multiplicirt mit dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Beweis. Es seien a, b, c die drei Seiten des Dreiecks und α, β, γ die ihnen gegenüberstehenden Winkel; dann ist nach einer Grundformel der Dreiecksmesskunst

$$a = b \cos\gamma + c \cos\beta,$$

$$b = a \cos\gamma + c \cos\alpha,$$

$$c = b \cos\alpha + a \cos\beta.$$

Multiplicirt man nun die erste Gleichuug mit a, die zweite mit b und die dritte mit $-c$ und addirt die Produktengleichungen, so erhält man

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \gamma,$$

indem sich die übrigen Glieder als identisch und mit entgegengesetzten Zeichen behaftet aufheben. Hieraus folgt nun unmittelbar $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

2) **Jede harmonische unendliche Reihe, in welcher alle Glieder dasselbe Vorzeichen haben, ist divergent.**

Beweis. Ist $\frac{A}{a+\nu d}$ irgend ein Glied der harmonischen Reihe, so kann man immer voraussetzen, dass a und d ganze Zahlen sind, weil man entgegengesetzten Falles Zähler und Nenner dieses Bruches mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner von a und d multipliciren könnte und dadurch a und d, folglich auch $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ u. s. w. in ganze Zahlen übergehen würden.

Betrachtet man die unendliche harmonische Reihe

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \frac{1}{a+3d} + \ldots\ldots$$

so kann man sie zerlegen in

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{a} &+ \left\{\frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \frac{1}{a+3d} + \ldots\ldots + \frac{1}{a(1+d)}\right\} \\ &+ \left\{\frac{1}{a(1+d)+d} + \frac{1}{a(1+d)+2d} + \frac{1}{a(1+d)+3d} + \ldots\ldots + \frac{1}{a(1+d)^2}\right\} \\ &+ \left\{\frac{1}{a(1+d)^2+d} + \frac{1}{a(1+d)^2+2d} + \frac{1}{a(1+d)^2+3d} + \ldots\ldots + \frac{1}{a(1+d)^3}\right\} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Da nun der zweite Theil der unendlichen Reihe aus a, der dritte aus $a(1+d)$, der vierte aus $a(1+d)^2$ Gliedern u. s. w. besteht, so sieht man leicht, dass jeder einzelne Theil grösser ist, als $\frac{1}{1+d}$, folglich

$$S > \frac{1}{a} + \frac{1}{1+d} + \frac{1}{1+d} + \frac{1}{1+d} + \ldots\ldots,$$

und da nun die Reihe rechts gewiss divergirt, so wird die unendliche harmonische Reihe S um so mehr divergiren. Hierdurch ist nun aber zugleich auch die Divergenz der Reihe

$$\frac{A}{a},\ \frac{A}{a+d},\ \frac{A}{a+2d},\ \frac{A}{a+3d},\ \frac{A}{a+4d} \ldots\ldots$$

bewiesen.

Anmerkung. Dieser Beweis ist eine Verallgemeinerung desjenigen, welchen Cauchy in seinem Cours d'Analyse T. I. p. 127 für die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots$ gegeben hat.

Nachtrag zu dem Aufsatze XIV. im Archive der Mathem. und Phys. I. Theil I. Heft. (Auflösung des Pothenot'schen Problems). Vom Herausgeber.

Eine zur Rechnung bequeme Auflösung des Pothenot'schen Problems, über welches die Leser auch einige Bemerkungen in einem im 3ten Hefte S. 335 auszugsweise abgedruckten Briefe des Herrn Majors und Ritters Dr. G. W. Müller zu Hannover an den Herausgeber finden, lag nicht im Zwecke des oben genannten Aufsatzes. Da sich aber aus den in demselben aufgestellten Gleichungen leicht eine sehr elegante Auflösung dieses Problems, die mit der bekannten von Gauss gegebenen Auflösung grosse Aehnlichkeit hat, ableiten lässt, so mögen als Nachtrag zu den in dem genannten Aufsatze gegebenen Entwickelungen hier noch die folgenden Bemerkungen Platz finden.

Wir haben a. a. O. 2. die folgenden sechs Gleichungen gefunden:

$$1.\quad\begin{cases} x'=x+\varrho\cos\varphi,\ y'=y+\varrho\sin\varphi;\\ x'_1=x+\varrho_1\cos(\varphi+\alpha),\ y'_1=y+\varrho_1\sin(\varphi+\alpha);\\ x'_2=x+\varrho_2\cos(\varphi+\beta),\ y'_2=y+\varrho_2\sin(\varphi+\beta);\end{cases}$$

welche, wenn man jetzt der Kürze wegen $\varphi+\alpha=\varphi_1$, $\varphi+\beta=\varphi_2$ setzt, die folgende Gestalt erhalten:

$$2.\quad\begin{cases} x'=x+\varrho\cos\varphi,\ y'=y+\varrho\sin\varphi;\\ x'_1=x+\varrho_1\cos\varphi_1,\ y'_1=y+\varrho_1\sin\varphi_1;\\ x'_2=x+\varrho_2\cos\varphi_2,\ y'_2=y+\varrho_2\sin\varphi_2.\end{cases}$$

Durch Subtraction des zweiten und dritten Paars von dem ersten erhält man

$$3.\quad\begin{cases} x'-x'_1=\varrho\cos\varphi-\varrho_1\cos\varphi_1,\ y'-y'_1=\varrho\sin\varphi-\varrho_1\sin\varphi_1;\\ x'-x'_2=\varrho\cos\varphi-\varrho_2\cos\varphi_2,\ y'-y'_2=\varrho\sin\varphi-\varrho_2\sin\varphi_2;\end{cases}$$

wodurch die Coordinaten x und y eliminirt sind. Elimiuirt man nun ferner sowohl aus den beiden ersten Gleichungen die Grösse ϱ_1, als auch aus den beiden letzten die Grösse ϱ_2, so erhält man die beiden Gleichungen

$$4.\quad\begin{cases} (x'-x'_1)\sin\varphi_1-(y'-y'_1)\cos\varphi_1=\varrho\sin(\varphi_1-\varphi),\\ (x'-x'_2)\sin\varphi_2-(y'-y'_2)\cos\varphi_2=\varrho\sin(\varphi_2-\varphi);\end{cases}$$

d. i. nach dem Obigen

$$5.\quad\begin{cases} (x'-x'_1)\sin\varphi_1-(y'-y'_1)\cos\varphi_1=\varrho\sin\alpha,\\ (x'-x'_2)\sin\varphi_2-(y'-y'_2)\cos\varphi_2=\varrho\sin\beta.\end{cases}$$

Nun bestimme man, was bekanntlich immer durch leichte Rechnung möglich ist *), die Hülfsgrössen r_1 und ω_1 so, dass dieselben den beiden Gleichungen

---

*) Sollen nämlich überhaupt die Grössen R und N den beiden Gleichungen

$$A=R\cos N,\ B=R\sin N$$

gemäss bestimmt werden, so rechnet man am besten nach folgendem Schema:

$$6.\quad x' - x'_1 = r_1 \cos\omega_1,\ y' - y'_1 = r_1 \sin\omega_1,$$

und die Hülfsgrössen r_2 uud ω_2 so, dass dieselben den beiden Gleichungen

$$7.\quad x' - x'_2 = r_2 \cos\omega_2,\ y' - y'_2 = r_2 \sin\omega_2$$

genügen; dann erbalten die beiden Gleichungen 5, welche noch die unbekaunten Grössen φ_1, φ_2, ϱ enthalten, offenbar die einfache Form

$$8.\quad r_1 \sin(\varphi_1 - \omega_1) = \varrho \sin\alpha,\ r_2 \sin(\varphi_2 - \omega_2) = \varrho \sin\beta;$$

und führen durch Division zn der Gleichung

$$9.\quad \frac{r_1 \sin(\varphi_1 - \omega_1)}{r_2 \sin(\varphi_2 - \omega_2)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

oder

$$10.\quad \frac{\sin(\varphi_1 - \omega_1)}{\sin(\varphi_2 - \omega_2)} = \frac{r_2 \sin\alpha}{r_1 \sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{r_1} \cdot \frac{r_2}{\sin\beta}.$$

die nun ϱ nicht mebr enthält. Berecbnet man den Hülfswinkel ξ mittelst der Formel

$$11.\quad \tang \xi = \frac{r_2 \sin\alpha}{r_1 \sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{r_1} \cdot \frac{r_2}{\sin\beta},$$

so wird die Gleichung 10.

$$12.\quad \frac{\sin(\varphi_1 - \omega_1)}{\sin(\varphi_2 - \omega_2)} = \tang \xi,$$

und verwandelt sich, wenn man auf beiden Seiten die Einheit subtrahirt und addirt, und dann dividirt, in die Gleichung

$$13.\quad \frac{\sin(\varphi_1 - \omega_1) - \sin(\varphi_2 - \omega_2)}{\sin(\varphi_1 - \omega_1) + \sin(\varphi_2 - \omega_2)} = -\frac{1 - \tang \xi}{1 + \tang \xi},$$

d. i. in die Gleicbung

$$14.\quad \tang \tfrac{1}{2}\{(\varphi_1 - \varphi_2) - (\omega_1 - \omega_2)\} \cot \tfrac{1}{2}\{(\varphi_1 + \varphi_2) - (\omega_1 + \omega_2)\} = -\tang(45^\circ - \xi),$$

aus der sich

$$15.\quad \tang \tfrac{1}{2}\{(\varphi_1 + \varphi_2) - (\omega_1 + \omega_2)\} = -\cot(45^\circ - \xi) \tang \tfrac{1}{2}\{(\varphi_1 - \varphi_2) - (\omega_1 - \omega_2)\}$$

oder

$$\begin{aligned}
\log . R \cos N &= \log A \\
\log . R \sin N &= \log B \\
\log \cot N &= \log A - \log B \\
N &= \ldots . \\
\log R &= \begin{cases} \log A - \log \cos N \\ \log B - \log \sin N \end{cases} \\
R &= \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

16. $\tang \frac{1}{2}\{(\varphi_1+\varphi_2)-(\omega_1+\omega_2)\}=$
$$-\tang(45^\circ+\xi)\tang\tfrac{1}{2}\{(\varphi_1-\varphi_2)-(\omega_1-\omega_2)\},$$
oder, weil nach dem Obigen

$$\varphi_1-\varphi_2=\alpha-\beta,\ \varphi_1+\varphi_2=\alpha+\beta+2\varphi$$

ist,

17. $\tang\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)-(\omega_1+\omega_2)+2\varphi\}=$
$$-\tang(45^\circ+\xi)\tang\tfrac{1}{2}\{(\alpha-\beta)-(\omega_1-\omega_2)\}$$
ergiebt, in welcher Gleichung nnn bloss noch die **eine** unbekannte Grösse φ enthalten ist, die also mittelst derselben gefunden werden kann.

Hat man φ gefunden, so ergiebt sich ϱ mittelst eines der beiden aus 8. fliessenden Ausdrücke:

$$18.\quad\begin{cases}\varrho=\dfrac{r_1\sin(\varphi_1-\omega_1)}{\sin\alpha}=\dfrac{r_1\sin(\varphi+\alpha-\omega_1)}{\sin\alpha},\\[2ex] \varrho=\dfrac{r_2\sin(\varphi_2-\omega_2)}{\sin\beta}=\dfrac{r_2\sin(\varphi+\beta-\omega_2)}{\sin\beta}.\end{cases}$$

Die Coordinaten x und y liefern hierauf die aus 2. sich ergebenden Formeln

$$19.\quad x=x'-\varrho\cos\varphi,\ y=y'-\varrho\sin\varphi;$$

und die Entfernnngen ϱ_1 nnd ϱ_2 können danu auch leicht mittelst der aus 1. folgenden Ausdrücke

$$20.\quad\begin{cases}\varrho_1=\dfrac{x'_1-x}{\cos(\varphi+\alpha)}=\dfrac{y'_1-y}{\sin(\varphi+\alpha)},\\[2ex] \varrho_2=\dfrac{x'_2-x}{\cos(\varphi+\beta)}=\dfrac{y'_2-y}{\sin(\varphi+\beta)}\end{cases}$$

berechnet werden.

Zu bemerken hat man noch, dass die Formel 17. für φ jederzeit zwei 360° nicht übersteigende Werthe liefert, und dass man von diesen beiden Werthen immer denjenigen zu wählen hat, welchem in Folge der Formeln 18. ein positiver Werth von ϱ entspricht, worüber wir weiterer Bemerkungen uns hier um so mehr enthalten können, da von diesem Gegenstande schon auf S. 93. im ersten Hefte dieses Theils die Rede gewesen ist.

Berichtigungen.

Der Name des Herrn Vfs. des Aufsatzes L. in diesem Hefte ist nicht **Fleschl**, sondern **Flesch**. Der Fehler ist durch Undeutlichkeit des Mscpts. entstanden.

Die Nummer der ersten Abhandlung in diesem Hefte muss XLVI. statt XLI. sein.

I.

Literarischer Bericht*).

(Die Herren Autoren und Verleger, namentlich die Verfasser und Verleger von Dissertationen, Programmen u. s. w., welche eine recht baldige Anzeige ihrer Schriften in diesem literarischen Berichte wünschen, werden um recht schleunige Einsendung derselben an die Buchhandlung des Herrn Koch zn Greifswald ersucht. Der Herausgeber wird sich bemühen, diesem Berichte eine immer grössere Vollkommenheit und Vollständigkeit zu geben; dieses Mal war noch so manche frühere Erscheinung nachzutragen, dass absolute Vollständigkeit nicht zu erreichen war.)

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

A. S. de Montferrier: Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées, tome 3, supplément contenant plusieurs articles sur la géometrie, la trigonométrie et l'astronomie, par le colonel Puissant. Brux. 4. 5 Thlr. 16 gGr.

A System of Practical Mathematics, containing Elements of Algebra and Geometry. With a collection of Accurate Stereotyped Tables, comprising the Logarithms of Numbers, of Sines, Tangents and Secants; Natural Sines, the requisite Nautical and Astronomical Tables, and Tables of Compound Interest and Annuities. By J. Davidson, A. M. With numerous Cnts and Copperplates. 4th. edition, greatly improved and enlarged. 8. 15 s. boards.

Vorlesungen über reine Mathematik von J. Fux, Prof. zu Olmütz. Olmütz 1839. 8. 2 Thlr. (Enthält die gewöhnlichen Elemente.)

---

*) Der Herausgeber bemerkt, dass diese literarischen Berichte theils von ihm, theils von andern Mitarbeitern verfasst werden.

Arithmetik.

Saigey: Problèmes d'Arithmétique et exercices de calcul sur les questions ordinaires de la vie, sur la géometrie, la mécanique, l'astronomie, la géographie, la physique, la chimie et la métrologie ancienne et moderne. 5. ed. Bruxelles. 8 ggr. Solutions. 4 ggr.

J. Jaclot et Arbel: Récréations arithmétiques ou dixhuit-cents problèmes dont les résultats présentent des faits numériques pris dans l'histoire, la géographie, la physique, la chimie, l'astronomie etc. 2 vol. in 18. Brux. 1 Thlr. 16 ggr.

Die Elemente der Zablenlehre in System und Beispielen von *Traugott Franke*, Dr. ph., Professor an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden. Erster Theil. Die Zahlen-Verbindungen und Zahlen-Veränderungen. Dresden und Leipzig. 1840. 8. 12 ggr.

Ist eigentlich als eine systematisch geordnete Sammlung von Beispielen zur Buchstabenrechnung und niedern Algebra zu betrachten. die den Lehrern an höhern Unterrichtsanstalten erwünscht sein wird, da man an solchen Beispielen nicht Vorrath genug haben kann. Die Beispiele sind, wie der Verf. in der Vorrede bemerkt, so geschaffen, dass sie die folgenden Gesetze vorbereiten, theilweise andere für die Folge wichtige Gesetze enthalten, und überhaupt unter dem Scheine grosser Schwülstigkeit auf einfache, dem Auge gefällige oder dem Gedächtnisse leicht behaltbare Formen führen, um dadurch die Liebe zur Sache, welche bei der abstracten Form sonst bald verschwindet, in dem Lernenden zu wecken und zu erhalten. Die Resultate beizugeben hat der Verf. unterlassen. Er beabsichtigt eine ähnliche Sammlung für die unbestimmte Analytik, die Lehre von den Gleichungen höherer Grade und die Differential- und Integralrechnung folgen zu lassen. Hier namentlich möchte es doch manchem Lehrer wünschenswerth sein, wenn auch die Resultate beigegeben würden.

Stufenmässig geordnete algebraische Anfgaben des ersten Grades mit einer oder mehreren unbekannten Grössen, durch in Worte gefasste Schlüsse und durch Gleichungen auf möglichst verschiedene Weise aufgelöst von *I. Hufschmidt*. Essen. 1841. 8. 18 ggr.

Die Auflösung algebraischer Aufgaben ohne Gleichungen durch blosses Raisonnement, welcher der Verf. in der Vorrede mit Recht das Wort redet, hat schon Lhuilier in seiner Anleitung zur Elementar-Algebra. Tübingen. 1799., als eine treffliche Uebung des Scharfsinnes empfohlen und neben der eigentlichen algebraischen Auflösung in Anwendung gebracht.

Analysis, bearbeitet von *Carl Holtzmann*, Professor an der Grossherzoglich Badischen polytechnischen Schule. Karlsruhe 1840. 8. 2 Thlr.

Bloss die sogenannte Analysis des Endlichen. Aufmerksam machen wir auf den auf S. 375 ff. gegebenen auf geometrischen Betrachtungen im Raume beruhenden Beweis des Fundamentalsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen, auf den wir vielleicht später in diesem Archive zurückkommen werden.

Navier: Résumé des leçons d'analyse données à l'école polytechnique. 2 Vol. 8. 4 Thlr.

Duhamel: Cours d'analyse de l'école polytechnique. Seconde partie. 8. 2 Thlr.

In Nr. 405 der astronomischen Nachrichten (Bd. 17. S. 326.) giebt Herr Th. Clausen einen Beweis des Fundamentalsatzes der Theorie der Gleichungen in einem „Beweis, dass die algebraischen Gleichungen Wurzeln von der Form $a+bi$*) haben" überschriebenen Aufsatze. Dieser an sich sehr sinnreiche Beweis ist jedoch nicht von allem Zweifel frei, weil er auf der Theorie der Reihen, insbesondere auf dem Lagrange'schen Theoreme beruhet, die bis jetzt bekannten Beweise des letztern Theorems aber in so fern als mangelhaft bezeichnet werden müssen, weil sie die Convergenz und Divergenz der Reihe völlig unberücksichtigt lassen. In einem der folgenden Hefte dieses Archivs werden die neuesten, höchst wichtigen Untersuchungen Cauchy's über die Lagrange'sche Reihe mitgetheilt werden, welche den Zweck haben, den Beweis dieser wichtigen Reihe in der angedeuteten Beziehung gehörig zu vervollständigen.

In Nr. 406. der astronomischen Nachrichten (Bd. 17. S. 351.) theilt Herr Th. Clausen den folgenden merkwürdigen Satz über die Bernoullischen Zahlen ohne Beweis mit:

Der Bruch der $n$ten Bernoullischen Zahl wird so gefunden: Man addire zu den Theilern von $2n$ .... $1, 2, a, a', a''$, ... $2n$ die Einheit, wodurch man die Reihe Zahlen $2, 3, a+1, a'+1, \ldots. 2n+1$ bekommt. Aus dieser nimmt man bloss die Primzahlen $2, 3, p, p'$, u. s. w. und bildet den Bruch der $n$ten Bernoullischen Zahl:

$$\mp\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}+\ldots.\right).$$

Das obere Zeichen gilt für ein ungerades, das untere für ein gerades n.

J. J. Jaclot: Traité et table d'addition, enseignant les procédés des calculateurs les plus habiles pour faire cette opération avec promptitude et précision. Bruxell. 18. 6 ggr.

Barlow's Tables of squares, cubes, square roots, cube roots, reciprocals of all integer numbres up to 10000. Stereotype edition, examined and corrected. Royal 12. 8s. sewed.

Arithmetical Tables. By *William Frost*. 18. 6d. sewed.

*) $i=\sqrt{-1}$.

Sammlung mathematischer Tafeln. Als neue und völlig umgearbeitete Auflage von *Georgs Freiherrn von Vega* grösseren logarithmisch-trigonometrischen Tafeln herausgegeben von Dr. *I. A. Hülsse*. Stereotyp-Ausgabe. Erster Abdruck. Leipzig. Weidmann'sche Buchhandlung. 1840. 3 Thlr. 12 ggr.

Diese neue Ausgabe der in ihrer frühern Gestalt aus zwei Theilen bestehenden grössern Vega'schen Tafeln halten wir für ein in jeder Beziehung sehr verdienstliches Unternehmen, und empfehlen dieselbe allen Mathematikern und allen Praktikern, denen die Ausführung logarithmisch-trigonometrischer und andererRechnungen obliegt. Die gänzliche Ausschliessung der in der ältern Ausgabe enthaltenen astronomischen Tafeln ist dadurch vollständig gerechtfertigt, weil diese Tafeln bei dem gegenwärtigen Zustande der Astronomie als völlig veraltet bezeichnet werden müssen, und durch die vervollkommnete Gestalt, in welcher jetzt die astronomischen Ephemeriden, namentlich das Berliner astronomische Jahrbuch, die Connaissance des tems, die Effemeridi astronomiche di Milano und der Nautical Almanac erscheinen, in der That auch völlig entbehrlich gemacht werden. Durch diese Ausschliessung der astronomischen Tafeln ist es vorzüglich möglich gemacht worden, die Tafeln in der neuen Ausgabe auf einen weit kleinern Raum zu reduciren, und auch den Preis bedeutend zu ermässigen, da die ältere Ausgabe 5 Thaler, die neue nur 3 Thaler und 12 gute Groschen kostet, und überdies haben die Käufer für die weggelassenen astronomischen Tafeln durch Hinzufügung einiger in der ältern Ausgabe nicht enthaltenen, sehr nützlichen Tafeln, die wir nachher besonders namhaft machen wollen, sehr reichlichen Ersatz erhalten.

Die folgende Angabe des Inhalts wird am besten zur Empfehlung dieser schönen Tafeln dienen.

Einleitung über Einrichtung und Gebrauch der Tafeln

I. Tafel der gemeinen oder briggischen Logarithmen aller natürlichen Zahlen von 1 bis 108000.

Die Einrichtung dieser Tafel ist die gewöhnliche. Beigefügt ist noch eine kleine Hülfstafel zur Verwandlung der gemeinen Logarithmen in natürliche, und eine Hülfstafel zur Verwandlung der natürlichen Logarithmen in gemeine.

II. Tafel der briggischen Logarithmen für die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten von 0 bis 90 Grad.

Auch diese Tafel hat im Ganzen die gewöhnliche Einrichtung. In den 5 ersten Graden schreiten die Winkel von 10 zu 10 Secunden, nachher von Minute zu Minute fort. Wir bedauern sehr, dass der Herausgeber nicht durch den ganzen Quadranten die Winkel von 10 zu 10 Secunden wie z. B. in den Callet'schen Tafeln hat fortschreiten lassen. Wäre dies der Fall, so würden seine Tafeln allen übrigen vorziehen.

Angehängt ist eine Tafel der Längen der Kreisbogen für die einzelnen Grade, Minnten und Secunden.

III. Tafel der wirklichen Länge der trigonometrischen Linien.

In dieser Tafel schreiten die Winkel ganz zweckmässig von Minute zu Minute fort.

IV. Sehnentafel für den Halbmesser 500 von 0 bis 125 Grad.

Hülfstafel zur Verwandlung der Centesimalbogen in Sexagesimalbogen.

Hülfstafel zur Verwandlung der Sexagesimalbogen in Bruchtheile des Quadranten.

V. Tafel aller einfachen Factoren der durch 2, 3. 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 102000 und der Primzahlen von 102000 bis 400000.

VI. Tafel der natürlichen Logarithmen für alle auf einander folgenden Zahlen von 1 bis 1000 und für alle Primzahlen von 1000 bis 10000.

Die Logarithmen sind in dieser Tafel in acht Decimalstellen angegeben. Angehängt sind noch die Potenzen von 2 von der 1sten bis zur 45sten, die Potenzen von 3 von der 1sten bis zur 36sten, die Potenzen von 5 von der 1sten bis zur 27sten.

VII. Potenzen der Grundzahl e des natürlichen Logarithmen-Systems für alle Hundertel von 0.01 bis 10 nebst den briggischen Logarithmen dieser Potenzen: oder umgekehrte Tafel der natürlichen Logarithmen, welche für alle Hundertel der natürlichen Logarithmen von 0,01 bis 10,00 die zugehörigen Zahlen nebst ihren gemeinen Logarithmen enthält.

VIII. Tafel der Quadrat- und Cubikwurzeln aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000.

Die Quadratwurzeln sind auf 12, die Cubikwurzeln auf 7 Decimalstellen berechnet.

Angehängt sind einige in Decimalbrüche verwandelte oft vorkommende Coefficienten unendlicher Reihen nebst ihren Logarithmen.

IX. Potenzen-Tafel, enthaltend:

A. Die ersten 11 Potenzen aller Zahlen von 0.01 bis 1,00.
B. Die ersten 9 Potenzen aller Zahlen von 1 bis 100.
C. Die ersten 3 Potenzen aller Zahlen von 1 bis 1000.
D. Die ersten 100 Potenzen von 1,01; 1,02; 1,025; 1,0275; 1,03; 1,0325; 1,035; 1,0375; 1,04; 1,045; 1,05 und 1,06.
E. Die ersten 100 Potenzen von $\frac{1}{1,01}$; $\frac{1}{1,02}$; $\frac{1}{1,025}$; $\frac{1}{1,0275}$; $\frac{1}{1,03}$; $\frac{1}{1,0325}$; $\frac{1}{1,035}$; $\frac{1}{1,0375}$; $\frac{1}{1,04}$; $\frac{1}{1,045}$; $\frac{1}{1,05}$ und $\frac{1}{1,06}$.
F. Die Summationen der auf einander folgenden Werthe der Tafel *D*.
G. Die Summationen der auf einander folgenden Werthe der Tafel *E*.

Angehängt ist eine Tafel der Zeiten, in denen sich ein durch zusammengesetzte Zinsen wachsendes Kapital vervielfältigt.

X. Mortalitäts-Tafeln.

Angehängt sind zwei Hülfstafeln zur Verwandlung des Duodecimalmaasses in Decimalmaass, und des Decimalmaasses in Duodecimalmaass.

XI. Tafeln zur Vergleichung der gebräuchlichen Maasse und Gewichte.

XII. Erweiterte Gaussische Tafel zur Berechnung eines Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Zahlen, deren Logarithmen nur gegeben sind.

