

LORD KELVIN  
VORLESUNGEN ÜBER  
MOLEKULARDYNAMIK

DEUTSCH VON B. WEINSTEIN

## P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematik**, der **Naturwissenschaften** und **Technik** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter dieser Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband Geschichte, Philosophie und Didaktik besprochen wird. Eine **französische Ausgabe**, von französischen Mathematikern besorgt, hat zu erscheinen begonnen.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica**, Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften, das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik**, Organ für angewandte Mathematik, die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, die **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Blätter**, ferner das **Archiv für Rassen- und Gesellschafts-Biologie**, die **Monatshefte für den naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen**, die **Geographische Zeitschrift**, **Himmel und Erde**, illustrierte naturwissenschaftliche Monatsschrift u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: „**Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner**“. Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die in 30000 Exemplaren im In- und Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags durch ausführliche Selbstanzeigen der Verfasser in Kenntnis setzen. Die **Mitteilungen** werden jedem **Interessenten auf Wunsch regelmäßig bei Erscheinen umsonst und postfrei von mir übersandt**. Das ausführliche „**Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzwissenschaften**“ 101. Ausgabe, mit eingehender systematischer und alphabetischer Bibliographie und einem Gedenktagebuch für Mathematiker, 10 Bildnissen sowie einem Anhange, Unterhaltungsliteratur enthaltend. [CXXXI, 392 u. 92 S.] gr. 8. 1908 steht Interessenten umsonst und postfrei zur Verfügung.

LEIPZIG, Poststraße 3.

**B. G. Teubner.**

LORD KELVIN

VORLESUNGEN ÜBER

MOLEKULARDYNAMIK UND

DIE THEORIE DES LICHTS

DEUTSCH HERAUSGEGEBEN VON

B. WEINSTEIN

MIT 132 FIGUREN



LEIPZIG UND BERLIN

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1909

**Do korzystania w Czytali**

H



6946

ALLE RECHTE, EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.



## Vorrede des Verfassers.

Vom Präsidenten Gilman eingeladen, in der John-Hopkins-Universität nach der Versammlung der British Association in Montreal im Jahre 1884 eine Reihe Vorlesungen über ein von mir zu wählendes Gebiet der theoretischen Physik zu halten, bin ich dieser Einladung gern nachgekommen. Ich wählte als Gegenstand die Wellentheorie des Lichtes, jedoch in der Absicht, eher ihre Mängel hervorzuheben, als vor jüngeren Studenten den wunderbaren Erfolg zu zeigen, mit dem diese schöne Theorie alles, was vor den Zeiten Fresnels und Thomas Youngs bekannt war, erklärt und Ströme neuer Kenntnisse hervorgerufen und so das ganze Gebiet der theoretischen Physik glänzend bereichert hat. Meine Zuhörerschaft sollte aus höheren Beflissenen der Physik bestehen, und von Anfang an hatte ich die Empfindung, daß unsere Vorträge eher Zusammenkünfte von Mitarbeitern zum Zwecke der Förderung der Wissenschaften waren, als ein Unterrichten meiner Kommilitonen durch mich. Ich sprach vollkommen frei und hatte nie die leiseste Furcht, ihren vollen Glauben an den Äther und dessen das Licht bildende Wellen zu untergraben, jedenfalls durfte ich vor ihnen sprechen von der Unvollkommenheit unserer Mathematik, von der Mangelhaftigkeit und den Fehlern unserer Anschauungen über die mechanischen Eigenschaften des Äthers und von der überwältigend großen Schwierigkeit, ein Wirkungsfeld für den Äther zwischen den Atomen der ponderablen Materie zu finden. Wir alle hatten die Empfindung, daß man den Schwierigkeiten ins Auge schauen muß und ihnen nicht aus dem Wege gehen darf, daß man sie sich angelegen sein lassen muß mit der Hoffnung, sie, wenn möglich, zu lösen; jedenfalls aber mit der sicheren Zuversicht, daß es eine Erklärung für jede Schwierigkeit gibt, auch wenn wir erfolglos nach ihr suchen sollten.

Es bietet mir in gewissem Maße eine Genugtuung und ich hoffe, daß es allen meinen Mitarbeitern, die noch in unserer wissenschaftlichen Welt mittätig sind, wenn dieses Werk in ihre Hände gelangt, eben solche Genugtuung bereiten wird, mechanische Erklärungen aller der Schwierigkeiten zu finden, mit denen wir uns von der ersten bis zur letzten unserer zwanzig Vorlesungen im Jahre 1884 beschäftigt haben. Wir alle, dessen bin ich gewiß, fühlen uns sympathisch interessiert, zu erfahren, daß zwei von uns, Michelson und Morley, durch ihre große experimentelle Arbeit über die Bewegung des Äthers relativ zur Erde den einen allein schweren Einwurf<sup>1)</sup> gegen unsere mechanischen Erklärungen behoben haben, indem sie die Annahme einschließen<sup>2)</sup>, daß der Äther in dem von der Erde und anderen Körpern des Sonnensystems durchsetzten Raume sich in absoluter Ruhe befindet, außer so weit er durch Wellen von Licht oder strahlender Wärme oder durch Änderungen magnetischer Kraft bewegt wird. Es ist zu hoffen, daß weitere Versuche zur entscheidenden Beantwortung der umfassenden und so wichtigen

1) Vgl. Anhang A § 18 und Anhang B § 10.

2) Vgl. H. A. Lorentz, Abhandlungen. Siehe Sitzungsberichte der Berliner Akad. d. Wissensch. 1904, S. 1293 u. 1404. D. H.

Frage führen werden: befindet sich der Äther im ganzen Universum, außer sofern er durch Wellen bewegt wird, die durch Bewegungen ponderabler Materie hervorgerufen sind, in absoluter Ruhe oder nicht? Ich kann nur sagen, daß ich die Empfindung habe, daß die richtige Antwort auf diese Frage aller Wahrscheinlichkeit nach bejahend lauten wird, und vorläufig nehme ich an, daß dies der Fall ist, hebe aber immerhin hervor, daß eine experimentelle Bestätigung oder Abweisung erforderlich ist. Soweit wir uns mit dieser Stellung abfinden können, dürfen wir uns befriedigt fühlen, daß alle die Schwierigkeiten aus dem Jahre 1884, die in den Vorlesungen I, X und XV auseinandergesetzt sind, in den Vorlesungen XVIII, XIX und XX, wie sie in den Jahren 1902 und 1903 neu niedergeschrieben sind, vollständig aufgeklärt sind.<sup>1)</sup>

Meiner Meinung nach sind die nächsten wirklichen Fortschritte in der Mechanik des Äthers, die zu erwarten stehen, die folgenden:

I. Eine Darlegung seines Zustandes in der Nähe eines Stahlmagnets oder eines Elektromagnets, wodurch eine statische Kraft zwischen zwei Magneten sowohl im bloßen Äther als auch in einem Raume wirkt, der außerdem von gasförmiger, flüssiger oder fester ponderabler Materie erfüllt ist.

II. Eine Untersuchung der Kraft zwischen zwei bewegten Elektronen, die aus der reinen Boscovichschen Abstoßung dadurch modifiziert ist, daß sie mit einer Kraft zusammengesetzt ist, die von der Trägheit des durch die Bewegung jedes der einzelnen Elektronen in Bewegung versetzten Äthers herrührt.

Mir scheint, daß die Aufgabe II<sup>2)</sup> gegenwärtig bereits vollkommen in unserem Bereiche liegt, daß aber die Aufgabe I die Kenntnis einer Eigenschaft des Äthers erfordert, die in der, in dem vorliegenden Werke bearbeiteten, rein elastischen Festkörpertheorie nicht enthalten ist. Meine Aufgabe bei der Ausarbeitung der Baltimore-Vorlesungen war die, zu finden, wieviel von den Erscheinungen des Lichtes erklärt werden können, ohne über die Theorie des elastischen Festkörpers hinauszugehen. Wir können jetzt antworten: Alles Nichtmagnetische, nichts Magnetisches. Die sogenannte „elektromagnetische Lichttheorie“ hat uns bisher nichts geholfen; also die große Aufgabe, die noch ganz vor uns liegt, ist die, eine umfassende Mechanik des Äthers, der Elektrizität und der ponderablen Materie zu finden, die die elektrostatische Kraft, die magnetostatische Kraft, den Elektromagnetismus, die Elektrochemie und die Wellentheorie des Lichtes in sich schließt<sup>3)</sup>

Ich nehme diese Gelegenheit wahr, den Dank auszusprechen, mit dem

1) Die Frage der Ruhe oder Bewegung des Äthers ist gerade jetzt eine brennende geworden. Die Schwierigkeiten der Experimente sind aber so außerordentlich, daß jede vermeintliche Entscheidung doch wieder in Frage gestellt wird.

2) Die Zahl der Untersuchungen auf diesem Gebiete wächst ins Ungemessene. Ich verweise auf das Fundamentalwerk M. Plancks, Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig 1906, und die ausgezeichnete Zusammenstellung der wichtigsten und bedeutendsten Arbeiten durch Abraham und Langevin: Jons, Electrons, Corpuscles, Paris, Gauthier Villars 1905, endlich auf die schöne Zusammenfassung und Durcharbeitung der allgemeinen Theorien durch M. Abraham in der Rendiconti del Circolo Matematico die Palermo Tomo 28 (1909) „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“.

D. H.

3) Diese umfassende Aufgabe wird jetzt mit dem größten Eifer bearbeitet, und welche bedeutenden Erfolge schon erzielt sind, zeigen die Untersuchungen von H. A. Lorentz, Max Planck, Drude, M. Wien, E. Cohn, M. Abraham u. a. Der Verfasser hat in diesem Buche selbst vieles dazu beigetragen, diese Aufgabe zu lösen und sein Urteil über die elektromagnetische Lichttheorie zu korrigieren. D. H.

ich mich der herzlichen und genialen Mitwirkung meiner Mitarbeiter in unsern Versammlungen vor 19 Jahren in Baltimore und der teilweise aktiven Beihilfe erinnere, die mir von dem verstorbenen Prof. Rowland tagtäglich geleistet wurde.

Ich wünsche ferner einem aus unserer Zahl, Herrn A. S. Hathaway, für die Sorgfalt und Gewissenhaftigkeit zu danken, mit der er meine Vorlesungen stenographisch niedergeschrieben und seinen Bericht der John-Hopkins-Universität in dem im Dezember 1884 veröffentlichten autographierten Bande vorgelegt hat. Die ersten elf Vorlesungen, wie sie in diesem Bande erscheinen, sind nach dem Autogramm mit nur geringen redaktionellen Änderungen und mit einigen wenigen kurzen, genau datierten Ergänzungen abgedruckt.

Dreizehn und ein halbes Jahr, nachdem die Vorlesungen gehalten waren, wurden der zwölften Vorlesung einige größere Ergänzungen angefügt. In den Vorlesungen XIII, XIV, XV überlagern neugeschriebene Ergänzungen immer weitere Teile des autographierten Berichtes, der aber immer noch die Grundlage jeder Vorlesung ausmacht. Die Vorlesungen XVI—XX wurden in den Jahren 1901, 1902, 1903 neu geschrieben.

Bei meiner Arbeit der letzten fünf Jahre habe ich für das vorliegende Werk wertvolle Unterstützung erhalten zuerst von Herrn W. Craig Henderson, dann von Herrn W. Anderson und endlich von Herrn G. A. Witherington, und zwar nicht bloß bei der Schreibarbeit, sondern häufig auch bei schwerer mathematischer Rechnung und Zeichnung; ich bin den Herren für alles, was sie für mich getan haben, sehr dankbar.

Der Abdruck dieses Werkes begann im August 1885 und schritt mit unregelmäßigen Zwischenräumen während der seitdem verflossenen 19 Jahre fort in einer Weise, die zu meinem größten Bedauern für die Druckerei äußerst unbequem gewesen sein muß.

Ich möchte an dieser Stelle den Herren J. und C. F. Clay und der Universitätsdruckerei in Cambridge für ihr nie versagendes Entgegenkommen meinen Dank aussprechen, da sie für mich unter so kritischen Umständen arbeiteten, und mit so bewunderungswürdiger Sorgfalt alles getan haben, was geschehen konnte, um die Genauigkeit und typographische Vollkommenheit des Buches sicherzustellen.

Netherhall, Januar 1904.

Kelvin.

## Vorwort des Herausgebers.

Die Frage einer deutschen Ausgabe der Vorlesungen ist unmittelbar, nachdem der Verfasser eine englische zu veranstalten beschlossen hatte, besprochen und verabredet worden, also vor 24 Jahren. Damals lag die von Lord Kelvin in seiner Vorrede erwähnte Niederschrift vor. Nachdem der Verfasser jedoch erklärt hatte, diese Niederschrift nur dem Werke zugrunde legen, im übrigen aber eine völlige Umarbeitung vornehmen zu wollen, mußte mit der deutschen Ausgabe gewartet werden, bis der Verfasser mit seiner Arbeit fertig war. Die lange Zeit hindurch ist der Herausgeber mit ihm in Verbindung geblieben, und er hat es für eine Ehrenpflicht gegen den Verstorbenen und für eine Ehre gegen den so großen Physiker und Gelehrten gehalten, trotz der Fülle eigener Arbeiten und Berufsgeschäfte die mühselige Bearbeitung des Werkes auch jetzt noch durchzuführen.

Ich hoffe, daß das deutsche gelehrte Publikum mir Dank wissen wird, denn ich habe mich bemüht, ein Werk, das infolge der sonderartigen Behandlungs- und Schreibweise zu den schwierigsten gehört, die unsere Fachliteratur aufzuweisen hat, dem Verständnis näherzubringen.

Zur Empfehlung des Buches etwas zu sagen, wäre unpassend. Nur über die Eigenart seien einige Worte gegönnt. Entsprechend der langen Dauer der Bearbeitung und den gewaltigen Fortschritten auf dem Gebiete der Physik gerade während dieser Dauer, wandeln sich die Ansichten des Autors und schmiegen sich den gewonnenen Erkenntnissen an. Das Werk wird darum immer moderner, und zuletzt werden Fragen behandelt, mit denen sich unsere modernsten Physiker noch abmühen. Sodann handelt es sich nicht bloß um die Theorie des Lichtes, sondern es schließen sich zahlreiche Betrachtungen und Untersuchungen fast aus allen Gebieten der exakten Wissenschaft an. Selbst die Astronomie geht nicht leer aus, und der Leser wird manches finden, was mit neuesten Anschauungen über die Entwicklung der Welt übereinkommt.

Die Aufgabe des Herausgebers hat darin bestanden, die Bearbeitung zu einer möglichst wortgetreuen und ganz sinngetreuen zu gestalten, und das Formelmateriale von Druckversehen zu befreien. Zur Aufklärung sowie zur Berücksichtigung der deutschen Literatur habe ich Anmerkungen hinzugefügt. Änderungen des Originals sind nur da vorgenommen, wo sie unausweichlich schienen. Dieses betrifft namentlich Kürzungen, wo der Verfasser dem gesprochenen Worte folgend sich wiederholte oder verlor. Bei aller Bemühung wäre es mir aber nicht möglich gewesen, die Bearbeitung durchzuführen, wenn mein Freund, der Lehrer an der Berliner Baugewerkschule, Dr. Leopold Levy, dem die Wissenschaft schon so manche treffliche Arbeit verdankt, mir nicht in der hingebendsten Weise geholfen hätte. Ihm gebührt ein großer Teil des Verdienstes an dem Zustandekommen dieser Bearbeitung.

Schließlich noch ein Wort über die Stellung des Verfassers in diesem Buche zu den gegenwärtigen Ansichten. Der Verfasser huldigt mehr einer mechanischen Auffassung der Vorgänge. Dieses ist aber nicht so zu verstehen, daß er die elektrisch-elektromagnetische ablehnt, sondern daß er sich ihr gegenüber mehr kritisch und, in bezug auf ihre Sondererfolge, skeptisch verhält. In der Tat wird jeder kühle Beobachter zugeben müssen, daß man gegenwärtig in der Verelektrisierung wohl etwas zu weit geht, denn noch sind die Sondererfolge der Elektrontheorie nicht entfernt von solcher grundlegenden Bedeutung, daß man ein Recht hätte, von den größten Forschern durchdachte Lehren ohne weiteres über Bord zu werfen. Es wird noch sehr lange gearbeitet werden müssen, und namentlich auch mit mehr philosophischen Mitteln, ehe man auch nur über die ersten Ansichten von den neu zu schaffenden Grundlagen zu einiger Sicherheit gelangt sein wird, ganz abgesehen davon, daß zuletzt doch alles auf Rechnungen nach den Regeln der Mechanik hinauskommt und niemand in das Neue einzudringen vermag, der mit den unentbehrlichen Mitteln der früheren Lehren nicht Bescheid weiß.

Das Werk selbst aber trägt den Stempel der Genialität und kann darum auch nur in hingebendem Studium genossen werden.

Charlottenburg, im Juni 1909.

Weinstein.

# Inhalt.

## Erste Vorlesung.

### Schwierigkeiten in der Wellentheorie des Lichtes, Einfluß der Substanz.

	Seite
Die Wellentheorie des Lichtes, molekulare Behandlung durch Fresnel und Cauchy, molare durch Green . . . . .	1
Regelmäßige Dispersion. Anomale Dispersion; Hypothesen von Cauchy und Helmholtz. Zeitelement in der Konstitution der Materie. „Elektromagnetische Lichttheorie.“ Natur des Äthers; experimentelle Vergleichung mit Schusterpech . . . . .	3
Richtung der Schwingungen in polarisiertem Licht. Die mechanische Theorie der Brechung und Spiegelung ist nicht vollkommen; bestehen Unterschiede in der Starrheit oder in der Dichte des Äthers zu beiden Seiten einer spiegelnden Fläche? Versuche von Professor Rood über Reflexionsvermögen. . . . .	6
Doppelbrechung; ihre Schwierigkeiten. Von Rankine und von Rayleigh ersonnene, von Stokes geprüfte Erklärungen, Bestätigung des Huyghensschen Gesetzes. Weitere Verbildlichung durch ein mechanisches Modell. Schluß . . . . .	11

## Zweite Vorlesung.

### Elastizitätskräfte, schwingende Systeme.

#### a) Molar.

Mechanik elastischer Festkörper. Die Radians von James Thomson. Allgemeine Gleichungen für Energie und Kraft. Gleichungen für isotropes Material. Beziehung zwischen den 21 Koeffizienten von Green und den Raum- und Starrheitsmoduln . . . . .	15
Allgemeine Bewegungsgleichungen; Abänderung für Heterogenität; Fall der Starrheit Null; kompressible Flüssigkeit; Lord Rayleighs Arbeit über das Blau des Himmels . . . . .	19

#### b) Molekular.

Mechanik einer Reihe miteinander verbundener Partikel. Illustrierendes mechanisches Modell. Die Ausbreitung von Lichtwellen durch die Atmosphäre. Bewegungsgleichungen . . . . .	21
--	----

## Dritte Vorlesung.

### Gleichungen der Elastizitätstheorie, schwingende Systeme.

#### a) Molar.

Mechanik eines elastischen Festkörpers. Illustrierendes Modell für 21 Koeffizienten. Bewegungsgleichungen; Verfahren sie aufzulösen. Geschwindigkeit der Verdichtungs- und der Drillungswellen. Leshies Versuch über den Ton einer Glocke in Wasserstoff, erklärt durch Stokes . . . . .	25
--	----

#### b) Molekular.

Veränderungen einer zusammengesetzten reihenförmigen Molekel. Ein Kettenbruch für die Lösung . . . . .	28
--	----

## Vierte Vorlesung.

**Wellen in isotropen Systemen, Schallwellen.****Molar.**

Bewegungsgleichungen eines elastischen Festkörpers; ein Verfahren alle möglichen Lösungen zu erhalten. Die Energie der Verdichtungswellen von Äther darf vernachlässigt werden. Der elektromagnetischen Lichttheorie fehlt eine mechanische Grundlage; die Fortpflanzung elektrischer und magnetischer Störungen muß in die Wellentheorie des Lichtes gebracht werden	Seite 32
Lösungen für Verdichtungswellen, die von einem Punkte aus nach außen ziehen; Kugelwellen; eine im Äther schwingende Kugel; zwei entgegengesetzt in der Verbindungslinie der Mittelpunkte schwingende Kugeln; Luftschwingungen in der Umgebung einer Stimmgabel; Kegel der Tonlosigkeit	35

## Fünfte Vorlesung.

**Schwingungen von Molekelnsystemen, Dispersion.****a) Molar.**

Fortsetzung über Luftschwingungen in der Umgebung einer Stimmgabel	41
--	----

**b) Molekular.**

Schwingungen einer gereihten Molekel. Periode und Verhältnisse der Verschiebungen; kritische Perioden; unendliche Periode	42
Fluoreszenz. Endliche Wellenfolgen in einem dispergierenden Medium. Anfang und Endigung von Licht	46

## Sechste Vorlesung.

**Akustische Schwingungen, schwingende Molekelnsysteme.****a) Molar.**

Verhältnis zwischen Starrheit und Kompressibilität. Geschwindigkeitspotential. Verdichtungswellen; Schwingungen in hinreichendem Abstand vom Ausgangspunkte; kreisförmige Glocke, Stimmgabel, elliptische Glocke. Schwingungen annähernd kreisförmiger Platten, Tonlosigkeits-Ebenen. Geschwindigkeit von Wellengruppen in durchsichtigen Substanzen	49
--	----

**b) Molekular.**

Schwingungen einer gereihten Molekel. Lagrange; „Algorithmus endlicher Differenzen“. Gliederzahl in einer Determinante	55
--	----

## Siebente Vorlesung.

**Schwingende Molekelnsysteme, Dispersion und Reflexion.****Molekular.**

Schwingungen gereihter Molekeln. Lösung in Ausdrücken von Wurzeln; Bestimmung von Wurzeln	58
Metallische Reflexion. Rayleigh über Cauchy; Sellmeier, Helmholtz, Lommel. Lommel über Doppelbrechung, interessant, aber nicht ausreichend: Stokes' experimentelle Widerlegung der Theorie Rankines (unter der Voraussetzung, daß Äther vollkommen inkompressibel ist. Vgl. Vorlesung XIX, § 184, weiter)	62

## Achte Vorlesung.

**Drillungswellen, Verbreitung aus Hin- und Herschwingung.****a) Molar.**

Lösungen für Drillungswellen, Rotationsschwingung im Ursprung; Illustration durch eine Holzkugel in Gelatine. Doppelquelle mit entgegengesetzten	
--	--

Drehungen. Lösungen für Wellen, die von einem hin- und herschwin- Seite  
genden Körper hervorgerufen sind; Stokes, Rayleigh, und das Blau des  
Himmels . . . . . 65

#### b) Molekular.

Plötzlicher und allmählicher Beginn einer Schwingung; Fluoreszenz und  
Phosphoreszenz; anfängliche und dauernde Brechung; anomale Dispersion  
verschwindet nach einiger Zeit . . . . . 73

### Neunte Vorlesung.

## Drillungswellen, Verlauf von Schwingungen, Absorption, Dispersionsformel.

#### a) Molar.

Entgegengesetzt schwingende Körper in einer Geraden. Plötzlicher Anfang  
und allmähliches Aufhören von Schwingungen in einer Lichtquelle. Beob-  
achtungen an Interferenzen; Sellmeier, Fizeau. Diskussion mit Prof.  
Rowland; Schluß, daß das Nachlassen von Schwingungen molekularer  
Herkunft in einigen hunderttausend Schwingungen klein ist; die Mechanik  
wird zu Hilfe gerufen . . . . . 76

Energiebetrag in der Schwingung eines Atoms. Sellmeier, Helmholtz und  
Lommel über den Energieverlust beim Fortschreiten von Wellen. Mechanik  
der Absorption; erste Anschauung von Stokes. Sellmeiers Mechanik  
der anomalen Dispersion . . . . . 80

#### b) Molekular.

Aufgabe über sieben schwingende Teilchen. Mechanische Erklärung der ge-  
wöhnlichen Brechung; mechanisches Modell; Ausdruck für den Brechungs-  
koeffizienten . . . . . 83

### Zehnte Vorlesung.

## Energie der Wellen, Brechungsvermögen.

#### a) Molar.

Energie der Wellen. Bezeichnung für  $\nabla^2$ ; dem Namen Laplacesche Funktion  
wird der Vorzug gegeben; Geometrische Erläuterungen des Fourier-  
schen Satzes zur Darstellung willkürlicher Funktionen . . . . . 87

Cauchy und Poisson über Tiefsee-Wellen; großer Wettstreit aus dem Jahre  
1815 zwischen Cauchy und Poisson über die Gesetze der Wellen . . . . 90

#### b) Molekular.

Schwierigkeiten bezüglich der Polarisierung durch Spiegelung, Doppelbrechung;  
Form der Wellenfläche. Anomale Dispersion, Fluoreszenz, Phospho-  
reszenz und strahlende Wärme lassen sich allein durch Dynamik erkennen.  
Strahlende Wärme des Leslieschen Würfels. Brechungsvermögen in  
weitem Gebiete. Brechungsvermögen des Steinsalzes; Langley. . . . . 94

### Elfte Vorlesung.

## Die Navier-Poissonsche Beziehung, ebene Wellen in äolotropen Körpern.

Die Bezeichnung „Anisotropie“ wird verworfen; von Prof. Lushington ist  
Äolotropie vorgeschlagen. Äolotropie in einem elastischen Festkörper.  
Vater Boscovich war im Jahre 1884 für veraltet angesehen (wurde 1900  
wieder als Leiter gewählt. Vgl. Vorlesungen XV bis XX und die  
Anhänge). Greens einundzwanzig Elastizitätsmoduln Navier-Poisson-  
sches Verhältnis; Widerlegung desselben und vollständige Erläuterung  
der Greenschen Theorie durch mechanische Modelle. Allgemeinste  
ebene Wellen, ausgedrückt durch die einundzwanzig unabhängigen  
Moduln. . . . . 97

## Zwölfte Vorlesung.

**Drei Wellen. Die Sellmeiersche Formel und die Erfahrung.  
Lichtquellen.****a) Molar.**

Seite

Drei Sätze ebener Wellen, deren Vorderflächen einer Ebene parallel sind; Wellenfläche mit drei Schalen; Blanchet; Poisson, Coriolis, Sturm, Liouville und Duhamel über Blanchet. Reine Drillungswelle; Green. Inkompressibilität; Energie von Verdichtungswellen im Äther; Dichte des Lichtäthers . . . . .	108
---	-----

**b) Molekular.**

Kraft zwischen Atom und Äther. Schwingende Molekel; polarisierte Licht- quelle. Mechanik der Dispersion; Theorie von Sellmeier; Brechungs- formel und experimentelle Resultate von Ruhens für das Brechungs- vermögen von Steinsalz und Sylvin. „Mikron“ und „Michron“. . . . .	
Kritische Perioden, $\mu^2 = 1$ , $\mu^2 = 0$ , wenn $\mu^2$ von $-\infty$ bis $+\infty$ verläuft. Stetigkeit in der Modulationstheorie in einem großen Gebiete der Schwingungszahlen; mechanische, elektrische und elektromagnetische Schwingungen sind sämtlich in Schall und Licht enthalten . . . . .	114

## Dreizehnte Vorlesung.

**Schwingungsmodelle. Drillungswellen nach Green und Fresnel.  
Sellmeiers Brechungsformel für Natriumdampf.**

Prof. Morleys numerische Lösung für einen schwingenden Körper mit sieben Perioden. Mechanische Wellenmaschine . . . . .	130
--	-----

**a) Molar.**

Wiederholung über Äolotropie. Richtung der Verschiebung und Rückkehr- kraft. Inkompressibler, äolotropischer elastischer Festkörper. Fran- zösische klassische Benennungen. Quadratische Äolotropie. Rankines Benennungen. Kubische Äolotropie . . . . .	132
Äolotrope Elastizität ohne Schrägwirkung; Gleichsetzung von Geschwindig- keiten für eine Drillungsebene. Greens Theorie der Fresnelschen Wellenfläche. . . . .	133

**b) Molekular.**

Anwendung der Sellmeierschen mechanischen Theorie auf die dunkeln Linien $D_1$ , $D_2$ ; auf eine einzelne dunkle Linie. Photogramme anomaler Dispersion durch Prismen aus Natriumdampf von Becquerel . . . . .	139
---	-----

## Vierzehnte Vorlesung.

**Schwingungsmodell. Sphärische Wellen.****a) Molekular.**

Rowlands Schwingungskörper-Modell. Bewegung von Äther mit einge- lagerten Molekeln . . . . .	147
---	-----

**b) Molar.**

Mathematische Untersuchung von Kugelwellen in einem elastischen Fest- körper . . . . .	151
Stokes' Zerlegung in zwei Komponenten, in eine solche von konstantem Volumen und eine ohne Rotation . . . . .	154
Vereinfachung von Wellen in großem Abstände vom Ursprunge . . . . .	155
Beispiele durch Wahl willkürlicher Funktionen . . . . .	156
Einzelheiten der Bewegung, im Äquator, im 45°-Kegel und in der Störungs- achse . . . . .	156



Die ursprüngliche Störung verläuft auf einer Kugelfläche $S$ ; vollständige Lösung für den Fall, daß $S$ starr ist. . . . .	Seite 157
Zeichnungen zur Illustration einer Bewegung eines inkompressiblen elastischen Festkörpers in einem eine schwingende starre Kugel umgebenden unendlichen Raume . . . . .	158
Verhältnisse der durch die beiden Wellen nach außen geführten Energie, Beispiele . . . . .	161

Fünfzehnte Vorlesung.

**Elastizitätskoeffizienten, Wellenverbreitung und Schwingungsrichtung, Theorie der Doppelbrechung.**

**a) Molekular.**

Modell eines Schwingungskörpers; Erregung synchroner Schwingungen in einer Molekel durch Licht . . . . .	177
Thlipsinomische Behandlung der Kompressibilität. Doppelbrechung; Schwierigkeit; die Wellengeschwindigkeit hängt von der Schwingungsrichtung ab; Stokes; äußere Kraft nach Cauchy und Green, Theorie des Zwanges . . . . .	178

**b) Molar.**

Hypothetischer elastischer Festkörper. Weitere Entwicklung der Theorie des Zwanges; die Beobachtungen von Kerr sind der Zwangstheorie der Doppelbrechung nicht günstig; Glazebrook begründet sie mit Erfolg auf die äolotrope Trägheit . . . . .	178
--	-----

Sechzehnte Vorlesung.

**Äthereigenschaften, die Himmelskörper und ihre Bewegung.**

Mechanisches Äquivalent des Sonnenlichtes und mögliche Dichte des Äthers. Starrheit des Äthers; Nichtvorhandensein eines Widerstandes des Äthers gegen eine Bewegung ponderabler Materie. Besitzt der Äther Schwere? . . . . .	212
Schwere, in einem sehr großen Raume verteilte Materie; Menge der Materie im Sternensystem; Geschwindigkeiten von Sternen; große Geschwindigkeit des Sterns 1830 Groombridge; Newcombs Annahme. Die gesamte sichtbare Fläche der Sterne ist äußerst klein. Anzahl der sichtbaren Sterne? . . . . .	217

Siebzehnte Vorlesung.

**Molekeln und ihre Größe, Zahl und Abstände, Theorie der Himmelskörper, das Himmelslicht.**

Molekulare Dimensionen. Schätzungen von Thomas Young, W. Thomson, Johnstone Stoney, Loschmidt. Spannungstärke im schwarzen Fleck einer Seifenblase; Newton; Dicke der Seifenblase wurde von Reinold und Rücker gemessen. Dünnsäte Ölhaut auf Wasser, Röntgen und Rayleigh . . . . .	229
Kinetische Gastheorie; molekulares Diffusionsvermögen; Theorie von Clausius und Maxwell; O. E. Meyer. Diffusionsvermögen zwischen Paaren von Gasen; Viskosität von Gasen; experimentelle Bestimmung von Diffusionsvermögen durch Loschmidt und von Viskositäten durch Obermayer; Maxwell . . . . .	233
Geschätzte Molekelzahl in einem Kubikzentimeter Gas. Stokes über das polarisierte Licht des wolkenlosen Himmels. Durchsichtigkeit der Atmosphäre; Bouguer und Aitken. Von größeren Partikeln herrührende Wolke. Theorie des Himmelsblau . . . . .	246
Himmelslicht über dem Ätna und dem Monte Rosa. Beobachtungen von Majorana und Sella. Definition der Lambertschen „Albedo“, Tafel von Albedos; Becker, Müller. Prismatische Zerlegung von Himmelslicht.	

Rayleigh; Untersuchungen von Giuseppe Zettwuch. Atmosphärische Absorption; Müller und Becker. Molekulare Dimensionen besonderer gasförmiger, flüssiger und fester Substanzen . . . . .	Seite 258
Schwingungen polarisierten Lichtes sind senkrecht zur Polarisations-ebene; Stokes' experimentelle Prüfungen; Experimente von Holtzmann und dem Dänen Lorenz; Bestätigung der Ansicht von Stokes durch Rayleigh und Lorenz . . . . .	266

### Achtzehnte Vorlesung.

#### Reflexion und Polarisation des Lichtes, Metallreflexion, Phasenänderungen.

Brechung in undurchsichtigen Substanzen. Durchscheinen von Metallhäuten. Molekulare Struktur; beste erreichbare Politur, Reflexionsvermögen; Definition; Resultate von Fresnel, Potter, Jamin und Conroy. Experimentelles Verfahren für Reflexionsvermögen . . . . .	268
Polarisierende Zerlegung von reflektiertem Licht; Versuche von Fresnel und Brewster; Abweichungen von Fresnels Ausdruck $\frac{\cos(i + i)}{\cos(i - i)}$ . Haupteinfallrichtung und Hauptazimut; Definition; Resultate für verschiedene Metalle nach Jamin und Conroy. . . . .	276
Fresnels Reflexionsgesetze und Greens Theorie, nebst graphisch dargestellter Beobachtung für Wasser, Glas und Diamant; große Abweichungen von der Theorie Greens. Tangenten des Hauptazimuts für sieben durchsichtige Substanzen . . . . .	282
Ein Verbesserungsvorschlag für die Theorie von Green; die Geschwindigkeit einer Verdichtungswelle ist sehr klein und nicht sehr groß; Annahme einer negativen Kompressibilität; Labilität und Stabilität des Volumens. Bewegungsgleichungen. Definition einer Wellenebene. Spiegelung und Brechung an einer Zwischenebene zwischen Festkörpern. Lösungen für Schwingungen, die senkrecht zur Einfallsebene verlaufen. . . . .	292
Vollständige innere Reflexion eines Impulses und sinusartiger Wellen; gezwungene, an der Zwischenfläche im weniger dichten Medium haftende Welle. Verschiedenheiten der Dichte und der Starrheit in den beiden Medien; durch Beobachtung sind gleiche Starrheiten bewiesen. . . . .	297
Lösungen für Schwingungen, die in der Einfallsebene verlaufen. Direkte Inzidenz. Rayleigh über das Reflexionsvermögen von Glas. Streifende Inzidenz. . . . .	303
Undurchsichtigkeit und Reflexionsvermögen von Metallen; Metallhäute; elektromagnetische Scheinwirkung. Es muß ein stetiger Übergang einer mechanischen Wellentheorie zwischen Licht und kleinen Schwingungen von Magneten gefunden werden. Greens Lösung für Schwingungen in der Einfallsebene in Wirklichkeit umgesetzt; Fall unendlicher Dichte . . . . .	309
Scheinbare Wellenbewegung in einem Medium von negativer oder imaginärer Dichte; ideales Silber. Phasendifferenz zwischen Komponenten reflektierten Lichtes. Hauptinzidenz. Diamant-eigenschaft. . . . .	314
Theorie des Fresnelschen Rhombus. Phasenänderungen durch innere Reflexion. Reflexion zirkular-polarisierten Lichtes. Tabellen für das Zurückbleiben der Phase bei einer einzelnen Reflexion, und für das virtuelle Voraneilen bei zwei Reflexionen. . . . .	322
Von Mac Cullagh bestimmte Fehler bei der Konstruktion des Fresnelschen Rhombus; durch Beobachtung bestimmte Fehler zweier Fresnelschen Rhomben. Ein achtzig Jahre alter Fehler bezüglich der Phasenänderung bei der totalen Reflexion . . . . .	328
Bahnrichtung des von einem Spiegel reflektierten Lichtes. Regeln für die Bahnrichtung des Lichtes; zirkular oder elliptisch polarisiertes, aus einem Fresnelschen Rhombus austretendes Licht nebst erläuternder Zeichnung. . . . .	331
Theorie des Lichtverlustes bei der Reflexion; der Hauptazimut ist 45°, wenn das Reflexionsvermögen ein vollkommenes ist. . . . .	340

## Neunzehnte Vorlesung.

**Ausgleich zwischen Fresnels und Greens Theorie, äolotrope Trägheit.****a) Molekular.**

Prof. Morleys numerische Lösungen der Aufgabe über sieben aufeinander einwirkende Partikel . . . . .	Seite 342
--	-----------

**b) Molar.**

Die Theorie von Navier-Poisson wird für gewöhnliche Materie durch Untersuchung von Abweichungen in Richtung eines gegen Druck größeren Widerstandes von Stokes und von Abweichungen in der entgegengesetzten Richtung von Thomson und Tait widerlegt. Der Raummodul des Äthers ist, wenn sich keine Materie in ihm befindet, praktisch positiv unendlich groß, ist aber negativ, und zwar ein wenig unter $\frac{1}{2}n$ in einem von ponderabler Materie erfüllten Raume; diese Annahme dient zum Ausgleich des Widerspruchs zwischen Fresnel und Green. Die Geschwindigkeit von Verdichtungs-Verdünnungswellen ist im materienfreien Äther praktisch unendlich groß, in einem von ponderabler Materie erfüllten Raume nahezu Null; Rückkehr zur Hypothese aus dem Jahre 1887 mit einer Änderung. . . . .	343
Theorie von Wirkungen zwischen Atomen ponderabler Materie und des Äthers, die eine mechanische Grundlage für jene Annahme liefert . . . . .	346
Mechanische Theorie der Diamanteigenschaft; imaginäre Geschwindigkeit der Verdünnungs-Verdichtungswellen. Numerische Berechnung der eingeführten Diamanteigenschaft Diamantreflexion; Phasenverzögerung; Diagramme einer Phasenverzögerung für Diamant. Hauptinzidenz und Hauptazimut bei diamantartiger Reflexion. Abweichungen der Hauptinzidenz von dem Brewsterschen Winkel sehr gering; Beträge der Diamanteigenschaft für verschiedene Substanzen . . . . .	348
Doppelbrechung. Huyghens' Konstruktion von Stokes experimentell bestätigt. Fresnels Wellenfläche von Glazebrook an einem zweiachsigen Kristall verifiziert. Eine äolotrope Trägheit bei der Annahme einer sehr kleinen Geschwindigkeit für die Verdichtungswelle in durchsichtiger Materie liefert eine mechanische Erklärung für die Fresnelschen Gesetze über polarisiertes Licht in einem Kristall. Archibald Smiths Untersuchung einer Fresnelschen Wellenfläche . . . . .	357
Beweis von Glazebrook, daß die Schwingungslinie nicht in der Wellenebene, sondern senkrecht zu ihr liegt. Glazebrook und Bassets Konstruktion für die Zeichnung der Schwingungslinie; Rechnung und Zeichnung für Arragonit. Eine Theorie für die Schwingungsamplitude in einem beliebigen Teile der Wellenfläche fehlt . . . . .	364

## Zwanzigste Vorlesung.

**Chirmolekeln und Wellentheorie, Chiralität in Kristallen, optische Rotation, elektrische Theorie der Brechung.**

Chirale Rotation in der Polarisationssebene. Elektro-ätherische Erklärung einer äolotropen Trägheit. Mechanische Erklärung einer chiralen Molekel, Chiroid genannt . . . . .	365
Formeln, die eine chirale Trägheit bei einer Wellenbewegung ausdrücken; sie sind auch von Boussinesq im Jahre 1903 angegeben. Imaginäre Glieder und Absorption; alle Glieder reell; Geschwindigkeit zirkular polarisierten Lichtes in einem chiralen Medium. Nebeneinander bestehende Wellen von entgegengesetzt zirkularer Bewegung; Zeichen von Winkelgeschwindigkeiten um drei zueinander senkrechte Achsen; Fresnels Kinematik nebeneinander bestehender Wellen zirkularer Bewegungen. Linksgedrehte Molekeln bilden ein rechtsgedrehtes Medium . . . . .	367
Lösung für eine gegen eine Hauptachse senkrechte Wellenebene. Optische Chiralität ist in einem zweiachsigen Kristall nicht unmerklich; von Dr. H. C. Pocklington experimentell bestimmt. Optische Chiralität im	

Quarkristall; zwei versuchsweise gemache Annahmen miteinander verglichen; illustrierende Zeichnungen. Änderung der Doppelbrechung durch Chiralität im Quarz . . . . .	Seite 376
Mathematische Theorien, von McConnel experimentell geprüft. Größe der Drehung einer Schwingungslinie polarisierten Lichtes, das sich in verschiedenen Substanzen fortpflanzt. Chiralität in Kristallen und in kristallinen Molekeln; Sir George Stokes. Faradays magneto-optische Drehung . . . . .	383
Elektro-Äthertheorie der Lichtgeschwindigkeit in durchsichtigen Körpern: Erklärung gleichförmiger Starrheit; Theorie der Brechung. Energie leuchtender Wellen in durchsichtigen Substanzen . . . . .	386

#### Anhang A.

### Über die Bewegung in einem unendlich ausgedehnten elastischen Festkörper, welche durch die Bewegung eines in seiner Substanz befindlichen Körpers verursacht wird, der auf den Äther allein mit Anziehung und Abstoßung wirkt.

Gedanken über die Verteilung von Äther innerhalb eines Atoms und über die Kraft zwischen Atom und Äther . . . . .	392
Absolute Bahnen von zehn Ätherteilchen, die durch ein bewegtes Atom gestört werden. Stromlinien relativer Bewegung von 21 Ätherpartikeln . . . . .	395
Kinetische Energie des Äthers innerhalb eines bewegten Atoms; Sonderträgheit von Äther, der sich durch ein festes Atom hindurchbewegt. Lichtgeschwindigkeit in einer Ansammlung von Atomen. Eine durch einen Versuch von Michelson behobene Schwierigkeit; von Fitzgerald und von Lorentz in Leyden angegebene Erklärung . . . . .	403

#### Anhang B.

### Wolken über der mechanischen Theorie der Wärme und des Lichtes im neunzehnten Jahrhundert.

Erste Wolke. Die Bewegung ponderabler Materie im Äther, einem elastischen Festkörper. Erste Anschauungen von Fresnel und Young. Hypothese, daß Atome und Äther denselben Raum erfüllen; die gleichförmige Bewegung eines Atoms ist ohne Widerstand, wenn seine Geschwindigkeit kleiner als die des Lichtes ist. Eine Hypothese, die hinreicht, die Erzeugung von Licht durch ein schwingendes Atom zu erklären, und sich mit der Aberration verträgt. Die Schwierigkeit ist durch den Versuch von Michelson behoben. Die erste Wolke ist nicht vollständig zerstreut. . . . .	408
Zweite Wolke. Waterston-Maxwellsche Verteilung von Energien; Beweis von Tait für harte Boscovische Atome. Die Boltzmann-Maxwellsche Verteilung von Energie; ihre Anwendung auf die kinetische Energie der Gase; Verhältnis der Wärmekapazitäten; der Clausiussche Satz und die Boltzmann-Maxwellsche Theorie; die letztere läßt sich nicht mit der Wahrheit über die spezifischen Wärmen von Gasen vereinigen. . . . .	413
Mechanische Prüfungsfälle für die Boltzmann-Maxwellsche Theorie; Zurückwerfung einer Kugel von einer elliptischen Grenzlinie; kinematische Konstruktion für das Auffinden der Wege innerhalb einer Grenzlinie beliebiger Form; Stufendreieck mit abgerundeten Ecken; Abweichungen von der Boltzmann-Maxwellschen Theorie . . . . .	423
Statistik von Zurückwerfungen an einer gefalteten Grenzlinie; weberschiffchenförmige Grenzlinie; klappernde Stöße eines rotierenden Körpers an einer festen Ebene; eine Partikel, die gezwungen ist, nahe einer geschlossenen Fläche zu bleiben; eine von einer gefalteten Fläche be-	

	grenzte Kugel; ein eingeschlossenes Atom von anderen, außerhalb befindlichen beeinflusst; mangelnde Übereinstimmung mit der Boltzmann-Maxwellschen Theorie . . . . .	Seite 429
Die	Boltzmann-Maxwellsche Theorie auf eine lange, der Schwerkraft ausgesetzte Gassäule angewandt, Boltzmann und Maxwell und Rayleigh über die Schwierigkeiten bezüglich der Anwendung der Boltzmann-Maxwellschen Theorie auf wirkliche Gase. Der einfachste Weg, sich von den Schwierigkeiten zu befreien, besteht darin, die Theorie zu verlassen und so die zweite Wolke zu zerstreuen . . . . .	440

## Anhang C.

### Über die durch zwei besondere Formen anfänglicher Verschiebung in einem unendlich langen materiellen System, für das die Geschwindigkeit periodischer Wellen von der Wellenlänge abhängt, hervorgerufene Störung.

Lösung in endlichen Ausdrücken für einen elastischen Stab. Lösung durch stark konvergente bestimmte Integrale für alle Zeiten und Orte in der Aufgabe von Poisson und Cauchy über Tiefwasserwellen; vier Beispielen von Resultaten, die durch Quadraturen berechnet sind; endliche Lösung für Tiefwasserquellen, die von einer anfänglichen Störung herühren . . . . .	443
--	-----

## Anhang D.

### Über die Anhäufung schwerer Materie in irgendeinem Teile des Universums.

Äther ist eine gravitationslose, den ganzen Raum erfüllende Materie. Gesamtmenge ponderabler Materie den Astronomen bekannt. Gesamte scheinbare Fläche heller und dunkler Sternscheiben. Eine ungeheure Kugel aus vollkommen kompressibler Flüssigkeit oder aus gleichförmig verteilten Atomen in Ruhe befindlich gegeben; darauf folgende Bewegung unter dem Einflusse der Schwerkraft. Zusammenballung schwerer, im unendlichen Raume verteilter Materie. Atomistischer Ursprung aller Dinge; Demokrit, Epikur, Lucrez . . . . .	447
--	-----

## Anhang E.

### Äpinus' Theorie der Elektrizität, Atomtheorie der Elektrizität, Elektronen.

Elektron; Definition. Annahme über Atome ponderabler Materie und Elektronen und ihre Wirkungen aufeinander; neutralisierendes Quantum. Harz- und Glaselektrizität und nicht positive und negative. Übereinandergreifen zweier monoelektronen Atome; Fall (1): jedes Atom ist ursprünglich neutralisiert; Fall (2): ein Atom ist leer, das andere neutralisiert; in beiden Fällen bleibt nach der Trennung das größere Atom leer zurück; wahrscheinlich richtige Erklärung für die Entstehung von Elektrizität durch Reibung und Trennung; ein Austausch von Energien vorausgesetzt . . . . .	455
Stabiles Gleichgewicht mehrerer Elektronen in einem Atom. Erschöpfung der Energie in stabilen Elektronengruppen. Erklärung von Faradays elektroinduktiver Kapazität, von Becquerels Radioaktivität und der elektrischen Leitfähigkeit durch Elektronen . . . . .	463
Erklärung der Pyro-Elektrizität und der Piezo-Elektrizität durch Elektronen; dipolarer elektrischer Kristall. Entdeckungen von Häuy und dem Ehepaar Curie. Okto-polare elektrische Äolotropie, erklärt in einer homogenen Ansammlung einzelner Atome. Voigts Piezo-Elektrizität eines kubischen Kristalls. . . . .	471

## Anhang F.

### Mechanische Erläuterungen der magnetischen und der helikoidalen Rotationswirkungen durchsichtiger Körper auf polarisiertes Licht, Schmelzen von Eis.

Rotierende Aufhängung eines Zweiperioden-Pendels; Problem der Bewegung gelöst; die Lösung geprüft; Schwingungen in rotierenden langen geraden Stäben mit elliptischem Querschnitt . . . . .	Seite 479
Inneres Schmelzen von Eis; James Thomsons physikalische Theorie der Plastizität des Eises; illustriert durch Versuche von Tyndall Schichtung bläschenhaltigen Eises durch Druck, wie sie an Gletschern beobachtet und von Tyndall experimentell hervorgerufen wurde; erklärt durch die physikalische Theorie. Forbes erklärt blaue Adern in Gletschern durch Druck und die sich ergebende Plastizität eines Gletschers durch die Weichheit der bläschenhaltigen weißen Schichten. Tyndalls Bläschen, die in klarem Eise durch den Brennpunkt strahlender Wärme erzeugt wurden; alles durch die physikalische Theorie erklärt	487

## Anhang G.

### Hydrokinetische Lösungen und Beobachtungen, gewöhnliche und Kapillarwellen.

Teil I. Über die Bewegung freier Festkörper in einer Flüssigkeit. Eulersche Gleichungen der Bewegung, Beziehungslinien; gegen den Körper feste Achsen; im Raume feste Beziehungslinien vorteilhafter; isotropes Helikoid (jetzt Chiroid genannt). . . . .	492
Teil II. Bewegungsgleichungen, wenn eine Flüssigkeit durch Löcher in einem beweglichen Körper zirkuliert. . . . .	496
Teil III. Der Einfluß reibungslosen Windes auf Wellen in reibungslosem Wasser; partikuläre Windgeschwindigkeiten; größte Windgeschwindigkeit, wenn die Niveaulfläche des Wassers stabil sein soll . . . . .	496
Teil IV. Wellen und Kräusel. Kleinste Wellengeschwindigkeit. Die bewegende Kraft der Kräusel ist hauptsächlich Kohäsion. Geringste Geschwindigkeit reibungsloser Luft, die in ruhendem, reibungslosen Wasser Kräuseln hervorrufen kann. Wirkung der Viskosität: Stokes über die Arbeit, die gegen die Viskosität erforderlich ist, um eine Welle aufrechtzuerhalten. Scott Russels Bericht über Wellen; kapillare Wellen . . . . .	499
Teil V. Wellen unter dem Einfluß des Zusammenwirkens von Schwere und Kohäsion, ohne Wind. Kohäsionskraft des Wassers. Streifen von Kräuseln auf der Vorderseite eines Gefäßes; Schiffswellen. Einfluß der Kohäsion auf kurze Wellen. Eine experimentelle Bestimmung der kleinsten Geschwindigkeit eines Festkörpers, die Kräusel im Wasser erzeugt . . . . .	503

## Anhang H.

### Molekelanordnung in Kristallen.

Homogene Ansammlung von Körpern; Lehrsatz von Bravais; dreizehn nächste Nachbarn in einer spitzwinkligen homogenen Ansammlung. Gleichseitige Ansammlung. Stereoskopische Darstellung eines Haufens von dreizehn einander berührenden Kugeln. Barlows Modell homogener Ansammlungen. Homogene Ansammlung hat homogene Orientierungen. Homogene Ansammlung symmetrischer Dublets. . . . .	506
Wie eine teilende Grenzfläche in drei Dimensionen zu zeichnen; einteilende Grenzlinie für homogene ebene Figuren. Homogene Ansammlung vierzechnflächiger Zellen. Stereoskopische Ansicht eines gleichkantigen Vierzechnflächners. Zellen gleichen Inhalts mit geringster Teilungsfläche	511

- Verschiedene Eigenschaften an zwei parallelen Seiten eines Kristalls; werden sie durch dasselbe Reibzeug elektrisch entgegengesetzt geladen? sie werden durch Temperaturänderung entgegengesetzt elektrisch geladen, ebenso durch seitliche Drucke. Homogene Packung von Molekeln oder kontinuierlichen Festkörpern, wie Schüsseln oder Löffeln oder Gabeln; Fall einer einzigen Berührung. Orientierung für dichteste Packung in diesem Falle. Definition der „Chiralität“. Konvex = homogen angeordnete Festkörper. Verhältnis des nicht ausgefüllten zum ganzen Raume in Kies-, Sand- oder Steinschlaghaufen. Orientierung von Molekeln bei dichtester Packung. Eine Änderung der Anordnung einer in stabilem Gleichgewicht befindlichen Ansammlung verursacht eine Raumvergrößerung. Osborne Reynolds über die Ausdehnung feuchten Sandes, wenn er durch den Fuß eines Wanderers gedrückt wird; gesehen, wenn eine Glasplatte statt des Fußes den Druck ausübt. Eine Ansammlung kugelförmiger Molekeln (oder ellipsoidischer, wenn ähnlich angeordnet) ist starr und in ihrem Raume konstant unter der Voraussetzung, daß jede Molekel in zusammenhängender Berührung mit ihren zwölf Nachbarn bleibt . . . . . 517
- Geometrische Aufgabe über den Fall, daß jeder Festkörper von achtzehn Nachbarn berührt wird. Stereoskopische Ansicht eines Tetraeders aus konvexen skalaren Festkörpern. Annahme für einen Zwillingkristall. Millers Definition von Zwillingkristallen. Zwillingsebene, wie sie von Miller, und wie sie von Stokes und Rayleigh definiert ist. Aufeinander folgende Zwillingsebenen sind regelmäßig oder unregelmäßig. Madans Änderung der Anordnung im chlorsauren Kalium durch Wärme; Versuch von Rayleigh. Stokes und Rayleigh zeigen, daß die glänzenden Farben der Kaliumchloratkristalle von Zwillingbildungen herrühren, die in regelmäßigen Abständen aufeinander folgen; die Ursache für die Bildung von Zwillingen und Gegenzwillingen in regelmäßigen Abständen ist noch nicht entdeckt . . . . . 529
- Ternäre Anordnungen in Seiten- und Endflächen von Quarz. Die für die Piezo-Elektrizität erforderliche dreifache Antisymmetrie wurde von dem Ehepaar Curie entdeckt. Optische und piezo-elektrische Chiralität im Quarz und Turmalin; Voigt und Riecke, Orientierungsmängel und Chiralitätsmängel im Quarz. Geometrische Theorie der Chiralität . . . 534

### Anhang I.

## Über die Elastizität eines Kristalls nach der Molekulartheorie von Boscovich.

- Kristallinische Molekeln und chemische Molekeln; die kristallinische Molekel besitzt wahrscheinlich in einigen oder in allen chiralen Kristallen chirale Anordnung; Marbach, Stokes; jedenfalls besitzen viele chemische Molekeln sicher Chiralität; magnetische Drehung zeigt keine Chiralität. Ein Zwang ist erforderlich, um einen Kristall homogen gezerrt zu erhalten. Theorie von Boscovich. Nur 15 Koeffizienten für den einfachsten Boscovichschen Kristall. . . . . 538
- Verschiebungsverhältnisse und ihre Quadrate und Produkte. Arbeit gegen die Boscovichschen Zwischenkräfte. Elastische Energie einer gezwungenen homogenen Ansammlung. Navier-Poissons Beziehung für eine einfache Ansammlung Boscovichscher Atome bewiesen. In einer gleichseitigen Ansammlung ist die diagonale Starrheit gegen den Hauptwürfel, wenn auf jeden Punkt nur eine Kraft seitens seiner zwölf nächsten Nachbarn wirkt, halb so groß wie die Oberflächenstarrheit . . . 541
- Eine einzige Ansammlung in einer einfachen kubischen Anordnung. Gleichseitige Ansammlung; Bedingungen für elastische Isotropie; Kräfte zwischen Punkten für Gleichgewicht. Skalene homogene Anordnung von Punkten; skalenes Tetraeder, in dem sich die Lote von den vier Ecken auf die Gegenseiten in einem Punkte schneiden; eine skalene Anordnung, die nach Boscovich einen inkompressiblen Festkörper ergibt. Einundzwanzig Koeffizienten für die Elastizität einer doppelten Ansammlung . . 545

## Anhang J.

**Molekulare Mechanik eines Kristalls.**

Bei der Trennung einer homogenen Ansammlung von Molekeln in unendlich große gegenseitige Abstände geleistete Arbeit. Theorie einer doppelten homogenen Ansammlung. Abstände von Nachbarn: in einer einzigen gleichseitigen Ansammlung; in einer doppelten Ansammlung. Eine skalene Ansammlung ist im Gleichgewicht, wenn sie unendlich groß ist. Arbeitskurven für zwei Ansammlungen . . . . .	554
Stabilitäten für ein- und zweiatomige Ansammlungen; eine Stabilität ist durch positive Moduln nicht gesichert; Stabilität einer unendlichen Reihe ähnlicher Partikel; Boscovichsche Kurve; Gleichgewicht in der Nähe der Enden einer langen Atomreihe. Abwechselnde Dichtigkeitschwankungen in sieben oder acht Netzen von der Oberfläche eines Kristalls . . . . .	556

## Anhang K.

**Über veränderliche elektrische und magnetische Schirmwirkung.**

Unvollkommen leitendes Material wirkt als Schirm nur gegen stationäre oder langsam sich ändernde elektrostatische Kraft. Geschwärztes Papier ist für Hertzsche Wellen hoher Frequenz durchlässig, aber für Lichtwellen undurchsichtig. Eine elektrisch leitende Platte wirkt als Schirm gegen magnetische Änderungen. Ein rotierender Leiter schirmt dauernd magnetische Kraft ab. Experimentelle Illustration . . . . .	570
--	-----

## Anhang L.

**Elektrische Wellen und Schwingungen in einem submarinen Telegraphenkabel.**

Allgemeine Theorie, Dämpfung der Schwingungen . . . . .	576
---	-----



## Erste Vorlesung.

### Schwierigkeiten in der Wellentheorie des Lichtes. Einfluß der Substanz.

Der wichtigste Zweig der Physik, welcher augenblicklich einer Mechanik der Molekeln dringend bedarf, scheint mir die Wellentheorie des Lichtes zu sein. Wenn ich dies ausspreche, entgeht mir nicht das große Gebiet der Physik, das bereits auf eine Dynamik der Molekeln zurückgeführt ist, die kinetische Theorie der Gase. Sage ich also, daß die Wellentheorie des Lichtes mir der Zweig der Physik zu sein scheint, der gerade jetzt der Anwendungen der Mechanik der Molekeln am dringendsten bedarf, sie am gebieterischsten fordert, so meine ich, daß, während die kinetische Theorie der Gase einen Teil der Mechanik der Molekeln schon ausmacht, in der Mechanik der Molekeln begründet ist, ganz innerhalb der Mechanik der Molekeln arbeitet, so daß ihr die Mechanik der Molekeln alles ist und sie allein durch die Mechanik der Molekeln gefördert werden kann: daß die Wellentheorie des Lichtes eben erst anfängt, Anwendungen dieser Art der mechanischen Wissenschaft unausweichlich zu heischen.<sup>1)</sup>

Die mechanische Wellentheorie des Lichtes bezog sich zuerst auf die Molekeln in der Bearbeitung Fresnels, wurde in dieser Weise von Cauchy und bis zu einem gewissen Grade, wenn auch weniger streng, in der Bearbeitung von Green fortgesetzt. Allein nur Cauchy versuchte seine mathematischen Untersuchungen auf eine streng molekulare Behandlung des Gegenstandes zu begründen. Fresnels Behandlung war unvollkommen. Green aber leistete fast alles, was für die Wellentheorie des Lichtes geleistet werden kann, mit der Mechanik der kontinuierlichen Materie. Auch weiß ich nicht, ob es möglich ist, etwas Wesentliches dem hinzuzufügen, was Green auf diesem Gebiete geschaffen hat. Wenigstens dürften so vollkommene und durchgearbeitete Auseinandersetzungen wie die im Greenschen Werke enthaltenen über die Fortpflanzung des Lichtes, die Spiegelung und Brechung des Lichtes an der Grenzfläche zweier verschiedenen Medien und die Fortpflanzung des Lichtes in Kristallen, Auseinandersetzungen, deren strenge mathematische Behandlung auf der Anschauung einer homogenen elastischen Materie begründet ist, kaum einer Ergänzung fähig sein, so vollständig erweisen sie sich. Allein einen großen Teil der Auseinandersetzungen haben wir uns noch nicht zu eigen gemacht. Sie müssen noch eingehend studiert werden, damit der Inhalt der sehr genauen und strengen, mitunter auch sehr langen Formeln in Greens Schriften verstanden wird. Denn bisher sind sie noch nicht auf eine leicht faßliche Form gebracht.

1) Zu diesen Vorlesungen sind namentlich die Vorlesungen 19 und 20 zu vergleichen, in denen der Verfasser einen etwas anderen Standpunkt einnimmt.  
D. H.

Cauchy hat wohl die Behandlung diskreter Partikel, die aufeinander wirken, nicht durchzuführen vermocht. Außer in seiner Theorie der Dispersion kam er jedesmal, sooft er seine Behandlung von neuem begonnen hat, früher oder später zu denselben Auseinandersetzungen, wie wenn er von der Annahme eines homogenen, elastischen festen Körpers ausgegangen wäre. Green war ihm nach meiner Meinung in dieser Behandlung vorausgegangen. Ich habe eine Behauptung Lord Rayleighs gelesen, nach der dieser Gelehrte Cauchy das zugeschrieben zu haben scheint, was in Wirklichkeit Green schon vorher geleistet hat. Green hat den Gegenstand erschöpft; allerdings zweifle ich nicht, daß Cauchy ganz unabhängig von ihm gearbeitet hat.

Was ich in dieser ersten Vorlesung beabsichtige, und zwar unter Benutzung einiger mathematischer Darlegungen, die ja selbstverständlich nicht zu umgehen sind, ist, die Aufmerksamkeit auf die bestehenden Schwierigkeiten zu lenken. Die erste Schwierigkeit, die uns bei einer Mechanik des Lichtes begegnet, ist die Erklärung der Dispersion, das ist der Tatsache, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes für verschiedene Wellenlängen oder für Licht von verschiedenen Perioden in einem und demselben Medium verschieden ist. Wie man die Frage auch behandeln mag, wie man auch die grundlegenden Annahmen wechseln mag, wir können von der Mechanik eines homogenen elastischen Körpers aus eine Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen verschiedener Perioden nicht erzwingen.

Dagegen hat Cauchy von der Mechanik der Molekeln aus gemeint, daß, wenn die Wirkungssphäre der einzelnen Molekeln mit den Wellenlängen vergleichbar ist, die Tatsache der Verschiedenheit der Geschwindigkeiten für verschiedene Perioden oder für verschiedene Wellenlängen in demselben Medium erklärt ist. Am besten läßt sich Cauchys grundlegende Erklärung in der Weise aussprechen, daß im Raume eine mit der Wellenlänge in dem Medium vergleichbare Ungleichmäßigkeit vorhanden ist — wenigstens, wenn wir die Dispersion nach der unveränderten Annahme Cauchys begründen wollen. Wir wollen dies bald näher besprechen. Ich zweifle aber nicht, daß viele von Ihnen bereits mit der Tatsache vertraut sind, daß jene Annahme in Wirklichkeit nicht zur Erklärung der Erscheinungen ausreicht.

Eine andere Idee zur Erklärung der Dispersion ist in neuerer Zeit aufgekomen, nämlich die Annahme von Molekeln, die im Lichtäther verteilt und auf die eine oder andre Art mit ihm elastisch verbunden sind. Die erste deutliche Aufstellung dieses Gesichtspunktes, die ich gesehen habe, befindet sich in einer kleinen Abhandlung von Helmholtz über die anomale Dispersion. Ich werde Gelegenheit haben, eingehender davon zu sprechen und auch andere Namen anzuführen. Hier kommt es nur darauf an, daß wir in Helmholtz' Arbeit und bei einigen andern deutschen Mathematikern, die ihm vorangegangen sind, einen ganz andern Ausgangspunkt für die Erklärung der Dispersion vor uns haben.

Cauchys Erklärung gibt uns in den geometrischen Dimensionen des Körpers etwas mit der Wellenlänge Vergleichbares. Wenn wir seinen Gesichtspunkt roh darstellen wollen, können wir sagen: das Verhältniß des Abstandes von Molekel zu Molekel (vom Mittelpunkte einer Molekel zum Mittelpunkte der nächsten Molekel) zur Wellenlänge des Lichtes ist das fundamentale

Charakteristikum, auf das wir bei der Erklärung der Dispersion nach Cauchys Theorie zu achten haben.

Wir wollen diese grundlegende Idee in Verbindung mit den beiden folgenden Hypothesen zur Erklärung der Dispersion aufnehmen: daß nämlich in dem wahren Wesen des ponderablen Mediums irgendeine Beziehung vorhanden ist entweder zur Wellenlänge oder zur Periode. Es scheint dann auf den ersten Blick (obwohl diese Annahme noch der Modifikation bedarf), daß bei sehr langen Wellen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Periode oder der Wellenlänge unabhängig sein muß. Betrachtet man den Gegenstand nach Cauchys Anschauungsweise, so wird man dazu geführt, zu behaupten, daß die konstante Fortpflanzungsgeschwindigkeit für sehr lange Wellen besteht. Stützt man sich aber auf Versuch und Beobachtung, so scheinen die Schlüsse auf die zweite Annahme zu leiten, in der nicht eine geometrische Dimension in der ponderablen Materie mit einer Wellenlänge verglichen wird, sondern eine grundlegende Zeitbeziehung — ein bestimmtes Zeitintervall, das in irgendeiner Weise der Konstitution der Materie anhaftet, mit der Periode des Lichtes verglichen wird. So hätten wir nicht eine Beziehung zwischen Länge und Länge, sondern eine solche zwischen Zeit und Zeit.

Wie sollen wir uns aber ein Zeitelement der Konstitution der Materie anhaftend vorstellen? Wir brauchen heutzutage diese Frage kaum zu stellen. Wir sind alle mit dem Begriff der Schwingungszeit eines Natriumatoms vertraut, und die großen durch die Spektroskopie aufgedeckten Wunder sind voll von Anzeichen, die in den Eigenschaften der Materie auf eine Beziehung zu absoluten Zeitintervallen hinweisen. Dies wird jetzt so gut verstanden, daß der Vorschlag gemacht ist, als Einheit unserer Zeit eine der fundamentalen Perioden festzulegen — beispielsweise die Schwingungsperiode des Lichtes in der einen oder der andern D-Linie des Natriums. Sie haben alle hiervon schon eine mechanische Vorstellung. Sie wissen alle etwas über die Schwingungszeit einer Molekel und daß, wenn die Schwingungszeit des einen Substanz durchsetzenden Lichtes nahe dieselbe ist wie die natürliche Schwingungszeit der Molekeln der Substanz, dieses nahe Zusammenfallen die Absorption des Lichtes verursacht. Wir alle kennen schließlich dieser Anschauung entsprechend die alte mechanische Erklärung, die zuerst Stokes für das Auftreten der dunkeln Linien im Sonnenspektrum vorgeschlagen hat.

Demnach hätten wir also, um uns überhaupt eine deutliche Vorstellung von der Dispersion bilden zu können, Schwingungszeiten in Verbindung mit aller ponderablen Materie ins Auge zu fassen. Um eine feste Hypothese aufzubauen, die uns auf diesem Gebiete zu arbeiten gestattet, wollen wir uns einen von dem Lichtäther erfüllten Raum vorstellen, der außerdem teilweise von einem von diesem Äther selbst verschiedenen Etwas erfüllt ist. Dieses Etwas mag eine Menge dichter oder eine Menge starrer Äthers sein; oder wir können auch Teile Äther voraussetzen, die eine größere Dichte und eine größere Starrheit oder wenigstens eine andre Dichte und eine andre Starrheit besitzen als der umgebende Äther. Wir werden hierauf in Verbindung mit der Erklärung der Bläue des Himmels, speziell bei der Darstellung von Lord Rayleighs Theorie dieser Bläue des Himmels zurückkommen. Inzwischen möchte ich etwas vorbringen, was uns die Möglichkeit gibt, eine wenn auch nur sehr rohe mechanische Vorstellung von der Dispersion zu gewinnen.

Zunächst wollen wir nicht der Annahme Raum geben, daß wir in dem Lichtäther überhaupt ein ideales Mittel zur Erklärung der Erscheinung sehen. Ich glaube allerdings, daß eine wirkliche Materie zwischen uns und den entferntesten Sternen vorhanden ist und daß Licht in wirklichen Bewegungen dieser Materie besteht, Bewegungen, wie sie von Fresnel und Young beschrieben sind, Bewegungen nach Art transversaler Schwingungen. Wenn ich die elektromagnetische Theorie des Lichtes recht verstehe, möchte ich wohl imstande sein, sie mit den Grundprinzipien der Wellentheorie des Lichtes in Beziehung zu bringen. Allein es scheint mir in Wirklichkeit ein Schritt, der von der vollkommen bestimmten mechanischen Vorstellung, die uns von Fresnel und seinen Nachfolgern geschenkt ist, abführt, wenn wir diese elektromagnetische Theorie des Lichtes in der Form annehmen, wie sie von manchen Schriftstellern der jüngsten Zeit ausgeführt wird. Im Vorbeigehen möchte ich bemerken, daß ich das einzige, was mir in dieser Theorie verständlich erscheint, nicht für zulässig halte. Ich meine, daß eine elektrische Verschiebung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung und eine magnetische Störung senkrecht zu diesen beiden Richtungen bestehen soll. Es scheint mir, daß wenn wir zu einer elektromagnetischen Lichttheorie gelangen, wir elektrische Verschiebung in Richtung der Fortpflanzung und einfache Schwingungen, wie sie von Fresnel mit zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Schwingungslinien beschrieben sind, für die das Licht tatsächlich bildende Bewegung finden werden.<sup>1)</sup> Ich sage dies nur im Vorbeigehen, da ich vielleicht einer Verteidigung dafür bedarf, warum ich aus dem Zusammenhang der einfachen Tatsachen bei der Annahme eines wirklich elastischen festen Körpers stehenbleibe, die mir bei dem jetzigen Stande unserer Kenntnisse die allein haltbare Grundlage für die Wellentheorie des Lichtes zu geben scheint.

Den Lichtäther müssen wir uns als eine Substanz vorstellen, die sich, soweit lichtbildende Schwingungen betrachtet werden, so bewegt, wie wenn sie ein elastischer fester Körper wäre. Ich sage nicht, daß der Äther ein elastischer Körper ist; nur daß er sich hinsichtlich der lichtbildenden Schwingungen so bewege, wie wenn er ein elastischer fester Körper wäre, soll die grundlegende Annahme der Wellentheorie des Lichtes bilden.

Eine Schwierigkeit, die auf den ersten Blick unüberwindlich scheint, bietet die Frage: wie können wir einen elastischen festen Körper uns vorstellen, der doch einen gewissen Grad von Starrheit besitzt und der den ganzen Raum erfüllt und durch den gleichwohl die Erde sich in dem Maße bewegt, wie sie sich tatsächlich um die Sonne bewegt, und durch den auch die Sonne und das ganze Sonnensystem sich in dem Maße bewegen, in dem sie sich durch den Raum, jedenfalls gegenüber den andern Sternen, bewegen?