Angehängt ist endlich noch eine Tafel zur Erleichterung des Einschaltens oder Interpolirens unter der Ueberschrift Interpolations-Tafel, und den Beschluss macht eine Tafel einiger oft vorkommenden Zahlenwerthe und der Logarithmen derselben, wie z. B. der Werth von π, log vulg π, log nat π, der Werth von e, log vulg e, log nat e, und mehreres Andere.

Die Tafeln IV, VIII, ein Theil der Tafel IX, die Tafeln X, die Tafeln XI und vor allen die Tafeln XII sind neu hinzugekommen.

Nimmt man hierzu nun noch, dass diese Tafeln auf schönes Papier mit nicht zu kleinen, scharfen und deutlichen Lettern gedruckt sind, wodurch sie sich namentlich vor den Callet'schen Tafeln, deren Druck viel kleiner und, wie Jeder, der diese Tafeln oft und viel gebraucht hat, aus Erfahrung wissen wird, angreifend für die Augen ist, sehr vortheilhaft auszeichnen, so wird man gewiss unsere oben ausgesprochene Ueberzeugung, dass diese Tafeln ein sehr verdienstliches und der Empfehlung sehr würdiges Unternehmen sind, theilen, und auch den Preis jedenfalls sehr mässig finden.

Für möglichst genaue Correctur haben ausser dem Herausgeber die Herren Dr. Brandes und Michaelis Sorge getragen.

Logarithmische Tafeln der Nummer-Logarithmen (1—10000), der Sinus und Tangenten in Graden und Minuten, der Tabelle zur Findung des Log. der Summe oder Differenz zweier Zahlen, welche selbst nur durch ihre Log. gegeben sind, und einiger anderer Hülfstafeln. Auf eine neue Weise geordnet und herausgegeben von *A. Meldola*, Lehrer des kaufmännischen Rechnens und der mathematischen Wissenschaften. Mit einer Vorrede vom Conferenzrath Schumacher. Altona. 1840. 8. 16 ggr.

Herr Conferenzrath Schumacher spricht sich in seinem Vorworte über diese Tafeln auf folgende Art aus: „Herr Meldola wollte die Logarithmen mit 5 Decimalen in einen kleinern Raum bringen, und sie dadurch bequemer zum Gebrauche und wohlfeiler machen. Da gerade diese Logarithmen sehr häufig Anwendung finden, so kann ein solches Unternehmen, gut ausgeführt, nur den Rechnern angenehm sein, und dass er es gut ausführen und vorzüglich für correcten Abdruck sorgen werde, verbürgt sein Fleiss und sein Streben nach Genauigkeit. Die Gaussischen Tafeln um den Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Zahlen zu finden, die selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind, hat er auf den Wunsch des Herrn Geheimeraths Bessel hinzugefügt.“ Dem Urtheile eines so competenten Richters, wie Herr Conferenzrath Schumacher ist, haben wir nur noch hinzuzufügen, dass diese Tafeln auf gutes Papier mit scharfen und deutlichen Lettern gedruckt sind, und gewiss verdienen, von den Rechnern häufig und fleissig gebraucht zu werden.

Tabeller i Mathematiska Åmnen. Utgifne af E. A. Björkman. I Twenne Delar. Förra Delen. Logarithmiska och trigonometriska Tabeller. Stockholm. 1840. 16. 1 Rdr. 36 Sk. (Tafeln über mathematische Gegenstände, herausg. von E. A. Björkman. In zwei Theilen. Erster Theil. Logarithmische und trigonometrische Tafeln).

Populationistik oder Bevölkerungswissenschaft von *Ch. Bernoulli*, Professor zu Basel. Erste Hälfte. Allgemeine Bevölkerungsstatistik oder Verhältnisse der Leben-

den, Gebornen, Verehelichten und Sterbenden. Ulm 1840. 8. 1 Thlr. 21 ggr.
(Gehört der Politischen Arithmetik wegen hierher.)

Geometrie.

Euclids Elemente fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt von J. F. Lorenz. Aufs neue herausgegeben nebst einem Anhange von M. C. Dippe. Sechste verbesserte Ausgabe. Halle 1840. 8. 1 Thlr. 8 ggr.

The Elements of Euclid: viz. the first six Books, together with the Eleventh and Twelfth. Printed with a few Variations, and additional References, from the Text of *R. Simson*, M. D. Carefully corrected by *S. Maynard.* New edit. 18. 6s. bound.

The Elements of Euclid: the first six Books and the Eleventh and Twelfth. Edited, in the Symbolical Form, by *R. Blakelock*, M. A. 18. 6s. 6d. boards; 7s. bound.

The first six Books of the Elements of Euclid, with a Commentary and Geometrical Exercises. To which are annexed a Treatise on solid Geometry, and short Essays on the Ancient Geometrical Analysis, and the Theory of Transversals. For the use of Schools and Universities. By *Dionysius Lardner*, LL. D. 7th. edit. 8. 7s. boards.

Euclidis Proportionslära med förklaringar; utgifwen af P. N. Ekman, Docens i Mathematiken wid Upsala Universitet. Stockholm 1840. 8. 16 Sk. (Euclids Proportionslehre mit Erklärungen; herausgegeben von P. N. Ekman, Docent der Math. an der Univ. zu Upsala).

Lehrbuch der Geometrie als Leitfaden beim Unterrichte an höhern Bürgerschulen und ähnlichen Lehranstalten, von *W. Mink*, Lehrer der Mathematik an der höhern Stadtschule zu Crefeld. Crefeld 1840. 20 ggr.
Ein für seinen Zweck sich recht wohl eignendes elementares Lehrbuch, welches übrigens, was der Titel unerwähnt lässt, auch die Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie enthält.

Lehrbuch der Geometrie für technische Lehranstalten und Gymnasien von H. Rose. Erster Theil. Die ebene Geometrie. Nürnberg 1840. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

System der Geometrie. Lehrbuch für akademische Vorträge und höhere Unterrichts-Anstalten von Dr. A. Arneth. Von den geraden Linien in der Ebene. Erste und zweite Abtheilung. Stuttgart 1840. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

Hauptsächlich den Ansichten von Schweins folgend beabsichtigt der Verf. ein vollständiges System der Geometrie zu liefern, kleidet dieselbe aber gleich vom Anfange an in ein rechnendes Gewand, wodurch freilich ihr schöner synthetischer Character ganz verloren geht, wenn auch auf der andern Seite nicht zu leugnen ist, dass durch den von dem Verf. betretenen Weg allerdings eine Vereinfachung des Systems erreicht wird.

Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien von N. Lobatschewsky. Berlin 1840. 12 ggr.

Anleitung zur Auflösung geometrischer Aufgaben von Dr. Ch. Nagel. Ulm. 1840. 10 ggr.

Ueber die symmetrischen Kreisvielecke von ungerader Seitenzahl von J. H. T. Müller. Gotha 1840. 4. 6 ggr.

Eine sehr lesenswerthe Abhandlung.

Betrachtungen über verschiedene Gegenstände der neueren Geometrie von C. T. Anger, Professor am Gymnasium und Direktor der Königlichen Gewerbeschule zu Danzig. Erstes Heft. Einleitung. Theorie der Aehnlichkeitspunkte. Danzig 1839. 4. 8 ggr.

Der Gedanke, welchem diese Schrift ihre Entstehung verdankt, kann ein sehr glücklicher genannt werden. Herr Professor und Director Anger in Danzig beabsichtigt nämlich, in einzelnen nach und nach erscheinenden Heften verschiedene Gegenstände der sogenannten neuern Geometrie auf eine möglichst elementare Weise zu behandeln, und so die merkwürdigen Entdeckungen von Gergonne, Poncelet, Steiner u. A. einem grössern Publicum auf möglichst leichte Art zugänglich zu machen, wodurch Herr Professor Anger sich unstreitig ein wesentliches Verdienst um die grössere Verbreitung dieses schönen Theils der Mathematik, und dessen sehr zu wünschende Einführung in den geometrischen Elementarunterricht erwerben wird. Zweckmässig würden wir übrigens die völlige Ausschliessung der Anwendung der Lehren der analytischen Geometrie aus diesen Heften finden, deren schnelles Aufeinanderfolgen jedenfalls sehr wünschenswerth ist.

Lefebure de Fourcy: Leçons de Géometrie analytique. 4. édit. 8. 2 Thlr. 21 ggr.

Analytische Geometrie im Raum, enthaltend die Flächen zweiter Ordnung, nebst der allgemeinen Theorie der krummen Flächen und der Linien von doppelter Krümmung von *C. F. A. Leroy*, übersetzt nach der zweiten, verbesserten und vermehrten Auflage von *E. F. Kauffmann*. Stuttgart 1840. 1 Thlr. 9 ggr.

In Nr. 408. der astronomischen Nachrichten (Bd. 17. S. 374).

befindet sich ein höchst lesenswerther Aufsatz des Herrn S. Löwenstern über die Transformation der rechtwinkligen Coordinaten, welcher den Zweck hat, das Auffinden der üblichsten Transformationen der rechtwinkligen Coordinaten zu erleichtern.

Praktische Geometrie.

Francoeur: Géodésie, ou traité de la figure de la terre et de ses parties. 2. édit. 8. 2 Thlr. 21 ggr.

Clerc: Essai sur les élémens de la pratique des levers topographiques. 1. volume. 8. 6 Thlr.

Duhousset: Application de la géométrie à la topographie. 2. édit. Paris. 8. 10 Fr.

An Introduction to Mensuration and Practical Geometry: with Notes, containing the Reason of every Rule. By J. Bonnycastle, late Professor of Mathematics in the Royal Military Academy, Woolwich. 18. edit. corrected and improved by S. Maynard. 4 s. 6 d. bound.

In Nr. 410 der astronomischen Nachrichten (Bd. 18. S. 26.) befindet sich ein Aufsatz des Herausgebers dieses Archivs: Bemerkungen über trigonometrische Nivellements, insbesondere über die terrestrische Strahlenbrechung, von Dr. J. A. Grunert, in welchem der Versuch gemacht wird, eine Methode anzugeben, mittelst welcher man genauere und zuverlässigere Bestimmungen des Coefficienten der terrestrischen Strahlenbrechung erhalten kann, als durch die bisherigen Methoden.

H. L. Smalians, Königl. Preuss. Oberforstmeisters etc. Baumhöhenmesser und einfaches Verfahren der Baummessung und Holzberechnung für Forstmänner, Bauherrn und Holzhändler. Stralsund 1840. 12 ggr.

Enthält die Beschreibung eines sehr einfachen Baumhöhenmessers, der zugleich auch als Kreuzscheibe gebraucht werden kann, und den der Herausgeber aus eigener Kenntniss und nach selbst gemachtem Gebrauche empfehlen kann. Er ist in der Löffler'schen Verlagshandlung zu Stralsund für den sehr geringen Preis von 1 Thlr. 15 Sgr. zu haben, und dürfte selbst ein für Schulen instructives, sinnreich eingerichtetes Instrument seyn. Seine Theorie setzt nur die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke voraus und der obigen Beschreibung wird ein Exemplar auf starkem Kartenpapier beigegeben.

Trigonometrie.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie und Polygonometrie von Friedrich Pross. Professor der Mathematik an der Königlichen polytechnischen Schule zu Stuttgart. 1840. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

Eine recht vollständige und sehr deutliche Darstellung der ebenen Trigonometrie und Polygonometrie mit vielen Anwendungen auf Geodäsie und einer grossen Anzahl vollständig ausgerechneter numerischer Beispiele, die zum Theil aus wirklich ausgeführten Messungen entnommen sind, in welcher Beziehung daher das Buch insbesondere Praktikern empfohlen zu werden verdient. Die goniometrischen und cyclometrischen Reihen hat der Verf. auch aufgenommen, dabei aber nie die Bedingungen der Convergenz und Divergenz berücksichtigt, weshalb die Behandlung dieser wichtigen Lehre keineswegs dem neuern Zustande der Mathematik und den jetzigen Anforderungen entspricht. Aber auch abgesehen hiervon müssen wir den auf S. 56 und 57 gegebenen Beweis der bekannten Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ für völlig ungenügend und verfehlt erklären. Von der Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots,$$

die als aus der Analysis bekannt angenommen wird, ausgehend, zeigt nämlich der Verf., dass die Ausdrücke

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \text{ und } \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

die er der Kürze wegen durch M und N bezeichnet, und die Functionen $\cos x$ und $\sin x$ gewisse Eigenschaften, wie z. B.

$$M^2 + N^2 = 1 \text{ und } \cos x^2 + \sin x^2 = 1,$$

ferner $M=1$, $N=0$ für $x=0$, und $\cos x=1$, $\sin x=0$ für $x=0$, mit einander gemein haben, und schliesst dann auf S. 57 auf folgende Art:

„Die Ausdrücke M und N haben also ganz die Eigenschaften von $\cos x$ und $\sin x$, woraus demnach folgt, dass:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x \text{ und } \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin x.$$

Man hat also:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots\text{“}.$$

Daraus aber, dass Functionen gewisse Eigenschaften mit einander gemein haben, kann man doch wohl nicht auf ihre Gleichheit im Allgemeinen schliessen! Solche falsche Schlüsse verwirren nur den Anfänger und erzeugen falsche Begriffe.

Wir können nicht umhin, dem Herrn Verfasser rücksichtlich der Convergenz und Divergenz der Reihen die weiter unten angeführte Stelle aus einem Briefe des leider zu früh verstorbenen trefflichen Abel an seinen Lehrer, den Professor Holmboe in Christiania recht dringend an's Herz zu legen.

In der im Eingange namhaft gemachten Rücksicht wird das Buch aber doch Nutzen stiften.

Die sphärische Trigonometrie in analytischer Darstellung nebst einem Anhange grössten Theils neuer goniometrischer Formeln von Carl Breymann. Wien 1840. 8. 12 ggr.

Die Schrift kann Anfängern wegen ihrer deutlichen und vollständigen Darstellung empfohlen werden. Die Lehre vom sphärischen Excess hätte der Verf. aber doch auch aufnehmen sollen, da dieselbe für die Geodäsie so höchst wichtig ist.

(Die trigonometrischen Tafeln s. unter Arithmetik.)

Mechanik.

De motu corporum libere cadentium. Particula I. historiam hujus scientiae continens. Scripsit Dr. C. G. A. Becker. Vratislaviae 1840. 4. 8 ggr.

Boucharlat: Elémens de Mécanique. 3. édit. 8. 3 Thlr.

Praktische Mechanik.

Die Mechanik oder Anleitung zur praktischen Maschinenkunde und zur Beurtheilung und Leitung bewegender Kräfte. Aus dem Engl. nach Chambers Erziehungs-Cursus übers. vom Professor Dr. Mensing. Erfurt. Gr. 12. 12 ggr.

Allgemeine Maschinen-Encyclopädie, im Verein mit G. Altmüller und A. Burg (Proff. am polyt. Inst. zu Wien), Th. Fischer (Maschinenmeister) und M. F. Gätzschmann (Prof. an der Bergakademie in Freiberg), C. G. Hummel (Lector an der polytechn. Lehranstalt in Copenhagen), K. Karmarsch (Director der Gewerbschule in Hanover), F. Reich (Professor an der Bergakademie in Freiberg), J. Schneider (Prof. am Coll. Carol. in Braunschweig), J. A. Schubert (Prof. an der technischen Bildungsanstalt) und E. Weinlig (Ingenieurlieutenant in Dresden), Dr. A. Weinlig (in Leipzig), J. Weisbach (Prof. an der Bergakademie in Freiberg) herausgegeben von Dr. *Iul. Ambr. Hülsse.* Leipz. 1840. 8. 1. u. 2. Lief. mit Atlas in Folio 5 Thlr. 8 ggr.

Von diesem Werke, welches für praktische Mechanik wichtig zu werden verspricht, sind uns bis jetzt zwei Lieferungen zugegangen, die schon mehrere sehr ausführliche und lehrreiche Artikel enthalten.

Poncelet: Introdnction à la mécanique industrielle physique. 2. édit. 8. 2 Thlr. 16 ggr.

Lanz et Betancourt: Essai sur la composition des machines. 3. édit. 4. 6 Thlr.

D'Anbnisson de Voisins: Traité d'hydraulique à l'usage des ingénieurs. 2. édit. Paris. 8. 9 Frcs.

Piobert et Tardy: Expériences sur les roues hydrauliques à nxe vertical, et sur l'écoulement de l'eau. 8. 1 Thlr. 14 ggr.

Andraud: De l'air comprimé et dilaté comme moteur. Paris. 8. 3 Frcs.

Urban Jürgensens allgemeine Grundsätze der genauen Zeitmessung durch Uhren oder Zusammenfassung der Grundsätze des Uhrenbaues zur sorgfältigsten Zeitmessung, mit einem Anhange versehen, enthaltend zwei Abhandlungen über die Uhrmacherkunst und Beschreibung eines sehr genau gehenden Metallthermometers. Nach der zweiten durch Ludwig Urban Jürgensen besorgten und vermehrten Ausgabe deutsch bearbeitet. Leipzig 1840. 4. 3 Thlr. 12 ggr.

Astronomie.

Traité élémentaire de Physique céleste, ou Précis d'Astronomie théorique et pratique, servant d'introduction à l'étude de cette science, par *G. de Pontécoulant.* Ouvrage, destiné aux personnes peu versées dans l'étude des sciences mathématiques T. I. II. Paris 1840. 8. $4\frac{1}{2}$ Thlr.

Ein gut geschriebenes populäres Lehrbuch der Astronomie, das nur die elementarsten mathematischen Kenntnisse voraussetzt, und für die Liebhaber der französischen Literatur eine willkommene Erscheinung seyn wird, da es die Hauptlehren der Astronomie deutlich und ziemlich vollständig vorträgt. Etwas mehr hätten wir jedoch in einem solchen Buche über die Fixsterne zu finden geglaubt, denen nur das bloss drei Seiten lange dreizehnte Kapitel gewidmet ist. In Deutschland besitzen wir schon mehrere sehr vorzügliche Schriften ähnlichen Inhalts. Dem zweiten Theile sind einige Noten mathematischen Inhalts über die Verwandlung der Rectascension nnd Declination in Länge und Breite und umgekehrt, über die Parallaxenrechnung, über die Bestimmung der grössten Mittelpunktsgleichung der Sonne durch Beobachtungen, über die elliptische Bewegung, über die Berechnung der Planetenbahnen, über das Gesetz der allgemeinen Gravitation, über die Werthe der Massen der Planeten, über die Gestalt der Erde, über die Veränderung der Schwere und der Länge des Secundenpendels beigefügt, in denen wir nichts Neues, was hier einer besondern Mittheilung werth wäre, gefunden haben.

Handbok i Practiska Astronomien af S. A. Cronstrand. Första Häftet. Till ledning under föreläsningarna wid det högre Militär-Läroverket på Marieberg. Stockholm. 1840. 8. 1 Rdr. 32 sk. (Handbuch der praktischen Astronomie von S. A. Cronstrand. Erstes Heft. Zum Leitfaden bei den Vorlesungen an der höhern Militärunterrichtsanstalt auf Marieberg).

Jahrbuch für 1840. Herausgegeben von *H. C. Schumacher*, mit Beiträgen von *Bessel*, *Erman*, *Mädler* und *Olbers*. Stuttgart und Tübingen. 1840. 8. 2 Thlr.

Die Einrichtung des astronomischen Theils dieses Jahrbuchs kann als bekannt vorausgesetzt werden. Die Aufsätze, welche dieser Jahrgang enthält, sind folgende:

Ueber Maass und Gewicht im Allgemeinen und das preussische Längenmaass im Besonderen von F. W. Bessel.

Ueber die Weltstellung der Körper unseres Sonnensystems von Mädler.

Ueber die neuern Sternbilder von Olbers.

Untersuchungen über den Einfluss des Monds auf die Witterung von Mädler.

Ueber meteorologische Beobachtungen auf einer Seereise um die Erde von A. Erman.

Besonders machen wir auf den Aufsatz von Bessel aufmerksam, in welchem ausführliche Nachricht über die Maassregeln ertheilt wird, welche vor Kurzem in Preussen zur Festsetzung der Einheit des preussischen Längenmaasses und Behufs der leichten Erlangung sehr genauer Copien derselben ergriffen worden sind. Ueber diesen wichtigen und allgemein interessanten Gegenstand verbreitet sich auch ein Aufsatz von Bessel in den Astronomischen Nachrichten. Band 17. Nr. 397.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1842. Berlin. 1840. 8. 2 Thlr. 16 ggr.

Enthält folgende Abhandlungen:

Ueber die Einrichtung des Jahrbuchs. Geographische Lage der Hauptsternwarten, zusammengestellt von Dr. Wolfers.

Ueber die Vorausberechnung der Planetendurchgänge.

Ueber zwei nautische Aufgaben. 1. Berechnung der nautischen Aufgaben nach den Grundsätzen der runden Schifffahrt. 2. Die gewöhnlichen Methoden der Seefahrer zur Reduction der Monddistanzen.

In dem letzten Aufsatze sind fünf verschiedene Methoden zur Reduction der Monddistanzen zusammengestellt und bewiesen; die beiden ersten sind völlig genau, die drei letzten sind Näherungsmethoden.

In der Hoffnung, dass vielen Lesern, die dieses treffliche Jahrbuch nicht besitzen, dadurch ein angenehmer Dienst geleistet werden wird, wollen wir im Folgenden das von Herrn Dr. Wolfers mit grosser Sorgfalt und kritischer Genauigkeit zusammengestellte Verzeichniss der Hauptsternwarten nebst ihrer geographischen Lage mittheilen, da dies die Punkte auf der Erdoberfläche sind, deren geographische Positionen gegenwärtig als am genauesten bestimmt angesehen werden können.

Name des Orts.	Geograph. Breite + nördlich — südlich	Länge v. Berlin in Zeit. + westlich — östlich	Östl. Länge von Ferro in Bogen.
Abo	+ 60° 26′ 56″, 8	— 0h 35′ 33″, 3	39° 56′ 49″, 5
Altona	+ 53 32 45, 3	+ 0 13 48, 9	27 36 16, 1
Berlin	+ 52 30 16, 0	0 0 0	31 3 30, 0
Bonn	+ 50 44 8, 6	+ 0 25 8, 5	24 46 22, 5
Bremen	+ 53 4 36, 0	+ 0 18 19, 7	26 28 34, 5
Breslau	+ 51 6 30, 0	— 0 14 34, 4	34 42 6, 0
Brüssel	+ 50 51 10, 8	+ 0 36 7, 0	22 1 45, 0
Cambridge	+ 52 12 51, 8	+ 0 53 12, 0	17 45 30, 0
Christiania	+ 59 54 42, 4	+ 0 10 35, 7	28 24 34, 5
Copenhagen	+ 55 40 53, 0	+ 0 3 16, 3	30 14 24, 8
Cracow	+ 50 3 50, 0	— 0 26 15, 5	37 37 22, 5
Dorpat	+ 58 22 47, 1	— 0 53 19, 5	44 23 22, 5
Dublin	+ 53 23 13, 0	+ 1 18 57, 5	11 19 7, 5
Edinburg	+ 55 57 23, 2	+ 1 6 19, 1	14 28 43, 5
Florenz	+ 43 46 40, 8	+ 0 8 32, 0	28 55 30, 0
Gotha	+ 50 56 5, 2	+ 0 10 39, 1	28 23 43, 5
Göttingen	+ 51 31 47, 9	+ 0 13 49, 0	27 36 15, 0
Greenwich	+ 51 28 39, 0	+ 0 53 35, 5	17 39 37, 5
Hamburg	+ 53 33 5, 0	+ 0 13 40, 9	27 38 16, 5
Helsingfors	+ 60 9 42, 3	— 0 46 16, 0	42 37 30, 0
Königsberg	+ 54 42 50, 4	— 0 28 25, 0	38 9 45, 0
Kremsmünster	+ 48 3 24, 0	— 0 2 56, 9	31 47 43, 5
Mannheim	+ 49 29 13, 7	+ 0 19 44, 1	26 7 28, 5
Marseille	+ 43 17 49, 0	+ 0 32 6, 0	23 2 0, 0
Mailand	+ 45 28 0, 7	+ 0 16 49, 2	26 51 12, 0
München	+ 48 8 45, 0	+ 0 7 9, 0	29 16 15, 0
Neapel	+ 40 51 46, 6	— 0 3 24, 8	31 54 42, 0
Nicolajew	+ 46 58 20, 6	— 1 14 19, 6	49 38 24, 0
Padua	+ 45 24 2, 0	+ 0 6 5, 7	29 32 4, 5
Palermo	+ 38 6 44, 0	+ 0 0 9, 9	31 1 1, 5
Paramatta	— 33 48 49, 8	— 9 10 30, 8	168 41 12, 0
Paris	+ 48 50 13, 0	+ 0 44 14, 0	20 0 0, 0
Petersburg	+ 59 56 31, 0	— 1 7 44, 0	47 59 30, 0
Pulkowa	+ 59 46 18, 0	— 1 7 49, 2	48 0 48, 0
Prag	+ 50 5 18, 5	— 0 4 9, 3	32 5 49, 5
Rom	+ 41 53 54, 0	+ 0 3 40, 8	30 8 18, 0
Speyer	+ 49 18 55, 2	+ 0 19 49, 0	26 6 15, 0
Stockholm	+ 59 20 31, 0	— 0 18 39, 3	35 43 19, 5
Turin	+ 45 4 6, 0	+ 0 22 47, 1	25 21 43, 5
Upsala	+ 59 51 50, 0	— 0 16 59, 3	35 18 19, 5
Vorgeb. d. g. H.	— 33 56 3, 0	— 0 20 19, 5	36 8 22, 5
Warschau	+ 52 13 1, 0	— 0 30 17, 0	38 7 45, 0
Wien	+ 48 12 35, 0	— 0 11 56, 4	34 2 36, 0

Jahrbuch der K. Sternwarte bei München für 1840. Herausgegeben von J. Lamont. München. 1840. 12. 1 Thlr.

Astronomisches Jahrbuch für physische und naturhistorische Himmelsforscher und Geologen u. s. w. Herausgegeben von *Fr. v. P. Gruithuisen*, ordentlichem Prof. der Astronomie zu München. Drittes Jahr. München 1840. 8. 2 Thlr. 16 ggr.

Physik.

Lamé: Cours de Physique de l'école polytechnique. 2. édit. 3 Volumes. 6 Thlr. 16 ggr.

Peyré: Cours de Physique. 2. édit. 8. 4 Thlr.

C. Despretz: Traité élémentaire de Physique. 6. édit. Bruxelles. 8. 3 Thlr. 6 ggr.

Pouillet: Elémens de physique expérimentale et de météorologie, ouvrage adopté par le conseil royal de l'instruction publique, pour l'enseignement de la physique dans les établissemens de l'université. 4. éd. Bruxelles. 8. 2 Thlr. 18 ggr.