Diese Schwierigkeit scheint mir aber keineswegs so sehr unüberwindlich. Nehmen Sie ein Stück Burgunder- oder Trinidadpech, oder, was ich hierfür am besten befunden habe, schottisches Schuhmacherwachs. Das ist die Substanz, an der ich dasjenige klarlegen möchte, über was ich zu berichten beabsichtige. Wie weit der Versuch auch mit den andern Substanzen gelingen

1) Das hat sich freilich bis jetzt nicht bestätigt, die elektromagnetische Lichttheorie kann widerspruchlos von Verschiebungswellen in Richtung der Fortpflanzung absehen. Auch hat sich der Verfasser später zur elektromagnetischen Lichttheorie in der bestehenden Form freundlicher gestellt. D. H.

würde, weiß ich nicht. Schuhmacherwachs, um bei diesem zu bleiben, ist brüchig. Trotzdem können Sie es zu einer Stimmgabel formen und diese zum Schwingen bringen. Machen Sie ferner daraus einen langen Stab, so können Sie auch diesen zum Schwingen bringen, als ob er ein Glasstück wäre. Legen Sie ihn aber auf eine Seitenfläche, so wird er sich allmählich abplatten. Das Gewicht eines Briefes, der in der früher üblichen Weise mit Siegellack gesiegelt ist, reicht aus, das Siegel abzuplatten. Versuche über die absolute Flüssigkeit oder Nichtflüssigkeit einer Substanz wie Schuhmacherwachs sind nicht ausgeführt worden; daß aber nur Zeit nötig ist, damit sie sich vollkommen wie eine Flüssigkeit verhält, ist für jede der erwähnten Substanzen eine nicht unwahrscheinliche Annahme. Schottisches Schuhmacherwachs habe ich in folgender Weise benutzt: Ich nahm davon ein großes Stück, etwa einige Zentimeter dick. Nun füllte ich einen Glasrog von gegen zwölf Zentimeter Durchmesser mit Wasser und legte das Wachsstück, mit einer Anzahl Korkstücken darunter und zwei oder drei Bleikügelchen darüber, hinein. Dies geschah zu Beginn des Studienjahres. Nach sechs Monaten waren die Bleikügelchen sämtlich im Wachs verschwunden, und ich nahm an, daß mit den Korkstücken das gleiche geschehen würde, indem sie schon etwa bis zur Mitte des Wachsstückes vorgedrungen waren. Und in der Tat, bevor das Jahr verflossen war, fand ich, als ich den Apparat wieder ansah, die Korkstücke an der Oberfläche des Wassers schwimmen und die Bleikügelchen am Boden des Troges liegen.

Wenn so ein Korkstück vermöge seines geringeren spezifischen Gewichtes durch das feste Schuhmacherwachs hindurch aufwärts getrieben wird und ein Bleistück vermöge seines größeren spezifischen Gewichtes durch dasselbe Material hindurch abwärts sinkt, wenn auch nur mit einer Geschwindigkeit von einem Zentimeter in sechs Monaten, so haben wir darin meiner Meinung nach eine Erscheinung, die wohl hinreicht, die erwähnte fundamentale Schwierigkeit aus der Wellentheorie des Lichtes hinwegzuräumen. Man kann den Lichtäther wie eine Art Wachs auffassen, welches elastisch ist und welches ich (man möchte — nach der allgemein verbreiteten Anschauung — „dennoch“ hinzufügen) als brüchig bezeichnet habe, und das imstande ist, Schwingungen wie eine Stimmgabel auszuführen, wenn passende Zeiten und Kräfte vorhanden sind — wenn nämlich die Zeiten, während deren die eine Zerrung anstreben, den Kräfte wirken, sehr klein und zugleich die Kräfte nicht so groß sind, daß sie einen Bruch verursachen. Wenn die Kräfte lange wirken, reichen sie, selbst wenn sie klein sind, aus, unbegrenzte Formänderungen zu erzeugen. Ob unendlich kleine Kräfte unbegrenzte Formänderungen erzeugen oder nicht, wissen wir nicht; schon sehr kleine Kräfte genügten aber, es zu tun. Was wir bezüglich des Lichtäthers brauchen, ist allein dies, daß die außerordentlich kleinen in den leuchtenden Schwingungen in Wirksamkeit gesetzten Kräfte in den Zeiten, während deren sie wirken, nicht hinreichen, irgendeine Überschreitung der Grenzen der Elastizität hervorzurufen. Die hin- und hergehenden Wirkungen, die in der Periode der Lichtschwingungen stattfinden, geben nicht Anlaß zum Verbrauch einer irgend großen Energiemenge: jedenfalls nicht einer so großen, daß das Licht bei seiner Fortpflanzung etwa vom entferntesten sichtbaren Stern bis zur Erde vollkommen absorbiert würde.

An passender Stelle wollen wir etwas später versuchen, uns eine Vorstellung von einigen der betrachteten Größen zu bilden; insbesondere eine

Vorstellung von der Größe der Scheerkraft in Lichtschwingungen von einer willkürlich angenommenen Amplitude einerseits und andererseits von der Größe der Scheerkraft, die ins Spiel kommt, wenn etwa die Erde sich durch den Lichtäther bewegt. Man ist in den Gegenstand noch nicht tief eingedrungen, wir wissen noch nicht, ob die Erde bei ihrer Bewegung den Lichtäther mit sich reißt, oder ob sie sich nahezu wie durch eine reibungslose Flüssigkeit bewegt. Man kann es sich wohl als möglich vorstellen, daß die Erde sich durch den Lichtäther fast wie durch eine reibungslose Flüssigkeit bewegt und daß dennoch der Lichtäther eine hinreichende Starrheit zur Ausbildung von Lichtschwingungen besitzt, deren Perioden für die sichtbaren Strahlen zwischen ein Vierhundertmillionen- und ein Achthundertmillionen-Milliontel Sekunde liegen, oder deren Perioden auch die Größe der langsamen, neuerdings untersuchten und bezüglich ihrer Wellenlänge von Abney und Langley gemessenen Strahlen der strahlenden Wärme einerseits und der schnellen ultraviolettten, hauptsächlich durch ihre chemischen Wirkungen bekannt gewordenen Strahlen andererseits besitzen. Wenn wir die ungemeine Kleinheit der zwischen Hundertmillionen- und Sechzehnhundertmillionen-Milliontel einer Sekunde in dem bekannten Gebiete der strahlenden Wärme und des Lichtes liegenden Perioden in Betracht ziehen, brauchen wir wahrlich nicht zu verzweifeln, zum Verständnis der Eigenschaften des Lichtäthers zu gelangen. Für diesen besteht kein größeres Rätsel als für das Schuhmacherwachs oder das Burgunderpech. Beide sind ein Geheimnis, wie alle Materie ein solches ist, und der Lichtäther ist kein größeres.<sup>1)</sup>

Wir kennen den Lichtäther in vielen Einzelheiten besser als irgendeine andre Art Materie. Wir kennen ihn bezüglich seiner Elastizität; wir kennen ihn bezüglich der Konstanz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes für verschiedene Perioden. Fassen wir die Finsternisse der Jupiterstrabanten oder, was uns noch mehr sagt, das Wachsen und Abnehmen der Lichtstärken selbstleuchtender Sterne, worüber von Prof. Newcomb jüngst in einem Vortrage in Montreal berichtet ist, hinsichtlich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in dem Lichtäther ins Auge, so beweisen uns diese Erscheinungen mit schärfster Sicherheit bis auf einen außerordentlich hohen Genauigkeitsgrad die Konstanz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit aller Strahlen sichtbaren Lichtes im Lichtäther.

Der Lichtäther muß eine Substanz von äußerster Einfachheit sein. Wir müssen uns vorstellen, daß er eine Substanz bedeutet, deren Grundeigenschaft die ist, nicht zusammendrückbar zu sein, eine gewisse Starrheit für Schwingungen zu besitzen, deren Dauer unter einer bestimmten Grenze liegt, und dennoch absolut nachgiebig zu sein, eine Eigenschaft, die wir an wachsähnlichen Körpern kennen gelernt haben, wenn die Kraft hinreichend lange wirkt.

Es scheint mir, daß wir noch eine ganze Menge mehr über den Lichtäther kennen lernen müssen, als wir jetzt wissen. Aber ich fange nicht damit an, daß ich sage, wir wüßten nichts über ihn; ich behaupte vielmehr, daß wir mehr über ihn wissen, als wir über Luft oder Wasser, über Glas oder Eisen wissen — er ist einfacher, man hat eben weit weniger über ihn zu wissen. Das will sagen: die Naturgeschichte des Lichtträgers, des Äthers,

1) Von den ganz langen Wellen, wie wir sie aus den elektromagnetischen Störungen kennen, spricht der Verfasser später. D. H.

ist ein unendlich viel einfacherer Gegenstand als die Naturgeschichte irgend eines andern Körpers. Es ist wahrscheinlich, daß die Molekulartheorie der Materie früher oder später einmal so weit gefördert sein wird, daß wir eine unendlich fein gekörnte Struktur werden verstehen können. Den Lichtäther werden wir dann als eine Substanz erkennen, die sich dadurch von Glas und Wasser und Metallen unterscheidet, daß sie in ihrer Struktur noch weit feiner gekörnt ist. Wir brauchen indessen nicht zu versuchen, allzuweit in die Frage einzudringen; wir dürfen sie nehmen, wie sie liegt, und die großen Tatsachen der Wellentheorie des Lichtes im ganzen als Grundlagen unserer Anschauungen über den Lichtäther benutzen.

Um uns jetzt eine Vorstellung von der ponderablen Materie zu bilden, wollen wir uns für einen Augenblick ein rohes mechanisches Modell vorstellen. Dies mag eine unendlich starre sphärische Schale sein: innerhalb dieser befinde sich eine zweite absolut starre Schale, und so fort, Schale in Schale, so viele Schalen wir wollen. Natürlich können wir uns ein etwas stetigeres System vorstellen, doch ich wollte Ihre Aufmerksamkeit nur auf eine rohe mechanische, möglicherweise für die Erklärung der Dispersion hinreichende Verdeutlichung hinlenken. Stellen wir uns ferner vor, daß sich außerhalb dieses Schalensystems Lichtäther befindet und daß der Hohlraum einen Durchmesser besitzt, der im Vergleich mit der Wellenlänge sehr klein ist. Stellen wir uns weiter vor, daß zickzackförmige Federn eine Schale mit der folgenden verbinden. Ich brauche zickzackförmige, nicht spiralförmige Federn. Die Windungs-Eigenschaften besitzen, für die wir noch nicht vorbereitet sind, die wir aber für die Erklärung solcher Einwirkungen werden verwenden müssen, wie sie Zucker und Quarz aufweisen, nämlich die Lichtschwingungen zu drehen. Stellen wir uns zwei oder drei so miteinander durch eine hinreichende Anzahl zickzackförmiger Federn verbundene Schalen und einen festen Kern im Mittelpunkt vor, ebenfalls mit federnden Verbindungen zwischen ihm und der ihm nächsten Schale. Wenn nur eine solche innere Schale vorhanden ist, haben wir eine bestimmte Schwingungsperiode. Denken wir uns also alles bis auf die eine innere Schale entfernt, diese Schale aus ihrer Ruhelage gebracht und schwingend, während wir die äußere Schale festhalten, so ist die Schwingungsperiode eine vollkommen bestimmte. Haben wir eine ungeheure Anzahl solcher Schalen mit beweglichen Kernen in ihren Mitten in einer Menge Lichtäther verteilt, so ist diese in einen Zustand versetzt, in welchem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle von der im homogenen Lichtäther bestehenden verschieden ist. Wir erlangen so, was wir gesucht haben: eine bestimmte Periode; und die Beziehung zwischen der Schwingungsperiode des betrachteten Lichtes und der Periode der freien Schwingung der Molekel wird bei dem Versuche einen Mechanismus aufzustellen, der die Erscheinungen der Dispersion wiedergibt, grundlegend sein.

Wenn wir aus der soeben gebildeten Vorstellung alles bis auf einen

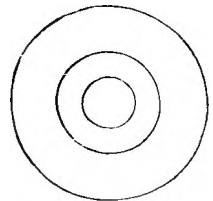


Fig. 1.

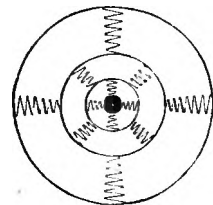


Fig. 2.

nicht zu massiven inneren Kern, der durch Federn mit der äußeren Schale verbunden ist, fortlassen, gewinnen wir ein rohes Bild von dem, was Helmholtz zum Gegenstand seiner Abhandlung über anomale Dispersion gemacht hat. Helmholtz setzt noch weiterhin einen gewissen Grad von Viskosität voraus, die einen Widerstand gegen die Bewegung des Kerns gegen die Schale hin bildet.

Hätte man es nur mit der Dispersion zu tun, so bestände keinerlei Schwierigkeit, sie vollständig zu erklären, indem man die obige Annahme nicht in einem rohen mechanischen Bild, sondern in einer Form aufstellte, die sich Ihrem Urteil als Mittel erwiese, die tatsächliche Wirkungsweise der Partikel der groben Materie klarzulegen, was es auch mit dem Lichtäther für eine Bewandnis haben möge. Es ist freilich schwer, sich ein Bild von dem Verhalten des Äthers in Dämpfen, in Flüssigkeiten und in festen Körpern zu machen; aber schon Sauerstoff, Wasserstoff und allgemein Gase müssen mit ihren voneinander getrennten Partikeln in der einen oder andern Weise auf den Lichtäther einwirken, eine Art elastische Verbindung mit ihm haben; und ich kann mir nichts denken, was sich unserer Vorstellung besser empfiehlt als diese vielschalige Molekel, die ich Ihnen vorgeführt habe. Nimmt man eine genügende Anzahl der inneren Schalen und geht auf diese Weise zu der Vorstellung einer stetigen Änderung von der Dichte des Äthers zu der ungeheuer viel größeren Dichte der Molekel der im Äther eingebetteten groben Materie, so bekommt man einen Einblick in die Art der Wirkung, die zwischen irgendeinem besonderen Atom und dem Lichtäther besteht. Meiner Meinung nach muß etwas an dieser Anschauung von dem Äther und den Substanzmolekeln sein und bedeutet sie als mechanisches Symbol sicher keine bloße Hypothese, sondern eine Wirklichkeit.

Aber leider sind die Schwierigkeiten der Wellentheorie des Lichtes damit noch nicht erledigt — so weichen die Gesetze für die Spiegelung und Brechung an ebenen Flächen, wie sie von Green bearbeitet sind, in einer äußerst schwer zu verbessernden Weise von den Tatsachen ab. Sie entsprechen wohl bis zu einem gewissen Grade diesen Tatsachen; allein es bestehen eben Abweichungen, die zu erklären wir kein Mittel haben. Eine große Menge Hypothesen ist aufgestellt worden, aber keine von ihnen erscheint irgend haltbar.

Zuallererst besteht die Frage: verlaufen die Lichtschwingungen normal zur Polarisationsebene oder in ihr, wenn man als Polarisationsebene für Licht, welches durch Reflexion polarisiert ist, die Ebene definiert, die den einfallenden und den reflektierten Strahl enthält? Stellt man sich durch Spiegelung an einer ebenen Fläche polarisiertes Licht vor, so fragt es sich also, ob die Schwingungen im reflektierten Strahl senkrecht zur Ebene des einfallenden und des reflektierten Strahles erfolgen, oder ob sie in der Ebene des einfallenden und des reflektierten Strahles verlaufen. Ich spreche jetzt von diesem Gegenstande nur auf ihn hinweisend. Wir werden sehr eingehend die Theorie Greens und ihre Bearbeitung durch Lord Rayleigh behandeln und zu dem meiner Meinung nach absolut sicheren Schluß gelangen, daß bei Licht, welches durch Reflexion polarisiert ist, die Schwingungen senkrecht zu der Ebene des einfallenden und des reflektierten Strahles verlaufen müssen.

Allein dabei besteht noch eine Schwierigkeit. Die mechanische Theorie der Spiegelung und Brechung, die das oben bezeichnete Resultat gibt, gibt



es nicht streng, sondern nur angenähert. Wir haben in der Theorie keineswegs so gute Mittel, Lichtschwingungen, die im einfallenden Strahl in der Ebene der Inzidenz und der Reflexion erfolgen, für den reflektierten Strahl so weit zum Verschwinden zu bringen, wie es nach der Beobachtung sein soll. Ich will jetzt weiter nichts über diese Schwierigkeit sagen, da sie uns später eingehender beschäftigen wird, nur so viel ist hervorzuheben, daß die theoretische Erklärung der Spiegelung und Brechung nicht zufriedenstellend ist. Sie ist nicht vollständig, und sie befriedigt nicht, da wir keinen Weg sehen, sie zu verbessern.

Aber nehmen wir für einen Augenblick an, die Theorie sei in dieser Hinsicht doch verbesserungsfähig, so ist noch die folgende mit ihr in Verbindung stehende Frage zu beantworten: Entspricht die Verschiedenheit zweier Medien einer Verschiedenheit ihrer Starrheit, oder vielmehr einer Verschiedenheit der Dichte? Diese Frage ist interessant, und manches, was zu ihrer Beantwortung getan ist, scheint zugunsten der Annahme zu sprechen, daß die Verschiedenheit zweier Medien eine solche der Starrheit und nicht der Dichte ist. Als ich aber die scheinbar plausible Erklärung der Erscheinungen der Brechung und Spiegelung durch eine Verschiedenheit in der Starrheit und nicht durch eine Verschiedenheit in der Dichte genau prüfte, fand ich diese Erklärung täuschend, und man wird zu der Anschauung gedrängt, daß in erster Linie eine Verschiedenheit der Dichte besteht und nur eine sehr geringe Verschiedenheit der Starrheit.

Bei der sehr sorgfältigen Durcharbeitung des Gegenstandes und bei dem Versuch, die Arbeit Lord Rayleighs darüber zu verstehen und zu erfahren, was andre Forscher geleistet haben, hielt ich eine Zeitlang die Annahme, daß die Starrheit genau dieselbe sei und daß der ganze Effekt von der Verschiedenheit der Dichte herrühre, für zu weitgehend. Wie dem auch sei, so schien es mir, daß der Lichtäther zu beiden Seiten der Fläche, an der die Spiegelung und Brechung erfolgt, sowohl in der Starrheit als in der Dichte verschieden sei. Es schien mir damals auf Grund einer Arbeit (die ich übrigens berichtigen muß, ehe ich mich mit voller Sicherheit auf sie berufen darf), daß man durch die Annahme, daß der Lichtäther in dem gewöhnlich dichter als ein anderes genannten Medium beträchtlich dichter ist, als er sich fände, wenn die Starrheiten gleich wären, und daß auch die Starrheit in ihm größer ist als in dem andern, eine bessere Erklärung der Polarisation durch Spiegelung geben kann, als sie die Resultate Greens liefern. Greens Arbeit endet zwar ebenfalls mit der Annahme verschiedener Dichte, aber unter der Annahme gleicher Starrheit. Er legt die ganze Aufgabe in die Formeln, mit denen er beginnt, und schließt eben mit dieser genannten Annahme, und sein Resultat beruht auf ihr.

Um uns nicht in Allgemeinheiten zu verlieren, wollen wir uns als Beispiel Glas und ein Vakuum vorstellen. Es schien mir also, daß wir durch die Annahme, die wirksame Starrheit im Lichtäther sei im Glase größer als im Vakuum und daß auch die Dichte größer sei, jedoch in höherem Maße größer als die Starrheit, so daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Glase kleiner ist als im Vakuum, eine bessere Erklärung der Einzelheiten der Polarisation durch Spiegelung geben können, als es die Resultate Greens tun.

Erst nach der Rückkehr von meiner Reise über den Ozean habe ich

mich mit diesem Gegenstande näher beschäftigt, und als ich mit schärferem Interesse an ihn herantrat, erkundigte ich mich überall, ob irgendwelche Beobachtungen ausgeführt sind, die mich unterstützen könnten. Schließlich wurde mir mitgeteilt, daß Prof. Rood geleistet habe, was ich zu wissen wünschte, und als ich seine Arbeit las, fand ich in der Tat, daß er den Gegenstand wohl begründet hat.

Meine Frage war die folgende: Existiert irgendeine Messung der Intensität von Licht, das bei nahezu normaler Inzidenz an Glas oder Wasser reflektiert ist, und welche zeigt, daß diese beträchtlich größer ist, als nach der Formel von Fresnel zu erwarten steht. Fresnel gibt für das Verhältnis der Intensität des reflektierten Strahles zu der Intensität des auffallenden Strahles bei normaler oder nahezu normaler Inzidenz  $\left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1}\right)^2$ , woselbst  $\mu$  den Brechungsexponenten bedeutet. Ich wünschte darüber Auskunft, ob dieses Resultat durch eine Beobachtung bestätigt ist. Soviel ich weiß, hat sich mit dieser Frage überhaupt niemand beschäftigt, bis sie Prof. Rood vom Columbia-Kollege in Neuyork aufgenommen hat. Seine Versuche zeigten bis zu einem äußerst hohen Grade der Genauigkeit Übereinstimmung mit der Formel von Fresnel, so daß dadurch die Erklärung, die ich geben wollte, als unzutreffend erwiesen war. Ich selbst hatte auch Versuche mit der Spiegelung einer Kerze an einem Stück Fensterglas bei Gelegenheit eines angenehmen Besuches bei Dr. Henry Field auf seinem schönen Berkshire-Hügel Ende August ausgeführt und war trotz der rohen und der ganz oberflächlich angenäherten Messungen zu demselben Schluß gelangt. Jedenfalls habe ich mich mit der Tatsache begnügt, daß eine so große Abweichung von dem Gesetze Fresnels nicht vorhanden ist, um die Schwierigkeiten der Spiegelung und Brechung durch die Annahme aufklären zu müssen, daß beispielsweise im Glase eine höhere Starrheit bestehe als in der Luft. Wir sind vielmehr jetzt gezwungen, aus manchen Beobachtungen, ganz besonders aus photometrischen Ermittlungen des Prof. Rood, bestimmt zu schließen, daß die Starrheit des Äthers in beiden Körpern nahezu gleich sein muß.

Indessen kann man auch die zweite Annahme machen, daß die Spiegelung allein von dem Unterschiede in der Starrheit herrührt und daß die Dichten des Äthers in beiden Körpern gleich sind. Hieraus würde sich für normale Inzidenz dieselbe Intensität des reflektierten Lichtes ergeben. Die photometrische Bestimmung vermag also nicht zwischen diesen beiden extremen Anschauungen zu entscheiden. Allein sie hält uns davon ab, uns auf den entgegengesetzten, allgemein angenommenen Standpunkt zu stellen, daß die Starrheit des Äthers überall die gleiche sei, in der Art, wie ich es mir gedacht hatte.

Hiernach dürfte die Auseinandersetzung der Polarisation bei Spiegelung und Brechung nicht als gänzlich unbefriedigend, wenn auch nicht als ganz befriedigend anzusehen sein. Und aus den auf Seite 7 vorgeführten Zeichnungen werden Sie erkennen, daß die vorhin benutzten Vorstellungen in der Tat etwas ergeben, das so wirkt wie eine Verdichtung des Äthers. Ich werde letzteres bald mathematisch nachweisen, also zeigen, daß unsere Annahme der Annahme einer Verdichtung des Äthers äquivalent ist, die sich zudem quantitativ nach der Periode der Schwingung richtet.

Ich eile zum Schluß; ich hatte gehofft, schneller dahin zu gelangen. Wir haben noch die Doppelbrechung in Kristallen, und hier liegt die große, hoffnungslose Schwierigkeit.

### a) Molar.

Wenn wir die Tatsache der Zerrung eines elastischen festen Körpers ins Auge fassen, sind wir vielleicht der Meinung, daß darin eben nichts Verwunderliches liegt. Aber die Annahme Fresnels über die Richtung der Lichtschwingungen besteht darin, daß, wenn die Schwingungsebene senkrecht ist zur Polarisationssebene, daraus auch folgt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einachsigen Kristallen einfach von dieser Schwingungsrichtung und nicht weiter von der Ebene der Zerrung abhängt. In den Lichtschwingungen haben wir das Medium als gezerzt zu betrachten und darnach strebend, in die frühere Lage zurückzukommen. Die Zeichnung Fig. 3 stelle ein Stück eines einachsigen Kristalles, beispielsweise isländischen Spat, vor; eine zylindrische oder quadratische Säule, mit ihrer Längsrichtung in Richtung der optischen Achse, die ich in der Zeichnung durch eine gestrichelte Linie andeute.



Fig. 3.

Also es soll uns die Beziehung zwischen Licht, welches infolge des Durchganges durch isländischen Spat polarisiert ist, auf der einen Seite und Licht, welches durch Spiegelung polarisiert ist, auf der anderen Seite zeigen, daß, wenn die Schwingungslinie senkrecht zur Polarisationssebene ist, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes durch isländischen Spat hindurch in verschiedenen Richtungen allein von der Schwingungslinie und nicht von der Zerrungsebene abhängt.

Diese Tatsache läßt sich aber in keiner Weise durch die Starrheit eines elastischen festen Körpers erklären. Fall I. Stellen wir uns durch Fig. 4 einen Würfel aus isländischem Spat vor, die Richtung der Achse wie vorher; das Licht pflanze sich nach unten fort, wie durch den Pfeil angedeutet ist. Welcher Art wird die Schwingung bei dieser Fortpflanzungsrichtung sein? Nehmen wir zunächst an, die Schwingungen verlaufen in der Ebene der Zeichnung. Dann wird die Zerrung dieses Teiles des Mediums von der Art sein und in der Richtung liegen, wie in Fig. 4 angedeutet ist. Ein Stück, das ursprünglich rechtwinklig war, gelangt in die durch die gestrichelten Linien angedeutete Form. Die Kraft, welche das so verschobene Materienstück in seine frühere Form zurückzuführen sucht, hängt von dieser Art der Zerrung ab. Der mathematische Ausdruck für diese Kraft würde sein  $n$ , eine Konstante der Starrheit, multipliziert mit  $a$ , dem Betrage der Zerrung. Wie dies zu rechnen ist, wird vielen von Ihnen bekannt sein, und wir wollen im Augenblick nicht in die Einzelheiten eindringen. Fall II. Wir wollen aber jetzt den andern Fall ins Auge fassen, daß nämlich die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes horizontal ist, wie durch den Pfeil in Fig. 5 angedeutet ist. Was wird jetzt die Natur der Zerrung sein, wenn die Schwingung nämlich senkrecht zur Achse des Kristalles wieder in der Ebene der Zeichnung angenommen wird? Die Zerrung wird in der Weise vor sich gehen, daß ein ursprünglich rechtwinkliges Stück in die durch die gestrichelten Linien in Fig. 5 angedeutete Form schwingt. Die zurückführende Kraft

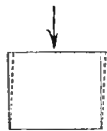


Fig. 4.

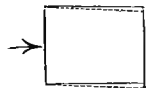


Fig. 5.

wird dann von einer Zerrung dieser Art abhängen. Aber eine Zerrung dieser Art ist identisch mit einer Zerrung von der in Fig. 4 dargestellten Art, und das Resultat wird sein, daß, wenn die Wirkung von der zurückziehenden Kraft in einem elastischen Körper abhängt, wir in diesem Falle dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit finden müßten wie in dem andern Falle (Figg. 4 und 5).

Fall III. Betrachtet man in ähnlicher Weise die Zerrungen, die von Wellen hervorgerufen werden, welche aus zur Ebene der Zeichnung senkrechten Schwingungen bestehen, während die Pfeile in den Figg. 4 und 5 wieder die Fortpflanzungsrichtungen darstellen. Die Zerrung in dem Falle der Fig. 4 wird wiederum eine zur Achse senkrechte Scheerung sein, nur in der zur Ebene der Zeichnung senkrechten Richtung und nicht in der durch die punktierten Linien in Fig. 4 dargestellten Richtung. Demnach wird vermöge der Theorie eines homogenen, elastischen Körpers bei einem axial isotropen Kristall die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieselbe sein wie in den beiden ersten Fällen. Fall IV. Hingegen besteht bei Schwingungen senkrecht zur Ebene der Zeichnung und einer Fortpflanzung senkrecht zur Achse die Zerrung in einem Scheeren in der zur Pfeilrichtung in Fig. 5 senkrechten Ebene und in der zur Ebene der Zeichnung senkrechten Richtung. In dem angenommenen Kristalle ist der Starrheitsmodul für diese Scheerung ein anderer als der in den Fällen I, II und III.<sup>1)</sup> Hier entsprechen die Fälle III und IV dem extraordinären, die Fälle I und II dem ordinären Strahle.

Nun aber ist zu beachten, daß Licht, welches in einer durch die Achse gehenden Ebene polarisiert ist, den ordinären Strahl abgibt und Licht, welches in einer zu der durch den Strahl und die Achse bestimmten Ebene senkrechten Ebene polarisiert ist, den extraordinären Strahl bildet. Also bietet die Annahme, daß die Schwingung senkrecht zur Polarisationssebene erfolgt, eine besondere Schwierigkeit. Und diese kann allein aus der reinen Theorie eines elastischen festen Körpers absolut nicht behoben werden.

Da tritt uns die Frage entgegen, ob wir nicht die Erscheinungen erklären können, indem wir eine Beschwerung des elastischen Festkörpers annehmen. Die Schwierigkeit besteht aber darin, ihn nach verschiedenen Richtungen verschieden beschwert zu denken. Lord Rayleigh glaubte, in der von mir erwähnten Abhandlung eine Erklärung gefunden zu haben. Es war ihm entgangen, daß Rankine vorher genau denselben Gedanken gehabt hat. Lord Rayleigh spricht nämlich am Ende seiner Abhandlung eben die Vermutung aus, daß eine Verschiedenheit der wirksamen Trägheit in verschiedenen Richtungen zur Erklärung der Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im isländischen Spat herangezogen werden könnte. Wenn aber dies sich so verhielte, würde die Fortpflanzung der Welle nicht nach dem Huyghensschen Prinzip vor sich gehen, sondern umgekehrt proportional derjenigen Größe geschehen, der es nach diesem Gesetz geradezu proportional sein soll. Die geometrische Konstruktion des extraordinären Strahles im Flußspat nach dem Huyghensschen Prinzip liefert uns ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, mit Hilfe dessen man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes findet, indem man vom Mittelpunkte das Lot auf die Tangentialebene fällt. Bei-

1) In I, II, III wird die Achse wesentlich geneigt, in IV wesentlich verschoben. Im Original ist der Gegensatz unscheinbar. D. H.

spielsweise (Fig. 6) entspricht  $CN$  der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, falls die Wellenfront dieser Tangentialebene parallel ist. Wenn nun die Geschwindigkeit in verschiedenen Richtungen vermöge einer wirksamen Trägheit verschieden ist, so besteht die Anschauung Lord Rayleighs darin, daß die schwingenden Molekeln sich wie abgeplattete Sphäroide verhalten, die in einer reibungslosen Flüssigkeit schwingen. Das Medium würde hiernach eine größere wirksame Trägheit besitzen, wenn es in Richtung seiner Achse (senkrecht zu seiner flachen Seite), und eine kleinere wirksame Trägheit, wenn es in seiner Äquatorialebene schwingt. Es ist dies ein sehr schöner Gedanke, und wir sollten ohne ihn bei der Aufklärung der Schwierigkeit nur schlecht auskommen. Ja, wir möchten von dieser Idee erfreut und zufriedengestellt sein, wenn Konsequenzen, zu denen sie treibt, durch den Versuch bestätigt würden. Stokes hat den Versuch ausgeführt. Rankine hat sich zuerst eine Vorstellung über diesen Gegenstand gebildet, hat aber die Frage nicht weiter verfolgt, vielmehr diese Idee nur als ein Mittel hingestellt, über die Schwierigkeit der Doppelbrechung fortzuhelfen. Stokes hat aber die Möglichkeit dieses Mittels beseitigt. Er untersuchte den Brechungsindex des Flußspats für verschiedene Inzidenzen und fand, daß die Konstruktion von Huyghens sich mit größter Genauigkeit bewährt und daß es demgemäß unmöglich ist, die ungleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit in verschiedenen Richtungen mit den schönen Annahmen von Lord Rayleigh und Rankine zu erklären.

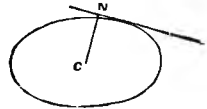


Fig. 6.

Es ist mir noch nicht geglückt, mit wirklich durchschlagendem Erfolge eine Erklärung zu geben; ich hoffe aber sehr, daß die vorgeführte Anschauung federnder Molekelnschalen uns aus der Schwierigkeit heraushelfen wird. Ich will zum Schluß auseinandersetzen, wie man sich dies etwa vorstellen möchte.

## b) Molekular.

Wir können leicht die Annahme machen, daß die Federn in verschiedenen Richtungen verschieden stark sind; das Gesetz, dem die Stärke zu folgen hat, kann genau den Tatsachen angepaßt werden. Damit gewönne man das grundlegende Ergebnis, das wir brauchen, daß nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Schwingungsrichtung und nicht bloß von der Ebene der Zerrung abhängt. Und offenbar kann jenes Gesetz in der Weise wirken, daß das Huyghenssche Prinzip gültig bleibt — es liefert uns genau dieselbe Wellenform wie der äolotropisch elastische Festkörper.

Aber leider, leider besteht eine Schwierigkeit, die noch schwerer zu überwinden scheint und mich zurückhält, meine Anschauung als eine Erklärung aufzustellen. Ich vermag nicht, die erforderliche Verschiedenheit in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für verschiedene Schwingungsrichtungen so festzustellen, daß sie sich verschiedenen Perioden anschmiegt. Wenn wir die vorgeführte Theorie annehmen, würden wir in einem Körper wie isländischer Spat nicht sehr nahe gleiche Unterschiede des Brechungsindex für verschiedene Perioden finden mit einer Dispersion, die gegenüber diesen Verschiedenheiten sehr klein ist: sondern wir würden vielmehr in verschiedenen Richtungen eine Verschiedenheit des Brechungsindex von der Größenordnung

der Dispersion selbst erhalten, und sie zugleich in außerordentlich hohem Maße von der Dispersion beeinflußt sehen, und anomale Dispersion würde sich einschleichen, sobald die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einer Richtung von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einer andren Richtung verschieden wäre. Die Unmöglichkeit, eine Verschiedenheit der Wellengeschwindigkeit in verschiedenen Richtungen zu erhalten, die für die verschiedenen Perioden hinreichend konstant ist, scheint mir gegenwärtig der Theorie einen Damm entgegenzusetzen.

So habe ich Sie über eine Stunde festgehalten und Sie einer Schwierigkeit von Angesicht zu Angesicht entgegengestellt, die zwar nicht unüberwindlich ist, für die aber seit Erschaffung der Welt bis zum heutigen Tage<sup>1)</sup> nichts vorgebracht ist, was uns die geringste Hoffnung auf eine Erklärung bieten könnte.

Morgen will ich — was ich schon heute tun zu können gehofft hatte — Ihnen etwas Mathematik vorführen, mir wohl bewußt, daß auch diese nicht alles leistet. Ich meine aber, daß wir wegen der Wellentheorie des Lichtes ein Interesse haben, die Bewegungen eines elastischen Festkörpers zu bearbeiten und einige Lösungen zu gewinnen, die von den Bewegungsgleichungen für einen solchen Festkörper abhängen. Wir wollen zuerst den Fall der Starrheit Null behandeln; das gibt uns den Schall. Wir betrachten dabei die denkbar einfachsten Töne, solche, die dadurch entstehen, daß ein kugelförmiger Körper sich wechselnd ausdehnt und zusammenzieht. Von diesem Fall gehen wir dann zu dem über, daß eine einzelne Kugel hin- und herschwingt. Dann wenden wir uns zur Stimmgabel und wollen versuchen, den Kegel der Tonlosigkeit zu erklären, den Sie alle in der Nähe einer schwingenden Stimmgabel kennen. Ich hoffe, daß wir in kurzer Zeit das Gebiet werden durchwandern und dann unsern Weg auf die entsprechenden Lösungen der Bewegungen einer Welle werden richten können, die von einem Mittelpunkt ausgeht. Dadurch werden wir dann in das Gebiet der Wellentheorie des Lichtes gelangen.

---

1) Ich ziehe diese Behauptung zurück. Vgl. einen Anhang gegen Ende dieses Bandes. W. T. 23. Okt. 1889.

## Zweite Vorlesung.

### Elastizitätskräfte, schwingende Systeme.

**Teil I.** Zunächst will ich die Bewegungsgleichungen eines elastischen Festkörpers aufstellen. Dabei nehme ich an, daß Sie mit den Grundgesetzen vertraut sind. Ich würde mich sehr freuen, wenn jemand von den Anwesenden ohne jede Scheu Aufklärung wünscht, wenn etwas nicht verstanden wird. Ich möchte mich mit Ihnen auf den Standpunkt der Konversation stellen, so daß die Arbeit von Ihnen und von mir gemeinsam geleistet wird und nicht ein Vortrag wird, den ich vor Ihnen über einen Gegenstand halte, mit dem mancher von ihnen ebenso vertraut ist wie ich, wenn nicht vertrauter.

Es wäre schön, wenn wir in einer halben Stunde etwas über diese Aufgaben der molaren Dynamik fertig bringen könnten. Molar will ich diese Dynamik nennen, um sie von der molekularen zu unterscheiden. Dann will ich mich mit Ihnen einige Augenblicke besprechen und eine kleine Pause machen. Hierauf gedenke ich zu einer Aufgabe der Molekulardynamik überzugehen, um den Weg für Bewegungen vorzubereiten, die von der Einwirkung von Partikeln aufeinander unter sich verändernden Umständen abhängen, für Bewegungen, die vielleicht Anwendungen in der Physik, insbesondere in der Theorie des Lichtes, finden.

#### a) Molar.

Die Grundgleichungen für das Gleichgewicht elastischer Festkörper sind in der Form der D'Alembertschen Bewegungsgleichungen zusammengefaßt. Ich halte mich an die in Thomson und Taits „Theoretischer Physik (Natural Philosophy)“ benutzte Bezeichnungsweise, die übrigens im wesentlichen mit der von anderen Schriftstellern gebrauchten übereinstimmt.

Es seien  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die Komponenten der Zerrung:  $a$  sei eine Zerrung in der zur Achse  $OX$  normalen Ebene, die durch Gleiten parallel zu den beiden Koordinatenebenen, die sich in  $OX$  schneiden, oder zu einer von ihnen hervorgerufen ist.  $b$ ,  $c$  mögen entsprechende Bedeutung mit Bezug auf die  $OY$  und  $OZ$  Achse haben.

Fassen wir den Zwangszustand ins Auge, in dem sich ein Teil des Festkörpers in der  $yz$ -Ebene, ohne jede andere Änderung, befindet, der ursprünglich quadratisch gewesen ist und jetzt rhombisch geworden ist. Wie dieser Zwangszustand gemessen wird, ist vollständig in Thomson und Taits geometrischer Einleitung zur Theorie der elastischen Festkörper dargestellt (Theoretische Physik §§ 154—177 und § 669 oder Elements §§ 148—156 und § 640). Bezeichnet haben wir ihn als einfache Schiebung (Scheerung). Und dort haben wir den Begriff der einfachen Schiebung auch definiert. Demnach kann der Zwangszustand gemessen werden, entweder durch den Betrag der Zerrung paralleler Ebenen im Verhältnis zur Einheit des senkrechten

Abstandes dieser Ebenen, oder, was genau auf dasselbe hinauskommt, durch die Änderung des in Radians gemessenen Winkels. In der nebenstehenden

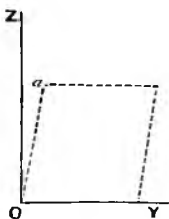


Fig. 7.

Fig. 7 ist der Buchstabe  $a$  in den schmalen Winkelraum gesetzt, um die Größe des in Radians gemessenen Winkels zu bezeichnen; dabei ist der besondere Fall des betrachteten Zwanges eine parallel zur Ebene  $YOZ$  erfolgte Gleitung.

Ich benutze das Wort „Radian“; es ist bisher nicht sehr verbreitet; ich nehme aber an, daß Sie wissen, was ich darunter verstehe. In Cambridge benutzten wir früher gewöhnlich eine sehr unlogische Bezeichnung — „den Einheitswinkel“ — ein sehr absurder Gebrauch des bestimmten Artikels „der“. Es ist unlogisch von einem Winkel zu sprechen, der in Beträgen „des“ Einheitswinkels gemessen ist. „Die“ Einheit gibt es überhaupt nicht für die Messung irgendeiner Größe, vielmehr kann man nur in Beträgen „einer“ Einheit messen. Der Grad ist eine Einheit des Winkels; ebenso die Minute; ebenso die Sekunde; ebenso der Quadrant; ebenso der Kreis; alle diese Einheiten werden vielfach für Winkelmessungen benutzt. Diejenige Einheit aber, die allgemein für die Messung von Winkeln in der analytischen Mechanik sich am geeignetsten erweist, ist der Winkel, dessen Bogen dem Radius gleich ist. Dieser wurde in Cambridge gewöhnlich „der Einheitswinkel“ genannt. Mein Bruder, James Thomson, hat vorgeschlagen, ihn als „den Radian“ zu bezeichnen.

Es bestehen drei Hauptzerrungen  $a, b, c$  in bezug auf die Achsen  $OX, OY, OZ$ ; daneben sind vorhanden drei Hauptdehnungen — beziehungsweise Pressungen, wenn sie oder einige von ihnen negativ sind —  $e, f, g$ , welche die Verhältnisse der Vergrößerungen der Länge zu den Längen selbst darstellen.

Die allgemeine Formel für die Energie wird nun eine Gleichung sein, in welcher eine quadratische Funktion von  $e, f, g; a, b, c$  enthalten ist; als Ausdruck für diese haben wir

$$E = \frac{1}{2} [(1,1) e^2 + 2(1,2) ef + 2(1,3) eg + 2(1,4) ea + 2(1,5) eb + 2(1,6) ec + 2(2,1) fc + 2(2,2) f^2 + 2(2,3) fg + \dots]$$

Hierbei sind die Zeichen  $(1,1); (1,2) \dots$  usw. Symbole, welche die ein- undzwanzig Koeffizienten dieser quadratischen Funktion feststellen und die Bedingung erfüllen, daß  $(1,2) = (2,1)$  usw. ist. Die Differentiation der quadratischen Funktion  $E$  z. B. nach  $e$  ergibt

$$\frac{\partial E}{\partial e} = (1,1) e + (1,2) f + (1,3) g + (1,4) a + (1,5) b + (1,6) c.$$

Dies ist eine von den Komponenten der normalen Kraft, die erforderlich ist, den durch  $e, f, g, a, b, c$  charakterisierten zusammengesetzten Zwangszustand herbeizuführen. Nach der Bezeichnung von Thomson und Tait sei

$$P = \frac{\partial E}{\partial e}, \quad Q = \frac{\partial E}{\partial f}, \quad R = \frac{\partial E}{\partial g}, \quad S = \frac{\partial E}{\partial a}, \quad T = \frac{\partial E}{\partial b}, \quad U = \frac{\partial E}{\partial c};$$

dann besteht also auch die Beziehung

$$Pe + Qf + Rg + Sa + Tb + Uc = 2E,$$



mit deren allgemein wohl bekannten Deutung Sie ja vertraut sind.<sup>1)</sup> Wir wollen bald die 21 Koeffizienten näher betrachten, zuerst hinsichtlich der Beziehungen, die zwischen ihnen festgestellt werden müssen, wenn eine gewisse Art Symmetrie in bezug auf die drei Koordinatenachsen vorhanden sein soll, und hierauf wollen wir zusehen, welche weitere Bedingungen für einen elastischen Festkörper bestehen müssen, wenn er die Funktionen des lichtführenden Äthers in einem Kristall ausüben soll.

Ehe wir aber hierzu übergehen, wollen wir den Fall eines vollkommen isotropen Materials behandeln. Am besten stellen wir ihn wohl in folgender Weise in Tabellenform dar:

	1	2	3	4	5	6
1	$\mathcal{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}$	0	0	0
2	$\mathfrak{B}$	$\mathcal{A}$	$\mathfrak{B}$	0	0	0
3	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}$	$\mathcal{A}$	0	0	0
4	0	0	0	$n$	0	0
5	0	0	0	0	$n$	0
6	0	0	0	0	0	$n$

Zunächst sind in der unteren quadratischen Ecke, welche die Drillungen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  allein berücksichtigt, falls mit  $n$  der Starrheitsmodul bezeichnet wird, die drei in der Diagonale befindlichen Zahlen sämtlich  $n$ , während die nicht in der Diagonale stehenden Null sind. Sechs von den einundzwanzig Koeffizienten werden demnach in der folgenden Weise bestimmt:

$$(4,4) = (5,5) = (6,6) = n, \text{ und } (4,5) = (4,6) = (5,6) = 0.$$

Weitere neun, durch die Zeichen 0 in der oberen Ecke rechts und in der unteren links, sind Null, also

$$(1,4) = (1,5) = (1,6) = (2,4) = (2,5) = (2,6) = (3,4) = (3,5) = (3,6) = 0.$$

Um zu zeigen, daß die Zeichen 0 in der oberen Ecke rechts und in der unteren links richtig sind, wollen wir uns fragen, welche Beziehungen für einen isotropen Körper zwischen longitudinalen Zügen und Drillungen möglich sind. Offenbar keine. Keiner von den longitudinalen Zügen vermag bei

1) In G. Kirchhoffs Bezeichnung ist:

$$P = -X_x, \quad Q = -Y_y, \quad R = -Z_z; \quad S = -X_y = -Y_x,$$

$$T = -Y_z = -Z_y, \quad U = -Z_x = -X_z.$$

$$a = x_y, \quad b = y_x, \quad c = z_x; \quad e = x_x, \quad f = y_y, \quad g = z_z; \quad E = -2f.$$

Ferner (für später)  $n = K$ ,  $k = 2K(\Theta + \frac{1}{3})$ ,  $m = K(2\Theta + 1)$ ,  $m + n = 2K(\Theta + 1)$ ,  
 $m - n = 2K\Theta$ .  
D. H.

einem isotropen Körper in einer der Oberflächen, senkrecht zu denen er wirkt, eine tangentielle Kraft ins Spiel zu rufen; ebensowenig vermag, wenn eben das Medium isotrop ist, eine Verdrehung durch Gleiten in Ebenen, die den Hauptebenen parallel sind, eine longitudinale Verziehung hervorzurufen, irgendeinen Zug parallel zu den Linien  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ . Demgemäß erhalten wir in den betrachteten beiden Quadraten in der Tat lauter Nullen.

Ferner wissen wir, daß

$$(1,1) = (2,2) = (3,3)$$

ist. Diese Größe mag mit einem gotischen  $\mathfrak{A}$  bezeichnet werden. Dann fassen wir die Wirkung eines longitudinalen Zuges ins Auge in Richtung von  $OX$ . Vermag der Körper nur longitudinal nachzugeben, so folgt ein Gegenzug in den zu  $OY$  und  $OZ$  parallelen Richtungen. So finden wir eine kreuzweise Beziehung zwischen den Zügen in den Richtungen  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ . Die Isotropie erfordert aber, daß die einzelnen gegenseitigen Beziehungen sämtlich einander gleich sind, so daß wir einen einzigen Koeffizienten anzuwenden haben, um diese Beziehungen auszudrücken. Dieser Koeffizient sei durch ein gotisches  $\mathfrak{B}$  dargestellt.

Damit haben wir unsere 36 Quadrate, die aber vermöge der Tatsache, daß  $(1,2) = (2,1)$  usw. ist, nur 21 Koeffizienten darstellen, ausgefüllt. Wir können jetzt unseren quadratischen Ausdruck für die Energie für einen isotropen Körper in folgender Weise niederschreiben:

$$E = \frac{1}{2} [\mathfrak{A} (e^2 + f^2 + g^2) + 2\mathfrak{B} (fg + ge + ef) + n (a^2 + b^2 + c^2)].$$

An Stelle der durch gotische Buchstaben  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  bezeichneten Größen, welche eine ganz bestimmte und klare physikalische Bedeutung haben, können wir auch den Widerstand des Festkörpers gegen Pressung einführen, dessen reziproker Wert gewöhnlich als Kompressibilität bezeichnet wird, und der auch als Raummodul  $k$  bezeichnet werden kann. Für diesen ist im Thomson und Tait und in einem Artikel in der Encyclopaedia Britannica, den viele von Ihnen vielleicht gelesen haben<sup>1)</sup>, bewiesen, daß

$$\mathfrak{A} = k + \frac{4}{3} n, \quad \mathfrak{B} = k - \frac{2}{3} n$$

ist, woraus weiter folgt:

$$n = \frac{1}{2} (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}).$$

Diese letztere Beziehung ist äußerst wichtig. Man gewinnt diese Beziehung zusammen mit den vorausgehenden beiden Beziehungen aus der gleichen Überlegung. Fassen wir einen festen Würfel ins Auge, dessen Kanten  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  parallel sind. Wirkt auf diesen ein Zug entlang zwei zu  $OX$  senkrechten und ein gleicher Druck auf zwei zu  $OY$  senkrechten Flächen, so entsteht eine Verdrehung in der  $xy$ -Ebene. Ihr Betrag ist leicht ermittelt. Man bestimmt die Scheerkraft, die für diese Verdrehung erforderlich ist, aus  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , setzt diese der aus dem Starrheitsmodul  $n$  berechneten Kraft gleich; so ist die gesuchte Beziehung gefunden. Den Bedingungen für vollkommene Isotropie ist hiernach in dem oben angegebenen quadratischen Ausdruck für  $E$  vollständig Rechnung getragen, wenn man in ihm noch für  $n$  den Wert  $\frac{1}{2} (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$  setzt.

1) Reprint of Mathematical and Physical Papers, Vol. III. Art. XCII, jetzt im Druck (W. T. Aug. 7. 1885).

Wir haben nun zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen überzugehen. Für das Gleichgewicht muß die zu  $OX$  parallele Komponente der in einem Punkte  $x, y, z$  des Festkörpers wirkenden Kraft, bezogen auf Einheit der Masse, in diesem Punkte gleich sein:

$$L_x = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \right),$$

wenn der Körper in irgendeiner Weise durch innen in seiner Masse unmittelbar wirkende Kräfte in Deformation erhalten wird; denn die Resultante der in Richtung der Achse  $OX$  in einem unendlich kleinen Materienteil im Punkte  $x, y, z$  vorhandenen elastischen Kraft ist offenbar  $\left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz$ . Zum Beweise beachten wir, daß Kraftteile in Richtung der Achse  $OX$  wirkend die Drucke  $P, U, T$  geben. Von diesen wirkt  $P$  an den beiden um  $dx$  abstehenden Flächen  $dy dz$  des Körperelements,  $U$  an den um  $dy$  abstehenden  $dx dz$ ,  $T$  an den um  $dz$  abstehenden  $dx dy$ . Wachsen diese Kräfte in Richtung der Achsen, so sind ihre Resultanten

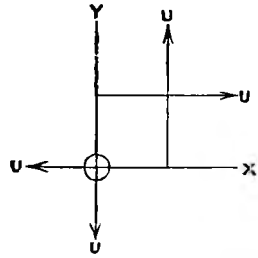


Fig. 8.

$$P dy dz + \frac{\partial P}{\partial x} dx \cdot dy dz - P dy dz = \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz,$$

$$U dz dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \cdot dz dx - U dz dx = \frac{\partial U}{\partial y} dx dy dz,$$

$$T dx dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz \cdot dx dy - T dx dy = \frac{\partial T}{\partial z} dx dy dz.$$

Die Summe gibt den obigen Betrag.

Wir setzen jetzt voraus, daß keine anderen Kräfte in dem Material wirken; vielmehr mag nur die Trägheit des bewegten Teiles und der vermöge dieser Trägheit bestehende Widerstand gegen eine Beschleunigung die gegen die Elastizität wirkende, das Gleichgewicht herstellende Gegenkraft bilden. Dann ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} = \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

wenn wir mit  $\varrho$  die Dichte und mit  $\xi$  die Verschiebung desjenigen Massenteilchens, dessen Koordinaten in der mittleren Lage  $x, y, z$  sind, aus der Gleichgewichtslage in der Richtung  $OX$  bezeichnen.

Ich habe gesagt, ich wolle die Bezeichnungen von Thomson und Tait anwenden; diese benutzen die Zeichen  $\alpha, \beta, \gamma$  für diese Verschiebungen; allein da Verwechslungen der Zeichen  $\alpha$  und  $a$  allzu häufig sind, insbesondere im Druck, wollen wir lieber  $\xi, \eta, \zeta$  wählen. Ich wenigstens bin bei der Lektüre von Helmholtz' Abhandlung über die anomale Dispersion in dieser Hinsicht gestört worden, da ich sehr oft trotz Anwendung eines Vergrößerungsglases nicht imstande war zu unterscheiden, ob ein Buchstabe  $a$  oder  $\alpha$  war.

Wir schreiben die Werte von  $S, T, U$  besser ganz aus, obwohl aus dem Werte einer jeden von diesen drei Größen die andern sich durch Analogie ergeben. Kreide spart oft überflüssige Überlegung. Diese Werte sind:

$$S = n \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right), \quad T = n \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right), \quad U = n \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right).$$

Weiter ist

$$P = \mathfrak{A}e + \mathfrak{B}(f + g).$$

Noch zwei oder drei andere Formen kann man diesen Ausdrücken geben, die in manchen Fällen bequem sind; ich will sie hinschreiben (indem ich  $m$  für  $k + \frac{1}{3}n$  setze),

$$P = (m + n) \frac{\partial \xi}{\partial x} + (m - n) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) = (m - n) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + 2n \frac{\partial \xi}{\partial x} = m \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + n \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right).$$

Wir wollen öfter mit  $\delta$  den Ausdruck

$$\delta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

bezeichnen, so daß beispielsweise die zweite dieser Angaben übergeht in

$$P = (m - n) \delta + 2n \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Wenn wir die Gleichungen eines heterogenen Mediums niederschreiben, wie es manchmal der Fall sein wird — so insbesondere sobald wir Lord Rayleighs Arbeit über die Bläue des Himmels verfolgen werden —, müssen wir, um die Beschleunigungen zu finden, bei der Bildung der Ausdrücke für  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  usw. die Zeichen  $m$ ,  $n$  unter das Differentiationssymbol setzen. Für homogene Festkörper aber behandeln wir  $m$  und  $n$  als Konstanten. Ich habe noch zu erwähnen, daß  $\delta$  die kubische Ausdehnung oder die Volumvermehrung für die Volumeneinheit in der Umgebung des Punktes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  bedeutet; diese ist ziemlich gut bekannt, und sie dient, die Beziehungen der Kräfte zur Zusammendrückbarkeit zu ermitteln. Wenn wir die Starrheit Null voraussetzen, muß  $P = m\delta$  sein, als Beziehung zwischen Druck und Volumen. Die gleiche Beziehung folgt, wenn wir im obigen Ausdruck für  $P$  den Starrheitskoeffizienten  $n = 0$  einführen; es wird dann ebenfalls  $P = m\delta$  die Gleichung für die Zusammendrückung einer kompressibeln Flüssigkeit, in welcher der Raummodul  $m$  ist.

Diese Art der Behandlung habe ich molare Dynamik genannt. Es ist die Dynamik kontinuierlicher Materie; dabei sind keine Molekeln angenommen, es ist überhaupt Heterogenität ausgeschlossen. Wir bereiten aber den Weg dafür vor, auch Heterogenität in rein analytischer Weise in Rechnung zu ziehen, wenn wir  $m$  und  $n$  als Funktionen von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  voraussetzen. Lord Rayleigh hat, wie bemerkt, auf diese Weise die Bläue des Himmels erforscht; seine Behandlung der Aufgabe ist in ihrer Art ganz vollkommen. Er sieht ein in der Luft schwebendes Teilchen Wasser, Staub oder auch eines ganz unbekannten Stoffes als das an, was die Bläue des Himmels verursacht. Um die Wirkung eines solchen Partikels auf die Lichtwellen zu entdecken, nimmt er im lichtführenden Äther von einem Ort zum andern eine Änderung der

Starrheit und der Dichte an; nicht eine plötzliche vollständige Änderung, sondern eine solche, die auf einen Raum beschränkt ist, dessen Abmessungen im Vergleich mit der Wellenlänge klein sind.

## b) Molekular.

**Teil II.** Ich möchte jetzt einen andern Gegenstand behandeln, der ebenfalls den Weg zu dem vorbereiten soll, was wir später bearbeiten wollen, nämlich die besondere dynamische Aufgabe über die Bewegung eines Systems miteinander verbundener Partikel. Ich setze voraus, daß die meisten von Ihnen die linearen Bewegungsgleichungen eines verbundenen Systems kennen. Ihr Integral führt immer zu derselben Formel wie die Bewegung des Cykloidspendels. Dieses Resultat ergibt sich, indem eine Determinante gleich Null gesetzt wird, was zu einer algebraischen Gleichung führt, deren Wurzeln für das Quadrat der Periode jeder möglichen fundamentalen Art einfacher harmonischer Bewegung notwendig reell sein müssen.

Als Beispiel stellen wir uns drei Gewichte vor; eines von 7 Pfund, ein anderes von 14 Pfund, das dritte von 28 Pfund. Das unterste Gewicht hängt an dem mittleren mittels einer Spiralfeder, das mittlere hängt ebenso mittels einer Spiralfeder an dem obersten, endlich sei das oberste durch eine Spiral- (oder Zickzack)-Feder an einem festen Punkte angebracht. Dies ist eine geeignete Versinnbildlichung, wenigstens finde ich sie für mich selbst sehr nützlich und ich kann sie Ihnen, die Sie mit mir gleiche Bestrebungen teilen, für ihre Schüler nur empfehlen. Man drücke mit dem Finger auf eines von den Gewichten, beispielsweise auf das obere. Durch Versuch findet man bald die Fundamentalperioden. Man bewege nun den Finger leicht auf und ab in der Periode, die man als diejenige ermittelt hat, welche auftritt, wenn alle diese drei Körper sich in derselben Richtung bewegen. So erhält man eine sehr gut ausgebildete Schwingung, das unterste Gewicht bewegt sich dabei in der größten Amplitude, das zweite in einer kleineren, das obere in der kleinsten. Dies gibt die Bewegung Nr. 1, die der größten Wurzel der kubischen Gleichung entspricht, welche die Lösung der mathematischen Aufgabe darstellt. Eine Bewegung Nr. 2 findet sich weiter nach einiger Übung. Man lernt bald eine Schwingung herstellen, die wesentlich schneller verläuft als die vorige, die erste, bei der sich das unterste Gewicht abwärts bewegt, während sich die beiden oberen aufwärts bewegen, oder bei der die beiden unteren abwärts gehen, während das oberste sich nach aufwärts begibt. Auch kann bei dieser Art der Schwingung das mittlere Gewicht ganz unbewegt bleiben; in diesem Falle muß die Erregung dadurch hervorgerufen sein, daß man den Finger auf das oberste oder das unterste Gewicht gesetzt hat. Diese Perioden hängen von der Größe der Gewichte und von der Stärke der benutzten Federn ab, und man findet sie bald für jeden besonderen Satz von Gewichten und Federn heraus. Es wäre eine schöne Aufgabe für junge Praktikanten, Gewichte und Federn herzustellen, die den Knotenpunkt so bestimmen, daß er zwischen dem oberen und dem mittleren, oder in dem mittleren, oder zwischen dem mittleren und dem unteren Gewichte liegt. Die

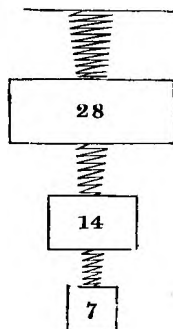


Fig. 9.

dritte Art der Schwingung, Nr. 3, die der kleinsten Wurzel der kubischen Gleichung entspricht, ist eine solche, bei der das mittlere Gewicht sich entgegengesetzt bewegt wie das erste und dritte. Hier findet sich stets ein Knotenpunkt in der Feder zwischen dem oberen und dem mittleren Gewichte und ein zweiter solcher Punkt in der Feder zwischen dem mittleren und dem untersten Gewichte.

Bei diesen Betrachtungen ist vorausgesetzt, daß die Federn selbst keine Masse besitzen. Will man die Laboratoriumsübungen variieren, so kann man mit der Masse der Gewichte herabgehen, dagegen diejenige der Federn ansteigen machen. Läßt man zuletzt die mit den Federn verbundenen Gewichte ganz fort, so erhält man eine schöne Darstellung der Schallbewegung. Für diesen Zweck eignet sich eine etwa 6 Meter lange Spiralfeder aus Stahldraht, die in einem ausreichend hohen Raum aufgehängt ist. Eine solche gibt leicht zwei oder drei von den wesentlichen Hauptschwingungsarten wieder, auch wenn überhaupt kein Gewicht angehängt ist. In dem besonderen Falle, den wir in Betracht ziehen, haben wir es mit drei getrennten Gewichten und nicht mit einer kontinuierlichen Feder zu tun; dann bestehen drei und nur drei Arten Schwingungen, falls die Federn gewichtslos sind. Dazu reicht aus, wenn die Federn so gewählt sind, daß ihre eigenen Schwingungen sehr rasch verlaufen im Verhältnis zu den Schwingungen der Gewichte. Dagegen gibt es eine unbegrenzte Anzahl Arten, wenn das Gewicht der Federn mitwirkt.

Ich möchte die Dynamik unserer Aufgabe für eine beliebige Anzahl Massen darstellen. Sie werden dann sofort sehen, daß dies gerade der Fall ist, von dem ich gestern gesprochen habe, indem ich die von Helmholtz herrührende Annahme eines einzelnen, mit dem lichtführenden Äther verbundenen, einfach schwingenden Partikels auf die eines mehrfach schwingenden, schweren, elastischen, in den lichtführenden Äther eingebetteten Atoms erweitere, was meiner Meinung nach der wahren Sachlage entsprechen muß. Eine feste Masse muß gegenüber dem lichtführenden Äther wie ein in ihn eingesenkter elastischer Körper wirken, dessen Masse im Vergleich mit der von ihm verdrängten Masse des lichtführenden Äthers ungeheuer groß ist. Damit die Schwingungen des Äthers nicht durch diese Masse vollkommen aufgehoben werden, muß eine elastische Verbindung bestehen. Es ist leichter auszusprechen, was da sein muß, als zu sagen, daß wir verstehen, wie dies zustande kommt. Es ist unendlich schwierig, eine Vorstellung sich zu bilden in dem Falle von Äther in Glas oder Wasser oder Schwefelkohlenstoff; wohl aber kann man sich leicht den Äther in Luft vorstellen.

Wir denken uns die Sauerstoff- und Stickstoffmolekeln als eine Gruppe ponderabler Partikel, die miteinander durch Federn verbunden und in eine homogene, vollkommen elastische Gallerte eingesenkt sind, die eben den lichtführenden Äther darstellt. Man hat dabei nicht nötig, die Eigenbewegungen der Sauerstoff-, Stickstoff- und Kohlensäurepartikel in unserer Atmosphäre in Rechnung zu ziehen, wenn man die Fortpflanzung der Lichtwellen in der Luft rechnerisch verfolgen will. Das kann man sich leicht in folgender Weise klarmachen. Die Schwingungsperioden in ultravioletten Strahlen in den Lichtwellen und in den infraroten Wärmewellen, soweit man diese kennt, liegen zwischen 1600 und 100 Billiontel einer Sekunde. Nun stelle man sich vor, wie

weit sich ein Sauerstoff- oder Stickstoffpartikel nach der kinetischen Gastheorie im Verlaufe dieser so außerordentlich kurzen Zeit fortbewegt. Man findet sofort, daß es sich nur um einen ungemein kleinen Bruchteil der Wellenlänge handeln kann. Nehmen wir beispielsweise an, eine Molekel bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 50000 cm in der Sekunde. Dann kriecht es während der Periode des orangen Lichtes um  $10^{-10}$  cm weiter, eine Strecke, die nur  $\frac{1}{600\,000}$  der Wellenlänge dieses Lichtes ausmacht. Ich bin vollkommen sicher, daß die Wellenbewegung unabhängig von der translatorischen Bewegung vor sich geht, die die Sauerstoff- und Stickstoffpartikel ausführen, indem sie ihre Aufgaben entsprechend der kinetischen Gastheorie erfüllen. Man darf also in der Tat die Bewegung der Lichtwellen als Lösung eines dynamischen Problems der Art auffassen, wie ich es vorgeführt habe, angewandt auf einen Fall, in dem die von den eingesenkten Molekeln herrührende wirksame Trägheit so klein ist, daß die Lichtgeschwindigkeit durch sie nicht um mehr als etwa ein dreiunddreißigstel Prozent verkleinert wird. Größere Schwierigkeiten stellen sich ein, wenn man die Fortpflanzung des Lichtes in stark zusammengedrückten Gasen oder durchsichtigen Flüssigkeiten oder Festkörpern untersucht.

Die Massen der Körper in unserer dynamischen Aufgabe seien mit  $m_1, m_2, \dots, m_j$  bezeichnet. Ich will weiter voraussetzen, daß auf die verschiedenen Partikel durch verbindende Federn gewirkt wird; ich brauche hier noch keine spiralförmige Federn. Die Schneckenform hat bei diesen Versuchen keine merkliche Bedeutung; wohl aber werden wir Spiralfedern bei der Untersuchung der Dynamik der helikalen Eigenschaften brauchen, wie sie der Zucker zeigt. Diese Eigenschaft wird gewöhnlich als Drehvermögen bezeichnet; die Bezeichnung ist aber irreleitend. Die von Faraday entdeckte magneto-optische Eigenschaft ist eine Drehung. Die von Quarz und Zucker und ähnlichen Körpern gezeigte Eigenschaft hat aber nicht die charakteristischen Merkmale einer Drehung, sondern weist auf Besonderheiten in der Konstitution der Substanz hin, die mit spiraligen Änderungen (schneckenförmig, nicht flach laufend) in Verbindung stehen. Wir wollen das Wort „helikal“ oder „windend“ für die eine und das Wort „rotational“ oder „drehend“ für die andre Erscheinung brauchen.

Wir fügen zu den vorbezeichneten Körperchen noch ein mit ihnen durch eine Feder  $C_1$  verbundenes Massenteilchen  $P$ , welches mit einer gegebenen Bewegung hin- und hergeführt wird und dessen Verschiebung abwärts von einem festen Punkte  $O$  aus wir mit  $\xi$  bezeichnen. Es sei  $c_1$  der Elastizitätskoeffizient der ersten Feder, die das Teilchen  $P$  mit dem Teilchen  $m_1$  verbindet;  $c_2$  der Elastizitätskoeffizient der nächsten Feder, die  $m_1$  mit  $m_2$  verbindet;  $c_{j+1}$  der Elastizitätskoeffizient der Feder, die  $m_j$  mit einem festen Punkte verbindet. Die Schwere ziehen wir nicht in Rechnung; mit ihr haben wir nichts zu tun. So wäre es denn besser, wenn wir uns nach dem Mittelpunkt der Erde begeben und dort den Versuch ausführen könnten. Der einzige Unterschied gegen Versuche auf der Erdoberfläche würde der sein, daß die Federn nicht durch die an ihnen hängenden

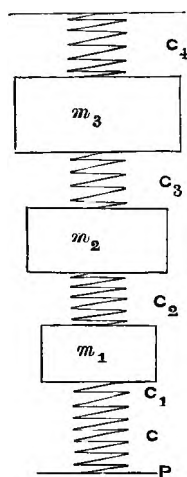


Fig. 10.

Gewichte gedehnt würden; in jeder andern Hinsicht würde die Aufgabe die nämliche sein, und wir können dieselben Bezeichnungen anwenden.

Wir wollen die abwärts gerichteten Verschiebungen positiv rechnen, die Verschiebung des Teilchens  $m_i$  sei  $x_i$ . Die auf  $m_1$  vermöge der dieses Teilchen mit  $P$  verbindenden Feder wirkende Kraft ist  $c_1(\xi - x_1)$ ; und vermöge der Federverbindung zwischen diesem Teilchen  $m_1$  und dem  $m_2$  besteht der Gegenstoß  $-c_2(x_1 - x_2)$ ; so daß die Bewegungsgleichung für das erste Teilchen  $m_1$  lautet

$$m_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = c_1(\xi - x_1) - c_2(x_1 - x_2)$$

Für  $m_2$  finden wir

$$m_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = c_2(x_1 - x_2) - c_3(x_2 - x_3).$$

Ähnlich für die andern Teilchen.

Jetzt setzen wir voraus,  $P$  werde willkürlich in einer einfachen harmonischen Bewegung von der Periode  $\tau$  gehalten, so daß ist  $\xi = \text{const} \times \cos \frac{2\pi t}{\tau}$ . Wir setzen weiter voraus, daß auch jeder Teil der Einrichtung eine einfache harmonische Bewegung ausführt, wie das der Fall sein wird, wenn ein unendlich kleiner Zähigkeitswiderstand da ist und die einfache harmonische Bewegung von  $P$  lange genug unterhalten wird; dann können wir schreiben  $x_1 = \text{const} \times \cos \frac{2\pi t}{\tau}$  usw. Ich ändere jetzt die Bezeichnungen für die Massen so, daß die Faktoren  $4\pi^2$ , die infolge der Differentiation auftreten, verschwinden. Zu diesem Zwecke soll  $\frac{m_1}{4\pi^2}$  die Masse des ersten,  $\frac{m_2}{4\pi^2}$  die des zweiten Teilchens usw. bezeichnen. Dann wird das Resultat sein, daß die Bewegungsgleichungen übergehen in

$$-\frac{m_1}{\tau^2} x_1 = c_1(\xi - x_1) - c_2(x_1 - x_2) \text{ usw.}$$

Unsere Aufgabe ist jetzt auf eine algebraische zurückgeführt. Einige interessante Betrachtungen bieten sich dar, die sich an die Determinante knüpfen, welche man durch Elimination aus diesen Gleichungen erhält. Es ist leicht genug, die Anzahl der Glieder zu finden; und dies führt zu einigen bemerkenswerten Ausdrücken. Ich will sie aber in der Weise behandeln, daß wir mit sehr kurzer Rechnung das Resultat erhalten, das aus der Determinante auf dem gewöhnlichen Wege nur mit einem enormen Aufwand an Rechenarbeit erhalten werden kann. Wir werden ein Annäherungsverfahren finden, dessen Genauigkeit keine Grenze hat, wenn man es nur weit genug treibt, und das bei der Ausführung der Rechnung außerordentlich bequem ist.

In der nächsten Vorlesung wollen wir, indem wir zunächst wieder das molare Problem aufnehmen, mit der Auflösung der hier aufgestellten Gleichungen für den Schall beginnen. Hierauf wollen wir versuchen, einen Schritt weiter in dieses molekulare Problem der Schwingungen unserer zusammengesetzten Molekel zu dringen.



### Dritte Vorlesung.

## Gleichungen der Elastizitätstheorie, schwingende Systeme.

### a) Molar.

Wir haben es jetzt mit dem Problem der molaren Dynamik zu tun, dem der Fortpflanzung von Schall oder Licht von einer Quelle aus. Ich empfehle Ihnen allen, die Sie mit Unterricht oder mit selbständiger Forschung im vorliegenden Gebiete beschäftigt sind, sich kleine Modelle zu konstruieren. Wenn Sie sich die Zerrungen verbildlichen wollen, von denen wir gestern gesprochen haben, dann stellen Sie sich eine Büchse her, mit weißem Papier bedeckt und verzeichnen Sie sich auf ihr die Richtungen der Kräfte  $S, T, U$ . Ich wähle die Richtungen der Achsen stets in einer bestimmten Ordnung, und zwar so, daß die Richtung positiver Drehung von  $y$  nach  $z$ , von  $z$  nach  $x$ , von  $x$  nach  $y$  geht. Positiv nennen wir diejenige Richtung, in der die Umdrehung eines Planeten von der nördlichen Erdhalbkugel aus erscheint, das wäre also die der Bewegung der Uhrzeiger entgegengesetzte Richtung. Ich habe die vorgezeigte Büchse für einen anderen Zweck hergestellt, nämlich als ein mechanisches Modell für einen elastischen Festkörper mit 21 unabhängigen Moduln, dessen Möglichkeit oft bestritten und auch, nachdem sie bewiesen war, lange nicht geglaubt wurde.

Wir nehmen unsere Gleichungen wieder auf.

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z},$$

wo

$$P = (m - n) \delta + 2n \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad U = n \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad T = n \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right),$$

$$\delta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Wir wollen  $m$  und  $n$  als konstant betrachten. Wenn wir diese Größen nicht als konstant annehmen, bereiten wir uns auf Lord Rayleighs Abhandlung über die Bläue des Himmels vor, auf die bereits hingewiesen ist. Es ergibt sich zunächst nach Einführung der Werte für  $P, U, T$ :

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = m \frac{\partial \delta}{\partial x} + n \nabla^2 \xi, \tag{1}$$

wo

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

gesetzt ist. Wenn keine Starrheit vorhanden, oder wenn  $n = 0$  ist, fällt das letzte Glied fort. Wir werden aber Lösungen der vorliegenden Gleichung

suchen, ohne Rücksicht auf die Frage, ob wir  $n = 0$  machen wollen oder nicht, und wir werden finden, daß eine Hauptlösung für einen elastischen Festkörper unabhängig von  $n$  ist und demgemäß sich als Lösung für eine elastische Flüssigkeit eignet.