Becquerel: Traité expérimental de l'électricité et du magnétisme, et de leurs phenomènes naturels. T. V. 2. Partie. T. VI. 1. Partie. 12 Thlr.

Matteucci: Essai sur les phénomènes électriques des animaux. 8. 1 Thlr. 3 ggr.

Dr. G. Delffs: De conditione columnae voltaicae electro-statica. Dissertatio physico-mathematica. Kiliae. 4 ggr.

Die Galvanoplastik oder das Verfahren cohärentes Kupfer in Platten oder nach sonst gegebenen Formen, unmittelbar aus Kupferauflösungen, auf galvanischem Wege zu produciren. Von Dr. M. H. Jacobi, Kaiserl. Russ. Hofrathe u. s. w. St. Petersburg. 1840. 8. 1 Thlr.

Einem Jeden, welcher die durch Herrn Hofrath M. H. Jacobi gemachte höchst wichtige Erfindung der Galvanoplastik genau kennen zu lernen wünscht, kann der Herausgeber diese Schrift aus voller Ueberzeugung empfehlen. Sie ist sehr deutlich verfasst, und enthält auch, gewissermassen als Einleitung für weniger mit der Physik und Chemie bekannte Leser, eine Darstellung der Lehre vom Galvanismus, welches der sehr zu wünschenden weitern und allgemeinern Verbreitung derselben gewiss sehr förderlich seyn wird.

Atlas des Erdmagnetismus nach den Elementen der Theorie entworfen. Herausgegeben von C. F. Gauss und W. Weber. Leipzig. 1840. 4. 3 Thlr. 8 ggr.
Dieses wichtige Werk enthält eine Reihe magnetischer Karten, die durch Herrn Professor Wilhelm Weber und Herrn Doctor Goldschmidt allein nach der von Gauss im dritten Jahrgange der Resultate des magnetischen Vereins bekannt gemachten Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus entworfen worden sind. Die Anzahl der Karten ist 18.

Theorie der Wolken oder Nepheleologie nach ihrem neuesten Standpunkte bearbeitet. Von Anton Gundinger. Wien. 1840. 8. 12 ggr.
Enthält eine populäre Darstellung der bekannten Theorie der Wolken.

Ueber die nicht periodischen Aenderungen der Temperaturvertheilung auf der Oberfläche der Erde in dem Zeitraume von 1789 bis 1838. Eine in der Akademie der Wissenschaften gelesene Abhandlung von *H. W. Dove*, Mitgliede der Akademien der Wissenschaften zu Berlin u. s. w. Berlin 1840. 4. 2 Thlr.
Wichtig für die Meteorologie.

Garnier: Traité de Météorologie ou physique du globe. 2 Vols. 8. 4 Thlr.

Peltier: Météorologie. Observations sur la formation des trombes. Paris. 8. 8 Frcs.

H. Lecoq: Elements de géographie, physique et de météorologie, édition belge par J. W. Schmitz. Bruxelles. 8. 3 Thlr. 18 ggr.

Voyage autour du monde exécuté pendant les années 1836 et 1837 sur la corvette la Bonite commandée par Vaillant. Observations météorologiques. 8. 6 Thlr.

L. F. Wartmann: Mémoire sur les étoiles filantes observées à Genève, dans la nuit du 10 au 11 août 1838. Bruxelles. 8. 16 ggr.

Arago's Unterhaltungen aus dem Gebiete der Naturkunde. 4. Theil. Aus dem Franz. von Dr. C. F. Grieb. Stuttgart. 1840. 1 Thlr. 18 ggr.

Ueber die Berechnung der bei Wägungen vorkommenden Reductionen, von *Etatsrath Schumacher*. Hamb. 1838. 4. 16 ggr.
Diese den wissenschaftlichen Theil des Jahresberichts der mathematischen Gesellschaft zu Hamburg für 1837 bis 1839 bildende Abhandlung scheint erst jetzt in den Buchhandel gekommen zu sein, weshalb wir hier auf dieselbe wegen ihres höchst lehrreichen Inhalts besonders aufmerksam machen. Alles was bei der Ausführung genauer Wägungen dem Physiker und Chemiker zu wissen nöthig ist, findet er nebst zwölf Hülfstafeln zur Erleichterung der auszuführenden Rechnungen in dieser trefflichen Abhandlung beisammen.

Vermischte Schriften.

Oeuvres complètes de *N. H. Abel*, Mathématicien, avec des notes et développements, rédigées par ordre du *Roi* par *B. Holmboe*, professeur de mathématiques à l'université de Christiania, etc. Tome premier, contenant les oeuvres de l'auteur qui ont été publiées auparavant. Tome second, contenant les oeuvres de l'auteur qui n'ont pas été publiées auparavant. Christiania. 1839. 4. 16 Thlr. 16 ggr.

Dieses Werk gehört unstreitig zu den wichtigsten Erzeugnissen der neuern mathematischen Literatur, und alle Mathematiker sind Seiner Majestät dem Könige von Schweden zu dem wärmsten Danke verpflichtet, dass Er den Herrn Professor Holmboe zu Christiania, durch welchen, was gewiss hier besonders bemerkt und hervorgehoben zu werden verdient, Abel zuerst auf die Laufbahn, die er nachher mit so grossem Ruhme verfolgt hat, geführt worden ist, in den Stand gesetzt hat, die Arbeiten eines der ersten Mathematiker der neuern Zeit zu sammeln, und in einer ihrem trefflichen Inhalte völlig entsprechenden äussern Gestalt der gelehrten Welt vor Augen zu legen, eine Aufgabe, welcher sich Herr Professor Holmboe mit einer Liebe und Sorgfalt entledigt hat, die der grössten und wärmsten Anerkennung werth ist.

Der erste Theil enthält, wie schon der Titel besagt, lauter Abhandlungen, die schon früher, theils in dem Crelle'schen Journal, Theil I—IV, theils in Nr. 138 und 147 der Astronomischen Nachrichten abgedruckt worden sind; alle sind aber hier von dem Herrn Herausgeber in französischer Sprache geliefert worden, wodurch sich derselbe um die grössere und allgemeinere Verbreitung dieser wichtigen Schriften ein wesentliches Verdienst erworben hat. Ausserdem sind in diesem ersten Theile noch Nachrichten über Abels Leben enthalten, die sich zum Theil auch schon in Crelle's Journal, Theil IV. S. 402 finden, und daher hier als bekannt vorausgesetzt werden können. Bemerken wollen wir jedoch, dass Herr Professor Holmboe einen an diesem Orte sich findenden Irrthum jetzt berichtigt. A. a. O. wird nämlich der 25. August 1802 als Abels Geburtstag angegeben, welches aber nach des Herrn Professor Holmboe Angabe dahin zu berichtigen ist, dass Abel vielmehr am 5. August 1802 zu Findöe in der Diöcese Christiansand, wo sein Vater Sören Georg Abel Prediger war, das Licht der Welt erblickt hat.

Der zweite Theil enthält, mit Ausnahme einiger wenigen, die früher in dem Magazin for Naturvidenskaberne für 1823 nnd 1825, in Det kongelige norske Videnskabersselskabs Skritter. Trondhjem. 1827., nnd in dem 5ten und 6sten Theile des Crelleschen Journals erschienen sind, bis jetzt noch ungedruckte Abhandlungen, weshalb wir dessen Inhalt hier vollständig angeben wollen:

I. Sur les maximums et minimums des intégrales aux différences.

II. Sur les conditions nécessaires pour que l'intégrale finie d'une fonction de plusieurs, variables et de leur différences soit intégrable etc.

III. De la fonction $\Sigma(\frac{1}{x})$.

IV. Les fonctions transcendantes $\Sigma(\frac{1}{a^2})$, $\Sigma(\frac{1}{a^3})$, ... $\Sigma(\frac{1}{a^n})$ exprimées par des intégrales définies.

V. Sur l'intégrale definie $\int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{c-1}\,(l\frac{1}{x})^{a-1}\,.\,dx$.

VI. Sommation de la série $y=\varphi(o)+\varphi(1)\,.\,x+\varphi(2)\,.\,x^2+\ldots+\varphi(n)\,.\,x^n$, n étant un nombre entier positif fini ou infini et $\varphi(n)$ une fonction algébrique rationelle de n.

VII. L'intégrale finie $\Sigma^n\,\varphi(x)$ exprimée par une intégrale définie simple.

VIII. Proprietés remarquables de la fonction $y=\varphi(x)$ déterminée par l'équation $fy\,.\,dy-dx\,\sqrt{\{(a-y)\,(a_1-y)\,(a_2-y)\ldots(a_n-y)\}}=0$, fy étant une fonction quelconque de y qui ne devient pas zéro ou infinie lorsque $y=a$, a_1, a_2, ... a_n.

IX. Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendautes.

X. Extension de la théorie précédente.

XI. Sur la comparaison des fonctions transcendantes.

XII. Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes.

XIII. Sur quelques intégrales définies.

XIV. Théorie des transcendantes elliptiques.

Chapitre I. Réduction de l'intégrale $\int\frac{Pdx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}}$ par des fonctions algébriques.

Réduction de l'intégrale $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$.

Réduction de l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$.

Chapitre II. Réduction de l'intégrale $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ par des fonctions logarithmiques.

Problème I. Exprimer l'intégrale $\int\frac{(k+k'x)\,dx}{\sqrt{R}}$ par le plus petit nombre possible d'intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

Problème II. Trouver les conditions nécessaires pour que

$$\int\frac{x^m+k^{(m-1)}\,x^{m-1}+\ldots+k'x+k}{x^m+l^{(m-1)}\,x^{m-1}+\ldots+l'x+l}\,.\,\frac{dx}{\sqrt{R}}=A\,.\,\log(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}).$$

Problème III. Trouver toutes les intégrales de la forme $\int\frac{(k+x)\,dx}{\sqrt{R}}$ qui peuvent être exprimées par la fonction $A\,.\,\log\,(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}})$.

Problème IV. Trouver toutes les intégrales de la forme $\int(\frac{x+k}{x+l})\,.\,\frac{dx}{\sqrt{R}}$ qui peuvent s'exprimer par la fonction logarithmique $A\,.\,\log\,(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}})$.

Chapitre III. Sur une relation remarquable qui existe entre plusieurs intégrales de la forme

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}},\ \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}\ \text{et}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

Réductions des transcendantes elliptiques de troisième espèce par rapport au paramètre. Méthode de trouver une infinité de formules de réduction pour les transcendantes elliptiques de la troisième espèce.

XV. Sur la résolution algébrique des équations.

§. 1. Détermination de la forme générale d'une expression algébrique.

§. 2. Détermination de l'équation la moins élevée à laquelle peut satisfaire une expression algébrique donnée.

§. 3. Sur la forme de l'expression algébrique qui peut satisfaire à une équation irréductible d'un dégré donné.

XVI. Démonstration de quelques formules elliptiques.

XVII. Méthode générale de trouver des fonctions d'une seule quantité variable lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables indépendantes.

XVIII. Résolution de quelques problèmes à l'aide d'intègrales définies.

1. La valeur de l'expression $\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})$.
2. Les nombres de Bernoulli exprimés par des intégrales définies, d'ou l'on a ensuite déduit l'expression de l'intégrale finie $\Sigma\varphi(x)$.

XIX. Sur l'équation différentielle $dy=(p+q\,y+r\,y^2)dx$ où p, q et r sont des fonctions de x seul.

XX. Sur l'équation différentielle $(y+s)dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0$.

XXI. Détermination d'une fonction au moyen d'une équation qui ne contient qu'une seule variable.

XXII. Note sur la fonction

$$\psi x=x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}.$$

XXIII. Extraits de quelque lettres de l'auteur à Mr. Crelle.

XXIV. Lettre de l'auteur à Mr. Legendre.

XXV. Extraits de quelques lettres de l'auteur à l'éditeur. Notes et développements de l'éditeur.

Für jetzt möge diese Inhaltsanzeige des vorliegenden wichtigen Werks genügen. Jedoch können wir nicht umhin, die folgende Stelle aus einem unter dem 16. Januar 1826 von Berlin aus an den Professor Holmboe geschriebenen Briefe Abels hier auszuheben, weil dieselbe als ein gewiss sehr wahres und im höchsten Grade zu beherzigendes Urtheil aus dem Munde eines der ersten Mathematiker der neuern Zeit über einen der wichtigsten Theile der Analysis die grösste Beachtung verdient, und es sehr Noth thut, denselben immer besser und schärfer zu begründen, obgleich von mehreren neuern Mathematikern allerdings schon manches Treffliche in dieser Beziehung geleistet worden ist.

Ueber die Lehre von den unendlichen Reihen lässt sich nämlich Abel auf folgende Art aus:

Les séries divergentes sont en général quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on se soit avisé d'y fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes. Peut-on imaginer rien de plus horrible que de débiter

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \text{etc.}$$

où n est un nombre entier positif? Enfin mes yeux se sont dessillés d'une manière frappante, car à l'exception des cas les plus simples, par exemple les séries géométriques, il ne se trouve dans les mathématiques presque aucune série infinie dont la somme est déterminée d'une manière rigoureuse. c'est-à-dire. la partie la plus essentielle des mathématiques est sans fondement. Pour la plus grande partie les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. Je m'occupe a en chercher la raison. problème très intéressant. Je ne crois que tu pourras me proposer qu'un très petit nombre de problèmes ou de théorèmes contenant des séries infinies, à la démonstration desquels je ne pourrais faire des objections bien fondées. Fais cela, et je te répondrai. Pas même la formule binôme n'est encore rigoureusement démontrée. J'ai trouvé qu'on a

$$(1+x)^m = 1 + m\,x + \frac{m(m-1)}{2}\,x^2 + \ldots$$

pour toutes valeurs de m, lorsque x est moindre que l'unité. Lorsque x est égal à $+1$, la même formule a lieu, mais seulement si m est plus grand que -1, et lorsque x est égal à -1, la formule n'a lieu que pour des valeurs positives de m. Pour toutes les autres valeurs de x et de m la série $1 + m\,x +$ etc. est divergente. Le théorème de Taylor, base de tout le calcul infinitésimal. n'est pas mieux fondé. Je n'en ai trouvé qu'une seule démonstration rigoureuse, et celle ci est de Mr. Cauchy dans son Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, où il a démontré qu'on aura

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi x + \alpha \cdot \varphi' x + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \varphi'' x + \ldots$$

tant que la série est convergente; mais on l'emploie à l'ordinaire sans façon dans tous les cas.

La théorie des séries infinies en général est jusqu'a présent très mal fondée. On applique aux séries infinies toutes les opérations, comme si elles étaient finies; mais cela est-il bien permis? je crois que non. Où est il démontré qu'on obtient la différentielle d'une série infinie en en prenant la différentielle de chaque terme? Rien n'est plus facile que de donner des exemples où cela n'est pas juste; par exemple

$$\frac{x}{2} = \sin x - \tfrac{1}{2} \sin 2x + \tfrac{1}{3} \sin 3x - \text{etc.};$$

en différentiant on obtient

$$\tfrac{1}{2} = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \text{etc.}$$

résultat tout faux, car cette série est divergente.

La même chose a lieu par rapport à la multiplication et à la division des séries infinies. J'ai commencé à examiner les règles

les plus importantes qui (à présent) sont ordinairement approuvées à cet égard, et à montrer en quels cas elles sont justes ou non. Cela va assez bien et m'intéresse infiniment.

Die Mittheilung dieses bemerkenswerthen Urtheils Abels über den Zustand des grössten Theils der Theorie der Reihen geschieht hier aus einem doppelten Grunde: eines Theils, weil es dem Herausgeber dieses Archivs wie aus der Seele geschrieben ist, und derselbe ganz ähnliche Ansichten schon in mehreren seiner Schriften, wie z. B. in der Vorrede zu den Elementen der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie. Leipzig. 1837. geäussert hat; andern Theils, weil nichts mehr als diese Worte Abels geeignet ist, die Ansichten deutlich zu bezeichnen, welche den Herausgeber bei den die Lehre von den Reihen betreffenden Artikeln dieses Archivs in der Folge beständig leiten werden.

Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik von J. A. Grunert. Zweiter Theil. Brandenburg. 1840. 4. 3 Thlr.

Dieser 2te Theil enthält die folgenden Abhandlungen:

Ueber eine Aufgabe aus der Lehre von den Kegelschnitten.

Ueber die Bestimmung der Brechungsverhältnisse.

Analytische Untersuchungen über die continuirlichen Brüche. (Erste Abtheilung).

Völlig elementarer und strenger Beweis des Satzes vom Parallelogramme der Kräfte und des Gesetzes des Hebels.

Bestimmung der Polhöhe, der Zeit und des Azimuths ohne Uhr bloss mittelst eines Azimuthal-Theodoliten.

Ueber die höhern Differentiale der Kreisfunctionen.

Nachtrag zu der Abhandlung über die Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte, und über die Berechnung der Bahnen der Doppelsterne. (Thl. I. S. 169).

Elementare Entwickelung der Theorie des einfachen Pendels.

Ueber das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Ueber das Problem von Douwes.

Bestimmung der Polhöhe durch das Passagen-Instrnment.

Ueber die Lehre vom Einschalten.

Jahres-Bericht der Hamburger Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse. Vom 3. März 1839 bis zum 3. März 1840. 4.

Enthält als wissenschaftlichen Theil die beiden folgenden lesenswerthen Aufsätze:

Aufgabe. Ein gegebenes hohles Ellipsoid ist zum Theil mit einer gegebenen Masse Wasser gefüllt. Es soll die Gleichung der Curve gefunden werden, in welcher die Horizontalebene der Oberfläche des Wassers das Ellipsoid bei jeder beliebigen Lage desselben schneidet. Der Verfasser hat sich nicht genannt.

Aufgabe. Es wird eine Reihe von $n+1$ Zahlen gesucht, von der Eigenschaft, dass, wenn sämmtliche Glieder der Reihe, jedes Glied für sich, quadrirt werden, jede beliebige Summe der quadrirten Glieder vom ersten Gliede, inclusive desselben angerechnet, wieder eine rationale Quadratzahl werde. Von Herrn Hauptmann Wertheim.

Mémoires (nouveaux) de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles. Tome XII, un

fort volume in 4° avec gravures et lithographies noires et coloriées. 4 Thlr.

Dieser neueste Band enthält die folgenden mathematischen und physikalischen Abhandlungen:

Pagani: Mémoire sur quelques transformations générales.

Quetelet: Sur la longitude de l'Observatoire à Bruxelles.

— Sur l'état du magnétisme terrestre.

— Catalogue des principales apparitions d'étoiles filantes.

— Résumé des observations météorologiques et des observations sur les températures de la terre, faites en 1838, à l'observatoire de Bruxelles.

Crahay: Résumé des observations météorologiques faites à Louvain en 1838.

Minkelers: Observations météorologiques.

Martens: Mémoire sur la pile galvanique.

Vermischte Schriften von Friedrich Theodor Schubert. Neue Folge. Erster, Zweiter und Dritter Band. Leipzig. 1840. 8.

Die Art und Weise, wie diese Schriften eines verstorbenen berühmten Mathematikers und Astronomen verfasset sind, kann aus den früher erschienenen vier Theilen derselben als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden. Auch die jetzt erschienenen neuen drei Theile enthalten in klarer und fliessender Sprache geschriebene populäre Aufsätze über Gegenstände der Astronomie und Physik, wie z. B. über die Kometen; über das Planetensystem; über die Fixsterne; über die Milchstrasse; über die Nebelflecke. veränderlichen Sterne, neue Sterne und die Doppelsterne; über den Kalender; über den Schall, über die Blitzableiter und über den Schlaf. Dem ersten Theile ist das Bildniss des Verfassers beigegeben.

Gebildete Leser werden gewiss auch aus diesen wie aus den früher erschienenen Theilen mannigfaltige Belehrung und Unterhaltung schöpfen können.

Für Mathematiker, namentlich für Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten, dürfte insbesondere der im dritten Theile befindliche, vorher absichtlich noch nicht namhaft gemachte Aufsatz „Ueber den „Nutzen der Mathematik,“ der uns manche gute und pädagogisch wichtige Bemerkungen zu enthalten scheint, von Interesse seyn. Zur Ergötzlichkeit unserer Leser führen wir aus diesem Aufsatze an, wie sich der berühmte Joseph Scaliger, voll Neid und Ingrimm gegen den als Mathematiker besonders durch seinen Commentar zu den Elementen des Euclides berühmten und verdienten Jesuiten Clavius, dem die Verbesserung des Kalenders aufgetragen war, nach welcher Scaligern selbst gelüstet hatte, über diesen und in seinem ungezügelten Zorn über die Mathematiker überhaupt auslässt. Seine eignen Worte lauten folgendermassen: „Putabam Clavium esse aliquid: il est confit en mathématiques, sed nihil aliud scit. Tento est, bene bibit. Asinus qui praeter Euclidem nihil scit. C'est un gros ventre d'Allemand. Est Germanus, un esprit lourd et patient; et tales esse debent mathematici; praeclarum ingenium non potest esse magnus mathematicus.“ Schubert fügt ganz richtig hinzu: „Solche Angriffe verdienen keine Widerlegung, sie beschimpfen nur den, der sie macht.“

II.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik.

In den Hallischen Jahrbüchern für deutsche Wissenschaft und Kunst 1841. Nr. 67. findet man sehr lesenswerthe Erinnerungen an B. F. Thibaut von A. Tellkampf.

In den Blättern aus der Gegenwart für nützliche Unterhaltung und wissenschaftliche Belehrung von Diezmann. 1841. Nr. 12. S. 113. findet man interessante Züge aus Arago's Leben, besonders über seine Erlebnisse auf Majorca im Jahre 1808 bei Gelegenheit seiner Gradmessung.

Nella solenne inaugurazione della statua di Galileo, rime degli arcadi della colonia alfea, offerte in omaggio agli scienziati italiani nel lor primo congresso in Pisa nell' ottobre 1839. Pisa. 8.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

D. F. Hecht: Lehrbuch der Arithm. und Geom. Zum Gebrauche bei dem Unterr. an den Bergschulen. Erster Cursus. Gemeine Arithm. 2te Auflage. Freiberg. 1841. 8. 8 ggr.

Lehrbuch der Mathematik und Physik für staats- und landwirthschaftliche Lehranstalten nnd Kameralisten überhaupt, von J. A. Grunert. Leipzig. 1841. Erster Theil. Erste Abth. Elemente der theoretischen und praktischen Arithmetik. Zweite Abth. Politische Arithmetik. gr. 8. 3 Thlr. 1 ggr.

Der zweite Theil wird in zwei Abtheilungen die Geometrie mit Einschluss der Stereometrie, die ebene Trigonometrie und die Geodäsie, der dritte ebenfalls in zwei Atheilungen die Physik, insbesondere auch die Meteorologie enthalten.

Leçous de mathématiques. Par l'Abbé Bordès. Paris. 8.

Cours de mathématiques pures. Par N. Didiez. Paris. 4. 10 Fr.

Leçons élémentaires de mathématiques, comprenant arithmétique, algèbre, géométrie, trigonometrie, statique. Par Poirrier. 2 Vol. 8.

Eléments de mathématiques et de cosmographie. Par Coince. 8. 4 Fr.

Cours d'arithmétique, de géometrie et de trigonometrie, à l'usage des sous-officiers du corps royal de l'artillerie. 12. Paris. 4 Fr.

Cours de mathématiques, à l'usage de l'ingenieur civil. Par Adhémar (Application de géométrie descriptive. Ombres). 8. 15 Fr.

Corso di Matematica. Di Picardi. Napoli. 1839. 8.

Dizionario delle scienze matematiche pure ed applicate, compilato da una società di antichi allievi della scuola politecnica di Parigi, sotto la direzione di A. S. de Montferrier. Prima versione italiana con numerose aggiunte e correzioni del dottor Giuseppe Gasbarri e di Giuseppe François. Firenze. 1840. 8.

Arithmetik.

A. Kummer: Die Zahlenrechnung in Beispielen und Aufgaben. Für Bürger- und Volksschulen bearbeitet. 2te Aufl. Dresden. 1840. 8. 16 ggr.

Eine recht sehr zu empfehlende, äusserst reichhaltige Sammlung arithmetischer Aufgaben bis zu den Proportionsrechnungen, die sich fast immer auf eine sehr zweckmässige Weise an naturwissenschaftliche, historische, geographische, statistische, technische und andere ähnliche Gegenstände anschliessen, weshalb wir auf diese gewiss recht sehr beachtungswerthe Sammlung alle Bürger- und Volksschulen, so wie auch die Gymnasien zum Gebrauch in den untern Klassen besonders aufmerksam machen. Die Resultate sind, was auch zweckmässig ist, von den Aufgaben abgesondert uud können in ein besonderes Heft gebunden werden.

Anweisung zur Berechnung einer Zahl, in Zeit von einer Stunde bis auf 20 Ziffern, als Quadrat oder als Quadratwurzel, als Cubus oder als Cubikwurzel, sowohl in Decimal- als Duodecimalzahlen, nebst anderweitigen Vergleichungen uud Beispielen. Von Dr. J. H. Suhr. Bremen. 1840. 4. 10 ggr.

Man stosse sich nicht an den etwas prunkenden Titel. Die kleine Schrift verdient wohl gelesen zu werden.

Questions in Arithmetic, comprising Examples in all the Rules of that Science, with an Appendix, containing Problems in those branches of Mechanics and Hydrostatics which are required for the ordinary B. A. Degree. By James Harris. Cambridge. 1840. 12. 3 s. 6 d.

Hotson's Principles of Arithmetic, containing a variety of examples for Practice. Second edition. 12. 4 s. Camb. 1840.

Hind's Principles and Practice of Arithmetic, comprising the Nature and Use of Logarithms etc. Third edition. 12. 4s. 6 d. Camb. 1840.

White's practical System of mental Arithmetic; or a New Method of making calculations by the Action of a Thought. 3d Edit. 12. 3 s. 6 d. bound.

A Manual of Logarithms and Practical Mathematics by James Trotter. Edinburgh. 1840. 12. 4 s. 6 d. half-bound.

Trattato elementare di Aritmetica. Edizione seconda messa in un nuovo ordine ad uso degli allievi de' fratelli delle scuole cristiane. Torino. 1840. 12.

M. Rühlmann: Logarithmisch-trigonometrische und andere nützliche Tafeln. Zunächst für Schüler gewerblicher Bildungsanstalten, so wie für praktische Rechner überhaupt. 2te Stereotyp-Ausgabe. Dresden u. Leipzig. 1840. 12. 12 ggr.

Alle Logarithmen auf 6 Decimalen; die Logarithmen der Zahlen bis 10080; die Logarithmen der trigonometrischen Linien für die Winkel von Minute zu Minute; überall mit Beifügung der Differenzen. Natürliche trigon. Linien von 10 zu 10 Minuten. Länge der Kreisbogen. Tafeln für das Höhenmessen mit dem Barometer von Gauss. Specifische Gewichte. Trigonometrische Formeln. — Guter Druck und wohlfeiler Preis empfehlen dieses kleine Buch zu dem beabsichtigten Zwecke.

Tables of the Logarithms of numbers, and of Sines, Tangents and Secants, to six Places of Decimals. By Edward Riddle. 8. 2 s. 6 d. cloth.

Mémoire relatif à la théorie des nombres. Loi réciproque. Par Brennecke. Paris. 4.

Whewell's doctrine of Limits, with its applications, namely, the first three sections of Newton, conic sections, the differential calculus. Camb. 1841. 9 s.

J. A. Arndt: Beispiele und Aufgaben aus allen Theilen der Arithmetik und Algebra. Leipzig. 1840. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

Ein für Lehrer der Mathematik an Gymnasien etc. recht sehr zu empfehlendes Buch.

E. Heis: Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. 2te Aufl. Köln. 1840. 8. 1 Thlr.

Diese Sammlung erstreckt sich ungefähr über denselben Kreis wie Meier Hirsch.

A. Hartrodt: Lehrbuch der in den Gymnasial-Unterricht gehörenden allgemeinen Arithmetik. Leipzig. 1840. 8. 21 ggr.

Die den einzelnen Abschnitten beigefügten Uebungsbeispiele und auch die ganze Behandlung empfehlen dieses Buch. Ueber die Convergenz der Reihen kommt indess nichts nur einigermassen Genügendes vor. und Bemerkungen, wie z. B. die auf S. 209: „Um „einige der obigen Binomialformen zur annähernden Berechnung „irgend eines bestimmten Zahlenwerthes zu gebrauchen, müssen die „Reihen convergent sein, d. h. die nachfolgenden Glieder „immer kleiner und kleiner werden," wären lieber ganz zu unterdrücken gewesen, da z. B. die Reihe 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ..., deren Glieder auch immer kleiner und kleiner werden, bekanntlich keine convergirende, sondern vielmehr eine divergirende Reihe ist.

P. J. E. Finck (Prof. zu Strassburg): System der niedern und höhern Algebra für höhere polytechnische Lehranstalten. Leipzig. 1841. 8. 2 Thlr.

Ein sehr gutes Buch, das manche auf eigenthümliche Weise dargestellte Lehren enthält. Ob dasselbe eine Uebersetzung aus dem Französischen ist, ist nicht gesagt; es scheint aber so, insbesondere wenn man einige Noten, namentlich die auf S. 245 vorkommende am Ende, berücksichtigt. Jedenfalls war das Buch einer Uebersetzung werth. Eine Sammlung zweckmässiger Uebungsaufgaben ist auch beigegeben, auf S. 465—474.

Mayer et Choquet: Traité élémentaire d'algèbre. 3me éd. Paris. 1840. 8. 7 Fr. 50 c.

Wood's Elements of Algebra. Eleventh edition, with Notes, additional Propositions and Examples by **Lund**. Camb. 1841. 8. 12 s. 6 d.

Hind's Introduction to the Elements of Algebra, being a Sequel to the Principles and Practice of Arithmetic. Camb. 1840. 12. 5 s.

The Elements of Algebra, designed for the use of Schools. By J. H. **Colenso**. 2d Ed. London. 1840. 12. 7 s. cloth.

Elements of Algebra. By **Robert Wallace**. New edition. London. 1840. 8. 2 s. 6 d. cloth.

Hall's (Rev. J. G.) Elements of Algebra, for Schools and Colleges. Lond. 1840. 8. 6 s. 6 d.

Elements of Algebra, to the end of simple equations, for the use of Harrow school. 1840. 12. 3 s. 6 d.

Wright's Supplement to Elementary Algebra. 1840. 12. sewed. 2 s. 6 d.

A. van Bemmelen: Lessen over de Algebra of Stelkunst, ten gebruike der Latijnsche Scholen en Gymnasien. Amsterdam. 1840. 8.

Paalzow: Die Gleichungen des dritten Grades mit einer Unbekannten, methodisch abgehandelt. Prenzlau. 1841. 4. (Programm des Gymnasiums zu Prenzlau von Ostern 1841 von dem Director des Gymnasiums, Herrn Paalzow).

M. A. Stern: Ueber die Auflösung der transcendenten Gleichungen. Eine von der K. Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften gekrönte Preisschrift. (Besonders abgedr. aus Crelle's Journal für die Mathem. Bd. XXII.) Berlin. 1841. 4. 16 ggr.

Schon der Umstand, dass dieser Schrift von der K. Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften der Preis zuerkannt worden ist, spricht hinreichend für die Wichtigkeit der darin enthaltenen Untersuchungen.

Hymers's Treatise on the Theory of algebraical Equations. Second edition. Camb. 1840. 8. 9 s. 6 d.

Sulle equazioni di terzo e quarto grado, memoria di Vittorio de la Casa. Ad uso dei geometri principianti. Padova. 1840. 4.

Nuove ricerche sulla risoluzione generale delle equazioni algebriche del p. Girolamo Badano carmelitano scalzo professore di matematica nella regia università di Genova. Genova. 1840. 4.

Sui Problemi di Analisi indeterminata; osservazioni analitiche dell' abate G. A. Longoni. Monza. 1840. 4.

Die Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus einer oder mehreren beliebig beschränkten Elementen-Reihen nebst ihrer Anwendung auf Analysis und Wahrscheinlichkeits-Rechnung von L. Oettinger. Freiburg. 1840. 16 ggr.

Für die weitere Ausbildung der combinatorischen Analysis und für die Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtig.

Dobson's Illustration of the Binomial Theorem. Cambridge. 1840. 4. 1 s. 6 d.

Die Hauptsätze der Differenzialrechnung nach einer neuen, elementaren Methode dargestellt von J. W. Scheibert. Berlin. 1840. 8. 16 ggr.

Da der Vf. die grossen Fortschritte, welche in neuester Zeit vorzüglich durch Cauchy und Andere in Bezug auf die schärfere Begründung der Differenzialrechnung gemacht worden sind, ganz ignorirt, insbesondere auf die Bedingungen der Convergenz und Divergenz der

Reihen auch nicht die mindeste Rücksicht nimmt, so kann dieses Buch auf einen wissenschaftlichen Werth keinen Anspruch machen. Auch wissen wir nicht, worin die neue elementare Methode, von der auf dem Titel die Rede ist, bestehen soll, da von der Entwickelung einer Function in eine Reihe nach der so ungenauen und einer Unzahl von Zweifeln unterliegenden Methode der unbestimmten Coefficienten ausgegangen wird, und die in §. 1. gegebene Erklärung des Differentials im Wesentlichen ganz mit dem Lagrange'schen Begriffe oder vielmehr dem, welchen Lacroix in seinem bekannten grösseren Werke gebraucht, zusammenfällt.

Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. A. L. Cauchy. Par M. l'Abbé Moigno. Tome 1. Calcul différentiel. Paris 1840. 8. 2 Thlr. 20 ggr.

Wir halten dieses Werk, dessen Zweck durch seinen Titel hinreichend bezeichnet wird, für eine sehr wichtige und sehr zu beachtende Erscheinung auf dem Gebiete der Literatur der höhern Analysis, weil man die neuen wichtigen Untersuchungen Cauchy's, vorzüglich über die schärfere Begründung der höheren Analysis und ihrer Anwendung auf die Geometrie im Allgemeinen, über die Convergenz und Divergenz der Reihen, über den Rest der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe, über die Convergenz der Lagrange'schen Reihe etc. nirgends so vollständig und gehörig systematisch geordnet beisammen findet, als in diesem Werke, und empfehlen dasselbe daher einem Jeden aus vollster Ueberzeugung, wer sich über diese neuen wichtigen Fortschritte der Wissenschaft möglichst vollständig zu belehren wünscht. Freilich aber erfordert das Studium, wenn man noch nicht an diese Betrachtungsweisen gewöhnt ist, sondern sich früher immer an Lagrange und Lacroix gehalten hat, Zeit, Ausdauer, Anstrengung und Mühe, und mit der Methode der unbestimmten Coefficienten, wie z. B. in der vorigen Schrift, kommt man freilich kürzer weg. Wie unberechenbar gross aber der Vortheil und der Nutzen ist, welchen das sorgfältige Studium eines Werkes, wie z. B. das des Herrn Moigno, gewährt, und wie gross die Klarheit ist, zu welcher man bei gehöriger Ausdauer endlich gelangt, wird ein Jeder an sich selbst bestätigt finden, wenn er nur mit Muth und Kraft an's Werk geht und nicht ermüdet.

Principes de l'Analyse infinitésimale. Par Finck. 1 Fr. 50 c.

Cournot: Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal. 2 Vols. Paris. 1840. 8. 16 Fr.

Lezioni di Introduzione al calcolo sublime di Gaspare Mainardi. Part. I. II. Pavia. 1839.

C. Jürgensen: Differential og Integral-Regning. Copenhagen. 1840. 8.

Mémoire sur les intégrales définies Euleriennes, et sur leur application à la théorie des suites, ainsi qu'a l'évaluation des fonctions de grands nombres. Par Binet. Paris. 4.

Geometrie.

F. W. Looff: Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und höhere Bürgerschulen. 2r Cursus. Stereometrie und (ebene u. sphärische) Trigonometrie. Berlin. 1840. 8. 8 ggr.

A. Huberdt: Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst vielen Aufgaben für Gymnasien und höhere Bürger- und Militairschulen. Berlin. 1841. 8. 1 Thlr.

Besonders durch die recht zweckmässigen Aufgaben empfehlungswerth.

Lehrbuch der Geometrie von K. Snell. Leipzig. 1841. 8. 1 Thlr. 4 ggr.

Wir können den Geist, in welchem dieses Werkchen geschrieben ist, in der Kürze nicht besser charakterisiren, als wenn wir es der bekannten Weise, in welcher B. F. Thibaut die Elemente der Mathematik darzustellen pflegte, an die Seite stellen. Dass der Vf. diese Methode für die einzig wahre und richtige hält, wollen wir ihm nicht verargen, obgleich unsere subjective Ueberzeugung eine völlig verschiedene ist, und empfehlen auch das Buch allen denen, welchen der Weg des Euclides nicht zusagt, recht sehr, da es in seiner Art gut geschrieben ist. Gewundert haben wir uns übrigens ungemein, dass auf einer sächsischen gelehrten Schule (der Verf. ist Lehrer der Mathematik an der Krenzschule zu Dresden), auf denen ja immer das Studium der Alten mit Recht für die Grundlage jeder streng wissenschaftlichen Bildung gegolten hat, und auch die Wissenschaften in deren strengem und sicheren Geiste behandelt und vorgetragen worden sind, die Geometrie in einer von demselben so sehr abweichenden Weise gelehrt wird. Wir müssen offen bekennen, dass wir dies auf einer gelehrten Schule (auf einer Real-, Gewerb- oder höheren Bürgerschule würde sich die Sache anders gestalten) nach unserer Ueberzeugung für keinen Fortschritt des mathematischen Unterrichts halten, lassen indess gern dem Vf. seine Ueberzeugung. Eben so sehr aber, wie wir dies zu thun geneigt sind, hätten wir gewünscht, dass der Vf. in der Vorrede sich etwas milder über die Anhänger der euclidischen Methode ausgesprochen hätte, indem er ja nur hätte bedenken sollen, dass z. B. in England letztere Methode in ihrer strengsten Form ganz allgemein nnd ohne alle Ausnahme für die allein richtige und wahre gehalten wird und auch in Deutschland sehr gewichtige Namen unter ihre Anhänger zählt. Ein Mittelweg scheint uns jedoch auch hier der beste zu sein und hat sich uns durch langjährige und auf sehr verschiedenartigen Lehranstalten gemachte Erfahrungen für die Belebung des mathematischen Unterrichts und für die — was wir hier ausdrücklich bemerken — allgemeine Anregung aller nur einigermassen befähigten Schüler zu mathematischen Beschäftigungen am zweckmässigsten erwiesen, womit auch sehr viele andere erfahrene Lehrer übereinstimmen. Der von dem Vf. in der Vorrede angeregte Erfolg, den Thibaut durch seine Vorlesungen bewirkte (wir gehörten im Jahre 1817 selbst zu seinen Schülern), war allerdings in gewisser Rücksicht ein sehr grosser. Derselbe bestand aber, wie wir glauben, vorzüglich in der Erweckung des Interesses und der Liebe für die elementaren Lehren der Mathematik (wir sprechen hier bloss von einem elementaren Gegenstande, und fassen daher auch nur die dahin einschlagenden Vorlesungen Thibaut's in's Auge) bei schon in den Jahren ziemlich vorgerückten jungen Männern, vorzüglich Theologen, Juristen u. s. w., die grösstentheils ohne alle strenge mathematische Vorbildung auf die Universität kamen, durch eine allerdings höchst ansprechende und in jeder Beziehung wahrhaft kunstreiche Darstellung. Auf einer gelehrten Schule aber, wo die Geistesgymnastik, wenn wir so sagen dürfen, der einzige Zweck ist, welchen der mathematische Unterricht zu erreichen suchen und immer vor Augen haben muss, möchte nach unserer unmaassgeblichen Meinung die Sache doch eine etwas andere Gestalt annehmen.

Cahiers de géométrie élementaire, pour servir de complément au Traité de Legendre. Par Jules Planche. Paris. 8.

Géométrie élémentaire basée sur la théorie des infiniment petits. Par Finck. 2e édit. in 8. 5 Fr.

Geometria ad uso delle scuole della R. Militare Accademia di Sebastiano Vassalli. Edizione seconda. Torino. 1840. 8.

Euclid's Elements, Books I. to VI., XI., XII. by Simson. New edition by Maynard. 18. bound 6 s.; 8. bound 6 s. 6 d. London 1839 et 1841.

The same, in the symbolical form, by Blakelock. 18. bound 6 s. 6 d. Lond. 1840.

The Elements of Euclid, viz the First Six Books, together with the Eleventh and Twelfth. By William Rutherford. London. 1840. 6 s. bound.

F. Märker: Theorie der Parallellinien. Meiningen. 1839. 8. 3 ggr.
Diese Herrn Prof. Kries in Gotha zur Feier seines funfzigjährigen Dienstjubiläums gewidmete Schrift wird hier angezeigt, weil sie jetzt erst in den Buchhandel gekommen zu sein scheint. Uebrigens bemerken wir, dass eine Beurtheilung von Theorieen der Parallellinien in diesem literarischen Berichte in der Regel nicht gegeben werden wird, weil dazu eine dessen Zweck nicht entsprechende zu sehr in's Detail gehende Kritik erforderlich sein würde.

Essai sur la théorie des parallèles. Par Hauy. Paris. 8.

Betrachtungen über verschiedene Gegenstände der neueren Geometrie von C. T. Anger. Zweites Heft. (Anwendungen der Theorie der Aehnlichkeitspunkte auf die merkwürdigen Punkte im Dreiecke und die Apollonischen Berührungs-Aufgaben. Fortsetzung der allgemeinen Betrachtungen). Danzig. 1841. 4. 12 ggr.
Wir freuen uns, schon jetzt die Fortsetzung dieser sehr verdienstlichen Beiträge zur neueren Geometrie anzeigen zu können.

Quadrature du cercle et autres découvertes, par R. le Geay.

Solution géometrique et rigoureuse du problème de la quadrature du cercle, résolue au moyen de la géométrie élémentaire. Paris. 8.

Saggio di ricerche sulla Poligonometria analitica, di Pietro Callegari. Imola. 1839. 8.

Hymers's Treatise on conic sections and the application of Algebra to Geometry. Second edition. Camb. 1840. 8. 7 s. 6 d.

Quadratura dell' Iperbola e rettificazione della Parabola, ottenute con mezzi elementari e con formole finite, memoria letta all' ateneo di Venezia dal dottore Pietro Magrini. Venezia. 1840. 8.

Proprietà principali di alcune curve trascendenti, esposte da Teofrasto Cerchi. Milano. 1840.

Curve a quattro centri, ossia ovali, costrnite per archi di cerchio; memoria dell dott. Lorenzo Tabacchi. Padova. 1841. 8.

Traité de la coupe des pierres. Par Adhémar. 2e édit. Paris. 8.

Traité des ombres. Par Adhémar. Paris. 8. 20 Fr.

H. Simonis: Application de la géométrie descriptive ou traité des ombres. Gand. 1840. 4.

H. Strootman: Beginselen der beschrijvende Meetkunst, bevattende de leerwijze der projectien, de oplossing van werkstukken betrekkelijk de regte lijn, het platte vlak en den bol, benevens eene korte verhandeling over de perspectief en de schaduwen. Te Breda. 1840. 8.

L. S. Kellner: Den beskrivende (descriptive) Geometries anvendte Deel, 3die Hefte. Copenhagen. 1840. 8.

Praktische Geometrie.

Leçons primaires d'agrométrie ou d'arpentage. Par G. Gilliet Damitte. 2e édit.

Conrs de topographie et de géodésie du corps royal d'état-major. Par Salneuve. 8. 8 Fr. 50 c.

Journal spécial des géomètres-arpenteurs, redigé par Boissière. 12. Prix annuel 12 Fr.

Barême-pantomètre, ou Système métrique appliqué à toutes surfaces et à tous solides, depuis un centimètre jusqu'à 10 mètres. Par Fautras. Vendôme. 8.

Géométrie en action, ou Eléments de géometrie appliquée aux arts. Par Barré. 12. Angers.

Ergebnisse der trigonometrischen Vermessungen in der Schweiz. Nach Befehl der Hohen Tagsatzung aus den Protocollen der eidgenössischen Triangulirung bearbeitet und herausgegeben von J. Eschmann, Oberlieutenant im eidgenössischen Oberstquartiermeisterstab. Zürich 1840. 4. 4 Thlr.

Dieses für die Geographie der Schweiz wichtige Werk enthält die Resultate der trigonometrischen Messungen, welche in den letzten dreissig Jahren in der Schweiz angestellt worden sind. Zuerst wird eine geschichtliche Uebersicht der sämmtlichen in dem genannten Zeitraume in der Schweiz angestellten trigonometrischen Vermessungen gegeben, aus welcher sich ergiebt, dass Tralles, Fehr, Stabshauptmann Pestalozzi, Professor Trechsel, Frey, Lüthardt, Wagner, Oberst Buchwalder, welcher im Jahre 1832 auf dem Sentis nach einem 7tägigen Aufenthalte auf diesem Berge vom Blitze getroffen und sein Gehülfe leider das Opfer dieses Ereignisses wurde, Ingenieur Sulzberger, Lieutenant Bruppacher, Osterwald, Professor Huber, Oberstlieutenant Merz, die Majore v. Saussure und Delarageai, Domherr Berchtold, Hofrath Horner, Mechanicus Oeri, Generalmajor Finsler, die Oberstquartiermeister Wurstemberger und Dufour, so wie endlich ganz vorzüglich Oberlieutenant Eschmann zu verschiedenen Zeiten und in verschiedenem Grade bei diesem grossen Unternehmen mitgewirkt haben. Dann folgen die Original-Beobachtungen der Dreieckswinkel erster Ordnung, hierauf die Messung der Grundlinie bei Aarberg (im Ganzen nach der von Schumacher bei der Messung der Basis bei Braack im Jahre 1820 angewandten Methode), dann das Verzeichniss der Dreiecke erster Ordnung, dann die geographischen Ortsbestimmungen der Dreieckspunkte erster Ordnung, dann das Verzeichniss der Dreiecke zweiter Ordnung mit Einschluss der Bestimmungen einiger Punkte dritter Ordnung und der gegenseitigen Azimuthe der Punkte zweiter Ordnung, hierauf das Verzeichniss der geographischen Positionen (mit Einschluss der Höhe über dem Meere) sämmtlicher Punkte, und zuletzt die astronomischen Beobachtungen und die Höhenbestimmungen, bei denen sich auch einige beachtenswerthe Bemerkungen über die terrestrische Strahlenbrechung finden. Angehängt ist eine schöne Uebersichtskarte sämmtlicher Messungen. Der Anschluss an die französischen Dreiecke ergab folgende Vergleichung:

Seite Rämel — Faux d'Enson.

Französische Dreiecke .	= 35997,22	Meter
Schweizerische Dreiecke	= 35997,27	-
Unterschied	= 0,05	-

Der Anschluss an die österreichischen Dreiecke ergab folgende Vergleichungen:

Seite Pizzo Forno — Pizzo Menone di Gino.

Oesterreichische Dreiecke	= 44572,77
Schweizerische Dreiecke	= 44572,12
Unterschied	= 0,65

Seite Pizzo Menone di Gino — Monte Legnone.

Oesterreichische Dreiecke	= 21124,67
Schweizerische Dreiecke	= 21124,54
Unterschied	= 0,13

Seite Kumenberg — Frastenzersand.

Oesterreichische Dreiecke	= 15985,23
Schweizerische Dreiecke	= 15995,81
Unterschied	= 0,58

Seite Frastenzersand — Fundelkopf.

Oesterreichische Dreiecke	= 11957,95
Schweizerische Dreiecke	= 11959,94
Unterschied	= 1,99

Den beiden letzten Angaben ist in den Oesterreichischen Protokollen die Bemerkung beigefügt, dass sich die definitive Ausgleichung der österreichischen Triangulirung noch nicht bis an diesen Theil der Provinz Tyrol ausgedehnt habe.

Aus den obigen schönen Uebereinstimmungen darf allerdings der Schluss gezogen werden, dass das Dreiecksnetz der Schweiz allen geographischen Zwecken vollkommen genügt.

Trigonometrie.

A. Huberdt: Elemente der ebenen Trigonometrie nebst praktischen Aufgaben für Gymnasien und höhere Bürger- und Militair-Schulen. Berlin. 1841. 6 ggr.

Die Anfangsgründe der ebenen und sphärischen Trigonometrie und der Kegelschnitte für Gymnasien und Oberrealklassen von F. J. Herrmann. Giessen. 1841. 8. 16 ggr.

Hymers's Treatise on Trigonometry plane and spherical, and on Trigonometrical Tables and Logarithms, together with a Selection of Problems and their Solutions. Second edition. Camb. 1841. 8 s. 6 d.

Snowball's Plane and spherical Trigonometry together. Fifth edition. Camb. 1840. 8. 10 s. 6 d.

Hewitt's Problems and Theorems in Plane Trigonometry. Camb. 1840. 6 s.

Trigonometry, and its Application to Astronomy, Dialling, and Trigonometrical Surveying. By Richard Abbatt. New edition. 8. 7 s neatly bound in cl.

Elementerna af Plana Trigonometrien, Utgifna af P. N. Ekman, Docens i Mathematiken wid Upsala Uniwersitet. Stockholm. 16 sk.

Grundlinier litt Plana Trigonometrien jemte Ett Försök att förtydliga Interpolations-Methoden af A. O. Gestrin. Stockholm. 8.

Mechanik.

W. A. Rüst: Die Mechanik in Anwendung auf Künste und Gewerbe. Erste Abtheilung. Mechanik fester Körper. Für Praktiker bearbeitet. Berlin. 1840. 8. 1 Thlr. 12 ggr.

W. Whewell: Elementar-Lehrbuch der Mechanik. Zum Gebrauch für technische Lehranstalten. Aus dem Engl. übersetzt von C. H. Schnuse. Braunschweig 1841. 1 Thlr. 16 ggr.

Beide vorhergehende Schriften haben gleichen, durch ihre Titel hinreichend bezeichneten Zweck, und erfüllen denselben, jedes in seiner Art, recht gut. Das erste fasst jedoch bloss die Anwendung auf die eigentliche Maschinenlehre in's Auge; das zweite berücksichtigt daneben auch insbesondere die Anwendungen, welche die Lehren der Statik fester Körper in der Baukunst finden. Das erste wird in seiner zweiten Abtheilung auch die Mechanik flüssiger Körper darstellen, und in der dritten die Construction und Zusammensetzung einzelner Maschinen enthalten. Das zweite enthält bloss die Mechanik fester Körper. Die ganz elementare geometrische (und trigonometrische) Darstellung, in welcher ja überdies bekanntlich die Engländer Meister sind, hat uns besonders in dem zweiten Buche sehr angesprochen, und dasselbe verdiente daher eine deutsche Bearbeitung vollkommen, die auch als eine völlig gelungene zu bezeichnen ist.

Eléments de statique pour servir d'introduction à un cours de physique, suivis d'une solution simple des triangles sphériques. Par L. G. 2 Fr. 50 c.

Gaubert, Traité de mécanique à l'usage des élèves des écoles polytechnique et normale. Paris. 1840. 8. 8 Fr.

Roche: Traité de balistique appliquée à l'artillerie navale. 1re partie. Paris. 1840. 8. 5 Fr.

Whewell's Elementary Treatise on Mechanics for the use of students in the University. Sixth edition. Camb. 1841. 8. 7 s. 6 d.

Corso elementare di Meccanica ed Idraulica, del dr. Vincenzo Amici. Vol. I. (Meccanica teorica.) Firenze. 1840. 8.

Ricerche sul moto molecolare de' solidi, di Domenico Paoli. Firenze. 1840. 8.

J. P. Delprat: Beginselen der Dynamica, voor kadetten der Artillerie en Genie. Te Breda. 1840. 8.

J. P. Delprat: Beginselen der statica en hydrostatica. Te Breda. 1840. 8.

C. F. Gauss: Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte. Leipzig. 1840. 8. 8 ggr.

Um den Inhalt dieser wichtigen Schrift im Allgemeinen möglichst deutlich zu bezeichnen, wollen wir den ganzen ersten Paragraphen mittheilen:

„Die Natur bietet uns mancherlei Erscheinungen dar, welche wir durch die Annahme von Kräften erklären, die von den kleinsten Theilen der Substanzen auf einander ausgeübt werden, und den Quadraten der gegenseitigen Entfernungen umgekehrt proportional sind.

Vor allem gehört hierher die allgemeine Gravitation. Vermöge derselben übt jedes ponderable Molecül μ auf ein anderes μ' eine bewegende Kraft aus, welche, wenn man die Entfernung $= r$ setzt, durch $\frac{\mu\mu'}{rr}$ ausgedrückt wird, und eine Annäherung in der Richtung der verbindenden geraden Linie hervorzubringen strebt.

Wenn man zur Erklärung der magnetischen Erscheinungen zwei magnetische Flüssigkeiten annimmt, wovon die eine als negativ betrachtet wird, so üben zwei derartige Elemente μ, μ' gleichfalls eine bewegende Kraft auf einander aus, welche durch $\frac{\mu\mu'}{rr}$ gemessen wird und in der verbindenden geraden Linie wirkt, aber als Abstossung, wenn μ, μ' gleichartig, als Anziehung, wenn sie ungleichartig sind.

Ganz Aehnliches gilt von der gegenseitigen Wirkung der Theile der elektrischen Flüssigkeiten auf einander.