Ich habe einen gedruckten Bericht<sup>1)</sup> über eine Royal-Institutionvorlesung vom Februar 1883 vor mir, die die Größe der Atome in Betracht zieht und eine Bemerkung über einige mathematische Aufgaben enthält, die ich als Examiner über die Smithschen Preise zu Cambridge vom 30. Januar 1883 gestellt habe. Die eine Aufgabe war, zu zeigen, daß die Bewegungsgleichungen für einen isotropen elastischen Körper die sind, die wir hier erhalten haben, und eine andere, zu zeigen, daß dies und dies eine Lösung sei. Wir wollen gerade die letztere Aufgabe hier vornehmen und nachweisen, daß jede mögliche Lösung der nach der Form unter (1) gebildeten drei Gleichungen enthalten ist in der folgenden Lösung:

$$\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u; \quad \eta = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v; \quad \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + w, \quad (2)$$

wo  $\Phi$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  irgendwelche Funktionen von  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  sind, mit der Bedingung, daß  $u$ ,  $v$ ,  $w$  der Gleichung genügen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Wenn wir aus den Beziehungen unter (2) den Wert der kubischen Ausdehnung berechnen, finden wir

$$\delta = \nabla^2 \Phi + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla^2 \Phi. \quad (4)$$

Andererseits geht die Gleichung unter (1) nunmehr über in

$$\rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = (m + n) \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + n \nabla^2 u. \quad (5)$$

Und jetzt können wir setzen

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = (m + n) \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (6)$$

Den vollständigen Beweis für die Richtigkeit dieser Rechnung und ihre Erläuterung behalte ich mir noch vor. [Vgl. den Anfang der Vorlesung IV, weiter unten]. Wir multiplizieren (6) mit  $dx$  und die entsprechenden Gleichungen für  $y$  und  $z$  mit  $dy$ ,  $dz$  und verbinden sie durch Addition miteinander. So erhalten wir ein vollständiges Differential; in anderen Worten: die Bedingung, der  $\Phi$  genügen muß, ist:

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = (m + n) \nabla^2 \Phi. \quad (7)$$

Andererseits zeigen die Gleichungen (5), daß, wenn  $\Phi$  der Gleichung (7) ge-

1) Abgedruckt in Bd. I von Sir W. Thomsons (Popular Lectures and Adresses) Populäre Vorlesungen und Vorträge. Macmillan, 1889.

nügt, die Funktionen  $u, v, w$  Gleichungen derselben Form genügen, nur daß in ihnen  $n$  an die Stelle von  $(m + n)$  tritt, also bekommen wir weiter

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = n \nabla^2 u; \quad \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = n \nabla^2 v; \quad \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = n \nabla^2 w. \quad (8)$$

Daß wir durch Auflösung dieser vier ähnlichen Gleichungen, von denen die eine  $(m + n)$  enthält, jede der andern  $n$ , Lösungen der Gleichung (1) erhalten können, ist klar. Daß wir aber auf diese Weise alle möglichen Lösungen bekommen, hoffe ich Ihnen morgen zu beweisen.

Die Geschwindigkeit der Schallwellen oder der in periodischen Zusammendrückungen bestehenden Wellen ist  $\sqrt{\frac{m+n}{\varrho}}$ , die Geschwindigkeit der in Verdrehungen in dem elastischen Festkörper bestehenden Wellen ist  $\sqrt{\frac{n}{\varrho}}$ . Ich will die letztere Aufgabe noch nicht aufnehmen, weil ich mich beeilen möchte, mich mit dem molekularen Problem zu beschäftigen. Sie sehen aber schon, wie die zwei Wellenarten in einem isotropen homogenen Festkörper ans Licht gefördert sind, die eine in periodischen Verdichtungen, die andere in solchen Verdrehungen bestehend. Die Zusammendrückungswellen folgen den Bewegungsgleichungen des Schalles, welche dieselben sind, als wenn in den allgemeinen Gleichungen  $n = 0$  ist; und dies gibt die Lösung für die Fortpflanzung des Schalles in einem homogenen Mittel wie Luft usw. Diese Lösung wird aber leicht dahin ausgearbeitet, daß sie auch für Verdrehungen gilt, da dieselben Gleichungsformen uns die einzelnen Komponenten  $u, v, w$  liefern; dieselben Lösungen, die uns das Geschwindigkeitspotential für die in Verdichtungen bestehenden Wellen geben, bringen uns also auch die einzelnen Komponenten der Verschiebung für die in Verdrehungen bestehenden Wellen.

Was ich Ihnen morgen vortragen will, enthält eine Lösung, auf die bereits Lord Rayleigh hingewiesen hat; sie bietet also nichts Neues. Jetzt spreche ich kurz über denjenigen Teil der Lösung, der, von Stokes gedeutet, den schönen und auffälligen Versuch Leslies erklärt. Lord Rayleigh führt Stokes an und schließt seine acht Seiten lange Anführung mit den Worten: „Die Wichtigkeit des Gegenstandes und die meisterhafte Art, in der er von Stokes behandelt wurde, wird wohl für hinreichend gelten, diese lange Anführung zu rechtfertigen.“ Ich möchte mir erlauben, zwei oder drei Punkte daraus vorzubringen. Lord Rayleigh sagt also (Theory of Sound, Vol. II p. 207, deutsche Übersetzung von Neesen Bd. II S. 27): „Prof. Stokes hat diese Lösung benutzt, einen bemerkenswerten Versuch von Leslie zu deuten, wonach es schien, daß der Schall einer in einem teilweise evakuierten Rezipienten schwingenden Glocke durch die Einführung von Wasserstoff abgeschwächt wird. Diese paradoxe Erscheinung hat ihren Grund in der durch die Zuführung von Wasserstoff vergrößerten Wellenlänge, infolge deren die Glocke (sozusagen) ihren Halt an dem umgebenden Gase verliert.“ Ich liebe die Bezeichnung „paradoxe Erscheinung“ nicht; „auffallende Erscheinung“ oder „interessante Erscheinung“ wäre besser. Es gibt in der Wissenschaft nichts Paradoxes. Lord Rayleigh sagt weiter: „Die allgemeine Erklärung kann nicht besser dargestellt werden als in den Worten des Prof. Stokes selbst: „Stellen wir uns vor, jemand bewege seine Hand in einem kleinen Raume hin

und her. Die dadurch in der Luft hervorgerufene Bewegung ist dann fast die gleiche, wie wenn dabei die Luft sich als inkompressible Flüssigkeit verhielte. Es besteht eine mehr örtliche sich in sich abspielende Bewegung, bei der die Luft unmittelbar vor der Hand vorwärts getrieben wird, und die unmittelbar hinter ihr nachgezogen wird, während in dem vorderen Raume die Luft allgemein vor dem Zwang durch den bewegten Körper zurückweicht und in den hinteren Raum allgemein von allen Seiten zuströmt, um das sich bildende Vakuum auszufüllen; seitlich sind die Strömungen der Flüssigkeit nach hinten gerichtet, indem ein Teil des vorn vorhandenen Überschusses an Flüssigkeit den hinten hieran herrschenden Mangel ausfüllt.“ Man muß einigermaßen sorgfältig nachdenken, um dem Gedankengang zu folgen. Ich möchte Ihnen einen Ausspruch Greens vorlesen. Dieser Denker sagt: „Ich habe kein Zutrauen zu Betrachtungen dieser Art, wenn sie nicht in eine regelmäßige analytische Form gebracht sind.“ Stokes stellt solche Betrachtungen an, ist aber von ihnen gleichfalls nicht befriedigt, wenn er seine Betrachtungen nicht in eine regelmäßige analytische Form gebracht hat. Er gibt an dieser Stelle einige sehr durchgearbeitete Rechnungen, die an sich schon wichtig und interessant sind, teils wegen ihrer Verbindung mit der Theorie der harmonischen Kugelfunktionen, teils weil sie so ausnehmend lehrreich für viele den Schall betreffenden Aufgaben sind. Ich übergehe die ganzen fünf oder sechs Seiten mathematische Ableitungen — ich will Sie nicht damit anstrengen, den Mechanismus dieser Ableitungen in wenigen Minuten zu verstehen; ich wollte Sie nur zur Lektüre der Abhandlung anregen. — Stokes kommt dann, mehr ins einzelne gehend, auf die Versuche Leslies. Anstatt einer schwingenden Glocke betrachtet Stokes die Schwingungen einer Kugel, die abwechselnd sich verlängert und verflacht, und er zeigt, daß die Prinzipien dieselben sind. Lesen Sie dies, bitte, nur selbst. Ich hatte nur die Absicht, Ihr Interesse für den Gegenstand zu erwecken.

### b) Molekular.

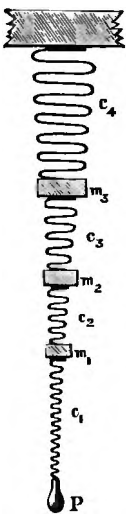


Fig. 11.

Um auf die Betrachtung unserer durch Federn miteinander verbundenen Molekeln zurückzukommen, wollen wir oben eine gute Befestigung voraussetzen, so fest und steif, daß ihr der abwechselnde Stoß keinerlei merkliche Bewegung mitzuteilen vermag. Für jede einzelne von den Federn mag ein bestimmter Wechsel des Zuges bestehen,  $c$  für die Längeneinheit. Dieser Koeffizient  $c$  mißt das, was ich die longitudinale Steifheit der Feder nennen will: tatsächlich ihre wirksame Steifheit. Es hat nicht die geringste Folge, ob die Feder lang oder kurz ist; nur soll sie, wenn sie lang ist, um so steifer sein; aber ob lang oder kurz, dick oder dünn, sie soll ohne Masse sein. Ich verstehe darunter, sie soll keine Trägheit besitzen. Die Massen mögen gleich oder ungleich und durch die Federn miteinander verbunden sein. An die unterste Feder denken wir uns etwas einem Glockengriff aus der vorelektrischen Zeit Ähnliches angehängt — irgend etwas, woran man ziehen kann; wir nennen es  $P$ . Dies soll in unserer Anwendung auf den lichtführenden Äther die starre Grenzfläche zwischen dem lichtführenden Äther und der ersten bewegten Masse sein.

Die Bewegungsgleichung für die erste Masse geht, wenn man  $\xi$  auf die linke Seite bringt, über in (S. 24)

$$-c_1 \ddot{\xi} = \left( \frac{m_1}{\tau^2} - c_1 - c_2 \right) x_1 + c_2 x_2.$$

Ähnliches gilt für die zweite Masse. Mit  $i$  soll eine beliebige ganze Zahl bezeichnet werden. Ich finde den Buchstaben  $i$  allzu bequem für diesen Zweck, um ihn aufzugeben, und werde, wenn ich die imaginäre Zahl  $\sqrt{-1}$  niederschreiben habe, oft das Zeichen  $i$  — ohne Punkt — benutzen. Den ersten Koeffizienten auf der rechten Seite unserer Gleichung wollen wir mit  $a_1$  bezeichnen und den entsprechenden Koeffizienten in der nächsten Gleichung mit  $a_2$  usw., so daß allgemein ist

$$a_i = \frac{m_i}{\tau^2} - c_i - c_{i+1}.$$

Die  $i$ te Gleichung wird dann

$$-c_i x_{i-1} = a_i x_i + c_{i+1} x_{i+1}.$$

Jetzt denken wir uns alle diese  $j$  Gleichungen niedergeschrieben, wenn wir  $j$  als Gesamtzahl der Federn voraussetzen, bilden die Determinante, aus der wir alle andern Variablen in Gliedern nach  $\xi$  dargestellt finden, und die Aufgabe ist gelöst.

Hätten wir etwas mehr Zeit, so würde ich gern die Anzahl Glieder dieser Determinante bestimmen. Wir wollen später noch darauf zurückkommen, da dies äußerst interessant ist. Ich möchte aber vor allem die Gleichungen in eine interessante Form bringen, und nehme dabei eine Anregung auf, die ich durch Laplaces Abhandlung über sein berühmtes Gezeitenproblem empfangen habe. Was wir wissen wollen, sind tatsächlich die Verhältnisse der Verschiebungen; wir wollen deswegen setzen

$$\frac{c_i x_{i-1}}{-x_i} = u_i$$

und führen dabei das Zeichen minus ein, so daß, wenn die Verschiebungen abwechselnd positiv und negativ sind, die aufeinanderfolgenden Verhältniszahlen sämtlich positiv werden. Wir erhalten so

$$-x_1 \ddot{\xi} = u_1 = a_1 - \frac{c_2^2}{u_2}, \quad u_2 = a_2 - \frac{c_3^2}{u_3}, \dots, u_i = a_i - \frac{c_{i+1}^2}{u_{i+1}},$$

$$u_j = a_j; (u_{j+1} = \infty).$$

Wir können jetzt einen Kettenbruch bilden, der für den Fall, den wir brauchen, sehr stark konvergiert. Wenn dieser nach  $\tau^{-2}$  differenziert wird, finden wir ein auffallendes Gesetz; doch muß ich davon noch absehen. Die Lösung ist

$$u_1 = a_1 - \frac{c_2^2}{a_2 - \frac{c_3^2}{a_3 - \dots - \frac{c_j^2}{a_j}}}.$$

So ist, sobald die Federverbindungen und die Massen gegeben sind, alles bekannt, falls die Periode bekannt ist. Wenn wir diesen Bruch entwickeln,

bilden wir einfach die Determinante. Die Bruchform hat aber den Vorteil, daß, wenn die Massen immer größer werden, die Federverbindungen aber nicht verhältnismäßig wachsen, wir eine ausnehmend schnelle Annäherung an den wahren Wert durch Bildung der Reihe der Näherungswerte erhalten. Der Differentialkoeffizient dieses Kettenbruchs nach der Periode ist seinem Wesen nach negativ, und so werden wir schön von Wurzel zu Wurzel geführt und sehen die folgenden Bedingungen: — Erstens; setzen wir voraus, wir bewegen  $P$  hin und her in einfacher harmonischer Bewegung von sehr kurzer Periode; wenn dann das Ganze in eine periodische Bewegung gekommen ist, müssen  $P$  und das erste Partikel sich in entgegengesetzten Richtungen bewegen. Die Schwingung des ersten Partikels wird dann in Trab gesetzt werden (wenn es gestattet ist, mich eines etwas allzu volkstümlichen Ausdrucks zu bedienen), falls die Bewegung von  $P$  eine Periode hat, die kürzer ist als die kürzeste der möglichen unabhängigen Perioden des Systems bei festgehaltenem  $P$ . Wenn wir aber ein schwingendes Teilchen beschleunigen wollen, müssen wir es an jedem Ende seines Ausschlages nach innen, nach seiner mittleren Lage, hin drücken. Man wendet dieses Prinzip oft an; es ist in der Konstruktion der Echappements von Uhren wohlbekannt. Um die schwingende Bewegung unseres Systems zu beschleunigen, müssen wir also zu der zurückführenden Kraft des Partikels 1 durch die Wirkung der dieses mit dem Griff  $P$  verbindenden Feder eine Kraft hinzufügen, indem wir  $P$  stets in der Richtung bewegen, die der Bewegung von  $m$  entgegengesetzt ist. Wenn Sie den Gegenstand anschauen und lernen ihn wie durch Empfinden des Versuchs zu verstehen, falls Sie ihn nicht schon durch Nachdenken allein verstehen, werden Sie sehen, daß alles, was ich eben sage, sich von selbst darbietet. Aber es befriedigt nicht, von diesen Dingen in allgemeinen Ausdrücken zu sprechen, wenn wir sie nicht einer strengen Analysis unterziehen können.

Ich setze jetzt das System in Gang und richte es, wie Sie sehen, so ein, daß ich es in den Zustand einer einfachen harmonischen Schwingung bringe, indem ich  $P$  mit meiner Hand hin- und herbewege. Das, was Sie jetzt sehen, ist ein Beispiel der Anordnung, bei der die Bewegung von  $P$  eine Periode besitzt, die kürzer ist als die kürzeste Periode unabhängiger Bewegungen bei festgehaltenem  $P$ . Nehmen wir jetzt an, daß die Schwingungen von  $P$  immer weniger und weniger schnell werden, so muß ein Zustand eintreten, bei dem die Bewegung des ersten Partikels immer größer und größer wird. Das heißt, wenn ich die Periode von  $P$  verlängere, finden wir bei derselben Weite der Bewegung von  $P$ , daß die Bewegungsweite von  $m_1$  und ebenso der andern Partikel stark anwächst im Vergleich zu der Bewegungsweite, die ich  $P$  gebe. Analytisch ausgesprochen: wenn wir mit einer Anordnung beginnen, die einem sehr kleinen Werte von  $\tau$  entspricht, und wenn wir dann  $\tau$  bis zu einem bestimmten kritischen Werte zunehmen lassen, finden wir, daß  $\frac{x_1}{\xi}$  unendlich groß wird. Zunächst fangen wir mit dem Falle an, daß alle Größen  $u_1, u_2, \dots, u_j$  positiv sind; wie Sie sehen, werden sie sämtlich positiv, wenn  $\tau$  hinreichend klein ist. Aber den Differentialkoeffizienten von  $u_i$  nach  $\tau$  findet man, wie bemerkt, wesentlich negativ.<sup>1)</sup>

Also wenn wir  $\tau$  wachsen lassen, verkleinern wir  $u_1, u_2, \dots$ . Demnach wird zuerst  $u_1$  durch Null gehen und negativ werden. Wenn  $u_1$  Null ist, haben wir die erste Unendlichkeit  $\frac{x_1}{\xi} = \infty$ . Vergrößern<sup>1)</sup> wir  $\tau$  noch ein wenig weiter, so geht  $u_2$  durch die Null ins Negative, während  $u_1$  noch negativ bleibt. Vergrößert man  $\tau$  noch etwas weiter, so wird  $u_3$  Null und geht ins Negative, während  $u_2$  noch negativ geblieben ist; dagegen kann inzwischen  $u_1$  ein negatives Maximum erreicht und wieder durch die Null ins Positive übergegangen sein, oder diese Größe hat diesen Weg auch noch nicht genommen. Wir werden dies morgen näher betrachten; jedoch möchte ich Ihnen vorher gezeigt haben, was bei dieser Art der Behandlung des Gegenstandes herauskommt.

---

1) Hier und bis zum Ende der Vorlesung steht im Original „Verkleinern“, was nur aus Versprechen herrühren kann. Übrigens ist das Vorstehende S. 43 noch genauer ausgeführt.  
D. H.

## Vierte Vorlesung.

### Wellen in isotropen Systemen, Schallwellen.

#### a) Molar.

Wir haben gestern mit  $m = k + \frac{1}{3}n$  gefunden

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= (k + \frac{1}{3}n) \frac{\partial \delta}{\partial x} + n \nabla^2 \xi, \\ \varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= (k + \frac{1}{3}n) \frac{\partial \delta}{\partial y} + n \nabla^2 \eta, \\ \varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= (k + \frac{1}{3}n) \frac{\partial \delta}{\partial z} + n \nabla^2 \zeta, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

und haben gesehen, daß wir zwei Lösungen besitzen, die, vollständig gedeutet, zwei verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten entsprechen, nämlich, vermöge der Ihnen vorgeführten Annahmen, einer in Verdichtungen einerseits und in Verdrehungen andererseits bestehenden Welle. Wir wollen noch einmal an die Aufgabe herantreten, Sie werden dann sofort erkennen, daß die Summe dieser beiden Lösungen jede mögliche Lösung darstellt.

In einer unserer gestrigen Lösungen setzten wir an die Stelle von  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  andre Zeichen  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , die der Bedingung genügen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

In andern Worten: die  $u$ ,  $v$ ,  $w$  drücken die Verschiebungen für den Fall aus, daß die Ausdehnung oder Zusammendrückung Null ist. Jetzt untersuchen wir die Dehnung in einem beliebigen Falle, ohne jene Einschränkung. Dies kann folgendermaßen geschehen: Wir differenzieren die Gleichungen unter (1) nach  $x$ ,  $y$  und  $z$  und addieren. So finden wir

$$\varrho \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = (k + \frac{1}{3}n) \nabla^2 \delta = (m + n) \nabla^2 \delta. \quad (2)$$

Diese Gleichung ist, wie Sie sich erinnern werden, die nämliche, die wir gestern für  $\Phi$  hatten. Wir wollen jetzt Lösungen dieser Gleichung ins Auge fassen, müssen aber nunmehr beachten, daß, welche Verschiebungen auch eintreten mögen, wir eine Dehnung erhalten, die einigen Lösungen dieser Gleichung entspricht. Sie kann Null sein, aber sie muß der Gleichung unter (2) genügen. Nun ist in jedem bestimmten Falle  $\delta$  eine bestimmte Funktion von  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ ; und gleichviel ob wir sie kennen oder nicht, wir dürfen  $\Phi$  zur Bezeichnung einer Funktion wählen, so daß

$$\nabla^2 \Phi = \delta \quad (3)$$

im ganzen Raume ist.



Diese Funktion  $\Phi$  ist bestimmt. Sie ist tatsächlich ausgeführt (wie aus der Theorie der Attraktion allgemein bekannt ist), gegeben durch die Gleichung

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta' \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}, \quad (4)$$

in der  $\delta'$  den Betrag von  $\delta$  im Punkte  $(x', y', z')$  bezeichnet. Diese Formel ist wichtig, da sie  $\Phi$  explizite darstellt, und ganz besonders interessant wegen der Beziehungen zur Attraktionstheorie. Aber im Wellenproblem gibt, wenn  $\delta$  bekannt ist, die Gleichung (3) die Funktion  $\Phi$  in bestimmter und möglichst leichter Form. Setzen wir jetzt

$$\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u; \quad \eta = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v; \quad \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + w, \quad (5)$$

so ist

$$\delta = \nabla^2 \Phi + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (6)$$

und demgemäß, wegen (3)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Weiter erinnern wir uns, daß die Gleichungen (1) befriedigt werden, wenn man  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$  an die Stelle von  $\xi, \eta, \zeta$  setzt. So sehen wir, indem wir die erste mit  $dx$ , die zweite mit  $dy$ , die dritte mit  $dz$  multiplizieren und integrieren, daß

$$\varrho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = (h + \frac{4}{3}n) \nabla^2 \Phi \quad (8)$$

wird, und finden, daß die drei Gleichungen für

$$\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

vermöge (7) auf die folgenden zurückgeführt sind:

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = n \nabla^2 u; \quad \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = n \nabla^2 v; \quad \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = n \nabla^2 w \quad (9)$$

Für jede mögliche Lösung der Gleichungen (1) haben wir einen Wert von  $\delta$ , der eine Funktion von  $x, y, z$  ist; bilden wir das obige Raumintegral, das diesem Werte von  $\delta$  in allen Punkten  $x', y', z'$  des Raumes entspricht, so erhalten wir die entsprechende Funktion  $\Phi$ , die die Bedingung  $\nabla^2 \Phi = \delta$  erfüllt. Setzen wir jetzt Verschiebungen  $-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  usf. mit den vorhandenen Verschiebungen zusammen, bezeichnen die Resultierende folgendermaßen

$$\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u, \quad \eta = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v, \quad \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = w$$

und beachten, daß demgemäß ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

so sehen wir, daß der gestern aufgestellte Satz bewiesen ist. Um also die drei Gleichungen (1) aufzulösen, haben wir einfach  $\delta$  durch Auflösung der einen Gleichung

$$\rho \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = (m+n) \nabla^2 \delta$$

zu finden und dann mit Hilfe von (3) die Größe  $\Phi$  aus  $\delta$  abzuleiten; oder  $\Phi$  direkt durch Auflösung der Gleichung

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = (m+n) \nabla^2 \Phi$$

zu ermitteln und ebenso  $u$ ,  $v$ ,  $w$  aus den drei besonderen ähnlichen Gleichungen, die nur  $n$  an Stelle von  $(m+n)$  enthalten und der Bedingung unterworfen sind

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Wir nehmen nun unsere Gleichungen für  $\Phi$  und sehen zu, wie wir aus ihr verschiedene Formen Lösungen für  $\Phi$  erhalten möchten. Wir können dies zu dem Zwecke tun, verschiedene Aufgaben über den Schall zu beleuchten und mit der Absicht, uns mit der Welle vertraut zu machen, die zugleich mit der Verdrehungswelle in einem beliebigen elastischen Festkörper, der nicht inkompressibel ist, bestehen kann. Wir beachten diese Verdichtungswelle in der Lichttheorie nicht. Wir sind sicher, daß ihre Energie unter allen Umständen, wenn nicht geradezu Null, so doch sehr klein im Vergleich mit der Energie der Lichtschwingungen ist, mit denen wir uns beschäftigen. Aber zu sagen, daß sie absolut Null ist, wäre eine Annahme, die zu machen wir nicht berechtigt sind. Wenn wir uns in dem kleinen Universum, das wir kennen, anschauen und über die Ausbreitung elektrischer Kraft, über die Ausbreitung magnetischer Kraft und über die Ausbreitung von Licht nachdenken, haben wir kein Recht anzunehmen, daß es nicht noch Dinge gibt, die unsere Schülerweisheit sich nicht träumen läßt. Wir haben kein Recht anzunehmen, daß nicht auch Verdichtungswellen im lichtführenden Äther vorhanden sein können. Wir wissen nur, daß jede Schwingung dieser Art, die durch die Spiegelung und Brechung von Licht erregt werden könnte, sicher von sehr kleiner Energie ist, verglichen mit der Energie des Lichtes, von der sie ausgeht. Die Tatsache in dem Falle bezüglich der Spiegelung und Brechung ist aber die, daß, wenn der lichtführende Äther nicht absolut inkompressibel ist, die Spiegelung und Brechung von Licht allgemein Veranlassung zu Verdichtungswellen geben muß. Verdrehungswellen können wohl existieren ohne Verdichtungswellen, aber Verdrehungswellen können nicht an der Grenzfläche zweier Medien reflektiert werden, ohne in jedem dieser Medien eine Verdichtungswelle zu erregen. Sobald wir zur Behandlung der Spiegelung und Brechung übergehen, werden wir sehen, wie wir diese Verdichtungswellen zu behandeln haben, und finden, wie leicht es ist, von ihnen durch die Annahme, daß das Medium inkompressibel ist, abzusehen. Aber man muß immerhin die Frage aussprechen und untersuchen: gibt es oder gibt es nicht sehr kleine Beträge von Verdichtungswellen, die durch Spiegelung und Brechung hervorgerufen sind, und besteht schließlich nicht die Fortpflanzung elektrischer Kraft vielleicht durch solche Verdichtungswellen?

Stellen wir uns vor, wir hätten an irgendeiner Stelle in der Luft oder im lichtführenden Äther (ich kann jetzt keinen Unterschied zwischen diesen beiden Vorstellungen machen) einen Körper, der durch irgendeine Einwirkung, die wir nicht zu beschreiben brauchen, die man sich aber wohl vorstellen kann, abwechselnd positiv und negativ elektrisch geladen wird; kann es nicht sein, daß dieses zu Verdichtungswellen Anlaß gibt? Nehmen wir beispielsweise an, wir hätten zwei durch einen feinen Draht miteinander verbundene sphärische Leiter, und eine alternierende elektrische Kraft werde in dem feinen Draht hervorgerufen, etwa durch eine Wechselstrom-Dynamomaschine; nehmen wir weiter an, diese Art von Geschehnis breite sich frei von jeder Störung aus — bis zu einer großen Entfernung, beispielsweise in der Luft. Das Resultat der Tätigkeit der dynamoelektrischen Maschine wird sein, daß der eine Leiter abwechselnd positiv und negativ und der andre abwechselnd negativ und positiv elektrisch geladen wird. Es ist vollkommen sicher, daß, wenn wir die Maschine langsam drehen, wir in der Luft in der Nähe der Leiter abwechselnd positiv und negativ gerichtete elektrische Kraft finden werden mit vielleicht zwei- oder dreihundert Umkehrungen in der Zeitsekunde und einem jedesmaligen allmählichen Übergang vom Negativen durch die Null ins Positive usf. Dasselbe wird aber im ganzen Raume vor sich gehen; und wir können genau sagen, welches das Potential und welches die elektrische Kraft in jedem Augenblicke an jedem Punkte ist. Glaubt jemand, daß, wenn die Umdrehung der Maschine schnell genug ausgeführt wird, das elektrostatische Kraftgesetz noch rein und einfach für die Luft in verschiedenen Abständen von den beiden Kugeln gelten wird? Jeder ist der Ansicht, daß, wenn der Vorgang schnell genug ausgeführt wird, einige Millionen oder Billionen Male in der Sekunde, große Abweichungen von dem elektrostatischen Gesetz der Verteilung elektrischer Kraft in der benachbarten Luft zuletzt sich finden werden. Es erscheint absolut sicher, daß ein Vorgang der Art, von der wir sprechen, elektrische Wellen veranlassen wird. Nun möchte ich glauben, daß diese elektrischen Wellen Verdichtungswellen im lichtführenden Äther sind; und wahrscheinlich wird die Fortpflanzung dieser Wellen viel geschwinder sein als die Fortpflanzung gewöhnlicher Lichtwellen.

Ich weiß, wenn ich hiervon spreche, wohl, was in der sogenannten elektromagnetischen Lichttheorie geleistet ist. Ich kenne die Fortpflanzung elektrischer Impulse in einem isolierten, in Guttapercha gehüllten Draht, die ich selbst etwa im Jahre 1854 bearbeitet und für die ich eine Geschwindigkeit von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit gefunden habe.<sup>1)</sup> Damals kannten wir die Beziehung zwischen elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten noch nicht. Wenn wir die Aufgabe für Luft an Stelle der Guttapercha bearbeiten, erhalten wir einfach „*c*“ (d. i. die Zahl der in der elektromagnetischen Einheit der Menge enthaltenen elektrostatischen Einheiten) für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Impulses. Dieser Fall ist aber ganz verschieden von dem der sehr schnell wechselnden Elektrisierung, den ich Ihnen in Anschauung vorgeführt habe; und ich habe vergebens zu erfahren erwartet, wie wir eine Rechtfertigung bekommen können für den Weg, auf dem die Idee elektrischer und magnetischer Wellen in der sogenannten elektromagnetischen Lichttheorie eingeführt wird.

1) Vgl. einen Anhang nahe dem Ende dieses Bandes.

Ich möchte auf einen kleinen von mir geschriebenen Artikel hinweisen, in dem ich eine Art mechanische Darstellung elektrischer, magnetischer und galvanischer Kräfte gegeben habe — damals sagte ich galvanische Kraft, eine sehr schlecht gewählte Bezeichnung. Sie ist im ersten Bande meiner gesammelten Schriften veröffentlicht. In dieser Abhandlung ist gezeigt, daß die statische Verschiebung in einem elastischen Festkörper genau den Gesetzen der elektrostatischen Kraft folgt, und daß die Drehverschiebung des Mediums genau nach den Gesetzen der magnetischen Kraft geschieht. Mir scheint, daß man am wahrscheinlichsten zu einer Verwebung der Theorie der Fortpflanzung elektrischer und magnetischer Störungen mit der Wellentheorie des Lichtes gelangen wird, wenn man den Weg zu erkennen sucht, auf den ich eben hingewiesen habe. In der Wellentheorie des Lichtes jedoch müssen wir einfach annehmen, daß der Widerstand des lichtführenden Äthers gegen Verdichtung und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Verdichtungs- wellen in ihm unendlich groß sind. Wir werden oft die Worte „praktisch unendlich“ benutzen, um die Meinung zurückzuweisen, daß wir diese Größen als absolut unendlich voraussetzen.

Ich will jetzt zwei oder drei Beispiele dieser Lösungen für Verdichtungs- wellen behandeln. Ein Teil der Aufgabe, über die ich gestern berichtet habe, sagte: Es ist zu beweisen, daß das Folgende eine Lösung der Gleichung (8), der Bewegungsgleichung, ist,

$$\Phi = \frac{1}{r} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( r - t \sqrt{k + \frac{4}{3}n} \right); \quad (10)$$

oder, wenn wir der Kürze wegen setzen

$$q = \frac{2\pi}{\lambda} \left( r - t \sqrt{k + \frac{4}{3}n} \right), \quad (11)$$

$$\Phi = \frac{\sin q}{r}. \quad (10a)$$

Die Frage kann in eine mehr analytische Form gebracht werden: — eine Lösung für (8) zu finden, die sich gleich verhält zu den Koordinaten; oder (8) unter der Annahme aufzulösen, daß  $\Phi$  eine Funktion von  $r$  und  $t$  ist. Fassen wir dies als unsere Aufgabe auf und beachten, daß nach bekannter Umrechnung jetzt ist

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2}, \quad (12)$$

so geht (8) über in

$$\frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial t^2} = \left( k + \frac{4}{3}n \right) \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2}, \quad (13)$$

deren allgemeine Lösung

$$\left. \begin{aligned} r\Phi &= F(r - vt) + f(r + vt) \\ v &= \sqrt{k + \frac{4}{3}n} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ist, und wo  $F$  und  $f$  zwei willkürliche Funktionen bezeichnen.

Dieses Resultat drückt einfach eine wellenförmige Störung von  $r\Phi$  aus mit einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\sqrt{(k + \frac{4}{3}n)/\rho}$  und zeigt, daß es sich bei der Lösung unter (10) nur um den Fall einer einfachen, harmonischen, wellenförmigen Störung handelt, die sich in der Richtung wachsender  $r$ , das heißt vom Ursprung fort, ausbreitet.

Hierin liegt dann die Bestimmung einer Bewegungsart, die in einem elastischen Festkörper möglich ist. Wir wollen jetzt die Natur dieser Bewegung näher betrachten. Der Faktor  $\frac{1}{r}$  in (10) macht es unmöglich, daß sie eine reine Wellenbewegung ist. Es zeigt sich aber zugleich, daß diese Bemerkung um so weniger Bezug auf die betrachtete Bewegung hat, je weiter wir uns vom Zentrum entfernen.

Inzwischen beachten wir, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem elastischen Festkörper nur wenig größer ist als die in einer Flüssigkeit, die den nämlichen Widerstand gegen Verdichtung besitzt.  $k$  ist der Raummodul und mißt den Widerstand gegen Verdichtung,  $n$  ist der Starrheitsmodul. Wir wollen später Beziehungen zwischen  $k$  und  $n$  für wirkliche Festkörper aufsuchen.  $k$  ist allgemein so viel mal größer wie  $n$ , daß  $\frac{4}{3}n$  im Vergleich mit  $k$  klein ist, und daß demnach in gewöhnlichen Festkörpern die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Verdichtungswellen nicht wesentlich größer ausfällt, als wenn der Festkörper überhaupt keine Starrheit besäße und wir eine elastische Flüssigkeit von demselben Raummodul vor uns hätten.

Ich will die Bewegung in der Nähe der Quelle nicht besonders in Betracht ziehen. Die schöne Untersuchung von Stokes, die von Lord Rayleigh angeführt ist, hat es vollständig mit der Gegend zu tun, in der die Wertänderung des Faktors  $\left(\frac{1}{r}\right)$  von Punkt zu Punkt beträchtlich ist. Ohne also jetzt schon hierauf einzugehen, wollen wir die Komponenten der Verschiebung und ihre Resultante finden und alle Umstände der Bewegung sorgfältig untersuchen.

$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$  sind die drei Komponenten der Verschiebung. Offenbar geht diese Verschiebung in der Richtung des Radius vor sich, da alles symmetrisch ist.

Ihre Größe ist  $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ : und wir finden aus (11) und (10a)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \sin q + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{r} \cos q. \quad (15)$$

Nun, was wir aus ihrer Deutung erreichen können. Wenn  $r$  im Vergleich mit  $\frac{\lambda}{2\pi}$  groß ist, wird das erste Glied gegenüber dem zweiten klein, und wir erhalten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \approx \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{r} \cos q. \quad (16)$$

Wenn demnach der Abstand vom Ursprung eine große Zahl von Wellenlängen

1) Ich benutze  $\approx$ , um annähernde Gleichheit zu bezeichnen.

beträgt, ist die Verschiebung merklich gleich  $\frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{r} \cos q$ , und ist demnach annäherungsweise dem Abstände von diesem Zentrum umgekehrt proportional. Die Intensität des Schalles wäre, wenn die Lösung auf den Schall anwendbar sein sollte, umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes von der Quelle.

Ich möchte jetzt eine zweite und eine dritte Lösung angeben. Wir nehmen

$$\Psi = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{x}{r^2} \left( \cos q - \frac{\lambda}{2\pi r} \sin q \right)^{1)} \quad (17)$$

als das Geschwindigkeitspotential für eine neue Lösung. Ich wähle diese Darstellung, da Sie ja alle wissen, daß wenn eine Lösung  $\Phi$  für das Geschwindigkeitspotential bekannt ist, wir eine andre Lösung  $\Psi$  erhalten, wenn wir diese als lineare Funktion von

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

ansetzen. Suchen wir jetzt die Verschiebungen

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Da möchte ich beweisen, daß, obwohl diese Lösung nicht mehr symmetrisch in bezug auf  $r$  ist, so daß wohl andre als radiale Bewegungen in der Nähe der Quelle vorhanden sind, die Bewegung dennoch in großen Abständen von der Quelle annähernd wieder radial geschieht. Bei der Ausführung der Rechnung finden wir nämlich

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{2\pi \sin q}{\lambda} \frac{x^2}{r} \left[ \frac{x^2}{r^2} + \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 r^2 - 3 \frac{x^2}{r^2} \right] + \frac{\cos q}{r^2} r^2 - 3 \frac{x^2}{r^2}. \quad (18)$$

Das Hauptglied ist hier  $-\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2}{r^3} \sin q$ .

Wir können so zu den dritten und vierten und höheren Differentialquotienten von  $\Phi$  mit ihrer immer größeren Zahl von Gliedern übergehen. Die Deutung dieser vielen Glieder, der andern Glieder als desjenigen Gliedes, das ich soeben als das „Hauptglied“ bezeichnet habe, ist für die Bewegung der Luft in der Nähe der Quelle überaus wichtig. Sie ist in der glänzenden Arbeit von Stokes behandelt, einer der schönsten Untersuchungen, die je in der mathematischen Physik geschrieben sind, und aus der ich Ihnen heute abend eine Probe vorgelesen habe, nämlich über die Wirkung einer Wasserstoffatmosphäre, die die Töne einer in ihr klingenden Glocke ertötet. Wir wollen aber diese Glieder nicht beachten und nur über die Glieder nachdenken, die die Wirksamkeit des schwingenden Körpers in Abständen ausdrücken, die im Vergleich zur Wellenlänge groß sind.

1)  $\frac{\lambda}{2\pi}$  ist nur der Bequemlichkeit wegen eingeführt. Die Lösung unterscheidet sich von  $\Psi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$  nur um einen konstanten Faktor.

So erhalten wir für die  $x$ -Komponente der Verschiebung der jetzt betrachteten Bewegung

$$\xi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2}{r^3} \sin 2\pi \left( \frac{r}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right). \quad (19)$$

Diese angenäherte Gleichung ist richtig für Abstände vom Mittelpunkte, die im Vergleich mit der Wellenlänge groß sind. Lassen Sie mich bemerken, daß es die Differentiation von  $\cos q$  ist, die die in der Entfernung wirksamen Glieder der Verschiebung liefert; und wenn man  $\Psi$  nach  $y$  differenzieren will, hat man einfach nur  $\cos q$  zu differenzieren und jetzt den Differentialquotienten von  $r$  nach  $y$ , anstatt nach  $x$  zu bilden. So können wir sofort die Hauptglieder der  $y$ - und  $z$ -Verschiebungen, indem wir  $y/x$  und  $z/x$  auf der rechten Seite der Gleichung (19) als Faktoren hinzufügen, in folgender Weise niederschreiben

$$\eta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xy}{r^3} \sin q, \quad \zeta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xz}{r^3} \sin q. \quad (19')$$

Da die drei Verschiebungskomponenten proportional  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sind, folgt, daß die resultierende Verschiebung  $\sigma$  in der Richtung des Radius verläuft; ihre Größe ist  $-\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{r^2} \sin q$ . Setzen wir  $x = r \cos i$ , so geht diese über in

$$\sigma = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\cos i}{r} \sin q, \quad (20)$$

d. h. die Verschiebung ist dem Abstände vom Ursprung der Welle umgekehrt proportional. Wenn  $i = 0$  ist, besteht ein Maximum, wenn  $i = \frac{\pi}{2}$  ist, wird jene Größe Null. Das Resultat ist, daß die Verschiebung in der Achse  $OX$  ein Maximum, überall in der durch  $OX$  und  $OY$  bestimmten Ebene Null und sonst um die Achse  $OX$  herum symmetrisch ist.

Eine dritte Lösung wird erhalten, wenn man als Geschwindigkeitspotential  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$  wählt. In einem gegen die Wellenlänge großen Abstände vom Ursprung verläuft die Verschiebung in Richtung des Radius, und ihre Größe ist  $\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ .

Die Deutung dieser Fälle ist die folgende: Die erste Lösung (Geschwindigkeitspotential  $\Phi$ ) gilt für eine abwechselnd größer und kleiner werdende Kugel; die zweite Lösung (Geschwindigkeitspotential  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ) gilt für eine Kugel, die in einer geraden Linie hin- und herschwingt; die dritte Lösung (Geschwindigkeitspotential  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ ) bildet einen charakteristischen Bestandteil der Bewegung der Luft, die durch zwei in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte hin- und herschwingende Kugeln oder durch die Zinken einer schwingenden Gabel hervorgerufen wird.

Der letzte Fall erfordert eine etwas eingehende Behandlung, und wir wollen ihn in einer späteren Vorlesung wieder aufnehmen. Die angegebene Lösung für diesen Fall stellt in der Nähe des Paares schwingender Kugeln oder der Zinken einer schwingenden Gabel nicht vollständig die Bewegung dar, vielmehr muß zu diesem Zwecke noch ein unbekannter Betrag der Bewegung der ersten Art mit der dritten Art zusammengesetzt werden. Der

Ausdruck für die Schwingung in der Nähe einer Stimmgabel wird, wenn man sich so weit von ihren Enden entfernt, daß sie durch die allgemeine Form des ganzen Systems nicht oder nur wenig gestört ist, dargestellt durch das Geschwindigkeitspotential  $A \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ . Dies gibt das Geschwindigkeitspotential für die Hauptglieder, die Glieder, die in großen Abständen allein von Bedeutung sind. Die Differentiation wird einfach nach  $r$  in dem Gliede  $\sin q$  oder  $\cos q$  und so ausgeführt, als ob der Koeffizient dieser Funktion konstant wäre. Die Differentiation dieses Geschwindigkeitspotentials zeigt, daß die Verschiebung in der Richtung des Radius vom Mittelpunkt des Systems fort erfolgt, und die Größe der Verschiebung ist  $\frac{\partial}{\partial r} \left( A \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)$ .

$A$  ist eine unbekannte, von der Stimmgabel abhängige Größe. Ich möchte Ihnen die Bestimmung dieser Größe als eine Laboratoriumsübung für Anfänger vorschlagen, nämlich Stimmgabeln mit verschiedenen Zinkenbreiten zu untersuchen. Wenn wir uns Stimmgabeln mit weit voneinander abstehenden Zinken vorstellen, haben wir viel weniger von der Funktion  $\Phi$  in der Lösung; prüfen wir dagegen eine Stimmgabel mit flachen, einander sehr nahen Zinken, so findet man viel mehr von der Funktion  $\Phi$ . Der Teil  $\Phi$  des Geschwindigkeitspotentials entspricht der abwechselnden Ausdehnung und Zusammenziehung der Luft zwischen den beiden Zinken der Stimmgabel. Je breiter und flacher die Zinken sind, desto größer ist daher der Anteil der Funktion  $\Phi$  an der Lösung, das heißt um so größer ist der Wert von  $A$  in der Formel und desto kleiner ist der Kegel der Tonlosigkeit.

Der Versuch, an den ich denke, ist der folgende: wir nehmen eine schwingende Stimmgabel und drehen sie, bis wir den tonlosen Kegel finden, oder bis wir den Winkel finden zwischen der die Zinken verbindenden Linie und der Linie, die nach der Stelle geht, an der man das Ohr halten muß, um keinen Ton zu hören. Die Plötzlichkeit des Überganges vom Tönen zur Tonlosigkeit ist überraschend. Man hält die Stimmgabel in der Hand und dreht sie nahe dem einen Ohre langsam herum, bis man die Lage der Tonlosigkeit hat; mit der andern Hand schließt man dabei das andre Ohr. Eine sehr kleine Drehung der Gabel, zum Beispiel um die vertikale Achse von dieser Lage aus, gibt wieder einen auffallend lauten Ton. Ich meine, daß es sehr einleuchtend ist, daß der Ort der Tonlosigkeit bei einer und derselben Gabel von der Schwingungsweite abhängt. Wenn man sie sehr kräftig anschlägt, findet man eine geringere Neigung zwischen der Schwingungslinie der Zinken und der Linie nach dem Orte der Tonlosigkeit; wenn weniger stark, eine größere. Sicher wird die Neigung für verschiedene Stimmgabeln verschieden sein.

---



## Fünfte Vorlesung.

### Schwingungen von Molekelsystemen, Dispersion.

#### a) Molar.

Ich habe in der letzten Vorlesung festgestellt, daß die zweite Lösung, die dem Geschwindigkeitspotential  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  entspricht, die Wirkung eines einzigen in einer geraden Linie hin- und herschwingenden Körpers in einer großen Entfernung von seiner mittleren Lage darstellt. Ich habe dort von einer Kugel gesprochen, wir können aber einen in einer geraden Linie hin- und herschwingenden Körper von beliebiger Form annehmen; dann wird die in einem großen Abstände von dem schwingenden Körper hervorgerufene Bewegung ebenfalls durch das Geschwindigkeitspotential  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  dargestellt, vorausgesetzt, daß die Periode der Schwingung groß ist im Vergleich mit der Zeit, die der Schall braucht, um eine dem größten Durchmesser des Körpers gleiche Strecke zu durchsetzen. Ebenso stellt das Geschwindigkeitspotential  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ , in der dritten Lösung, wie ich glaube (ohne das additive Glied  $A\Phi$ ), die Bewegung in großen Abständen dar, wenn der Ursprung des Tones an zwei Kugeln besteht, die beispielsweise, um die Ideen zu fixieren, sich in einem Abstände voneinander befinden, der im Vergleich mit ihren Durchmessern groß ist und ebenfalls groß ist gegen die Weite ihrer Hin- und Herbewegung, die (letztere) ihrerseits aber erheblich sein kann im Vergleich mit ihren Durchmessern: immer vorausgesetzt, daß die Periode der Schwingung groß ist gegenüber der Zeit, die der Schall braucht, um die Strecke zwischen den schwingenden Körpern zu durchheilen. Stellen wir uns vor, dies sei eine Kugel in einer Hand und dies eine in der andern. Ich bewege jetzt meine Hände zueinander hin und voneinander fort — so wird also die durch diese Art der Bewegung der erregenden Körper hervorgerufene Bewegung der Luft in großem Abstände genau durch das Geschwindigkeitspotential  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$  dargestellt.

Wenn wir aber zwei Kugeln oder platte Körper sehr nahe aneinander haben, brauchen wir noch einen unbekannten Betrag einer durch  $\Phi$  ausgedrückten zusätzlichen Schwingung, um den wirklichen Stand der Bewegung darzustellen. Dieser unbekannte Betrag kann für den Fall zweier Kugeln bestimmt werden. Das Problem ist analog dem Poissonschen Problem über die Elektrizitätsverteilung auf zwei Kugeln und ist von Stokes für den Fall der Bewegung in einer Flüssigkeit gelöst worden. (Vgl. *Mém. de l'Inst.*, Paris 1811, pp. 1, 163 und *Stokes Papers* Vol. I, p. 230 — „On the resistance of a fluid to two oscillating spheres“, „Über den Widerstand einer Flüssigkeit gegen zwei schwingende Kugeln.“) Also kann man die Bewegung in der Nähe zweier hin- und herschwingender Kugeln genau beschreiben,

vorausgesetzt, daß die Amplituden ihrer Schwingungen klein sind im Vergleich zu dem Abstände zwischen ihnen; und man kann dann  $A$  für zwei Kugeln mit beliebigen gegebenen Radien und in beliebigem gegenseitigen Abstände finden. Für einen Gegenstand wie eine Stimmgabel vermag man schließlich die Rechnung nicht theoretisch durchzuführen; ich meine aber, es wäre eine interessante Laboratoriumsarbeit für Anfänger, die Lösung der Aufgabe experimentell zu versuchen.

Ich nehme an, daß Sie sämtlich mit der Tatsache vertraut sind, daß in der Nähe einer Stimmgabel ein Punkt vorhanden ist, an dem die Schallintensität Null ist; ich habe aber die Tatsache nie richtig beschrieben gesehen. Wir haben keine hinreichend leichten theoretischen Mittel, die Neigung der Linie, die nach der Lage des Ohres am Orte der Tonlosigkeit gerichtet ist, gegen die Verbindungslinie der Zinken zu bestimmen; wie sie experimentell gefunden wird, ist am Schluß der letzten Vorlesung gesagt. Es wäre sehr interessant zu ermitteln, ob die Lage der Tonlosigkeit sich merklich mit der Amplitude der Schwingungen ändert. Es soll mich wundern, wenn eine merkliche Verschiedenheit auf irgendeinem gewöhnlichen Wege beobachtet werden würde, wie wir auch die Amplitude der Schwingungen ändern mögen.<sup>1)</sup> Ich bin aber vollkommen sicher, daß wir einen beträchtlichen Unterschied finden würden, je nachdem wir Stimmgabeln mit zylindrischen Zinken oder mit rechteckigen Zinken in solchen Verhältnissen, wie sie der alte Marloye herzustellen pflegte, oder Stimmgabeln wählen gleich den modernen, wie sie Koenig macht, mit sehr breiten, flachen Zinken.

Wenden wir uns jetzt unserem molekularen Problem zu!

### b) Molekular.

Wir wollen zusehen, wie sich die einzelnen Größen verändern, wenn wir die Periode ändern. Erinnern wir uns, daß ist

$$\alpha_i = \frac{m_i}{\tau^2} - c_i - c_{i+1}, \quad (1)$$

so wird

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial (\tau^{-2})} = m_i. \quad (2)$$

Setzt man für einen Augenblick  $\mathfrak{b}$  für  $\frac{\partial}{\partial (\tau^{-2})}$  und differenziert die Gleichung für  $u_i$  (S. 29), so findet man

$$\mathfrak{b} u_i = m_i + \left( \frac{c_{i+1}}{u_{i+1}} \right)^2 \mathfrak{b} u_{i+1}, \quad \mathfrak{b} u_{i+1} = m_{i+1} + \left( \frac{c_{i+2}}{u_{i+2}} \right)^2 \mathfrak{b} u_{i+2}, \dots, \mathfrak{b} u_j = m_j.$$

Durch sukzessives Einsetzen findet man so

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} u_i = m_i + \left( \frac{c_{i+1}}{u_{i+1}} \right)^2 m_{i+1} + \left( \frac{c_{i+1}}{u_{i+1}} \frac{c_{i+2}}{u_{i+2}} \right)^2 m_{i+2} + \left( \frac{c_{i+1}}{u_{i+1}} \frac{c_{i+2}}{u_{i+2}} \frac{c_{i+3}}{u_{i+3}} \right)^2 m_{i+3} \\ + \dots + \left( \frac{c_{i+1} \dots c_j}{u_{i+1} \dots u_j} \right)^2 m_j. \end{aligned} \quad (3)$$

1) Das scheint mit dem am Ende der voraufgehenden Vorlesung Gesagten in Widerspruch zu stehen. D H.

Dies ist der gesuchte Ausdruck; wir bemerken die außerordentlich wichtige Eigenschaft desselben, daß er seinem Wesen nach positiv ist, also die Änderung von  $u_i$  mit wachsendem  $\tau^{-2}$  ist ihrem Wesen nach positiv. Nun ist

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} = -2\tau^{-3} u_i$$

und ferner (S. 29)

$$\frac{c_{i+1}}{u_{i+1}} = -\frac{x_{i+1}}{x_i}, \quad \frac{c_{i+2}}{u_{i+2}} = -\frac{x_{i+2}}{x_{i+1}}$$

usf.

Demnach kommt das Resultat (3) dem folgenden Ausdruck (4) für den Differenzialkoeffizienten von  $u_i$  nach der Periode gleich:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} = -\frac{2}{\tau^3} \frac{1}{x_i^2} (m_i x_i^2 + m_{i+1} x_{i+1}^2 + \dots + m_j x_j^2). \quad (4)$$

Dies ist sicher ein bemerkenswerter Satz, und er hat große Wichtigkeit für die Deutung der Lösung unserer Aufgabe. Erinnern wir uns, daß  $x_i$  die Verschiebung von  $m_i$  zu irgendeiner Zeit der Bewegung ist. Sie mögen gewöhnlich an das Maximum der Verschiebungen gedacht haben; allein es ist nicht nötig, sich auf die Maximumwerte zu beschränken. An Stelle von  $x_1, x_2, \dots, x_j$  können wir Konstanten wählen, die den Maximumwerten der  $x$  multipliziert mit  $\sin \frac{2\pi t}{\tau}$  gleich sind, da die Partikel nach dem einfachen harmonischen Gesetze schwingen, sämtlich mit derselben Periode und in derselben Phase, das heißt, daß alle gleichzeitig durch die Null gehen und bei jeder Schwingung gleichzeitig Maximumwerte erreichen. Die Massen sind positiv, und wir haben in den einzelnen Gliedern von (4) Quadrate der Verschiebungen; demnach ist die rechte Seite von (4) ihrem Wesen nach negativ. Folglich nimmt jede der Verhältniszahlen  $u_i$  ab, wenn man die Periode vergrößert (S. 30f.).

Jetzt wollen wir die Arten der Bewegung in unserer Anordnung von Federn für verschiedene gegebene Perioden des schwingenden Körpers,  $P$ , betrachten. Ich will zuerst voraussetzen, daß die Schwingungsperiode sehr klein ist und dann schrittweise vergrößert wird. Wenn wir die Periode anwachsen lassen, nimmt der Wert einer jeden von den Größen  $u_1, u_2, \dots$ , wie wir sehen, ab. Es ist interessant zu bemerken, daß dies so stetig zutrifft durch alle Bewegungsarten, die sich ergeben, wenn man allmählich  $\tau$  von 0 bis  $\infty$  anwachsen läßt. Wir werden aber finden, daß es kritische Werte von  $\tau$  gibt, bei denen das eine oder andre  $u$ , nachdem es negativ geworden, bis  $-\infty$  herabgesunken ist, nun plötzlich nach  $+\infty$  hinaufspringt, wenn  $\tau$  über jenen kritischen Wert hinaus vergrößert wird, dann wieder sinkt und dabei möglicherweise wiederum bis  $-\infty, +\infty$  gelangt, möglicherweise aber auch nicht, während  $\tau$  weiter und weiter, bis ins Unendliche vergrößert wird. Zuvächst mag  $\tau$  so klein gewählt werden, daß sämtliche  $u$  sehr große positive Werte haben; denn da  $a_i$  gleich  $\frac{m_i}{\tau^2} - c_i - c_{i+1}$  ist, kann  $-\frac{c_{i+1}}{u_{i+1}}$  sicher, indem man  $\tau$  klein genug annimmt, so klein gemacht werden<sup>1)</sup>, wie man will, falls gleichzeitig die folgende Größe  $u_{i+1}$  groß ist. — Letztere

1) Im Original scheint ein Versehen vorzuliegen.

Bedingung ist erfüllt, wenn eben  $\tau$  sehr klein ist, da man ja  $u_j = \frac{m_j}{\tau^2} - c_j - c_{j+1}$  hat und somit  $u_j$  sehr groß ist.

Es ist aber zu beachten, daß, wenn die  $u$  sämtlich positiv sind, dieses zur unmittelbaren Folge hat, daß  $\xi, x_1, x_2, x_3, \dots, x_j$  abwechselnd positiv und negativ ausfallen. In andern Worten: Der Handgriff  $P$  und die Reihe der Partikel  $m_1, m_2, \dots, m_j$  bewegen sich jedes einzelne in einer Richtung, die den Richtungen der beiden Nachbarn entgegengesetzt ist. Da die Größe der Verhältnisse  $u_1, u_2, \dots, u_j$  der aufeinander folgenden Amplituden mit wachsender Periode abnimmt, wird die Amplitude des Partikels  $m_i$  kleiner im Verhältnis zur Amplitude des folgenden Partikels  $m_{i+1}$ , solange die Schwingungen der einander folgenden Partikel einander entgegengesetzt gerichtet sind. Ich will zeigen, daß, da jede von diesen Größen  $u_i$  abnimmt, die erste, die durch die Null geht, notwendig  $u_1$  ist, entsprechend einer Bewegung jedes einzelnen Partikels des Systems, die im Vergleich mit der Bewegung des Handgriffs  $P$  unendlich groß ist, so daß eine einfache harmonische Bewegung stattfindet, bei der die Ausschläge aller Partikel unendlich groß sind im Verhältnis zu den Ausschlägen des Handgriffs  $P$ , als wenn dieser überhaupt festgehalten würde. Dies ist unser erster kritischer Fall. Es ist die einzige unter den  $j$  Grundschwingungen des Systems mit festgehaltenem  $P$ , bei der die Schwingungsrichtungen der aufeinander folgenden Partikel einander entgegengesetzt sind, und zugleich ist bei ihr die Periode die kürzeste. Geht man weiter und läßt  $\tau$  wachsen, so wird  $u_1$  negativ, und die Bewegung von  $P$  geht in der Richtung der Bewegung des ersten Partikels vor sich. Geht man mit der Vergrößerung der Periode noch weiter, so gelangt man zu dem nächsten kritischen Falle, bei dem das Teilchen  $m_1$  die Bewegung Null hat, so daß ist

$$u_1 = \frac{c_1 \xi}{-x_1} = -\infty.$$

Um dies zu beweisen und den weiteren Verlauf zu untersuchen, betrachten wir den Stand der Dinge, wenn ein positives abnehmendes  $u_i$  sehr nahe der Null gekommen ist. Dann hat  $u_{i-1}$ , da es gleich  $u_{i-1} = \frac{c_i \xi}{u_i}$  ist, einen negativen sehr großen Wert. Dies allein zeigt schon, daß  $u_{i-1}$  früher als  $u_i$  Null geworden sein muß, denn es muß, ehe es negativ geworden ist, durch Null gegangen sein. Demnach ist, wenn wir  $\tau$  wachsen lassen, die erste von den Größen  $u$ , die Null wird,  $u_1 = \frac{c_1 \xi}{-x_1}$ ; oder, wie ich diese Tatsache vorhin ausgedrückt habe, die Bewegung des Partikels  $m_1$  und ebenso die jedes der andern Partikel ist im Vergleich mit der Bewegung von  $P$  unendlich groß. Dicht vor diesem Stande der Dinge bewegen sich, wie wir gesehen haben, alle Partikel  $P, m_1, \dots, m_j$ , jedes seinem Nachbar entgegengesetzt; dicht danach hat  $P$  seine Bewegungsrichtung gegenüber dem ersten Partikel umgekehrt und bewegt sich mit ihm in der gleichen Richtung.

Dieser Zustand bleibt bis dicht vor dem zweiten kritischen Falle bestehen, in dem  $u_1$  negativ groß,  $u_2$  klein und mit  $u_3, \dots, u_j$  positiv ist. Bei diesem kritischen Falle ist

$$u_1 = \frac{c_1 \xi}{-x_1} = \mp \infty; \text{ oder } x_1 = \pm 0 \times \xi.$$

Die Bewegungsperiode von  $P$ , die diesen Zustand der Dinge herbeiführt, ist gleich der Periode der freien Bewegung des Partikelsystems, wenn die Masse  $m_1$  in Ruhe gehalten wird und jede andre Masse sich entgegengesetzt bewegt wie jede ihrer beiden benachbarten. Wenn die Periode der einfachen harmonischen Bewegung von  $P$  gleich einer Bewegungsperiode des Systems ist, bei dem das erste Partikel in Ruhe bleibt, dann verläuft die einzige einfach-harmonische Bewegung, die das System ohne Zwang aller seiner Partikel ausführen kann, in dieser Periode, und die Schwingungsamplitude des zweiten Partikels ist in der einen Richtung so groß, daß es vermöge der Feder Nr. 2 auf  $m_1$  einen Stoß ausübt, der dem Stoße gleich ist, welcher durch  $P$  mittels der Feder Nr. 1 auf dasselbe Teilchen ausgeübt wird, so daß dieses in Ruhe verharret. Nehmen wir jetzt an,  $\tau$  werde stetig über diesen kritischen Wert hinaus verlängert. Unmittelbar nach diesem kritischen Falle ist  $u_1$  von einem großen negativen Betrage durch  $\mp \infty$  zu einem großen positiven übergegangen und  $u_2$  von einem kleinen positiven, durch  $\pm 0$ , zu einem kleinen negativen; in andern Worten: das erste Partikel hat die Richtung seiner Bewegung umgekehrt und geht dazu über, sich in derselben Richtung wie  $P$  zu bewegen und entgegengesetzt der Richtung des zweiten Partikels.

Der dritte kritische Fall kann eintreten, wenn das zweite Partikel zur Ruhe kommt ( $u_2 = \mp \infty$ ,  $u_3 = \pm 0$ ), oder auch, wenn  $u_1$  ein zweites Mal Null wird. Der eine oder andere von diesen beiden Fällen muß eintreten. Allein wir wollen uns für jetzt nicht länger mit der Verfolgung der Reihe der kritischen Fälle aufhalten.<sup>1)</sup> Ich will vielmehr die übrigen kritischen Fälle übergehen und sofort den Endzustand betrachten.

1) [Anmerkung vom 11. Januar 1886.

Wenn wir  $\tau$  von dem ersten kritischen Werte aus (dem, der  $u_1 = 0$  macht) wachsen lassen, dann bringen die sich notwendig ergebenden Abnahmen des (negativen)  $u_1$  und des (noch positiven)  $u_2$  gleichzeitig  $u_1$  auf  $-\infty$  und  $u_2$  auf Null. Mit weiter wachsendem  $\tau$  bringen die Abnahmen des (jetzt negativen)  $u_2$  und des (noch positiven)  $u_3$  gleichzeitig  $u_2$  auf  $-\infty$  und  $u_3$  auf Null; und so fort in der Reihe von  $u_1$  bis  $u_j$ , welche letztere Größe durch die Null ins Negative übergeht, aber nicht  $-\infty$  werden kann und für alle größeren Beträge von  $\tau$  negativ bleibt und bis zum Werte  $-(c_j + c_{j+1})$  herabsinkt, wenn  $\tau$  ins Unendliche gesteigert ist.

Die Größe  $u_1$  aber muß, nachdem sie bis  $-\infty$  abgenommen hat, auf  $+\infty$  übergehen und wieder positiv sinkend werden. Sie muß dann wieder durch die Null gehen; und so beginnt dann eine neue Folge von Nullen längs der Linie von  $P$  in der Reihe der Partikel  $m_1, m_2, \dots$ , die aber mit  $m_{j-2}$  und nicht mit  $m_{j-1}$  endigt; die Amplitude ( $u_j a_j / c_j$ ) dieser Masse ist durch den Schluß der ersten Folge Null und negativ geworden, ehe die zweite Folge sie erreicht haben kann. So geht  $u_{j-1}$  ein zweites und letztes Mal durch Null und nimmt bis zu dem Grenzwerte  $-c_{j-1}$

$\left(\frac{1}{c_{j+1}} + \frac{1}{c_j} + \frac{1}{c_{j-1}}\right) / \left(\frac{1}{c_{j+1}} + \frac{1}{c_j}\right)^*$  ab, wenn  $\tau$  unendlich groß wird.

Eine dritte Folge von Nullen, die ebenfalls mit  $P$  beginnt, längs der Linie  $m_1, m_2, \dots$ , fortschreitet und mit  $m_{j-3}$  endet, macht  $u_{j-2}$  zum dritten und letzten Male zur Null und gestattet dieser Größe bis zu ihrem (in der weiter unten, in der Vorlesung, im Text durch die Formel angegebenen) Grenzwerte abzunehmen, wenn  $\tau$  ins Unendliche wächst. Ähnliches gilt Folge hinter Folge, in allen

\*) Der Druckfehler im Original ist zu verbessern.

Es ist interessant, die Lösung für eine unendlich lange Periode aus unseren Gleichungen zu finden. Es verschwindet dann  $\frac{m}{\tau^2}$  und es wird  $u_i = -c_i - c_{i+1}$ . Wendet man dies auf die Gleichungen für die Größen  $u$  an, so ist die Lösung sehr leicht zu finden.

Wenn nämlich  $\tau$  unendlich groß ist, bewegt sich  $P$  unendlich langsam, so daß die Trägheit der einzelnen Partikel keine merkliche Wirkung hat; alle Partikel befinden sich dann im Gleichgewicht. Es sei dann die auf die Feder wirkende Kraft  $F$ ; das heißt,  $P$  werde langsam mit der Kraft  $F$  heruntergedrückt und dann in Ruhe gehalten. Die Verschiebungen der verschiedenen Partikel ergeben sich aus folgender Überlegung. Das Massenteilchen Numero  $j$  wird um eine Strecke verschoben, die der Kraft  $F$ , dividiert durch den Koeffizienten  $c_{j+1}$  der Verlängerung seiner Feder, gleichkommt. Um die Verschiebung des  $(j-1)^{\text{ten}}$  Partikels zu erhalten, haben wir zu der vorigen Verschiebung noch die von der Verlängerung der nächsten Feder  $c_j$  herrührende Verschiebung hinzuzufügen, also  $\frac{F}{c_j}$ , usw. So ergibt sich als allgemeine Gleichung

$$x_i = \left( \frac{1}{c_{j+1}} + \frac{1}{c_j} + \dots + \frac{1}{c_{i+1}} \right) F,$$

und damit weiter

$$u_i = -c_i \left( \frac{1}{c_{j+1}} + \dots + \frac{1}{c_i} \right) \left( \frac{1}{c_{j+1}} + \dots + \frac{1}{c_{i+1}} \right).$$

Es ist eine sehr interessante, aber schließlich sehr einfache und leichte Aufgabe, den Wert von  $u_i = -c_i - c_{i+1}$  in den Kettenbruch, der uns  $u_i$  liefert, einzusetzen und die angegebene Lösung zu prüfen. Für jetzt will ich aber hierüber weiter nichts sagen.

Es heißt aber geigen, während Rom brennt, wenn wir mit den Trivialitäten einer kleinen mechanischen Aufgabe spielen, während die Phosphoreszenz (Fluoreszenz) in Sicht ist und die Brechung des Lichtes in Kristallen auf Erklärung wartet. Die Schwierigkeit liegt nicht darin, Phosphoreszenz und Fluoreszenz abzuleiten, sondern einleuchtend zu machen, warum sowohl von Fluoreszenz und Phosphoreszenz zu bemerken ist. Unsere Molekulartheorie führt alle Lichterscheinungen zu Fluoreszenz und Phosphoreszenz. Es verhält sich nämlich mit unserem zusammengesetzten Molekelmodell folgendermaßen: Wir stellen uns vor, man habe den Handgriff  $P$  so lange rückwärts und vorwärts bewegt, bis der ganze Komplex in einen vollkommen periodischen Zustand gelangt ist; darauf habe man plötzlich

$j$  Folgen. Die letzte beginnt und endet in  $m_1$  und läßt  $u_1$  von der Null bis zu ihrem negativen Grenzwerte

$$-c_1 \left( \frac{1}{c_{j+1}} + \frac{1}{c_j} + \dots + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_1} \right) / \left( \frac{1}{c_{j+1}} + \frac{1}{c_j} + \dots + \frac{1}{c_2} \right)$$

gelangen, wenn  $\tau$  ins Unendliche wächst. Ein allgemeines Gesetz über die Aneinanderreihung jener Folgen nach der Größe von  $\tau$  gibt es nicht. So fehlt auch eine allgemeine Regel über die Ordnung des Anfanges der einen Folge gegen das Ende der vorhergehenden. Nur daß keine Störung zwischen dem Anfange einer und dem Ende der vorhergehenden Folge auftreten kann, ist festzustellen.]

mit der Bewegung von  $P$  innegehalten: dann schwingt das System für alle Zeiten in einer Schwingung weiter, die tatsächlich etwas von allen möglichen Schwingungen enthält. Dies ist, glaube ich, Fluoreszenz.

Das führt auch auf die Frage der Herren Michelson, Newcomb und Lord Rayleigh nach der Geschwindigkeit von Wellengruppen in der groben Materie. Setzen wir voraus, eine Folge von leuchtenden Schwingungen beginne. Zu Anfang dieser leuchtenden Schwingungen gelangen die miteinander verbundenen, in den lichtführenden Äther eingebetteten Molekel nicht sofort in den Zustand einfacher harmonischer Schwingung, die das regelmäßige Licht ausmacht. Es scheint vollkommen sicher, daß zu Anfang eine Fluoreszenz bestehen muß. Mag Licht auf Uranglas zu strahlen beginnen. Vielleicht während eines Tausendstels einer Sekunde nach dem Beginn der Bestrahlung werden Sie im Glas einen Zustand finden, der sich von dem späteren Dauerzustande etwa so unterscheidet wie Fluoreszenz von vollständiger Lichtabwesenheit.

Noch eine Frage ist von tiefem Interesse und scheint manche Schwierigkeiten zu bieten, nämlich die nach dem wirklichen Zustande des Lichtes, das in einer Folge von Gruppen besteht. Lord Rayleigh hat uns in seiner gedruckten Abhandlung über die vielerörterte Frage nach der Lichtgeschwindigkeit gesagt und hat es dann wieder bei der Versammlung der British Association zu Montreal bestimmt und deutlich wiederholt, daß die Geschwindigkeit einer Wellengruppe nicht mit der Wellengeschwindigkeit einer unendlichen Wellenfolge zusammengeworfen werden darf, daß sie von dieser notwendig weit verschieden ist in jedem dispersiv brechenden Medium, das heißt in jedem Medium, in dem die Geschwindigkeit für Lichtarten ungleicher Periode ungleich ist. Das wird sicher richtig sein. Aber hier tritt eine Schwierigkeit auf, die mir erst aufgefallen ist, als ich vor Ihnen über den Gegenstand zu sprechen begann; ich hoffe aber, daß wir, noch ehe wir auseinandergehen, sehen werden, wie wir uns durch sie hindurchfinden. Alles Licht besteht aus einer Folge von Gruppen. Warum nicht alles Licht polarisiert ist, wissen wir wohl. Wir schreiten aber jetzt in unserer Arbeit allmählich fort, bis wir aus Gleichungen wie die, die wir für den Schall benutzt haben, Ausdrücke für die Folge von Schwingungen für bestehendes Licht gewinnen. Dabei dürfen Sie irgendeine, nur zulässige Annahme über den Ursprung des Lichtes, in einer Flamme, oder in einem durch einen elektrischen Strom glühenden Draht, oder in sonst einer Lichtquelle machen. Nehmen wir erst als Lichtquelle eine, die in durchaus gleichförmig periodisch gehaltener Bewegung besteht, so würde das von dieser Quelle herrührende Licht eben oder zirkular oder elliptisch polarisiert und vollkommen konstant sein. In Wirklichkeit bestehen aber vielfache Folgen von Wellengruppen und ist konstante Periodizität nicht vorhanden. Eine einzelne Molekel, deren Masse im Vergleich mit dem lichtführenden Äther, den sie verdrängt, enorm ist, erhält einen Stoß und führt eine Reihe Schwingungen aus, bis sie zur Ruhe kommt oder bis sie einen Stoß in irgendeiner andern Richtung erhält. Sie sendet so Schwingungen mit so wenig Regelmäßigkeit aus wie ein Haufen von tönenden Körpern, der Glocken, Stimmgabeln, Orgelpfeifen enthält, oder wie alle Instrumente eines Orchesters, die in wildester Unordnung unabhängig voneinander gespielt werden. In diesem Falle sendet jedes Instrument

seinen Ton aus, der sich in hinreichend großem Abstände von der Tonquelle so ausbreitet, als ob andre Töne gar nicht vorhanden wären. Wir sehen so, daß Licht wesentlich aus Wellengruppen zusammengesetzt ist. Sollte nun die Geschwindigkeit an der Spitze, in der Mitte oder am Ende einer Wellengruppe eine andre sein als die Geschwindigkeit von vollkommen stetigen Wellenzügen in Wasser oder Glas oder in sonst einem dispersiv brechenden Mittel, so ist uns bis zu einem gewissen Grade der Boden entzogen für die Ermittlung dieser Geschwindigkeit.