Das linearische Element ds eines galvanischen Stroms übt auf ein Element des magnetischen Fluidums μ (wenn wir letzteres zulassen) ebenfalls eine bewegende Kraft aus, die dem Quadrate der Entfernung r umgekehrt proportional ist: aber hier tritt zugleich der ganz abweichende Umstand ein, dass die Richtung der Kraft nicht in der verbindenden geraden Linie, sondern senkrecht gegen die durch μ und die Richtung von ds gelegte Ebene ist, und dass ausserdem die Stärke der Kraft nicht von der Entfernung allein, sondern zugleich von dem Winkel abhängt, welchen r mit der Richtung von ds macht. Nennt man diesen Winkel Θ, so ist $\frac{\sin\Theta\,.\,\mu ds}{rr}$ das Maas der bewegenden Kraft, welche ds auf μ ausübt, und eben so gross ist die von μ auf das Stromelement ds oder dessen ponderablen Träger ausgeübte Kraft, deren Richtung der ersteren entgegengesetzt parallel ist.

Wenn man mit Ampère annimmt, dass zwei Elemente von galvanischen Strömen ds, ds' in der sie verbindenden geraden Linie anziehend oder abstossend auf einander wirken, so nöthigen uns die Erscheinungen, diese Kräfte gleichfalls dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional zu setzen, zugleich aber erfordern jene eine etwas verwickelte Abhängigkeit von der Richtung der Stromelemente.

Wir werden uns in dieser Abhandlung auf die drei ersten Fälle oder auf solche Kräfte einschränken, die sich in der Richtung der geraden Linie zwischen dem Elemente, welches wirkt, und demjenigen, auf welches gewirkt wird, äussern, und schlechthin dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional sind, obwohl mehrere Lehrsätze mit geringer Veränderung auch bei den andern Fällen ihre Anwendung finden, deren ausführliche Entwickelung einer andern Abhandlung vorbehalten bleiben muss."

In den astronomischen Nachrichten Nr. 418 findet sich: Beweis des von Jacobi gefundenen Lehrsatzes, dass ein flüssiges, sich um die eine Axe drehendes Sphäroid von drei verschiedenen Hauptaxen im Gleichgewicht sein könne, von T. Clausen.

Praktische Mechanik.

Notions de statique et mécanique industrielle. Par Peyré. 8. 5 Fr.

Traité d'Hydraulique, à l'usage des ingénieurs. Par d'Aubuisson de Voisins. 2e éd. 8. 9 Fr.

Cours de dessein linéaire appliqué au dessein des machines. Par C. Armengaud. 4. 6 Fr.

The Mechanics of Engineering. By Whewell. London. 1840. 8. 9 s.

Memoria sulla relazione tra le acque dell' Arno e quelle della Chiana, del conte Vittorio Fossombroni, inserita nella parte matematica del tomo XXII. delle „Memorie della Società italiana delle scienze residente in Modena". Seconda edizione. Firenze. 1840. 8.

Handbok i Praktisk Mekanik af Arthur Morin. Öfwersatt, under iakttagande af alla formlers och tabellers reduktion efter Swenskt mått och wigt-system, och med betydliga tillägg försell af J. S. Bagge, Prof. wid Bergs-Skolan i Fahlun. Stockholm. 8. 3 Rdr.

Optik.

Dioptrische Untersuchungen von C. F. Gauss. Göttingen. 1841. 4. 8 ggr.

Diese schönen Untersuchungen des berühmten Vfs. haben vorzüglich den Zweck, bei den bekannten eleganten Formeln von Cotes, Euler, Lagrange und Möbius die Dicke des Glases zu berücksichtigen, so wie auch eine genauere Feststellung mehrerer dioptrischen Grundbegriffe.

D. Brewster, A treatise on the microscope. London. 8. 6 s.

Principes de perspective linéaire. Par Bacillon. 4. 5 Fr.

Bonillon, Principes de perspective linéaire, appliqués d'une manière méthodique et progressive au tracé des figures. Paris. 1840. 4. 5 Fr.

In den astronomischen Nachrichten Nr. 415 und Nr. 417 findet man zwei schöne Aufsätze von Bessel und T. Clausen über die Grundformeln der Dioptrik.

Astronomie.

Von Biots trefflichem Traité élémentaire d'Astronomie physique erscheint jetzt eine dritte Ausgabe.

Beiträge zur physischen Kenntniss der himmlischen Körper im Sonnensystem von W. Beer und J. H. Mädler. Weimar. 1841. 4. 1 Thlr. 16 ggr.
Theils neue, theils in Schumachers astronomischen Nachrichten schon veröffentlichte Aufsätze, hier von Neuem abgedruckt.

Hymers's Elements of the Theory of Astronomy. Second edition. Camb. 1840. 8. 14 s.

De correctione elementorum Veneris et Mercurii ex observato transitu per Solem Disquisitio. P. I—IV. Praes. Mag. A. T. Bergius; Respp. J. L. Ringzell, J. W. Lindblad, G. M. Lundquist et J. O. Carlsberg. Upsaliae. 4.

O'Brien's Mathematical Tracts. Part. I., on Laplace's Coefficients, the Figure of the Earth, the Motion of a rigid body about its Centre of Gravity, and Precession and Nutation. Camb. 1840. 8. 4 s. 6 d.

Quetelet, Sur la longitude de l'Observatoire royal de Bruxelles. 4.

Descrizione del circolo meridiano dell' J. R. Osservatorio di Padova, seguita da un catalogo di stelle fisse per l'anno 1840, distribuito in zone rapporto alla declinazione. Parte prima, contenente le stelle dell' equatore fino al 10° di declinazione boreale.

Di Giovanni Santini. Padova. 1840. 4. Estratta dal vol. V. de „Nuovi saggi dell' accademia di Padova."

Mesure d'un arc de parallèle moyen entre le pole et l'équateur. Par le colonel Brousseaud. Limoges. 4.

Calcul de navigation à l'usage des officiers de la marine marchande et des capitaines au cabotage. Nantes. 8.

A Treatise on Navigation and Nautical Astronomy by Edward Riddle. 3d Edition. 8. 12 s. bound.

J. Lamont: Jahrbuch der Königlichen Sternwarte bei München für 1841. Vierter Jahrgang. München. 8. 1 Thlr.

Die Einrichtung dieses Jahrbuchs kann im Allgemeinen als bekannt vorausgesetzt werden. Auf die astronomische Ephemeride folgt ein vorzüglich in Bezug auf Baiern sehr vollständiges Verzeichniss geographischer Positionen, in welchem die in Bogen und Zeit angegebenen Längen für Baiern von dem Meridian der Sternwarte bei München, für die übrigen Punkte von dem Pariser Meridian an gerechnet sind. Dann folgen gesetzliche Bestimmungen über das baierische Maass und Gewicht, Zusammenstellung neuerer Maass- und Gewichtseinheiten, Meilenmaasse, gesetzliche Bestimmungen über das Münzwesen in verschiedenen Ländern mit besonderer Rücksicht auf den süddeutschen Zollverein, und fast der ganze übrige Theil des Buchs von S. 91 bis S. 236 ist der Meteorologie gewidmet. Zuerst Beobachtungen der Königlichen Gerichtsärzte in Baiern, wobei zugleich die von dem Vf. auf eigenthümliche Weise construirten Barometer beschrieben werden, welche die Königlich Baierschen Gerichtsärzte zur Anstellung der ihnen aufgetragenen, vierteljährig an die Sternwarte einzusendenden Beobachtungen nach und nach sämmtlich erhalten sollen. Welche grosse Ausdehnung schon jetzt diese Beobachtungen gewonnen haben, geht daraus hervor, dass schon an 271 Punkten, die in dem Jahrbuche namentlich angegeben werden, in den verschiedenen Provinzen des Staates von den Gerichtsärzten Beobachtungen angestellt werden, und dass sich schon an 78 Orten neue oder verificirte Instrumente befinden. Alle diese von dem thätigen Vf. getroffenen Einrichtungen verdienen anderen Staaten, wo von den Kreis-Physikern, oder wie diese Beamten sonst heissen mögen, vorschriftsmässig meteorologische Beobachtungen angestellt werden müssen, zur Nachahmung empfohlen zu werden. Nur wenn diese Beobachtungen überall zu so viel als möglich mit einander übereinstimmenden Zeiten, mit guten vorher gehörig mit einander verglichenen Instrumenten angestellt und der oberen Leitung und Controlle eines mit dem Fache ganz vertrauten Mannes wie in Baiern unterworfen werden, können dieselben der Wissenschaft wahrhaften Nutzen bringen. Ferner giebt der Vf. Nachricht über einen noch besonders von ihm gestifteten meteorologischen Verein, und liefert hierauf einen sehr lesenswerthen, populär gehaltenen Aufsatz über die zweckmässige Anstellung meteorologischer Beobachtungen, welchen wir allen angehenden Beobachtern aus Ueberzeugung empfehlen. Nach Mittheilung der von den Mitgliedern des meteorologischen Vereins bis jetzt an die

Sternwarte eingesandten Beobachtungen und der auf der Sternwarte selbst in den Jahren 1825—1836 angestellten Beobachtungen, aus denen sich die Höhe von München (Barometer der Sternwarte) über dem Meere im Mittel 1576 Pariser Fuss ergiebt, wird endlich noch von der Verbindung eines grossen magnetischen Observatoriums mit der Sternwarte Nachricht gegeben, welches durch die Munificenz Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Kronprinzen mit den grössten Mitteln ausgestattet und in der Mitte des vorigen Jahres vollendet worden ist. Die im August vorigen Jahres begonnenen magnetischen Beobachtungen werden täglich von 6 Uhr Morgens bis 6 Uhr Abends jede Stunde nach mittlerer Göttinger Zeit gemacht; die Nacht hindurch wird alle zwei Stunden der Stand der Instrumente aufgezeichnet; jeden Monat trifft ein Termintag, wo 24 Stunden hindurch alle 5 Minuten die Declination und alle 10 Minuten die Horizontal-Intensität bemerkt wird. In so grosser Ausdehnung und Vollständigkeit werden unsers Wissens die magnetischen Beobachtungen noch nirgends angestellt. Möge der so thätige und kenntnissreiche Vf. in seinem Eifer nie erkalten und immer durch die kräftigste bei solchen Unternehmungen so nothwendige Gesundheit unterstützt werden!

J. F. Encke: Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Berlin. Erster Band. Berlin. 1840. 5 Thlr.

Eine höchst erfreuliche und wichtige Erscheinung. Die Einleitung enthält die Beschreibung der neuen Berliner Sternwarte und ihrer wichtigsten Instrumente, namentlich des neuen grossen Meridiankreises von Pistor, nebst trefflichen Abbildungen des Gebäudes nach allen seinen Theilen, insbesondere auch der Kuppel und des Meridiankreises. Hierauf folgen: 1. Beobachtungen mit dem Pistor'schen Meridiankreise. 1838. April 16. — 1839. Aug. 31. — 2. Beobachtungen am Durchgangsfernrohr von Ost nach West. — 3. Meteorologische Beobachtungen. (1836 Januar 1. — 1839. August 31. Thermometer R. Barometer. Wind. Wolken. Dreimal täglich.) — 4. Magnetische Beobachtungen. (1836. Mai 11. — 1839. August 31.) — 5. Beobachtungen mit dem Refractor und den beweglichen Instrumenten (Doppelsterne; Messungen der Planetendurchmesser; Sternbedeckungen, Sonnenfinsternisse, Planetendurchgänge u. s. w.; Beobachtungen des Cometen von Pons oder vielmehr Encke. 1838).

Connaissance des temps pour l'an 1843. Paris. 8. 7 Fr. 50 c.

L'Annuaire du bureau des longitudes pour l'an 1840, augmenté de notices scientifiques par Arago. Paris. 12. 1 Fr.

Atlas des phénomènes célestes, donnant le tracé des mouvements apparents des planètes. Par Dien. Année 1841. Paris. 4. 15 Fr.

Physik.

C. Scherling: Leitfaden bei dem Unterrichte in der Physik, für Real- und höhere Bürgerschulen. 2r Cursus. Lübeck. 1840. 8. 15 ggr.

H. Birnbaum: Die Begründung der ersten Kenntnisse in der Physik oder mechanischen Naturlehre für Schule und Haus des Bürgerstandes. Braunschweig. 1841. 8. 15 ggr.
Ein gutes Buch, dem wir recht vielen Eingang in gebildete (denn andere lässt sein Inhalt nicht zu) Familien wünschen. Jedoch müssen wir ausdrücklich bemerken, dass nur der eigentlich mechanische Theil der Physik in dessen Kreis gezogen und die Lehre von der Wärme, der Electricität, dem Magnetismus und dem Lichte ganz unberücksichtigt geblieben ist, welches wahrscheinlich durch die Worte: mechanische Naturlehre, auf dem Titel angedeutet werden soll, aber dem sonstigen Begriffe der mechanischen Naturlehre (S. z. B. E. G. Fischers mechanische Naturlehre) nicht gemäss ist. Zweckmässig und der allgemeineren Verbreitung des Buchs förderlich wäre es gewiss gewesen, wenn auch die Lehre von den sogenannten Imponderabilien mit aufgenommen worden wäre. Auch dürfte es selbst noch in unserer Zeit nicht ganz ohne Nutzen gewesen sein, wenn der Vf. einige Rücksicht auf seines Landsmannes (wenn wir nicht irren) Hellmuth Volksnaturlehre zur Vertilgung des Aberglaubens genommen hätte.

Deguin, Cours élémentaire de Physique. 3e édition. T. I. Paris. 1840. 8. 9 Fr. 50 c.

Nouveau Manuel complet de Physique, ou Eléments abrégés de cette science. Par Bailly. Nouv. édit. in 18. 8 Fr. 50 c.

Traité élémentaire de physique, chimie, toxicologie et pharmacie. Par Favart. 2 Vol. 8. 14 Fr.

G. Bird, Elements of natural philosophy. London. 8. 12 s.

Snowball's Cambridge Course of Elementary Natural Philosophy, being demonstrations of the Propositions in Mechanics and Hydrostatics, for Candidates for the ordinary degree. Second edition. 1840. 12. 4 s.

Trattato elementare di Fisica matematica. Di Emanuele Estiller. Tom. I. Palermo. 1839.

Lezioni di Fisica di Carlo Matteucci, date nell' i. e r. univ. di Pisa nell' anno 1840. Pisa 1840. 8.

Nouveau système des tourbillons appuyé par des expériences qui démontrent la réalité des tourbillons admis par Descartes. Par Guerineau. Poitiers. 8.

Spiegazione della attrazione de' corpi e sue leggi, di Antonio Pontillo. Verona. 1839. 8.

Sopra l'identita dell' attrazione molecolare coll' astronomica; opera del cav. Leopoldo Nobili di Reggio. Modena. 1840. 4.

Pneumatics, containing an Analysis of the Mechanical Properties of aerial fluids, with a Description of Pneumatic Machines, by Hugo Reid. Edinburgh. 1840. 8. 2 s. cloth.

Storia dell' Elettricità, di Antonio Carnevale Arella. Alessandria. 1839. 8. Vol. I. II.

Relazione storico-critica sperimentale sull' Elettro-Magnetismo del Prof. Francesco Zantedeschi. Venezia. 1840. 8.

A. Quetelet, Second mémoire sur le magnétisme terrestre en Italie. Bruxelles. 4.

— Sur l'état du magnétisme terrestre à Bruxelles pendant les douze années de 1827 à 1839. Bruxelles. 4.

Leop. Nobili, Questioni sul Magnetismo. 8. Modena.

— — Nuovi trattati sopra il Calorico, l'Elettricità ed il Magnetismo. 8. Ibid. 6 L.

Klauprecht: Die Lehre vom Klima in land- und forstwirthschaftlicher Beziehung. Karlsruhe. 1840. 8. 1 Thlr. 4 ggr.
Bildet die vierte Abtheilung des Lehrbuchs der land- und forstwissenschaftlichen Naturkunde von J. Ch. Hundeshagen, und enthält eine gute Zusammenstellung der betreffenden Gegenstände, ohne eben die Resultate eigner Untersuchungen mitzutheilen.

F. A. Schneider: Beiträge zur Astro-Meteorologie oder über den muthmasslichen Einfluss des Standes der Planeten, Cometen etc. auf die meteorologischen Erscheinungen an der Erdoberfläche. Leipzig. 1840. 4. 8 ggr.
Der Vf. will die höchst wichtige Entdeckung gemacht haben, dass der Luftdruck, die Wärme, die Windrichtungen etc. berechnet werden können, wenn man die meteorologischen Beobachtungen bei Sonnen-Auf- und Untergang, bei Mond-Auf- und Untergang, zu der Zeit, wenn der Mond das neue Licht empfängt, und 12 Stunden später anstellt und die Ergebnisse dieser Beobachtungen unter andern auch so zusammenträgt, dass dabei der Stand der Planeten berücksichtigt wird!!
Glaube dies dem Herrn Rechnungsrathe wer's will und kann.
Später ist noch ein Nachtrag zu dieser Schrift erschienen. Berlin. 1841. 4. 4 ggr.

A. Quetelet, Resumé des observations météorologiques faites en 1839 à l'Observatoire royal de Bruxelles. Bruxelles. 4.

A. Quetelet, Deuxième Mémoire sur les variations annuelles de la température de la terre à différentes profondeurs. Bruxelles. 4.

A. Quetelet, Catalogue des principaux apparitions d'étoiles filantes. Bruxelles. 4.

Discours sur l'ensemble des phénomèmes qui se sont manifestés à la surface du globe depuis son origine jusqu'a l'époque actuelle. Par le vicomte d'Arcbille. 4.

Sulla necessità di stabilire un regolare sistema di osservazioni di Fisica terrestre ed atmosferica; memoria letta alla sezione di fisica nella prima riunione degli scienziati italiani dal cav. V. Antinori. Firenze. 1840. 8.

Denkwürdigkeiten aus dem Leben Sir Humphry Davy's, herausgegeben von seinem Bruder John Davy. Deutsch bearbeitet von D. C. Neubert. Eingeleitet von D. R. Wagner. 4 Bände. (Der erste mit Davy's Bildnisse.) Leipzig. 1840. 8. 5 Thlr. 12 ggr.
Schade, dass der sehr hohe Preis dieser wohlgelungenen Uebersetzung der Lebensbeschreibung eines der grössten Naturforscher der neuern Zeit viele, denen dieselbe im höchsten Grade interessant und lehrreich sein muss, abhalten wird, sie zu kaufen. Durch eine bessere Oekonomie des Drucks würde gewiss ein mässigerer Preis möglich zu machen gewesen sein.

Vermischte Schriften.

Der Jahresbericht für die Mitglieder der Hamburger Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse (Februar 1841) enthält die folgenden Aufsätze:

1. Ueber die Nachweisung der gegenseitigen Lage von zwei Ebenen von der Beschaffenheit der für sie gegebenen Coordinaten-Gleichungen von dem Herrn Major Dr. G. W. Müller zu Hannover.

Der Zweck dieses sehr beachtenswerthen Aufsatzes ist in der Kürze folgender. Wenn

$$Ax + By + Cz + D = 0,\quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

die Gleichungen zweier Ebenen (für rechtwinklige Coordinaten) sind, und φ den Neigungswinkel dieser beiden Ebenen bezeichnet, so wird in der analytischen Geometrie bekanntlich die Formel

$$\cos\varphi = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}$$

bewiesen, aber meistens kein Criterium angegeben, wie man den den Winkel φ, der natürlich zwei Werthe, einen spitzen und einen stumpfen haben kann, zu nehmen hat. Ein solches Criterium anzugeben ist nun der Zweck dieses Aufsatzes und der von Herrn Major Dr. Müller zu diesem Behuf aufgestellte Satz ist folgender:

Wenn man unter φ den Neigungswinkel der beiden Ebenen gegen einander versteht, in dessen Oeffnung der Anfang des zum Grunde gelegten Coordinatensystems liegt (die Fälle, wo der Anfang der Coordinaten in der Durchschnittslinie der beiden Ebenen liegt, werden ausgeschlossen), so muss für φ der spitze oder stumpfe Winkelwerth genommen werden, je nachdem der Quotient

$$\frac{AA' + BB' + CC'}{DD'}$$

negativ oder positiv ist.

Es wäre wünschenswerth, diesen Satz auf schiefwinklige Coordinatensysteme zu erweitern, wozu wir die Leser des Archivs auffordern möchten.

2. Ueber einige Eigenschaften der um Parabeln durch Tangenten beschriebenen Dreiecke, von Herrn Director C. Rümker zu Hamburg.

Dieser Aufsatz enthält einige recht nette Eigenschaften der Parabel, von denen die meisten wohl bis jetzt noch nicht bekannt gewesen sind. Einiges aus diesem Aufsatze haben wir in diesem Hefte unter den Uebungsaufgaben mitgetheilt.

3. Einige mechanische Aufgaben von Herrn E. John zu Hamburg, nämlich folgende:

a) Wenn ein Schacht bis zum Mittelpunkte der Erde reichte und ein Stein hineinfiele, die Relation zwischen Zeit, Raum und Geschwindigkeit des fallenden Körpers zu finden.

b) Den Druck auf den Boden einer cylindrischen Wassersäule zu finden, der sich vom Mittelpunkte der Erde bis zu ihrer Oberfläche erstreckt.

c) Angenommen, dass sich eben so eine Luftsäule vom Mittelpunkte der Erde bis zu ihrer Oberfläche erstreckt, so soll die Dichtigkeit der Luft für jede Entfernung vom Mittelpunkte gefunden werden.

d) Ein massives, aus einer cylindrischen Scheibe bestehendes Schwungrad, dessen Halbmesser $= r$, Dicke $= h$, Dichtigkeit $= \delta$, Masse $= M$, bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um seine Axe; es soll die Entfernung ε von der Axe gefunden werden, wo eine der Bewegung direct entgegengesetzte Kraft $Mv = M\varepsilon\omega$ das Schwungrad sogleich zur Ruhe bringen würde.

e) Um die Welle eines Schwungrades der vorher angegebenen Art ist ein Seil gewunden, woran ein Gewicht $= m$ der Bewegung des Rades entgegenwirkt; es soll die Relation zwischen der Zeit und der restirenden Geschwindigkeit gefunden werden.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Serie seconda. T. I. Torino. 1839. 4.

Hierin folgende Abhandlungen:

Observations thermométriques faites à S. Jean de Maurienne depuis 1826 à 1838.

Mémoire sur les rapports entre le pouvoir conducteur des liquides pour les courans électriques et la décomposition chimique qu'ils en éprouvent par Botto et Avogadro.

Mémoire sur l'équilibre des colonnes par Pagani.

Novi Commentarii Academiae scientiarum Instituti Bononiensis. T. IV. Fasc. 2. Bononiae. 1839. 4.

Hierin Aloysii Casinelli Disquisitio analytica in functionem $\log (1+x)^m$.

Preisaufgaben *).

Societas Jablonoviana has proponit quaestiones, a. 1841, 1842 et 1843 solvendas.

II. E disciplinis physicis et mathematicis.

In annum 1841. „Impedimenti, quo flumen electricum, quod vocant, retardatur in transeundo vel per corpora liquida, vel a corporibus liquidis ad solida, separata comparatio instituatur exacta mensura in iis liquidis metallisque, quae maxime in usu sunt ad experimenta galvanica vel electrochemica."

In annum 1842. „Testibus historiae matheseos scriptoribus, Hutton et Chasles, ab initio saeculi XVI. in Germania status algebrae, si ab aequationibus tertii ordinis discesseris, tam promotus erat, ut haec doctrina in patria nostra magis exculta videretur quam in ipsa Italia. Jam vero ex illo tempore quum unici Christophori Rudolfi Javerani nomen et opera ad nos pervenerint, qui exempla sua e bibliotheca Vindobonensi hausisse fertur, quaeritur an ante illum jam „cossistae" germanici fuerunt, qui proprio Marte artem promoverent. Quod ut diiudicetur, opus erit, ut in MSS. inedita bibliothecarum Norimbergensium, Vindobonensium, Monacensium aliorumque inquiratur (Cf. Drobisch, de Joannis Widmanni Egerani arithmetica mercatorum. Lips. 1840)."

In annum 1843. „Recenseantur methodi gravioris momenti, tum analyticae, tum syntheticae, inde a Mongii aetate in geometria inventae, quibusque finibus omnium ac singularum frugifer usus circumscriptus sit, doceatur."

Ad commentationes quaestionibus responsuras Latina lingua, aut Francogallica, aut Germanica uti licet; cunctas vero luculenter scriptas et paginarum notis signatas esse oportet. Praeterea monemus, addendam esse schedulam obsignatam, quae intus nomen auctoris indicet, habeatque simul extus inscriptum gnomen eamdem, quae in commentationis limine comparet. Pretium commentationi, quae praemio digna declarabitur, constitutum est numus aureus viginti quatuor ducatorum. Quod ad primas commentationes, in a. 1841 propositas attinet, eae ante mensis Novembris hujus anni finem ad Societatis h. t. Secretarium, Frid. Christ. Aug. Hasse, Doctr. Histor. Auxill. Prof. ord., gratis mittendae sunt.

Preisaufgabe der französischen Akademie.

Trouver les équations aux limites que l'on doit joindre aux équations indéfinies pour déterminer complètement les maxima et minima des intégrales multiples.

Einlieferungstermin 1. April 1842. Preis 3000 Fr.

*) Wollen gelehrte Gesellschaften und Akademieen mir die Programme, worin sie ihre Preisaufgaben bekannt machen, zusenden, so sollen dieselben sogleich in dem Archive zu ihrer weitern Verbreitung abgedruckt werden.

Inhalt des zweiten Bandes des Cambridge Mathematical Journal *).

Plane Geometry.

On the elementary principles of the application of algebraical symbols to Geometry. By *D. F. Gregory*. — On a symmetrical form of the equation to the Parabola. — Demonstrations of expressions for the area of a triangle. — Problem „Given the n^{th} part of a straight line to find the $(n+1)^{\text{th}}$ part." — Demonstrations of two properties of the abscissae of the angular points of a polygon circumscribing a parabola. — Investigation of the general equation to diametral curves. — On the general theory of the loci of curvilinear intersection. — On the general interpretation of equations between two variables in algebraic geometry. By *W. Walton*. — On the general theory of multiple points. By *W. Walton*. — Simple demonstration of a property of the conic sections. — On the existence of real asymptotes to impossible branches of curves. — On a theorem in the geometry of position. — Analytical demonstrations of Stewart's theorems. By *R. L. Ellis*.

Analytical Geometry of three dimensions.

On the number of normals which can be drawn from a given point to an algebraical surface. By *M. Terquem*. — Investigation of the locus of points for which the sum of the squares of the normals drawn from them to a surface of the second order is constant. By *M. Terquem*. — Condition that a surface should be touched by a plane in a curved line. — Applications of the method of spherical co-ordinates. — On the perspective of the co-ordinate planes. — On the lines of curvature in an ellipsoid. By *R. L. Ellis*. — Geometrical interpretation of Lagrange's condition in the theory of maxima and minima of functions of two variables. — Symmetrical solutions of problems respecting the straight line and plane. By *George Boole*. — On singular points in surfaces. By *D. F. Gregory*.

Algebra.

On the transformation of an analytical expression. — Researches in the theory of analytical transformations, with a special application to the Reduction of the general equation of the second order. By *George Boole*. — Demonstration of a proposition in the theory of numbers. — Expression for any positive integral power of a logarithm. — On the expansion of sines and cosines of multiple arcs in ascending powers of the cosines and sines of the simple arcs. — On the expressibility of the roots of algebraic equations. By *J. M. Peebles*. — On the equation of payments. — On the develop-

*) Da dieses Journal wohl in Deutschland nicht so häufig gelesen wird, wie es verdient, so werde ich in der Folge immer den Inhalt der einzelnen erscheinenden Hefte vollständig mittheilen. Diesmal nehme ich den ganzen so eben vollendeten zweiten Band, der die Nummern VI—XII (Mai 1841) in sich fasst.

ment of the square roots of numbers by continued fractions. By *James Booth.* — Examples of the dialytic method of elimination as applied to ternary systems of equations. By *J. J. Sylvester.* — Practical rule for reducing a square root into a continued fraction. — On the irrationality of ε. — New solution of a cubic equation. By *J. Cockle.* — On a method of algebraic elimination.

Differential and integral calculs.

On singular solntions and particular integrals of differential equations. By *W. Walton,* Nos. I. and II. — On the failure of formulae in the inverse processus of the differential calculus. — On certain theorems in the calculus of variations. By *George Boole.* — On the integration of linear differential equations with constant coefficients. By *George Boole.* — Series for the approximate values of definite integrals. — On the integration of certain classes of differential equations. By *R. L. Ellis*, Nos. I. and II. — Investigation of the radins of curvature in polar cvrves. — Demonstration of a property of Laplace's coefficients. — On the integration of equations of partial differentials. By *B. Bronwin.* — Evaluation of a definite multiple integral. By *D. F. Gregory.* — Remarks on Poisson's proof that F (μ, ω) can be expanded in a series of Laplace's functions. — Demonstration of the correctness of Fourier's expansions of functions in series consisting of sines or cosines only. — On certain integral transformations. By *B. Bronwin.* — Note on the definite integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (\sin \theta)\, d\theta$. — Theorem respecting general differentials. — Extension of a property of Laplace's functions to homogeneous functions generally.

Mechanics.

On the condition of equilibrium of a system of mutually attractive fluid particles. — On a property of the brachystrochrone when the forces are any whatsoever. — Investigation of the angle between the apsides of the path of a projecticle moving in a surface of revolntion, when the orbit is nearly circular. — On the sympathy of pendulums. — On the tautochrone in a resisting medium. — On the motion of a pendulum whose point of support is disturbed. — On the form of a bent spring.

Astronomy.

Investigations of the variations of the node and inclination. — Geometrical investigation of the aberratiou in right ascension and declination. — Analytical solutions of problems in plane astronomy.

Light.

Method of finding the approximate values of definite integrals which occur in the calculations of diffraction. — Note on the calculation on the intensity of light at the centre of the shadow of a small circular disk. — On fringes of interference produced by oblique reflection at the surface of a small mirror. By *A. Bell.* — Solutions of Senate-House Problems.

III.

Literarischer Bericht.

(Um diesem literarischen Berichte in Bezug auf die Erscheinungen der mathematischen und physikalischen Literatur in den Jahren 1840 und 1841 möglichste Vollständigkeit zu geben, ist in dieser Nummer noch Einiges, was früher theils übersehen, theils vorläufig absichtlich ausgelassen worden war, nachgetragen worden. In einer der folgenden Nummern, wenn es irgend möglich ist, schon in Nr. IV., wird eine vollständige Uebersicht der in den neuesten Bänden — 1840 und 1841 — der Schriften aller gelehrten Gesellschaften und Akademieen enthaltenen mathematischen und physikalischen Abhandlungen geliefert werden).

Geschichte der Mathematik.

Histoire des sciences mathématiques en Italie par Libri. T. III et IV. 8. 1841. 5 Thlr. 8 ggr.

Die ersten früher erschienenen Theile dieses Werks sind bekannt genug.

Historische Entwickelung des Princips der Differentialrechnung bis auf Leibnitz von Dr. K. J. Gerhardt. Osterprogramm 1840 des Gymnasiums zu Salzwedel.

Whewell, W., Geschichte der inductiven Wissenschaften, der Astronomie, Physik, Mechanik, Chemie, Geologie etc. Nach dem Englischen mit Anmerkungen von J. J. Littrow. 2 Bde gr. 8. Stuttgart. 1840. 2 Thlr. 18 ggr.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Hoffmeister, R. H., Leitfaden für den mathematischen Unterricht in Mittelschulen, 1. 2. Curs., Arithmetik und Geometrie. 1840. gr. 8. 1 Thlr.

Doerk, H. G., Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien. 2. Bd. gr. 8. Elbing. 16 ggr. (1. und 3. 1839. 1 Thlr. 8 ggr.)

Matthias, Dr. J. A., Leitfaden für einen heuristischen Schulunterricht über die allgemeine Arithmetik und die gemeine Algebra, die Elementar-Geometrie, ebene Trigonometrie und Apollonischen Kegelschnitte. 3 Hefte, 7. Aufl. gr. 8. 840. Magdeburg, 1 Thlr.

Francoeur, L. B., vollständiger Lehrcursus der reinen Mathematik nach der 4. Originalausg. aus dem Französ. übers. und mit Anmerk. und Zusätzen vers. von Dr. E. Külp. 1. Band 3. und 4. Buch gr. 8. 1840. Bern. 1 Thlr. 11 ggr. 2. Bd. 1. Buch 1841. 2 Thlr. (1. Band 1. u. 2. Buch 1839. 1 Thlr. 2 ggr.)

Lehrbuch der angewandten Mathematik für Realgymnasien und höhere Bürgerschulen. Von H. L. Boltze, Dr. phil. und Collaborator an der Saldern'schen Schule zu Brandenburg a. H. Zweiter Theil. Statik und Mechanik fester Körper. Berlin. 1841. 8. 21 ggr.

Auch mit dem besondern Titel:

Lehrbuch der Statik und Mechanik fester Körper für Realgymnasien und höhere Bürgerschulen u. s. w.

Dieses Lehrbuch der angewandten Mathematik ist hervorgerufen worden durch das immer bestimmter und unabweisbarer hervortretende Bedürfniss einer grossen Anzahl von Schülern, schon auf der Schule in einen grössern Theil der Lehren der sogenannten angewandten Mathematik mit einer gewissen Vollständigkeit und mit gehöriger Berücksichtigung des Gebrauchs im praktischen Leben eingeführt zu werden, und ist also auch ein sehr erfreuliches Zeichen der Zeit. Nach der Absicht des Vfs. soll dasselbe aus vier Theilen bestehen, von denen laut der Vorrede der erste die bürgerliche und Staatsrechenkunst, der zweite (hier vorliegende) die Mechanik, der dritte geometrisches Zeichnen und Feldmessen, der vierte Astronomie und mathematische Geographie enthalten wird. Der wegen eines besondern Bedürfnisses zuerst herausgegebene, uns vorliegende, zweite Theil enthält die Statik und Mechanik fester Körper mit gehöriger Berücksichtigung des Praktischen in zweckmässiger Kürze. Eigenthümlich ist dem Vf. Mehreres in der Lehre von den Kräftepaaren, der elementaren Darstellung der Lehre von den Trägheitsmomenten, auch bei der Begründung des Gesetzes der allgemeinen Schwere u. s. w., so wie derselbe denn, wie es uns scheint, namentlich auch mit Glück den Versuch gemacht hat, mehrere der wichtigsten Lehren des mechanischen Theils der Physik, die in den physikalischen Lehrbüchern und bei dem physikalischen Unterrichte sich leider meistens nur mit einer blossen historischen Erwähnung müssen abfinden lassen, auf eine zweckmässige und zum Theil elegante Weise elementarisch zu begründen, welche Seite dieses Buchs, wie es uns scheint, besonders hervorgehoben zu werden verdient. Gewünscht hätten wir, dass der Vf. auch das Princip des Reversionspendels mit aufgenommen und gehörig erläutert hätte, und aufmerksam zu machen wollen wir denselben zum Schluss nicht unterlassen, seinem Buche als dritten Theil noch eine fünfte die Lehren der Statik und Mechanik tropfbar und ausdehnsam flüssiger Körper enthaltende Abtheilung hinzuzufügen, da der vorliegende zweite Theil nur die Statik und Mechanik fester Körper enthält. Bei diesem von uns gewünschten fünften (oder vielmehr dritten) Theile würde der Vf. ganz besonders Gelegenheit finden, den gewöhnlichen Vortrag der Physik an vielen Stellen durch eine zweckmässige elementar-mathematische Darstellung zu vervollständigen, zu wahrer Wissenschaftlichkeit zu erheben, und eben dadurch erst recht fruchtbar und lehrreich für die Schüler zu machen. So sehr wir auch den Plan des Werkes sonst im Ganzen billigen, glauben wir doch, dass dieser von uns gewünschte, die Lehren der Statik und Mechanik flüssiger Körper enthaltende Theil seiner grossen Wichtigkeit für das praktische Leben wegen, durchaus nicht fehlen darf, wenn das Buch seinen Zweck vollständig erfüllen soll.

Nouveaux Éléments de Mathématiques pures, par A. Meyer, docteur en sciences, employé au dépot de la guerre, professeur de mathématiques à l'institut Gaggia et à l'université libre de Bruxelles. T. I. Arithmétique. Bruxelles. 1841. 8.

Der Vf. beabsichtigt in ungefähr 20 Lieferungen, jede wenigstens zu 100 Seiten (Preis 4 Fr.), ein vollständiges System der sogenannten reinen Mathematik zu liefern. In der vor uns liegenden ersten Lieferung spricht sich ein grosses sehr löbliches Streben nach Eleganz und möglichster Einfachheit der Darstellung und nach einem systematischen und naturgemässen Entwickelungsgange deutlich aus, weshalb wir glauben das deutsche Publikum auf dieses Unternehmen aufmerksam machen zu müssen. Auch findet sich in dieser Lieferung manches Neue, wie z. B. S. 116. ein dem Vf. eigenthümlicher Beweis des binomischen Lehrsatzes für Facultäten und manches Andere in der Theorie der Facultäten. Ueber die folgenden Lieferungen, in denen sich das Eigenthümliche dieses Werks, aus dem uns auch Lehrer manche gute Winke entnehmen zu können scheinen, gewiss noch mehr und noch deutlicher herausstellen wird, werden wir berichten, so bald dieselben erschienen sind. Bis jetzt ist nur die erste bis zu dem dritten „Génération des produits" überschriebenen Kapitel reichende Lieferung zu unserer Kenntniss gelangt. Auch wird sich überhaupt, wenn erst mehr erschienen ist, etwas Vollständigeres über den ganzen Plan des Werks sagen lassen. Für jetzt mag daher diese kurze vorläufige Anzeige genügen.

Arithmetik.

Wirth, Dr. Ph., Grundzüge der Arithmetik nebst den Anfangsgründen der Algebra. Bamberg. gr. 8. 18 ggr.

Traité élémentaire sur l'arithmétique etc. à l'usage du commerce et des finances par Merle. 6me édition. Paris. 1841. 8. 5 Fr.

Ferber, C., Enseignement du calcul mental, Strasburg 2e Edit. 12. 1840. 12 ggr.

Elementi di Aritmetica, di Francesco Soave. Edizione corretta sulle antecedenti. Milano. 1841. 12.

Produktentafel, enthaltend die 2, 3, 4, 5, 6, 7. 8, 9fachen aller Zahlen von 1 bis 100000. Herausgegeben von C. A. Bretschneider, Prof. am Realgymnasium zu Gotha. Hamburg und Gotha. 1841. gr. 8. 16 ggr.

Was diese Tafel enthält, giebt der Titel bestimmt an. Dieselbe empfiehlt sich durch eine auf dem bekannten Satze, dass wenn die niederen Ziffern zweier vielzifferigen Zahlen von der ersten an bis zu einer bestimmten Stelle hin die nämlichen sind, dann auch die niederen Ziffern gleicher Vielfacher jener Zahlen auf eben so viel Stellen unter einander übereinstimmen, wie verschieden auch die Ziffern in den höheren Stellen sein mögen, beruhende sehr zweckmässige Einrichtung und den geringen Raum von nur $6\frac{1}{4}$ Bogen, welchen sie dieser Einrichtung zufolge einnimmt, durch sehr schönes Papier, scharfen und deutlichen Druck und sehr mässigen Preis in jeder Beziehung, weshalb wir sie in den Händen recht vieler rechnender Mathematiker zu sehen wünschen, denen sie gewiss sehr viele Vortheile und Erleichterungen bei ihren Arbeiten gewähren wird, und die sich daher dem Herrn Vf. zu ganz besonderm Danke verpflichtet fühlen werden. Aber auch in den Händen der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten kann und wird diese Tafel vielen Nutzen stiften, da es für die Schüler immer sehr instructiv sein wird, wenn sie schon bei'm ersten wissenschaftlichen arithmetischen Unterrichte mit der Einrichtung und dem Gebrauche dieser Tafeln und den Gründen, auf denen die erstere beruhet, bekannt gemacht werden, welches auch eine sehr gute Vorbereitung zu dem künftigen Gebrauche der Logarithmentafeln und der trigonometrischen Tafeln sein wird. Es hat uns immer geschienen, dass es sehr nothwendig ist, die Schüler so zeitig als irgend möglich auf den häufigen und wichtigen Gebrauch, welcher von zu verschiedenen Zwecken, immer aber zur Erleichterung und Abkürzung schwieriger und zeitraubender Rechnungen construirter Tafeln in allen Theilen der Mathematik gemacht wird, hinzuweisen und ganz besonders aufmerksam zu machen, wozu bei'm ersten wissenschaftlichen arithmetischen Unterrichte neben den Factorentafeln — deren Einrichtung aber im Ganzen zu einfach ist — nach unserer Ueberzeugung die Produktentafel des Vfs. sehr zweckmässig und vortheilhaft benutzt werden kann, wobei auch noch besonders der praktische Nutzen für manchen künftig zu einer Beschäftigung, bei welcher öfters die Ausführung weitläufiger Rechnungen erfordert wird, übergehen wollenden Schüler in Anschlag gebracht werden muss. Eine sehr lesenswerthe Einleitung über Einrichtung und Gebrauch der Tafeln eröffnet dieselben, und enthält ausser ihrem eigentlichen Gegenstande auch noch manche schätzbare Bemerkungen, die sich in den meisten arithmetischen Lehrbüchern nicht finden. Möge der Vf. auch bei der in der Vorrede angekündigten sehr verdienstlichen Arbeit: nämlich einer neuen und sorgfältigen Berechnung der Zahlwerthe der wichtigsten in der gesammten Mathematik vorkommenden numerischen Constanten und Coefficienten, nicht ermüden, und sich nicht abschrecken lassen durch die geringe Anerkennung, die leider oft solchen mühsamen und Zeit raubenden Arbeiten zu Theil wird! Der Dank derjenigen, welche die Verdienstlichkeit derselben, und die ungemeine Sorgfalt und Genauigkeit, welche auf solche Arbeiten gewandt werden müssen, zu würdigen verstehen, wird ihm gewiss zu Theil werden.

Traité sur la théorie des logarithmes par Vallès. 8. 841.

Vega, G., Logarithmisch-Trigonometrisches Handbuch herausg. von Hülse. Leipzig. gr. 8. 1840. 1 Thlr. 6 ggr.

Steinberger, A., Tafel der gemeinen oder Brigg'schen Logarithmen aller Zahlen von 1—1000000 mit 5 oder beliebig 7 Decimalstellen. Ein Auszug aus Vega's Logarithmisch-Trigonometr. Handb. Regensburg. gr. 8. 1840. 8 ggr.

Tables of Logarithms, common and trigonometrical, to five places. Under the superintendence of the society for the diffusion of useful knowledge. 8. 1841. 3 s. swd.

Four figure Logarithms and Anti-Logarithms. On a Card, 1841. 1 s.

The Elements of Algebra, preliminary to the Differential Calculus, and fit for the Higher Classes of Schools in which the Principles of Arithmetic are taught. By Professor De Morgan. 2d Edition 1841. 12mo. 9 s. cloth.

J. G. Hall's Differential and Integral Calculus. 3rd edit. 1841. 8. 12 s. 6 d.

Ueber die Transcendenten, welche aus wiederholten Integrationen rationaler Formeln entstehen von Kummer. Osterprogramm 1840 des Gymnasiums zu Liegnitz.

Traité élémentaire des fonctions elliptiques, ouvrage destiné à faire suite aux traités élémentaires de calcul intégral par P. F. Verhulst. Bruxelles. 1841. 8. 3 Thlr.

Dieses Werk empfehlen wir allen denen, welche sich, ohne auf die ursprünglichen Quellen zurückgehen zu wollen, mit der Theorie der elliptischen Functionen bekannt machen wollen.

Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnungen und deren wichtigsten Anwendungen von S. D. Poisson. Deutsch bearbeitet und mit den nöthigen Zusätzen versehen von Dr. E. H. Schnuse. Braunschweig. 1841. 8. 2 Thlr. 18 ggr.

Eine auf schönes Papier deutlich und correct gedruckte gute Uebersetzung von Poissons Recherches sur la Probabilité des Jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités. Paris 1837. 4. 25 Fr., welche der Uebersetzer mit einer grössern Anzahl von Zusätzen versehen hat, um dieselbe, wie er in der Vorrede sagt, zu einem Lehrbuche der Wahrscheinlichkeitsrechnung abzurunden, und dadurch also zugleich den der Uebersetzung gegebenen Titel zu rechtfertigen. Was von dem Uebersetzer herrührt, ist nicht bestimmt angegeben, und wir können darüber auch kein ganz gültiges Urtheil fällen, weil uns das Original in diesem Augenblicke zufällig nicht zur Hand ist.

Geometrie.

Meyer, C., Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien. 3 Bde. gr. 8. Potsdam. 1840. 1 Thlr. 14 ggr.

Gleichmann, H. A., Lehrbuch der ebenen Geometrie, ein Leitfaden beim Unterricht in den Elementen der Mathematik. gr. 8. Meiningen. 15 ggr.

Rüss, W. A., die Geometrie und Trigonometrie. Zunächst für Divisionsschulen und sonstige Militair-Unterrichtsanstalten. gr. 8. Berlin. 1840. 1 Thlr. 4 ggr.

Ludowieg, J. C. H., Lehrbuch der Elementar-Geometrie und Trigonometrie für Gymnasien und höhere Lehranstalten. 2. Bd. gr. 8. Hannover. 1840. 2 Thlr. 8 ggr. (1. Bd. 1839. 2 Thlr.) Eine ausführlichere Anzeige dieses Buchs im nächsten Hefte.

Holzapfel, F. X., Grundlehren der Elementar-Geometrie mit Anwendung auf Berechnung der Körper und Flächen. 8. Constanz. 1840. 9 gr.

Demp, Dr. Q. W., Handbuch der theoret. und prakt. Geometrie. gr. 8. München. 1840. 1 Thlr.

Lehmus, Dr. D. E. F., Lehrbuch der Geometrie. 1. Bd. 2. Aufl. Berlin. 1840. 1 Thlr. 18 ggr.

Hincke, J., Lehrbuch der geometrischen Formenlehre. 1. Theil: Planimetrische Formenlehre. Mit 9 Figurentafeln. gr. 8. Nordhausen. 1841. 18 ggr.

Dessen Leitfaden d. geometrischen Formenlehre. 1. Theil: Planimetrische Formenlehre. gr. 8. Nordhausen. 1841. 6 ggr.

Hohl, Dr., Vorschule der reinen Stereometrie. 8. Tübingen. 1840. 12 ggr.

Senff, C. J., systematische Darstellung der Hauptsätze der Geometrie im Raume. Eine gekrönte Preisschrift. gr. 4. Dorpat. 1840. 22 ggr.

Die Geometrie genetisch dargestellt für Schulen und zum Selbstunterrichte von R. Simesen, Lehrer der Mathem. und Physik. Mit 175 eingedruckten Holzschnitten. 8. Altona. 1841. 15 ggr.

Die Art und Weise, auf welche man gewöhnlich in der höheren Mathematik die Entstehung der Figuren betrachtet, um daraus ihre Haupteigenschaften kennen zu lernen, führte den Vf. auf den Gedanken, auch die niedere Geometrie durchgehends auf ähnliche Weise genetisch zu behandeln, und dadurch, wo möglich, sowohl dem Anfänger das Erlernen derselben erträglicher zu machen, als auch den Uebergang zum Studium der höheren Mathematik zu erleichtern. In dieser hier mit des Vfs. eigenen Worten angegebenen Weise findet man in der vorliegenden, den Lehrern der Mathematik allerdings zur Beachtung und Benutzung zu empfehlenden Schrift die Lehren der ebenen Geometrie mit Einschluss der ebenen Trigonometrie einfach und klar behandelt, und möchten wir den Vf. uns zu ermuntern erlauben, bald eine ähnliche Bearbeitung der Elemente der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie folgen zu lassen.

Die Lehre von den geradlinigen Gebilden in der Ebene. Ein Versuch einer systematisch-elementarischen Entwicklung der sogenannten Planimetrie, Goniometrie und Trigonometrie, der Anfangsgründe der analytischen Geometrie u. s. w. Von Rudolph Wolf, Lehrer der Mathematik an der Realschule in Bern. 8. Bern und St. Gallen. 1841. 15 ggr.

Diese kleine nur 121 Seiten enthaltende Schrift versucht — dies scheint uns ihr eigentlicher Zweck, ihre eigentliche Tendenz und ihr besonderes Verdienst zu sein — die Ergebnisse und Betrachtungsweisen der sogenannten neuern Geometrie in den geometrischen Elementarunterricht einzuführen und bei demselben zu benutzen, wobei sie sich vorzüglich an Steiner anschliesst. Wir halten dies für sehr verdienstlich und in jeder Beziehung zeitgemäss, empfehlen daher auch diese Schrift allen Lehrern, welche, ohne Zeit und Lust zu haben, zu den Quellen zurückzugehen, dasjenige von der sogenannten neuern Geometrie, was für den ersten und nächsten Zweck des geometrischen Elementarunterrichts brauchbar sein möchte, in kurzer Zeit kennen lernen und sich aneignen wollen. Aus dem Gesichtspunkte eines Lehrbuchs betrachtet, können wir aber die Vermischung der ganzen ebenen Trigonometrie, die selbst die bekannten imaginären Moivre'schen Formeln und was sich daran unmittelbar anschliessen lässt, aufnimmt, und der analytischen Geometrie mit den Lehren der synthetischen Geometrie nicht gut heissen, indem auf diese Weise theils der schöne synthetische Charakter der letztern verloren geht, theils keine der genannten Wissenschaften in irgend einer Art zum Abschluss gebracht und der Lehrling in das eigentliche Wesen derselben gehörig eingeführt und wirklich eingeweiht wird. Auch möchten wir die auf Seite 49 sich findende Bemerkung: „Man hat sich auch vielfache Mühe gegeben, die Formeln 38 und 39 „, — nämlich die Formeln $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$ und $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ —" logarithmisch zu machen, d. h. die in denselben vorkommenden Summen in Producte umzuwandeln. Da jedoch einerseits die durch diese Umwandlung bezweckte Erleichterung meist nur scheinbar ist, andererseits die Einführung von

Hülfsgrössen, Wurzeln u. s. w. Zweideutigkeit in die Formeln bringt, und endlich durch sie das Gedächtniss bedeutend beschwert wird, so kommen sie nach und nach bei den praktischen Rechnern wieder ganz ausser Gebrauch, und sollen auch hier keine Entwicklung finden" keineswegs unterschreiben. Wer da weiss, welcher vielfache und wichtige Gebrauch, namentlich in der Astronomie und Geodäsie von der Einführung sogenannter Hülfswinkel und anderer Hülfsgrössen gemacht wird, um Formeln zur logarithmischen Rechnung bequem einzurichten, welche Einfachheit und Leichtigkeit u. A. z. B. Gauss durch solche Hülfsmittel in manche Rechnungen zu bringen gewusst hat, wird mit uns gewiss einverstanden sein, dass der Schüler, der nur irgend weitere Schritte in der Mathematik zu thun beabsichtigt, nicht zeitig genug mit denselben bekannt gemacht und in denselben geübt werden kann. Auch scheinen uns dieselben die trefflichste Uebung in dem Gebrauche der goniometrischen Formeln darzubieten und letztere dem Schüler am besten in das Gedächtniss einzuprägen. Wie schön ist z. B. der Kunstgriff, nach welchem man, wenn der Winkel φ aus der in dieser Form oft vorkommenden Gleichung

$$a \sin \varphi + b \cos \varphi = c$$

bestimmt werden soll, die beiden Hülfsgrössen r und Θ den beiden Gleichungen

$$a = r \cos \Theta, \quad b = r \sin \Theta$$

gemäss, d. h. mittelst der Formeln

$$\operatorname{tang} \Theta = \frac{b}{a}, \quad r = \frac{a}{\cos \Theta} = \frac{b}{\sin \Theta}$$

bestimmt, und dann zur Berechnung von φ die einfache Formel

$$\sin (\Theta + \varphi) = \frac{c}{r}$$

erhält. Sollte es nicht der Mühe werth sein, den Schüler recht zeitig mit solchen Kunstgriffen und Hülfsmitteln bekannt zu machen? Auch glauben wir nicht, dass, wenn in der Aufgabe nicht selbst eine Unbestimmtheit liegt, durch solche richtig gehandhabte Kunstgriffe und Transformationen eine Unbestimmtheit in die Aufgabe gebracht werde. Lassen etwa die bekannten schönen Formeln für $\sin \frac{1}{2} A$ und $\cos \frac{1}{2} A$ in der ebenen und sphärischen Trigonometrie einer Unbestimmtheit Raum? Lässt es nicht vielmehr z. B. die Formel

$$\sin A = \frac{\sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4}}{2bc},$$

in der ebenen Trigonometrie, auf die man doch am Ende eben so gut durch die ursprüngliche Entwicklung hätte kommen können, wie auf die bekannte völlig bestimmte Formel für $\cos A$, unentschieden, ob der Winkel A zwischen 0 und 90° oder zwischen 90° und 180° zu nehmen ist? Unsere Absicht war hier nur, die grosse Wichtigkeit der Transformationen in der Trigonometrie in möglichster Kürze gegen die von dem Vf. ausgesprochene Meinung herauszustellen, zugleich aber auch die Richtigkeit unserer obigen Ansicht, dass das Schriftchen des Vfs. in manchen Beziehungen unvollständig ist und unbefriedigt lässt, zu beweisen, wobei wir aber auch nicht unterlassen können und wollen, hier am Schluss nochmals auf dessen im Eingange angedeutete Verdienstlichkeit aufmerksam zu machen, dasselbe den Lehrern zur Berücksichtigung bei dem geometrischen Unterrichte zu empfehlen, und den Vf. zu ermuntern, in seinem löblichen Streben die Ergebnisse und Betrachtungsweisen der neuern Geometrie so viel als irgend möglich in den geometrischen Elementarunterricht einzuführen, fortzufahren. Besondere Anerkennung verdienen endlich auch noch die an vielen Stellen beigebrachten historischen und literarischen Notizen.