Ich will damit sagen, daß alles Licht aus Gruppen besteht, die unregelmäßig einander folgen, und daß die Schwierigkeit darin liegt, zu bestimmen, was mit dem Beginn und dem Ende der Schwingungen einer Gruppe zu machen ist. Zugleich ist die Frage zu behandeln, inwieweit das Mittel aus den Wirkungen der Gruppen dasselbe ist, wie das einer unendlichen Folge gleichförmiger Wellen und ob die am Beginn und am Ende jeder Gruppe bestehende Abweichung von der regulären Periodizität nur einen kleinen Einfluß auf den ganzen Verlauf hat. Letzteres scheint nach den bekannten, gut beobachteten Tatsachen über die Lichtgeschwindigkeit bei der Brechung und Interferenz wohl zuzutreffen. Ich führe Sie da in einen Sumpf, aus dem ich Ihnen einstweilen noch keinen Ausweg zeige. Wir werden aber schon einen Ausweg durch gemeinsames Nachdenken über diesen Gegenstand finden.

---



## Sechste Vorlesung.

### Akustische Schwingungen, schwingende Molekelnsysteme.

#### a) Molar.

Ich möchte Sie bitten, zu bemerken, daß, als ich sagte,  $k + \frac{1}{3} n$  sei für die meisten Festkörper nicht sehr verschieden von  $k$ , ich annahm, daß das Verhältnis von  $n$  zu  $k$  kleiner ist, als in Wirklichkeit stattfindet. Das Quadrat der Geschwindigkeit einer Verdichtungswelle in einem elastischen Festkörper ist nun  $(k + \frac{4}{3} n)/\rho$ . Bei Festkörpern, für welche die von Navier und Poisson zwischen Zusammendrückbarkeit und Starrheit angenommene Beziehung gilt, ist  $n = \frac{3}{5} k$ ; bei diesen wird also der Zähler  $\frac{9}{5} k$ . Dagegen würde er  $k$  betragen, wenn keine Starrheit vorhanden wäre.

Metalle werden nicht sehr von der Navier-Poissonschen Annahme abweichen, doch scheint bei ihnen und überhaupt bei Festkörpern  $n$  im Vergleich zu  $k$  im allgemeinen kleiner zu sein, als diese Annahme fordert. Für Kautschuk und Harze ist sogar  $n$  ein außerordentlich kleiner Bruchteil von  $k$ , so daß in diesen Fällen die Geschwindigkeit der Verdichtungswelle nur wenig größer sein kann als  $\sqrt{\frac{k}{\rho}}$ . Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Verdichtungswelle ist  $\sqrt{\frac{n}{\rho}}$ ; demnach ist für Harze die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Verdichtungswellen enorm viel größer als die von Verdichtungs-  
wellen.

Sprechen wir jedoch weiter von Lösungen unserer Gleichungen. Diejenigen, die deutsche Schriftsteller über Hydrodynamik gelesen haben, kennen die Bedeutung des Geschwindigkeitspotentials bereits ganz gut. Es ist dies ein rein technischer Ausdruck, der mit dem Begriff Potential oder Kraft nichts zu tun hat. „Geschwindigkeitspotential“ bedeutet eine solche Funktion der Koordinaten, daß das Verhältnis ihrer Änderung für die Einheit der Entfernung in jeder Richtung der Komponente der Geschwindigkeit in dieser Richtung gleich ist. Ein Geschwindigkeitspotential besteht, wenn die Geschwindigkeitsverteilung in dieser Weise ausdrückbar ist; in andern Worten, wenn die Bewegung keine Drehung enthält. Und so definiert man eine nicht rotierende Bewegung am besten dadurch, daß ihre Geschwindigkeitskomponenten durch die Differentialkoeffizienten einer Funktion dargestellt werden. Diese Funktion ist eben das Geschwindigkeitspotential. Wenn die Bewegung rotierend ist, gibt es kein Geschwindigkeitspotential.

Eine entsprechende Ausdrucksweise kann für „Verschiebungspotential“ angewandt werden. Es ist dies keine gute Bezeichnung, sie ist aber geradezu. Und wenn wir ja von komponierenden Verschiebungen sprechen, gleichviel ob von statischen Verschiebungen in einem elastischen Festkörper oder von Schwingungen, in denen die Verschiebungskomponenten als Differential-

koeffizienten einer Funktion darstellbar sind, so wollen wir damit sagen, daß wir es nicht mit einer rotierenden Verschiebung zu tun haben. Wenn wir Geschwindigkeitskomponenten durch Differenzieren einer Funktion finden, haben wir ein Geschwindigkeitspotential vor uns; demnach haben wir, wenn wir in derselben Weise Verschiebungskomponenten erhalten, ein Verschiebungspotential vor uns. Die Funktionen  $\Phi$ , die wir benutzt haben, sind dann nicht im strengen Sinne des Wortes Geschwindigkeits-, sondern Verschiebungspotentiale.

Ich bitte Sie nun, in erster Linie zu beachten, was ja allen denen, die mit den Differentialgleichungen vertraut sind, wohl bekannt ist, daß, wenn wir  $\Phi = \frac{1}{r} \sin q$ , wo

$$q = \frac{2\pi}{\lambda} \left( r - t \sqrt{\frac{k}{\rho}} + \frac{1}{3} n \right)$$

gesetzt ist, als primäre Lösung wählen, andre Lösungen durch Differentiation nach den rechtwinkligen Koordinaten sich ableiten lassen. Das erste, worauf ich hinweisen will, ist, daß in einigem Abstände vom Anfangspunkte die entsprechende Verschiebung, welche Lösung auch aus jener ersten abgeleitet sein mag, nahezu in Richtung aus dem Anfangspunkte der Koordinaten erfolgt.

Nimmt man einen beliebigen Differentialkoeffizienten  $\frac{\partial^{i+j+k}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}$ , so ist das Glied desselben, das in einem hinreichend großen Abstände allein einen merklichen Betrag hat, das, welches durch die wiederholte Differenzierung von  $\sin q$  erhalten ist. Dieses vom Abstände abhängige Glied ist in jedem Falle das folgende

$$\left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^{i+j+k} \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^i \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^j \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^k \cdot \frac{1}{r} \sin q.$$

Es gilt  $\sin q$  oder  $\cos q$ , je nachdem  $i+j+k$  gerade oder ungerade ist. Wir brauchen uns nun das Zeichen nicht zu kümmern, da wir es positiv nehmen, gleichviel ob der Differentialquotient positiv oder negativ ist. Nun

ist  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$ . Demnach geht unsere typische Lösung über

in  $\frac{x^i y^j z^k}{r^{i+j+k+1}} \frac{\sin q}{\cos q}$ . Dieser Ausdruck gibt die allgemeine Form des Verschie-

bungspotentials für eine von einem Zentrum ausgehende Verdichtungswelle wieder, die sich in irgendeiner Richtung bis zu einem Abstände  $r$  vom Zentrum fortgepflanzt hat, der im Vergleich zur Wellenlänge groß ist. Ich habe nicht formell bewiesen, daß dies die allgemeinste Form ist; es ist aber leicht, diesen Beweis zu führen. Ich will jedoch lieber synthetisch verfahren. Der Gegenstand ist analytisch so vollständig von vielen Schriftstellern bearbeitet worden, daß es eine Vergeudung Ihrer Zeit wäre, weiter auf ihn einzugehen als durch eine Skizze der Art seiner Behandlung und durch Vorführung einiger Erläuterungen.

Daß die Verschiebung in einem großen Abstände vom Ursprung der Störung stets in Richtung des Radius-Vektor vor sich geht, ersieht man aus folgendem. Der Differentialquotient dieses Verschiebungspotentials, der mehrere von der Differentiation der  $r$ , der  $x$  usw. herrührende Glieder enthält, hat,

wie wir wissen, ein Glied von hervorragender Bedeutung, nämlich dasjenige mit dem Faktor  $\frac{2\pi}{\lambda}$ . Denn die Kleinheit von  $\lambda$  im Vergleich mit den andern vorkommenden Größen verleiht diesem Gliede besondere Bedeutung. Die vom Abstände abhängigen Glieder für die Komponenten der Verschiebung sind demnach

$$\xi = \frac{x^i y^j z^k}{r^{i+j+k+1}} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{r} \cos q = R \frac{x}{r} \frac{\cos q}{\sin q},$$

$$\eta = R \frac{y}{r} \frac{\cos q}{\sin q}, \quad \zeta = R \frac{z}{r} \frac{\cos q}{\sin q}.$$

Diese Größen geben aber Komponenten einer Verschiebung  $\omega$ , die radial verläuft, und der Ausdruck für die Amplitude der radialen Verschiebung ist

$$R = c \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^i y^j z^k}{r^{i+j+k+1}}.$$

Die Summe einer beliebigen Anzahl solcher Ausdrücke stellt die Abstandswirkung eines Schalles dar, der von irgendeiner Quelle aus sich ausbreitet. Es ist interessant zu sehen, wie wir durch einfache Transformation einen Ausdruck gewinnen können, der das gesamte Tönungsgebiet durch Knoten unterteilt, in denen Stille empfunden wird. Das allgemeinste Resultat für die radiale Verschiebung ist nämlich  $\omega = \sum \frac{cx^i y^j z^k}{r^{i+j+k+1}} \frac{\cos q}{\sin q}$ .

Nun sind  $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$  reine Winkelfunktionen und können ausgedrückt werden durch  $\sin \Theta \cos \Psi, \sin \Theta \sin \Psi, \cos \Theta$ . Demnach ist  $\omega$  eine ganze algebraische Funktion von  $\sin \Theta \cos \Psi, \sin \Theta \sin \Psi, \cos \Theta$ . Hieraus aber folgt schon, daß man die Ausdrücke für den Schall, der sich von einer Quelle aus ausbreitet, unendlich mannigfach so variieren kann, daß Tonlosigkeitskegel zum Vorschein kommen und entsprechende Knotenlinien, in denen diese Kegel die sphärische Wellenfläche schneiden. Weiter ist es dann interessant zu sehen, daß auch in der Nähe der Knoten die Schwingung senkrecht zur Wellenfläche verläuft, so daß also stets ein allmählicher Abfall der Intensität der Welle bis zur Null und ein Durchgang durch die Null, der einem Phasenwechsel gleichkommt, realisiert ist, ohne Auftreten einer zum Radiusvektor senkrechten Bewegung.

Die komplizierteren Glieder, die ich übergangen habe, sind alle derart, daß sie nur in der Nähe der Quelle merklich sein können. Stellen Sie sich beispielsweise eine schwingende Glocke vor. Die über die Seitenflächen der Glocke hinweg und um den Rand herum aus- und eindringende Luft verursacht dicht an der Glocke einen sehr komplizierten Bewegungszustand; ebenso verhält es sich bei einer Stimmgabel. Wählt man einen kugelförmigen Körper, so kann man die Bewegung leicht durch harmonische Kugelfunktionen ausdrücken. Es ist dann in der Nähe des tönenden Körpers eine große Menge Schwingungen in Richtungen vorhanden, die senkrecht zum Radiusvektor liegen, die sich mit Bewegungen aus dem Körper heraus und in ihn hinein zusammensetzen; alle diese Bewegungen mit Ausnahme ihrer radialen Komponenten werden in Entfernungen vom tönenden Körper, die im Vergleich mit der Wellenlänge groß sind, unmerklich. Indessen hat gerade die Be-

trachtung der Bewegung in Abständen, die gegenüber der Wellenlänge nur mäßig sind, Stokes zum Gegenstande seiner interessanten Untersuchung im Anschluß an den Versuch Leslies mit einer in einem Vakuum schwingenden Glocke geführt, über die ich bereits berichtet habe. (Dritte Vorlesung. S. 27, oben.)

Ehe ich den Gegenstand verlasse, sei noch auf zwei oder drei Punkte hingewiesen. Nehmen wir an, der tönende Körper sei eine Glocke mit kreisförmigem Querschnitt. Wenn die Glocke mit ihrem Rande horizontal verläuft und stationär auf ihren tiefsten Eigenton in Schwingung gehalten wird, ist offenbar die Art der Schwingung die folgende: eine Schwingung, bei der


die Glocke kreisförmig bleibt , eine solche, bei der sie in eine ellip-

Fig. 12.

tische Form dieser Art übergeht , eine Rückschwingung in die

Fig. 13.


Kreisform , eine elliptische dieser Art mit zur vorigen Figur senk-

Fig. 11.


rechter Gestalt .

Fig. 15.

Offenbar muß hiernach eine tonlose Ebene vorhanden sein in einer Richtung und eine zweite, senkrecht zu jener (in den Zeichnungen durch punktierte Linien dargestellt). Demnach ist die Lösung für die diesem Falle entsprechende radiale Komponente in einem beträchtlichen Abstände von der Glocke  $\omega = \left(\frac{1}{2} - \cos^2 A\right) \frac{\cos q}{r}$ , da die Komponente verschwinden muß, wenn  $\cos^2 A = \frac{1}{2}$  oder  $A = \pm 45^\circ$  ist;  $A$  ist dabei das Azimut, wenn die Achse der Glocke vertikal steht.

Fassen wir sodann eine hin- und herschwingende Stimmgabel oder eine längliche (elliptische) Glocke ins Auge, wie ich sie von jenem geschickten, alten Franzosen Marloye, dem Vorgänger Koenigs, erhalten habe. Sie gibt einen außerordentlich lauten Ton und hat bei akustischen Versuchen einen Vorzug vor einer kreisförmigen Glocke. Wenn wir eine kreisförmige Glocke in Schwingung versetzen und sie dann sich selbst überlassen, hören wir immer einen schlagenden Ton, da die Glocke nahezu, aber nicht vollkommen symmetrisch ist. Streicht man sie mit einem Violinbogen, indes man sie mit einem Finger berührt, nimmt dann den Finger fort und überläßt sie sich selbst, so führt sie, wenn man für die Berührung nicht eine besondere Stelle ausgesucht hat, derartig, daß sie in einer Grundschwingung tönt, die resultierende Bewegung zweier Grundbewegungen aus.

Ein entsprechender Versuch läßt sich mit kreisförmigen Platten ausführen. Ich mache ihn vor meinen Schülern jedesmal, wenn ich den Gegenstand behandle. Man nimmt eine kreisrunde Platte, wie sie für die Vorführung der Schwingung bei akustischen Demonstrationen gewöhnlich gebraucht

werden, streicht sie in der üblichen Weise mit einem Violoncellobogen und legt einen oder zwei Finger so an den Rand, daß die Quadrantenschwingung hervorgerufen wird. Wenn die Platte mit Sand bestreut ist, dann treiben ihn die Schwingungen in Häufchen zusammen mit Graten, die in zwei zueinander senkrechten Durchmessern der Platte liegen, von denen der eine durch den Punkt, bzw. die beide durch die beiden Punkte gehen, in denen die Platte mit dem Finger berührt ist. Hört man jetzt mit dem Streichen der Platte auf und entfernt den Finger von dem Rande der Platte, so werden die Sandhaufen nach oben in die Luft geschleudert und zugleich nach beiden Seiten auf beträchtliche Entfernungen hin verstreut und können nirgends in Ruhe verbleiben. Gleichzeitig hört man einen schlagenden Ton. Wenn ich aber ein wenig herumprobiere, finde ich eine Stelle, an der ich die Platte mit meinem Finger zu berühren habe, so daß, wenn ich sie mit dem Bogen so streiche, daß eine Quadrantenschwingung eintritt, nach Aufhören des Streichens und nach Fortnahme des Fingers der Sand ungestört längs der beiden zueinander senkrechten Durchmesser liegen bleibt und daß kein Schlagen gehört wird. Habe ich so ein Paar knotenbildender Durchmesser ermittelt, so weiß ich, daß ich ein zweites Paar finde, indem ich die Platte  $45^0$  von der ersten Stelle entfernt berühre. Berühren wir jetzt die Platte mit zwei Fingern an zwei um  $90^0$  voneinander entfernten Punkten in der Mitte zwischen dem ersten und dem zweiten Paare knotenbildender Durchmesser, lassen wir die Platte schwingen und nehmen dann die Finger fort und hören endlich mit dem Streichen auf, so vernehmen wir sehr deutliche Stöße; einen Ton, der allmählich von absoluter Tonlosigkeit zum lautesten Ton ansteigt, dann wieder zur Tonlosigkeit abschwilt usw. zwischen lautestem Ton und absoluter Tonlosigkeit abwechselnd, mit vollkommener Gleichmäßigkeit und Regelmäßigkeit des An- und Abschwellens.

Wählt man eine Teilung des Plattenrandes in sechs gleiche Teile durch drei Durchmesser, so findet man dieselbe Erscheinung wieder. Geht man tastend vor, indem man die Platte an zwei um  $60^0$  oder  $120^0$  voneinander entfernten Punkten berührt und sie in einem Abstände von  $30^0$  von einem der Berührungspunkte streicht, so sieht man, daß der Sand in den drei durch die Finger bestimmten Durchmessern in Ruhe bleibt. Nimmt man dann die Finger fort, so bemerkt man auch hier im allgemeinen, daß der Sand auseinandergetrieben wird, und hört ein Stoßen, Schlagen des Tones. Verfolgt man den Rand in dieser Weise langsam, dann ist es sehr interessant, wenn man in die Nähe der Stelle gelangt, an der kein Stoßen auftritt. In dem Augenblick, da man die Finger fortnimmt, sieht man die Knotenlinien hin- und herschwingen von einer zur andern Seite von einer mittleren Lage aus, mit einer leichten Bewegung, und man hört ein sehr deutliches, allerdings schwaches aber vollkommen regelmäßiges Stoßen zwischen einem lautesten und einem am wenigsten lauten Ton. Wählt man genau die mittlere Lage, so bleiben die die Knoten enthaltenden Sandanhäufungen, solange man noch mit dem Bogen streicht, stehen: hört man dann mit dem Streichen auf und entfernt den oder die Finger plötzlich von der Platte, so bemerkt man, daß die Knotenlinien vollkommen ruhig bleiben, und man hört einen reinen Ton ohne jedes Stoßen. Berührt man die Platte genau in einem Abstände von  $30^0$  von den zuerst gefundenen Knotenlinien, so erhält man das stärkstmögliche Stoßen, ein Stoßen zwischen einem lauten Ton und zwischen Tonlosig-

keit. Geht man mit den Fingern wiederum  $30^0$  weiter, so findet man, daß die Sandanhäufungen bei der Entfernung der Finger wieder absolut ruhig bleiben. Man kann so mit acht und zehn Unterteilungen fortfahren, usw. Man darf dabei aber nicht erwarten, daß die Orte für die Unterteilungen in sechs, acht und mehr Teile den Orten für vier Teile entsprechen. Die Orte für vier Unterteile werden im allgemeinen nicht Orte für acht Unterteile sein. Man muß durch Probieren die Orte für die Einteilung in acht Teile gesondert aufsuchen, und man wird im allgemeinen finden, daß ihre Durchmesser gegen diejenigen für die Vierteilung schräg liegen.

Der Grund für alle diese Tatsachen ist klar. Da die Platte in der Regel nur annähernd kreisförmig und symmetrisch ist, hat in jedem Falle die allgemeine Gleichung für die Bewegung zwei nahezu gleiche Wurzeln, die zu den Knoten oder Einteilungen durch einen, zwei, drei oder vier Durchmesser usw. gehören. Diese beiden Wurzeln entsprechen stets Tönen, die ein wenig voneinander verschieden sind. Die Wirkung des Andrückens des Fingers an den Rand ist die, daß die Platte, solange der Finger sich an ihr befindet, gezwungen in einer einfachen harmonischen Schwingung schwingt, deren Periode größer als die eine und kleiner als die andre Wurzel ist. Sobald man aber den Finger entfernt, folgt die Platte dem Gesetze der Superposition der Grundschwingungen; dabei ist jede Grundschwingung eine einfach-harmonische. Ich habe bei der Vorführung dieses Versuches oft Musiker nach zwei nahe gleichen Tönen gefragt und ihnen gesagt: „Nun, welche von diesen beiden Noten ist die tiefere?“ Selten konnten sie es sagen. Die Differenz ist für ein bloß musikalisch geübtes Ohr zu klein, und das Urteil lautet dahin, daß die Noten „dieselben“ sind; Musiker sind nicht gewohnt, Töne mit dem Ohre eines Naturforschers zu hören, und sagen nicht immer richtig aus, welcher von zwei Tönen der tiefere ist, auch wenn die Verschiedenheit merklich ist. Jeder kann, sobald er einige Versuche dieser Art ausgeführt hat, sagen, dies ist der tiefere, dies der weniger tiefe Ton, selbst wenn er ein musikalisch ungebildetes Ohr oder gar ein ganz schlechtes Gehör für Musik hat, das tatsächlich nicht ausreicht, ihn richtig zu führen, wenn er einen Ton mit seiner Stimme angeben oder richtig singen will. Es ist eigentümlich, daß, wenn wir zwei Töne, die wir durchaus als verschieden kennen, nacheinander angeben, die meisten sie als fast gleich hören. Gibt man aber beide zugleich an, so hört man die Verschiedenheit der beiden Noten in ihrem nur angenehnten Einklang.

Immer wenn eine kreisförmige Platte zwischen diametralen Knotenlinien schwingt, ist in der umgebenden Luft eine gerade Anzahl von Ebenen vorhanden, in denen Tonlosigkeit herrscht, und zwar sind diese Ebenen senkrecht zur Platte und gehen durch die die Knoten enthaltenden Durchmesser. Macht man den Versuch beispielsweise mit einer quadratischen Platte oder mit einer in Vierteln schwingenden Glocke, so findet man zwei vertikale Ebenen der Tonlosigkeit, die zueinander rechtwinklig sind. Läßt man sie in sechs oder mehr Unterteilen schwingen, so erhält man eine entsprechende Anzahl Ebenen, in denen Tonlosigkeit herrscht.

Und so kommt man auch hinsichtlich der Bewegungen in der Nähe der Stimmgabel zu der schönen Anschauung, daß man der Hauptsache nach harmonische Funktionen braucht, um sie darzustellen. Algebraische Funktionen

der Koordinaten treten in den entfernteren Gliedern auf, aber in den andern Gliedern, die Prof. Stokes näher bearbeitet hat, und die ferner in Prof. Rowlands Abhandlung über elektromagnetische Störungen<sup>1)</sup> weiter ausgeführt sind, tritt gerade diese Art Analysis auf und erweist sich als sehr wichtig. Ich habe Ihnen keine detailliertere Untersuchung dieses Teiles unserer allgemeinen Lösung vorgeführt, vielmehr Ihre Aufmerksamkeit besonders auf die „entfernten Glieder“ gelenkt, teils wegen ihres Interesses für die Theorie des Schalles, teils weil ihre Erforschung uns für unsere eigentliche Aufgabe, die Wellentheorie des Lichtes, vorbereitet.

In der nächsten Vorlesung wollen wir damit beginnen und versuchen, über den Ursprung der Lichtwellen nachzudenken. Ich möchte Sie zu einer Anschauung über das einfachste Lichtelement führen. Es muß polarisiert sein und aus einer einzigen Folge von Schwingungen bestehen. Ein Körper erhält einen Anstoß, so daß er schwingt; dieser Körper bildet dann von selbst die einfachste Lichtquelle, die man haben kann; er ruft ein Lichtelement hervor. Ein Lichtelement besteht seinem Wesen nach in einer Folge von Schwingungen. Es ist sehr leicht zu zeigen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit solcher Folgen im reinen lichtführenden Äther konstant ist. Die Folge schreitet fort und ändert sich nur, wenn die Quelle sich ändert. Wenn die Quelle allmählich nachläßt, indem sie ihre Energie ausgibt, nimmt die Amplitude offenbar ab; aber darum wird kein Vorwärtsdrängen oder Zurückbleiben von kleinen Wellen und so kein Zweifel bezüglich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit eintreten. Wenn aber Licht, das, wie es tatsächlich der Fall ist, aus Folgen von Schwingungen besteht, durch Luft oder Wasser oder Glas oder einen Kristall fortgepflanzt wird, was ist dann das Resultat? Nach der Auseinandersetzung, über die ich berichtet habe, wird die Geschwindigkeit vollkommen unsicher sein, da sie von der Anzahl der Wellen in jeder Folge abhängt, und all dies scheint eine schwierige Aufgabe abzugeben. Gleichwohl müssen wir zusehen, wie wir ihr beikommen.

## b) Molekular.

Die Frage nach den Schwingungen zusammenhängender Partikel ist eine besonders interessante und wichtige Aufgabe. Sie sehen, daß sie sich zu mannigfachen Anwendungen entwickelt. Zunächst beachten wir, daß sie zur Grundlage der Theorie der Fortpflanzung von Wellen gemacht werden kann. Wenn wir unsere Partikel gleichmäßig verteilt und durch konstante Federn miteinander verbunden annehmen, können wir von der Lösung der Aufgaben für die gegenseitige Beeinflussung einer Gruppe von Teilchen zur Theorie etwa der longitudinalen Schwingungen eines elastischen Stabes oder durch dieselbe Rechnung zur Theorie der transversalen Schwingungen eines Fadens gelangen.

Ich verweise Sie auf Lagranges *Mécanique Analytique* [Part. I, p. 339]<sup>2)</sup>. Die Aufgabe, die ich Ihnen hier vorführe, ist in diesem Werke unter der Bezeichnung von Schwingungen eines linearen Systems von Körpern durchgeführt. Lagrange benutzt zu ihrer Lösung, was er den Algo-

1) Phil. Mag. XVII. 1884, p. 413. Am. Jour. Math. VI. 1884, p. 359.

2) Vergl. Anm. S. 58.

D. H.

rithmus endlicher Differenzen nennt, und er findet sie erst für eine endliche Zahl von Körpern und dann für einen kontinuierlichen Faden. Womit wir uns hier beschäftigen, ist von umfassenderer Bedeutung, da die Massen und die Federn nicht einander gleich angenommen sind. Es hat aber einiges Interesse zu sehen, daß Fälle gefunden werden können, die sich verzweigend ineinander verflechten.

Ich möchte Ihnen einige Eigenschaften der Lösung vorführen, die von sehr großer Bedeutung sind. Ich bitte zunächst die Anzahl der Glieder zu beachten.

Es war

$$\begin{aligned} c_j x_{j-1} &= -a_j x_j, \\ c_{j-1} x_{j-2} &= -a_{j-1} x_{j-1} - c_j x_j = \frac{a_j a_{j-1}}{c_j} x_j - c_j x_j, \\ c_{j-2} x_{j-3} &= \text{usw.} \end{aligned}$$

Alle  $x$  werden auf diese Weise nacheinander durch  $x_j$  ausgedrückt. Es sei  $N_i$  die Anzahl der Glieder in  $x_{j-i}$ . Diese Glieder werden erhalten, indem man die Werte von  $x_{j-i+1}$ ,  $x_{j-i+2}$  in der Formel

$$-c_{j-i+1} x_{j-i} = a_{j-i+1} x_{j-i+1} + c_{j-i+2} x_{j-i+2}$$

einsetzt. Keines von diesen Gliedern kann, außer für besondere Werte, ein andres aufheben, und man wird daraus die Richtigkeit der folgenden Formel für die Anzahl der Glieder schließen

$$N_i = N_{i-1} + N_{i-2}.$$

Dies ist eine Gleichung für endliche Differenzen. Wenden wir den Algorithmus endlicher Differenzen nach der Bezeichnung von Lagrange an, oder was wesentlich dasselbe ist, bereiten wir Lösungen dieser Gleichung durch die folgende Formel:  $N_i = z N_{i-1}$  vor; dann finden wir

$$z^2 = z + 1, \text{ oder } z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Wir können unsere Gleichung befriedigen, wenn wir entweder das obere oder das untere Zeichen wählen. Die allgemeine Lösung ist schließlich

$$N_i = C \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^i + C' \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^i,$$

wo  $C$  und  $C'$  zu bestimmen sind aus den Gleichungen  $N_0 = 1$ ,  $N_1 = 1$ . Nicht ohne leichte Verwunderung sieht man die Anzahl der Glieder einer Determinante in einem solchen Ausdruck gegeben. Man findet aber, daß für die allgemeinere Gleichung

$$N_i = a N_{i-1} + b N_{i-2}$$

das Folgende eine Lösung ist

$$N_i = N_1 \frac{r^i - s^i}{r - s} + b N_0 \frac{r^{i-1} - s^{i-1}}{r - s},$$

wo  $r$  und  $s$  die beiden Wurzeln der Gleichung  $x^2 = ax + b$  sind. Es ist ferner zu beachten, daß die Koeffizienten von  $N_0$  und  $N_1$ , da sie symmetrische



Funktionen der beiden Wurzeln sind, wie es ja sein muß, ganze Funktionen von  $a$  und  $b$  darstellen.

Wenn eine von den Wurzeln, beispielsweise  $s$ , kleiner als eins ist, können wir die höheren Potenzen von ihr, also in diesem Falle von  $s$ , vernachlässigen, und so erhalten wir für große Werte von  $i$  als hinreichend richtigen Wert von  $N_i$ , wenn wir den ganzen Teil berechnen von

$$\frac{N_1 r^i + N_0 b r^{i-1}}{r + \frac{b}{r}}.$$

Es ist interessant zu bemerken, daß der numerische Wert dieses Ausdrucks um so weniger von einer ganzen Zahl verschieden ist, je größer  $i$  wird, und daß er von einer unendlich großen ganzen Zahl unendlich wenig abweicht, wenn  $i$  unendlich groß ist.

Die Werte von  $N_i$  bis  $i = 12$  sind für den Fall unserer Aufgabe ( $a = b = N_0 = N_1 = 1$ )

$$i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12;$$

$$N_i = 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233.$$


---

## Siebente Vorlesung.

### Schwingende Molekelnsysteme, Dispersion und Reflexion.

#### a) Molekular.

Von Dr. Franklin ist festgestellt worden, daß für den einfacheren Fall  $N_1 = aN_0$ , der bei unserer besonderen Frage nach der Anzahl der Glieder in unserer Determinante zutrifft, die Formel übergeht in

$$N_i = \left( a \frac{r^i - s^i}{r - s} + \frac{r^{i-1} - s^{i-1}}{r - s} \right) N_0$$

und so vereinfacht werden kann.

Nämlich es ist  $r^2 = ar + b$ , also auch  $r^{i+1} = ar^i + br^{i-1}$ . Folglich verwandelt sich der obige Ausdruck zu

$$N_i = N_0 \frac{r^{i+1} - s^{i+1}}{r - s}.$$

Dies kann auch direkt gefunden werden, indem man  $C + C'$  gleich  $N_0$  ansetzt, ferner  $N_{-1} = 0$  macht und  $N_i = Cr^i + C's^i$  bildet.

Wir haben in unserem Falle  $a = b = 1$ , woraus folgt

$$r - s = \sqrt{5}; \quad r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618, \quad s = -0,618.$$

Wenn wir nunmehr mit nur angenäherten Logarithmen für den Fall

$$N_{12} = \frac{r^{13}}{r - s}$$

rechnen, indem wir nämlich  $s^{13}$  vernachlässigen, finden wir wie oben

$$\log N_{12} = 13 \lg 1,618 - \lg \sqrt{5} = 13 \cdot 0,209 - 0,3495 = 2,3675 = \lg 233,$$

das ist ein genaues Resultat, das schon mit nur vierstelligen Logarithmen erhalten wird.

Das dynamische Problem ist an und für sich schon sehr interessant und wichtig, da es mit der ganzen Theorie der Arten und Folgen von Schwingungen eng verknüpft ist; allein die Anwendung auf die Lichttheorie, wegen deren wir den Gegenstand aufgenommen haben, verleiht ihm mehr Interesse, denn es als bloß dynamisches Problem besitzen würde. Lagrange hat im zweiten Abschnitt des zweiten Theiles seiner *Mécanique analytique*<sup>1)</sup> die Oszillation eines linearen Systems von Körpern sehr vollständig bearbeitet und bis zu der einer kontinuierlichen Saite geführt. Unsere Betrachtungen sind insofern etwas allgemeiner, als sie nicht wie die von Lagrange gleiche

---

1) In der deutschen Ausgabe dieses Werkes 2. Teil, Abschnitt VI, S. 284 ff.  
D. H.

Körper und gleiche Federn voraussetzen. Ich will nun eine fundamentale Form begründen, auf die wir unsere Lösung bringen können, die in Verbindung mit der Anwendung, die wir von ihr machen wollen, von Wichtigkeit ist.

Die Algebra zeigt, daß wir imstande sein müssen,  $-\frac{x_1}{c_1 \xi}$  auf die Form

$$-\frac{x_1}{c_1 \xi} = \frac{q_1}{k_1^2 - 1} + \frac{q_2}{k_2^2 - 1} + \dots + \frac{q_j}{k_j^2 - 1}$$

zu bringen, wo  $q_1, q_2, \dots, q_j$  bestimmte Konstanten und  $k_1, k_2, \dots, k_j$  die Werte der Periode  $\tau$  sind, für welche  $-\frac{x_1}{\xi}$  unendlich wird. Dieses muß unter allen Umständen möglich sein, denn wenn  $x_1$  und  $\xi$  durch  $x_j$  ausgedrückt werden, sind diese Größen Funktionen von bezüglich dem  $(j-1)^{\text{ten}}$  und dem  $j^{\text{ten}}$  Grade von  $\frac{1}{\tau^2}$ . Dies ist leicht zu sehen, wenn man beachtet, daß  $x_{j-1} =$

$-\frac{q_j}{c_j} x_j$  vom ersten Grade nach  $\frac{1}{\tau^2}$  ist, und daß der Grad eines jeden  $x$  vermöge des Faktors  $a_i = \frac{m_i}{\tau^2} - c_i - c_{i+1}$  in der Gleichung  $-c_i x_{i-1} = a_i x_i + c_{i+1} x_{i+1}$  um eine Einheit über den des folgenden  $x$  erhöht wird. Setzt man demnach  $z$  für  $\frac{1}{\tau^2}$ , so erhält man

$$-\frac{x_1}{c_1 \xi} = \frac{Az^{j-1} + A'z^{j-2} + \dots}{Bz^j + B'z^{j-1} + \dots}.$$

Dies geht durch Zerlegung in Partialbrüche über in

$$z - \frac{K_1}{k_1^2} + \frac{K_2}{z - \frac{1}{k_2^2}} + \dots + \frac{K_j}{z - \frac{1}{k_j^2}},$$

welcher Ausdruck die oben angegebene Form erhält, wenn man setzt  $K_i k_i^2 = q_i$ .

Wir wissen, daß das Reziproke der Quadratwurzeln<sup>1)</sup> der Wurzeln der Gleichung  $j^{\text{ten}}$  Grades nach  $z$ , die  $-\frac{x_1}{c_1 \xi}$  unendlich groß machen, sämtlich reell sind; sie stellen die Schwingungsperioden eines stabilen Systems miteinander verbundener Körper dar. Wir besitzen dafür den formellen Beweis in der Rechnung, die wir in Verbindung mit einem solchen System durchgeführt haben. Ich bringe unsere Lösung auf diese Form, weil es wünschenswert ist, das charakteristische Verhalten der Größe  $\tau$  zu der einen oder der anderen fundamentalen Periode zu beachten. Hauptsächlich ist aber klar, daß, wenn wir die Wurzeln  $k_1, k_2, \dots, k_j$  kennen, die Bestimmung der  $q_1, q_2, \dots$  eine rein algebraische ist. Eine andere Form, die ich Ihnen vorführen will, bietet eine Antwort auf die algebraische Frage: welches sind die Werte von  $q_1, q_2, \dots$ ? Sie bietet sie in einer Form, die für unsere Betrachtung besonders geeignet ist, da sie die Energie der Schwingungen einiger fundamentalen Arten in einer bemerkenswerten Weise einführt.

1) Druckfehler im Druckfehlerverzeichnis des Originals zu verbessern. D. H

Bilden wir die Differenzialkoeffizienten von  $\frac{c_1 \xi}{x_1}$  nach  $\frac{1}{\tau^2}$  und bezeichnen der Kürze wegen  $\frac{k_1^2}{\tau^2} - 1$ ,  $\frac{k_2^2}{\tau^2} - 1 \dots$  mit  $D_1, D_2 \dots$ , so finden wir

$$\frac{d}{d\tau^2} \frac{c_1 \xi}{x_1} = \frac{k_1^2 q_1 D_1^2 + k_2^2 q_2 D_2^2 + \dots}{(q_1 D_1 + q_2 D_2 + \dots)^2}$$

Für den Fall  $\tau = k_1$  geht unser Differenzialkoeffizient über in  $\frac{k_1^2}{q_1}$ .  
Somit wird

$$q_1 = \left( \frac{d}{d\tau^2} \frac{c_1 \xi}{x_1} \right)_{\tau = k_1}.$$

Nun erinnern wir uns, daß wir hatten

$$\frac{d}{d\tau^2} \frac{c_1 \xi}{x_1} = m_1 + m_2 \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 + \dots + m_j \left( \frac{x_j}{x_1} \right)^2.$$

Nehmen wir für einen Augenblick einfache harmonische Bewegung an, so zeigt sich sofort, daß der Ausdruck aus Gliedern besteht, die die Energie enthalten. Es ist nun, wenn die Elongationsmaxima mit einem gestrichelten Buchstaben bezeichnet werden, zu jeder Zeit der Bewegung  $x_1 = x'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau}$  usf., falls die Zeit  $t$  von einem Moment gerechnet wird, in dem jedes Teilchen durch seine mittlere Lage geht. Dabei ist zu beachten, daß in diesem Falle alle Teilchen in demselben Augenblick die mittlere Lage passieren. Wir erhalten demgemäß für die Geschwindigkeit des Partikels Nr. 1

$$\dot{x}_1 = \frac{2\pi}{\tau} x'_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Die Energie, die für eine beliebige Zeit teils kinetisch, teils potentiell ist, wird in dem Augenblick, in dem die Teilchen durch ihre mittlere Lage gehen, ganz kinetisch. Wir berechnen die Energie für diesen Augenblick. Für  $t = 0$  ist  $x_1 = 0$ ,  $\dot{x}_1 = \frac{2\pi}{\tau} x'_1$ . Bezeichnen wir die gesamte Energie mit  $E$  (und beachten dabei, daß die Masse ist  $\frac{m}{4\pi^2}$ ), so erhalten wir

$$E = \frac{1}{2} (m_1 x'_1{}^2 + m_2 x'_2{}^2 + \dots + m_j x'_j{}^2) \frac{1}{\tau^2}.$$

So wird, wenn das Verhältnis der Gesamtenergie zu der Energie des ersten Teilchens mit  $R^{-1}$  bezeichnet wird,

$$m_1 R^{-1} = \frac{d}{d\tau^2} \frac{c_1 \xi}{x_1}.$$

Dies ist richtig für jeden beliebigen Wert von  $\tau$ , also auch für  $\tau = k_1, k_2, \dots$ . Bezeichnet man die Verhältnisse der Gesamtenergie zu den Einzelenergien allgemein mit  $R_1^{-1}, R_2^{-1}, \dots$ , so ist hiernach  $q_1 = \frac{k_1^2 R_1}{m_1}$ ,  $q_2 = \frac{k_2^2 R_2}{m_1}$ , ... und unsere Lösung geht über in

$$\frac{x_1}{c_1 \xi} = \frac{\tau^2}{m_1} \left( \frac{k_1^2 R_1}{k_1^2 - \tau^2} + \frac{k_2^2 R_2}{k_2^2 - \tau^2} + \dots \right).$$

Diese Form ist sehr bequem, da sie uns alles in Gliedern von Größen darstellt, deren Bestimmung an sich vorteilhaft ist, und die auch wichtig und interessant sind, nämlich von Perioden und Energieverhältnissen.

Schließlich muß noch gezeigt werden, wie wir durch unsere Art des Vorgehens ohne die Determinanten zu berechnen, alles, was hier in Betracht kommt, erhalten können. Unsere Art der Rechnung gibt uns der Reihe nach die  $u$ , anfangend mit  $u_{j-1}$ . Das gibt dann der Reihe nach die  $x$ , und so haben wir alles, was in den Differentialkoeffizienten nach  $\frac{1}{\tau^2}$  enthalten ist.

Alles ist bestimmt, wenn wir die Wurzeln finden können. Ich will nun zeigen, wie man die Wurzeln aus dem Kettenbruch zu ermitteln vermag, ohne überhaupt die Determinante aufzustellen. Die Berechnung in der Nähe einer Wurzel gibt uns die Folge der  $x$ , die dieser Wurzel entspricht, und wenn wir dann die Quadrate der Verhältnisse der  $x$  zu  $x_1$ , mit den Massen multiplizieren und addieren, erhalten wir die entsprechende Energie.

Der Fall, der uns am meisten interessiert, wird der sein, in dem die Massen immer größer und die aufeinander folgenden Federn immer stärker werden, jedoch nicht so wie die Massen, so daß die Schwingungsperioden begrenzter Teile der höher nummerierten Partikel des linearen Systems sehr groß werden. Dadurch wird, wenn wir die Partikel 4 und 6 festhalten, die natürliche Schwingungszeit des Partikels 5 länger als die des Partikels 2, wenn wir die Partikel 1 und 3 festhalten und das Partikel 2 in Schwingung versetzen, usf.

Wir wollen noch einmal einige von unseren Gleichungen niederschreiben:

$$c_1 \xi = a_1 - \frac{c_2^2}{u_2}; \dots; u_i = a_i - \frac{c_{i+1}^2}{u_{i+1}}; a_i = \frac{m_i}{\tau^2} - c_i - c_{i+1}.$$

Ohne danach zu fragen, ob  $u_{i+1}$  absolut genommen groß oder klein ist, wollen wir voraussetzen, daß es im Vergleich mit  $c_{i+1}$  groß ist; dann wird  $u_i$  von der Größenordnung  $a_i$ ,  $u_{i-1}$  von der Größenordnung  $a_{i-1}$  usf. sein. Wir ordnen die  $a$  so, daß sie ihrer Größe nach eine steigende Reihe bilden. Nun ist  $u_1 u_2 \dots u_i = (-1)^i c_1 c_2 \dots c_i \frac{\xi}{x_i}$ . Daraus finden wir den wichtigen Satz,

daß die Größe der Schwingungen der aufeinander folgenden Partikel von Partikel 1 bis Partikel  $j$  ahnimmt; und daß  $x_i$  äußerst klein im Vergleich zu  $\xi$  ist, auch dann, wenn das Maß der Kleinheit gegenüber den Verhältnissen

$$\frac{c_1}{u_1}, \frac{c_2}{u_2}, \dots, \frac{c_i}{u_i}$$

ein mäßiges ist. Und so sehen wir, wie gering die Bewegung in einer beträchtlichen Entfernung von dem Punkte ist, an dem die Erregung erfolgt, wenn die von uns gemachten Voraussetzungen gelten.

Nun aber die Ausrechnungen! Ich glaube voraussagen zu können, daß niemand an die Ausführung dieser Ausrechnungen gehen wird.<sup>1)</sup> Ich fühle aber bezüglich der Arithmetik immer etwas, was Green bezüglich der Analysis aus-

1) Erfreulicherweise ist diese Voraussage nicht eingetroffen. Vgl. Vorlesung XIX, welche die von Prot. E. W. Morley für den Fall von sieben miteinander verbundenen Massen, der in der neunten Vorlesung vorgeschlagen ist, durchgeführte numerische Berechnung enthält.

gesprochen hat, nämlich mich von Formeln nicht eher befriedigt, als bis ich eine Vorstellung von ihrer zahlenmäßigen Größe gewonnen habe — wenigstens wenn die Formeln sich auf dynamische oder physikalische Probleme beziehen. Demnach möchte ich, wenn ich die Ausdrücke auch nicht genau berechne, doch wissen, wie ich sie berechnen könnte und die Werthhöhe der durch sie dargestellten Größen ausdrücken. Sie sollen also sehen, daß wir die Möglichkeit dazu haben. Zunächst ist die außerordentlich schnelle Konvergenz der Formeln zu beachten. Die Aufgabe ist,  $\frac{c_1 \xi}{-x_1}$  zu finden; alles, was man sucht, hängt von dieser Größe ab. Da  $u_2$  groß ist, hat man bis auf eine kleine Korrektur  $u_1$  gleich  $a_1$ , ähnlich  $u_2 = a_2$  mit einer kleinen Korrektur usf., so daß zwei oder drei Glieder des Kettenbruchs für die Berechnung des mit  $u_1$  bezeichneten Verhältnisses ausreichen. Die Kettenbrüche konvergieren bei den von uns gemachten Voraussetzungen enorm schnell. So kennen wir den Betrag des Differentialkoeffizienten  $\frac{du_1}{d(\tau^{-2})}$  und vermögen einige Werte von  $u_1$  zu erhalten, indem wir mit Beträgen in der Nähe von Null beginnen. Dann verfahren wir in der gewöhnlichen Weise, denn die Kenntnis des Wertes des Differentialkoeffizienten ermöglicht es uns, die Anzahl der Versuche, die wir zur Auffindung einer Wurzel zu machen haben, sehr klein zu halten. Diese Auffindung geschieht aber vollkommen analog dem Newtonschen Verfahren, die Wurzeln einer algebraischen Gleichung zu ermitteln; und ich kann Ihnen nur sagen, daß das Verfahren in jedem besonderen Falle auch bequem genug ist.

Ich möchte meinen, etwas wie ein arithmetisches Laboratorium in Verbindung mit klassenweise fortschreitender Belehrung, wobei die Studenten mit Aufgaben dieser Art beschäftigt würden, wäre recht vorteilhaft, einerseits wegen der Ergebnisse selbst, andererseits damit die Schüler Gewandtheit im Rechnen erlangen.

Ich habe schon im Anfang auf die Anschauungsweise hingedeutet, die ich mir über die mit dem lichtführenden Äther verbundenen Molekeln, die dessen Bewegung durch ihre Trägheit beeinflussen, bilden möchte. Inzwischen finde ich, daß Lord Rayleigh in sehr deutlicher Weise den ersten Hinweis für die Erklärung der anormalen Dispersion tatsächlich gegeben hat. Ich will eine kleine Stelle aus seiner Abhandlung über die Spiegelung und Brechung von Licht an stark undurchsichtiger Materie wörtlich vorlesen (Phil. Mag., May 1872). Er beginnt: „Ich glaube, die allgemeine Ansicht geht dahin, daß eine befriedigende mechanische Theorie der Spiegelung von Licht an metallischen Flächen durch Cauchy gegeben ist, und daß seine Formeln sehr gut mit der Beobachtung übereinstimmen. Aber eine neuere Prüfung des Gegenstandes hat mich überzeugt, daß, wenigstens in dem Falle von Bewegungen, die in der Einfallsebene vor sich gehen, seine Theorie unrichtig und die für jene Theorie angeführte Übereinstimmung mit den Tatsachen illusorisch ist und auf der Annahme unzulässiger Werte für die willkürlichen Konstanten beruht. Cauchy hat, wie er es gewohnt war, nie irgendeine Ableitung seiner Formeln veröffentlicht, sich vielmehr mit einer Feststellung der Resultate und der Prinzipien, von denen er ausgegangen ist, begnügt. Die Zwischenrechnung ist aber sehr knapp mit einem Aufgebot von Analysis von Eisenlohr (Pogg. Ann., Bd. CIV, S. 368) gegeben worden, der es

auch versucht hat, die Konstanten auf Grund der von Jamin ausgeführten Messungen zu bestimmen. Ich beabsichtige, in der vorliegenden Mitteilung die Theorie der Reflexion an dicken Metallplatten zu prüfen und dann einige Bemerkungen über die Wirkung des Lichtes an dünnen metallischen Schichten zu machen, einen Gegenstand, der von Quincke experimentell behandelt wurde.“

„Die Besonderheit in dem Verhalten von Metallen gegenüber dem Lichte liegt nach der Voraussetzung von Cauchy in ihrer Undurchsichtigkeit, die bewirkt, daß ein Wellenzug aufgehalten wird, ehe er mehr als einige wenige Wellenlängen in dem Medium fortschreitet. Es kann kaum bezweifelt werden, daß Cauchy mit dieser Annahme vollkommen recht hat; denn man bemerkt, daß Körper, die, wie manche Farben, eine stark selektive Absorption auf Licht ausüben, an ihren Oberflächen in hohem Maße gerade die Strahlen reflektieren, für die sie besonders undurchsichtig sind. Übergangsaures Kali ist ein von Prof. Stokes angeführtes schönes Beispiel hierfür. Er hat gefunden (Phil. Mag. Vol. VI, S. 203), daß, wenn Licht, das an einem Kristall unter dem Polarisationswinkel reflektiert ist, mit einem Nicol untersucht wird, der so gedreht ist, daß die in der Einfallsebene polarisierten Strahlen ausgelöscht werden, das übriggeliebene Licht grün ist; und daß, wenn dieses Licht durch ein Prisma zerlegt wird, es genau dort helle Banden zeigt, wo das Absorptionsspektrum dunkle besitzt. Dieser sehr instruktive Versuch kann leicht unter Benutzung von Sonnenlicht wiederholt werden, indem man anstatt eines Kristalles eine mit etwas pulverisiertem Salze bestreute Mattglasscheibe benutzt, die dann mit einem Glasstöpsel oder sonstwie gut verrieben und gut verschliffen wird. Der Versuch kann so angeordnet werden, daß die beiden Spektren durch denselben Spalt, eines über dem andern gesehen und miteinander verglichen werden können.“

„Mit Rücksicht auf die chromatischen Änderungen wäre die Annahme als natürlichste erschienen, daß die Undurchsichtigkeit sich in einer willkürlichen Weise mit der Wellenlänge ändern möchte, während die optische Dichte (von der allein im gewöhnlichen Sinne die Brechung abhängt) konstant bleibt, oder doch nur Gegenstand derselben Art Änderungen ist, wie sie auch in durchsichtigen Medien vorkommen. Das Aussehen der Frage hat sich aber sachlich durch die Beobachtungen von Christiansen und Kundt (Pogg. Ann. Bde. CXXI, CXLIII, CXLIV) über die anomale Dispersion in Fuchsin und andern Farbstoffen, geändert. Diese zeigen nämlich, daß zu beiden Seiten eines Absorptionsstreifens eine abnorme Änderung der Brechbarkeit (wie sie durch prismatische Ablenkung bestimmt wird) von der Art auftritt, daß die Brechung unterhalb (d. h. nach der roten Seite hin) wächst und oberhalb abnimmt. Eine Analogie hierfür kann in der Abstoßung zwischen zwei Perioden gefunden werden, die häufig in schwingenden Systemen auftritt. Die Wirkung eines Pendels, das an einem in horizontaler Schwingung begriffenen Körper aufgehängt ist, besteht darin, die virtuelle Trägheit der schwingenden Masse zu erhöhen oder zu erniedrigen; je nachdem die natürliche Periode des Pendels kürzer oder länger als die seines Aufhängungspunktes ist. Dabei kann man sagen, daß, wenn der Aufhängungspunkt schneller zu schwingen strebt als das Pendel, er durch letzteres veranlaßt wird, noch schneller zu laufen und vice versa“. — Was im nächsten Satz folgt, verstehe ich absolut nicht. Es ist recht schwer, Meinungen von Schriftstellern, die über abstruse Gegenstände

schreiben, wiederzugeben. Ja, unter Umständen ist es unmöglich, aus den Worten den richtigen Sinn herauszulesen; nur durch Kenntnis des Gegenstandes findet man ihn. — Rayleigh sagt weiter: „Unterhalb des Absorptionsstreifens ist die Schwingung der Materie naturgemäß höher und demnach besteht die Wirkung der verbundenen Materie darin, die virtuelle Trägheit des benachbarten Äthers und demnach das Brechungsvermögen<sup>1)</sup> (abnorm) zu steigern. Auf der andern Seite ist der Effekt der umgekehrte“. Dann folgt eine Anmerkung „siehe Sellmeier, Pogg. Ann., Bd. CXLIII, S. 272“. So geht Lord Rayleigh auf Sellmeier zurück, und ich nehme an, dieser ist der Vater aller solcher Anschauungen. „Es wäre schwierig, die Wichtigkeit dieser Tatsachen vom Standpunkte der theoretischen Optik aus zu hoch zu veranschlagen, jedoch liegen sie zu weit von dem Gegenstande der vorliegenden Abhandlung entfernt, um weiter auf die Frage einzugehen.“

Hier findet sich also die erste klare Darstellung, die ich gesehen habe. Prof. Rowland war so freundlich, mir diese Abhandlungen Lord Rayleighs zu verschaffen. Ich bin ihm sehr dankbar und ebenso vielen von Ihnen für ihre Mühewaltung. Es ist mir eine immense Zahl von Büchern gebracht worden, in deren jedem ich manches sehr Wichtige gefunden habe.

Sellmeier, Lord Rayleigh, Helmholtz und Lommel, das scheint mir die historische Reihenfolge zu sein. Lommel erwähnt Helmholtz nicht. Ich bin darüber sehr verwundert; denn Lommel kommt drei oder vier Jahre nach Helmholtz: 1874 und 1878 sind die betreffenden Daten. Lommels Abhandlung ist in den von Helmholtz mit redigierten Ann. der Physik und Chemie, 1878, Bd. III, S. 339 veröffentlicht. Die Abhandlung von Helmholtz ist hervorragend. Lommel dringt noch weiter in den Gegenstand ein; er hat die Schwingungen verbundener Materie zur Erklärung der gewöhnlichen Dispersion ausgearbeitet.

Ich habe erst heute vormittag gefunden, daß Lommel (Ann. d. Phys. u. Chem. 1878, Bd. IV, S. 55) auch auf die Doppelbrechung des Lichtes in Kristallen eingeht — die eigentliche Aufgabe, mit der ich mir den Kopf zerbreche. Er ist mit seiner Lösung zufrieden, ich halte sie hingegen keineswegs für zufriedenstellend. Es ist die Anschauung, die ich lange Zeit gehabt habe, ohne daß ich sie für ausreichend zu erkennen vermocht hätte; jetzt sehe ich auch Grund dafür, daß diese Anschauung nicht befriedigt. Er geht von ihr aus und erhält freilich eine Gleichung, die angenähert die Huyghenssche Fläche liefert. Ich habe nicht Zeit gehabt festzustellen, wie weit die Übereinstimmung geht. Doch glaube ich, daß die Gleichung von der Huyghensschen Wellenfläche merklich so weit absteht, als nach Stokes' experimentellem Nachweis die Theorie von Rankine, nach der die optische Äolotropie mit einer Verschiedenheit der Trägheit in verschiedenen Richtungen erklärt werden sollte, sich von der Erfahrung entfernt. Der ausnehmend enge Anschluß der Huyghensschen Fläche an die Tatsachen des von Stokes untersuchten Falles gräbt einer großen Anzahl sehr verführerischer Versuche, die Doppelbrechung zu erklären, den Grund ab.

1) Im nächsten Satz ist the refrangibility (die Brechbarkeit) zu ersetzen durch its refractivity (sein Brechungsvermögen). W. Th., 1892, Febr. 9.



## Achte Vorlesung.

### Drillungswellen. Verbreitung aus Hin- und Herschwingung.

#### a) Molar.

Wir wollen einige fundamentale Lösungen für die Wellenbewegung, wie wir sie bereits vor uns haben, wieder aufnehmen, jedoch nunmehr für nicht pressende Drillungswellen anstatt für Pressungswellen. Wir können unsere ursprüngliche Lösung in der Form  $\Phi = \frac{1}{r} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (r - ct)$  beibehalten, wo  $c = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}n}{\rho}}$  ist, wenn die Welle eine durch Pressung, und  $c = \sqrt{\frac{n}{\rho}}$  ist, wenn sie eine Drillungswelle ist. Für eine Drillungswelle muß aber ferner sein  $\delta = 0$ .

Zunächst wissen wir, wenn unser Wert von  $c$  ist  $\sqrt{\frac{n}{\rho}}$ , daß  $\Phi$  der Gleichung  $\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = n \nabla^2 \Phi$  genügt. Dazu haben wir die Bedingungen, die von den drei Komponenten der Verschiebung  $\xi, \eta, \zeta$  einer Drillungswelle zu erfüllen sind,

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = n \nabla^2 \xi, \quad \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = n \nabla^2 \eta, \quad \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = n \nabla^2 \zeta,$$

und außerdem

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

So müssen  $\xi, \eta, \zeta$  drei Funktionen sein, die sämtlich die nämliche Gleichung befriedigen. Durch die Funktionen  $\Phi$  wird nun diese Gleichung erfüllt; und wenn wir eine Lösung haben, können wir aus dieser weitere Lösungen durch Differenzieren erhalten. Wir wollen zusehen, ob wir aus diesem Werte von  $\Phi$  drei Lösungen ableiten können, die auch die Kontinuitätsgleichung befriedigen. Es ist hier nicht meine Aufgabe, in eine analytische Untersuchung solcher Lösungen einzudringen; ich will Ihnen nur Lösungen vorführen, die von fundamentalem Interesse sind. Ohne sie weiter einzuleiten, will ich Ihnen eine und eine andere mitteilen und dann beide deuten.

Nehmen wir beispielsweise die folgende, die offenbar die Gleichung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

erfüllt:

$$\xi = 0, \quad \eta = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

In jedem Falle sind es nur die in weiter Entfernung (vom Oszillations-  
Kelvin-Weinstein, Molekulardynamik.

ursprung) wirksamen Glieder der Lösung, die wir zu kennen wünschen. Es wird nun

$$\eta = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{z}{r^2} \cos q; \quad \xi = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y}{r^2} \cos q.$$

Man bemerke, daß nach dieser Lösung die Verschiebung in (größerer) Entfernung von der Quelle senkrecht zum Radiusvector ist, denn wir haben

$$x\xi + y\eta + z\xi = -y \frac{\partial \Phi}{\partial z} + z \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

Ehe wir dies weiter verfolgen, ist es zweckmäßig, die Rotation zu finden. Wir gewinnen damit einen vorteilhaften Weg, die Schwingungsrichtung in drillenden Verschiebungen zu ermitteln. Die Rotationen um die Achsen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sind

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) &= -\frac{2\pi^2}{\lambda^2} \frac{y^2 + z^2}{r^3} \sin q; \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) &= \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \frac{xy}{r^3} \sin q; \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) &= \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \frac{xz}{r^3} \sin q. \end{aligned}$$

Diese Rotationen sind also proportional:  $\frac{x^2}{r^3} - \frac{1}{r}$ ,  $\frac{xy}{r^3}$ ,  $\frac{xz}{r^3}$ ; d. h. neben einer  $x$ -Komponente, die gleich  $-\frac{1}{r}$  ist, haben wir eine  $r$ -Komponente gleich  $\frac{x}{r^2}$ . Also besteht eine Rotation um den Radiusvector  $r$  und eine Rotation um die  $x$ -Achse, die Größen dieser sind proportional  $\frac{x}{r^2}$  und  $\frac{1}{r}$ .

Wenn Sie weiter über die Natur des Gegenstandes nachdenken, sehen Sie, daß es sich um folgendes handelt: eine Kugel oder ein kleiner Körper im Anfangspunkt ist in eine rotierende schwingende Bewegung versetzt um  $Ox$  als Achse. Man findet dann überall drehende Schwingungen; und das Licht wird überall in Ebenen polarisiert sein, die durch  $Ox$  gehen. Die Schwingungen werden überall senkrecht zu der durch  $Ox$  gehenden Radialebene sein.

Wenden wir uns nämlich zu den Lösungen zurück, so war angenähert

$$\xi = 0, \quad \eta = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{z}{r^2} \cos q; \quad \xi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y}{r^2} \cos q.$$

Demnach sind die Verschiebungen Null für  $y = 0$ ,  $z = 0$ , und wir haben also in der Achse der  $x$  keine Schwingungen. Überall sonst sind die Verschiebungen nicht Null und geschehen senkrecht zu  $Ox$  (da stets  $\xi = 0$  ist); und da sie ebenso zum Radiusvector senkrecht erfolgen, sind sie senkrecht zu der durch die  $x$ -Achse gehenden Radialebene. Alles der obigen Angabe entsprechend.



Fig. 16.

Betrachten wir den Stand der Dinge in der  $yz$ -Ebene. Nehmen wir an, wir haben hier einen kleinen Körper im Ursprunge oder dem Mittelpunkt der Störung, der zu einer Drehung vorwärts oder rückwärts in der in der Zeichnung (Fig. 16) angedeuteten Weise (die eine Drehung um eine zur Ebene der Zeichnung senkrechte Achse darstellt) in einer gegebenen Periode

veranlaßt ist. Was gibt das für ein Resultat? Es werden nach allen Richtungen Wellen von der Quelle aus fortschreiten und die Schnitte der Wellenfronten mit der Ebene der Zeichnung ( $yz$ ) werden Kreise sein. Wir werden Schwingungen senkrecht zum Radiusvector haben, und zwar von der Größe  $\frac{2\pi}{\lambda} \cos q$ , die in allen Richtungen dieselbe ist. Die Drehung (die molekulare Drehung um die  $x$ -Achse oder in der  $yz$ -Ebene) ist  $\frac{2\pi^2}{\lambda^2} \sin q$ . Die Verschiebung wird demgemäß dort Null sein, wo die Drehung oder Drillung ein (positives oder negatives) Maximum ist; und umgekehrt findet sich an der Stelle eines Maximums der (positiven und negativen) Verschiebung die Drehung oder die Drillung Null. Die Rotation ist offenbar der Hälfte der Drillung in der  $yz$ -Ebene gleich, die durch die Scherung (oder Differentialbewegung) unendlich kleiner, zu  $r$  senkrechter Ebenen senkrecht zu  $rx$  hervorgerufen wird. Das Resultat ist polarisiertes Licht, das aus Schwingungen in der  $yz$ -Ebene besteht, die senkrecht zum Radiusvector sind; und demnach ist die Polarisationssebene die Radialebene durch  $OX$ .

Hier haben wir eine einfache Quelle polarisierten Lichtes; es ist die einfachste Form der Polarisation und die einfachste Quelle, die wir uns vorstellen können. Jedes mögliche Licht könnte bestehen aus Folgen von Licht aus solchen einfachsten Quellen. Ist es nun wahrscheinlich, daß die Stöße, denen die Partikel im elektrischen Lichte, im Feuer oder in sonst irgend-einer der gewöhnlichen Lichtquellen ausgesetzt sind, eine Folge dieser Art von Schwingungen hervorrufen? Nein, jedenfalls nicht sehr wahrscheinlich; denn es kann in diesen Stößen oder Zusammenstößen keine starke Neigung bestehen, rotatorische Schwingungen der groben Molekeln zu erzeugen. Wir können dies ja willkürlich tun, denn wir können mit dem Teilchen machen, was wir wollen. Dieses Vorrecht ist mir in der vorigen Woche in Philadelphia zugefallen; ich konnte dort solche Schwingungen zeigen, da mir ein großer Klumpen Gallerte mit einer Kugel in ihrer Mitte zur Verfügung stand. Ich meine, Sie werden es interessant finden, selbst den Versuch zu wiederholen. Sie können dann die Schwingungen, von denen wir sprechen, beobachten. Ich wollte, ich vermöchte Ihnen gerade jetzt den Versuch zu zeigen. Sie würden dann die Idee verwirklicht sehen und damit viel Gehirnarbeit sparen.

Ich hatte eine große Glasschale ganz mit gelblich durchsichtiger Gallerte gefüllt, und ein rot angestrichener Holzhall schwamm in der Mitte. Fig. 17 stellt die Anordnung dar. Ahmen Sie den Versuch nach, so legen Sie Ihre Hand an den Ball und geben Sie ihm eine drehende Bewegung um seinen vertikalen Durchmesser, so erhalten Sie genau die durch unsere Gleichungen dargestellte Art der Bewegung. Die Bewegung in irgendeiner schrägen Richtung, wie in einer durch den Punkt  $P(x, y, z)$ , Fig. 17, gehenden stellt die von polarisiertem Lichte dar, das senkrecht zur Radialebene (oder im Versuch senkrecht zu der durch die vertikale zentrale Achse gehenden Ebene) schwingt. Die Amplitude der Schwingung ist hier (in der vertikalen zentralen Achse) Null; an der Oberfläche (in der  $yz$ -Ebene) ist sie  $\frac{2\pi}{\lambda} \cos q$ ; und wenn wir Polarkoordinaten einführen und dabei die Poldistanz (wie in der Zeichnung angegeben)

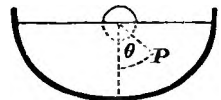


Fig. 17.

mit  $\theta$  bezeichnen, dann ist die Amplitude hier (bei  $P$ )  $\frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{r} \cos \theta \sin \theta$ , was in den vorigen Ausdruck übergeht, wenn  $\theta$  zu einem rechten Winkel anwächst.

Ich habe gesagt, daß dies die einfachste Quelle und das einfachste System polarisierten Lichtes sei, das man sich vorstellen kann. Es vermöchte aber kaum auf natürliche Weise zustande zu kommen. Die nächst einfache Quelle ist eine Kugel oder ein kleiner Körper, der in einer Geraden hin und her schwingt. Wir wollen jetzt für diesen Fall die Lösung suchen, obwohl wir uns noch nicht zu der wesentlich zusammengesetzten Schwingung emporgearbeitet haben, die von dem einfachsten natürlich schwingenden Körper hervorgerufen wird, nämlich einem solchen mit unbewegtem Trägheitsmittelpunkte. Ich lege meine Hand an und gebe der Kugel in der Gallerte nicht drehende Bewegungen, wie wir betrachtet haben, sondern vertikale Oszillationen (und dies bildet eine sehr gute Abänderung des Versuches). Dann wird jeder sagen: „O, es bildet sich die natürliche Schwingungszeit aus, wenn ich die Kugel nur sich selbst überlasse“, sie schwingt dann in der Gallerte auf und nieder. Indessen ist zunächst der Fall nicht geeignet zur Veranschaulichung wellenförmiger Schwingungen, die sich von einem Mittelpunkte ausbreiten. Man wird hier ebenso durch die zurückkehrende Reflexion an der die Gallerte enthaltenden Schale gestört wie bei den Versuchen mit einem gespannten Seil zur Vorführung der entlang laufenden Wellen durch den Umstand, daß das Seil nicht unendlich lang ist. Immerhin kann man hier wenigstens Reihen von Schwingungen das Seil entlang laufen und von den Enden reflektiert sehen. Bei dem Versuch mit der Gallerte in der Schale hingegen sieht man überhaupt keine fortschreitende Welle, da der Abstand der Grenzfläche im Vergleich zur Wellenlänge nicht groß genug ist. Und was man sieht, ist nur ein gewisser Satz von stehenden Schwingungen, eben infolge der Begrenztheit der Schale. Stellen wir uns aber vor, die Schale sei unendlich groß und daß man anfängt, tordierende Schwingungen herzustellen, was wird dann eintreten? Eine Ausbreitung dieser Art von Schwingungen nach außen mit einem, wie wir sehen werden, plötzlichen Anfang und einem plötzlichen Ende, wenn die Bewegung der Quelle plötzlich beginnt und plötzlich aufhört<sup>1)</sup>, und zwar immer dann, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge unabhängig ist.

Wenn wir die Hand anlegen und die Kugel diese Torsionsschwingungen auszuführen zwingen, erhalten wir von ihr ausgehende Wellen; wenn wir sie aber sich selbst überlassen, besitzt sie überhaupt keine schwingende Energie mehr außer derjenigen der geringen Winkelgeschwindigkeit, mit der wir sie verlassen haben. Ein schwingender Körper nämlich muß, wenn er eine Folge von Impulsen soll aussenden können, unabhängig davon, daß er zu schwingen von außen gezwungen wird, die Fähigkeit besitzen, in sich selbst potentielle Energie in kinetische umzuwandeln. Eine Stimmgabel, eine Glocke sind Beispiele solcher Vibratoren für Schall. Das einfachste Beispiel eines Vibrators, den wir zur Darstellung des Ursprunges einer unabhängigen Folge von Lichtwellen ersinnen können, mag einer Stimmgabel ähnlich sein. Zwei

1) Dies ist tatsächlich durch die in der vierten Vorlesung durch (14) in Gliedern einer willkürlichen Funktion dargestellte Lösung bewiesen.

durch eine Feder miteinander verbundene Körper würden mehr symmetrisch sein als eine Stimmgabel. Zwei starre, durch eine Feder miteinander verbundene Kugeln — das gibt uns etwa eine Vorstellung; oder (dies würde noch eine Schwingung derselben Art sein) ein elastischer sphärischer Körper, der dadurch schwingt, daß man ihn in eine ovale Form gezwungen und dann sich selbst überlassen hat.

Ich werde sofort eine Schwingungsreihe untersuchen, die durch einen Mustervibrator in einem elastischen Festkörper hervorgerufen wird. Aber nehmen wir an, wir rufen in unserem aus Gallerte bestehenden elastischen Festkörper dadurch Schwingungen hervor, daß wir die Kugel anfassen und sie horizontal hin und her oder auch vertikal auf und ab bewegen, und stellen uns die Schwingungsarten vor, die dadurch in der Umgebung entstehen würden. Wir durchschauen sie leicht, wenn wir sie in Verbindung mit den Formeln betrachten, und finden dann, daß sie in der Tat die Schwingungsart abgeben, die im Äther von der starren sphärischen einschließenden Schale unserer zusammengesetzten Molekel (Vorlesg. II) erzeugt wird. Oder denken wir an die Schwingungen, die von dem Vibrator höherer, jedoch einfacherer Ordnung, für den wir als Beispiel eine sehr dichte elastische Kugel angenommen haben, die periodisch aus einer verlängerten in eine abgeplattete Form schwingt, ausgesandt werden. Es mögen auch jene vorbehandelten Torsionsschwingungen vorhanden sein, das gäbe alle möglichen Schwingungen im Äther. Aber unter allen möglichen Atomschwingungen in dem Gewirr und Geklirr von Atomen, das in einer Flamme oder einer andern Lichtquelle vorhanden ist, dürfte meines Erachtens ein nicht seltener Fall der sein, von dem ich jetzt sprechen will. Er besteht aus entgegengesetzten Torsionsschwingungen an den beiden Enden einer länglichen Masse. Um unsere Vorstellung zu vereinfachen, denken wir uns zwei Kugeln, die durch eine schraubenartige Feder miteinander verbunden sind; wir drillen sie in entgegengesetzten Richtungen und überlassen sie dann sich selbst. So haben wir abermals eine mögliche Quelle für Schwingungen. Wenn in einem von unsern Beispielen die potentielle Energie der Feder groß ist im Vergleich zu der in tausend oder hunderttausend Schwingungen fortgeführten Energie, erhalten wir eine nahezu gleichförmige Folge von Schwingungen von der Art, wie wir sie betrachtet haben, die aber allmählich vergehen.

Jede einzelne der beiden Kugeln ruft Licht von der Intensität Null in der Achse und von einer Maximalintensität in der Äquatorialebene hervor. Da aber beide in entgegengesetztem Sinne schwingen, wird die Lichtintensität sowohl in der Achse als auch in ihrer gemeinsamen Äquatorialebene Null sein; man wird also von der Null in der Äquatorialebene zu einem Maximum zwischen der Äquatorialebene und den Polen und dann zur Null an den Polen übergehen, und man findet in den beiden Halbräumen entgegengesetzte Schwingungen. Dies bildet also ebenfalls einen möglichen Fall von Schwingungen polarisierten Lichtes, das sich von einem möglichen unabhängigen Vibrator aus ausbreitet.