Principles of Geometry, familiarly illustrated and applied to a variety of useful purposes. Designed for the Instruction of young Persons. By Prof. Ritchie. 2d Edition. 12. 3 s. 6 d. cloth.

Ergänzung des Euklidischen Systems der Geometrie, in Rücksicht seiner ungenügenden Beweise der die Parallellinien und ihre Eigenschaften betreffenden Lehrsätze, von L. A. Seeher. Karlsruhe. 1840. 4. 8 ggr.

Zur Theorie des Kreises von H. Schmidt. Osterprogramm 1840 des Gymnasiums zu Halberstadt.

Ueber die Entfernung der Mittelpunkte der Kreise, welche die Seiten eines ebenen Dreiecks oder Vierecks berühren, von dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises, von Dr. Nauck. Osterprogramm 1840 des Gymnasiums zu Schleusingen.

Quadrature du cercle par Le Geay. Fol. 1841.

Traité de géométrie descriptive par Adhémar. 8. Paris. 1841. 20 Fr.

Neubig, Dr. A., 800 Aufgaben aus der rechnenden Geometrie und Trigonometrie etc. 8. Erlangen. 1840. 12 ggr.

Biot, J. G., Versuch einer analytischen Geometrie, angewandt auf die Curven und Flächen zweiter Ordnung. Uebers. und mit Zusätzen von Dr. J. T. Ahrens. 2te Vermehrte Aufl. gr. 8. Nürnberg. 1840. 2 Thlr. 12 ggr.

Complément de géométrie analytique par Page. 8. Paris. 1841. 1 Thlr. 8 ggr.

Versuch einer populären Darstellung der Eigenschaften der Cykloide und ihrer Evolute von Türkheim. Osterprogramm 1840 des Gymnasiums zu Schweidnitz.

Praktische Geometrie.

Die Pothenotsche Aufgabe in praktischer Beziehung dargestellt von C. L. Gerling. 8. Marburg. 1840. 8 ggr.

Durch ein Versehen ist diese kleine sehr beachtenswerthe Schrift in den früheren literarischen Berichten noch nicht angezeigt worden. Der Vf. hat in derselben die wichtigsten Auflösungen des Pothenot'schen Problems durch Rechnung und durch Construction oder mittelst des Messtisches zusammengestellt und ihre praktische Brauchbarkeit überall richtig gewürdigt. Den Auflösungen durch Construction ist vorzüglich ein in den geometrischen Lehrbüchern sich nicht findender allgemeiner, auch an sich interessanter und bemerkenswerther Lehrsatz zum Grunde gelegt worden, auf welchen der Vf. vor vielen Jahren durch eine Andeutung von Gauss aufmerksam gemacht wurde. Besonders hervorgehoben muss endlich noch werden, dass der Vf. auch die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate bei dem Pothenot'schen Problem auf eine sehr deutliche Weise zeigt, um, wenn mehr Messungen als zur absoluten Bestimmung des gesuchten Punktes erfordert werden, gemacht worden sind, die möglichst scharfe Bestimmung aus allem Gegebenen und Beobachteten zu erhalten, wodurch, so wie überhaupt durch viele andere augenscheinlich aus eigner vielfacher und langjähriger Praxis hervorgegangene praktische Bemerkungen und Andeutungen, nach unsrer Ueberzeugung die kleine Schrift sich als eine für den die Pothenot'sche Aufgabe oder bei der Messtischpraxis das sogenannte Rückwärtseinschneiden häufig in Anwendung bringenden Geodäten unentbehrliche darstellt.

Trigonometrie.

Trigonometrie rectiligne suivie de tables de logarithmes etc. par Lambert. Paris. 1841. 8. 4 Fr. 50 c.

Elements of Trigonometry, and Trigonometrical Analysis, preliminary to the Differential Calculus; fit for those who have studied the Principles of Arithmetic and Algebra, and Six Books of Euclid. By Prof. De Morgan. 12. 1841. 9 s. cloth.

Tröbst, Dr. C. G., Tafel der Sinus, Tangenten, Secanten, mit dem Opus Palatinum verglichen und nach den Differenzen geprüft. 12. Jena. 1840. 12 ggr.

Mechanik.

In den Sitzungen der Petersburger Akademie der Wissenschaften vom 30. October und 18. December 1840 hat Herr Ostrogradsky ein Memoire über die Bewegung der sphärischen Projectile in der Luft vorgelesen, welches für den genannten Gegenstand nach dem, was bis jetzt über dessen Inhalt bekannt geworden ist, jedenfalls sehr wichtig ist.

Praktische Mechanik.

Wandner, Lehrbuch der technischen Mechanik. Mit 9 Figurentafeln. gr. 8. Regensburg. 1841. 1 Thlr. 3 gr.

Rühlmann, Dr. M., die technische Mechanik und Maschinenlehre, zunächst als Leitfaden für den Unterricht an Lehranstalten, so wie auch zum Gebrauch für Techniker jeder Art ohne Anwendung der Differential- und Integralrechnung bearbeitet. 1r Bd. 1e Abth. Statik fester Körper. gr. 8. Dresden. 1840. 21 ggr.

Demme, A. V., der praktische Maschinenbauer, mit vielen Kpf. 3 4. 5. Bd. 8. Quedlinburg. 1840. 41. 6 Thlr. 4 ggr. (1. 2. Bd. 1839. 6 Thlr. 4 ggr.)

Hoffmann, E. L., Sammlung der gebräuchlichsten Maschinen, sowohl zusammengestellt als in ihren einzelnen Theilen. N. F. 1. Heft. Fol. Potsdam. 1840. 2 Thlr.

Allgemeine Maschinen-Encyklopädie, herausgegeben von Hülse. Text in 8. 3. 4. 5. Lief. à 1 Thlr. Atlas in Fol. 3. 4. Lief. à 1 Thlr. 16 ggr. Leipzig. 1841.

Haindl, S., Maschinenkunde und Maschinenzeichnen. 2. Lief gr. 4. München. 1840. 3 Thlr. (1. 1839. 3 Thlr.)

Poncelet, industrielle Mechanik, deutsch bearbeitet und mit Anmerk. begleitet von C. G. Kuppler. 1—4. Lief. gr. 8. Nürnberg., 2 Thlr.

Description des Machines et procédés consignés dans les brevets d'invention. Publié par les Ordres de M. le Ministre du commerce. 4. Avec fig. Tom. 41. Paris. 1841.

Calculs sur la sortie du vapeur dans les machines locomotives par Jeanneney. Paris. 1841. 8. 5 Fr.

Optik.

Schumachers astronomische Nachrichten enthalten im 18. Bande Nr. 421 einen Aufsatz über Fernröhre mit Glasspiegeln und deren Vorzüge von Herrn Dr. Barfuss.

Astronomie.

Mädler, J. H., populäre Astronomie. 1—3. Heft, mit vielen Abbild. gr. 8. Berlin. 1841. 1 Thlr. 8 ggr.

Richter, J. A. L., Handbuch der populären Astronomie für gebildete Stände. gr. 8. 1. 2. Band. Quedlinburg. 1840. 3 Thlr.

Arago's popular lectures on Astronomy. Translated, with explanatory notes, by Walter K. Kelly. 1841. 2 s.

Hypothese über die Entstehung des Planeten-Systems und des Weltalls überhaupt von A. L. Trenn. Danzig. 1841. 8. 12 ggr.

Struve, Dr. W., vorläufiger Bericht von der Russischen Gradmessung, mit Allerhöchster Genehmigung auf Veranstaltung der Kaiserl. Universität zu Dorpat während der Jahre 1821—1827 in den Ostsee-Provinzen des Reichs ausgeführt. Folio. Dorpat. 1840 18 ggr.

Fedorow, W., vorläufige Berichte über die von ihm in den Jahren 1832—1837 auf Allerhöchsten Befehl in West-Sibirien ausgeführten astronomisch-geographischen Arbeiten. Im Auftrag der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften herausg. von G. W. Struve. gr. 8. Petersburg. 1840. 1 Thlr. 4 ggr.

Karsten, H., kleiner astronomischer Almanach für Seeleute auf das Jahr 1841. gr. 8. Rostock. 12 ggr.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1843. Herausgegeben von J. F. Encke. 8. Berlin. 1841. 2 Thlr. 16 ggr.
Dieser Jahrgang enthält in dem Anhange die folgenden Abhandlungen:
Ueber die Einrichtung des Jahrbuchs.
Geographische Lage der Hauptsternwarten.
Aus diesem neueren Verzeichnisse tragen wir zu dem im ersten Hefte des Archivs. Literarischer Bericht. I. S. 14. mitgetheilten Verzeichnisse nach:

Name des Orts	Geograph. Breite + nördlich — südlich	Länge v. Berlin Zeit. + westlich — östlich	Oestl. Länge von Ferro in Bogen.
Danzig	+ 54° 21′ 4″,0	— 0^h 21′ 3″,4	36° 19′ 21″,0
Leiden	+ 52 9 28 ,2	+ 0 35 28 ,0	22 8 59 ,6
Modena. . . .	+ 44 38 52 ,8	+ 0 9 51 ,6	28 35 36 ,0

Ueber die selenocentrischen Constanten bei den Stern-Bedeckungen und die Libration des Mondes, nebst Tafeln.

Bemerkungen über das Durchgangs-Instrument von Ost nach West.

Physik.

Die Experimental-Physik, ein geistiges Bildungsmittel, in ihren Beziehungen zum praktischen Leben. Ein Handbuch für Lehrer an gehobenen Volks- und Bürgerschulen und technischen Anstalten von Dr. K. F. R. Schneider, Oberlehrer etc. Erste Abtheilung: Die allgemeinen Eigenschaften der Körper. Dresden. 1841. 8. 9 ggr.

Wir glauben, dass auch diese Schrift ihren durch den Titel mit hinreichender Deutlichkeit angedeuteten Zweck gut erfüllen wird. Die zweite Abtheilung wird die Statik und Mechanik fester und flüssiger Körper und die Akustik, die dritte die Lehre von den Imponderabilien enthalten. Dann beabsichtigt der Vf. diesem Handbuche einen Leitfaden für die Schüler, und später die Physik des Luftkreises oder die Meteorologie und die Physik des Himmels oder die Astronomie folgen zu lassen. Jedenfalls liefert auch diese Schrift dem aufmerksamen Beobachter auf dem Felde der mathematischen und physikalischen Literatur einen sehr erfreulichen Beweis für das immer bessere Gedeihen und die immer lebhaftere Anerkennung der hohen Wichtigkeit des mathematischen und physikalischen Unterrichts auch auf Schulen einer niedern Gattung, wovon sich gewiss noch die schönsten Früchte erwarten lassen.

Heussi, J., Experimental-Physik methodisch dargestellt. 3. Curs. gr. 8. 1840. 1 Thlr. 8 ggr. (1. u. 2. 1838. 39. 1 Thlr. 16 ggr.)

Dellmann, F., der kleine Physiker 1. die wägbaren Stoffe. gr. 8. 1840. Meurs. 12 ggr.

August, E. F., mechanische Naturlehre. Auszug aus Fischers Lehrbuch der mechanischen Naturl., neu bearbeitet. 2. Aufl. gr. 8. Berlin. 1840. 1 Thlr. 6 ggr.

Fischer, E. G., Lehrbuch der mechanischen Naturlehre, neu bearbeitet von E. F. August, 4. Aufl. gr. 8. 2 Thle. 1. 1837 2. 1840. 5 Thlr.

Fladung, J. A. F., populäre Vorträge über Physik für Damen, Wien. 2. Aufl. 12. 1840. 1 Thlr. 12 ggr.

Figurentafeln zur Physik nebst ausführlicher Erklärung. Für Freunde der Wissenschaft, insbesondere für Gymnasien und Realschulen. Von G. Lauteschläger. 5. Heft. Das Licht. 200 Figuren. Darmstadt. 1841. 8. 12 ggr.
Zweck und Einrichtung dieser Figurentafeln sind aus den früher erschienenen 4 Heften hinreichend bekannt. Das sechste und letzte Heft wird Electricität und Magnetismus enthalten.

Lehrbuch der Physik für höhere polytechnische Lehranstalten von G. Lamé. Deutsch bearbeitet und mit den nöthigen Zusätzen versehen von Dr. C. H. Schnuse. Dritter Band (Electricität. Magnetismus. Electrodynamik. Physikalische Aufgaben). Darmstadt. 1841. 8. 2 Thlr. 12 ggr.
Die angehängte Sammlung physikalischer, fast sämmtlich auf mathematischem Wege zu lösender Aufgaben, ist sehr lehrreich, und kann Lehrern besonders empfohlen werden.

Gehler, J. S., physikalisches Wörterbuch, neu bearbeitet von Brandes, Gmelin, Littrow, Muncke, Horner und Pfaff, mit vielen Kupfern 9. B. 3. Abth. gr. 8. Leipzig. 1840. 3 Thlr. 8 ggr. (1 bis 9. B. 1. 2. 1825—39. kosten 48 Thlr. 15 ggr.)

Elémens de Physique par Person. Paris. 1841. 8. Les 2 Volumes. 12 Fr.

Mayr, G., Abhandlung über Electricität und sichernde Blitzableiter für jedes Gebäude. 2. Aufl. 8. München. 1841 8 ggr.

Schmidt, Dr. C. H., Unterricht über Magnetismus, Elektricität und Elektromagnetismus. Nebst Beschreibung aller neu erfundenen elektromagnetischen Maschinen. 8. Leipzig. 1841. 8 ggr.

Henrici, F. C., über die Elektricität der galvanischen Kette. gr. 8. Göttingen. 1840. 1 Thlr.

Kämtz, Dr. L. F., Vorlesungen über Meteorologie, gr. 8. 1840. Halle. 2 Thlr. 12 ggr.

Kleefeld, Dr., Meteorologische Beobachtungen angestellt zu Danzig in den Jahren 1831—38. gr. 4. Danzig. 1840. 1 Thlr. 8 ggr.

Stiefel, Ph., Jahrbuch der Witterungs- und Himmelskunde für Deutschland im Jahre 1840. gr. 8. Karlsruhe. 1 Thlr.

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahr 1839, herausg. von C. F. Gauss und W. Weber. gr. 8. Leipzig. 1840. 1 Thlr. 20 ggr.

Agassiz, L., Untersuchungen über die Gletscher, gr. 8. mit 32 Tafeln in Folio. Solothurn. 1841. 11 Thlr. 8 ggr.

Die neuen Veränderungen der unorganischen Welt oder Geschichte der durch Ueberlieferung nachgewiesenen Einwirkungen des Wassers und des Feuers auf die Gestaltung des festen Theils der Erde, zur Erläuterung geologischer Erscheinungen. Von Carl Lyell. A. d. Engl. v. Carl Hartmann. Weimar. 1841. 8. 2 Thlr. 20 ggr.

Études géologiques dans les Alpes par M. L. A. Necker. T. I. Paris. 1841. 8. 4 Thlr.
Scheint für die Geologie der Alpen wichtig zu seiu.

Berghaus, Dr. H., Sammlung hydrographisch-physikalischer Karten der preussischen Seefahrer. 1. Lief. 3 Bl. Imp. Folio. Breslau. 1841. 10 Thlr. 12.

Berghaus, Dr. H., physikalischer Atlas, 5. 6. Lief. Folio. Gotha. 1840. 4 Thlr. — (1—4. Lief. 1838. 1839 kosten 8 Thlr.)

Cosmologie physique par Pater. 8. Paris. 1840.
Cours de magnétisme par Dupotet. 8. Paris. 1840.
De l'air comprimé par Andraud. 8. 2de édition 8. Paris. 1840. 3 Fr.
Discours sur la condition physique de la terre par Regnaud. 8. Paris. 1840.
Exposition du système des vents par Dartigue. 4. Paris. 1840.
Introduction au magnétisme par Gauthier. 8. Paris. 1840. 6 Fr.
Mémoires météorologiques par Morin. 8. Pnris. 1840.
Notions physiques par Sainte-Beuve. 8. Paris. 1840.
Opuscules sur les sciences physiques par Desvaux. 8. Paris 1840.
La Physique populaire par Levy. 8. Paris. 1840.
Recueil de mémoires de physique par d'Hombres Firmus. 8. Paris. 1840.
Traité élémentaire de l'électricité par Becquerel. 8. Paris. 1840.
Traité de l'action du fluide électrique par Wunner. 8. Paris. 1840.

Bulletin des sciences physiques et naturelles en Neerlonde, rédigé par F. A. W. Miguel, G. J. Mulder et A. W. Wenckenbach. 1840. 6 Livraisons. gr. 8. Utrecht. 4 Thlr.

Årsberättelse om Framstegen i Fysik och Kemi afgifven den 31 Mars 1840; af Jac. Berzelius. Första Delen. Stockholm. 1841. 1 Rdr.

Vermischte Schriften.

Transactions of the royal, etc. Trnnsactions de la Société Royale d'Edimbourg, vol. XIV. partie 2e, 1840, Edimbourg, in 4.*) — Résultats d'observations faites avec l'anémomètre de M. Whewell, par M. John Rankine. — Sur la couleur de la vapeur et de l'atmosphère dans certaines circonstances, par M. J. D. Forbes. — Sur les formules de Fresnel pour l'intensité de la lumière réfléchie et réfractée, par M. P. Kelland. — Recherches sur les propriétés analogues des coordonnées des secteurs elliptiques et hyperboliques, par M. W. Wallace. — Sur la diminution de la température avec la hauteur dans l'atmosphère suivant les différentes saisons de l'année, par M. J. Forbes. — Sur la théorie du flot, par M. P. Kelland. — Sur le calcul différentiel, par M. P. Kelland. — Solution d'une équation fonctionelle, avec application au parallélogramme des forces et aux courbes d'équilibration, par M. W. Wallace.

Preisaufgaben.

Preisaufgabe der Königlich Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften für 1842.

Cum proprietas functionum transcendentium, quae continentur in hac formula $\int \frac{P dx}{\sqrt[n]{R}}$, ubi P est functio rationalis et R functio integra ipsius x, tantum quatenus $n=2$, disquisitioni partim generali partim speciali subjectae fuerint, cupit societas praemio suo tractationem generalem universae hujus functionum classis provocare, theoremati de ipsarum summatione superstructam, et quidem ejus similem, quae jam in specie ea, ubi $n=2$, a cl. Jacobi (Diar. Crell. IX. p. 394) instituta est.

Allgemeine Bestimmungen wegen Ertheilung des Preises:

In quaestionibus tractandis sermone Latino, Gallico, Anglico, Germanico, Suecico, Danicove uti licebit. Commentationes notandae erunt non nomine scriptoris sed tessera aliqua, adiiciendaque charta obsignata, eadem tessera notata, quae scriptoris nomen, ordinem, domiciliumque indicet. Qui societati adscripti sunt et in imperio Danico habitant, certamine abstinebunt. Qui in una ex propositis quaestionibus solvenda satisfecerit, ei, ubi aliud praemium nominatum non est, praemii loco tribuetur numus aureus societatis, 50 ducatos Danicos pretio aequans.

Commentationes intra exitum mensis Augusti 1842 Joanni Christiano Oersted, qui societati ab epistolis est, transmissae esse debebunt.

*) Ausgezogen aus L'Institut, Ire Section. No. 388. 3. Juin 1841. p. 192.

IV.

Literarischer Bericht.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Leitfaden für einen heuristischen Schulunterricht über die allgemeine Arithmetik und die gemeine Algebra, die Elementargeometrie, ebene Trigonometrie und die Apollonischen Kegelschnitte von Dr. Johann Andreas Matthias. Siebente Auflage, nach dem Tode des Verfassers revidirt und herausgegeben von J. Hennige, Prof.

Erstes Heft. Die Elemente der allgemeinen Arithmetik und gemeinen Algebra. Magdeburg. 1839.

Zweites Heft. Die Planimetrie. Magdeburg. 1840.

Ueber ein in der siebenten Auflage erscheinendes, in vielen Tausend Exemplaren verbreitetes Lehrbuch eines um die Belebung des mathematischen Schulunterrichts, so wie auch um das gesammte preussische Schulwesen überhaupt, insbesondere in der Provinz Sachsen, hochverdienten Verfassers, an welchen sich alle, die ihm nahe zu stehen das Glück hatten, jederzeit mit der grössten Freude, Dankbarkeit und Liebe erinnern, hier ein Urtheil fällen oder eine Relation liefern zu wollen, würde in jeder Beziehung unangemessen und unstatthaft sein. Vielmehr wird die kurze Anzeige, dass bis jetzt wenigstens von den beiden ersten Heften die siebente Auflage erschienen ist, genügen, um zu zeigen, dass dieses Lehrbuch immer noch fortfährt, zur Beförderung eines gründlichen mathematischen Unterrichts auf höhern Lehranstalten beizutragen. Dem Herrn Herausgeber gebührt aber das Zeugniss, dass er eifrig bemüht gewesen ist, das Werk, ohne dessen allgemeinen Charakter zu verwischen, dem Zwecke, welchen der verstorbene Verf. durch dasselbe zu erreichen beabsichtigte, immer näher zu führen und gemässer einzurichten. In dem

Jahrbuch des Pädagogiums des Klosters unser lieben Frauen in Magdeburg. Neue Fortsetzung. Viertes Heft. 1840.

hat der Herr Herausgeber eine vorläufige Probe seiner neuen Bearbeitung mitgetheilt, und in einem Vorworte eine Anzeige von derselben gegeben, zugleich auch in diesem Vorworte dem verstorbenen hochverdienten Verfasser ein schönes Denkmal gesetzt.

In der Hoffnung, dass auch die Stereometrie, die Trigonometrie und die Kegelschnitte bald in einer neuen Bearbeitung durch den Herrn Herausgeber erscheinen werden, wünschen wir, dass in diesem Lehrbuche das Andenken seines hochverdienten Verfassers noch lange fortleben und dasselbe immer kräftig dazu beitragen möge, dass dem mathematischen Unterrichte die lebhafteste Anerkennung der hohen Wichtigkeit für die allgemeine und allseitige Ausbildung des jugendlichen Geistes, welche demselben in jeder Beziehung so sehr gebührt, stets erhalten werde.

Arithmetik.

Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik für die obern Klassen der Gymnasien von C. Scherling, Lehrer der Mathem. und Naturw. am Catharineum in Lübeck. Lübeck. 1841. 8. 16 ggr.

Elemente der Arithmetik und Algebra in System, Commentar und Anwendungen als Lehr- und Uebungsbuch für die mittlern Klassen höherer Lehranstalten und zum Gebrauch für Hauslehrer und beim Selbstunterricht dargestellt von F. H. Müller, Prof. am Gymnasium zu Brandenburg a. H. Zweiter und letzter Theil. Potsdam. 1841. 8. 1 Thlr. 8 ggr.

Der erste Theil dieses sehr viel Gutes enthaltenden Buchs ist im Jahre 1839 in demselben Verlage erschienen. Preis 1 Thlr. 4 ggr.

Finck: Traité élémentaire d'Arithmétique. Strasbourg. 1841. 8. 3 Fr. 50 c.

Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal. Par Cournot. 2 vol. in 8. Paris. 1841. 10 Fr.

Auf der Universität zu Lund sind neuerlichst die folgenden mathematischen Dissertationen — sämmtlich analytischen Inhalts — erschienen:

Praecipuarum Functionum Trigonometricarum per Analysin Infinitorum Explicatio. Praes. Jon. Brag, Astron. Prof.; Respp. Lorenz Theodor Bager, Arvidus W. Brag et Magnus Fredericus Brag. P. I—III. Lundae. (24 S. 4.).

Regulae Derivandi generales. Praes. C. J. D. Hill, Math. Prof.; Resp. Joh. Gustafsson. Lundae. (8 S. 4.).

Regulae simpliciter differentiandi generales. Praes. C. J. D. Hill, Math. Prof.; Respp. A. G. Tauson et C. F. Naumann. Lundae. (S. 9—24. 4.).

Regulae variabiliter differentiandi generales. Praes. C. J. D. Hill, Math. Prof.; Resp. J. A. Berghman. Lundae. (S. 25-34. 4.).

Regulae variabiliter et independenter differentiandi generales. Praes. C. J. D. Hill, Math. Prof.; Resp. J. Rodbe. Lundae. (S. 33—40. 4.).

Disquisitio Academica, Integrationem Aequationis cujusdam Differentialis exhibens. Praes. C. J. D. Hill, Math. Prof.; Resp. C. A. Ehrensvärd. Lundae. (16 S. 4.).

Introductio in Elementarem Functionum Ellipticarum Theoriam. Praes. C. J. D. Hill, Math. Prof.; Resp. P. E. Gulin. P. XIII. Lundae. (S. 97—104. 4.).

Geometrie.

Geometrischer Kursus für die oberen Gymnasial-Klassen, enthaltend Planimetrie, Stereometrie, ebene und körperliche Trigonometrie, mit vielen Uebungsaufgaben. Von J. J. G. Hartmann, Oberlehrer am K. Andreanum zu Hildesheim. Hildesheim. 1841. 8. 1 Thlr. 16 ggr.

Ein gutes Buch, welches zugleich den Beweis von dem guten Zustande des mathematischen Unterrichts auf dem Gymnasium, an welchem der Verf. arbeitet, liefert. Die vielen Uebungsaufgaben, auf die auch schon der Titel hinweiset, sind jedenfalls eine sehr dankenswerthe und zweckmässige Zugabe.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie und Trigonometrie für Gymnasien und höhere Lehranstalten von J. E. H. Ludowieg, Artillerie-Capitain a. D., Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Stade. Zweiter Theil, die Stereometrie und sphärische Trigonometrie enthaltend. Hannover. 1840. 8.