In allen bisher behandelten Fällen (mit Ausnahme des Falles der in der Gallerte als Ganzes schwingenden Kugel) und ebenso in dem Falle unserer angenommenen zusammengesetzten Molekel (erste Vorlesung) ist zu beachten, daß der Schwerpunkt des Vibrators in Ruhe verharrt — abgesehen von der vergleichsweise kleinen Reaktion des Äthers auf ihn; dies ist aber wesent-

lich für einen unabhängig wirkenden Vibrator. Der Vibrator muß potentielle Energie für viele tausend Schwingungen in sich selbst besitzen, die nach außen durch den Äther eilende Wellen erzeugen; und sein Schwerpunkt muß also in Ruhe verharren, abgesehen von der kleinen Bewegung, die die Reaktion des Mediums auf ihn verursacht.

Nun nehmen wir also eine in der Achse hin und her gehende Schwingung. Ich schreibe die Lösung gleich hin, nämlich

$$\xi = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \eta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}; \quad \zeta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x};$$

dabei ist  $\Phi$  unser alter Freund

$$\Phi = \frac{1}{r} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( r - t \sqrt{\frac{n}{\rho}} \right),$$

jedoch mit dem Unterschiede, daß wir jetzt  $n$  an Stelle von  $k + \frac{4}{3}n$  haben, welche Größe in dem Ausdruck vorkam, als wir uns mit Pressungswellen beschäftigten. Zunächst beachten wir, daß die Gleichungen

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = n \nabla^2 \xi \text{ usw.}$$

befriedigt sind, da  $\Phi$  und alle Differentialquotienten dieser Funktion dieser Beziehung genügen. Demnach haben wir nur noch zu beweisen, daß auch die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist. Ich will diesen Beweis jedoch nicht bloß führen, ich will Ihnen vielmehr helfen, die Lösung sich zu eignen zu machen, indem ich Ihnen zeige, wie ich sie gefunden habe. In der befolgten Methode liegt vielleicht nichts Neues. Ich bildete sie aus, als ich versuchte, mir die Stokesche Erklärung für die Bläue des Himmels zu erläutern. Später habe ich bemerkt, daß Lord Rayleigh in den Gegenstand tiefer einge-  
drungen ist als Stokes und habe seine Arbeit darüber gelesen.

Der Weg, auf dem ich die Lösung gefunden habe, war der folgende:  
 $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  ist offenbar das Verschiebungspotential für eine elastische Flüssigkeit, die einen eingesenkten, längs der  $x$ -Achse sich hin und her bewegenden Körper enthält. Wir haben diese Lösung schon behandelt, als es sich um die Ausbreitung von Schall in Luft oder einer andern kompressiblen Flüssigkeit handelte, und wir möchten sie auch für den jetzigen Fall der Verbreitung von Licht benutzen, indem wir nur statt  $k + \frac{4}{3}n$  ansetzen  $n$ . Die Differentialquotienten  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  von  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  wären dann die gesuchten Verschiebungen.

Allein, weder sie noch die Differentialkoeffizienten überhaupt irgend-einer Funktion können einfach den Verschiebungskomponenten unserer Aufgabe, bei der die Bewegung ihrem Wesen nach eine rotierende ist, gleich sein. Die nicht rotierenden Verschiebungen in der Aufgabe über die Pressungswellen sind Verschiebungen, die wohl gewisse Bedingungen unserer Aufgabe erfüllen: sie erfüllen aber nicht die Bedingung, eine rein drillende Welle zu geben, wenn wir nicht ein Glied oder Glieder hinzufügen, die die Dilatation zum Verschwinden bringen. Dies ist aber tatsächlich, wie ich fand, geleistet

durch Hinzufügung der sphärischen symmetrischen Funktion  $\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \Phi$  zu  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$  für die  $x$ -Komponente der Verschiebung. Beachten wir jetzt die Dilatation! Es ist

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \Phi.$$

Hierin können wir für  $\Phi$  auch  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  setzen. So bekommen wir

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Und daraus folgt mit den angenommenen Werten für  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  sofort

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

So haben wir eine Lösung aufgestellt, die der Bedingung genügt, daß keinerlei Kontraktion oder Dilatation stattfindet und daß sie symmetrisch um die  $x$ -Achse ist.

Ziehen wir zunächst nur die in großem Abstände maßgebenden Glieder in Betracht, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{r^2 - x^2}{r^3} \sin q, \\ \eta &= -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{xy}{r^3} \sin q, \\ \zeta &= -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{xz}{r^3} \sin q. \end{aligned}$$

Es ist leicht festzustellen, daß diese Verschiebungen senkrecht zum Radiusvector vor sich gehen, d. h., daß ist  $x\xi + y\eta + z\zeta = 0$ . Betrachten wir den Fall zunächst in der  $x$ -Achse und dann in der  $yz$ -Ebene. In der  $x$ -Achse ist  $y = 0$ ,  $z = 0$ , also wird  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ ,  $\zeta = 0$ . Demnach besteht in Richtung der  $x$ -Achse keine Bewegung. Dies wirkt erst etwas überraschend, allein es ist eine offenbar notwendige Folgerung aus der grundlegenden Annahme. Veranlassen wir eine Kugel in einem elastischen Festkörper hin und her zu schwingen, so haben gerade an der Oberfläche der Kugel die Punkte, in denen sie von  $Ox$  geschnitten wird, die größte Bewegung; und an der ganzen Oberfläche der Kugel wird das Medium, der Annahme nach, mit der Kugel hin- und hergezogen. Aber dies ist noch keine Lösung für diese vergleichsweise komplexe, wenn auch nicht schwierige Aufgabe. Nur die Partikel in der  $x$ -Achse bewegen sich direkt dem Radiusvector entlang nach außen und innen; alle Partikeln außerhalb der  $x$ -Achse gleiten an der Kugel entlang, also mit Bewegungen, die gegen den Radiusvector schräg sind; die Partikeln in der  $yz$ -Ebene bewegen sich dabei genau senkrecht zum Radiusvector. Und nun werden alle Bewegungen, außer den zum Radiusvector senkrechten, in Abständen, die im Vergleich zur Wellenlänge sehr groß sind, unmerklich. Das ist aber der Fall, mit dem wir uns beschäftigen, denn wir haben einfach nur die wichtigsten Glieder der Lösung beibehalten, und diese stellen die Bewegung in großen Entfernungen dar, vollkommen ohne Rücksicht auf die Gestalt des Körpers und auf die vergleichsweise komplizierten Vorgänge in seiner unmittelbaren Umgebung.

Nehmen wir jetzt  $x=0$  an und beachten die Bewegungen in der  $yz$ -Ebene! Es ist dabei vorausgesetzt, daß der Vibrator senkrecht zu dieser Ebene schwingt. Wir haben

$$\xi = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{1}{r} \sin q, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Was besagt dies? Offenbar, daß die Schwingungen senkrecht zur  $yz$ -Ebene sind. Wir haben die Welle vor uns, die sich in dieser Ebene gleichförmig nach allen Richtungen ausbreitet und „in dieser Ebene polarisiert“ ist, da ja die Schwingungen zu ihr senkrecht sind. Das ist genau das, was Stokes als notwendig für die mechanische Theorie der Himmelsbläue vorausgesetzt hat. Lord Rayleigh hat gezeigt, daß dies nicht auf der Hand liegt, wie es von Stokes angenommen ist. Er hat die Frage eingehend untersucht, „Rührt die Bläue des Himmels (von der wir annehmen, daß sie durch Partikeln in der Luft verursacht wird) von Partikeln her, die eine andre Dichte als der umgebende lichtführende Äther oder eine andre Starrheit als dieser umgebende Äther besitzen?“ Die Frage ist tatsächlich die: Wenn die Partikeln aus Wasser bestehen, welches ist die Theorie von Lichtwellen in Wasser; unterscheidet sich Wasser von Luft dadurch, daß es, entsprechend seiner eigenen größeren Dichtigkeit, auch dem Äther in ihm eine größere Dichte bei der nämlichen wirksamen Starrheit verleiht; oder läßt es diese Dichte des Äthers in ihm gegen die des Äthers in der Luft unverändert, aber gibt diesem Äther eine geringere wirksame Starrheit; oder unterscheidet sich der Äther in ihm von dem in der Luft sowohl in der Dichte als auch in der Starrheit?

Lord Rayleigh untersucht diese Frage sehr eingehend und findet, daß, wenn die Ursache der Himmelsbläue in den kleinen Wasserkügelchen liegt, und wenn beim Durchgang von Licht durch Wasser die Fortpflanzung langsamer als in Luft ist, man, bei der Annahme geringerer Starrheit des Äthers und gleicher Dichte, für die Polarisation des Himmels ganz anders zu erwarten hat, als bei gleicher Starrheit und verschiedener Dichte folgt. Andererseits stützt die beobachtete Polarisation (soweit die Unsicherheit der experimentellen Daten uns ein Urteil erlaubt) die letztere Annahme, daß die Partikeln, gleichviel ob sie Wasserpartikel oder Staubeilchen oder was auch immer sein mögen, so wirken, als ob sie kleine Portionen des lichtführenden Äthers von größerer Dichte und nicht von andrer Starrheit als der umgebende Äther wären. Demnach gewinnt unsere Lösung, die für uns ein besonderes Interesse hat, da sie den Ausdruck der Störung bildet, die im Äther von unserer eingesenkten Federmolekel hervorgerufen wird, noch ein weiteres und tieferes Interesse, da sie zugleich die Lösung für die mechanische Wirkung ist, die nach Stokes und Rayleigh die Grundursache des vom Himmel ausgehenden blauen Lichtes ist. Ich will in einer späteren Vorlesung Ihre Aufmerksamkeit noch etwas mehr auf Lord Rayleighs Mechanik der Himmelsbläue lenken. Inzwischen wollen wir, zu unserer Lösung zurückkehrend, noch einmal nach  $x$  differenzieren, um eine Funktionsform zu bekommen, die geeignet ist, die von einem doppelten Vibrator ausgehende Bewegung darzustellen, von der Art, wie ich sie hier vorführe — indem ich meine Hände gegeneinander hin und voneinander fort schwingen lasse. Dann erhalten wir eine Lösung, die eine andre wichtige Art einer einzelnen Folge von Schwingungen ausdrückt, deren Vielheit das ganze oder einen großen Teil des Lichtes einer beliebigen gewöhnlichen Quelle ausmacht.



Eine Frage drängt sich jetzt uns auf, -- welches ist die Geschwindigkeit einer Wellengruppe in dem durch gewöhnliche Materie gestörten Lichtäther? Bei einer konstanten Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wie im reinen Äther, bleibt jede Gruppe ungeändert. Aber wie steht es um die Fortpflanzung von Lichtfolgen in einem durchsichtigen Medium, wie Glas? Dies ist eine Frage, die leichter gestellt als beantwortet ist. Wir haben die Pflicht, sie sorgfältiger zu betrachten, und ich zweifle nicht, daß wir einen Weg zur Beantwortung finden werden, wenn wir etwas mehr Geduld mit unserm mechanischen Problem haben<sup>1)</sup>.

### b) Molekular.

Hier ist eine vollkommen parallele Aufgabe. Wir beginnen damit, unserem System von Partikeln  $m_1, m_2, \dots, m_j$ , die den Teil einer Molekel bilden, mittels des Handgriffes  $P$  plötzlich eine einfache harmonische Bewegung mitzuteilen. Wenn wir dem Handgriff plötzlich eine Bewegung von beliebiger Periode erteilen und dabei nur jede Fundamentalperiode vermeiden, wenn ferner in unserm System etwas Viskosität vorhanden ist, stellt sich ein Zustand her, in dem wir eine vollkommen regelmäßige einfache harmonische Schwingung vor uns haben. Wenn aber überhaupt keine Viskosität da ist, was wird dann das Resultat sein? Es wird zusammengesetzt sein aus einfachen harmonischen Bewegungen in der Periode der Bewegung, die wir dem Schlüssel  $P$  mitgeteilt haben -- jede mit der Amplitude, die wir aus unserm Kettenbruch berechnet haben -- und darüber gelagert sozusagen ein Gewirr, bestehend aus gleichzeitigen einfachen Schwingungen mit allen den fundamentalen Perioden. Wenn keine Viskosität da ist, besteht dieser Zustand der Dinge in alle Ewigkeit fort. Ich kann mich mit der Einführung von Gliedern in diese Theorien, die die Viskosität darstellen, nicht befreunden, nicht bloß weil die Annahme von Viskosität in der Molekularmechanik eine theoretische Verletzung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie bedeutet, sondern weil der geringste Grad von Ätherviskosität, der hinreicht, uns von diesem ganzen Gewirr zu befreien oder einen irgendwie merklichen Einfluß auf irgendeine von den Bewegungen auszuüben, mit denen wir es in Quellen oder Wellen von Licht zu tun haben, es unmöglich machen würde, daß eine durch den Äther verlaufende Lichtfolge Billionen von Billionen Schwingungen hindurch andauert, wie wir ja wissen, daß sie andauert. Wenn aber überhaupt keine Viskosität da ist, muß jede Energie, die in irgendwelchen Schwingungen, regelmäßigen oder unregelmäßigen, zu irgendeiner Zeit in unserer zusammengesetzten Molekel vorhanden ist, in den Schwingungen noch irgend etwas weiteres zeigen; was ist dies nun? Wenn man die Schwingungsart untersucht, mit der wir uns im molekularen Teile unserer Arbeit beschäftigt haben, muß man mit diesen unregelmäßigen Schwingungen irgendwie fertig werden. Die die Viskosität berücksichtigenden Terme, die Helmholtz und andere eingeführt haben, stellen mehr einen Gesamteffekt von Wirkungen dar, die nicht ins einzelne verfolgt und auch nicht in der Theorie erklärt werden. Dabei verstehen wir unter Termen, die die Viskosität berücksichtigen, solche, die einen Widerstand annehmen, der der Geschwindigkeit einfach proportional ist.

1) Vgl. S. 47, 48.

Aber der Stand der Dinge bei uns ist der, daß das Gewirr in alle Ewigkeit fortbesteht, wenn kein Energieverlust eintritt; wir aber möchten unser System von Vibratoren, auch wenn kein Energieverbrauch durch Reibung stattfindet, in einen Schwingungszustand mit einer beliebig gewählten Periode hineinleiten. Fangen wir in folgender Weise an: wir wirken plötzlich auf  $P$  so, wie wir bereits vorausgesetzt haben, jedoch mit einer nur sehr kleinen Bewegungsweite. Das Resultat wird so sein, wie ich es beschrieben habe, nur mit sehr kleinen Weiten aller auftretenden Bewegungen. Nachdem wir eine kurze Zeit gewartet haben, vergrößern wir die Weite der Bewegung von  $P$ ; nachdem wir noch etwas länger gewartet haben, vergrößern wir die Weite wieder usf.; wir vergrößern die Weite schrittweis. Jeder dieser Schritte superponiert einen ferneren Schwingungszustand. Es wird, meine ich, virtuell eine Addition der Energien, nicht aber der Amplituden in dem Gewirr der Bewegungen eintreten, wenn man die Schritte vollkommen unabhängig voneinander ausführt.

Wir können zum Beispiel in folgender Weise vorgehen: Einmal stellen wir plötzlich Schwingungen unseres Handgriffs  $P$  in einer Weite von sogleich, sagen wir, 30 Zoll her. Dann haben wir einen gewissen Energiebetrag,  $J$ , in den unregelmäßigen Schwingungen (dem „Gewirr“). In einem anderen Versuch fangen wir mit einer Weite von drei Zoll an. Nachdem wir  $P$  eine Anzahl Perioden Schwingungen von drei Zoll haben ausführen lassen, vergrößern wir plötzlich die Weite um drei Zoll, erhöhen sie auf sechs Zoll. Dann, etwas später, erhöhen wir die Weite plötzlich auf neun Zoll usf. in dieser Weise in zehn Stufen. Die Energie des Bewegungsgewirres, die durch den plötzlichen Beginn mit der Weite von drei Zoll, also ein Zehntel von 30 Zoll, hervorgerufen wird, ist genau ein hundertstel  $J$ , der Energie des Gewirres, die man hätte, wenn man sofort mit einer Schwingung von 30 Zoll begonnen hätte. Jede folgende Hinzufügung von drei Zoll zu der Weite von  $P$  fügt einen Betrag an Energie des Gewirres hinzu, dessen Größe höchstwahrscheinlich abermals je ein hundertstel  $J$  ist; und die Folge ist, daß, wenn wir durch diese Schritte zu der Weite von 30 Zoll fortgeschritten sind, wir in dem schließlichen Gewirr nur zehn Hundertstel, ein Zehntel der Energie des Gewirres haben, die wir gehabt hätten, wenn wir sofort mit dieser Weite angefangen hätten. So ist also, wenn man sehr allmählich die Weite vergrößert, das Resultat dieses, daß von unregelmäßigen Schwingungen, trotz Mangel jeder Viskosität, nur unendlich wenig da ist.

Es gibt aber Fälle, in denen diese fürchterlichen Gewirre der Molekelschwingungen in den leuchtenden Schwingungen sich durchaus geltend machen. So bei der Fluoreszenz wie des Uranglases oder schwefelsauren Chinins, die einige tausendstel Sekunden, nachdem die erregende Ursache entfernt ist, noch besteht, und ferner bei der Phosphoreszenz, die sogar Stunden und Tage dauert. Es sind bereits äußerst interessante Anfänge auf dem Wege des Versuchs gemacht worden; aber noch niemand hat gefunden, ob die anfängliche Brechung genau dieselbe ist wie die dauernde. Zu diesem Zwecke sollten wir Becquerels Phosphoroskop oder Methoden anwenden, die denen von Fizeau und Foucault ähnlich sind, oder eine Einrichtung treffen, wie sie jüngst Michelson benutzt hat, um die Lichtgeschwindigkeit zu bestimmen, und so enorm viel Genaueres zu ermitteln suchen, als selbst Becquerels Phosphoroskop geleistet hat, und sollten prüfen, ob im ersten Hundertstel einer

Sekunde oder im ersten Milliontel einer Sekunde irgendein Anzeichen dafür vorhanden ist, daß die Wellengeschwindigkeit eine andere ist als die, die wir nach dem Brechungsgesetze finden, wenn Licht dauernd durch einen durchsichtigen flüssigen oder festen Körper hindurchgeht. Wenn wir mit den Bestimmungen der Lichtgeschwindigkeit in einem durchsichtigen Körper nach den gewöhnlichen Methoden eine Prüfung der besonderen augenblicklichen Brechung zusammenhalten, erscheint es leicht möglich, daß wir keine negativen Resultate erhalten, vielmehr Erscheinungen und Eigenschaften von äußerster Wichtigkeit finden. Dabei hätten wir nicht bloß gewöhnliche durchsichtige Festkörper und Flüssigkeiten zu benutzen, sondern vielmehr auch Körper wie Uranglas anzuwenden, deren Phosphoreszenz nur einige tausendstel Sekunden fortdauert; und dann andererseits Körper, in denen die Phosphoreszenz Minuten und Stunden fortdauert. Bei einigen von diesen Körpern sollten wir anomale Dispersion finden, die nach einiger Zeit allmählich verschwindet. Ich kann nur glauben, daß wir durch Versuch auf einem dieser Wege einige sehr interessante und instruktive Resultate im Gange der anfänglichen Fluoreszenz finden müßten.

---

## Neunte Vorlesung.

### Drillungswellen, Verlauf von Schwingungen, Absorption. Dispersionsformel.

#### a) Molar.

Wir wollen jetzt mit der Untersuchung der Fortpflanzung von Wellen von einem Mittelpunkte aus fortfahren. Wir gehen zu dem Falle zweier in entgegengesetzten Richtungen schwingenden Körper über, indem wir zwei solche Lösungen, wie wir sie bereits für einen einzelnen hin und her schwingenden Vibrator gefunden haben, superponieren. Diese Lösung war ausgedrückt durch

$$\xi = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \Phi + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad \eta = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad \zeta = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Wir hatten gezeigt, daß diese Werte auch die Gleichung erfüllen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

so daß sie streng eine Drillungswelle darstellen aus der Hin- und Herbewegung eines Körpers durch den Anfangspunkt in der Geraden  $OX$ . Zunächst beachten wir, daß in der Nähe des Ursprungs, in einer so kleinen Entfernung von ihm, daß die komponierende Bewegung in der Richtung  $OX$  nicht unmerklich ist, zu beiden Seiten des Ursprungs gleichzeitig positive Werte bestehen,  $\xi$  hat dort für einen positiven Wert von  $x$  denselben Wert wie für einen negativen. In Entfernungen vom Ursprunge in der Richtung  $OX$ , die im Vergleich mit der Wellenlänge beträchtlich sind, verschwindet die Bewegung in der Richtung von  $OX$ , wie wir gesehen haben.

Gehen wir nun zu dem folgenden Falle über: eine positive Hin- und Herbewegung auf der einen Seite des Ursprungs und gleichzeitig eine negative Hin- und Herbewegung auf der anderen Seite desselben; das heißt,

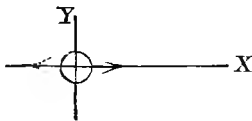


Fig. 18.

zwei gleichzeitige gleichperiodische Schwingungen von Materienteilchen zu beiden Seiten des Ursprungs, die sich gleichzeitig in entgegengesetzten Richtungen bewegen. Ich will diese Bewegungen durch Pfeilspitzen kennzeichnen, ausgezogene Pfeilspitzen, um die Bewegungsrichtungen in einem Moment der Periode

anzudeuten, und gestrichelte in einem um eine halbe Periode früheren oder späteren Augenblicke. Der erste durch Fig. 18 dargestellte Fall ist bereits untersucht, die Verschiebungskomponenten waren  $\xi, \eta, \zeta$ .

Den zweiten Fall veranschaulicht Fig. 19. Die Komponenten sind hier offenbar die Differentialquotienten der früheren Komponenten nach  $x$ , also

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Das gibt also eine Bewegung, deren der Achse  $OX$  parallele Komponenten zu beiden Seiten entgegengesetzte Zeichen haben, während die zu  $OX$  senkrechte Komponente für gleiche positive und negative Werte von  $x$  gleich und gleichsinnig, also von der Richtung von  $OY$  bestimmt sind; es besteht eine gleichzeitig aus- und einwärts gerichtete Schwingung zu beiden Seiten des Ursprungs in der Geraden  $OX$  und eine gleichzeitige ein- und auswärts gerichtete Schwingung senkrecht zu  $OX$  überall in der  $yz$ -Ebene. Eine Bewegung der Materie in Abständen vom Ursprunge, die im Vergleich mit der Wellenlänge mäßig sind, ist durch diese Funktionen genau beschrieben. Fig. 20 stellt als Erweiterung der Fig. 19, die den Keim enthielt, von dem aus wir die Idee der Bewegungsform entwickelt haben, und von den Funktionen, die sie beschreiben, beide Bewegungen dar und zugleich deren Zusammensetzung. Letztere gibt eine Kreisbewegung senkrecht zum Radiusvektor. Die Form der Pfeilspitzen in dem Kreise in Fig. 20 zeigt alle Einzelbewegungen und die komponierte Bewegung in jeder beliebigen, großen oder kleinen Entfernung vom Ursprunge; sie stellt auch bis auf geringe Größen die ganze Bewegung in großen Entfernungen dar. Um diese letztere Bewegung auszudrücken, nehmen wir nur die für große Entfernungen maßgebenden Glieder (wie in den früheren Fällen). Wir finden so für die drei Komponenten der Verschiebung in großen Abständen vom Ursprunge

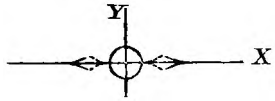


Fig. 19.

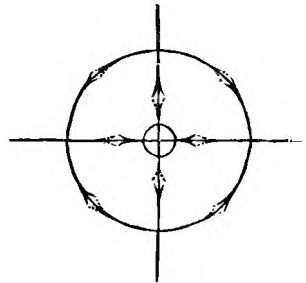


Fig. 20.

$$\xi \cdot = \frac{8\pi^3}{\lambda^3} x \frac{x^2 - r^2}{r^4} \cos q, \quad \eta \cdot = \frac{8\pi^3}{\lambda^3} \frac{x^2 y}{r^4} \cos q, \quad \zeta \cdot = \frac{8\pi^3}{\lambda^3} \frac{x^2 z}{r^4} \cos q.$$

Man überzeugt sich, daß die Radialkomponente der Verschiebung Null ist, denn es findet sich  $x\xi + y\eta + z\zeta = 0$ .

Um die Art der „Polarisation“ zu ermitteln, die eintreten wird, wenn der Fall in einer Folge von Lichtwellen realisiert ist, beachten wir, daß die Bewegung überall um die  $x$ -Achse symmetrisch ist und in der durch  $OX$  gehenden Radialebene geschieht. Demnach haben wir es mit einer Polarisation in der Ebene zu tun, die durch den Radius nach dem betrachteten Punkte führt und zu der durch  $OX$  gehenden Ebene senkrecht ist.

Dies ist nächst der Wirkung eines einzelnen starren hin und her gehenden Vibrators der einfachste Satz von Schwingungen, den wir als von einer natürlichen Lichtquelle ausgehend betrachten können. Wie ich schon gesagt habe, können wir uns ein Paar von gleichen und entgegengesetzt gerichteten drillenden Bewegungen an den beiden Enden einer schwingenden Molekel vorstellen. Es ist dies eine von den Möglichkeiten; und es wäre voreilig zu behaupten, daß nicht jede mögliche Bewegungsart in einem so bemerkenswert komplizierten Ding vorhanden ist, wie das System der Partikel, von denen Licht ausgeht.

Die Bewegung, die wir eben untersucht haben, ist vielleicht die interessanteste, da sie offenbar die einfachste Bewegungsart ist, die von einem

einzelnen, unabhängigen, nichttrotierenden Vibrator, dessen Trägheitsmittelpunkt unbewegt ist, ausgehen kann. Wenn man die beiden Enden einer Stimmgabel, ohne die Zinken zu beachten, in Betracht zieht, so daß alles um die beiden sich bewegenden Körper symmetrisch ist, so hat man einen Weg, auf dem diese Bewegungsart hervorgerufen werden kann. Oder unsere Quelle mag auch in zwei durch eine Feder miteinander verbundenen Kugeln bestehen, die auseinander getrieben und so in eine ein- und auswärts gerichtete Schwingung versetzt sind; oder sie kann auch aus der Schwingung einer elastischen Kugel hervorgegangen sein, die einen Stoß erlitten hat. Es kann bei einer solchen Kugel eine unendliche Anzahl Schwingungsarten entstehen, wenn sie plötzlich einen Stoß erfährt; die wichtigste aber, und zugleich diejenige, bei der die Energie ohne Zweifel am größten ist, wenn man es mit nicht zu harten Körpern zu tun hat, besteht in der Bewegung einer Kugel, die von einer länglichen in eine abgeplattete Umdrehungsform schwingt; und diese Art der Schwingung erzeugt in dem Äther gerade die Bewegung, mit der wir uns eben beschäftigt haben.

Die Vorgänge in einer elementaren Lichtquelle scheinen mir darin zu bestehen, daß immer plötzlich ein Satz von Schwingungen und daraus eine Folge von Schwingungen erregt wird, deren Amplitude naturgemäß immer kleiner wird. Was wir also an einem denkbar einfachsten Element einer Lichtquelle sehen würden, wenn dazu die Möglichkeit vorläge, besteht in polarisierten Lichtwellen, die sich in allen Richtungen nach einem Gesetze ausbreiten, wie etwa unsere Formeln es andeuten. In jeder beliebigen Richtung; was wird in einer bestimmten Richtung geschehen? Schreitet die Welle von links nach rechts fort, so würde man das sehen, was in der folgenden Figur 21 in vergrößertem Maßstabe angedeutet ist.

Sie stellt einen plötzlichen Anfang und einen allmählichen Abfall der Energie dar. Warum einen plötzlichen Anfang? Weil ich glaube, daß das



Fig. 21.

Licht der natürlichen Flamme oder des Bogenlichtes oder irgendeiner andern bekannten Lichtquelle die Folge einer Anzahl plötzlicher Stöße gegen eine Anzahl Vibratoren sein muß. Nehmen wir das durch Aneinanderschlagen zweier Quarzkiesel erzeugte Licht. Sie kennen es alle, und es ist eine der einfachsten Lichtquellen. Dabei muß eine Art chemische oder, wie man jetzt wohl annehmen darf, ozonbildende Wirkung stattfinden, die einen Geruch erzeugt. Was kann es wohl sein, das aus dem Aneinanderschlagen zweier Quarzkiesel hervorgeht? Unter welchen Umständen können wir uns eine Gruppe von Lichtwellen vorstellen, die allmählich anfängt und allmählich endet? Wir wissen, was bei der Erregung einer Violine oder einer Stimmgabel durch einen Bogen eintritt. Die Schwingungen steigen allmählich von Null zu einem Maximum und schwellen dann nach Entfernung des Bogens allmählich ab. Ich kann etwas Ähnliches in der Lichtquelle nicht sehen. Im Gegenteil scheinen mir hier alle Stöße plötzlich zu beginnen und allmählich abzuschwellen; mehr wie die Erregung einer Harfensaiten, die in der gewöhnlichen Weise gezupft, oder einer Klaviersaiten, die durch einen Hammer

angeschlagen und dann sich selbst überlassen wird, um allmählich ihre gesamte Energie in Schallwellen auszugeben.

Ich erwähne dies, weil ich soeben sehr interessante Abhandlungen von Lommel und Sellmeier<sup>1)</sup> gelesen habe, die an diesen Gegenstand grenzen. Helmholtz bemerkt, daß Sellmeier in seiner Mechanik in eine Schwierigkeit gerät und nicht klar zeigt, was in einem bestimmten Falle aus der Energie wird; ich meine aber, daß Sellmeier tatsächlich den Gegenstand mit großer Kraft angegriffen hat. Er behandelt diesen Fall sehr eingehend, und zwar in einer Weise, mit der wir heutzutage alle mehr oder weniger vertraut sind. Er bemerkt, daß Fizeau eine Folge von 50000 Schwingungen erhalten hat, die miteinander interferierten, und schließt daraus, daß, obwohl gewöhnliches Licht aus polarisiertem, kreisförmig oder elliptisch oder, wie ich es Ihnen ja auch in einer früheren Vorlesung auseinandergesetzt habe, planpolarisiertem Lichte besteht, mit (was ich nicht gesagt habe) allmählich sich ändernder Polarisationsebene oder, wenn es elliptisch polarisiert ist, mit allmählicher Veränderung einer oder beider Achsen der Ellipse, und mit sich allmählich ändernder Amplitude, daß alle solche Änderung so allmählich vor sich gehen muß, daß der Gesamtbetrag der Änderung, der Amplitude oder der Art der Polarisation oder der Phase, im Verlauf von 50000 oder 100000 oder vielleicht von einigen Millionen Schwingungen nicht so groß sein kann, daß dadurch die Interferenz verhindert würde. In der Tat besteht, wie ich annehme, kein merklicher Unterschied in der Vollkommenheit der Lichtauslöschung in den Versuchen Fizeaus, ob man 50000 oder 1000 Schwingungen anwendet; doch spreche ich hier nicht mit voller Sicherheit und meine Annahmen mögen wohl korrigiert werden. Hören Sie folgendes Gespräch mit Prof. Rowland.

Sir W. Thomson: Haben Sie, Herr Prof. Dr. Rowland, das nicht an Ihren Gittern gesehen?

Prof. Rowland: Ja, es ist aber sehr schwer, die Interferenzen zu erhalten.

Sir W. Thomson: Wenn Sie sie aber erhalten, sind die dunkeln Linien sehr dunkel oder nicht?

Prof. Rowland: Das weiß ich nicht. Sie sind so fein, daß man sie schwer sehen kann.

Sir W. Thomson: Was schließen Sie daraus?

Prof. Rowland: Daß sie in großer Zahl auftreten. Die Lage der Linien zeigt, wie vollkommen das Licht interferiert; und mit einem besonders feinen Gitter finde ich äußerst vollkommene Interferenz für wenigstens, sollte ich meinen, 100000 Perioden.

Sir W. Thomson: Das geht noch weiter als bei Fizeau.

Sellmeier sagt, daß wahrscheinlich eine große Anzahl Male 50000 Wellen verlaufen müssen, ehe irgendeine erhebliche Änderung sich geltend machen kann. Er tritt wunderbar scharf an den Gegenstand zur Begründung seiner mechanischen Erklärung der Absorption und der normalen Brechung. Der einzige Punkt, in dem ich in seinen Grundlagen nicht voll mit ihm übereinstimme, ist seine Annahme, daß Licht an der Quelle allmählich beginnt. Ich glaube, wenigstens für die Mehrzahl der Fälle, an ein plötzliches Beginnen und ein allmähliches Aufhören. Prof. Rowland hat uns eben gesagt, wie allmählich das Aufhören vor sich geht. Fizeau konnte feststellen, daß

1) Sellmeier, Ann. d. Phys. u. Chem. 1892, Bd. CXLV, CXLVII.

die Amplitude nach 50000 Schwingungen noch nicht sehr abnimmt. Nach allem, was wir wissen, ist es aber wohl möglich, daß die Amplitude nach 100000 Schwingungen beträchtlich abfällt, oder nicht?

Prof. Rowland: Die Linien sind dann noch sehr scharf.

Sir W. Thomson: Das hängt doch wohl nicht mit der Schärfe der Linien zusammen, oder doch?

Prof. Rowland: O ja. Die Abnahme würde die Schärfe der Linien zerstören.

Sir W. Thomson: Würde sie die Linien verbreitern oder würde sie sie fein lassen und nur etwas Licht auf eine Stelle versetzen, die dunkel sein müßte?

Prof. Rowland: Sie würde die Linien verbreitern.

Sir W. Thomson: Es ist dies ein sehr interessanter Gegenstand; und nach dem, was von Prof. Rowland und andern auf diesem Gebiete geleistet ist, läßt sich hoffen, daß, wenn nicht ich selbst, doch mancher der hier Anwesenden es erleben wird, auf dem Wege der Auslöschung von Schwingungen in Verbindung mit dem Entstehen und der Ausbreitung von Licht Erkenntnisse zu gewinnen, von denen wir heute kaum eine Ahnung haben. Wir sind vollkommen sicher, daß die Verkleinerung der Amplitude in der Mehrheit von Folgen in irgendeiner gewöhnlichen Lichtquelle äußerst klein — praktisch Null — sein muß in 1000 Schwingungen; wir können sagen, wahrscheinlich ist sie praktisch Null in 50000 Schwingungen; wir wissen, daß sie nahezu Null ist in 100000 Schwingungen. Ist sie praktisch Null in zwei- oder dreihunderttausend Schwingungen oder in einigen Millionen Schwingungen? Möglicherweise nicht. Hier kommen mechanische Überlegungen ins Spiel. Wir möchten ein klein wenig Einsicht in diese Dinge gewinnen, wenn wir uns eine Art Idee über den gesamten Betrag an Energie bilden könnten, der möglicherweise in einem einzelnen Vibrator, in einer Lichtquelle, enthalten sein kann, und welche Folgen von Wellen diese Energie zu erhalten vermag. Daß die gesamte Schwingungsenergie eines einzelnen in einer Lichtquelle frisch erregten Vibrators viele Male größer ist als die, die er im Verlaufe von 100000 Molarschwingungen ausgibt, ist ein äußerst interessanter experimenteller Schluß, der aus den großartigen Interferenzbeobachtungen Fizeaus und Rowlands gezogen wird.

Wenn ich von Sellmeiers Arbeit und von Helmholtz' schöner Abhandlung spreche, die geradezu ein mathematisches Schmuckstück bildet, muß ich doch sagen, daß ich meine, daß Helmholtz' Änderung eher einen Schritt rückwärts bedeuten möchte. Doch ist sich Helmholtz vollkommen über das klar, was er unter viskosem Verbrauch von Energie versteht, denn er begreift darunter die Umwandlung von Energie in Wärme; und indem er die Viskosität einführt, preßt er aus dieser Annahme alles heraus, was sich nur im Kampfe mit dem dynamischen Problem gewinnen läßt.

Herr Mansfield brachte mir gestern abend eine weitere Last Bücher über den Gegenstand. Ich habe sie noch nicht alle durchgesehen. Ich habe eins davon heute morgen geöffnet und mich an einer langen mathematischen Abhandlung geübt. Ich glaube nicht, daß es uns sehr viel in der mathematischen Behandlung des Gegenstandes helfen wird. Was wir wollen, ist zu versuchen und zuzusehen, ob wir nicht vollständiger verstehen können, was Sellmeier geleistet hat und was Lommel geleistet hat. Ich sehe, daß beide



fest an der Meinung hängen, daß wir in den Partikeln selbst den Energieverlust vermöge der übertragenen Welle suchen müssen. Das ist das, was ich auch tue; und wir werden unsere Aufgabe nicht gelöst haben, wenn wir nicht jede Linie in Prof. Rowlands herrlichem Spektrum werden erklärt haben. Wenn wir ermüden, können wir ausruhen und zu unserer Aufgabe zurückkehren.

Lommel und Sellmeier behandeln diese verschiedenen Schwingungarten nicht vollständig, obwohl sie von ihnen Notiz nehmen. Sie zeigen aber, daß wir irgendeinen Weg finden müssen, die Energie zu verteilen ohne die Annahme, daß sie verschwindet. Das ist der Grund, warum ich die Einführung von Gliedern, die die Viskosität darstellen, in unsere Gleichungen nicht gern sehe. Es ist für die Vorstellung sehr gefährlich, sie überhaupt einzuführen, denn die kleine Spur Viskosität würde mit allen unsern Energien ein Ende machen, lange bevor 50000 Schwingungen ausgeführt werden könnten. Wäre eine irgend merkliche wirksame Viskosität in irgendeiner der mit dem bewegten Teilchen in Verbindung stehenden Materien vorhanden, so wäre es unmöglich, eine Folge von hunderttausend oder gar einer Million Schwingungen zu erhalten, die von einer einzigen anfänglichen Schwingung eines einzigen Vibrators ausgehen.

Was das mechanische Problem für uns zu tun hat, ist, zu zeigen, wie man ein System besitzen kann, das in sich der Schwingungen fähig ist und auf das der Lichtäther wirkt, der unter gewöhnlichen Umständen das Licht in Millionen Schwingungen, wie in durchsichtigen Flüssigkeiten oder Festkörpern, oder gar in Hunderttausenden Millionen Schwingungen, wie in unserer Erdatmosphäre, nicht absorbiert; überhaupt in durchsichtigen Körpern, welche Wellen in Schichten von hundert Fuß oder fünfzig Meilen oder in noch größeren Schichten den Durchgang gestatten, also mit außerordentlich kleiner Absorption versehen sind. Wenn wir uns dann Vibratoren vorstellen, die ihre Aufgabe in der Weise erfüllen, daß sie in einem stark durchsichtigen Körper eine unzweideutige Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes liefern, die jedoch gleichzeitig bei geeigneter Wahl der Größen der Massen oder der sie verbindenden Federn in gewissen komplexen Molekeln, etwa in den Molekeln gewisser Verbindungen, die Fluoreszenz und Phosphoreszenz hervorrufen, eine große Menge der Energie in sich aufnehmen, so daß vielleicht die ganze Folge der von einem einzigen Ursprung ausgehenden Schwingungen vollkommen absorbiert und in Schwingungen kleinerer Periode umgewandelt werden, die schließlich die Wirkung haben, den Körper zu erwärmen: dann, meine ich, haben wir eine vollkommen deutliche Erklärung der Absorption, ohne überhaupt die Viskosität berücksichtigende Glieder einzuführen. Und diese Idee verdanken wir Sellmeier.

Zwei Namen also scheinen mir mit der Erklärung der Absorption, der Brechung und schließlich der anomalen Brechung und Dispersion besonders historisch verbunden zu sein: Stokes und Sellmeier<sup>1)</sup>. Kann man meine Ansicht in bezug auf den einen oder anderen mit Sicherheit richtigstellen, so soll es mich freuen. Soweit ich die Verhältnisse überschau, rührt die erste Idee, die Absorption durch schwingende Partikeln zu erklären, die in

1) Ich darf die Ansicht des dahingegangenen Verfassers nicht ändern, später wird übrigens auch Maxwell als Mitbegründer nachgewiesen. D. H.

ihren Eigenschwingungen die gesamte Energie solcher Teile gemischten Lichtes, die in den Perioden jener Eigenschwingungen verlaufen, aufnehmen, von Stokes her. Er hat sie mir zu einer Zeit mitgeteilt, die ich hinreichend feststellen kann. Ich bin von etwa Juni 1852 bis Mai 1865 nur einmal in Cambridge gewesen; und es war auf einem Spaziergang in Cambridge in den Feldern des Colleges, als ich die Idee von Stokes hörte. Etwas davon ist aus einem Briefe von mir an Helmholtz, den dieser Kirchhoff mitteilte und den Kirchhoff seiner Nachschrift zur englischen Übersetzung (veröffentlicht Phil. Mag., Juli 1860) seiner Abhandlung über den Gegenstand (Pogg. Ann. Bd. CIX, p. 275) anfügte, veröffentlicht worden.

In dieser Nachschrift finden Sie die folgende meinem Briefe entnommene Tatsache<sup>1)</sup>:

„Prof. Stokes teilte mir vor längerer Zeit, wahrscheinlich vor etwa zehn Jahren mit, Prof. Miller habe einen Versuch gemacht, der mit einem hohen Grade von Genauigkeit die Übereinstimmung der doppelten dunklen Linie *D* des Sonnenspektrums mit der doppelten hellen Linie zeigt, die das Spektrum der mit Kochsalz getränkten Spiritusflamme bildet. Ich bemerkte, daß irgendeine physikalische Verbindung zwischen zwei Agenzien bestehen müsse, die eine so deutliche Charakteristik gemeinsam zeigen. Er stimmte mir bei und sagte, er glaube, man könne eine mechanische Erklärung der Ursache nach einem Prinzip etwa der folgenden Art erhalten: — Natriumdampf muß vermöge seiner molekularen Struktur ein Bestreben besitzen, in Perioden zu schwingen, die den Graden der Brechbarkeit der Doppellinie *D* entspricht. Demnach muß die Anwesenheit von Natrium in einer Lichtquelle auf das Entstehen von Licht dieser Eigenschaft hinwirken. Andererseits muß Natriumdampf in einer eine Lichtquelle umgebenden Atmosphäre ein starkes Bestreben haben, Licht der Quelle von genau der in Frage stehenden Art in sich festzuhalten, d. h. zu absorbieren und seine Temperatur durch dieses Licht steigern zu lassen. Demnach muß in der die Sonne umgebenden Atmosphäre Natriumdampf vorhanden sein, der nach der so aufgestellten mechanischen Erklärung für Licht dieser Art besonders undurchlässig ist, und so verhindert, daß dieses Licht von der Sonne ausgestrahlt wird, wenn es in einer irgendwie beträchtlichen Ausdehnung durch die umgebende Atmosphäre dringt. Die Prüfung dieser Theorie muß in der Untersuchung bestehen, ob Natriumdampf die vorausgesetzte absorbierende Kraft besitzt oder nicht. Ich habe den Eindruck, daß ein französischer Gelehrter diese Tatsache durch Versuch festgestellt hat, doch kann ich keinen Hinweis auf diesen Punkt finden.

Ich weiß nicht, ob Prof. Stokes' Gedanke einer mechanischen Theorie je im Druck erschienen ist. Ich habe ihn mehrere Jahre regelmäßig in meinen Vorlesungen mitgeteilt, und habe stets in Verbindung damit hervorgehoben, daß die Sonnen- und Sternchemie in der Weise studiert werden müsse, daß man irdische Substanzen untersucht, die in den Spektren künstlicher Flammen helle Linien liefern, die den dunklen Linien der Sonnen- und Sternspektren entsprechen<sup>2)</sup>.“

1) G. Kirchhoff hat den Brief im Original Pogg. Ann. Bd. 118 S. 109 abgedruckt. D. H.

2) Die folgende Bemerkung ist von Prof. Stokes seiner Übersetzung einer Abhandlung von Kirchhoff in Phil. Mag. März 1860, p. 196 angefügt: — „Die he-

Was ich so weit vorgelesen habe, bezieht sich nicht auf die Entstehung der Spektralanalyse, sondern auf den bestimmten Punkt, auf die von Stokes ersonnene Mechanik der Absorption. Hierin ist nun kein Hinweis auf die Wirkung der Reaktion der schwingenden Partikeln im Lichtäther in der Richtung gegeben, wie sie etwa die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in ihm beeinflusst. Sellmeiers erster Anspruch bezieht sich auf diese Wirkung; er erklärt die gewöhnliche Brechung mit der Trägheit dieser Partikeln und zeigt, wie anomale Dispersion auftreten muß, wenn das Licht nahezu die Periode besitzt, die einer der Fundamentalperioden der eingebetteten Vibratoren entspricht. Er führt eine mathematische Untersuchung durch, die zwar vielleicht nicht vollkommen befriedigt, die mir aber immerhin einen äußerst wertvollen Schritt nach einer vollkommen befriedigenden Behandlung des Gegenstandes zu bilden scheint. Lord Rayleigh, Helmholtz und andere haben Sellmeier zitiert. Lommel beginnt die Untersuchung zwar, wie es mir scheint, von neuem, aber auch er erwähnt Sellmeier; und so muß der Gedanke als von Sellmeier herrührend angesehen werden, und er scheint mir als ein sehr wichtiger Ausgangspunkt für die mechanische Erklärung des Lichtes.

### b) Molekular.

Wir wollen noch einmal diese Aufgabe über die schwingenden Partikeln ins Auge fassen, und zwar als Beispiel für 7 Partikeln. Nehmen wir die Massen  $m$  fortschreitend nach Potenzen von 4, und die  $c$  als eine Reihe mit den Differenzen 1. Also

$$m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7 = 1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096$$

$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Dann wären durch Probieren 7 Wurzeln zu finden. Bei der Rechnung dürfte vorteilhaft folgendermaßen vorzugehen sein: Sie setzen  $\frac{1}{\tau^2} = z$  und verstehen unter „Wurzeln“ die Werte von  $z$ , durch welche  $\xi = 0$  wird, wozu notwendig und hinreichend ist, daß  $u_1 = 0$  ist. Dann hat man

$$a_1 = z - 3; a_2 = 4z - 5; a_3 = 16z - 7; a_4 = 64z - 9;$$

$$a_5 = 256z - 11; a_6 = 1024z - 13; a_7 = 4096z - 15.$$

merkenswerte, von Foucault entdeckte und von Kirchhoff wiederentdeckte und weiter verfolgte Erscheinung, daß ein Körper gleichzeitig eine Lichtquelle, die Strahlen von einer bestimmten Brechbarkeit liefert, und ein absorbierendes Medium sein kann, das Strahlen von derselben Brechbarkeit, die es durchsetzen, auslöscht, scheint leicht eine mechanische, der Lehre vom Schall entlehnte Veranschaulichung zuzulassen. Wir wissen, daß eine gespannte Saite, die angeschlagen einen gewissen Ton liefert (beispielsweise ihren Grundton), auch durch Luftschwingungen, die demselben Ton entsprechen, in denselben Schwingungszustand versetzt werden kann. Nehmen wir jetzt an, ein Raumteil enthalte eine große Anzahl solcher gespannten Saiten, der so das Analogon eines „Mediums“ bildet, so ist klar, daß ein solches Medium, wenn es in Bewegung gebracht wird, den oben erwähnten Ton liefert, während andererseits, wenn dieser Ton in der Entfernung in der Luft erschallt, die auffallenden Schwingungen die Saiten in Schwingungen versetzen würden und selbst dadurch allmählich vernichtet werden möchten, da ja sonst eine Schöpfung lebendiger Kraft aus dem Nichts erfolgen würde. Die optische Anwendung dieser Veranschaulichung ist zu klar, um einer Erläuterung zu bedürfen. G. G. S.“ H.

Nun nimmt man probeweise so lange Werte von  $z$ , bis man eine nahezu richtige Wurzel erhält. Die Konvergenz des Kettenbruchs (S. 62) ist eine so schnelle, daß man nur geringe Schwierigkeit hat, die größten Wurzeln zu finden. Man fängt dann mit der größten  $z$ -Wurzel an, die der kürzesten der kritischen Perioden  $\tau$  entspricht und geht abwärts nach den Andeutungen auf S. 43. Im Verlaufe des Verfahrens findet man die ganze Reihe der  $u$  für jede Wurzel; multipliziert man diese in der Folge, so erhält man die  $x$  für jede besondere Wurzel, und dann kann man die Energieverhältnisse für jede Wurzel berechnen. Wir sind so imstande, unsere Formel in Zahlen darzustellen; und ich habe, wie schon bemerkt, die Empfindung, daß ich sie weit besser verstehe, wenn ich dafür ein Beispiel in Zahlen besitze, als wenn ich sie bloß in Symbolen vor mir sehe.

Ich möchte Ihnen nun die Erklärung der gewöhnlichen Brechung vorführen. Kehren wir zu unserer Annahme sphärischer Schalen oder, wenn Sie wollen, zu unserm rohen mechanischen Modell zurück. Nehmen wir eine ungeheure Anzahl sphärischer Hohlräume an, die gleichmäßig in dem Raume verteilt sind, den wir in Betracht ziehen. Die Äthermenge, die so aus ihrer Lage verdrängt ist, sei im Verhältnisse zu der gesamten Menge so äußerst klein, daß die elastische Wirkung des Restes durch jene nicht merklich geändert wird. Diese Annahmen sind vollkommen natürlich. Mechanisch nicht natürlich ist es aber, wenn wir jetzt diese sphärischen Hohlräume im Äther von starren gewichtslosen sphärischen Belegungen, Schalen, umschlossen annehmen, die je mit inneren starren massiven Schalen,  $m_1, \dots$  durch Federn verbunden sind — und zwar in erster Linie symmetrisch. Später mag man ja versuchen, ob wir nicht auch etwas auf dem Wege der Analogie tun können; wie ich aber schon früher gesagt habe, sehe ich noch keinen Ausweg aus den Schwierigkeiten. Inzwischen wollen wir annehmen, die erste Schale  $m_1$  sei isotrop durch Federn mit der starren Schalenbelegung des sphärischen

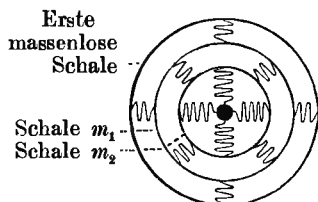


Fig. 22.

Hohlraumes im Äther verbunden. Wenn ich sage isotrop verbunden, so meine ich deutlich folgendes: wenn man die erste Schale  $m_1$  in irgendeiner Richtung um eine gewisse Größe seitwärts zieht und sie in dieser Lage festhält, daß dann die erforderliche Kraft unabhängig von der Richtung ist, nach der die Verschiebung vorgenommen wurde. Gewisse Federn in der Zeichnung — die geringste Zahl würde drei

sein —, die in geeigneten Lagen im Kreise angeordnet sind, werden roh die für uns geeigneten Verbindungen darstellen. Ähnlich befinde sich hier eine andere Schale,  $m_2$ , innerhalb  $m_1$  mit der letzteren isotrop durch Federn verbunden; usf.

Dies ist die einfachste mechanische Darstellung, die wir von einer Molekel oder einem Atom geben können, das in den Lichtäther eingebettet ist; es sei denn, wir nehmen an, das Atom sei absolut hart, was ja nicht in Frage kommen kann. Wenn wir von dieser Aufgabe zu einer andern übergehen, bei der wir eine stetige elastische dichtere Materie an Stelle der Reihe von Verbindungen zusammengehöriger Teile voraussetzen, sind wir ja der Wirklichkeit weit näher. Aber die Untersuchung einer Gruppe von diskreten Teilen bietet einen großen Vorteil, da wir mit der gewöhnlichen Algebra

besser vertraut sind als mit der Behandlung partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Koeffizienten, die nicht konstant, sondern Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind, — und derart wären die Gleichungen, mit denen wir es zu tun haben, wenn wir eine kontinuierliche elastische Molekel und nicht eine solche annehmen, die aus Massen besteht, die durch Federn miteinander verbunden sind, wie wir es getan haben.

Wir wollen weiter voraussetzen, die Durchmesser dieser sphärischen Hohlräume seien äußerst klein im Vergleich mit der Wellenlänge. Praktisch gesprochen, wir nehmen an, unsere Struktur sei unendlich feinkörnig. Ebenso soll der Abstand zwischen einem solchen, eine Reihe von Schalen einschließenden Hohlraum und einem andern im Lichtäther äußerst klein sein im Vergleich mit der Wellenlänge, so daß die Verteilung dieser Molekel im Äther uns einen Körper liefert, der homogen ist, wenn sie auf einer so großen Skala, wie die Wellenlängen bilden, angeschaut wird. Diese Idee hat einen großen Vorzug vor der alten Methode von Cauchy, da sie eine unendliche Feinkörnigkeit der Struktur gestattet und man nicht gezwungen ist anzunehmen, daß nur eine beschränkte Anzahl Molekeln, zehn oder zwölf, auf die Wellenlänge kommen, wie man es tun muß, um die Erklärung der Refraktion nach dem Verfahren von Cauchy zu erhalten.

Ich möchte Ihnen nun die Wirkung von Molekeln der jetzt angenommenen Art auf die Geschwindigkeit des das Medium durchsetzenden Lichtes zeigen.

Es bezeichne  $\frac{m_1}{4\pi^2}$  die Summe aller Massen der Schalen Nr. 1, die in irgendeinem Raume enthalten sind, dividiert durch dieses Volumen, ebenso  $\frac{m_2}{4\pi^2}$  die Summe der Massen der inneren Schalen Nr. 2 in irgendeinem Raume, dividiert durch dieses Volumen usf. Wir wollen nicht die Bewegungsgleichungen für alle Richtungen niederschreiben, sondern einfach die Gleichungen aufstellen, die einer Reihe ebener Wellen entsprechen, in denen die Schwingungsrichtung parallel  $OX$  und die Fortpflanzungsrichtung parallel  $OY$  ist. Wenn wir mit  $\frac{\rho}{4\pi^2}$  die Dichte des schwingenden Mediums (ich wähle  $\frac{\rho}{4\pi^2}$  anstatt des gebräuchlichen  $\rho$  aus dem Ihnen bekannten Grunde, um uns nämlich von dem beim Differenzieren auftretenden Faktor  $4\pi^2$  zu befreien), wenn wir weiter mit  $\frac{l}{4\pi^2}$  (statt des früher gewählten  $n$ ) die Starrheit des Lichtäthers bezeichnen, dann ist die mechanische Bewegungsgleichung des Äthers und der in ihm eingebetteten Belegungen der Hohlräume offenbar

$$\frac{\rho}{4\pi^2} \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{l}{4\pi^2} \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + c_1 (x_1 - \xi).$$

Für Wellen mit der Periode  $T$  ist

$$\xi = \text{const.} \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right).$$

Die zweiten Differentialkoeffizienten dieser Größe nach  $t$  und  $x$  sind bez.  
 $-\frac{4\pi^2}{T^2} \xi$ ,  $-\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \xi$ . Demgemäß geht unsere Gleichung über in  $\frac{\rho}{T^2} = \frac{l}{\lambda^2}$

+  $c_1 \left(1 - \frac{x_1}{\xi}\right)$ . Suchen wir  $\frac{T^2}{\lambda^2}$ , den reziproken Wert des Quadrats der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Es wird

$$\frac{T^2}{\lambda^2} = \frac{1}{l} \left\{ \varrho - c_1 T^2 \left(1 - \frac{x_1}{\xi}\right) \right\}.$$

Setzen wir unsern Wert (siebente Vorlesung) für  $-\frac{x_1}{\xi}$ , nämlich

$$-\frac{x_1}{\xi} = \frac{c_1 T^2}{m_1} \left( \frac{k_1^2 R_1}{k_1^2 - T^2} + \frac{k_2^2 R_2}{k_2^2 - T^2} + \dots \right)$$

ein, so geht die Gleichung über in

$$\frac{T^2}{\lambda^2} = \frac{1}{l} \left[ \varrho - c_1 T^2 \left\{ 1 + \frac{c_1 T^2}{m_1} \left( \frac{k_1^2 R_1}{k_1^2 - T^2} + \frac{k_2^2 R_2}{k_2^2 - T^2} + \dots \right) \right\} \right].$$

Dies ist der Ausdruck für das Quadrat des Brechungsindex, soweit er durch die Anwesenheit von Molekeln beeinflusst wird, die in der von uns vorausgesetzten Weise angeordnet sind. Es ist schon zu spät, noch jetzt zwecks seiner Deutung näher auf ihn einzugehen, doch will ich noch sagen: wenn man  $T$  beträchtlich kleiner als  $k_1$  und sehr viel größer als  $k_2$  annimmt, erhält man eine Formel mit einer hinreichenden Anzahl disponibler Konstanten zur Darstellung des Brechungsindex, durch eine sozusagen empirische Gleichung, eine Formel, die nach dem, was wir wissen und was Sellmeier und Ketteler gezeigt haben, als vollkommen ausreichend zur Darstellung des Brechungsindex gewöhnlicher durchsichtiger Substanzen anzusehen ist.

---

## Zehnte Vorlesung.

### Energie der Wellen, Wasserwellen, Brechungsvermögen.

#### a) Molar.

Wir gehen jetzt ein wenig auf die Frage der Fortpflanzung von Wellen ein, die von in ihrer Tätigkeit unstetigen Lichtquellen herrühren. Zunächst wollen wir unsern Ausdruck für eine ebene Welle untersuchen. Der Faktor in unsern Formeln, der auf eine Verkleinerung der Amplitude in wachsendem Abstände von der Quelle hinweist, hat keinen Einfluß, wenn wir ebene Wellen betrachten. So nehmen wir also den einfachen Ausdruck für ebene harmonische Wellen, die sich längs der  $y$ -Achse mit der Geschwindigkeit  $v$  fortpflanzen:

$$\xi = a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (y - vt).$$

Wir wollen folgende Frage verfolgen: — Welches ist die in jeder Periode von der elastischen Kraft in einer beliebigen zur Fortpflanzungslinie der Welle senkrechten Ebene geleistete Arbeit? Wir werden die Antwort auf diese Frage im Hinblick auf die Betrachtung der Möglichkeit einer Reihe von in einem vorher ruhenden Raume fortschreitenden Wellen suchen. Ich zeichne hier

(Fig. 23) eine gerade Linie als Fortpflanzungslinie, und die Kurve deute eine Folge von Wellen an, die von links nach rechts ziehen und in einen vorher ruhenden elastischen Festkörper eindringen. Wir stellen uns eine zur Fortpflanzungsrichtung der Wellen senkrechte Ebene vor und suchen die Arbeit, die von dem elastischen Festkörper auf der einen Seite dieser Ebene auf

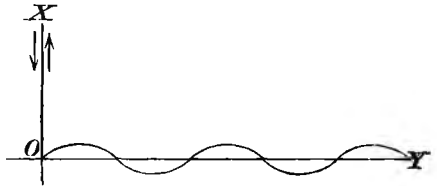


Fig. 23.

den elastischen Festkörper an der andern Seite im Verlaufe einer Periode bei der Schwingung ausgeübt wird. Dazu bilden wir erst einen Ausdruck für die tangentielle Kraft  $T$  in der Ebene  $XOZ$  und in der Richtung  $OX$ , entsprechend unsern früheren Bezeichnungen ( $S, T, U, P, Q, R$ ). Wir wollen hier die Formel für die Fortpflanzung der Welle unabhängig von unserer allgemeinen für alle drei Dimensionen gültigen Gleichung untersuchen. Sei die Richtung nach unten, in der die Pfeilspitze links gezeichnet ist, diejenige Richtung, in der das Medium links gegen das Medium rechts drückt, so setze ich in dem Medium rechts unendlich nahe an die erste eine zweite entgegenlaufende Pfeilspitze. Wir stellen uns für einen Augenblick eine Spaltung im Medium vor, um die Reaktion anzudeuten, die das Medium zur Rechten durch diese Ebene auf das Medium zur Linken ausübt; und stellen uns weiter vor, das Medium zur Linken sei entfernt, und wir wirkten auf die Grenzebene des Mediums zur Rechten mit derselben Kraft wie bei der stetigen Ausbrei-

tung von Wellen. Das Medium zur Linken wirkt dann in derselben Weise auf die Zwischenebene — dies ist eine genügend leicht zu fassende Vorstellung. Die Verschiebung des Mediums ist bestimmt durch eine Drillung aus einer quadratischen Figur in eine schräge, und es ist kein Widerspruch, wenn wir in dieser kleinen Zeichnung (Fig. 24) eine Über-treibung der Schräge andeuten, um ihre Richtung zu zeigen. Die erforderliche Kraft, dies zu tun, ist offenbar, wie unsere Zeichnung



Fig. 24.

liegt, rechts nach oben und links nach unten gerichtet. Fassen wir jetzt die von dieser Kraft geleistete Arbeit ins Auge. Bezeichnet man mit  $\xi$  die Verschiebung eines Teilchens aus seiner mittleren Lage, so ist  $T \frac{d\xi}{dt} dt$  die durch diese tangentielle Kraft in der Zeit  $dt$  geleistete Arbeit. Nun gibt  $\frac{\partial \xi}{\partial y}$  den Schubzwang, den das Medium erleidet. Hier-nach wird

$$T = -n \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

Bei der besonderen Lage, die wir vorausgesetzt haben, wächst  $\xi$  mit  $y$ , so daß das Zeichen nach der Pfeilrichtung zutrifft.

Es mögen sich nun einfache harmonische Wellen von links nach rechts mit der Geschwindigkeit  $v$  ausbreiten. Dann ist folgendes der Ausdruck für diese

$$\xi = a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (y - vt),$$

also

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{2\pi}{\lambda} v a \sin q; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{2\pi}{\lambda} a \sin q; \quad q = y - vt$$

und die Größe der geleisteten Arbeit wird hiernach

$$dA = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} a^2 v n \sin^2 q dt.$$

In diesem Betrage also leistet die Ebene an jeder Einheit bei ihrer Einwirkung auf den rechts von ihr befindlichen elastischen Festkörper Arbeit. Wir integrieren über eine Periode  $\tau = \frac{\lambda}{v}$ . Da

$$\int_0^\tau \sin^2 q dt = \int_0^\tau \frac{1}{2} (1 - \cos 2q) dt = \int_0^\tau \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \tau$$

ist, wird die in der Periode  $\tau$  geleistete Arbeit

$$A = \frac{2\pi^2}{\lambda^2} a^2 v n \tau = \frac{2\pi^2 a^2 n}{\lambda}.$$

Wenn es für einen Wellensatz möglich ist, gleichförmig ohne Verlust in einem vorher nicht gestörten Raume vorzudringen, dann muß sicher diese in einer Periode geleistete Arbeit gleich der im Medium pro Welleneinheit befindlichen Energie sein. Demnach wollen wir auch diese Energie pro Wellenlänge berechnen.

Es wird leicht bewiesen, daß in Wellen in einem homogenen elastischen Festkörper die Energie zur Hälfte potentielle Energie elastischen Zwanges



und zur Hälfte kinetisch ist. Also kürzt man den Gegenstand ab, wenn man einfach die kinetische Energie berechnet und das Doppelte dieser als die Energie des Mediums pro Wellenlänge betrachtet. Nach unserer gestrigen Bezeichnung wählen wir  $\frac{\rho}{4\pi^2}$  als die Dichte. Wir multiplizieren diese mit  $dy$ , um die Masse eines unendlich kleinen Teilchens (auf der Flächeneinheit der Wellenebene) zu erhalten. Dann ist die kinetische Energie dieser Masse

$$\frac{1}{2} \frac{\rho}{4\pi^2} dy \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho v^2 a^2}{\lambda^2} \sin^2 q dy.$$

Integrieren wir diesen Ausdruck über eine Wellenlänge und verdoppeln, um die Gesamtenergie zu erhalten, so finden wir  $\frac{1}{2} \frac{\rho v^2 a^2}{\lambda}$ . Vergleichen wir das mit der in einer Periode geleisteten Arbeit, nämlich  $\frac{1}{2} \frac{a^2}{\lambda} l$ , wo wie gestern  $\frac{l}{4\pi^2}$ , anstatt  $n$ , die Starrheit bezeichnet, so bekommen wir, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v = \sqrt{\frac{l}{\rho}}$  ist, den früheren Betrag  $A$ , wie wir aus der Grundgleichung der Wellenbewegung

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{l}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$

finden. So ist in der Tat die in einer Periode geleistete Arbeit gleich der Energie pro Wellenlänge.

Dies stimmt mit dem überein, was wir aus der gewöhnlichen allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichung durch willkürliche Funktionen wissen, daß es nämlich einer unstetigen Wellenreihe möglich ist, sich in einem elastischen, vorher ruhenden Medium auszubreiten — und gilt für eine regelmäßige einfache harmonische endlose Wellenfolge in demselben Umfange, als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge unabhängig ist. Wenn aber unsere vorliegende Energiegleichung nicht zuträfe, wäre es unmöglich, daß sich eine unstetige Wellenreihe ohne Formänderung in einem vorher in Ruhe befindlichen Medium ausbreitete. Ich will jedoch auch die Energiegleichung für Bewegungen in einem homogenen elastischen Festkörper untersuchen, für den Fall, mit dem wir uns befassen, für den sie noch nicht bewiesen ist, nämlich, wenn wir unsere Molekeln einführen. Es wird sich zeigen, daß in diesem Falle die in einer Periode geleistete Arbeit kleiner ist als die Energie im Medium pro Wellenlänge, und demnach ist es den Wellen nicht möglich, ohne Formänderung fortzuschreiten.

Ehe wir aber dazu übergehen, wollen wir uns etwas länger bei einem homogenen elastischen Festkörper aufhalten und die wohlbekannte Lösung durch unstetige Funktionen ins Auge fassen. Die Bewegungsgleichung ist

$$\rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} = l \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2},$$

und sie bildet einen Sonderfall unserer bekannten Gleichung

$$\rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} = l \nabla^2 \xi.$$

Ich hätte Ihnen noch sagen sollen, daß der behandelte Fall der einer

ebenen Welle ist, die sich in der  $OY$ -Richtung mit der zu  $XZ$  parallelen Wellenebene fortpflanzt; für diesen Fall wird eben  $Nab/a^1)$  von  $\xi$  (d. h.  $\nabla^2 \xi$ ) einfach  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$ . Die durch ihr Alter ehrwürdige Lösung dieser Gleichung ist

$$\xi = f(y - vt) + F(y + vt),$$

wo  $f$  und  $F$  willkürliche Funktionen sind. Man kann dies durch Differenzieren beweisen. Diese Lösung in willkürlichen Funktionen zeigt eben, daß eine unstetige Wellenreihe möglich ist. Weiß man aber, daß eine solche unstetige Reihe möglich ist, so kann man, ohne weiter in die Frage einzudringen, sagen, daß die in einer Periode von dem Medium auf einer Seite der senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung angenommenen Ebene geleistete Arbeit der Energie im Medium für die Wellenlänge gleich ist.

Wir bleiben noch bei diesem Falle stehen, untersuchen aber Wellen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht von der Wellenlänge unabhängig, sondern von dieser abhängig ist. Die bis jetzt behandelte Gleichung bezieht sich auf Unabhängigkeit von der Wellenlänge. Voraus schicke ich jedoch eine mathematische Betrachtung, deren ich mich zu bedienen haben werde.

Ich bitte Sie zunächst zu beachten, daß man hat

$$S = \frac{1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2}{1 - 2 \varepsilon \cos q + \varepsilon^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon \cos q + \varepsilon^2 \cos 2q + \dots,$$

eine Formel, mit der jeder mathematisch gebildete Leser vertraut ist, da sie zur Fourierschen harmonischen Reihe der Sinus und Kosinus führt. Sie wird bewiesen, indem man setzt

$$2 \cos q = e^{+iq} + e^{-iq}$$

und  $S$  in zwei Partialbrüche zerteilt. Poisson und andere<sup>2)</sup> legen diese Reihe einem Beweise des Fourierschen Satzes zugrunde. Wenn  $\varepsilon < 1$ , ist die Reihe konvergent; bei  $\varepsilon = 1$ , hört sie auf zu konvergieren. Wenn wir  $q = \frac{2\pi y}{a}$  setzen und die Kurve zeichnen, deren abhängige Koordinate  $x = S$  ist, was finden wir dann?

Die folgende Figur zeigt den Verlauf der Kurve bei  $a = 1$  und  $\varepsilon = \frac{1}{3}$  für die ausgezogene Linie, bei  $a = 1$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  für die gestrichelte.

Gleichung ist also für die ausgezogene Kurve

$$x = \frac{2}{5 - 3 \cos 2\pi y} \quad (a = 1, \varepsilon = \frac{1}{3}).$$

Sie ist hier gezeichnet durch die Punkte

1) Ich habe mir die Freiheit genommen, Herrn Prof. Ball zu fragen, ob er für das Symbol  $\nabla^2$  eine Benennung habe; er erwähnte mir gegenüber das Wort *Nabla*, einen humorvollen Vorschlag Maxwells. Es ist dies der Name einer ägyptischen Harfe, die diese Form hatte. Ich glaube nicht, daß dies eine schlechte Benennung dafür ist. Laplacian wünsche ich nicht aus mehreren Gründen, historischen und phonetischen. [22. Jan. 1892. Seit 1884 habe ich nichts Besseres gefunden, und ich nenne sie jetzt Laplacian.]

(Anm. d. H.) In Deutschland bezeichnen wir  $\nabla^2$  mitunter auch durch  $\Delta$  und sprechen von einem „Laplaceschen Operator“.

2) Vgl. Thomson und Tait: Handb. d. theor. Phys. § 77.

$$(y, x) = (0, 1), \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{10}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{10}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

und ist symmetrisch fortgesetzt.

Für die gestrichelte Kurve haben wir

$$x = 5 - 4 \cos^{\frac{3}{2}} 2\pi y \quad (a = 1, \varepsilon = \frac{1}{2}).$$

Sie ist hier gezeichnet durch die Punkte

$$(y, x) = \left(0, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{10}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{10}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$$

und gleichfalls symmetrisch weitergeführt.

Eine andere Kurve mit  $\varepsilon > \frac{1}{2}$  ist noch steiler als die zweite und kommt unten der Nullachse näher. Sie ist nebenstehend gezeichnet. Nehmen wir den äußersten Fall  $\varepsilon = 1$ , so wird  $x = S$  unendlich groß für ein unendlich kleines  $q$  und ist für alle andern Werte von  $q$ , die kleiner als  $a$  sind, unendlich klein. Für einen beliebigen Wert von  $\varepsilon$  sind die Maximum- und Minimumordinaten der Kurve (die  $q = 0^\circ$  bzw.  $q = 180^\circ$  entsprechen)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

und demgemäß beträgt das Minimum

$$\frac{(1 - \varepsilon)^2}{(1 + \varepsilon)^2}$$

vom Maximum. So finden wir, wenn beispielsweise  $\varepsilon = 0,9$  gesetzt wird, die Minimumordinate nur noch  $\frac{1}{361}$  der Maximumordinate. Und weiter würden Sie für so große Werte der  $\varepsilon$  finden, daß die Konvergenz der Reihe unangenehm langsam ist. Man hat

$$(0,9)^{43} = 0,0108, (0,9)^{44} = 0,0097;$$

und braucht also mehr als 43 oder 44 Glieder, um im Resultat eine Genauigkeit von einem Prozent zu erreichen.

Nun weise ich auf die großen Abhandlungen von Poisson und von Cauchy über Tiefseewellen hin. (Poisson, *Mémoires sur la théorie des ondes*. Paris, *Mém. Acad. Sci.* I, 1816, p. 71—186; *Annal. de Chimie* V, 1817, p. 122—142. Cauchy, *Mémoire sur la théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluid pesant d'une profondeur indéfinie* [1815], Paris. *Mém. Sav. Étrang.* I, 1827, 3—312.) Diese Abhandlungen sind hervorragend elegante Muster wahrer Mathematik; und sie sind sehr streng durchgeführt. Allerdings mögen Sie elementare hydrodynamische Lehrbücher kennen, die weit schönere Darstellungen enthalten. Wenn Sie aber die elementare Theorie der Tiefseewellen vollständig und gut kennen: dann greifen

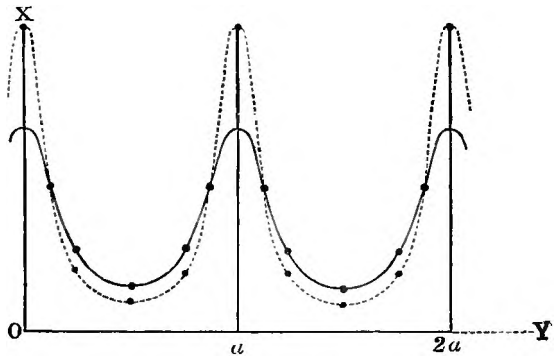


Fig. 25.

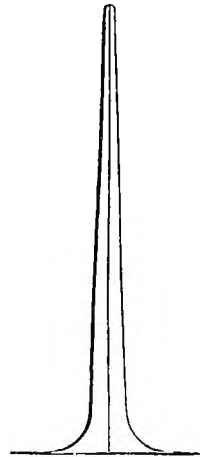


Fig. 26.

Sie zu Poisson und Cauchy für die höhere analytische Behandlung. Wer die Theorie der Tiefseewellen noch nicht kennt, mag sie in Elementarbüchern studieren. Die besten Lehrbücher, die ich für die Hydrokinetik kenne, sind die von Besant und von Lamb.<sup>1)</sup>

Der große Streit des Jahres 1815 — ich meine natürlich nicht den Kampf in der belgischen Ebene — drehte sich um die Frage: wer wird die Wellen regeln, Cauchy oder Poisson? Ihre Abhandlungen erscheinen mir nahezu gleich wertvoll. Mag man guten Grund haben, Cauchy den Vorzug zu geben, so ist doch die Abhandlung Poissons ebenso glänzend. Es ist zu erkennen, daß beide Schriftsteller einander sehr hoch schätzen, und ich nehme an, daß jeder von ihnen das Werk des andern für ebenso gut hielt wie das seinige (oder oft für besser!).

Die Aufgabe, die sie sich stellen, ist in ihrer streng analytischen Ausdrucksweise die folgende: Jeder Teil einer unendlich großen Wasserfläche gehe anfänglich mit einer willkürlich festgestellten, unendlich kleinen Verschiebung und ebenso mit einer willkürlich festgestellten, auf- oder abwärts gerichteten Geschwindigkeit von der Niveaufläche aus, dann ist zu untersuchen, was weiter geschehen wird. Es ist offenbar, daß man die Lösung dieser Aufgabe auf Grund der folgenden mehr elementaren Aufgabe finden wird: Was ist das Resultat einer unendlich kleinen Verschiebung an einem einzelnen Punkte, wie sie etwa hervorgerufen wird, wenn man einen Stein ins Wasser wirft? Es verursache beispielsweise ein Festkörper eine Senkung an irgendeiner Stelle, wobei die Bewegung des Festkörpers so bemessen ist, daß der Oberfläche des Wassers eine vorgeschriebene Geschwindigkeit und Verschiebung erteilt wird: dann stelle man sich den Festkörper als plötzlich nicht mehr vorhanden vor. Dieselbe Aufgabe in zwei Dimensionen ist außerordentlich einfach; so wenn es sich beispielsweise um Wellen in einem unendlich tiefen Kanal mit vertikalen Ufern handelt, indem eine plötzliche Störung im Kanal eingetreten ist, die über seine ganze Breite sich in gleicher Weise bemerkbar gemacht hat.

Cauchy und Poisson geben Symbole und nur gelegentlich numerische Resultate, sie geben keinerlei Diagramme oder graphische Darstellungen; und ich denke, es wird jeden, der auf den Gegenstand einzugehen beabsichtigt, befriedigen, ihn in folgender Weise durch graphische Darstellungen zu bearbeiten: — Zunächst hebe ich hervor, daß die elementare Lösung der Hydrokinetik für Tiefseewellen einfach einen Satz von Wellen oder einen Satz stehender Schwingungen ergibt (Sie können davon wählen, welche Sie wollen);

dabei ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen  $\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$  und demnach für verschiedene Wellen direkt proportional der Quadratwurzel aus der Wellenlänge. Die Schwingungsperiode von Wellen oder von stehenden Schwingungen ist  $\sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}$  und ebenfalls proportional der Quadratwurzel aus der Wellenlänge. Demnach wird, soweit nur die verschiedene Form der gestörten Wasserfläche in Betracht kommt, das Gesamtergebn der elemen-

1) Es darf wohl vor allem auf die Abhandlungen von Helmholtz hingewiesen werden: Ges. Abh., Bd. 3, S. 333 ff. D. H.

taren Hydrokinetik der Tiefseewellen durch die eine oder die andere der folgenden beiden Gleichungen ausgedrückt, die ich hier niederschreibe:

$$x = h \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( y + t \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \right); \text{ oder } x = \frac{\sin 2\pi y}{\cos \lambda} \frac{\sin t}{\cos t} \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}}.$$

Die Superposition zweier Bewegungen, die durch eine der beiden Formeln dargestellt ist, liefert ein Beispiel einer einzigen durch die andere Formel dargestellten Bewegung, wie Sie aus der elementaren Trigonometrie wissen.

Und nun wird es Sie hinsichtlich der großen mathematischen Arbeit Poissons und Cauchys über Tiefseewellen befriedigen zu hören, daß ihre Lösungen rein in den Additionen von Ansätzen bestehen, die, durch welche Sie wollen, von diesen Formeln dargestellt sind. Jede der einfachen Formeln oder ihre Summation mit verschiedenen Werten von  $h$  und  $\lambda$  stellt Wellen mit geraden Rippen oder allgemein mit geraden Linien gleicher Verschiebung dar: oder, wie wir uns auch ausdrücken können, zweidimensionale Wellenbewegung. Jeder mögliche Fall dreidimensionaler Bewegung (einschließlich der durch den Wurf eines Steines ins Wasser erzeugten kreisförmigen Wellen) wird durch Summation der Ansätze der Formel, wie sie vor uns steht, und nach Einsetzen von  $z$  für  $y$ , dargestellt; dabei bedeuten  $y$  und  $z$  die Kartesischen Koordinaten in der Horizontalebene der ungestörten Wasserfläche, und  $x$  gibt die Erhebung der gestörten Wasserfläche über dieser Ebene.

Indem wir uns aber auf die zweidimensionale Wellenbewegung beschränken, haben Sie nur Kurven zu berechnen und zu zeichnen, die dargestellt sind durch

$$s = \frac{1}{2} + \varepsilon \cos q_1 + \varepsilon^2 \cos 2q_2 + \varepsilon^3 \cos 3q_3 + \dots + \varepsilon^k \cos kq_k + \dots,$$

woselbst

$$q_k = \frac{2\pi}{a} (y - v_k t) \text{ und } v_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{ga}{2\pi}}$$

ist, und zwar beliebig für positive oder negative Werte von  $v_k$ <sup>1)</sup>.

Mit  $t = 0$  besitzen wir bereits zwei Kurven in der Zeichnung auf S. 91, wobei wir  $a = 1$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ ,  $= \frac{1}{2}$  genommen haben. Es sollte Sie interessieren, diese Kurven für andere Werte von  $t$  mit allen Einzelheiten auszuarbeiten, und dies kann ohne übermäßig große Mühe geschehen, da die Reihen in den vorstehenden Fällen sehr schnell konvergieren. In dieser Weise findet man graphische Darstellungen des zweidimensionalen Falles der von Cauchy und von Poisson bearbeiteten Aufgabe der Wellenbewegung in unendlich tiefem Wasser zwischen zwei parallelen Vertikalebenen.

Schließlich möchte ich noch die gleichen Berechnungen für  $\varepsilon = 0,9$  vorschlagen. Alles dieses gibt Ihnen also glänzende graphische Erläuterungen der zweidimensionalen Aufgabe über Tiefseewellen, die durch eine einzige anfängliche Störung längs einer unbegrenzten geraden Wasserlinie verursacht sind; und Sie lernen Cauchy und Poisson Dank wissen für ihre herrliche mathematische Behandlung ihrer Aufgabe mittels bestimmter Integrale und für ihre Resultate, aus denen Sie mit sehr mäßiger Mühe die Antwort auf jede besondere Frage berechnen können, die vernünftigerweise über den Gegenstand gestellt werden kann<sup>2)</sup>.

1) Im Original sind die Druckfehler zu verbessern.

D. H.

2) [Bemerkung vom Mai 1898. Für einige von diesen Rechnungen vergleiche meine Abhandlungen: „On Stationary Waves in Flowing Water,“ Phil.

## b) Molekular.

Wir greifen wiederum zu unseren Molekeln und denken sie uns in den Äther versetzt; wir fassen die Frage ins Auge: Welches ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen in ihm unter gewissen Voraussetzungen, die wir über die Massen dieser eingesenkten Molekeln machen, und wie weit ändern diese Molekeln die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gegenüber derjenigen im reinen Äther? Dann wollen wir den Gegenstand mit Rücksicht auf die Frage nach der Arbeit betrachten, die auf eine zur Fortpflanzungsrichtung senkrechte Ebene ausgeübt wird, und wir werden sehen, daß die Energie in einer Wellenlänge größer ist als die in einer Periode geleistete Arbeit, und daß es demgemäß unter diesen Umständen den Wellen unmöglich ist, gleichförmig in einen Raum einzudringen, der vorher von ruhender Materie eingenommen war.

Übrigens finden Sie die Frage nach der in einer Periode geleisteten Arbeit und nach der eingedrungenen Energie für die Wellenlänge in Lord Rayleighs Lehrbuch vom Schalle beantwortet, ebenso die Anwendung dieses Prinzips in Rücksicht auf die Möglichkeit unabhängiger Wellenfolgen, die ohne Formänderung fortschreiten, vollständig entwickelt.

Weitergehend wollen wir dann die Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in verschiedenen Richtungen eines äolotropen elastischen Festkörpers betrachten, um die Erklärung der Doppelbrechung vom Standpunkte des rein elastischen Festkörpers aus zu begründen. Sie wissen, daß es sich hier um einen Mangel handelt in der Erklärung der Fortpflanzung von Licht in zweiachsigen Kristallen. Aber das Problem ist ein wichtiges Stück der physikalischen Dynamik, und wenn ich es auch nur berühren will, hoffe ich doch seine Bedeutung Ihnen in klarem Lichte zeigen zu können.

Also zu unserer molekularen Frage! Unsere Annahmen bleiben die früheren (S. 84), so daß sich auch die Figur wiederholt. Namentlich sollen also die Massen der inneren Schalen und des Kernes des Gebildes, das eine Substanz-Molekel im Äther darstellt, sehr groß sein im Verhältnis zu einer gleich umfangreichen Menge Äther. Später werden wir die möglichen Annahmen über die Dichte des Lichtäthers in Betracht ziehen und zusehen, welche Grenzen der Großheit oder Kleinheit in dieser Beziehung denkbar sind. Für jetzt genügt es zu bemerken, daß selbst in Luft von gewöhnlicher Dichte die Masse Luft im Kubikzentimeter ungeheuer groß sein muß im Vergleich mit der Masse Lichtäther im Kubikzentimeter. Es muß demnach etwas ungeheuer Massiges im Innern jener Gebilde anzunehmen sein. Doch bedarf es hierüber reiflicher Überlegung, denn es muß auch ermittelt werden, wie man die große Energiemenge erhält, die nötig ist, die Erwärmung eines Körpers wie Wasser durch durchsetzendes Licht oder die Phosphoreszenz eines Körpers zu erklären, der noch einige Tage, nachdem er durch Licht in den Erregungszustand versetzt ist, leuchtend bleibt. Indessen liegen die Schwierigkeiten herein nicht, sondern in den schon im Beginne dargelegten Umständen. Überhaupt hat man mit dem allgemeinen Charakter der Erschei-

Mag. Vol. 22, p. 353, 445, 517; 1887, Vol. 23, p. 52. „On the Front and Rear of a Free Procession of Waves in Deep Water,“ Phil. Mag. 1887, Vol. 23, p. 113; und „On the Waves produced by a Single Impulse in Water of any depth or in a Dispersive Medium,“ Phil. Mag. 1887; Vol. 23, p. 252.]

nungen keinerlei Schwierigkeiten; die große Schwierigkeit bei der Wellentheorie des Lichtes liegt vielmehr darin, bei der Berechnung der Wirkungen die geeigneten Größen einzuführen.

So vermag man dann auch die Energie zu erklären, die erforderlich ist, einen Körper durch ihn durchsetzende strahlende Wärme zu erhitzen oder die Tatsache aufzuhellen, daß diese Energie als sichtbares Licht austritt, und zwar so langsam, daß sie zwei oder drei Tage als Licht zur Erscheinung zu bringen fortfährt. Das sind Dinge, die, so wunderbar sie sich darbieten, doch nur als Schlußfolgerungen aus der mechanischen Anschauungsweise sich ergeben, so daß jeder, der den Gegenstand auf Grund der Dynamik bearbeitet, diese Erscheinungen entdecken müßte, auch wenn er sie nicht vorher gekannt hat. Anomale Dispersion, Fluoreszenz, Phosphoreszenz, sichtbare und unsichtbar strahlende Wärme von längerer Periode usf. könnten ihm nicht verborgen bleiben.

Ich spreche hierüber so zuversichtlich, weil ich selbst erst durch solche dynamische Betrachtungen auf die mir erst unbekannte anormale Dispersion geführt worden bin, die andern schon fünfzehn oder zwanzig Jahre<sup>1)</sup> vorher geläufig war.

Noch hebe ich hervor, daß die Umfänge der Substanz-Molekeln sehr klein sein sollen im Verhältnis zu ihren Abständen, und letztere klein im Verhältnis zu den Wellenlängen.

Nehmen wir unsere Schlußformel von gestern (S. 86 oben) mit einigen Änderungen in der Bezeichnung wieder auf:

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{\rho}{n} + \frac{c_1 \tau^2}{m_1} \left\{ -1 + \frac{c_1 \tau^2}{m_1} \left( \frac{k^2 R}{\tau^2 - k^2} + \frac{k_1^2 R_1}{\tau^2 - k_1^2} + \dots \right) \right\}.$$

Hier bedeutet  $\xi$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen mit der Periode  $\tau$ ;  $n$ ,  $\rho$  und  $m_1$  bezeichnen jetzt die Starrheit des Äthers, die Masse des Äthers in der Raumeinheit und die Summe der Massen der ersten inneren Schalen der in der Raumeinheit sich vorfindenden groben Molekeln;  $c_1$  ist die Kraft der ersten Feder für die Einheit der Verlängerung, multipliziert mit der Anzahl Molekeln einer Raumeinheit in dem Äther;  $k$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  usw. geben die Fundamentalperioden der Molekeln, wenn die äußere Schale festgehalten wird, und zwar nach wachsender Größe geordnet;  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  usw. sind für die einzelnen Fundamentalschwingungen das Verhältnis der Energie der ersten inneren Schale zu der ganzen Energie des zusammengesetzten Vibrators.

Untersuchen wir, wie groß die Periode  $\tau$  in Vergleich mit den Fundamentalperioden  $k$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  ... des Vibrators sein wird; wenn wir annehmen, daß die begrenzende Schale festgehalten ist, werden wir eine gute, verständliche Erklärung der Dispersion finden, die mit den Beobachtungstatsachen über die Geschwindigkeitsdifferenz für verschiedene Perioden in hinreichender Übereinstimmung steht. Um uns diese Untersuchung zu erleichtern, nehmen wir unsere früheren Hilfsformeln wieder auf

1) Leroux, „Dispersion anormale de la vapeur d'iode“, Comptes Rendus LV, 1862, pp. 126—128; Pogg. Ann. CXVII, 1862, pp. 659, 660. Christiansen, „Über die Brechungsverhältnisse einer weingeistigen Lösung des Fuchsin“, Ann. Phys. Chem. CXLI, 1870, pp. 479, 480; Phil. Mag. XLI, 1871, p. 244; Annales de Chimie XXV, 1872, pp. 213, 214.

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{c}{n} + \frac{c_1 \tau^2}{4 \pi^2 n} (x_1 - 1),$$

$$x_1 = \frac{c_1}{4 \pi^2 m_1} \left( \frac{k^2 R \tau^2}{\tau^2 - k^2} + \frac{k^2 R_1 \tau^2}{\tau^2 - k_1^2} + \text{usw.} \right)$$

wo  $\xi$  und  $x_1$  die gleichzeitigen größten Verschiebungen der äußersten gewichtlosen Schale und der ersten in ihr befindlichen massigen Schale bezeichnen.

Wenn  $\tau$  kleiner als die kleinste der Fundamentalperioden ist, wird  $\frac{x_1}{\xi}$  negativ; die Wellengeschwindigkeit fände sich also größer als im freien Äther, und der Brechungsindex wäre kleiner als Eins. Aber in allen bekannten Fällen ist der Brechungsindex größer als Eins; und wenn dem so ist, muß  $\frac{x_1}{\xi} - 1$  positiv sein. Ich möchte zusehen, ob wir es erreichen können, daß unsere Formel für alles Licht gilt, vom äußersten photographisch wirksamen Ultraviolett, dessen Wellenlänge etwa die Hälfte derjenigen des Natriumlichtes ist, bis zu dem am wenigsten brechbaren, das wir kennen, nämlich der von einem Leslieschen Würfel ausgehenden strahlenden Wärme, deren Wellenlänge, wie ich von Prof. Langley gehört habe,  $\frac{1}{1000}$  Zentimeter oder 17 mal die Wellenlänge des Natriumlichtes ausmacht, also ungefähr das 40 fache der Wellenlänge äußerster photographischer Strahlen bildet<sup>1)</sup>.

Es ist wahrscheinlich, daß alle oder viele farblose, durchsichtige Flüssigkeiten und Festkörper Medien sind, in denen in keinem Teile dieses Gebietes anomale Dispersion besteht. In solchen Medien, die also bei kontinuierlicher Brechung im ganzen Gebiete keine anomale Dispersion zeigen, können die Perioden  $k, k_1, k_2, \dots$  nicht vorhanden sein. Bei Steinsalz ist, wenigstens in dem unteren Teile dieses Gebietes, auch keine anomale Dispersion vorhanden. Langleys Versuche über strahlende Wärme sind an Steinsalz ausgeführt, und bei allen diesen Versuchen scheint es, als ob wenig oder gar keine strahlende Wärme durch diese Substanz absorbiert würde.

[Zusatz vom 7. Juli 1898. Dies war wohl richtig im Oktober 1884; inzwischen zeigen aber Messungen von Langley über das Brechungsvermögen des Steinsalzes für strahlende Wärme von Wellenlängen (in Luft oder Äther) zwischen 0,43 und 5,3 Mikron (das Mikron ist  $10^{-6}$  eines Meters oder  $10^{-4}$  eines Zentimeters), die im Jahre 1886 (Phil. Mag. 1886, zweites Halbjahr) veröffentlicht sind, daß eine molekulare Periode existieren muß, die größer ist als die, die der Wellenlänge 5,3 entspricht. In einem Zusatze zur zwölften Vorlesung, Teil II, werden wir sehen, daß spätere Messungen des Brechungsvermögens, von Rubens, Paschen und andern, das Gebiet der gewöhnlichen Dispersion für Steinsalz bis zu Wellenlängen von 23 Mikron ausdehnen; sie liefern Resultate, die mit unserer Formel, die mit der von Sellmeier aus seiner Theorie entwickelten identisch ist, in einem Gebiete von 0,4 Mikron bis 23 Mikron glänzend übereinstimmen und darauf hinweisen, daß 56 Mikron die wahrscheinliche Wellenlänge strahlender Wärme im Äther bildet, deren Periode für Steinsalz eine kritische ist.]

1) Die neueren Entdeckungen haben bekanntlich dieses Wellenintervall außerordentlich erweitert. D. H.



## Elfte Vorlesung.

### Die Navier-Poissonsche Beziehung, ebene Wellen in äolotropen Körpern.

Wir wollen jetzt die Behandlung eines elastischen Festkörpers aufnehmen, der nicht isotrop ist. Wie ich schon öfter sagte, genügt die bloße Behandlung eines elastischen Festkörpers nicht für die Erklärung der auf das Licht sich beziehenden Eigenschaften der Kristalle. Indessen ist es doch wichtig, alles das, was über homogene elastische Festkörper und über Wellen in solchen bekannt ist, zu verstehen, bevor man zu den Verhältnissen in einem Kristall übergeht.

Das Wort Äolotropie ist das Gegenstück zu dem Wort Isotropie, worunter man mit Cauchy gleiche Eigenschaften in allen Richtungen versteht. Für Engländer ist die Ermittlung dieses Worts Äolotropie nicht ohne Interesse. Ich sehe, die Deutschen haben das Wort Anisotropie<sup>1)</sup> gewählt. Das Präfix „an“ bietet im Englischen Schwierigkeiten wegen Kollision mit dem unbestimmten Artikel an; die Angabe „an anisotropic solid is not an isotropic solid“, zeigt dieses klar. Ich fragte meinen Glasgower Universitätskollegen Prof. Lushington um Rat, und wir haben uns viel über den Gegenstand unterhalten. Er gab mir einige schöne Erläuterungen über das Griechische und kam schließlich doch zu dem Wort Äolotropie. Er hob hervor, daß *αἰόλος* buntscheckig heißt, und daß die Griechen dasselbe Wort zur Bezeichnung der Buntscheckigkeit bezüglich der Form, der Farbe und der Bewegung benutzt hätten; Beispiel für den letzteren Gebrauch sei unser alter Freund „*χορδαίολος Έκτωρ*“. Über die klassische Richtigkeit des Wortes besteht also kein Zweifel, und seine Übertragung in die Naturwissenschaft ist sehr passend. Das, was in verschiedenen Richtungen verschieden ist, oder was je nach der Richtung anders ist, soll eben äolotrop heißen.

Die Untersuchung der Folgen der Äolotropie für die Bewegung von Wellen oder das Gleichgewicht von Partikeln in einem elastischen Festkörper ist in der physikalischen Wissenschaft von grundlegender Bedeutung; ich habe es also nicht mehr nötig zu begründen, daß ich darauf eingehe; da sie aber zu gut bekannt ist, werde ich sehr kurz sein und unsere Aufmerksamkeit nur auf zwei oder drei fundamentale Punkte lenken, namentlich in der mathematischen Untersuchung weiter nichts vorbringen, als was von der Fortpflanzung einer ebenen Welle in einem elastischen Festkörper gilt, der an keinerlei Bedingung der Äolotropie gebunden ist, also in einem solchen, der Äolotropie allgemeiner Art besitzt.

Ehe wir aber an diese eigentliche Aufgabe der stetigen oder molaren

---

1) Wir benutzen jetzt ebenfalls das Wort Äolotropie sehr häufig. Die sprachliche Auseinandersetzung liest man gern. D. H.

Mechanik gehen, möchte ich den etwas in Nebel gehüllten molekularen Anfang des Gegenstandes berühren und Sie auf die Abhandlungen von Navier und von Poisson verweisen, in denen die Gesetze des Gleichgewichts oder der Bewegung eines elastischen Festkörpers durch die Untersuchung von aufeinander einwirkenden Punkten entwickelt werden, die sich mit Kräften beeinflussen, die Funktionen der Entfernung sind. Es kann kein Zweifel über die mathematische Bedeutsamkeit von Untersuchungen dieser Art und über ihr Interesse in Verbindung mit der molekularen Auffassung der Materie herrschen. Nun sind wir freilich weit über den Standpunkt hinausgegangen, auf dem Vater Boscovich als Schöpfer einer richtigen Auffassung der letzten Natur der Materie und der Kraft gegolten hat. Gleichwohl besteht ein nie aufhörendes Interesse an der bestimmten mathematischen Aufgabe über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Gruppe von Punkten, die Trägheit besitzen und aufeinander mit irgendwelchen gegebenen Kräften einwirken. Nimmer werden die glänzenden Anwendungen dieser Aufgaben auf die mechanische Astronomie vergessen werden können, nämlich auf die Bewegungen der Himmelskörper. Unsere Aufgabe freilich betrifft nicht diese großen Bewegungen einander anziehender Massen, sondern Gleichgewichtslagen und unendlich kleine Bewegungen bilden den Gegenstand der besonderen molekularen Mechanik, mit der wir uns jetzt zu beschäftigen haben.

Viele Schriftsteller [Navier (1827), Poisson (1828), Cauchy, F. Neumann, Saint-Venant und andere], die über diesen Gegenstand gearbeitet haben, sind zu einer Beziehung oder zu einer Reihe von Beziehungen zwischen den Elastizitätsmoduln gelangt, die ihnen wesentlich schienen für die Annahme, daß die Materie aus Partikeln besteht, die aufeinander mit gegenseitigen Kräften einwirken, und für die Annahme, daß die Elastizität eines Festkörpers die Äußerung der Kraft ist, die erforderlich ist, die Partikel unendlich wenig gegen die Lage verschoben zu halten, in welcher sie ihre gegenseitigen Kräfte in Gleichgewicht bringen. Was häufig die Naviersche, häufig die Poissonsche Beziehung genannt wird, ist aber, wie ich Ihnen zeigen möchte, nicht wesentlich für die in Frage stehende Hypothese. Diese vorausgesetzte Beziehung für den Fall eines isotropen Körpers ist interessant, aber theoretisch und experimentell vollständig widerlegt. Zweifellos kennen sie die meisten von Ihnen; sie findet sich im Thomson und Tait und, wie ich annehme, in jedem Elementarbuch über den Gegenstand. Ich will sie hier wiederholen.

Ein isotroper Festkörper erfüllt nach der Theorie von Navier oder Poisson die folgenden Bedingungen: wenn eine Säule aus isotropem Material ihrer Länge nach gedehnt wird, werden die seitlichen Dimensionen um ein Viertel des Verhältnisses verkürzt, um das die Länge sich vergrößert findet; und demnach ist die verhältnismäßige Verkleinerung des Querschnittes die Hälfte des Verhältnisses der Verlängerung. Stokes lenkte die Aufmerksamkeit auf die Fehlerhaftigkeit dieser Bedingung in bezug auf das tatsächliche Verhalten elastischer Festkörper. Er wies darauf hin, daß Gallerte, Kautschuk und ähnliches isotrope Material nicht bloß eine seitliche Einschränkung in der Größe eines Viertels der Verlängerung zeigen, sondern tatsächlich eine so große Einschränkung erfahren, daß der Gesamtraum überhaupt nicht verändert wird. Das heißt: Kautschuk und ähnliche Körper verändern die Fläche ihres Querschnittes im umgekehrten Verhältnis der Deh-

nung, so daß das Produkt aus der Länge in die Fläche des Querschnittes konstant bleibt. So ist die verhältnismäßige lineare Zusammenziehung quer zur Richtung der Dehnung die Hälfte der Dehnung und nicht bloß ein Viertel, wie Navier und Poisson finden.

Stokes<sup>1)</sup> berichtet ferner über ein Versprechen, das ich, ich glaube, es war im Jahre 1856, gemacht habe, nämlich neben der Materie, die Poissons Bedingung erfüllt, ein Modell aus einem elastischen Festkörper herzustellen, das, wenn der Maßstab der Teilung hinreichend klein gewählt wird, einen homogenen, elastischen Festkörper ergibt, das die Bedingung Poissons nicht erfüllt. Dieses mein Versprechen, das ich vor 30 Jahren geleistet habe, will ich jetzt erfüllen, da ich es früher nicht tat.

Ein Würfel soll uns helfen, uns acht Atome vorzustellen, die in seinen acht Ecken verteilt sind, dann denken wir uns den Würfel selbst entfernt. Die Art des elastischen Modells, das ich jetzt vorschlagen will, ist die folgende: Partikel oder Atome sind in gleichen Abständen in äquidistanten Reihen angeordnet und durch Federn in einer gewissen bestimmten Weise miteinander verbunden. Ich will Ihnen zeigen, daß wir benachbarte Partikel eines nach den Vorstellungen von Bosovich gebauten elastischen Festkörpers mittels einer eigentümlichen Anwendung einer Schnur und einer hinreichenden Anzahl von Federn so miteinander verbinden können, daß sie die Bedingung erfüllen, 18 unabhängige Moduln zu liefern. Wenn wir dann die Koordinaten für eine beliebig angenommene Orientierung im Festkörper transformieren, erhalten wir die berühmten 21 Koeffizienten oder Moduln der Greenschen Theorie. Sie alle wissen, daß Green nicht auf die wahren Verhältnisse selbst eingegangen ist; er bildete einfach den allgemeinen quadratischen Ausdruck für die Energie in Termen der sechs Komponenten des Zwanges mit ihren 21 unabhängigen Koeffizienten auf Grund der allgemeinsten Annahme, die über einen elastischen Festkörper gemacht werden kann.

Um nun ein Modell eines Festkörpers herzustellen, der die 21 unabhängigen Koeffizienten der Greenschen Theorie besitzt, denken wir darüber nach, wieviel disponible Federn wir haben, um durch sie die 8 Partikel an den Ecken eines Parallelepipeds miteinander zu verbinden. Zunächst seien sie längs der 12 Kanten des Parallelepipeds miteinander verbunden. Das reicht offenbar nicht hin, ihm irgendeine Starrheit der Gestalt zu geben, soweit Drillungen in den Hauptebenen in Betracht kommen. Die in dieser Weise die acht Partikel verbindenden Federn würden Widerstände gegen Verlängerungen in Richtung der Kanten abgeben, aber keinerlei Widerstand gegen Schrägstellung; Sie können die Form von der des rechtwinkligen in die eines schrägen Parallelepipeds überführen und die Schräge unendlich variieren, indem Sie, wenn Sie es wollen, alle acht Atome in eine Ebene oder sogar in eine Gerade überführen, ohne irgendwelche widerstehende Kräfte in Gang zu setzen. Was müssen wir nun noch haben, um der Anordnung Widerstand auch gegen Schrägung zu verleihen? Wir können die Partikel diagonal verbinden. Wir haben zunächst die beiden Diagonalen in jeder Seitenfläche; doch werden wir sehen, daß diese beiden tatsächlich nur als eine zählen; und weiter haben wir die vier Raumdiagonalen.

1) [Bericht der Brit. Association, Cambridge 1862. „On double Refraction“, p. 262, am Ende.]

Jetzt wollen wir zusehen, wie viele disponible Koeffizienten wir erhalten haben. Beachten wir, daß jede Kante zu vier Parallelepipeden der Gruppierung nach der Vorstellung von Boscovich gehört. Demnach ist nur ein Viertel der zwölf Federn in den Kanten als unabhängig verwertbar. So haben wir von den Kantenfedern drei disponibel. Jede Seitenfläche ist zwei Parallelepipeden gemeinsam; die beiden Diagonalen geben also nur eine Diagonale als disponibel, und die sechs Seitenflächen demnach sechs disponible Koeffizienten. Dazu kommen die vier räumlichen Diagonalen, die zu keinem andern Parallelepiped gehören, also von dieser Seite sechs disponible Konstanten. So haben wir also in der Steifheit von 13 Federn 13 disponible Konstanten. Zwei weitere disponible Konstanten haben wir in den Verhältnissen der Kanten des Parallelepipeds. Schließlich haben wir drei Winkel in den drei schiefen Parallelogrammen, die die Seitenflächen unseres schrägen Parallelepipeds bilden. So verfügen wir im ganzen über 18 Konstanten. Diese 18 disponiblen Konstanten können uns aber nicht 18 unabhängige Moduln liefern, da sie uns offenbar schon nicht einen unendlichen Widerstand gegen Kompression bei endlicher isotroper Starrheit zu geben vermögen; ein Fall, der seinem Wesen nach in 18 unabhängigen Moduln enthalten ist. Demnach muß ich noch eine andere disponible Konstante oder andere solche Konstanten finden, die mich in den Stand setzen, jede beliebige Zusammendrückbarkeit, die ich wünsche, herzustellen und die 21 unabhängigen Greenschen Koeffizienten für einen äolotropen Festkörper anzugeben. Zu diesen Zwecke müssen wir unserm Mechanismus noch etwas hinzufügen, was das Aggregat inkompressibel macht oder ihm jede gewünschte Kompressibilität verleiht; so daß wir es beispielsweise so einrichten können, daß es ebenso Kork wie Kautschuk darstellt, die äußersten Gegensätze bezüglich der Elastizität unter den bekannten natürlichen Festkörpern.

Ich muß gestehen, daß ich seit 1856, wo ich dieses Resultat versprochen habe, nie einen einfachen, bestimmten Weg gesehen habe, es auszuführen, bis ich vor einigen Monaten bei der Vorbereitung dieser Vorlesungen fand, daß ich dies erreiche, wenn ich zweimal einen Faden entlang die Kanten unseres Atomparallelepipeds schlinge. Es gibt eine sehr große Anzahl von Arten, dieses auszuführen; ich kann Ihnen aber nicht sagen, wie viele; ich wünschte, ich könnte es. Es ist kein uninteressantes Labyrinthspiel, sie zu finden und System in die Aufsuchung zu bringen. Eine Ausführung wird symbolisch in folgender Weise durch den Lauf der Schnur von Ecke zu Ecke durch die Folge der Koordinaten dieser Ecken dargestellt:

(000)(001)(011)(010)(000)(001)(011)(010)(000)(100)(110)(010)  
(110)(111)(011)(111)(101)(001)(101)(111)(110)(100)(101)(100).

[14. April 1898. Für die nachstehende, sehr klare Zeichnung (Fig. 27), die eine andere aus der großen Anzahl Arten, den Faden entlang die Kanten eines Parallelepipeds zu winden, darstellt, bin ich Herrn Brillouin dankbar, der Auszüge aus einigen der vorliegenden Vorlesungen einer von Herrn Lugol besorgten Übersetzung des ersten Bandes meiner Popular Lectures and Adresses angefügt hat. Herr Brillouin beschreibt seine Zeichnung wie folgt: — „Ich habe die von Thomson angegebene Ordnung geändert, indem ich die sechste und die achte Ecke miteinander vertauschte, damit der Faden auf seinen

beiden Wegen jede Kante in entgegengesetztem Sinne verfolge. Bei der ursprünglichen Anordnung würde die Fläche  $(000)(001)(011)(010)$  zweimal in demselben Sinne durchlaufen werden.“]

Sie sehen, ich habe den Faden genau dreimal durch jeden Eckring gezogen und spanne ihn jetzt in seiner ganzen Länge an und binde die Enden zusammen. Bemerken wir jetzt, wenn der Faden nicht dehnbar ist, dann gibt er Sicherheit dafür, daß die Summe der Längen der zwölf Kanten des Parallelepipeds ungeändert bleibt, welche Änderung man auch in der Lage seiner 12 Ecken vornimmt. Diese Bedingung würde also für jede beliebige

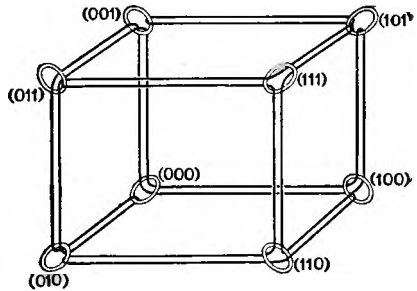


Fig. 27.

Änderung der Form bestehen bleiben; es ist aber zu beachten, daß hier der Körper immer ein Parallelepiped bleibt, denn unsere Anwendung der Anordnung bezieht sich auf einen homogenen Zwang eines nach den Vorstellungen von Boscovich gebauten elastischen Festkörpers. In ähnlicher Weise muß ein Faden zweimal um die vier Kanten jedes der angrenzenden Parallelepipede geführt sein, und acht von diesen haben eine gemeinsame Ecke, an der ich mir einen einzigen Ring vorstelle. Sonach wird jeder Ring dreimal von jedem von acht endlosen Fäden durchzogen. Jede Kante ist vier benachbarten Parallelepipeden gemeinsam, und also besitzt sie zwei Gruppen von jedesmal vier endlosen Fäden, die an ihr entlang gehen.

Nehmen wir jetzt als Beispiel an, das Parallelepiped sei ein Würfel. Ein in der beschriebenen Weise zwischen benachbarten Atomen angelegter Faden hält die Summe der 12 Kanten eines jeden Würfels konstant und gibt demnach die Sicherheit, daß sein Volumen für jede unendlich kleine Verschiebung konstant bleibt. Betrachten wir für einen Augenblick das Aggregat von so miteinander durch einen endlosen Faden verbundenen, durch die Ringe dargestellten Atomen. An sich und ohne weitere Anwendung einer Molekulartheorie sehen wir eine sehr interessante Struktur, die, vorausgesetzt daß die Fäden gespannt gehalten werden, ein konstantes Raumvolumen ausfüllt und immer noch vollkommen, ohne jede Starrheit, für jede Art Drillung ist. Wenn das Gebilde in einer der drei Richtungen der parallelen Kanten verlängert wird, so zieht es sich notwendigerweise in der zu jener senkrechten Richtung zusammen, so daß das Volumen konstant gehalten wird. Diese Art der Deformation liefert uns zwei von den fünf Komponenten der Verdrehungen ohne Änderung des Inhalts; die andern drei werden durch die Scherungen geliefert, die wir mit  $a$ ,  $b$ ,  $c$  bezeichnet haben; von diesen ist beispielsweise  $a$  eine Verdrehung, die so wirkt, daß die beiden einander parallelen Seitenflächen des Würfels, die zu  $OX$  senkrecht sind, in Rhombusse übergehen, während die andern vier Quadrate bleiben.

[14. April 1898. Der Würfel (Fig. 27) mit einem zweimal längs jeder Kante gespannten Faden ist, wenigstens mechanisch, einigermaßen interessant, da er einen isolierten Mechanismus zur Sicherung der Konstanz des Volumens eines Hexaëders verwirklicht, ohne jede andere Einschränkung vollkommener Freiheit seiner acht Ecken, als derjenigen, die eben die Konstanz des Volumens

erfordert: vorausgesetzt nur, daß das Hexaeder unendlich nahe kubisch ist, und daß jede Seitenfläche die (ebene oder krumme) von vier geraden Linien begrenzte Fläche kleinsten Inhalts ist. Vor zwei Jahren, als ich diese Vorlesung für den Druck von dem Papyrogramm von Hathaway vorbereitete, geriet ich auf einen Mechanismus von Fäden zur Sicherung der Konstanz eines von einer Ansammlung einer sehr großen Anzahl von kubisch angeordneten Punkten erfüllten Raumes, der viel einfacher ist als der vorgeführte, bei dem der um jeden einzelnen Würfel geschlungene Faden geschlossen ist. Erst etwas später bemerkte ich, daß Herr Brillouin mir bereits zuvorgekommen war. Ich bin sehr erfreut zu finden, daß er sich für den Gegenstand interessiert und eine neue Idee eingeführt hat, nach der die Bedingung konstanten Volumens in

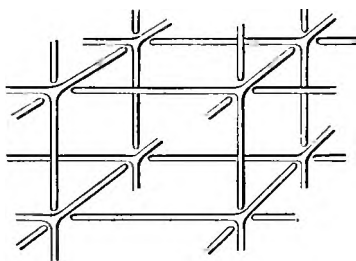


Fig. 28.

dem äußerst einfachen und schönen, in der nebenstehenden Zeichnung, Fig. 28 die einem seiner Aufsätze in dem bereits angeführten Bande entlehnt ist, dargestellten Mechanismus eines endlosen Fadens besteht. Diese Zeichnung stellt endlose Fäden dar, von denen einer vollständig gezeichnet ist. Die Fäden gehen durch Ringe. Fig. 28 enthält diese Ringe nicht. Fig. 29 aber deutet einen solchen Ring an, in Richtung einer Diagonale des Würfels gesehen, und man be-

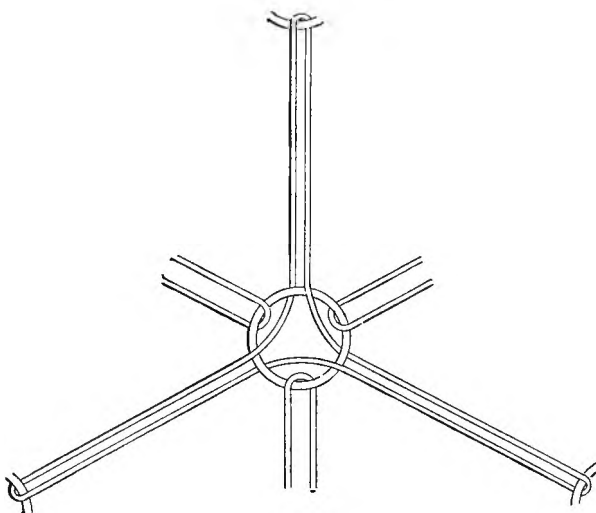


Fig. 29.

merkt, daß er zwölfmal von vier endlosen Fäden durchzogen wird, von denen der eine vollständig dargestellt ist. In einer Anhäufung einer ungeheuren Anzahl in dieser Weise durch endlose Fäden verbundener Ringe, die kubisch oder nahezu kubisch angeordnet sind, wird je eine Gruppe von drei in einer Ecke endigenden Kanten eines Würfels konstant gehalten, und demnach ist das Volumen bei einer genau kubischen Anordnung ein Maximum. Dieses Verfahren ist, da es nur zwei Linien desselben Fadens längs jeder vier Würfeln gemeinsamen Kante erfordert, weit einfacher als das oben beschriebene in meiner Baltimore - Vorlesung ursprüngliche, das acht Fadenstrecken längs jeder gemeinsamen Kante erforderte. Das

kinematische Resultat mit seinen mechanischen Folgen ist für beide Verfahren das gleiche.

Um die Annahme eines nicht dehnsamen elastischen Fadens zu ver-

meiden, kann man sich auch an jeder acht Würfeln gemeinsamen Ecke sechs Gelenke angebracht denken, die so verzapft sind, daß sie die Wirkung der gewissermaßen um Räder laufenden Fäden hervorbringen, die zuerst durch die sechs durch einen Ring der Figur 29 gehenden Fäden verwirklicht wurde. Und an Stelle jeder geraden Strecke des Fadens setzen wir einen undehnbaren Stab aus starrer Materie, der mit seinen beiden Enden in die Armenden der geeigneten Gelenke gehakt ist; genau wie die beiden Enden jedes Glockenzuges, der im neunzehnten und den vorhergehenden Jahrhunderten so bekannt war, aber zunächst im zwanzigsten Jahrhundert vergessen werden wird, da die Kinder aufwachsen, ohne je Winkelhebel am Glockenzuge und Glockenzüge überhaupt gesehen zu haben, weil sie nur elektrische Glocken kennen. Dabei ist zu beachten, daß unsere Verbindungsstäbe, da sie starr sind, sowohl Stoß wie Zug gut übertragen können, statt des bloßen Zuges des biegsamen Fadens, den wir uns zuerst vorgestellt haben. Unser Modell kann jetzt ganz aus Material gefertigt werden, das die Poisson-Naviersche Bedingung erfüllt, liefert uns aber auch eine Molekularstruktur für Materie, die diese Bedingung nicht erfüllt.

Nun setzen wir voraus, wir führen in der Idee Abstoßungen in Richtung der Raumdiagonalen zwischen den vier Eckenpaaren eines jeden Würfels ein. Dies hält alle Fäden zwischen den Ringen oder die Verbindungsstäbe zwischen den Gelenken gespannt und liefert einen kubisch isotropen elastischen Festkörper mit einer gewissen bestimmten äolotropischen Eigenschaft. Wenn wir noch außerdem gegenseitige Kräfte in den Kanten der Würfel zwischen jedem Atom und seinem nächsten Nachbar einführen, können wir vollständige Isotropie oder auch jede beliebige mit kubischer Isotropie vereinbare Äolotropie erhalten. Alles dieses gilt für einen nichtkompressiblen Festkörper. Wenn wir aber schließlich an Stelle der Fäden elastische Kautschukstreifen oder gedachte Anziehungen oder Abstoßungen (nach der Idee von Boscovich) an Stelle der Verbindungsstäbe zwischen den Gelenken einführen, geben wir die Möglichkeit für jeden Grad der Kompressibilität und stellen, wenn wir wollen, einen vollkommen isotropen elastischen Festkörper mit beliebig vorgeschriebenen Beträgen für die Starrheitsmoduln und den Widerstand gegen Zusammendrückung her, der das Verhältnis von Poisson besitzt oder auch nicht besitzt. Es ist mechanisch interessant, Einzelheiten dieser Aufgabe auszuarbeiten für den Fall, auf den Kork führt, nämlich ein vollkommen isotroper elastischer Festkörper, der im Verhältnis zu seinem Widerstande gegen Zusammendrückung eine weit größere Starrheit besitzt, als aus dem von Poisson gefundenen Verhältnis sich ergibt, und die gerade hinreicht, Konstanz des Querschnittes in einer durch Kräfte, die an ihren Enden wirken, zusammengedrückten oder gedehnten Säule aufrechtzuerhalten. Ebenso ist es interessant, weiter zu gehen und einen Festkörper herzustellen, von dem eine Säule sich transversal zusammenzieht, wenn sie mehr durch longitudinale Kräfte gezogen wird.

In meiner Vorlesung in Baltimore zeigte ich, ohne auf Einzelheiten einzugehen, wie man durch Annahme eines Parallelepipeds mit ungleichen Seiten anstatt eines Würfels und durch Einführung verschiedener Elastizitätsgrade in den Teilen der Fäden, die längs der verschiedenen Kanten eines jeden Parallelepipeds liegen, und ferner durch Einführung von Anziehungs- oder Abstoßungskräften zwischen benachbarten Atomen ein Modell eines

elastischen Festkörpers mit den einundzwanzig unabhängigen Moduln der Greenschen Theorie herstellen kann.

Allein die Anwendung von Fäden und Seilscheiben oder von Gelenken, wie wir sie uns vorgestellt haben, mußte, obwohl sie in der Mechanik hochinteressant und gewissermaßen klassisch geworden ist, durch ihre Beziehung zu Lagranges ursprünglichem Verfahren bei dem Beweise seines Satzes über die „virtuellen Geschwindigkeiten“ (Gesetz der geleisteten Arbeit) in der mathematischen Mechanik, viel von ihrem Interesse für die Molekularphysik verlieren, als ich ermittelte<sup>1)</sup>, daß die Einschränkung auf das von Poisson gefundene Verhältnis in einem elastischen Festkörper nur für den Fall einer homogenen Anhäufung von *einzelnen* Boscovichschen Punktatomen gilt; daß aber in einer Anhäufung von Paaren einander unähnlicher Atome leicht solche Kraftgesetze zwischen den ähnlichen und zwischen den unähnlichen Atomen eronnen werden können, daß sie für einen isotropen elastischen Festkörper jede beliebige vorgeschriebene Starrheit und jeden beliebigen vorgeschriebenen Modul des Widerstandes gegen Pressung, und für einen äolotropen homogenen Festkörper Greens 21 unabhängige Elastizitätsmoduln liefern, oder 18, wenn die Koordinatenachsen so gelegt sind, daß ihre Anzahl um drei reduziert wird.]

Ich möchte jetzt mit Ihnen ein Stück mathematische Arbeit durchwandern, das, obwohl von Green<sup>2)</sup> darauf hingewiesen ist, bisher, soviel ich weiß, noch nirgends veröffentlicht ist, außer teilweise in meinem Artikel über „Elastizität“ in der Encyclopädia Britannica. Es handelt sich darum, die allgemeinste ebene Welle in einem homogenen elastischen Festkörper, der die möglich allgemeinste Äolotropie besitzt, zu finden, ausgedrückt in Termen der 21 Greenschen Moduln<sup>3)</sup>. Nimmt man Greens allgemeine Formel mit der Bezeich-

1) [Proc. R. S. E. 1. und 15. Juli 1889: Math. and Phys. Papers, Vol. III. Art. XCVII p. 395: ebenso „On the Elasticity of a Crystal according to Boscovich“, Proc. R. S. 15. Juni 1893, wieder veröffentlicht als Anhang des vorliegenden Bandes.]

2) Green's Mathematical Papers (Macmillan 1871), p. 307, 308.

3) [16. Juni 1898. — Durch Anführungen in Todhunter und Pearsons Elasticity habe ich neuerdings drei sehr wichtige und gedankenreiche Abhandlungen von Blanchet im Liouvilleschen Journal Bd. V u. VII (1840 u. 1842) gefunden, in denen diese Aufgabe auf Grund von 36 unabhängigen Koeffizienten in den sechs linearen Gleichungen behandelt ist, die jede der sechs Komponenten der Deformation in Termen der sechs Komponenten des Zwanges darstellen. Hinsichtlich der Geschichte der Lehre von der Energie in der abstrakten Mechanik ist es bemerkenswert, in einem Berichte von Poisson, Coriolis und Sturm an die Französische Akademie der Wissenschaften (Comptes Rendus, Vol. VII, p. 1143) über die erste von diesen Abhandlungen (die der Akademie am 8. August 1838 vorgelegt wurde) den folgenden Ausspruch zu finden: „Die Differentialgleichungen, denen die Verschiebungen eines beliebigen Punktes des Mittels, das aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist, unterworfen sind, enthalten 36 konstante Koeffizienten, die von der Natur des Mittels abhängen, und die man nicht auf eine geringere Anzahl reduzieren könnte, ohne Hypothesen über die Anordnung der Molekel und über ihre Einwirkungen aufeinander zu machen.“ (Die Hervorhebung durch Sperrung ist von mir veranlaßt.) Die zweite Abhandlung Blanchets, die ebenfalls 36 wesentlich unabhängige Koeffizienten enthält, wurde der Akademie der Wissenschaften am 14. Juni 1841 eingereicht, und es wurde über sie von Cauchy, Liouville und Duhamel ohne jeden Protest gegen die 36 Koeffizienten Bericht erstattet. In der Abhandlung von Green „On the Propagation of Light in crystallized Media“, die am 20. Mai 1839



nung, die ich Ihnen in der zweiten Vorlesung vorgeführt habe (S. 16), so findet man<sup>1)</sup>)

$$\left. \begin{aligned} P &= (11)e + (12)f + (13)g + (14)a + (15)b + (16)c \\ Q &= (12)e + (22)f + (23)g + (24)a + (25)b + (26)c \\ R &= (13)e + (23)f + (33)g + (34)a + (35)b + (36)c \\ S &= (14)e + (24)f + (34)g + (44)a + (45)b + (46)c \\ T &= (15)e + (25)f + (35)g + (45)a + (55)b + (56)c \\ U &= (16)e + (26)f + (36)g + (46)a + (56)b + (66)c \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Wir fassen jetzt ein gedachtes unendlich kleines Parallelepiped des Festkörpers ins Auge,  $dx\,dy\,dz$ , und beachten, daß auf dieses vermöge der Zwangskomponenten  $P, Q, R, S, T, U$  beispielsweise parallel zu  $OX$  an seinen drei Seitenflächenpaaren die folgenden Paare einander entgegengesetzter Kräfte wirken

$$\begin{aligned} (P \pm \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} dx) dy \cdot dz; \\ (U \pm \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial y} dy) dz \cdot dx; \\ (T \pm \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial z} dz) dx \cdot dy; \end{aligned}$$

so ist die gesamte resultierende Komponente parallel  $OX$  demgemäß

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz. \quad (2)$$

Wenn wir also mit  $(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$  die Koordinaten eines Punktes eines Festkörpers, dessen Koordinaten in der Gleichgewichtslage  $(x, y, z)$  sind, zur Zeit  $t$  bezeichnen, erhalten wir, wie schon in der zweiten Vorlesung (oben S. 19) gefunden ist,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial z} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Nun kann eine ebene Welle oder eine Folge von ebenen Wellen oder die Bewegung, die sich aus der Übereinanderlagerung von Sätzen ebener Wellen ergibt, die in der gleichen oder in den entgegengesetzten Richtungen fortschreiten, allgemein als irgendeine Bewegung des Festkörpers definiert

vor der Cambridge Philosophical Society vorgetragen worden ist, wurde als grundlegender Ausdruck für die Energie eines Zwanges eine quadratische Funktion der sechs Zwangskomponenten benutzt; und dadurch wurden fünfzehn Gleichheiten zwischen den 36 Koeffizienten in den linearen Gleichungen für die Deformation in Termen des Zwanges, die die Anzahl unabhängiger Koeffizienten auf 21 herabdrücken, ohne Hypothese bewiesen.]

1) Vgl. Anm. zu S. 17.

werden, bei der jede unendliche dünne, zu einer festgelegten Ebene parallele Schicht eine rein translatorische Bewegung ausführt; oder in andern Worten, eine Bewegung, bei der  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  Funktionen von  $(p, t)$  sind, wo  $p$  das Lot von  $O$  auf die durch  $x, y, z$  parallel zur Wellenfläche gehende Ebene bezeichnet. Wenn  $l, m, n$  die Richtungskosinus dieses Lotes angeben, erhalten wir

$$p = lx + my + nz \quad (4)$$

und demgemäß

$$\frac{\partial}{\partial x} = l \frac{\partial}{\partial p}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = m \frac{\partial}{\partial p}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = n \frac{\partial}{\partial p}. \quad (5)$$

Demnach bekommen wir nach den Definitionen von  $c, f, g; a, b, c$ , die ich in der zweiten Vorlesung (S. 16) gegeben habe,

$$\left. \begin{aligned} c &= l \frac{\partial \xi}{\partial p}; & f &= m \frac{\partial \eta}{\partial p}; & g &= n \frac{\partial \zeta}{\partial p} \\ a &= n \frac{\partial \eta}{\partial p} + m \frac{\partial \zeta}{\partial p}; & b &= l \frac{\partial \xi}{\partial p} + n \frac{\partial \zeta}{\partial p}; & c &= m \frac{\partial \xi}{\partial p} + l \frac{\partial \eta}{\partial p} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

und so findet sich aus (3), (5), (1) und (6)

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial p^2} (A \xi + C' \eta + B' \zeta) \\ \varrho \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial p^2} (C' \xi + B \eta + A' \zeta) \\ \varrho \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial p^2} (B' \xi + A' \eta + C \zeta). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Dabei ist

$$A = (11)l^2 + (66)m^2 + (55)n^2 + 2 \times (16)lm + 2 \times (56)mn + 2 \times (15)nl$$

$$B = (66)l^2 + (22)m^2 + (44)n^2 + 2 \times (26)lm + 2 \times (24)mn + 2 \times (46)nl$$

$$C = (55)l^2 + (44)m^2 + (33)n^2 + 2 \times (45)lm + 2 \times (34)mn + 2 \times (35)nl$$

$$A' = (56)l^2 + (24)m^2 + (34)n^2 + [(25) + (46)]lm + [(23) + (44)]mn + [(36) + (45)]nl$$

$$B' = (15)l^2 + (46)m^2 + (35)n^2 + [(14) + (56)]lm + [(36) + (45)]mn + [(13) + (55)]nl$$

$$C' = (16)l^2 + (26)m^2 + (45)n^2 + [(12) + (66)]lm + [(25) + (46)]mn + [(14) + (56)]nl.$$

Nun muß für unsere ebenen Wellen, die in den beiden Richtungen fortschreiten, jede von den Größen  $\xi, \eta, \zeta$  eine Funktion von  $(p \pm vt)$  sein, wo  $v$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle bezeichnet; also haben wir

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial p^2}; \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = v^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial p^2}; \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = v^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial p^2}. \quad (9)$$

Wenn wir die Beschleunigungskomponenten mit  $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}$  bezeichnen, gehen demnach die Gleichungen (7) über in

$$\left. \begin{aligned} (A - \varrho v^2) \ddot{\xi} + & C' \ddot{\eta} + B' \ddot{\zeta} = 0 \\ C' \ddot{\xi} + (B - \varrho v^2) \ddot{\eta} + & A' \ddot{\zeta} = 0 \\ B' \ddot{\xi} + A' \ddot{\eta} + (C - \varrho v^2) \ddot{\zeta} = & 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Setzt man die Determinante dieser Gleichungen gleich Null, so erhält man für  $v^2$  drei reelle Werte  $v_1^2, v_2^2, v_3^2$ , die naturgemäß positiv sind, wenn die Koeffizienten (11), (66) usw. solche Beträge haben, die die elastischen Eigenschaften eines stabilen elastischen Festkörpers darzustellen vermögen. Und für jeden Wert von  $v^2$  liefern die Gleichungen (10) bestimmte Werte  $\lambda, \mu$  für die Verhältnisse  $\ddot{\eta}/\ddot{\xi}, \ddot{\zeta}/\ddot{\xi}$ , die wir mit  $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \lambda_3, \mu_3$  bezeichnen wollen. Man erhält schließlich als vollständige Lösung unserer Aufgabe übereinandergelagerte Sätze von drei Wellen, die wie folgt dargestellt sind:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varphi_1(p + v_1 t) + \varphi_2(p + v_2 t) + \varphi_3(p + v_3 t) \\ &\quad + \psi_1(p - v_1 t) + \psi_2(p - v_2 t) + \psi_3(p - v_3 t) \\ \eta &= \lambda_1(\varphi_1 + \psi_1) + \lambda_2(\varphi_2 + \psi_2) + \lambda_3(\varphi_3 + \psi_3) \\ \zeta &= \mu_1(\varphi_1 + \psi_1) + \mu_2(\varphi_2 + \psi_2) + \mu_3(\varphi_3 + \psi_3), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

wo mit  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$  willkürliche Funktionen bezeichnet sind.

Diese Lösung und die weiteren auf sie sich beziehenden Formeln werden uns sehr nützlich sein, wenn wir die zugehörige Wellenfläche in ihrer ganzen Allgemeinheit behandeln; nämlich diejenige Fläche, die von allen zu  $(l, m, n)$  senkrechten Ebenen in Abständen von dem gedachten Ursprung der Störung, die gleich  $v_1 t, v_2 t, v_3 t$  sind, berührt wird.

## Zwölfte Vorlesung.

### Drei Wellen. Die Sellmeiersche Formel und die Erfahrung. Lichtquellen.

Wir wollen uns dieses Wellenproblem etwas näher ansehen. Unser Schluß ist folgender: wenn wir in ganz beliebiger Lage zum elastischen Festkörper einen willkürlichen Satz von parallelen Ebenen als Wellenfronten wählen, dann gibt es drei zueinander senkrechte Richtungen (jede im allgemeinen schräg gegen diesen Satz Ebenen), welche die Bedingung erfüllen, daß die elastische Kraft in Richtung der Verschiebung liegt; und die Gleichungen, die wir aufgestellt haben, drücken die Wellenbewegung aus. Jede von diesen drei Wellen ist dabei eine Welle, bei der die Schwingung der Materie in ihrer Front in einer hin- und hergehenden Bewegung besteht, im allgemeinen in einer zur Ebene dieser Front schrägen Linie. Man findet dann, daß die Schwingungen der drei Wellen, die den drei Wurzeln der kubischen Determinantengleichung entsprechen, gleichviel ob sie schräg zur Wellenfront sind oder nicht, in zueinander rechtwinkligen Richtungen erfolgen.

#### a) Molar.

[*Dreizehn und ein halbes Jahr* nach der gehaltenen Vorlesung. Hier folgt ein ganz kurzer Beweis. Man setze

$$\begin{aligned} A' &= \sqrt{\beta\gamma}; \quad B' = \sqrt{\gamma\alpha}; \quad C' = \sqrt{\alpha\beta}; \\ \text{und} \quad S &= \xi \sqrt{\alpha} + \eta \sqrt{\beta} + \zeta \sqrt{\gamma} \end{aligned} \quad (12)$$

Bei diesen Bezeichnungen ergeben die Gleichungen (10) der vorausgehenden Vorlesung:

$$\ddot{\xi} = \frac{S\sqrt{\alpha}}{ev^2 - A + \alpha}; \quad \ddot{\eta} = \frac{S\sqrt{\beta}}{ev^2 - B + \beta}; \quad \ddot{\zeta} = \frac{S\sqrt{\gamma}}{ev^2 - C + \gamma} \quad (13)$$

Multipliziert man diese Gleichungen bezüglich mit  $\sqrt{\alpha}$ ,  $\sqrt{\beta}$ ,  $\sqrt{\gamma}$ , addiert und dividiert beide Seiten der resultierenden Gleichung durch  $S$ , so findet man:

$$1 = \frac{\alpha}{ev^2 - A + \alpha} + \frac{\beta}{ev^2 - B + \beta} + \frac{\gamma}{ev^2 - C + \gamma} \quad (14)$$

Dies ist eine Form, die ich der determinierenden kubischen Gleichung für die Reduktion einer homogenen quadratischen Funktion dreier Veränderlichen vor fünfzehn Jahren im *Cambridge Mathematical Journal* gegeben habe. (*Math. and Physical Papers*, Art. XV, Vol. I, p. 55.)

Schreibt man nun die zwei entsprechenden Gleichungen für die Wurzeln  $v_1^2$ ,  $v_2^2$  nieder und bildet die Differenz, so findet sich:

$$0 = v_1^2 - v_2^2 \left\{ \frac{\alpha}{(v_1^2 - A + \alpha)(v_2^2 - A + \alpha)} + \frac{\beta}{(v_1^2 - B + \beta)(v_2^2 - B + \beta)} + \frac{\gamma}{(v_1^2 - C + \gamma)(v_2^2 - C + \gamma)} \right\} \quad (15)$$

Demnach kann der zweite Faktor dieses Ausdruckes jeden beliebigen Wert haben, wenn  $v_1^2$  und  $v_2^2$  einander gleich sind. Wenn sie aber nicht gleich sind, so muß der zweite Faktor Null werden und (13) ergibt dann:

$$\ddot{\xi}_1 \ddot{\xi}_2 + \ddot{\eta}_2 \ddot{\eta}_1 + \ddot{\zeta}_1 \ddot{\zeta}_2 = 0, \quad (16)$$

was uns zeigt, daß die Schwingungslinien in je zwei beliebigen von unseren drei Wellen notwendig zu einander senkrecht stehen<sup>1)</sup>, außer in dem Falle, daß zwei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gleich sind. Findet dieser Fall statt, so gehen die beiden Wellen in eine Welle über, und die Schwingungslinie kann in einer beliebigen Richtung in einer Ebene liegen, die zu der durch die dritte Wurzel gegebenen Linie senkrecht ist. Auch der Fall dreier gleicher Wurzeln kann eintreten; alsdann bilden die drei Wellen nur eine Welle, und die Schwingungslinie kann in einer ganz beliebigen Richtung verlaufen. Beidemale, im letzten Falle und in dem zweier gleichen Wurzeln kann jede Partikel eine kreisförmige oder elliptische Bahn beschreiben oder sich auch in einer Geraden hin- und herbewegen. Eine Gleichung zwischen  $(l, m, n)$  gibt uns einen solchen Kegel, daß, wenn die ebene Wellenfront senkrecht zu einer beliebigen seiner erzeugenden Geraden ist, zwei von den drei Wurzeln einander gleich sind. Zwei Gleichungen zwischen  $(l, m, n)$  liefern eine zur Wellenfront oder zu den Wellenfronten normale Gerade, für welche die drei Wellengeschwindigkeiten gleich sind.

Die Untersuchung der drei Sätze ebener Wellen mit drei verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, deren Fronten aber sämtlich einer Ebene parallel sind, führt uns zu einer Wellenfläche, die meines Wissens von allem, was man bisher in der Mechanik eines elastischen Festkörpers bearbeitet hat, verschieden ist — einer Wellenfläche, in der drei Schalen vorhanden sind anstatt nur zwei, wie in der Wellenfläche von Fresnel, und in der Verdichtung und Verdünnung an jedem Punkte jeder Schale besteht an Stelle bloßer Verdrehung des Äthers an jedem Punkte jeder der beiden Schalen der Fresnelschen Wellenfläche. Es ist eine geometrische Aufgabe von wohl zu beachtender Bedeutung, diese Wellenfläche näher zu bearbeiten.

[16. Mai 1898. — Hier folgt die vollständige Bearbeitung der Aufgabe bis auf die Ausführung der letzten Elimination der Größen  $l, m, n$ . In Gleichung (14) setzen wir für  $v$  den Wert  $lx + m\bar{y} + n z$  und für  $n$  überall, wo diese Zahl vorkommt,  $\sqrt{1 - l^2 - m^2}$ . Die Größe, in die dann die rechte Seite der Gleichung (14) übergeht, bezeichnen wir mit  $\Phi(l, m, x, y, z)$ . Hierauf bilden wir die folgenden drei Gleichungen:

1) Dieser Satz ist nicht richtig für die drei von Blanchet (s. obige Anmerkung, S. 104) gefundenen Schwingungsrichtungen, die für drei verschiedene Lösungen seiner kubischen Gleichungen nicht notwendig alle zueinander senkrecht erfolgen, es sei denn, daß die 15 Greenschen Gleichungen befriedigt sind. Vgl. Thomson und Tait: Theoretische Physik §§ 344, 345.

$$\Phi = 1; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial l} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial m} = 0 \quad (17)$$

und eliminieren aus ihnen  $l$  und  $m$ ; dann stellt die sich ergebende Gleichung die Wellenfläche dar, d. h. die Fläche, deren Tangentialebenen an denjenigen ihrer Punkte, woselbst die Richtungskosinus  $l, m, n$  sind, den Abstand  $v$  vom Anfangspunkte haben. Ich brauche wohl kaum zu sagen, daß vielleicht eine symmetrische Behandlung der Größen  $l, m, n$  dem Verfahren der Elimination vorzuziehen ist.]

Die Wellenflächenaufgabe läßt sich folgendermaßen aussprechen: Der Festkörper werde innerhalb eines kleinen, den Anfangspunkt  $O$  der Koordinaten umhüllenden Raumtheiles plötzlich in irgendeiner Weise gestört und dann sich selbst überlassen. Es wird nun gefordert die Fläche zu finden, bis zu der aus jenem Punkte nach Verfluß der Zeit  $t$  ein Stoß der Störung gelangt ist (in der obigen mathematischen Lösung ist  $t = 1$  gesetzt).

[16. Juni 1898. Ich finde jetzt, daß diese Aufgabe sehr klar ausgesprochen und mit großer analytischer Gewandtheit behandelt ist von Blanchet in seinem „Mémoire sur la Propagation et la Polarisation du Mouvement dans un milieu élastique infini cristallisé d'une manière quelconque“, der ersten der drei Abhandlungen, auf die in der obigen Anmerkung (S. 104) verwiesen ist. Am Ende dieser Abhandlung resümiert er seine Schlüsse wie folgt:

„1. In einem elastischen, homogenen, unendlichen, in irgendeiner Weise kristallisierten Medium pflanzt sich die, von einer zentralen Erschütterung hervorgerufene Bewegung in einer Welle von mehr oder weniger komplizierter Form fort.

2. Für jede Wellenschale ist in derselben Richtung die Fortpflanzungsgeschwindigkeit konstant, sie ist aber mit der Richtung nach einem von der Form der Welle abhängigen Gesetz veränderlich.

3. Für eine und dieselbe Richtung sind die Schwingungsgeschwindigkeiten in einer und derselben Wellenschale einander ständig parallel, solange die Bewegung andauert. Die Parallelität richtet sich nach der Wellenschale. Und dies bildet eine wirkliche Polarisation der Bewegung.“

In 2 und 3 dieses Satzes muß man unter „Richtung“ die Richtung der Normale der Tangentialebene verstehen, und zu 3 ist hinzuzufügen, daß die dort erwähnten drei verschiedenen Parallelrichtungen wegen der 15, von Blanchet nicht angenommenen, Gleichungen zwischen den sechsunddreißig Koeffizienten gegeneinander senkrecht sind. Die zweite und die dritte Abhandlung Blanchets (Liouvilles Journal, Bd. VII, 1842) sind überschrieben; „Mémoire sur la Délimitation de l'onde dans la propagation des Mouvements Vibratoires“ und „Mémoire sur une circonstance remarquable de la Délimitation de l'onde“. Sie enthalten einige äußerst interessante Schlüsse, die Blanchet auf Veranlassung Liouvilles als Erweiterungen von früher von Poisson für einen isotropen Festkörper gefundenen Resultaten für einen kristallisierten Körper ausgearbeitet hat, indem er den Raum in Betracht zog, innerhalb dessen eine Bewegung des elastischen Festkörpers stattfindet, zu einer beliebigen Zeit nach Aufhören der störenden Wirkung an irgendeiner Stelle. Cauchy hat denselben Gegenstand bearbeitet und hat eine analytische Methode angegeben, seinen „Calcul des Residus“ die Blanchet mit gebührender

Anerkennung benutzt. Die beiden Forscher, deren Untersuchungen fast in die gleiche Zeit fallen, scheinen, jeder unabhängig vom andern, dieselben Resultate gefunden zu haben, und es scheint jeder loyal die Leistung des andern gewürdigt zu haben. Ebenso ist es interessant zu finden, daß Poisson, Coriolis, Sturm, Cauchy, Liouville und Duhamel günstig und aufmunternd über die Abhandlungen Blanchets berichtet haben, und daß Liouville ihm im Verlaufe seiner Untersuchungen mit Rat beigestanden hat.

Als einen Teil seines Schlusses über die „délimitation“ äußert sich Blanchet: „Es gibt im allgemeinen weder eine Verschiebung noch eine Geschwindigkeit jenseits der weitesten Schale der Wellen“. Und Cauchy sagt über denselben Gegenstand in den *Comptes Rendus* XIV. (1842), p. 13, indem er Verdichtungs- und Verdünnungswellen anschießt: „Die Verschiebungen und demnach auch die Geschwindigkeiten der Molekeln hören an allen den Punkten auf, die außerhalb oder innerhalb zweier fortgeplanter Wellen liegen. Herr Blanchet hat mit Recht bemerkt, daß man im allgemeinen nicht dasselbe von Punkten sagen kann, die zwischen den beiden Wellen liegen. Immerhin ist es gut zu beachten, daß selbst in diesen letzteren Punkten die Verschiebungen und die Geschwindigkeiten sich auf Null reduzieren, wenn man die Ausdehnung des Volumens als Null voraussetzt . . . d. h. in andern Worten, wenn die longitudinalen Schwingungen verschwinden.“<sup>1)</sup>

Green behandelt den Gegenstand der Wellen in einem äolotropen elastischen Festkörper in einer besonderen und höchst interessanten Weise zu dem Zwecke, eine mechanische Theorie „der Fortpflanzung des Lichtes in kristallisierten Medien“ auszubilden. Er untersucht Bedingungen<sup>2)</sup> dafür, daß „transversale Schwingungen stets genau in der Front der Welle erfolgen, oder, modern ausgedrückt, daß die Welle eine rein drillende sei. Er findet<sup>3)</sup> 14 Beziehungen zwischen seinen 21 Koeffizienten, die diesen Zustand für eine zweischalige Wellenfläche sichern, von der er ermittelt, daß sie mit der Fresnelschen identisch ist. Es muß notwendig noch eine dritte Schale vorhanden sein, obwohl Green sie überhaupt nicht erwähnt. Sie ist ellipsoidisch und entspricht ihrem Wesen nach einer Verdichtungs-Verdünnungswelle mit Schwingungen in jedem Punkte, die zur Tangentialebene senkrecht sind. Sie ist vollkommen von der zweischaligen Fläche der Drillungswelle getrennt. Eine störende Quelle kann hiernach so eingerichtet werden, daß sie bloß Drillungsbewegung mit einer zweischaligen Wellenfläche hervorruft, oder auch nur Verdichtungs-Verdünnungs-Wellenbewegung mit der ellipsoidischen Wellenfläche oder auch beide Arten gleichzeitig. Die drei Hauptachsen der ellipsoidischen Wellenfläche fallen mit den drei für die Wellenfläche der Fresnel-Greenschen Wellenbewegung gefundenen Symmetrieachsen zusammen.

Diese Mechanik der Wellen in einem elastischen Festkörper bildet einen

1) Diese Anführungen sind einem interessanten Berichte über die Arbeiten von Blanchet und von Cauchy über diesen Gegenstand den Seiten 627—634 in Todhunter und Pearsons *Elasticity*, Vol. I entnommen.

2) Greens *Mathematical Papers*: „On Propagation of Light in Crystallized Media“, p. 293. Abgedruckt aus *Trans. Cambridge Philosophical Society*, May 20, 1839.