Der im Jahre 1839 in einer zweiten Auflage erschienene erste Theil dieses durch leicht übersichtliche, naturgemässe systematische Anordnung und eine sehr klare und gründliche nach einer gewissen Vollständigkeit und Ausführlichkeit strebende Darstellung sich vortheilhaft auszeichnenden Lehrbuchs enthält die ebene Geometrie und ebene Trigonometrie, und diese beiden Theile bilden nun mit dem im Jahre 1835 ebenfalls schon in einer zweiten Auflage erschienenen

Lehrbuche der Arithmetik und der Anfangsgründe der Algebra für Gymnasien und höhere Lehranstalten

desselben Verfassers ein Ganzes. Wegen der schon oben gerühmten Ausführlichkeit und Vollständigkeit der Darstellung scheinen sich diese Lehrbücher vorzugsweise für den Selbstunterricht und zum Gebrauche des Lehrers zu eignen, wozu sie wohl auch der Verf. selbst hauptsächlich bestimmt hat, da er schon früher als Leitfaden für die Schüler herausgegeben hat:

Erster Cursus der reinen Mathematik, enthaltend: die Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra und der ebenen Geometrie. Zum Gebrauche als Leitfaden beim mathematischen Unterrichte auf höheren Lehranstalten, insbesondere für die mittleren Klassen der Gymnasien. Hannover. 1837. 8. 22 ggr.

Lässt der Verf. nun in ähnlicher Weise noch einen kurzen Leitfaden der Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie erscheinen, so wird er nach unserer Ueberzeugung für die Bedürfnisse der Schüler und Lehrer auf eine sehr zweckmässige Weise gesorgt haben. Die erschienenen neuen Auflagen des Lehrbuchs der Arithmetik und des ersten Theils des Lehrbuchs der Geometrie und Trigonometrie können wohl zu dem Schlusse berechtigen, dass diese Lehrbücher auf vielen Lehranstalten, vorzüglich in Hannover, gebraucht werden, und liefern daher zugleich den für uns wenigstens immer höchst erfreulichen Beweis von dem guten Zustande des mathematischen Unterrichts auf den hannöverschen Gymnasien und andern höhern Lehranstalten. Zur Herausgabe eines Lehrbuchs der Kegelschnitte wird sich der Verf. wahrscheinlich nur entschliessen, wenn auch diese Lehre einen Theil des mathematischen Unterrichts auf den hannöverschen Gymnasien ausmacht, worüber eine nähere Kenntniss uns abgeht. Das neuerlichst erschienene für das Andreanum zu Hildesheim bestimmte, vorher angezeigte Lehrbuch von Hartmann enthält aber auch bloss die von Herrn Ludowieg bearbeiteten geometrischen Theile, nämlich Planimetrie, Stereometrie, ebene und körperliche Trigonometrie.

Lehrbuch der Elementargeometrie. Zum Gebrauche für höhere Bürgerschulen und Realanstalten, so wie zum Selbststudium bearbeitet von F. Kummer. Erster Theil. Ebene Geometrie. Heidelberg. 1841. 8. 14 ggr.

Auch dieses Buch enthält in einem Anhange eine grössere Anzahl theils durch Construction, theils durch Rechnung zu lösender geometrischer Aufgaben.

Wöckel, Dr. L.: Formeln und Aufgaben zur Stereometrie für Gymnasien, Gewerbschulen und zum Selbstunterricht. Nürnberg. 1841. 12. 6 ggr.

Vernier: Géométrie élémentaire. 5me édition. Paris. 1841. 12. 2 Fr. 50 c.

Steiner, Dr. Maur.: de loco geometrico centri lineae rectae definitae cuiusdam longitudinis, cuius termini in peripheria lineae secundi ordinis moventur. Dissertatio. Vratislaviae. 1841. 4. 16 ggr.

Programm, wodurch zu der öffentlichen Prüfung der Schüler der Petrischule, welche Freitag den 2. October 1840 gehalten werden soll, ergebenst einladet F.

Strehlke, Königl. Prof. und Director der Petrischule. Danzig, gedruckt in der Gerhard'schen Officin.

Dieses sehr lesenswerthe Programm enthält als wissenschaftlichen Theil eine analytische Auflösung der schon von Apollonius im 5ten Buche seines Werks über die Kegelschnitte geometrisch behandelten Aufgabe: Aus einem in der Ebene eines Kegelschnitts gegebenen Punkte Normalen an den Kegelschnitt zu construiren, von Herrn Professor und Director Strehlke zu Danzig. Ausserdem theilt Herr Director Strehlke auf S. 12—16 unter der Ueberschrift: Pädagogische Mittheilungen eine Anzahl von Aufgaben, Lehrsätzen u. s. w. mit, die im Unterrichte wirklich vorgekommen sind, und sich in irgend einer Weise als anregend und fruchtbar bei der Bildung der Jugend gezeigt haben, und macht zu ähnlichen Mittheilungen in den folgenden Programmen sehr erfreuliche Hoffnung, eine nach unserer Ueberzeugung treffliche Einrichtung, die wir den Verfassern von Programmen an andern Lehranstalten dringend zur Nachahmung empfehlen möchten. Wir werden, wie wir dies schon diesmal oben mit den von Herrn Director Strehlke in dem Programme von 1840 mitgetheilten Aufgaben (für jetzt wenigstens zum Theil) gemacht haben, solche Mittheilungen immer gern im Archive wieder abdrucken lassen, um dieselben der Vergessenheit zu entreissen, welcher leider nur zu oft solche kleine meistens nicht in den Buchhandel kommende Schriften, wie Programme, Dissertationen, u. s. w. anheim fallen. Bemerken wollen wir bei dieser Gelegenheit endlich noch, dass in dem Programme der Petrischule zu Danzig vom Jahre 1839 Herr Director Strehlke die Beachtung der Lehrer der Mathematik sehr verdienende Bemerkungen über den Elementar-Unterricht in der Geometrie mitgetheilt hat.

De chordis linearum et superficierum secundi gradus. Dissertatio quam scripsit etc. C. G. H. Brandes, Phil. Doct. et AA. LL. M. Lipsiae. 1841. 4.

Der Verf. dieser guten Habilitationsschrift ist ein Sohn des trefflichen, den Wissenschaften, seinen Schülern und Freunden leider zu früh entrissenen H. W. Brandes. In dem ersten Kapitel wird der folgende für alle Kegelschnitte gültige Lehrsatz bewiesen:

Si per quamcunque sectionem conicam (generatam) chordae descriptae eaeque ad unum quodcunque punctum omnes directae sunt, earum chordarum centra in sectione conica (generante) jacent, quae per commune chordarum punctum (originem) et per centrum datae sectionis conicae transit, et cujus centrum inter modo memorata duo puncta medium locum tenet. Si generata ellipsis aut parabola est, generans linea similis et similiter posita est. Si generata hyperbola est, generans est: 1) hyperbola similis et similiter posita, si origo in eodem cum generata asymptotorum angulo jacet; 2) par linearum rectarum ad asymptotos parallelarum, si origo in asymptotis generatae usquam posita est; 3) hyperbola, cujus asymptoti ad generatae asymptotos parallelae sunt sed cujus diameter principalis cum diametro generatae rectos angulos facit (hyperbola conjugatae similis et similiter posita), si origo in eo asymptotorum angulo sumta est, qui generatam non continet.

In dem zweiten Kapitel wird hierauf dieser Lehrsatz zur Herleitung einiger Fundamentalsätze der Lehre von den Kegelschnitten angewendet, bei welcher Gelegenheit im 25sten Paragraphen der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller durch vier gegebene Punkte gehenden Kegelschnitte bestimmt, auch eine neue Bestimmungsart des Mittelpunkts eines durch fünf gegebene Punkte zu legenden Kegelschnitts gelehrt wird. Das dritte Kapitel enthält endlich den Beweis eines dem obigen ganz analogen Satzes von den Flächen des zweiten Grades.

Die Methode, in welcher diese sehr lesenswerthe Dissertation geschrieben ist, kann man füglich mit dem Namen der trigonometrischen bezeichnen, und ist im Allgemeinen dieselbe, welche auch der Vater des Verfs. in seinen Schriften, z. B. in seinem bekannten Lehrbuche der höhern Geometrie in analytischer Darstellung. 2 Thle. Leipzig. 1822. 4., meistens angewandt hat.

Praktische Geometrie.

Instruction für die praktische Aufnahme mit Messtisch und Kippregel. Kassel. 1840. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Die geometrische Detail-Aufnahme eines Landes oder Darstellung der dabei vorkommenden einzelnen Arbeiten von L. W. Klemm. Stuttgart. 1841. 8. 10 ggr. als drittes Heft zu:

Die Landes-Vermessung und die in ihrem Gefolge befindlichen Arbeiten, erläutert durch die im Königreich Würtemberg zur Ausführung gekommene Vermessung von L. W. Klemm. Drittes Heft. Geometrischer Theil.

Diese kleine Schrift enthält, ohne sich auf das Specielle viel einzulassen, eine zwar kurze, aber gute allgemeine Anleitung zur zweckmässigen Anordnung der bei der geometrischen Detail-Aufnahme eines Landes vorkommenden Arbeiten, wie aus der folgenden Inhaltsanzeige noch mehr erhellen wird: 1) das Mess-System im Allgemeinen. 2) Der Organismus bei den Vermessungs-Arbeiten. 3) Das Messtischblatt. 4) Die Mess-Instrumente. 5) Die Punktenbestimmung. 6) Die Parzellar-Vermessung. 7) Das Messungs-Manual. 8) Die Ausführung des Kartenblatts. 9) Die Flächenberechnung. 10) Die Revision. 11) Die Vervielfältigung der Messtischblätter durch die Lithographie. 12) Die geometrische Vertheilung der Grundstücke. 13) Die Bergzeichnung. 14) Zusätze. Anhang. Flächenberechnungs- (Aufnahms-) Register. Wir empfehlen dieselbe daher allen denen, welche mit der Leitung und Ausführung geometrischer Detail-Aufnahmen beauftragt sind, zur Beachtung.

Ducourneau: Traité pratique du mesurage des surfaces cylindriques et des cubes en général. Paris. 1841. 8. $2\frac{3}{4}$ Thlr.

Trigonometrie.

Dr. Joh. Müller: Elemente der sphärischen Trigonometrie für Schulen bearbeitet. Darmstadt. 1841. gr. 12. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Lentheric: Trigonométrie et Géometrie analytique. Paris. 8. 6 Fr. 50 c.

Mechanik.

E. H. A. Kayser (Prof. an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe): Handbuch der Mechanik, mit Bezug auf ihre Anwendung nnd mit besonderer Rücksicht auf ihre Darstellung ohne Anwendung der höhern Analysis bearbeitet. Carlsruhe. 1840. 8. 4 Thlr.

Eine ausführlichere Anzeige in einem der nächsten Hefte.

Praktische Mechanik.

Pambour, Graf P. M. G. de: Theoretisch praktisches Handbuch über Dampfwagen, enthaltend die Construction der Locomotiven und ihre Anwendung zur Fortschaffung der Lasten, die Berechnungsart der Geschwindigkeiten, mit welchen sie bestimmte Ladungen fortbewegen, und der Vortheile, welche sie unter allen Umständen gewähren können, die Angabe der Bedingungen, welche bei ihrer Construction zur Erlangung bestimmter Effecte erfüllt werden müssen, Untersuchungen, welche sich auf eine grosse Anzahl in England angestellter Versuche stützen u. s. w. Nach der 2ten Originalauflage deutsch bearbeitet von Dr. E. H. Schnuse. Braunschweig. 1841. 8. 2 Thlr. 8 ggr.

Mougel et Mouchelet: Mécanique des travaux publics, ou Application de la vapeur et des machines les plus modernes. Livr. 1 et 2. Paris. 1841. Folio.

Manuels-Roret. Nouveau manuel complet de constructeur des machines locomotives; par Julien. Paris. 1841. 18. 2 Thlr.

Fourneyron: Mémoire sur les turbines hydrauliques et sur leur application en grand dans les usines et manufactures. Liège. 1841. 8. 1 Thlr. 10 ggr.

Astronomie.

Jahrbuch für 1841. Herausgegeben von H. C. Schumacher mit Beiträgen von Dove, Kämtz, Lehmann, Mädler, Olbers und Quetelet. Stuttgart und Tübingen. 1841. 8. 2 Thlr.

Enthält folgende Aufsätze:

Noch etwas über den veränderlichen Stern χ Bayeri im Schwan. Nebst einigen Beobachtungen über Variabilis Hydrae von Olbers. Im Jahre 1818 geschrieben.

Ueber die Temperaturveränderungen der Erde in der Nähe ihrer Oberfläche von A. Quetelet.

Bemerkungen bei Gelegenheit der Abhandlung von Quetelet: Ueber den Menschen und die Gesetze seiner Entwickelung, von Dr. F. W. H. Lehmann.

Ueber den Zusammenhang zwischen Temperatur, Luftdruck und Windrichtung, von L. F. Kämtz.

Ueber die Mondgebirge von J. H. Mädler.

Nordamerika und Europa meteorologisch mit einander verglichen von H. W. Dove.

Der übrige Inhalt und die sonstige Einrichtung dieses trefflichen Jahrbuchs, dem wir ungestörten Fortgang wünschen, können als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden. Ausser den Gaussischen Tafeln zur Bestimmung der Höhenunterschiede sind auch die Bessel'schen mitgetheilt, bei denen auch der in der Luft enthaltene Wasserdampf berücksichtigt ist, und vorausgesetzt wird, dass an beiden Stationen ausser dem Barometer und Thermometer auch das Psychrometer beobachtet worden sei.

Auf der Universität zu Lund ist neuerlichst folgende astronomische Dissertation erschienen:

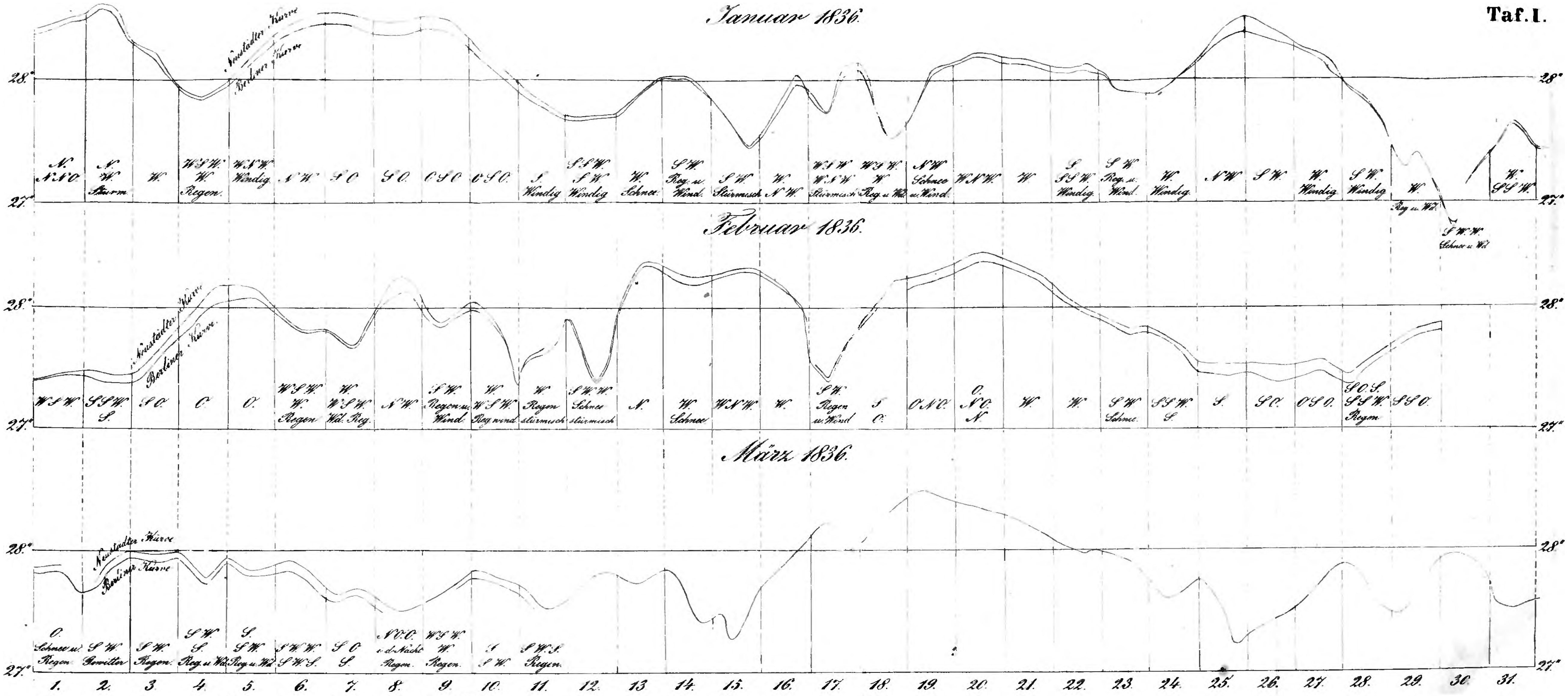
De motu systematis solaris progressivo. Disputatio astronomica. Praes. J. M. Agardh, Arithm. Doc.; Respp. B. G. Borg et N. L. Andersson. I. II. Lundae. (33 S. 8.).

Physik.

Bergery: Physique et Chimie des écoles primaires. 3me édition. Paris. 1841. 12. 2 Fr. 50 c.

Pouillet: Elémens de Physique expérimentale. 2me Partie et Atlas. Brux. 1841. 8. complet 6 Thlr.

Taf. I.



Die ausgezogenen Ordinaten entsprechen den Beobachtungen um 5 Uhr Morgens.

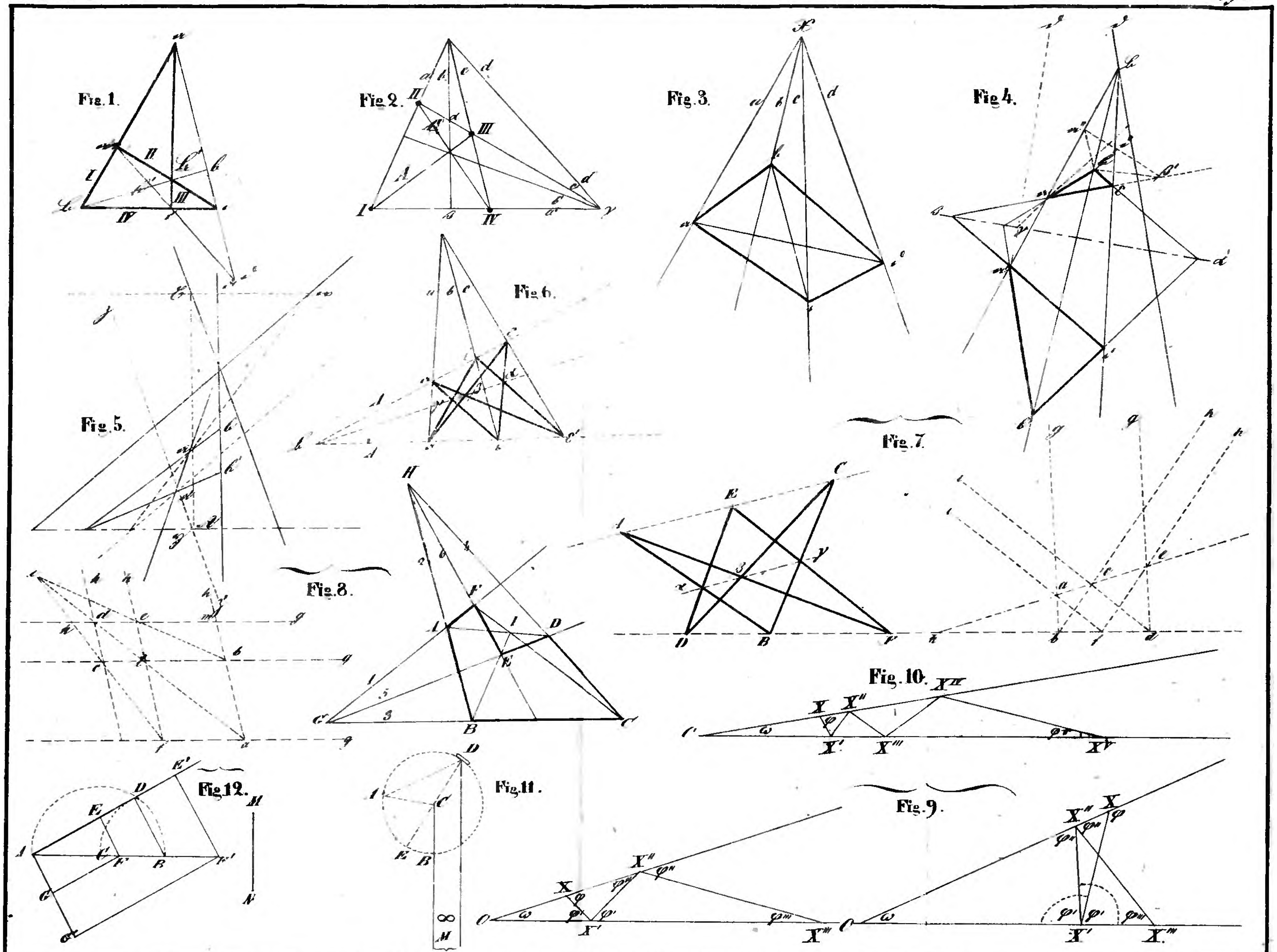


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.

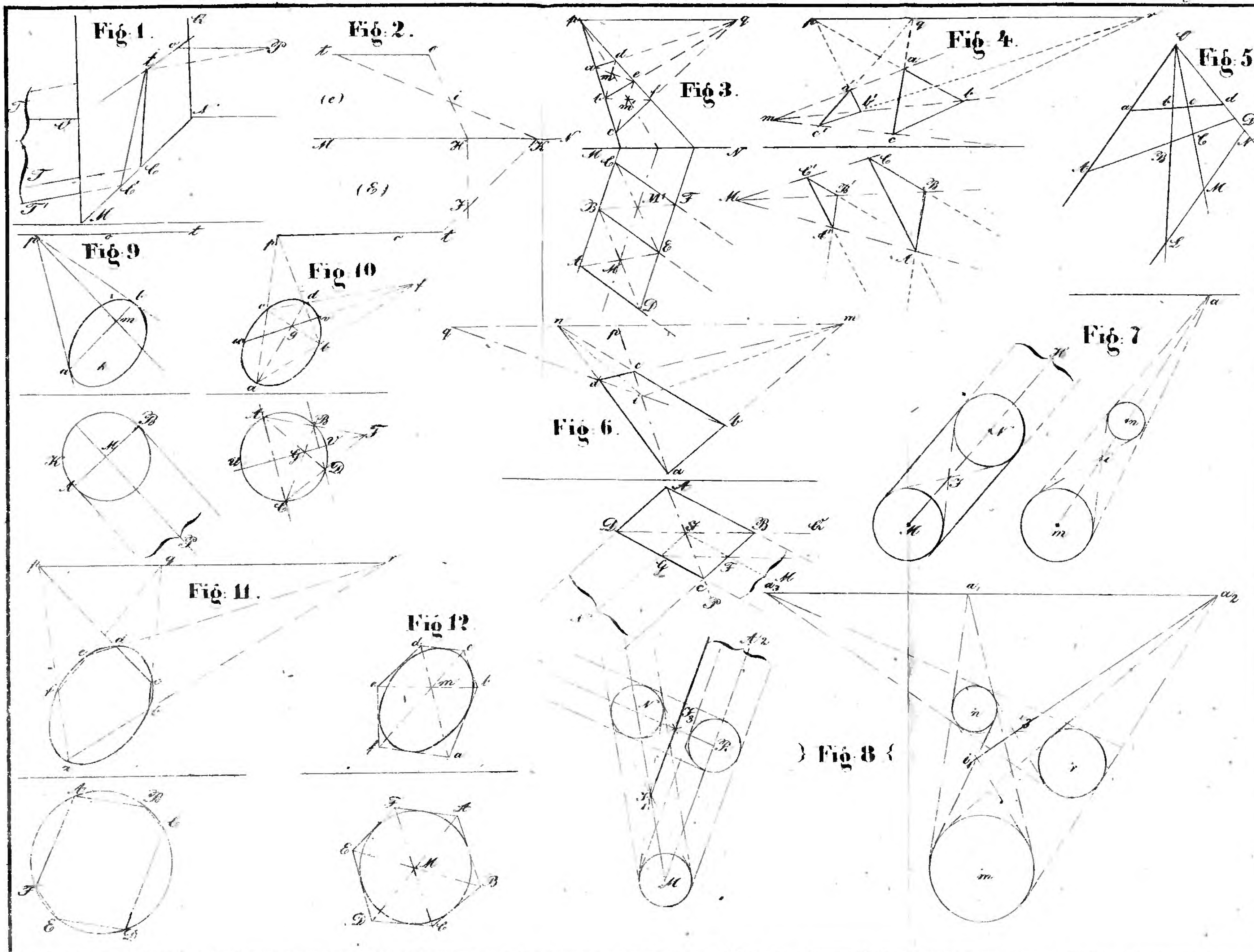


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11.
Fig. 12.

Fig. 3.

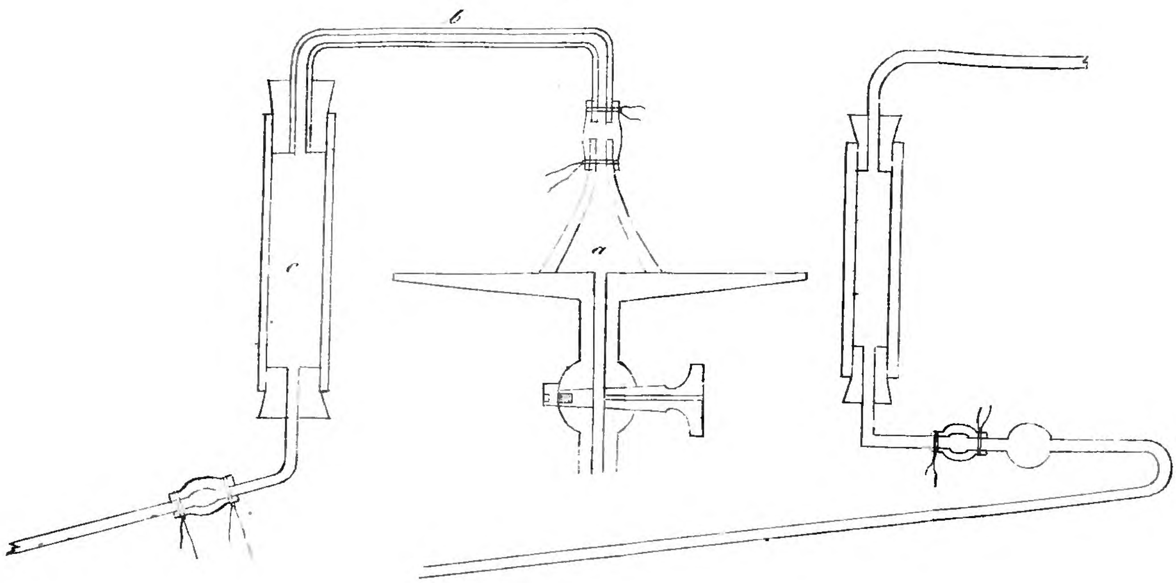


Fig. 1.

Fig. 2.