3) *Ibid.* p. 309.

Gegenstand feiner Untersuchung, und ich bedaure, ihn für einige Zeit verlassen zu müssen.

Wenn es sich aber darum handelt, die Schwierigkeiten niederzukämpfen, die uns in der Wellentheorie des Lichtes entgegentreten, so ist es für uns bei der Lösung dieser Schwierigkeiten nicht von geringstem Nutzen, ein Medium zu besitzen, das uns den Gefallen tut, reine Drillungswellen zu verbreiten, auch wenn es äolotrop ist. Es reicht nicht zu wissen, daß obwohl ein Medium äolotrop ist, es doch solche rein drillende Wellen durch sich hindurchlassen kann, und daß zwei von den drei Wellen in der Tat rein drillende sind. Was wir brauchen, ist ein Medium, das, wenn Licht gebrochen und reflektiert wird, unter allen Umständen nur drillende Wellen entstehen läßt. Alles, was Green beweist, ist, daß rein drillende Wellen bestehen können; er beweist aber nicht, daß keine Verdichtungswellen auftreten. Im Gegenteil, es werden im allgemeinen Verdichtungswellen von der Störung ausgehen. Weißglühende Körper, Kerzen- oder Gasflammen, elektrisches Licht jeder Art wird Verdichtungswellen hervorrufen, sowohl in einem äotropen als in einem isotropen Medium, soweit die von Green gefundenen Bedingungen, von denen hier gesprochen ist, reichen. Also wir brauchen ein Medium, das Verdichtungswellen genügend widersteht, ein Medium mit einem unendlich großen oder wenigstens praktisch großen Raummodul, einem so großen, daß der Betrag an Energie, die in Form von Verdichtungswellen entwickelt wird, durch Beobachtung nicht hat entdeckt werden können.

Zum Wesen der Reflexion und Brechung mag ja ein kleiner Energieverlust gehören, der von der mangelhaften Politur der Oberfläche herrührt, allein in der Regel haben wir an der Oberfläche von Glas und von klaren Kristallen praktisch keinen Verlust an Licht; besteht ein solcher, so ist er jedenfalls noch nicht entdeckt. Zahlenmäßige Beobachtungen sind mit großer Genauigkeit ausgeführt worden, durch die beispielsweise die Formel von Fresnel für das Verhältnis des normal auffallenden und reflektierten Lichtes  $\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2$  bis auf weniger als, ich glaube ein Prozent, als richtig erwiesen ist. Noch mag nach allem, was wir wissen, ein halbes Prozent oder ein zehntel Prozent der Energie für schräge Inzidenzen in Verdichtungswellen umgewandelt werden. Wenn aber ein größerer Prozentsatz in Verdichtungswellen umgewandelt würde, müßte ein großer Teil Energie durch den Raum laufen, und es müßte (um für einen Augenblick mich einer verkehrten Ausdrucksweise zu bedienen) eine „neue Kraft“ vorhanden sein, von der wir nichts wissen. Ja, ich glaube, daß, wenn bei schräger Reflexion oder Refraktion des Lichtes oder bei heftigen Vorgängen in der Lichtquelle Verdichtungswellen hervorgerufen würden, deren Energie ein Tausendstel oder ein Zehntausendstel der Energie des Lichtes und der strahlenden Wärme ausmacht, wir erstaunliche Wirkungen finden sollten, die aber vielleicht mit andern Sinnen als denen, die wir besitzen, zu entdecken wären. Der Mangel des Hinweises auf irgendwelche derartige Wirkungen beweist hinreichend, daß, wenn sie in der Natur vorhanden sind, sie äußerst klein sein müssen. Daß aber derartige Wellen vorhanden sind, glaube ich; und ich glaube ferner, daß die Geschwindigkeit der unbekannten Verdichtungswellen, von denen wir sprechen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrostatischen Kraft ist.

Ich sage hier „ich glaube“, und meine nicht, daß ich dieses alles so



glaube wie eine religiöse Tatsache, sondern als einen Gegenstand strenger wissenschaftlicher Wahrscheinlichkeit. Wenn dies für die Fortpflanzung elektrostatischer Kraft richtig ist, ist es auch richtig, daß nur eine äußerst kleine Energie in den der Fortpflanzung einer elektrostatischen Kraft entsprechenden Wellen vorhanden ist. Doch tritt dies schon aus unsern Grenzen der Molekularmechanik heraus. Was ich in der einleitenden Übersicht über diese Vorlesungen vorgeschlagen habe, war, festzustellen, welche Prinzipien und Resultate der Wissenschaft von der Molekularmechanik ich aufsuchen könnte, um auf ihnen die Wellentheorie des Lichtes zu begründen. Wir sind jetzt hieran streng gebunden, und wir können sagen, daß wir nichts mit Verdichtungswellen zu tun haben. Unser Medium muß inkompressibel sein, und wir haben an Stelle der vierzehn Gleichungen von Green, mehr eine Bedingung — daß das Medium inkompressibel sei. Es ist klar, daß diese Bedingung ausreicht, die Möglichkeit einer Verdichtungswelle überhaupt auszuschließen, und unsere Wellenfläche auf eine Fläche mit zwei Schalen, gleich derjenigen Fresnels reduziert. Bevor wir aber diese schöne Betrachtung Greens verlassen, wenn wir bedenken, was die Verdichtungswelle in einem äolotropen Festkörper sein muß, der die Bedingung Greens, daß auch reine Drillungswellen bestehen können, die in allen Richtungen fortschreiten — die Bedingung nämlich, daß zwei von den drei Wellen, die wir vorhin untersucht haben, rein drillend sind — sollten wir, meine ich, in der Tat Verdichtungswellen finden und ferner finden, daß die Wellenflächen für sie eine Reihe konzentrischer Ellipsoide bilden. Sie werden, das ist sicher, einschalige Flächen sein, da wir nur eine Geschwindigkeit haben, die zu jeder Tangentialebene der Wellenfläche gehört.

Ich will für jetzt diesen Gegenstand verlassen. Wir werden auf ihn vielleicht wieder zurückkommen und etwas näher die Frage nach den Elastizitätsmoduln betrachten. Wir werden von einem isotropen Festkörper zu dem allgemeinsten Festkörper fortschreiten und werden dann von dem allgemeinsten Festkörper zum isotropen zurückgehen. Also werden wir auch zuerst den allgemeinsten Wert für die Kompressibilität annehmen, dann Inkompressibilität voraussetzen. Dabei werden wir mit dem allgemeinst möglichen Festkörper beginnen und zusehen, welche Bedingungen wir ihm auferlegen müssen, um ihn so symmetrisch zu machen, wie es für die Fresnelsche Wellenfläche nötig ist. Die molekulare Aufgabe wird unsern Weg hierfür gut vorbereiten.

Auch auf die Dichte des Lichtäthers werde ich noch zurückkommen und ebenso auf die im Äther verteilten Molekeln, die elastisch und so unbändig massenhafter sein müssen als der Äther. So eigenartig unsere Annahmen sind, so glaube ich doch, daß etwas innerhalb des Äthers vorhanden sein muß.

Nun denken wir an einen Stoß, der beispielsweise in dem Zusammenprallen zwischen zwei Molekeln besteht. Die vorausgesetzten Schalen der Molekeln sollen unzerbrechlich sein, die Molekeln werden dann abspringen und innerlich schwingen. Wenn dabei der zentrale Kern einer Molekel in der einen Richtung, die Schale in der andern schwingt, so erhalten wir eine Molekel mit zwei nach entgegengesetzten Richtungen gehenden Teilen, von denen der eine Teil sich innerhalb des andern befindet. Der Äther empfängt seine Bewegung von dem äußeren Teile. Demgemäß sage ich, daß die grundlegendste Annahme, die wir bezüglich der erregenden Quelle einer Folge von

Lichtwellen machen können, die ist, die durch eine in einer geraden Linie hin- und herschwingende Kugel versinnbildlicht wird.

Wir haben bereits (Achte Vorlesung S. 65 ff.) die diesem Falle entsprechende Lösung untersucht. Betrachten wir die kugelförmigen Wellen; für Punkte in einem bestimmten Durchmesser sind Schwingungen nicht vorhanden; größte Schwingungen haben alle Punkte der Äquatorialebene zu diesem Durchmesser, und sie geschehen senkrecht zu dieser Ebene; alle Punkte in dem Quadranten eines Bogens der sphärischen Fläche, der sich von der Achse bis zum Äquator erstreckt, führen Schwingungen in der Ebene dieses Bogens und tangential zu demselben aus; ihre Weite ist proportional dem Kosinus der Breite, das heißt des Winkelabstands vom Äquator, und ihre Intensität ist proportional dem Quadrate des Kosinus der Breite. Wenn man dann noch in einer nach außen fortschreitenden Welle die Amplitude umgekehrt proportional dem Abstände vom Mittelpunkt und demnach die Intensität umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes vom Mittelpunkt variieren läßt, so hat man eine genaue wörtliche Beschreibung der einfachsten und häufigsten Schwingungen, die Licht ausmachen.

### b) Molekular.

Wir kehren zur Betrachtung der Mechanik der Brechung, der gewöhnlichen und der normalen Dispersion und der Absorption zurück. Mit unsern Formeln, wie wir sie gestern (S. 96 oben) verlassen haben, beginnend, wollen wir untersuchen, was aus ihnen wird im Falle  $\tau = \infty$ ; das heißt für eine statische Verschiebung der umhüllenden Schale. Die Trägheit der Molekeln tritt jetzt nicht ins Spiel, und der Fall geht einfach in den des Gleichgewichts des Satzes Federn, deren Steifheit wir mit  $c_1, c_2, \dots, c_j, c_{j+1}$  bezeichnet haben, über, wenn das von  $m_1$  entfernte Ende  $S$  von  $c_1$  um die Strecke  $\xi$  verschoben und  $F$  das von  $m_j$  entfernte Ende von  $c_{j+1}$ , festgehalten wird.

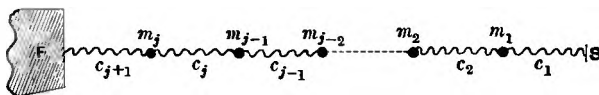


Fig. 30.

Bezeichnet man mit  $X$  die Kraft, mit der  $S$  zieht und  $F$  widersteht, die zugleich, da Trägheit nicht in Betracht kommt, die Kraft ist, mit der jede Feder gespannt wird, so erhalten wir

$$X = c_{j+1} x_j = c_j (x_{j-1} - x_j) = \dots = c_2 (x_1 - x_2) = c_1 (\xi - x_1) \quad (1)$$

oder, wie wir die Gleichung auch schreiben können,

$$X = \frac{x_j}{\frac{1}{c_{j+1}}} = \frac{x_{j-1} - x_j}{\frac{1}{c_j}} = \dots = \frac{x_1 - x_2}{\frac{1}{c_2}} = \frac{\xi - x_1}{\frac{1}{c_1}}. \quad (2)$$

Hieraus folgt

$$\frac{x_1}{\xi} = \frac{\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \dots + \frac{1}{c_j} + \frac{1}{c_{j+1}}}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \dots + \frac{1}{c_j} + \frac{1}{c_{j+1}}}. \quad (3)$$

Demnach wird, wenn nicht wenigstens eine von den Größen  $c_1, c_2 \dots c_{j+1}$  Null ist,  $\frac{x_1}{\xi} - 1$  für  $\tau = \infty$  negativ, und folglich sinkt nach den Gleichungen auf S. 96  $\frac{1}{\xi^2}$  auf  $-\infty$ , wenn  $\tau^2$  auf  $+\infty$  anwächst. Ein hinreichend großer endlicher Wert von  $\tau$  muß darum die Größe  $\frac{1}{\xi^2} = 0$  machen, und alle noch größeren Werte von  $\tau^2$  ergeben  $\frac{1}{\xi^2}$  negativ. Dies ist ein besonderer und zwar ein extremer Fall eines sehr wichtigen Resultats, mit dem wir später viel zu tun haben werden, wenn wir den Verlauf unserer Formel bei dem Anwachsen der Periode des Lichtes von einer molekularen Periode zur nächstgrößeren verfolgen werden; wir wollen ihn aber jetzt ausschließen, indem wir  $c_{j+1} = 0$  setzen. Wir werden jenen Fall wiederfinden und dann seine wahre physikalische Bedeutung verstehen, wenn wir gleichzeitig  $m_j$  unendlich groß annehmen; demgemäß büßen wir nichts an Allgemeinheit ein, wenn wir  $c_{j+1} = 0$  setzen. Alsdann wird nach (1) das  $X = 0$  und  $\xi = x_1$ , d. h.  $\frac{x_1}{\xi} - 1 = 0$ . Die letzte Gleichung ergibt hierauf, wenn wir in unserer letzten Formel der zehnten Vorlesung (S. 96 oben)  $\tau = \infty$  setzen

$$1 = \frac{c_1}{4\pi^2 m_1} (x^2 R + x'^2 R' + x''^2 R'' + \dots \text{ usw.}). \quad (4)$$

Subtrahiert man dies von unserer letzten Formel der zehnten Vorlesung, indem man  $\tau$  allgemein läßt, so findet man

$$\frac{x_1}{\xi} - 1 = \frac{c_1}{4\pi^2 m_1} \left( \frac{x^4 R}{\tau^2 - x^2} + \frac{x'^4 R'}{\tau^2 - x'^2} + \frac{x''^4 R''}{\tau^2 - x''^2} + \dots \text{ usw.} \right) \quad (5)$$

und hieraus vermöge der vorhergehenden Formel der zehnten Vorlesung (S. 95 f.)

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{q}{n} + \frac{c_1^2 \tau^2}{16\pi^4 m_1 n} \left( \frac{x^4 R}{\tau^2 - x^2} + \frac{x'^4 R'}{\tau^2 - x'^2} + \frac{x''^4 R''}{\tau^2 - x''^2} + \dots \text{ usw.} \right). \quad (6)$$

Eine passende Abänderung dieser Formel wird erhalten, wenn man in ihr setzt

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{q}{n} \mu^2 \quad (7)$$

und

$$c_1 = \frac{4\pi^2 m_1}{x_1^2}. \quad (8)$$

Dann bedeutet  $\mu$  den Brechungsindex des Mediums, und  $x_1$  bedeutet die Periode, die  $m_1$  als Vibrator hätte, wenn die den Äther abgrenzende Schale festgehalten und die elastische Verbindung zwischen  $m_1$  und den inneren Massen vorübergehend aufgehoben wäre. Bei diesen Bezeichnungen wird

$$\begin{aligned} \mu^2 = 1 + & \frac{m_1 x^4 R}{q x_1^4} \cdot \frac{\tau^2}{\tau^2 - x^2} + \frac{m_1 x'^4 R'}{q x_1^4} \cdot \frac{\tau^2}{\tau^2 - x'^2} + \\ & + \frac{m_1 x''^4 R''}{q x_1^4} \cdot \frac{\tau^2}{\tau^2 - x''^2} + \text{ usw.} \end{aligned} \quad (9)$$

Wenn die Periode des Lichtes sehr lang ist im Vergleich mit der längsten der molekularen Perioden der eingebetteten Molekeln, dann wird offenbar jedes

materielle Teilchen mit fast genau derselben Bewegung, wie sie die Schale ausführt, hin- und hergetrieben, tatsächlich fast so, als ob es mit der Schale starr verbunden wäre; und demgemäß wird die Lichtgeschwindigkeit merklich dieselbe sein, wie wenn die Massen der Partikel homogen im Äther ohne jede Störung seiner Starrheit verteilt wären.

Jetzt wollen wir zusehen, wie die inneren Schwingungen der Molekel den Durchgang von Licht durch das Medium verändern, wenn die Periode des Lichtes nicht unendlich groß ist im Vergleich zu jeder molekularen Periode. Der Einfachheit wegen wollen wir dabei voraussetzen, unsere Molekel habe nur eine schwingende Partikel, das  $m_1$  unserer Formel, das wir jetzt einfach mit  $m$  bezeichnen; es sei dies die Summe der Massen der Vibratoren in der

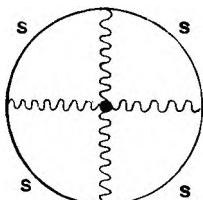


Fig. 31.

Volumeneinheit des Äthers. Stellen wir uns vor, sie sei mit der sie umhüllenden Schale  $S$  durch gewichtslose Federn (wie in der nebenstehenden Zeichnung angedeutet) verbunden, vermittels deren sie auf den die Schale umgebenden Äther einwirkt. Ihr Einfluß auf den Durchgang des Lichtes durch das Mittel kann leicht verstanden und berechnet werden aus den Zeichnungen unten und auf der Seite 117, die die allgemeinbekannte elementare Mechanik eines Pendels darstellen, das mit einfach harmonischer Bewegung schwingt, wenn es von einem Punkte  $S$  (der der Grenzschele unseres gedachten Hohlraumes im Äther entspricht) frei herabhängt, sobald dieser Punkt seinerseits durch auf ihn wirkende Kräfte getrieben, horizontal mit einfach harmonischer Bewegung hin- und hergeht. Die Figg. 32 und 33

versinnbildlichen die Fälle, in denen die Periode des Aufhängungspunktes  $S$  länger ist, als die Periode des Pendels wäre, wenn  $S$  keine Bewegung hätte; die Figg. 34 und 34 a, wenn kürzer. In allen Zeichnungen stellt  $OM$  die Länge eines ungestörten einfachen Pendels dar, dessen Periode gleich der der Bewegung des Punktes  $S$  ist, des Aufhängungspunktes unseres gestörten Pendels  $SM$ .

Wenn wir die Perioden bzw. mit  $\tau$  und  $\kappa$  bezeichnen, erhalten wir so  $OM/SM = \tau^2/\kappa^2$ . Bedeuten hiernach  $\xi$  und  $x$  die gleichzeitigen größten Verschiebungen von  $S$  und  $M$ , so findet man

$$\frac{x}{\xi} = \frac{OM}{OS} = \frac{\tau^2}{\tau^2 - \kappa^2}. \quad (10)$$

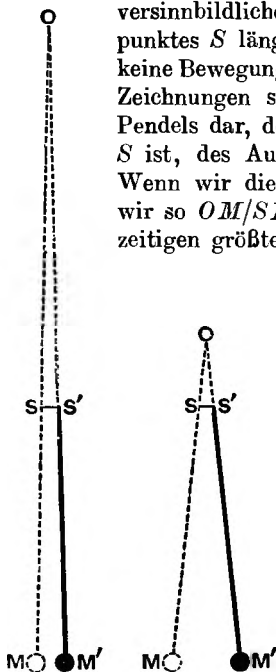


Fig. 32.

Fig. 33.

Wenn wir für einen Augenblick mit  $w$  die Masse einer einzelnen schwingenden Partikel unserer Zeichnungen benennen, ist die Horizontalkomponente des von dem Faden  $MS$  auf  $S$  in dem Augenblicke der größten Verschiebung ausgeübten Zuges  $w(2\pi/\tau)^2 x$ ; und wenn wir  $m$  an Stelle von  $w$  setzen, erhalten wir die Summe der Kräfte, die von allen Molekeln in der Raumeinheit des Äthers in dem Augenblicke der größten Verschiebung des Äthers und der Molekeln an irgendeinem Punkte ausgeübt werden. Diese Kraft wird von der rückwirkenden Kraft der Elastizität des Äthers subtrahiert, falls die Periode des Lichtes größer ist als die Periode

der Molekel (Fig. 32 und 33), sie wird zu dieser Kraft addiert, falls die Periode des Lichtes kleiner als die molekulare ist (Fig. 34 und 34 a).

Nun ist, wenn die Starrheit des Äthers als Einheit gewählt wird, ihre elastische Kraft für die Volumeneinheit in einem beliebigen Punkte im Augenblicke seiner größten Verschiebung  $(2\pi/l)^2$ , falls  $l$  die Wellenlänge des Lichtes in dem Äther mit den in ihm eingesenkten Molekeln wird. Folglich ergibt sich als gesamte wirklich den Äther in seine Gleichgewichtslage zurückführende Kraft

$$\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \xi - m \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 x,$$

und diese muß gleich  $\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \xi$  sein, wenn die Dichte

des Äthers als Einheit gewählt wird. Dividiert man beide Seiten der so folgenden Gleichung durch  $(2\pi/\tau)^2 \xi$  und bezeichnet man mit  $\xi$  die Lichtgeschwindigkeit in dem aus dem Äther nebst den in ihm eingebetteten Molekeln bestehenden Mittel und mit  $\mu$  dessen Brechungsindex, so erhält man demnach

$$\mu^2 = \frac{1}{\xi^2} = \left(\frac{\tau}{l}\right)^2 = 1 + m \frac{x}{\xi} \quad (11)$$

woraus vermöge der Gleichung (10) sich ergibt

$$\mu^2 = \frac{1}{\xi^2} = \left(\frac{\tau}{l}\right)^2 = 1 + m \frac{\tau^2}{\tau^2 - \kappa^2}. \quad (12)$$

Durch ganz analoge elementare mechanische Betrachtung findet man weiter

$$\mu^2 = 1 + m \frac{\tau^2}{\tau^2 - \kappa^2} + m, \frac{\tau^2}{\tau^2 - \kappa_{,2}^2} + m, \frac{\tau^2}{\tau^2 - \kappa_{,,2}^2} + \text{usw.}, \quad (13)$$

wenn statt einer Reihe gleicher und ähnlicher Molekeln mehrere solcher Reihen da sind, in der Weise, daß die Molekeln einer Reihe von denen der anderen Reihen verschieden sind. Die Periode  $\kappa$  oder  $\kappa_{,2}$  oder  $\kappa_{,,2}$  usw. jeder einzelnen Reihe ist einfach die Schwingungsperiode der inneren Masse, wenn die sphärische den umgebenden Äther abgrenzende Fläche, die wir hinfür die Schale der Molekel nennen wollen, festgehalten wird. Anstatt diese Schale wie bisher als gewichtslos zu bezeichnen, wollen wir voraussetzen, daß sie eine Masse besitzt, die der des verschobenen Äthers gleich ist, so daß, wenn keine inneren Massen vorhanden wären, die Lichtfortpflanzung merklich dieselbe wäre wie in homogenem ungestörtem Äther. Dabei muß die Bedingung, die wir ursprünglich ausgesprochen haben, daß nämlich der Abstand zwischen den einzelnen Molekeln sehr groß sein soll im Vergleich mit dem Durchmesser derselben und sehr klein im Vergleich mit der Wellenlänge, für die Abstände zwischen Molekeln verschiedener Art erfüllt bleiben. Die Anzahl der Molekeln jeder Art in einem Würfel, dessen Kante der Wellenlänge gleichkommt, wäre also sehr groß; und zugleich muß diese Anzahl in je zwei solchen Würfeln gleich sein; dies letztere ist die Bedingung für Homogenität. So haben wir im wesentlichen die von Sellmeier<sup>1)</sup> aufgestellten Bedingungen und unsere

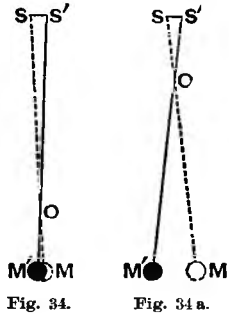


Fig. 34.

Fig. 34 a.

1) Sellmeier, Pogg. Ann., Bd. 145, 1872, S. 399, 520; Bd. 147, 1872, S. 384, 525.

Gleichung (13) ist sachlich identisch mit seinem ursprünglichen Ausdruck für das Quadrat des Brechungsindex.

Es ist interessant zu bemerken, daß unsere Formel (9) für die Wirkung einer Menge gleicher und ähnlicher zusammengesetzter schwingender Molekeln, die in den Äther eingesenkt sind, auf die Geschwindigkeit regelmäßig periodischer Lichtwellen zeigt, daß diese dieselbe ist, wie die Wirkung so vieler Sätze verschiedener einfacher Vibratoren, wie Fundamentalperioden in unserem einen zusammengesetzten Vibrator vorhanden sind, und daß die Massen der gleichartigen einfachen Vibratoren gegeben sind durch

$$m = \frac{m_1 \kappa^4 R}{\varrho \kappa_1^4}; \quad m_1 = \frac{m_1 \kappa_1^4 R_1}{\varrho \kappa_1^4}; \quad m_{11} = \frac{m_{11} \kappa_{11}^4 R_{11}}{\varrho \kappa_{11}^4}; \quad \text{usw.} \quad (14)$$

Obwohl aber die Formel für die Geschwindigkeit regelmäßig periodischer Wellen die nämliche ist, ist die Verteilung der Energie zwischen kinetischer und potentieller, für die beiden Annahmen, in beiden Fällen wesentlich verschieden. Diese Verschiedenheit ist von großer Bedeutung für die Absorption und Fluoreszenz, wie wir später bei der Behandlung dieser Gebiete sehen werden.

(Zusatz vom 23. September)<sup>1)</sup> 1898. Die mechanische Theorie der Dispersion, wie sie ursprünglich von Sellmeier gegeben ist, bestand darin, die Lichtgeschwindigkeit zu finden, wenn sie durch schwingende, in den Äther eingebettete Molekeln beeinflusst wird von der Art, wie sie von Stokes<sup>2)</sup> eingeführt sind, um die dunklen Linien des Sonnenspektrums zu erklären. Die mathematische Arbeit Sellmeiers nahm den einfachsten denkbaren molekularen Vibrator zur Grundlage, der als eine einfache materielle Partikel gedacht werden kann, die durch eine gewichtlose Feder oder durch mehrere solche Federn mit einer starren, ein kleines Bläschen im Äther begrenzenden Schale verbunden ist. Er untersuchte die Fortpflanzung drillender Wellen und fand folgenden Ausdruck (den ich mit etwas abgeänderter Bezeichnung wiedergebe) für das Quadrat des Brechungsindex von Licht in Äther, der in jedem dem Kubus der Wellenlänge gleichen Raumteile mit einer sehr großen Anzahl schwingender Molekeln besetzt ist:

$$\mu^2 = 1 + m \frac{\tau^2}{\tau^2 - \kappa^2} + m_1 \frac{\tau^2}{\tau^2 - \kappa_1^2} + m_{11} \frac{\tau^2}{\tau^2 - \kappa_{11}^2} + \text{usw.},$$

wo mit  $\tau$  die Periode des Lichtes, mit  $\kappa, \kappa_1, \kappa_{11}$ , usw. die Schwingungsperioden der eingebetteten Molekeln unter der Voraussetzung, daß ihre Schalen festgehalten sind, und mit  $m, m_1, m_{11}$ , usw. ihre Massen bezeichnet werden. Er hat gezeigt, daß diese Formel mit allem, was im Jahre 1872 über die gewöhnliche Dispersion bekannt war, übereinstimmte, und daß sie das enthielt, was wir ohne Zweifel für die sachlich wahre mechanische Erklärung der anomalen Dispersionen halten müssen, die für den außerordentlichen Strahl

1) Der Inhalt dieses Zusatzes wurde der Sektion A der British Association in Bristol am 9. September 1898 in zwei Abhandlungen mitgeteilt, die überschrieben sind: „Die mechanische Theorie der Brechung, Dispersion und anomalen Dispersion“ und „Kontinuität in der Schwingungstheorie von Verdichtungs-Verdünnungswellen in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern, von Drillungswellen in Festkörpern, von elektrischen und magnetischen Wellen in allen Substanzen, die sie zu verbreiten vermögen, und von strahlender Wärme, sichtbarem Licht, ultravioletem Licht und Röntgen-Strahlen“.

2) Vgl. Kirchhoff-Stokes-Thomson, Phil. Mag., März und Juli 1860.

in den Kristallen eines Chromsalzes von Fox-Talbot<sup>1)</sup>, für Joddampf von Leroux<sup>2)</sup>, und für flüssige Fuchsinlösung von Christiansen<sup>3)</sup> entdeckt und mit großer Sorgfalt von Kundt<sup>4)</sup> experimentell untersucht war.

Sellmeier<sup>5)</sup> selbst hat den physikalischen Wert seiner mathematischen Leistung dadurch beeinträchtigt, daß er eine Unterscheidung einführt zwischen brechenden und absorbierenden Molekeln („refraktive und absorptive Teilchen“) und dadurch, daß er die Anwendung seiner Formel auf Fälle zu beschränken schien, in denen die längsten der molekularen Perioden klein sind im Vergleich mit der Periode des Lichtes. Aber die glänzende Bedeutung seiner nicht-absorptiven Formel für die Physik wurde wundervoll von Rubens bestätigt (der übrigens anführt<sup>6)</sup>, sie rühre von Ketteler her). Vor 14 Jahren hat Langley<sup>7)</sup> das Brechungsvermögen des Steinsalzes für Licht und strahlende Wärme zwischen den Wellenlängen (in Luft oder Äther) von 0,43 Mikron<sup>8)</sup> bis 5,3 Mikron (das Mikron ist  $10^{-6}$  eines Meters oder  $10^{-4}$  eines Zentimeters) gemessen und hat ferner ohne Ermittlung des Brechungsvermögens bei der strahlenden Wärme Wellenlängen bis zu 15 Mikron bestimmt. In den letzten Jahren haben uns von Rubens, Paschen u. a. ausgeführte Messungen, die in praktisch vollkommener Weise mit denjenigen von Langley in seinem Gebiete übereinstimmen, eine sehr genaue Kenntnis des Brechungsvermögens des Steinsalzes und des Sylvins (Kaliumchlorid) in dem ungeheuren Gebiete der Wellenlängen zwischen 0,4 Mikron und 23 Mikron geliefert.

Rubens fing an mit der Benutzung empirischer und teilweise theoretischer Formeln, zu denen er auf Grund mannigfacher theoretischer und experimenteller Untersuchungen anderer Forscher gelangt war, und erhielt sehr genaue Darstellungen des Brechungsvermögens von Flintglas, Quarz, Flußspat, Sylvin und Steinsalz in dem Gebiete der Wellenlängen von 0,4 bis nahezu 12 Mikron.<sup>9)</sup> Zwei Jahre später zeigten weitere Versuche, die sich auf die Messung des Brechungsvermögens von Sylvin und Steinsalz für Licht mit Wellenlängen bis hinauf zu 23 Mikron erstreckten, Abweichungen von den besten der bisherigen empirischen Formeln, und diese Abweichungen stiegen mit wachsenden Wellenlängen. Rubens ging dann wieder auf die

1) Fox-Talbot, Proc. Roy. Soc. Edin., 1870—71.

2) Leroux, Comptes rendus, 55, 1862, S. 126—128.

3) Christiansen, Ann. Phys. Chem., 141, 1870, S. 479, 480; Phil. Mag., 41, 1871, S. 244; Annales de Chimie, 25, 1872, S. 213, 214.

4) Kundt, Pogg. Ann., Vol. 142, 143, 144, 145, 1871—72.

5) Pogg. Ann. Vol. 147, 1872, S. 525.

6) Wied. Ann. Vol. 53, 1894, S. 267. Setzt man in der von Rubens angeführten Formel von Ketteler für  $\mu_{\infty}$  den Wert von  $\mu$ , der sich ergibt, wenn man in der Sellmeierschen Formel  $\tau = \infty$  annimmt, dann wird die Formel von Ketteler mit derjenigen von Sellmeier identisch. Man beachte, daß Kettelers „ $M$ “ Sellmeiers „ $\mu \kappa^{2u}$ “ in der von mir im Text gewählten Bezeichnung ist.

7) Langley, Phil. Mag. 1886, zweites Halbjahr.

8) Der Verfasser schlägt hier in einer Anmerkung vor, anstatt Mikron, Mikrom zu schreiben, ferner mit „Mikron“ die Schwingungsperiode von Licht im Äther bei einer Wellenlänge von 1 Mikrom zu bezeichnen. Das Mikron wäre danach etwa  $\frac{1}{3} 10^{-14}$  Sekunde und die Lichtgeschwindigkeit betrüge 1 Mikrom auf 1 Mikron. Mittleres Natriumlicht hätte eine Periode von 0,58932 Mikron, den „Reststrahlen“ von Steinsalz und Sylvin käme nach den Untersuchungen von Rubens und Aschkinaß, Wied. Ann. 65 (1898), S. 241, eine Periode von 51,2 bzw. 61,1 Mikron zu.

D. H.

9) Rubens, Wied. Ann., Vol. 53, 54, 1894—95.

einfache, nicht abgeänderte Formel Sellmeiers zurück<sup>1)</sup> und fand in ihr einen praktisch vollkommenen Ausdruck der Brechungsvermögen dieser Substanzen in dem Gebiete von 0,434 bis 22,3 Mikron Wellenlänge.

Und nun zu einer glänzenden und in der Tat wundervollen Bestätigung der mechanischen Theorie! Ein Jahr später beschreibt eine Abhandlung von Rubens und Aschkinaß<sup>2)</sup> Versuche, die beweisen, daß strahlende Wärme nach fünf aufeinander folgenden Reflexionen an nahezu parallelen Flächen von Steinsalz und ebenso von Sylvin im Mittel die Wellenlänge 51,2 bzw. 16,1 Mikron besitzt. Die beiden Formeln, die Rubens im Februar 1897 mitgeteilt hat als allein aus den für Brechungsvermögen, die an Wellenlängen von weniger als 23 Mikron gemessen waren, abgeleitet, machen  $\mu^2$  für strahlende Wärme von Wellenlänge zwischen 37 und 55 Mikron im Falle der Spiegelung an Steinsalz und zwischen 45 und 67 Mikron im Falle der Spiegelung an Sylvin negativ! ( $\mu^2$  negativ heißt, daß auf die Substanz fallende Wellen nicht in sie eindringen können, sondern total reflektiert werden).

Diese Formeln, mit einer wichtigen algebraischen Änderung geschrieben, die dazu dient, sie mit dem ursprünglichen Ausdruck Sellmeiers, der obigen Gleichung (13), zu identifizieren und so ihre mechanische Bedeutung klarer hervortreten zu lassen, sind die folgenden:

$$\text{Steinsalz} \quad \mu^2 = 1,1875 + 1,1410 \frac{\tau^2}{\tau^2 - 0,01621} + 2,8504 \frac{\tau^2}{\tau^2 - 3419,3}.$$

$$\text{Sylvin} \quad \mu^2 = 1,5329 + 0,6410 \frac{\tau^2}{\tau^2 - 0,0234} + 2,3792 \frac{\tau^2}{\tau^2 - 4517,1}.$$

Die Zeichnungen (Figg. 35, 36) S. 122, 123, stellen die Quadrate des Brechungsindex von Steinsalz und Sylvin dar, aus diesen Formeln in einem Gebiete von 0,434 Mikron (Anm. 8, S. 119) bis 100 Mikron berechnet. In jeder Zeichnung ist der Maßstab sowohl der Ordinaten als auch der Abszissen zwischen 0 und 10 Mikron 10 mal so groß wie der der Fortsetzung von 10 bis 100 Mikron. Die Additionen und Subtraktionen, die nötig sind, um die Ordinaten innerhalb der gegebenen Grenzen zu halten, sind in den Tafeln mitgeteilt. Der kleine Kreis und das Kreuzchen auf dem Zweige *b* stellen die Punkte dar, in denen  $\mu^2 = 1$  bzw.  $\mu^2 = 0$  ist. Die in der Formel enthaltenen kritischen Perioden sind

für Steinsalz:

0,1273 und 56,116, nämlich die Quadratwurzeln aus 0,01621 und 3419,3

für Sylvin:

0,1529 und 67,209, „ „ „ „ „ 0,0234 „ 4517,1.

Der Wert von  $\mu^2$  wandelt sich von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , wenn  $\tau$  durch diese Werte geht, und wir haben demgemäß Asymptoten an diesen Punkten, die in den Zeichnungen als gestrichelte Ordinaten wiedergegeben sind.

Die Übereinstimmung mit der Beobachtung ist eine absolut vollkommene in dem ganzen von Langley, Rubens und Paschen untersuchten Gebiete zwischen 0,434 Mikron und 22,3 Mikron. Die beobachteten Brechungsvermögen werden von ihnen auf fünf Ziffern und vier Dezimalstellen angegeben;

1) Rubens und Nichols, Wied. Ann., Vol. 60, 1896—97, S. 454.

2) Rubens und Aschkinaß, Wied. Ann., Vol. 65, 1898, S. 241.



und in einer von Rubens und Nichols<sup>1)</sup> mitgeteilten vergleichenden Tabelle stimmen die berechneten Werte mit den beobachteten bis zur letzten Dezimale sowohl für Steinsalz als für Sylvin überein.

Während bezüglich des Brechungsvermögens diese vollkommene Übereinstimmung mit der Formel von Sellmeier in dem Periodengebiet zwischen 0,434 Mikron bis zum 51fachen dieser Periode (entsprechend nahezu sechs Oktaven in der Musik) herrscht, ist darauf hinzuweisen, daß Rubens für strahlende Wärme mit einer Periode von 22,3 Mikron sowohl bei Steinsalz als bei Sylvin so starke Absorption — mit wachsender Wellenlänge wachsende Absorption — gefunden hat, daß es ihm unmöglich wurde, seine Messungen des Brechungsvermögens auf Perioden über 22 oder 23 Mikron auszudehnen, und daß ein großer Bruchteil der strahlenden Wärme von 23 Mikron Periode bei ihrem Durchgang durch seine Prismen ausgelöscht wurde. Obwohl also die Formel von Sellmeier eine so große Absorptionskraft des durchsichtigen Mittels, wie sie sich im Steinsalz und Sylvin für strahlende Wärme bei Perioden zeigt, die kleiner sind als die Hälfte der kritischen Periode  $\kappa$  in jedem Falle, nicht vorsieht, muß es doch als sehr beruhigend bezeichnet werden, daß das Absorptionsvermögen, so groß es sich auch zeigt, nur eine sehr geringe Wirkung auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der strahlenden Wärme in dem Medium ausübt. Dies ist aber gerade das, was man nach der mechanischen Theorie zu erwarten hat, indem diese feststellt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit notwendigerweise nur sehr wenig durch Kräfte beeinflusst wird, die Absorption verursachen, außer wenn das Absorptionsvermögen so groß ist, daß die Intensität des Strahles bei dem Fortschreiten in dem Mittel um drei oder vier Wellenlängen überhaupt fast vollständig vernichtet wird.

In einem Zusatze zu einer späteren Vorlesung will ich nochmals über die Helmholtzsche Einführung von im einfachen Verhältnisse zu den Geschwindigkeiten stehenden Widerstandskräften berichten, mit Hilfe deren er Sellmeiers Formel so erweitert, daß sie wirkliche körperliche Absorption mitumfaßt, sowie über neuere Änderungen der erweiterten Formel von ihm selbst und von Ketteler. Inzwischen ist es interessant zu bemerken — und diese Bemerkung dürfte manches Mißverständnis beseitigen —, daß, soweit die Mechanik der Sellmeierschen einfachen Massen oder die meiner zusammengesetzten Molekeln reicht, keine Notwendigkeit vorliegt, überhaupt irgendwelche Absorption zu erwarten, selbst für Licht oder strahlende Wärme einer der hauptsächlich kritischen Perioden  $\kappa$ , wie wir durch die folgende allgemeine Betrachtung der Umstände dieser und anderer kritischer Perioden erkennen werden. Wir werden in der Tat sehen, daß es drei Arten kritischer Perioden gibt:

1. eine Periode, für die  $\mu^2 = 1$  oder die Geschwindigkeit im Medium gleich der Geschwindigkeit im reinen, ungestörten Äther ist;
2. eine Periode, für welche  $\mu^2 = 0$  oder die Wellengeschwindigkeit im Medium unendlich groß ist;
3. eine Periode (irgendeine der  $\kappa$ -Perioden) von der Art, daß, wenn wir uns vorstellen, die Welle gehe durch sie zu höherer Periode,  $\mu^2$  von  $-\infty$  auf  $+\infty$  übertritt.

Die mechanische Erklärung von Punkten, in denen  $\mu^2 = 1$  ist (auf den Kurven durch Kreise angedeutet), ist bei meiner zusammengesetzten Molekel

1) Wied. Ann., Bd. 60, 1896—97, S. 454.



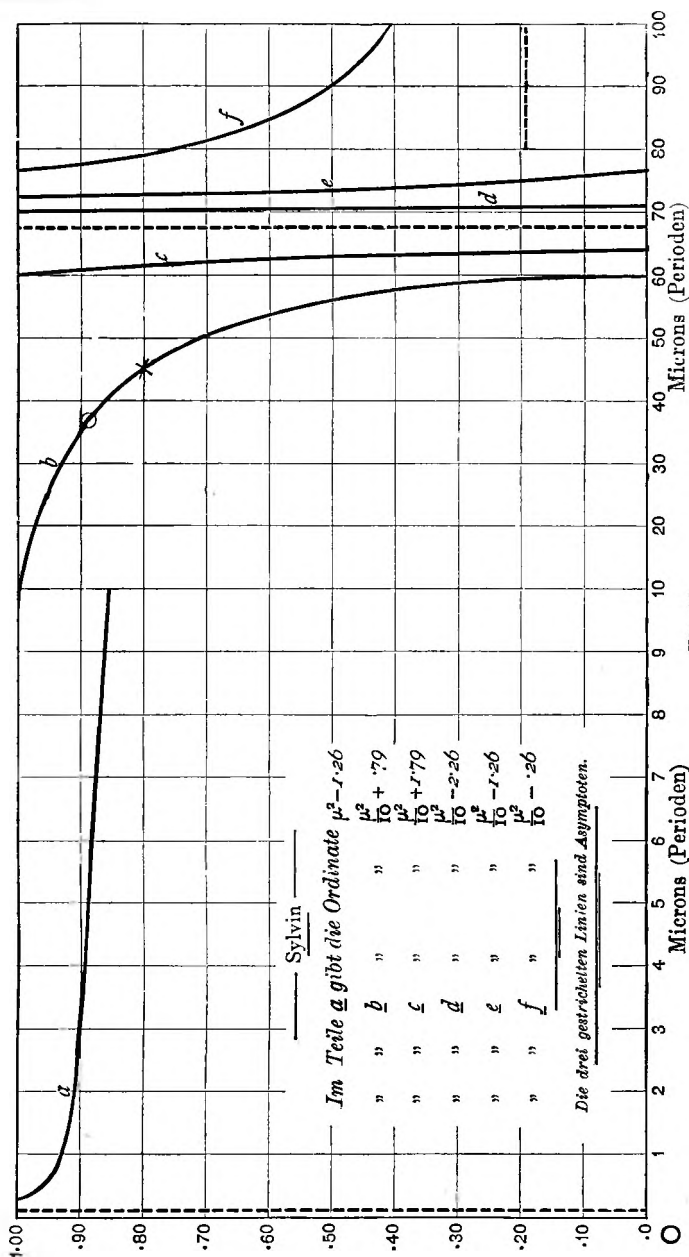


Fig. 36.

einer der freien Perioden der zusammengesetzten Molekel, wenn sie von der Schale getrennt ist (wenn  $c_1$  vorübergehend aufgehoben ist), gleich sein. Bei der Anordnung von Sellmeier tritt dieser Fall ein, wenn dem Bestreben einer Reihe von Vibratoren, die Schwingungen des Äthers zu beschleunigen, durch das

Bestreben einer andern Reihe oder andrer solcher Vibratoren, sie zu verlangsamen, das Gleichgewicht gehalten wird. Das kann aber nicht eintreten, wenn nur eine Reihe von gleichen und ähnlichen einfachen Vibratoren vorhanden ist.

Der nächste zu betrachtende Fall,  $\mu^2 = 0$  (oder  $\xi^2 = \infty$ ), der auf der Kurve durch Kreuze markiert ist, tritt seinem Wesen nach genau einmal für eine einzelne Reihe einfacher Vibratoren ein; und er tritt so oft ein, als Reihen — zwei, drei oder mehr — von Vibratoren mit verschiedenen Perioden vorhanden sind, oder genau einmal für jede kritische Periode  $\kappa$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ , usw. meiner zusammengesetzten Molekel. Die mechanische Erklärung ist besonders einfach für eine einzelne Reihe Sellmeierscher Vibratoren; sie besteht darin, daß der ganze Äther ungedrillt bleibt und in einer Richtung schwingt, während die sämtlichen Massen  $m$  in der entgegengesetzten Richtung schwingen; das ganze System bildet dann gewissermassen zwei Massen  $E$  und  $M$ , die durch eine einzige gewichtslose Feder miteinander verbunden sind und in entgegengesetzten Richtungen in einer geraden Linie hin- und hergehen, während ihr Schwerpunkt in Ruhe verharrt. So sehen wir genau, wie es zu verstehen ist, daß die Wellengeschwindigkeit für die in den Kurven mit einem Kreuz bezeichneten kritischen Fälle unendlich groß wird.

Die Zunahme der Periode über diesen kritischen Wert hinaus macht  $\mu^2$  negativ, bis wir einen weiteren unter unsern kritischen Werten  $\kappa$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ , usw. erreichen, oder den weiteren Wert, wenn nur noch ein solcher da ist. Das bedeutet klar, daß Licht nicht in das Medium eindringen kann, oder daß es total reflektiert wird, wenn es auf dasselbe fällt. So wirkt das Medium gegen Licht oder strahlende Wärme aller derjenigen Perioden, die den Zwischenraum zwischen einem jeden mit einem Kreuze auf unsern Kurven bezeichneten Punkte und der nächsten asymptotischen Ordinate wie Silber auf sichtbares Licht; das heißt, es ist undurchlässig und liefert totale Reflexion. Wenn wir die Periode durch einen unserer kritischen Werte  $\kappa$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ , usw. hindurchwachsen lassen, geht  $\mu^2$  von  $-\infty$  auf  $+\infty$  über. Genau bei der kritischen Periode haben wir eine unendlich kleine Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in dem Medium und dazu totale Reflexion bei auffallendem Lichte. Es müßte eine unendlich große Amplitude der molekularen Vibratoren bestehen, wenn das Licht in das Medium sollte eindringen können; es kann aber nicht eindringen. Für eine Periode, die eben etwas größer ist als einer dieser kritischen Werte, ist die Reflexion des auffallenden Lichtes sehr nahe total, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des eindringenden Lichtes ist sehr klein, und die (kinetische und potentielle) Energie der molekularen Vibratoren ist sehr groß im Vergleich zur (kinetischen und potentiellen) Energie des Äthers.

Wenn schließlich keine größere kritische Periode mehr da ist als die eben betrachtete, erhält man gewöhnliche Brechung mit gewöhnlicher Dispersion; zunächst ist diese groß, sie wird aber mit wachsender Periode kleiner und kleiner, und  $\mu^2$  nimmt asymptotisch bis auf den Wert  $\frac{\rho}{M + \rho}$  ab, wo mit  $\rho$  die Dichte des Äthers und mit  $M$  die Summe aller innerhalb der in einer Raumeinheit vorhandenen Schalen befindlichen, mit diesen durch Federn verbundenen Massen bezeichnet ist. Wenn wir aber beachten, daß die ganze Masse der ponderablen Materie in den Äther eingebettet ist, und daß wir uns nicht vorstellen können, wie ein nur unendlich kleiner Teil derselben den Äther in seinen leuchtenden oder elektrischen Schwingungen beeinflussen

könnte, und daß demnach für Glas oder Wasser oder selbst für verdünnte Luft  $M$  Millionen Millionen Mal so groß sein muß wie  $\varrho$ , sehen wir, wie äußerst wenig unsre mechanische Theorie ausreicht, uns mit irgendwelcher Bequemlichkeit zu führen, sobald wir versuchen, der Natur von Wellen und Schwingungen zu folgen und sie zu verstehen, deren Perioden größer als 60 Mikron (oder  $2 \times 10^{-13}$  einer Sekunde) sind, wie sie Rubens und Aschkinab<sup>1)</sup> erreicht haben bis hinauf zu  $10^{-6}$  Sekunde oder weiter bis zu ein tausendstel Sekunde oder bis zu noch längeren Perioden.

Und dennoch müssen wir irgendwie versuchen, Kontinuität zu finden und zu verstehen: in der Theorie der Verdichtungs-Verdünnungswellen in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern, der Drillungswellen in Festkörpern, der elektrischen und magnetischen Wellen in allen Substanzen, die sie durchzulassen vermögen, und der strahlenden Wärme, des sichtbaren Lichtes, des ultravioletten Lichtes und der Röntgen-Strahlen.

Wir wollen die folgenden drei analogen Fälle in Betracht ziehen: I. einen mechanischen; II. einen elektrischen; III. einen elektromagnetischen.

I. Wir stellen uns eine absolut starre Kugel aus massivem Platin von 12 cm Durchmesser vor, die innerhalb einer gedachten gewichtlosen sphärischen Schale von 13 cm innerem Durchmesser und irgendeiner passenden Dicke hängt. Die Schale selbst hänge an einem sehr langen Faden in Luft oder in Wasser oder sei in einen großen Block aus Glas oder Stein oder einen andern elastischen Festkörper eingeschlossen, der Leiter oder Nichtleiter für Elektrizität, durchsichtig oder undurchsichtig für Licht ist.

(1) Durch geeignete Anwendung einer Kraft zwischen der Schale und dem Kern bewirke man, daß die Schale und der Kern in entgegengesetzten Richtungen mit einfacher harmonischer Bewegung in einem relativen Gebiete von  $10^{-3}$  cm schwinde. Wir wollen zuerst annehmen, die Schale befinde sich in Luft. In diesem Falle wird wegen der geringen Dichte der Luft im Vergleich mit derjenigen des Platins das relative Gesamtgebiet praktisch das der Schale sein, und der Kern kann als nahezu vollkommen unbewegt behandelt werden. Wenn die Periode  $\frac{1}{32}$  einer Sekunde („Frequenz“ 32 nach der Bezeichnung von Lord Rayleigh) beträgt, wird ein summender Ton gehört, sicher kein besonders lauter, aber wahrscheinlich einem in einer Entfernung von weniger als ein Meter oder ein halbes Meter befindlichen Ohr reichlich vernehmbar. Steigert man die Schwingungszahl auf 256, so wird ein sehr lauter Ton von wohlbekanntem musikalischem Charakter ( $C_{256}$ ) vernommen werden.<sup>2)</sup>

Vergößert man die Schwingungszahl noch weiter auf das Zweihundertdreißigfache, also auf 8192 Perioden in der Sekunde, so wird ein außerordentlich lauter, um 5 Oktaven höher liegender Ton zum Vorschein kommen. Er dürfte ein zu lautes Gekreisch bilden, um noch erträglich zu sein; wenn

1) Wied. Ann. Vol. 64, 1898.

2) Lord Rayleigh hat gefunden, daß bei der Schwingungszahl 256 periodische Verdichtung und Verdünnung von so wunderbar geringer Dichteänderung wie von  $6 \times 10^{-9}$  der Atmosphärendichte oder „die Hinzufügung oder Fortnahme von Dichten, die weit kleiner sind als diejenigen, die in unsern höchsten Vakua gefunden werden können“ einen vollkommen hörbaren Ton liefern. Die Amplitude der Luftschwingung nach jeder Seite vom Nullpunkte aus beträgt  $1,27 \times 10^{-7}$  eines Zentimeters. Sound, Vol. II, S. 439 (Zweite Ausgabe). (In der deutschen Ausgabe habe ich die Stelle nicht finden können. D. H.)

dies der Fall sein sollte, würden wir die Schwingungsweite so weit verkleinern, bis der Schall nicht mehr zu laut ist. Läßt man dann die Schwingungszahl allmählich weiter in der Folge der diatonischen Leiter ansteigen, so werden die allgemein bekannten Töne einzeln deutlich und vollkommen in der ganzen Ausdehnung dieser Oktave gehört werden. Für einzelne oder auch für alle Ohren bleiben die musikalischen Töne noch deutlich bis zum G (24756 Perioden in der Sekunde) der obigen Oktave. Was für einen Schall das Ohr für Schwingungszahlen noch über 25000 empfinden würde, wissen wir aus der Erfahrung nicht. Wir können kaum annehmen, daß das Ohr überhaupt nichts hören würde, wenn nur die Amplitude der Bewegung eine passende ist.

Um derartige relative Bewegungen der Schale und des Kernes, wie wir sie betrachtet haben, hervorzurufen, muß, gleichviel ob die Schale sich in Luft oder Wasser, Glas, Stein, Metall befindet, ein gewisser Betrag an Arbeit, kein übermäßig großer, geleistet werden, um die Energie für die Wellen (sowohl die Verdichtungs- als auch die Verdünnungswellen) zu liefern, deren Ausbreitung nach allen Richtungen verursacht wird. Nehmen wir jetzt beispielsweise an, wir hätten gefunden, wieviel Arbeit in der Sekunde erforderlich ist, um eine Schwingung mit einer Schwingungszahl von 1000 Perioden in der Sekunde in dem Gebiete einer relativen Gesamtbewegung von  $10^{-3}$  cm aufrechtzuerhalten, und bleiben dann bei demselben Maße der Arbeitsleistung, erhöhen aber die Schwingungszahl auf  $10^4$ ,  $10^5$ ,  $10^6$ ,  $10^9$ ,  $10^{12}$ ,  $500 \times 10^{12}$ , so hören wir schließlich nichts mehr. Auch sehen wir nichts von irgendeinem Punkte der Schwingungslinie des Mittelpunktes der Schale aus, die ich die axiale nennen will. Aber von allen Punkten aus, die nicht in dieser Linie liegen, sehen wir einen leuchtenden Punkt homogenen, polarisierten, gelben Lichtes gewissermaßen im Mittelpunkte der Schale, und die Helligkeit wächst, wenn wir uns von irgendeinem Punkte der axialen Linie unter Innehaltung gleichen Abstandes vom Mittelpunkte immer mehr der Äquatorialebene nähern. Dabei liegt die Schwingungslinie überall in der Meridianebene und ist senkrecht zu der nach dem Mittelpunkte gezogenen Geraden.

Wenn die schwingende Schale von Luft oder Wasser oder einer anderen Flüssigkeit umgeben ist, und wenn die Schwingungen eine mäßige Frequenz besitzen oder irgendwie weniger als einige hunderttausend in der Sekunde betragen, sind die nach außen fortschreitenden Wellen Verdichtungs-Verdünnungswellen mit abwechselnder Nullverdichtung und -verdünnung in jedem Punkte der Äquatorialebene und einem Maximum in der axialen Linie. Wenn die schwingende Schale sich in einem elastischen Festkörper befindet, der sich nach allen Richtungen von ihr aus in sehr große Entfernungen erstreckt, gehen zwei Reihen von Wellen aus, Drillungswellen und Verdichtungs-Verdünnungswellen, entsprechend den beiden Beschreibungen, die wir vor uns haben, mit verschiedenen Geschwindigkeiten nach außen; dabei ist die Geschwindigkeit der ersten Wellenart in allen bekannten elastischen Festkörpern<sup>1)</sup> kleiner als die der letzteren. Jede von diesen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ist sicherlich bis hinauf zu  $10^4$ ,  $10^5$  oder  $10^6$  oder wahrscheinlich bis zu einer nicht so hohen Frequenz hinauf von dieser Frequenz unabhängig, aber immer unter der Bedingung, daß die Wellenlänge ein großes Vielfaches des Abstandes zwischen den Molekeln des Festkörpers ausmacht.

1) Math. and Phys. Papers, Vol. III, Art. civ. p. 522.

Wenn wir nun bis zu Schwingungszahlen von  $4 \times 10^{12}$ ,  $400 \times 10^{12}$ ,  $800 \times 10^{12}$  und  $3000 \times 10^{12}$ , die dem bereits bekannten Gebiete der langperiodischen, nicht sichtbaren strahlenden Wärme, dem sichtbaren Lichte, dem ultravioletten Lichte entsprechen, hinaufsteigen, was wird dann aus den Verdichtungs-Verdünnungswellen, die wir betrachtet haben? Wie und in welchem Gebiete gelangen wir von den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von 3 km in der Sekunde für Drillungswellen in Glas oder von 5 km in der Sekunde für Verdichtungswellen in Glas zu 300 000 km in der Sekunde für Licht in Glas und vielleicht gar keiner Verdichtungs-Verdünnungswelle mehr? Einer Tatsache können wir vollkommen sicher sein — der Übergang ist ein stetiger. Ist es wahrscheinlich (wenn der Äther vollkommen inkompressibel ist, ist es sicher möglich), daß die Verdichtungs-Verdünnungswelle immer kleiner und kleiner wird bei Frequenzen zwischen  $10^6$  und  $4 \times 10^{12}$ , und daß absolut nichts mehr von ihr vorhanden ist für periodische Störungen mit Frequenzen zwischen  $4 \times 10^{12}$  und  $3000 \times 10^{12}$ ? In dem Umstande, daß wir unserer vorgestellten Schale eine Schwingungszahl von der Höhe, wie  $500 \times 10^{12}$ , die des gelben Lichtes erteilen, liegt nichts Unnatürliches und fruchtlos Ersonnenes. Es ist durchaus sicher, daß es eine bestimmte mechanische Theorie für die Lichtwellen gibt, die durch eine elektromagnetische Theorie wohl bereichert, nicht aber aufgehoben werden kann; und es ist interessant, eine sichere Übergangslinie von unseren Drillungswellen in Glas oder Metall oder Stein zu unseren noch besser bekannten Lichtwellen zu finden.

(2) Hier ist ein noch einfacherer Übergang von den Drillungswellen in einem elastischen Festkörper zu den Lichtwellen. Wir bleiben bei der Vorstellung unserer gewichtlosen sphärischen Schale von 13 cm innerem Durchmesser mit der massiven Kugel von 12 cm Durchmesser, die in ihr hängt. Anstatt der früher angenommenen einfachen Kräfte, die in entgegengesetzten Richtungen verlaufende geradlinige Schwingungen der Schale und des Kernes verursachen, denken wir uns jetzt eine geeignete Kraft zwischen Schale und Kern angebracht, die ihnen schwingende Rotationen in entgegengesetzten Richtungen mitteilt. Wenn die Schale in Luft oder Wasser hängt, erhalten wir eine an und für sich interessante Fortpflanzung der Störung nach außen, die von der Viskosität herrührt; wir werden aber so keine Bewegung finden, die wir dem Gegenstande, mit dem wir uns jetzt beschäftigen, anzupassen wissen, bis wir die Schwingungszahlen auf  $10^9$ ,  $10 \times 10^{12}$ ,  $400 \times 10^{12}$ ,  $800 \times 10^{12}$  oder  $3000 \times 10^{12}$  gesteigert haben, bis wir es mit strahlender Wärme oder sichtbarem Licht oder ultraviolettem Licht zu tun haben, das von der äußeren Oberfläche der Schale, gewissermaßen von einer punktförmigen Lichtquelle im Mittelpunkt aus fortschreitet mit einem Polarisationszustande, den wir bald eingehend untersuchen wollen. Jetzt mag aber unsere gewichtlose Schale sich weit fort im Innern einer sehr großen Masse von Glas oder Metall oder Stein oder sonst irgendeinem homogenen elastischen Festkörper befinden, fest mit ihm in seiner ganzen Oberfläche verbunden, so daß weder ein Abspringen von ihm, noch tangentialer Gleiten möglich ist. Dann werden sich rein drillende Wellen in allen Richtungen außer der tangentialen ausbreiten. Nehmen wir, um etwas Festes im Auge zu haben, an, wir fangen mit Schwingungen von einer Sekundenperiode an, und es sei der elastische Festkörper Glas oder Eisen. In Entfernungen von einigen hundert Kilometer (d. h. in Abständen, die groß sind im Vergleich

mit der Wellenlänge und ferner groß im Vergleich mit dem Radius der Schale) wird die Wellenlänge annähernd 3 km betragen.<sup>1)</sup> Läßt man jetzt die Frequenz auf 1000 Perioden in der Sekunde anwachsen, so wird die Wellenlänge in Abständen von einigen hundert Meter auf etwa 3 m herabgegangen sein. Läßt man die Frequenz weiter auf  $10^6$  Perioden in der Sekunde anwachsen, so wird die Wellenlänge 3 mm betragen, und dies nicht nur in Abständen von einigen Mehrfachen des Radius der Schale, sondern in dem ganzen elastischen Medium, von der unmittelbaren Nähe der Schalenoberfläche ab, weil jetzt die Wellenlänge nur noch einen kleinen Bruchteil des Radius der Schale ausmacht. Läßt man die Schwingungszahl noch weiter auf  $1000 \times 10^6$  Perioden in der Sekunde anwachsen, so wird die Wellenlänge  $3 \times 10^{-3}$  mm oder 3 Mikron betragen, wenn, was mit aller Wahrscheinlichkeit zutrifft, der Abstand zwischen den Mittelpunkten zweier benachbarten Molekel in Glas und in Eisen kleiner als ein Fünfhundertel eines Mikron ist. Andererseits ist es wahrscheinlich, daß dieser Abstand in Glas und Eisen größer ist als  $10^{-5}$  Mikron, also wird es auch wahrscheinlich sein, daß keiner von diesen Festkörpern Wellen drillender Bewegung ihrer eigenen ponderablen Materie übertragen kann, wenn ihre Wellenlänge nicht größer als  $10^{-5}$  Mikron ist. Folglich ist es weiter wahrscheinlich, daß, wenn wir die Frequenz der rotierenden Schwingungen auf hunderttausendmal  $1000 \times 10^6$ , d. h. auf  $100 \times 10^{12}$  steigern, keine Drillungswelle der Bewegung der ponderablen Materie mehr nach außen fortgeleitet werden kann. Dabei erscheint aber ziemlich sicher, daß nahe der Grenzfläche der drillenden Schale drillende Wellen strahlender Wärme im Äther hervorgerufen werden, obwohl zugleich wahrscheinlich ist, daß, wenn der umgebende Festkörper Eisen oder Glas ist, diese Wellen nicht weit nach außen fortgeleitet, sondern bald absorbiert, d. h. in nicht wellenförmige Bewegungen umgewandelt werden. Und dieses wird schon in einigen Mikron Entfernung von dem Ursprung der Wellen geschehen.

Schließlich nehmen wir an, der elastische, unsere oszillierende Schale umgebende Festkörper sei eine konzentrische Schale aus homogenem Glase von einigen Zentimeter oder einigen Meter Dicke und vom Brechungsindex 1,5 für D-Licht. Wenn dann die Zahl der Schwingungen auf  $5,092 \times 10^{14}$  Perioden in der Sekunde gesteigert oder ihre Periode auf 0,58932 Mikron reduziert wird, dann wird homogenes gelbes Licht der Periode, die gleich dem Mittel aus den Perioden der beiden Natriumlinien ist, nach außen durch das Glas hindurch mit einer Wellenlänge von etwa  $\frac{2}{3} \times 0,58932$  Mikrom fortgeleitet und aus dem Glase heraus in die Luft mit einer Wellenlänge von 0,58932 Mikrom gesandt. Das Licht hat dabei seine größte Intensität in der Äquatorialebene und ist Null in beiden Richtungen längs der Achse, und seine Polarisationssebene liegt überall in der Meridianebene. Es ist interessant zu bemerken, daß die Rotationsachse des Äthers in diesem Falle überall mit der Vibrationslinie des Äthers in dem zuerst betrachteten Falle zusammenfällt, also in dem Falle, in dem die Schale in gerader Linie hin- und herging, anstatt, wie im zweiten Falle, um einen unendlich kleinen Winkel um dieselbe Gerade hin und her zu rotieren.

Eine vollständige mathematische Untersuchung der Bewegung des elastischen Mediums in allen Abständen von der die Bewegung verursachenden

1) Math. and Phys. Papers, Vol. III, Art. civ. p. 522.



Schale für jeden der beiden Fälle (1) und (2) soll später (S. 151 ff.) gegeben werden.

II. Eine elektrische Analogie für I (1) ergibt sich, wenn wir unsere gewichtlose Schale durch eine absolut starre, unendlich massive Schale aus Glas oder einem anderen elektrischen Nichtleiter und unseren massiven Platin-kern durch eine gewichtlose, nichtleitende, elektrisch mit einer gegebenen Elektrizitätsmenge geladene Kugel ersetzen. Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, unser Apparat sei von Luft oder Äther eingehüllt. Es sollen nun hin- und hergehende Schwingungen in einer geraden Linie durch eine Kraft zwischen Schale und Kern, wie in I (1), unterhalten werden. Oder es sei auch eine festgehaltene, nichtleitende Kugel mit zwei kreisförmig begrenzten Metallkalotten belegt, zwischen denen eine nichtleitende äquatoriale Zone gelassen ist, und es mögen dünne, von einer in der Entfernung aufgestellten Wechselstrommaschine oder von einem elektrostatischen Induktor ausgehende Drähte die beiden Kalotten periodisch abwechselnd mit entgegengesetzten Elektrizitäten laden. Für mäßige Wechselzahlen bekommen wir in der den Apparat umhüllenden Luft oder im Äther eine periodische Änderung elektrostatischer Kraft, die wir mit unserer Vorstellung leicht verfolgen und auch mit geeigneten elektrostatischen Meßinstrumenten messen können. Ihre Phase ist bei mäßigen Wechselzahlen sehr nahe dieselbe wie die des elektrischen Vibrators. Jetzt aber wollen wir voraussetzen, die Frequenz des Vibrators werde auf einige Hundert Billionen Perioden in der Sekunde gesteigert. Dann erhalten wir polarisiertes Licht von der Art, als ob solches von einer idealen punktförmigen Quelle im Mittelpunkte des Vibrators ausginge, das vollständig der Beschreibung unter I (1) gemäß sich verhält. Bleibt die Schwingungsphase der elektrostatischen Kraft in der axialen Geraden außerhalb des Apparates genau dieselbe wie die des Vibrators? Eine bejahende Antwort auf diese Frage würde besagen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrostatischer Kraft unendlich groß ist, eine verneinende, daß es eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrostatischer Kraft gibt.

III. Die Schale und der innere, geladene, nichtleitende, gewichtlose Kern seien dieselben wie in II, und es wirke nun eine Kraft zwischen Schale und Kern, die rotierende Oszillationen wie in I (2) hervorruft. Solange die Frequenz der Schwingungen eine mäßige ist, wird eine Änderung der elektrostatischen Kraft und eine merkliche magnetische Kraft in der Luft oder dem Äther in der Umgebung des Apparates nicht eintreten. Wenn wir aber jetzt die Frequenz auf einige Hundert Billionen in der Sekunde steigern, so erhalten wir polarisiertes Licht, das so fortschreitet, als ob es von einer idealen punktförmigen Quelle im Mittelpunkte ausginge und das ganz der Beschreibung des Lichtes in I (2) entspricht. Dasselbe Resultat würde man aber auch erhalten, wenn man einfach um eine festgehaltene, feste, nicht leitende Kugel in annähernd gleichweit voneinander abstehenden Parallelkreisen einen Draht windet und durch ihn mittels einer entfernten Elektrizitätsquelle (wie in II) einen Wechselstrom leitet. Da in diesem Falle elektrostatische Kraft nicht zutage tritt, besteht eine starke alternierende, magnetische Kraft, die sich in dem Raume außerhalb der Kugel so verhält, als ob sie von einem idealen, unendlich kleinen Magnet mit alternierender Magnetisierung herrührt, der sich im Mittelpunkte der Kugel befindet, und dessen magnetische Achse in unserer Axiallinie verläuft.

## Dreizehnte Vorlesung.

### Schwingungsmodelle. Drillungswellen nach Green und Fresnel. Sellmeiers Brechungsformel für Natriumdampf.

Prof. Morley hat bereits die endliche mechanische Aufgabe, die ich Ihnen vorgeschlagen habe (S. 95), insofern teilweise gelöst, als er vier von den Fundamentalperioden berechnet hat; es wird Sie vielleicht interessieren, das Ergebnis zu erfahren. Er findet als Wurzeln  $\kappa^{-2}$ ,  $\kappa^{-2}$  usf. = 3,46; 1,005; 0,298; 0,087; jede Wurzel ist dabei nicht wesentlich verschieden vom Dreifachen der ihr folgenden. Doch gehe ich einstweilen nicht weiter auf den Gegenstand ein. Ich wollte nur Ihre Aufmerksamkeit auf diese Rechnung lenken. Ich meine, es wäre wünschenswert, ebenso die Energieverhältnisse (S. 60) zu bearbeiten.<sup>1)</sup> Als ich dieses Beispiel wählte, dachte ich an einen Fall, bei dem die Ausrechnung notwendigerweise in hohem Maße konvergent war. Hauptsächlich aber wählte ich es, weil es etwas von der Sachlage wiedergab, die sich in der wahren Molekel darstellt: Eine elastische, zusammengesetzte Molekel, die aus einer begrenzten Anzahl diskontinuierlicher, elastisch miteinander verbundener Massen (mit enormen Massen in den zentralen Teilen, das erscheint sicher) besteht: das Ganze in den Äther eingebettet und der Einwirkung des Äthers mittels elastischer Verbindungen ausgesetzt, die, wenn nicht die Molekel starr und in den Äther einfach wie eine starre Masse in Gallerte eingebettet ist, aus elastischen Federn analogen Verbindungen bestehen müssen.

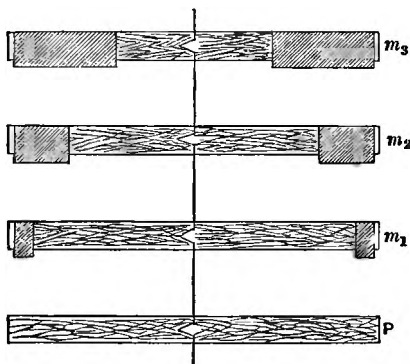


Fig. 37.

Ich denke, es wird Sie interessieren ein Modell anzuschauen, das ich Ihnen hier infolge der Freundlichkeit des Prof. Rowland vorführen kann. Es ist nach demselben Plane eingerichtet wie eine Wellenmaschine, die ich vor vielen Jahren zum Gebrauch bei meinen Vorlesungen an der Universität Glasgow konstruiert, und die ich schließlich bei der Vorbereitung einer Vorlesung über „die Größe der Atome“<sup>2)</sup> an der Royal Institution vor etwa zwei Jahren abgeändert hatte. Wenn Sie näher hinschauen, sehen Sie, wie das

1) Dies ist inzwischen von Prof. Morley geleistet worden, der mir am 17. Okt. freundlichst seine Resultate bezüglich der „Koeffizienten“ überreicht hat. Vgl. Vorles. XIX, weiter unten.

2) 3. Februar 1883; Proc. Roy. Institution, Vol. X, p. 185; Popular Lectures and Addresses, Vol. I, p. 154.

Ding gebaut ist: In einer Anzahl Stäbchen (wie in Fig. 37) sind je drei Dorne eingeschlagen, und um diese ist ein Klavierdraht, an jedem Stäbchen in der in Fig. 38 dargestellten Weise, gewunden. Diese Dorne sind so gebogen, daß sie den Draht zwingen, sie dicht an die Stäbchen zu drücken, so daß sie diese ganz festhalten. Das Holz ist etwas fortgeschnitten, damit es der Draht oberhalb und unterhalb der Dorne nicht berühren kann und keine Abschwächung der elastischen Kraft durch das Gleiten des Stahls am Holze verursacht wird. Der benutzte Draht ist feiner Klavierdraht; es ist dies die elastischste verwendbare Substanz, und ich glaube, überhaupt das bei weitem elastischste Material, das wir kennen [ausgenommen die Kristalle; 19. Jan. 1899]. Ein schweres Gewicht hängt am unteren Ende des Drahts, um ihn gut gestreckt zu halten.

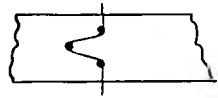


Fig. 38.

Prof. Rowland konstruiert eben auch eine kontinuierliche Wellenmaschine. Mein Apparat ist, wie Sie sehen, eigentlich keine Wellenmaschine, sondern eine Einrichtung zur Darstellung der Schwingungen einer begrenzten Gruppe einer Anzahl elastisch miteinander verbundener Partikel. Die verbindenden Federn werden durch die Torsionsfederkraft der drei Teile des verbindenden Drahtes und durch diejenige des vierten Teils dargestellt, an dem das Ganze hängt. In diesem Falle trägt das Gewicht nichts zu der Wirkung bei, durch jenes wird nur der Draht gespannt. Wenn wir unsern Draht zwischen zwei Seiten eines tragbaren Rahmens spannten, könnten wir unser Modell in einen idealen Vorlesungssaal am Mittelpunkt der Erde bringen, und er würde genau so arbeiten, wie Sie es jetzt sehen. Sie erkennen, daß diese oberen Massen unsern  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  entsprechen. Im ganzen haben wir hier vier Massen, die unterste vertritt die sphärische Schale, die den unsere vorgestellte Höhlung umgebenden Äther begrenzt. Ich will nun dieser untersten Masse  $P$  eine bewegende Kraft mitteilen. Um die Bedingungen unseres Falles noch vollständiger zu verwirklichen, müßten wir auch eine mit einem Vibrator verbundene Feder haben, um  $P$  zu bewegen, und vielleicht können wir dies noch vor der nächsten Vorlesung ausführen. [Dies ist von Prof. Rowland geschehen; vgl. Vorlesung XIV.] Ich will für jetzt nichts weiter versuchen, als diese erste Partikel hin und her zu bewegen in einer Periode, die merklich kürzer ist als die kürzeste der drei Fundamentalperioden, die bestehen würden, wenn der unterste Stab festgehalten würde. Das Resultat ist eine kaum merkbare Bewegung der anderen Partikel. Ich weiß nicht, ob überhaupt eine merkliche Bewegung eingetreten wäre, wenn ich darauf geachtet hätte, den größten Ausschlag dieser untersten Partikel innerhalb der ursprünglichen Ausdehnung zu beiden Seiten ihrer Mittellage zu halten.

Der erste Teil meiner heutigen Vorlesung soll eine Fortsetzung unserer Betrachtungen über die Äolotropie bilden, der zweite soll sich mit der Molekularmechanik beschäftigen. Ich habe vor, diesen Gegenstand etwas näher zu betrachten; doch werde ich besonders auf die Punkte eingehen, die weniger die regelmäßige Brechung betreffend, als vielmehr die anomale Dispersion und die Absorption, die wir in Flüssigkeiten und sehr undurchsichtigen Körpern vor uns haben, sowie diejenige, die sich unter den sehr feinen Linien im Sonnenspektrum verrät, das jetzt schöner als je mit den Rowlandschen Gittern gesehen wird.

## a) Molar.

Ich spreche also zunächst über Äolotropie. Die Gleichungen, durch die Green die Bedingung verwirklichte, daß zwei von den drei Wellen, die ihre Fronten zu derselben Ebene parallel haben, als drillende auftreten, sind in dieser Hinsicht gleichwertig mit einer leichtverständlichen Bedingung, die ich erläutern will, indem ich die allgemeinere Aufgabe in Betracht ziehe. Diese Aufgabe ist einer anderen von äußerster Einfachheit ähnlich, nämlich dem wohlbekannten Problem von der Verschiebung einer Partikel, auf die in verschiedenen Richtungen von festen Zentren ausgehende Kräfte wirken. Indem eine unendlich kleine Verschiebung betrachtet wird, tritt die Frage auf, wann liegt die Rückkehrkraft in der Richtung der Verschiebung? Wie wir wissen, gibt es drei zueinander senkrechte Richtungen, in denen diese Kraft der Richtung der Verschiebung folgt. Der einzige Unterschied zwischen dieser sehr banalen Aufgabe und unserer gestrigen (Vorlesung XII, S. 108 f) besteht, darin, daß bei letzterer die Frage bezüglich einer ganzen unendlichen Ebene in einem unbegrenzten homogenen Festkörper gestellt ist, der zwischen zwei festen parallelen Ebenen in irgendeiner Richtung zu beiden Seiten jener Ebenen so verschoben wird, daß diese Ebene den beiden anderen Ebenen immer parallel bleibt. Wenn wir dann die Rückkehrkraft betrachten, haben wir dieselbe Frage vor uns: wann liegt sie in der Richtung der Verschiebung? Und die Antwort ist wieder: es gibt drei zueinander rechtwinklige Richtungen, in denen diese Kraft sich in der Richtung der Verschiebung befindet. Diese drei Richtungen sind im allgemeinen schräg zur Ebene; jedoch hat Green die Bedingungen gefunden, unter denen die eine senkrecht zur Ebene ist und die beiden anderen in der Ebene liegen.

Ich führe die Bedingung für die Inkompressibilität ein. Wir stellen zuerst die wohlbekannten Bewegungsgleichungen für einen isotropen Festkörper auf, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= (k + \tfrac{1}{3}n) \frac{\partial \delta}{\partial x} + n \nabla^2 \xi \\ \rho \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= (k + \tfrac{1}{3}n) \frac{\partial \delta}{\partial y} + n \nabla^2 \eta \\ \rho \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= (k + \tfrac{1}{3}n) \frac{\partial \delta}{\partial z} + n \nabla^2 \zeta \end{aligned} \right\}.$$

Nehmen wir jetzt an, der Widerstand gegen Zusammendrückung sei unendlich groß, welche Annahme zur Folge hat, daß  $k = \infty$  wird, immer wenn  $\delta = 0$  ist; was wird dann aus dem ersten Gliede der rechten Seite der obigen Gleichungen? Wir setzen einfach  $(k + \tfrac{1}{3}n)\delta = p$  und schreiben demgemäß die rechten Seiten  $\frac{\partial p}{\partial x} + n \nabla^2 \xi$  usw. Dies macht keinerlei Annahme nötig. Wir können  $k = \infty$ ,  $\delta = 0$  setzen, ohne der Form unserer Gleichungen Gewalt anzutun. Diese Gleichungen bilden ohne jede Bedingung bezüglich  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  und mit der Bedingung, daß  $p = (k + \tfrac{1}{3}n)\delta$  ist, die notwendigen und hinreichenden Gleichungen für die Aufgabe. Andererseits ist bei  $k = \infty$  die Bedingung, die diese Tatsache zur Folge hat,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

was also, mit den obigen drei, vier Gleichungen zwischen den vier unbekannten Größen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $p$  ausmacht.

Genau dieselbe Operation kann hinsichtlich der Gleichungen (1), (2), (3) S. 105 für einen Festkörper mit 21 unabhängigen Koeffizienten durchgeführt werden. Wir würden dann wieder diese Gleichung  $\delta = 0$  für einen äolotropen Körper finden und eine entsprechende Größe gleich unendlich setzen. Ich will für diesen Augenblick keine von diesen Formeln entwickeln, jedoch ein Prinzip mitteilen, daß sich von selbst darbietet. Um die Bedingung:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

in unsere allgemeine Energiegleichung mit ihren 21 Koeffizienten einzuführen, die einen quadratischen Ausdruck in Termen der sechs Größen, die wir mit  $e$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  bezeichnet haben, zur Folge hat, müssen wir die quadratische Form in eine solche umwandeln, in der  $(e + f + g)^2$  mit einem Koeffizienten vorkommt. Setzt man diesen Koeffizienten gleich unendlich und  $e + f + g = 0$ , so erhält man die allgemeinen Gleichgewichtsgleichungen eines inkompressibeln äolotropen elastischen Festkörpers.

Wir treten nun den Abweichungen von der Isotropie näher, die durch die Greenschen Gleichungen zwischen den Koeffizienten aufgewogen werden, welche besagen, daß zwei von den drei Wellen rein drillend verlaufen und und die dritte Welle rein verdichtend-verdünnend sein soll.

Der einem isotropen Körper nächststehende ist ein solcher, der die von Rankine als kyboidisch bezeichnete Asymmetrie zeigt, wofür wir in üblicher Weise kubische Asymmetrie sagen.

Rankine stellt die Gleichungen auf, die eine solche Asymmetrie zulassen. Später macht er beiläufig die Bemerkung, daß von Sir David Brewster diese Art der Abweichung von der Symmetrie im Analcim entdeckt sei. Ich habe dies im Rankine erst vor zwei oder drei Tagen gefunden. Ich erinnere mich aber, daß, als ich mich vor nicht langer Zeit mit demselben Gegenstande beschäftigte, ich zu Stokes sagte — (ich frage immer meine große Autorität Stokes, wenn sich die Gelegenheit bietet) — „Sicherlich dürfte in der Natur etwas zu finden sein, was als Beispiel für diese Art Asymmetrie herangezogen werden könnte; sollte sich etwas Derartiges nicht unter den Kristallen des kubischen Systems finden?“ Stokes — er weiß meist alles — meinte sofort: „Sir David Brewster glaubte es bei kubischen Kristallen gefunden zu haben; man kann die Erscheinung aber anders erklären, sie kann von der Wirkung der Spaltebenen oder von der Zusammensetzung des Kristalls aus einzelnen kristallinen Platten herrühren.“ — Ich erinnere mich nicht mehr alles dessen, was Stokes sagte; immerhin bestritt er ausdrücklich, daß Brewsters Versuch einen Fall optischer Asymmetrie bei Kristallen des kubischen Systems nachweise. Er betonte, daß schon eine äußerst kleine Abweichung von der kubischen Isotropie bei den elementarsten Lichterscheinungen sehr ausgeprägt zutage treten müßte und leicht mittels der gewöhnlichen optischen Instrumente entdeckt werden würde. Die Tatsache, daß nichts Derartiges entdeckt ist, liefert den zwingenden Beweis, daß die Abweichung von der optischen Symmetrie in einem Kristall des kubi-

schen Systems, wenn eine solche besteht, äußerst klein ist im Vergleich mit der Abweichung von der Isotropie, die sich bei den gewöhnlichen doppelbrechenden Kristallen zeigt.

### b) Molekular.

Tatsächlich aber wird bei entsprechender Äolotropie in der Ebene die quadratische Asymmetrie in einem Taschentuch oder in einem anderen Stück quadratisch gewebten Zeuges gefunden, wenn man annimmt, daß Kette und Einschlag einander genau ähnlich sind, eine Annahme, die für gewöhnliches Zeug freilich nicht ganz zutrifft. Stellen wir uns aber sorgfältig quadratisch gewebten Stoff vor, so ist dieser symmetrisch und in seinen Moduln gleich in zwei zueinander senkrechten Achsen. Es wird ein großer Unterschied bestehen, wenn Sie die Quadrate längs einer Seite ausziehen und längs der anderen zusammendrücken oder andererseits längs einer Diagonale ziehen und längs der anderen zusammendrücken wollen. Nehmen wir den extremen Fall, daß der Stoff aus

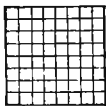


Fig. 39.

undehnbar, reibungslosen Fäden gewebt ist, so besteht ein absoluter Widerstand gegen Deformationen in zwei zueinander senkrechten Richtungen und überhaupt kein Widerstand dagegen bei der Änderung der quadratischen Form in eine rhombische. Das heißt, ein Netzwerk dieser Art bietet keinen Widerstand gegen eine Verdrehung, die durch Verlängerung der einen und Verkürzung der anderen Diagonale hervorgerufen wird. Jetzt denken wir uns aus dem Taschentuche ein Quadrat ausgeschnitten, dessen Seiten nicht

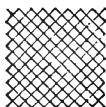


Fig. 40.

den Fäden, sondern den Diagonalen parallel sind, und machen ein Muster der beistehenden Art. Dieses bildet ein Quadrat, das umgekehrt einen unendlichen Widerstand gegen Deformationen in Richtung der jetzigen Diagonalen, dagegen den Widerstand Null besitzt, gegen Dehnung in jeder Richtung, die zu einem der Seitenpaare parallel ist. Dies ist übrigens kein nichtssagendes Beispiel; die Chirurgen machen von dieser Tatsache bei ihren Verbänden Gebrauch. Jemand der nicht mit der Theorie elastischer Festkörper vertraut ist, würde einen Stoffstreifen parallel zu Kette und Einschlag schneiden; schneidet man ihn aber schräg, so erhält man eine erwünscht biegsame und in der Länge semielastische Eigenschaft, die den Streifen geeignet macht, für manche Art Verband Dienste zu leisten.

Stellen wir uns einen elastischen Festkörper vor, der in dieser Art angefertigt ist, mit dieser Art der Abweichung von der Isotropie, so haben wir offenbar zwei verschiedene Starrheiten für verschiedene Drillungen in derselben Ebene. Ich erinnere mich, daß Rankine in einer seiner ersten Abhandlungen bewiesen hat, daß dies unmöglich sei! Er hat einen Satz bewiesen, nach dem die Starrheit für alle Drillungen in derselben Ebene die nämliche sein soll. Der Beweis war zweifellos auf einigen besonderen Annahmen über die Anordnung der Molekeln begründet und wird wohl für die besondere angenommene Anordnung richtig sein; er ist aber offenbar falsch für wirkliche elastische Festkörper. Rankine behandelt in seiner ersten Abhandlung den elastischen Festkörper bezüglich der Möglichkeiten an Äolotropie zu kurz. Er nahm bald darauf die Aufgabe sehr eingehend auf derselben Grundlage wie Green mit seinen 21 Koeffizienten wieder auf, immer

aber noch beschränkt durch seine frühere Behauptung, daß die Starrheit für alle Drillungen in derselben Ebene die nämliche sei. In seinem Werke über die Elastizität der festen Körper finden sich viele etwas wunderliche Benennungen, zugleich aber auch mittlerweile so eingebürgerte wie „potentielle“ Energie.

Sie werden jetzt verstehen, was kubische Äolotropie<sup>1)</sup> ist; es ist die Art der Äolotropie, die ein würfelförmiges Gitter zeigt, gewissermaßen eine aus gleichförmigem kubischem Netzwerk aufgebaute Struktur. Es ist [14. Febr. 1898, ein Würfelskelett aus zwölf gleichen Holzstäben, deren Enden in acht Kautschukbällen, die seine Ecken bilden, befestigt sind] ein Körper, der isotrop wäre, nur daß seine Starrheit für eine von zwei Hauptdrillungen in der einen seiner Symmetrieebenen kleiner ist als in der anderen.

Will man den Gegenstand analytisch behandeln, so setzt man so viele von den 21 Koeffizienten gleich Null, wie nötig sind, um zwei Bedingungen zu erfüllen: (1) daß, wenn man einen Würfel aus dem Material durch drei einander das Gleichgewicht haltende Druckpaare, gleiche oder ungleiche, senkrecht zu seinen drei Seitenpaaren angreifen läßt, er rechtwinklig bleibt, und (2), daß, wenn man in vier durch vier parallele Kanten gehenden Ebenen einander das Gleichgewicht haltende tangential, zu jenen Kanten senkrechte Kräfte wirken läßt, die Winkel an diesen Kanten abwechselnd spitz und stumpf werden, die Winkel an den acht übrigen Kanten aber rechte bleiben. [14. Feb. 1899; hier folgen die Nullsetzungen von Koeffizienten, die erforderlich sind, diese beiden Bedingungen zu erfüllen, wenn  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  parallel den Kanten des nicht gestörten Würfels gewählt sind und die Bezeichnungen der Vorlesung II, S. 16 beibehalten werden:

$$\left. \begin{aligned} (42) = 0; (43) = 0; (51) = 0; (53) = 0; (61) = 0; (62) = 0 \\ (41) = 0; (52) = 0; (63) = 0; (56) = 0; (64) = 0; (45) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dann geht der Ausdruck für die potentielle Energie über in

$$\begin{aligned} 2E = (11)e^2 + (22)f^2 + (33)g^2 + 2[(23)fg + (31)ge + (12)ef] \\ + (44)a^2 + (55)b^2 + (66)c^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Mit diesen neun Koeffizienten

$$(11), (22), (33); (23), (31), (12); (44), (55), (66),$$

die sämtlich voneinander unabhängig sind, zeigt der elastische Festkörper zwei verschiedene Starrheiten für die beiden Drillungen einer jeden von den Ebenen  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$ , die eine gegen eine verdrehende Bewegung parallel zu einer der beiden anderen Ebenen, die andere gegen eine verdrehende Bewegung parallel zu einer der den rechten Winkel zwischen diesen Ebenen halbierenden Ebene. Die Werte dieser Starrheiten sind für die Fälle von solchen Bewegungen, parallel zu unseren Hauptebenen und unter  $45^\circ$  gegen sie, die folgenden:

1) Vgl. oben S. 97.

Verdrehung	Ebene der Verdrehung	Bewegungsrichtung	Starrheit
$a$ $f-g$	$(yz)$	$y$ oder $z$ $45^\circ$ zu $y$ und $z$	(44) $\frac{1}{2} \{ \frac{1}{2} [(22)+(33)] - (23) \}$
$b$ $g-e$	$(zx)$	$z$ oder $x$ $45^\circ$ zu $z$ und $x$	(55) $\frac{1}{2} \{ \frac{1}{2} [(33)+(11)] - (31) \}$
$c$ $e-f$	$(xy)$	$x$ oder $y$ $45^\circ$ zu $x$ und $y$	(66) $\frac{1}{2} \{ \frac{1}{2} [(11)+(22)] - (12) \}$

Aus der Tatsache, daß von den Größen  $a, b, c$  nur die Quadrate in den Energiegleichungen auftreten, erschen wir, daß im Gleichgewichtszustande<sup>1)</sup> diesen Drillungen, jeder für sich, durch die tangentialen Zwänge  $S, T, U$  das Gleichgewicht gehalten wird. Und wir schließen daraus, daß es ebene Wellen aus rein longitudinaler (verdichtend-verdünnender) Bewegung geben kann, und ebenso Wellen reiner Drillung, die in den Richtungen  $x, y, z$  mit ihren Vorderflächen senkrecht zu diesen Richtungen fortschreiten, und daß ihre Geschwindigkeiten<sup>2)</sup> in der folgenden Tabelle wiedergegeben sind:

Wellen- vorderfläche	Schwingungs- linie	Art	Geschwin- digkeit
$(yz)$	$x$	verdichtend-verdünnend	$\sqrt{\frac{(11)}{e}}$
	$y$	rein drillend	$\sqrt{\frac{(66)}{e}}$
	$z$	„ „	$\sqrt{\frac{(55)}{e}}$
$(zx)$	$y$	verdichtend-verdünnend	$\sqrt{\frac{(22)}{e}}$
	$z$	rein drillend	$\sqrt{\frac{(44)}{e}}$
	$x$	„ „	$\sqrt{\frac{(66)}{e}}$
$(xy)$	$z$	verdichtend-verdünnend	$\sqrt{\frac{(33)}{e}}$
	$x$	rein drillend	$\sqrt{\frac{(55)}{e}}$
	$y$	„ „	$\sqrt{\frac{(44)}{e}}$

1) Vorlesung II, S. 18.

2) Die Gleichungen (1) oben nebst den Gleichungen (4), (7), (8) der Vorlesung XI, S. 106, angewendet nacheinander auf die Fälle:

$m = 0, n = 0, \xi = 0; n = 0, l = 0, \eta = 0; l = 0, m = 0, \xi = 0.$



Wählt man aus diesen die rein drillenden Wellen aus und stellt sie in Paaren mit gleichen Geschwindigkeiten zusammen, so erhält man die folgende vorteilhafte Tabelle:

Wellen- vorderfläche	Schwingungs- linie	Drillungs- ebene	Geschwin- digkeit
$(xy)$ $(xz)$	$y$ $z$	$(yz)$	$\sqrt{\frac{(44)}{e}}$
$(yz)$ $(yx)$	$z$ $x$	$(zx)$	$\sqrt{\frac{(55)}{e}}$
$(zx)$ $(zy)$	$x$ $y$	$(xy)$	$\sqrt{\frac{(66)}{e}}$

In dieser Tabelle finden wir eine und dieselbe Geschwindigkeit, z. B.  $\sqrt{\frac{(44)}{e}}$ , für zwei verschiedene Wellen, deren Vorderflächen der Achse  $x$  parallel sind, und in denen die Schwingungslinien das eine Mal  $y$ , das andere Mal  $z$  folgen, so daß beiden Wellen die  $yz$ -Ebene als Drillungsebene dient. Wenn wir jetzt die Formeln der elften Vorlesung S. 106 benutzen, um die Geschwindigkeit anderer Wellen, die dieselbe Drillungsebene besitzen, aufzusuchen — beispielsweise Wellen, deren Vorderflächen parallel der Achse  $x$  und deren Schwingungslinien gegen  $y$  und  $z$  unter  $45^\circ$  geneigt sind — so finden wir verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, es sei denn, daß ist

$$(44) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [(22) + (33)] - (23) \right\}^1,$$

in welchem Falle sie sämtlich gleich sind. In dieser Weise und durch ähnliche Betrachtungen für  $y$  und  $z$  sehen wir, daß jede der drei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, wie sie in der obigen Tabelle gegeben sind, für alle Wellen mit gemeinsamer Drillungsebene die nämliche ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\left. \begin{aligned} (44) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [(22) + (33)] - (23) \right\} \\ (55) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [(33) + (11)] - (31) \right\} \\ (66) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [(11) + (22)] - (12) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Diese drei Gleichungen drücken einfach die Bedingung dafür aus, daß in jeder der drei Koordinatenebenen die gegen eine Verdrehung parallel einer der beiden andern Koordinatenebenen wirkende Starrheit gleich ist der wirkenden Starrheit gegen eine Verdrehung parallel jeder den rechten Winkel halbierenden Ebene.

Green<sup>2)</sup> fand 14 Gleichungen zwischen seinen 21 Koeffizienten, um auszudrücken, daß es eine rein drillende Welle geben kann, deren Wellenfront

1) Vergleiche hiermit die Formel  $n = \frac{1}{2} (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$  in Vorlesung II S. 18, die die Bedingung bildet, daß die Starrheit für alle Drillungen in jeder der drei Koordinatenebenen für den hier betrachteten Fall  $(11) = (22) = (33)$  dieselbe ist.

2) Collected Papers, S. 309.

in einer beliebigen Fläche liegt. Drei weitere Gleichungen<sup>1)</sup> besagen ferner, daß die als Koordinaten gewählten Ebenen Symmetrieebenen sind. Die Bedingungen, die wir betrachten, haben uns, in (1) und (3) oben, 15 Gleichungen geliefert, die mit 15 von Green aufgestellten identisch sind. Seine beiden andern Gleichungen lauten

$$(11) = (22) = (33). \quad (4)$$

Unter Benutzung aller dieser 17 Gleichungen zwischen den Koeffizienten geht die Energiegleichung über in

$$2E = (11)(e + f + g)^2 + (44)(u^2 - 4fg) + (55)(b^2 - 4ge) + (66)(c^2 - 4cf). \quad (5)$$

Jetzt ist es leicht, das Resultat Greens zu bestätigen. Wir beachten, daß, wenn wir mit  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  unendlich kleine Verschiebungen eines Punktes des Festkörpers aus seiner ungestörten Lage  $(x, y, z)$  bezeichnen, man hat

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{\partial \xi}{\partial x}; & f &= \frac{\partial \eta}{\partial y}; & g &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ a &= \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}; & b &= \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}; & c &= \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Bezeichnen wir weiter mit  $\iiint dx dy dz$  das Integral über ein Volumen  $V$ , das so geartet ist, daß jede der Verschiebungen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  in jedem Punkte der Grenzfläche Null ist, so finden wir durch beiderseitige partielle Integration

$$\left. \begin{aligned} \iiint dx dy dz \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \iiint dx dy dz \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \iiint dx dy dz \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \iiint dx dy dz \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \iiint dx dy dz \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \iiint dx dy dz \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Und vermöge dieser Transformation ergibt sich

$$\begin{aligned} 2 \iiint E dx dy dz &= \iiint dx dy dz (11) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \\ &+ \iiint dx dy dz \left\{ (44) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 + (55) \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + (66) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Jetzt mag  $V$  der Raum zwischen zwei unendlichen, den Fronten irgendeiner Reihe rein drillender, den Raum zwischen ihnen durchziehender Wellen parallelen Ebenen sein, die an Stellen angenommen sind, an denen in einem bestimmten Augenblicke die Verschiebung Null ist — etwa die um eine halbe Wellenlänge voneinander entfernten, aufeinander folgenden Ebenen der Nullverschiebung in einer Reihe einfacher harmonischer Wellen —. Es sei ferner  $P$  irgendeine jenen parallele Ebene des schwingenden Festkörpers,

1) l. c. S. 303, 309.

$p$  ihr Abstand vom Koordinatenanfang und  $q$  ihre Verschiebung in irgend-einem Augenblicke. Dann ist  $\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial p}$  die molekulare Drehung des Festkörpers unendlich nahe dieser Ebene auf jeder Seite, und man erhält vermöge der rechtwinkligen Zerlegung der Rotationen

$$l \frac{\partial q}{\partial p} = \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}; \quad m \frac{\partial q}{\partial p} = \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad n \frac{\partial q}{\partial p} = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad (9)$$

wo  $l, m, n$  die Richtungskosinus der in der Ebene  $P$  liegenden, zur Richtung von  $q$  senkrechten Geraden bedeuten, die die Achse der molekularen Rotation ist. Benutzt man diese neuen Werte in der Gleichung (8) und beachtet, daß das erste Hauptglied verschwindet, da die Verschiebung eine rein drillende sein soll, so findet man

$$2 \iiint E dx dy dz = [(44)l^2 + (55)m^2 + (66)n^2] \iiint \left( \frac{\partial q}{\partial p} \right)^2 dx dy dz. \quad (10)$$

Wir sehen also, daß unter diesen Umständen keine Verdichtung oder Verdünnung unsere ebenen Drillungswellen begleitet und daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist

$$v = \sqrt{\frac{(44)l^2 + (55)m^2 + (66)n^2}{e}}. \quad (11)$$

Dies ist aber die Formel von Fresnel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen Welle in einem Kristall, wenn mit  $(l, m, n)$  die Schwingungsrichtung bezeichnet wird, während bei der Theorie von Green  $(l, m, n)$  die Linie in der Wellenfront feststellt, die zur Schwingungsrichtung senkrecht steht. Die Wellenfläche ist mit der Fresnelschen identisch.

Ich will ihnen Greens eigene Worte über die Stellung der von ihm ermittelten Bewegung in Wellen zu der von Fresnel gefundenen vorlesen. Sie finden sich auf Seite 304 unten in seinen Collected Papers (Gesammelte Abhandlungen): „Wir sehen so, wenn wir uns einen Querschnitt in dem Ellipsoid, zu dem die Gleichung (10) gehört, durch den Mittelpunkt desselben parallel zur Wellenfront gelegt denken, dann fällt dieser Schnitt, wenn er um  $90^\circ$  in seiner eigenen Ebene gedreht wird, mit einem ähnlichen Schnitte des Ellipsoides, zu der die Gleichung (8) gehört, zusammen, der die Richtungen der Störung angibt, die eine ebene Welle veranlaßt, sich ohne Zerteilung fortzubewegen, und zwar mit einer zu ihrer eigenen Vorderfläche parallelen Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Die hier für den elliptischen Querschnitt eingeführte Lagenänderung ist offenbar gleichbedeutend mit der Annahme, daß die wirklichen Störungen der Ätherteilchen parallel sind der gewöhnlich als Polarisationssebene bezeichneten Ebene.“

## b) Molekular.

Ehe wir uns heute trennen, wollen wir uns noch für einige Minuten unserer Aufgabe über schwingende, in einen elastischen Festkörper eingesenkte Molekeln zuwenden; und wir wollen insbesondere die Anwendung dieser mechanischen Theorie auf die Fraunhofersche dunkle Doppellinie  $D$  des Natriumdampfes anwenden.

[1. März 1899<sup>1)</sup>. Um eine vollkommen bestimmte mechanische Darstellung der Theorie von Sellmeier zu gewinnen, stellen wir uns für jede Molekel Natriumdampf einen kugelförmigen Hohlraum im Äther vor, der von einer dünnen, sphärischen Schale begrenzt ist, deren Masse der Masse homogenen Äthers, die den Hohlraum füllen würde, gleichkommt. Die starre Grenzfläche des Hohlraumes wollen wir die Schale der Molekel, oder kurz die Schale nennen. Innerhalb dieser stellen wir uns zwei starre, sphärische Schalen, eine in der andern, vor, beide beweglich und von der äußeren Schale mit solchen Kräften oder mit einer solchen Verteilung von Kräften abgestoßen, daß der Mittelpunkt jeder einzelnen nach dem Mittelpunkte des Hohlraumes mit einer Kraft gezogen wird, die sich direkt wie der Abstand ändert. Diese Voraussetzungen besagen nur, daß zwei von den Sellmeierschen Einzelatom-Vibratoren sich innerhalb einer Schale befinden.

Stellen wir uns jetzt weiter vor, eine ungeheure Anzahl dieser zweiatomigen Molekeln, alle einander in jeder Beziehung gleich und ähnlich, sei homogen in dem ganzen Äther, den wir als Natriumdampf enthaltend in Betracht zu ziehen haben, verteilt. Zunächst mag die Dichte des Dampfes so klein sein, daß der Abstand zwischen den einander zunächst liegenden Mittelpunkten solcher Molekeln groß ist im Vergleich mit dem Durchmesser jeder Molekel; und ferner wollen wir zunächst Licht betrachten, dessen Wellenlänge sehr groß ist im Vergleich mit dem Abstände zwischen den Mittelpunkten der einander nächsten Molekeln. Auf Grund dieser Bedingungen finden wir (Sellmeiersche Formel)

$$\left(\frac{v_e}{v_s}\right)^2 = 1 + \frac{m\tau^2}{\tau^2 - \kappa^2} + \frac{m'\tau^2}{\tau^2 - \kappa'^2}, \quad (1)$$

wo  $m$ ,  $m'$ , die Verhältnisse der Summen der Massen der beiden einzelnen beweglichen Schalen der zweiatomigen Molekeln in einem großen Äthervolumen zu der Masse des denselben Raum füllenden ungestörten Äthers bezeichnen;  $\kappa$ ,  $\kappa'$ , die Schwingungsperioden dieser beiden beweglichen Schalen einer einzelnen Molekel sind unter der Voraussetzung, daß die äußere Schale festgehalten wird;  $v_e$  die Lichtgeschwindigkeit im reinen, ungestörten Äther,  $v_s$  die Geschwindigkeit von Licht mit der Periode  $\tau$  im Natriumdampf.

Für Natriumdampf betragen nach den Messungen von Rowland und Bell<sup>2)</sup>, die in den Jahren 1887 und 1888 veröffentlicht sind (wahrscheinlich die genauesten bisher ausgeführten Bestimmungen), die Perioden des den äußersten feinen dunkeln Linien  $D_1$ ,  $D_2$  des Sonnenspektrums entsprechenden Lichtes 0,589618 und 0,589022 Mikron<sup>3)</sup>. Das Mittel aus diesen beiden Zahlen ist so nahe das Tausendfache ihrer Differenz, daß wir annehmen können

$$\kappa = \frac{1}{2}(\kappa + \kappa')\left(1 - \frac{1}{2000}\right); \quad \kappa' = \frac{1}{2}(\kappa + \kappa')\left(1 + \frac{1}{2000}\right). \quad (2)$$

1) Dies tritt an die Stelle des Schlusses der Vorlesung, wie sie ursprünglich gehalten wurde. Es wurde vor der Royal Society of Edinburgh am 6. Februar 1899 vorgetragen und im Phil. Mag. für März 1899 unter dem Titel „Application of Sellmeier's Dynamical Theorie to the Dark Lines  $D_1$ ,  $D_2$  produced by Sodium-Vapour“ abgedruckt.

2) Rowland, Phil. Mag. 1887, erstes Halbjahr; Bell, Phil. Mag. 1888, erstes Halbjahr.

3) Vgl. Anmerkung S. 119.

Wenn wir also setzen

$$\tau = \frac{1}{2}(\kappa + \kappa') \left(1 + \frac{x}{1000}\right), \quad (3)$$

und wenn  $x$  eine Zahl ist, die 4 oder 5 oder 10 nicht übersteigt, erhalten wir

$$\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 \div 1 - \frac{1}{1000}(2x + 1); \quad \left(\frac{\kappa'}{\tau}\right)^2 \div 1 - \frac{1}{1000}(2x - 1); \quad (4)$$

und hieraus folgt

$$\frac{\tau^2}{\tau^2 - \kappa^2} \div \frac{1000}{2x + 1}; \quad \frac{\tau^2}{\tau^2 - \kappa'^2} \div \frac{1000}{2x - 1}. \quad (5)$$

Benutzt man diese Beziehungen in (1) und bezeichnet mit  $\mu$  den Brechungsindex zwischen Äther und einem gedachten Natriumdampf, der nur die beiden störenden Atome  $m, m'$  enthält, so findet man hiernach

$$\left(\frac{v_e}{v_s}\right)^2 = \mu^2 = 1 + \frac{1000m}{2x + 1} + \frac{1000m'}{2x - 1}. \quad (6)$$

Wenn die Periode  $\tau$  und der ihr entsprechende Wert von  $x$  nach Gleichung (3) Beträge haben, die  $\mu^2$  negativ machen, kann das Licht nicht in den Natriumdampf eindringen. Wenn die Periode eine solche ist, daß  $\mu^2$  positiv wird, ist das Verhältnis, in dem nach Fresnel und nach der wahrscheinlichsten Theorie normal auffallendes Licht in den Dampf eindringt,

$$1 - \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1}\right)^2, \quad (7)$$

falls der Übergang aus dem Raume, in dem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v_e$  ist, in das Medium, in welchem sie  $v_s$  ist, absolut plötzlich erfolgt.

Nach der annähernden Gleichheit in der Intensität der beiden hellen Linien  $D_1$  und  $D_2$  des glühenden Natriumdampfes und nach der annähernden Gleichheit der Stärken der sehr feinen dunkeln Linien  $D_1$  und  $D_2$  des Sonnenspektrums, ferner nach der annähernden Gleichheit der Stärken oder der Breiten der dunkeln Linien  $D_1, D_2$  des Lichtes eines glühenden Metalles (oder eines elektrischen Lichtbogens), das durch Natriumdampf von nur so großer Dichte hindurch angeschaut wird, daß die beiden Linien nicht zu stark verbreitert werden, zu urteilen, können die Massen  $m$  und  $m'$  nicht sehr verschieden voneinander sein, und wir haben bisher keine experimentelle Kenntnis, die uns zeigt, welche etwa größer ist als die andere. Ich habe die beiden Massen demgemäß in den weiter unten beschriebenen Rechnungen und numerischen Erläuterungen als gleich angenommen.

Zu Beginn des laufenden Jahres hatte ich das große Vergnügen, von Professor Henri Becquerel in einem Briefe vom 31. Dez. 1898 zwei Photographie anomaler Dispersion durch Prismen aus Natriumdampf<sup>1)</sup> zu erhalten, in denen ich erstaunt und erfreut war nicht bloß einen schönen und vollkommenen Beweis der „anormalen Dispersion“ nach dem Unendlichen hin auf jeder Seite des Brechungsvermögens Null, sondern auch eine Illustration für das charakteristische Verschwinden der Absorption und die scharf absetzende Breite dunkler Linien zu sehen, wie ursprünglich durch die Formel

1) Eine Beschreibung der Versuche und Resultate Professor Becquerels findet sich in den Comptes Rendus vom 5. Dez. 1898 und 16. Jan. 1899.

Fig. 41.

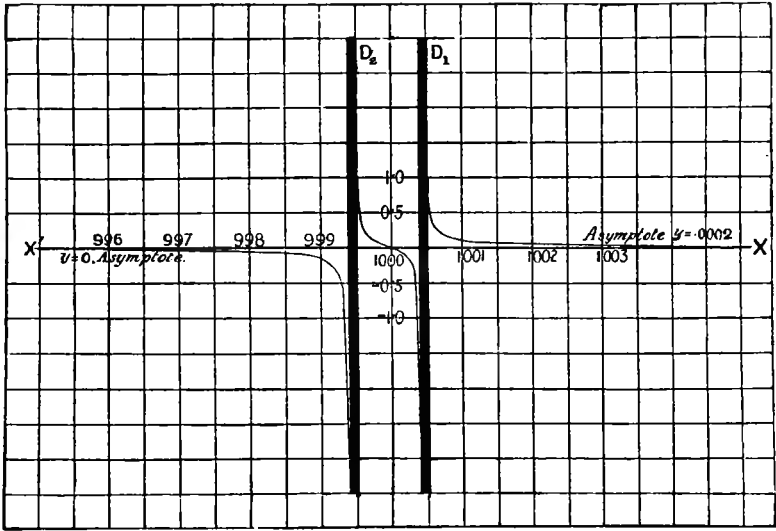


Fig. 42.



Fig. 43.

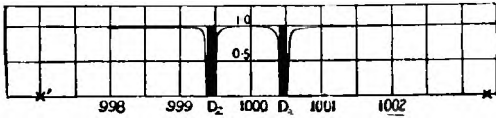
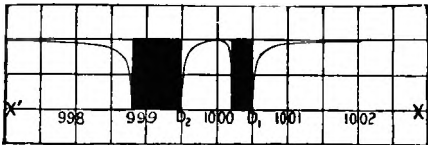


Fig. 44.



von Sellmeier<sup>1)</sup> aus dem Jahre 1872 angedeutet, was also nach 27 Jahren zum ersten Male wirklich vor die Augen gebracht worden ist. Jedes Photogramm zeigte dunkle Räume auf der Seite größerer Wellenlänge der Linien  $D_1$  und  $D_2$ , auf einem der Photogramme sehr schmal, auf dem andern viel breiter und hier die eine, die an der Linie  $D_2$ , entschieden breiter als diejenige an der Linie  $D_1$ ; genau so, wie es nach der Formel von Sellmeier sein muß, nach der die Dichte des Dampfes im Prisma im letzteren Falle größer gewesen sein muß als im ersteren. Aus dem Verhältnis der Breiten der dunkeln Streifen zu dem Raume zwischen den sie begrenzenden Linien  $D_1$  und  $D_2$  und aus der etwas größeren Breite des einen an  $D_2$  befindlichen Streifens schließend komme ich zu dem Urteile, daß in diesem Falle  $m$  nicht sehr von 0,0002 verschieden gewesen sein kann; und ich berechnete demgemäß nach Gleichung (6) die vorstehende graphische Darstellung, die den Wert von  $1 - \frac{1}{\mu}$  zeigt, wie er in Fig. 41 durch  $y$  bezeichnet ist. Fig. 42 stellt in ähnlicher Weise den Wert von  $1 - \frac{1}{\mu}$  für  $m = 0,001$  oder eine fünfmal so große Dichte dar, wie sie in dem in Fig. 41 wiedergegebenen Falle angenommen ist. Die Figuren 43 und 44 stellen das Verhältnis der Intensitäten des durchgelassenen zu dem normal auffallenden Lichte dar für Dichten, die den in den Figuren 41 und 42 zur Darstellung benutzten entsprechen; Fig. 45

gibt dasselbe Verhältnis für die Dichte wieder, die zu dem Werte

$$m = 0,003$$

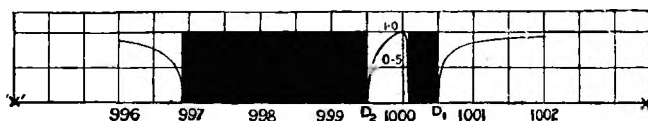


Fig. 45.

gehört.<sup>2)</sup> Die folgende Tabelle enthält die Breiten der dunkeln Streifen für Dampfdichten, die zu Beträgen von 0,0002 bis zum Fünfzehnfachen dieses Wertes gehören, und Fig. 46 stellt graphisch diese Breiten der dunkeln Streifen und ihre Lage gegen die hellen Linien  $D_1$  und  $D_2$  für die ersten 5 Werte von  $m$  der Tabelle dar.

Werte von $m$	Breite der Streifen	
	$D_1$	$D_2$
0,0002	0,09	0,11
0,0006	0,217	0,383
0,0010	0,293	0,707
0,0014	0,340	1,060
0,0018	0,371	1,429
0,0022	0,392	1,808
0,0026	0,408	2,192
0,0030	0,419	2,581

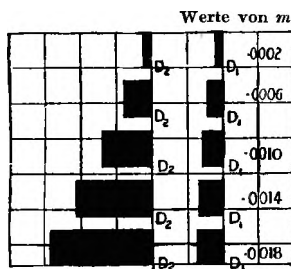


Fig. 46.

1) Sellmeier, Pogg. Ann. Vol. CXLV (1872) S. 399, 520; Vol. CXLVII (1872) S. 387, 525.

2) In den Figuren 41 und 42 werden die Linien  $D_1$  und  $D_2$  von Kurven endlicher Krümmung bei  $y = +1$  berührt und in den Figuren 43, 44 und 45 bei  $y = 0$ . Die linke Seite jedes dunkeln Streifens ist eine Asymptote der Kurven der Figuren 41 und 42 und eine Tangente bei  $y = 0$  der Kurven der Figuren 43, 44 und 45. Die Zeichnungen hätten diese charakteristischen Eigenschaften nur bei einem weit größeren Maßstabe zeigen können.

Nach der Formel von Sellmeier ist das durch eine Schicht Natriumdampf (oder irgendeine durchsichtige Substanz, für welche die Formel gilt) hindurchgelassene Licht dasselbe, welches auch die Schichtdicke sei (allerdings vorausgesetzt, daß die Schichtdicke viele Wellenlängen beträgt). So müssen die Linien  $D_1$  und  $D_2$  des Sonnenspektrums, die von der Quelle aus an die 100 km Natriumdampf in der Sonnenatmosphäre durchsetzt haben, in der Breite identisch sein mit denen, die beim Laboratoriumsversuch im Spektrum von Licht gesehen werden, das durch ein halbes Zentimeter oder durch einige Zentimeter Natriumdampf gegangen ist, der ebenso dicht ist, wie der dichteste Teil des Natriumdampfes in der gerade untersuchten Partie der Sonnenatmosphäre. Die Frage nach der Temperatur kann dabei nur so weit in Betracht kommen, als die Dichte des Dampfes und das Zusammenballen in Gruppen von Atomen oder das Nichtzusammenballen (Nebel oder Dampf von Natrium) durch sie beeinflußt wird.

Ein wichtiger Schluß aus der experimentellen Grundlage der ursprünglichen Idee von Stokes und von Kirchhoff ist der, daß die Perioden molekularer Schwingung bis zu einem äußerst hohen Grade der Genauigkeit die gleichen sind durch die ganze Reihe von Schwingungsweiten, wie sie die strahlenden Molekeln eines elektrischen Funkens, eines elektrischen Lichtbogens, einer Flamme einerseits ausführen, und in den Molekeln eines vergleichsweise kalten Dampfes oder Gases, das dunkle Linien in dem Spektrum des durchsetzenden Lichtes liefert, andererseits.

Es ist sehr zu wünschen, daß ungeachtet der ungeheuren Schwierigkeit Laboratoriumsversuche angestellt werden behufs Ermittlung der Dichte und des Druckes von Natriumdampf in einem großen Temperaturgebiete sowie der Beziehung zwischen Dichte, Druck und Temperatur.

Indem ich den besonderen Fall des Natriums verlasse, will ich eine Anwendung der obigen Formel (1) von Sellmeier auf den Fall eines Gases oder Dampfes hinzufügen, der in seiner Konstitution nur eine einzige molekulare Periode  $\kappa$  besitzt. Nimmt man in (1)  $m = 0$  an, so sieht man, daß das Quadrat des Brechungsindex für Werte von  $\tau$ , die im Vergleich mit  $\kappa$  sehr groß sind,  $1 + m$  ist. Beachtet man, daß die dunkle Linie oder der Streifen sich über das Gebiet von Werten erstreckt, für welche  $(v_e/v_s)^2$  negativ ist, und daß  $(v_e/v_s)^2$  an dem nach den langen Wellen hin gerichteten Rande Null ist, so folgert man aus Gleichung (1), daß der dunkle Streifen sich erstreckt von

$$\tau = \kappa \text{ bis } \tau = \frac{\kappa}{\sqrt{1+m}}. \quad (8)$$

Als passendes Beispiel, die Verbreiterung der dunkeln Linie durch wachsenden Druck zu erläutern, wähle ich  $m = a \times 10^{-4}$  und nehme für  $a$  eine mäßige Zahl, nicht größer als 10 oder 20. Das gibt ein Gebiet des dunkeln Streifens zwischen

$$\tau = \kappa \text{ und } \tau = \kappa \left(1 - \frac{1}{2} a \times 10^{-4}\right) \quad (9)$$

und liefert für große Werte von  $\tau$  den Brechungsindex zu  $1 + \frac{1}{2} a \times 10^{-4}$  und demgemäß das Brechungsvermögen  $\frac{1}{2} a \times 10^{-4}$ . Wenn wir beispielsweise  $a = 6$  annehmen, ist das Brechungsvermögen 0,0003, was nahezu das



nämliche ist wie das Brechungsvermögen der gewöhnlichen Luft bei der gewöhnlichen atmosphärischen Dichte.

Wählt man  $n = 1000$ , so ergibt sich für Werte von  $\tau$ , die von 1000 nicht um mehr als 10 oder 20 abweichen

$$\frac{\tau^2}{\tau^2 - n^2} \approx \frac{1000}{2x}, \text{ wo } x = \tau - 1000.^1) \quad (10)$$

So erhält man

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{a}{20x}}. \quad (11)$$

In der Fig. 47 stellt die mit  $\mu$  bezeichnete Kurve die Werte des Brechungsindex dar, die Beträgen von  $\tau$  in einem kleinen Gebiete oberhalb und

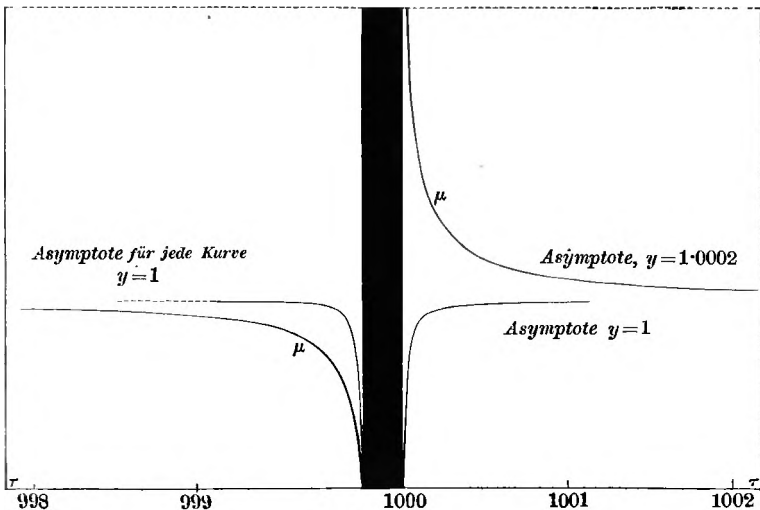


Fig. 47.

unterhalb  $n$  entsprechen, wenn man  $a = 4$  annimmt. Die andere Kurve veranschaulicht den Gang der verhältnismäßigen Intensität, des in den Dampf eindringenden Lichtes, wie er aus den Werten von  $\mu$  nach der obigen Gleichung (7) berechnet ist.

Die umstehende Tabelle enthält die für die Ordinaten der beiden Kurven berechneten Beträge; ebenso die (wesentlich negativen) Werte für die Intensitätsformel, wie sie aus den negativen, nach der Gleichung (11) rechnerisch zulässigen Werten von  $\mu$  berechnet sind.

Die negativen Werte von  $\mu$  haben für beide Kurven keine physikalische Bedeutung; aber die Untersuchung der algebraischen Verlängerungen der Kurven über den Nullpunkt der Ordinaten hinaus nach der linken Seite des dunkeln Streifens beleuchtet den Charakter ihrer Berührungsstellen. Der physikalisch gedeutete Teil jeder Kurve bricht plötzlich an diesem Nullpunkte ab, der für jede Kurve zu dem größten Werte von  $x$  gehört. Die algebraische

1) Nicht zu verwechseln mit der gleichbezeichneten Größe  $x$  S. 141. Übrigens ist die Formel anfechtbar. D. H.

Verlängerung der  $\mu$ -Kurve auf der negativen Kurvenseite ist gleich und ähnlich der auf der positiven Seite dargestellten Kurve. Bei dem Grade der Annäherung, bis zu dem wir gegangen sind, zeigen sich auch die Teile der Intensitätskurve rechts und links von dunkeln Streifen als wesentlich einander gleich und ähnlich. Dies beweist, daß, soweit die Theorie Sellmeiers die Tatsachen wiedergibt, die Halbschatten zu beiden Seiten einer einzelnen dunkeln Linie des nicht durch andere Linien beeinflussten Spektrums einander gleich und ähnlich sind. Ebenso ist es interessant zu bemerken, daß nach Sellmeier, in der hier gegebenen Deutung, die durch wachsende Dichte des Gases oder Dampfes hervorgerufene Verbreiterung einer einzelnen dunkeln Linie ihrem Wesen nach auf der langwelligen Seite der feinsten dunkeln Linie, die bei der geringsten Dichte auftritt, liegt und der Dichte des Gases einfach proportional ist.]

$x$	$\mu$	$1 - \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2$	
		$\mu$ positiv	$\mu$ negativ
— 1,0	0,894		
— 0,9	0,882		
— 0,8	0,866		
— 0,7	0,845	0,993	— 141,9
— 0,6	0,816	0,988	— 82,3
— 0,5	0,774	0,984	— 61,5
— 0,4	0,707	0,971	— 33,5
— 0,3	0,577	0,928	— 12,9
— 0,2	0	0	0
— 0,1	imaginär	imaginär	imaginär
0	$\infty$	0	0
+ 0,1	1,732	0,928	— 12,9
+ 0,2	1,414	0,971	— 33,5
+ 0,3	1,291	0,984	— 61,5
+ 0,4	1,217	0,988	— 82,3
+ 0,5	1,183	0,993	— 141,9
+ 0,6	1,155		
+ 0,7	1,134		
+ 0,8	1,118		
+ 0,9	1,105		
+ 1,0	1,095		

## Vierzehnte Vorlesung.

### Schwingungsmodell. Sphärische Wellen.

#### a) Molekular.

In dieser Vorlesung stellen wir Fig. 48 unmittelbar hinter dem früher vorgeführten Modell zwei an der Decke herabhängende Drähte dar, die einen langen, schweren Stab etwa drei Fuß über dem Boden mittels dicht anliegender Ringe tragen.

Durch Verschieben dieser Ringe den Stab entlang, kann die Schwingungsperiode dieser Bifilaraufhängung nach Belieben geändert werden. Zwei an den Enden angebrachte Holzstücke dienen dazu,

die Azimutalbewegung dieses Vibrators auf den untersten Stab  $P$  unseres Modells zu übertragen. So können wir die Periode variieren; Prof. Rowland

hat freundlicherweise diese Anordnung für uns getroffen, und ich meine, es wird uns alle interessieren, mit ihr Versuche anzustellen. Wir haben diesen Stab  $P$  vor uns, der durch dieses bifilare Pendel  $H$  in Bewegung gesetzt wird; letzteres ist so

schwer, daß seine Periode nur wenig durch die Berührung mit  $P$  beeinflusst wird. Es vergeht einige Zeit, bis die ursprünglich freien Schwingungen im Modell sich ordnen und die Bewegung sich zu einer einfach harmonischen entwickelt, die der Periode des bifilaren Pendels entspricht. Wenn wir dieses Pendel hinreichend lange mit einer nahezu konstanten Schwingungsweite in Gang halten, gelangen die Massen  $P$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  in eine bestimmte einfach harmonische Bewegung trotz des Bestehens irgendwelcher freien Schwingungen zu Anfang. Wir sehen jetzt den ganzen Apparat sehr nahe eine einfache harmonische Bewegung ausführen. Nun wollen wir dieser Bewegung eine andere superponieren, indem wir die Periode des Pendels  $H$  sehr wenig

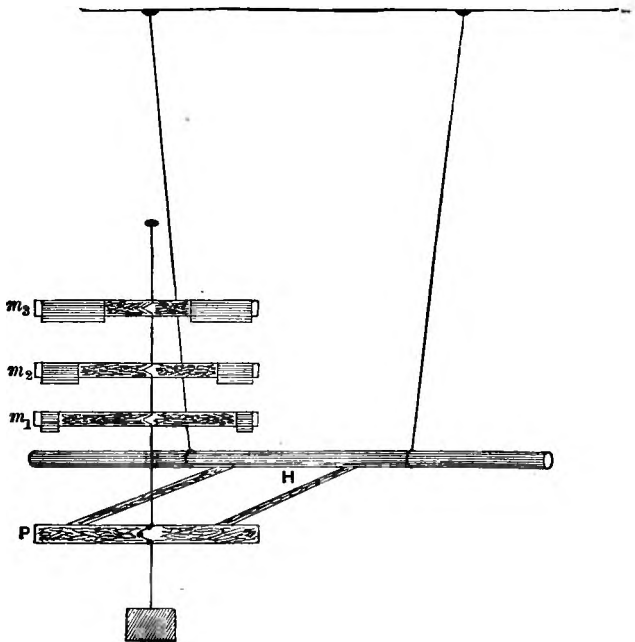


Fig. 48.

ändern. Dies scheint, wie Sie sehen, die Schwingungen des Systems sehr stark herabgesetzt zu haben. Doch jetzt wachsen sie wieder. Das wird so eine lange Zeit weitergehen. Ich werde diesem Pendel, um seine Schwingungsweite konstant zu halten, einen leichten Impuls geben, wenn es in seiner Bewegung nachläßt, indem ich ihm, sobald es in seiner Mittellage ist, ein arbeitendes Kräftepaar aufdrücke.

Unser Apparat ist eine beträchtliche Zeit mit dem mit konstanter Weite schwingend gehaltenen Erreger gegangen, und Sie sehen, daß nur eine kleine Bewegung auf das System übertragen worden ist. Dies ist eine Ausführung der allgemeinsten Lösung unserer alten Aufgabe.<sup>1)</sup> Unser Handgriff  $P$  ist in fester Verbindung mit dem Bifilarpendingel (dem Erreger) und ist gezwungen, sich gleichzeitig mit ihm zu bewegen. Wir versetzen das System in den Ruhezustand. Jetzt lassen wir den Erreger seine Bewegung beginnen und halten ihn darin. Im Laufe der Zeit vernichtet die Viskosität alles, was an Schwingung zwischen Null und dem dauernden Schwingungszustand, den die drei Partikel erreichen würden, vorhanden ist. Fände ein Energieverlust nicht statt, so bliebe dieses anfängliche Gewirr, das Sie jetzt sehen, in alle Ewigkeit; es würde bestehen aus einer einfachen harmonischen Bewegung im Erreger und einer Zusammensetzung aus den drei Grundbewegungsarten dieser drei Partikel, als ein schwingendes System unter Festhaltung des Stabes  $P$  betrachtet. Denkt man sich das System unter Festhaltung von  $P$  in irgendeine schwingende Bewegung gebracht, dann ist seine Bewegung nur eine Zusammensetzung aus diesen drei Grundarten. Bringe ich jetzt aber den Erreger in Gang, so kann der Zustand als in folgender Weise zustande gekommen angesehen werden. — Der Erreger und das ganze System befindet sich in einfacher harmonischer Bewegung mit der nämlichen Periode, und auf diese ist eine Zusammensetzung der drei Arten einfacher harmonischer Schwingung superponiert, die das System ausführen kann, wenn der Erreger festgehalten wird. Wir können unsere mathematische Bearbeitung nicht durch eine derartige Beobachtung verbessern; und in der Tat bildet ein Modell dieser Art mehr eine Stütze oder Nachhilfe für unsere schwer bewegliche Vorstellung als etwa ein Mittel zur Beobachtung oder zu einer Entdeckung. Tatsächlich können wir mit Hilfe der Algebra ein gut Teil besser entdecken. Aber schließlich versagt der Geist, und ein solches Modell bietet dann ein einfaches Mittel, den Sinn der von uns durchgeführten Rechnungen klarzumachen.

Das System scheint wieder einmal in seinen Dauerzustand gelangt zu sein. Wir halten die Bewegung des Erregers auf und sehen zu, wie lange das System seine Schwingung beibehält. Die Wirkung auf den Erreger ist sehr gering, sie ist nahezu dieselbe, wie wenn der massive Stab  $H$  absolut fest wäre. Die ihm dennoch, da er nicht absolut fest ist, wirklich mitgeteilte Bewegung entspricht einem beträchtlichen Energieverluste, denn selbst eine sehr schwache Bewegung des Stabes  $H$  besitzt bei seiner großen Länge und Masse eine Energie, die beträchtlich ist im Vergleich mit der Energie auch des schwersten unserer Partikel; und so wird unser System weit schneller zur Ruhe kommen, als wenn  $H$  absolut festgehalten würde. Augenblicklich illustriert das Modell die Phosphoreszenz. Sie sehen, die Partikel ( $m_1, m_2,$

1) Dritte Vorlesung, Teil II, S. 28 ff.

$m_3$ ) haben eine volle Minute ihre Schwingungen fortgesetzt und  $m_1$  muß wenigstens ein paar Dutzend Schwingungen ausgeführt haben. Eine wahre Phosphoreszenz von etwa 100 Sekunden Dauer ist vollkommen analog den Nachschwingungen, wie Sie sie in unserm Modell sehen, nur daß wir bei der Phosphoreszenz nicht unsere zwei oder drei Dutzend Schwingungen vor uns haben, sondern 40000 Billionen in 100 Sekunden. Nun können wir hier keine 1000 Nachschwingungen in der Sekunde erhalten wegen der Zerstreuung von Energie, die von der unvollkommenen Elastizität des Fadens, der Reibung zwischen den Teilen des Modells und dem Widerstande der Luft herrührt. Diese Energiezerstreuung ist einfach eine Umwandlung von Energie aus einem Bewegungszustande (den sichtbaren Bewegungen, die wir beobachten haben) in einen andern (Wärme im Draht, Reibungswärme und Wärme in der Luft). In der Molekularmechanik haben wir keinen solchen, ich möchte sagen, unterirdischen Kanal Energie los zu werden oder abzuführen. Wir müssen genau wissen, was aus ihr geworden ist, wenn die Schwingung einer eingesenkten Molekel aufhört, auch dann, wenn dies nicht geschieht, bevor 1000 Billionen Perioden verklungen sind.

[6. März 1899. Stellen wir uns eine homogene Masse aus Granitfels oder Basalt vor, z. B. so groß wie die Erde oder, wenn Sie wollen, viele Male größer, aber ohne gegenseitige Gravitation zwischen ihren Teilen, die sie stören könnte. In ihr befinde sich, irgendwo weit von der Grenzfläche entfernt, ein sphärischer Hohlraum von 5 cm Radius und eine Violine saite sei zwischen zwei an den Enden eines Durchmessers befestigten Haken ausgespannt und in Schwingungen im Verhältnis von 1000 in der Sekunde versetzt. Diese Saite sei (wie, ist für den Augenblick gleichgültig) in Schwingung versetzt entsprechend ihrer tiefsten Eigenschwingung mit einer Weite von einem Millimeter. Die Elastizität der Saite und des Granits sei absolut vollkommen, und es befinde sich im Hohlraum keine Luft, die einen Widerstand gegen die Schwingungen leistet. Sie werden trotzdem nicht in alle Ewigkeit bestehen bleiben. Warum nicht? Weil zwei Wellenzüge, nämlich ein verdichtend-verdünnender und ein rein drillender hervorgerufen sind, die sich nach außen ausbreiten und die der schwingenden Saite anfänglich mitgeteilte Energie mit sich fortführen (vgl. unten § 28 des Zusatzes zur vierzehnten Vorlesung).]

Wir müssen die Elastizität unserer Materie und Molekeln als eine vollkommen voraussetzen und dürfen in keinem Teile unserer Molekularmechanik einen Energieverlust unerklärt lassen; das heißt, wir dürfen keine die Viskosität darstellenden Glieder anders zulassen, denn als ein Gesamtergebnis von Schwingungen, die mit einem Teile des Systems verbunden sind, das für unsere Untersuchung nicht geeignet ist.

In drei Minuten ist unser System fast vollständig zur Ruhe gekommen. Wir schließen hieraus, daß wir in drei Minuten vom Anfang der Schwingung des Erregers an gerechnet den Dauerzustand nahezu erreicht haben.

Jetzt ändern wir die Periode des Erregers dahin, daß wir sie, so gut wir können, auf den Mittelwert zwischen zwei Fundamentalperioden unseres Systems bringen. Wir wollen diese mit einer annähernd konstanten Schwingungsweite eine Zeitlang aufrechterhalten und auf die Schwingungen achten, die sie in dem System hervorruft.

Sie sehen jetzt sehr deutlich den Unterschied in den Schwingungen unseres Systems, nachdem es einige Minuten sich mit dem Erreger in Schwingungen bewegt hat, deren Periode etwas kürzer war als die, mit der wir angefangen haben. Hier ist eine noch kürzere Periode. Im Verlaufe von zwei oder drei Minuten werden die superponierten Schwingungen aufhören. Welch eine ungeheure Differenz besteht in diesem Falle, in dem die Periode des Erregers nahezu gleich einer der Eigenperioden des Systems ist und dem Falle, daß der unterste Stab absolut festgehalten wird.

Ich hatte stark gehofft, ich würde einen Weg finden, die Doppelbrechung durch dieses Molekelsystem zu erklären; es erscheint mir aber immer schwieriger. Ich will Sie morgen, wenn es Ihnen recht ist, ins Vertrauen ziehen und Ihnen die Schwierigkeiten aufdecken, die hier so sehr lasten. Ich bin jedoch keineswegs entmutigt, da so wichtige, komplizierte und hochinteressante Gebiete, wie ich sie so oft genannt habe, nämlich Absorption, Dispersion und anomale Brechung sämtlich durch unsere Annahme nicht nur erklärt sind, sondern sich geradezu als unausweichliche Folgerungen aus dieser Vorstellung miteinander verknüpfter Molekeln ergeben.

Noch über einen Punkt möchte ich etwas sagen, ehe wir auseinandergehen: Als ich nämlich zuletzt über den Gegenstand sprach, schien mir eine Schwierigkeit vorhanden zu sein, die, wie ich mittlerweile erkennen mußte, nicht besteht. Es handelte sich um die Verbindung zwischen Äther und den Molekeln. Unsere Annahme bestand in einer großen Anzahl sphärischer Hohlräume, die von starren sphärischen Schalen begrenzt sind und innen Massen enthalten, die mit den Schalen durch Federn verbunden sind oder auch nicht; und darin, daß der Abstand zwischen den Höhlungen klein sei im Vergleich mit der Wellenlänge. Dann aber ist die Bewegung des Mittels relativ gegen die starren Schalen äußerst klein, und ein Teil des Mittels, der eine große Anzahl solcher Schalen enthält, bewegt diese sämtlich zusammen (vgl. weiter unten, vierzehnte Vorlesung). Wenn der Abstand zwischen den Molekeln in der Tat sehr klein im Vergleich mit der Wellenlänge sein sollte, kann man die Sache so auffassen, als ob die Struktur sogar unendlich fein wäre, und annehmen, daß der Äther sich genau mit allen Molekeln bewegt, und nicht, wie ich gesagt habe, zwischen ihnen herein und hinaus. Andererseits ist klar, daß wenn die Wellenlänge des das Mittel durchsetzenden Lichtes im Vergleich mit den Abständen zwischen den Molekeln mäßig ist, das Medium sich zwischen ihnen herein- und hinausbewegen muß. Hier aber kommt noch die Steifheit des Mediums in Mitwirkung. Ist diese Steifheit von solchem Betrage, daß die Wellenlänge im Vergleich mit dem Abstände zwischen den Molekeln erheblich wird, so reicht sie aus, die sämtlichen Molekeln mit dem Medium zusammenzuhalten, so daß durch die starren Schalen wie durch Verbindungsseile die Molekeln diesen und jenen Weg getrieben werden, und wir annehmen können, daß unsere Reaktionskräfte, von denen  $c_1$  ( $\xi - x_1$ ) ein Muster ist, in ihrer Wirkung auf das Medium sich so verhalten, wie wenn die Molekeln in ihm gleichmäßig verteilt wären.

So also löst sich die Schwierigkeit teilweise, und wir hätten nur noch die Doppelbrechung zu erklären. Davon später.

## b) Molar.

Da wir zweimal<sup>1)</sup> in dieser Vorlesung und vielfach auch in früheren Vorlesungen den Mangel einer vollständigen mathematischen Untersuchung sphärischer Wellen, die durch die Einwirkung einer Kraft auf einen in einem begrenzten Raume befindlichen Festkörper hervorgerufen werden, schwer empfunden haben, gebe ich nachfolgend das Resultat einer von mir unternommenen<sup>2)</sup> Entwicklung als Ergänzung zu dieser Vorlesung.

§ 1. Die vollständige mathematische Theorie der Fortpflanzung einer Bewegung in einem unbegrenzten elastischen Festkörper einschließlich der Zerlegung der Bewegung in zwei Arten, eine solche, bei der das Volumen sich gleich bleibt, und eine nicht rotierende, ist zuerst von Stokes in seiner glänzenden Abhandlung „On the Dynamical Theory of Diffraction“<sup>3)</sup> veröffentlicht worden. Gegenstand dieser Mitteilung ist es, die Kraft genau zu untersuchen, die auf die Grenzfläche  $S$  eines in einem Festkörper befindlichen Hohlraumes beliebiger Form wirken muß, um irgendeine bekannte Bewegung des umgebenden Festkörpers hervorzurufen und aufrechtzuerhalten, und ebenso die umgekehrte Aufgabe zu lösen: die Bewegung zu finden, wenn die auf  $S$  wirkende Kraft oder die Bewegung von  $S$  gegeben ist, und zwar für den besonderen Fall, daß  $S$  eine starr gehaltene sphärische Fläche ist.

§ 2. Es bezeichnen wieder  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  die unendlich kleine Verschiebung in irgendeinem Punkte des Festkörpers, dessen Gleichgewichtslage  $(x, y, z)$  ist. Die allgemein bekannten Bewegungsgleichungen<sup>4)</sup> sind dann:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= (k + \frac{1}{3}n) \frac{\partial \delta}{\partial x} + n \nabla^2 \xi \\ \rho \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= (k + \frac{1}{3}n) \frac{\partial \delta}{\partial y} + n \nabla^2 \eta \\ \rho \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= (k + \frac{1}{3}n) \frac{\partial \delta}{\partial z} + n \nabla^2 \zeta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wo  $\delta$  für  $\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$  gesetzt ist. Benutzt man die Bezeichnung von Thomson und Tait<sup>5)</sup> für die Deformationskomponenten (Verlängerungen und Drillungen)  $e, f, g; a, b, c$ , so ist:

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{\partial \xi}{\partial x}; & f &= \frac{\partial \eta}{\partial y}; & g &= \frac{\partial \zeta}{\partial z}; \\ a &= \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}; & b &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}; & c &= \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

1) S. 25 und 132.

2) Mitgeteilt der R. S. E. am 1. Mai 1899 und in Phil. Mag. Mai, August und Oktober 1899 veröffentlicht unter dem Titel „On the Application of Force within a Limited Space, required to produce Spherical Solitary Waves or Trains of Periodic Waves, of both species, Equivoluminal and Irrotational, in an Elastic Solid.“

3) Stokes, Mathematical Papers, Vol. II, p. 243.

4) Vgl. meine Abhandlung „On the Reflexion and Refraction of Solitary Plane Waves etc.“ Proc. R. S. E. Dezember 1898, und Phil. Mag. Februar 1899, weiter unten im vorliegenden Bande wieder abgedruckt.

5) Thomson und Tait, Theoretische Physik § 669 oder Elements § 640.

und wenn man weiter die Zugkomponenten (normal und tangential zu den sechs Seitenflächen eines rechtwinkligen Parallelepipeds) mit  $P, Q, R; S, T, U^1$ ) bezeichnet, wird:

$$\left. \begin{aligned} P &= (k + \frac{4}{3}n)c + (k - \frac{2}{3}n)(f + g); \\ Q &= (k + \frac{4}{3}n)f + (k - \frac{2}{3}n)(g + e); \\ R &= (k + \frac{4}{3}n)g + (k - \frac{2}{3}n)(e + f); \\ S &= na; \quad T = nb; \quad U = nc. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Jetzt sei  $\sigma$  eine unendlich kleine Fläche an irgendeinem Punkte der Oberfläche  $S$ ; es seien  $\lambda, \mu, \nu$  die Richtungskosinus der Normale und  $X\sigma, Y\sigma, Z\sigma$  die Komponenten der Kraft, die von innen wirken muß, um die besondere Bewegung der äußeren Materie zu unterhalten. Dann haben wir:

$$\left. \begin{aligned} -X &= P\lambda + U\mu + T\nu \\ -Y &= Q\mu + S\nu + U\lambda \\ -Z &= R\nu + T\lambda + S\mu; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

hieraus folgt vermöge der Gleichungen (3):

$$\left. \begin{aligned} -X &= (k - \frac{2}{3}n)\lambda\delta + n(2\lambda e + \mu c + \nu b) \\ -Y &= (k - \frac{2}{3}n)\mu\delta + n(2\mu f + \nu a + \lambda c) \\ -Z &= (k - \frac{2}{3}n)\nu\delta + n(2\nu g + \lambda b + \mu a). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Diese Gleichungen geben eine deutliche Antwort auf die Frage: Welches ist die Kraft, wenn die Deformation auf die  $S$  berührende Materie gegeben ist? Wir wollen ihre Anwendung auf den Fall, daß  $S$  kugelförmig ist und die Bewegungen und Kräfte in Meridianebenen durch die Achse  $OX$  und symmetrisch um diese Gerade liegen, im einzelnen betrachten. Ohne der Allgemeinheit Eintrag zu tun, dürfen wir setzen:

$$Z = 0; \text{ woraus sich ergibt } \nu = 0, a = 0; b = 0. \quad (6)$$

Dann gehen die obigen Gleichungen (5) über in:

$$\left. \begin{aligned} -X &= (k - \frac{2}{3}n)\lambda\delta + n(2\lambda e + \mu c) \\ -Y &= (k - \frac{2}{3}n)\mu\delta + n(2\mu f + \lambda c). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

§ 3. In den §§ 5—26 der bereits zitierten Abhandlung teilt Stokes eine vollständige Lösung der Aufgabe mit, die Verschiebung und Geschwindigkeit in irgendeinem Punkte eines unbegrenzten Festkörpers zu finden, die aus irgendeiner Verschiebung und Geschwindigkeit in einer vergangenen Zeit sich ergeben müssen, wenn nachher der Festkörper sich selbst überlassen ist, ohne daß auf irgendeinen Teil desselben eine Kraft wirkt. In einer späteren Mitteilung hoffe ich diese Lösung auf die Berechnung einzelner, ebener oder sphärischer Wellen anzuwenden. Für jetzt beschränke ich mich auf den in der Überschrift der vorliegenden Mitteilung angegebenen Gegen-

1) In G. Kirchhoffs Bezeichnung ist:  $P = -X_x, Q = -Y_y, R = -Z_z;$   
 $S = -X_y = -Y_x, T = -Y_z = -Z_y, U = -Z_x = -X_z,$  ferner  $n = K,$   
 $k = 2K(\theta + \frac{1}{3}).$  Anm. zu S. 17. D. H.



stand unter Berücksichtigung der wichtigen Hinweise, die Stokes in den §§ 27—29 seiner Abhandlung gibt.

§ 4. Poisson veröffentlichte im Jahre 1810 eine Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2 W}{dt^2} = v^2 \nabla^2 W \quad (8)$$

in Termen willkürlicher Funktionen von  $x, y, z$ , die die ursprünglichen Werte von  $W$  und  $\frac{dW}{dt}$  darstellen, und hat gezeigt, daß sie, immer wenn  $W$  allein von dem Abstände ( $r$ ) von einem festen Punkte abhängt, die Form:

$$W = \frac{1}{r} \left\{ F\left(t - \frac{r}{v}\right) + f\left(t + \frac{r}{v}\right) \right\} \quad (9)$$

annimmt, wo  $F$  und  $f$  willkürliche Funktionen bezeichnen. Früher (S. 26, 38 u. a.) habe ich darauf hingewiesen, daß die sphärische Wellen darstellenden Lösungen, sowohl solche, bei denen das Volumen unverändert bleibt (bei denen wesentlich in verschiedenen Teilen der sphärischen Fläche verschiedene Verschiebungsweiten vorhanden sind), als auch nicht rotierende (für welche in verschiedenen Teilen der sphärischen Fläche die Verschiebungen verschieden sein mögen oder nicht) in passender Weise aus (9) durch Differentiation nach  $x, y, z$  abgeleitet werden können. In der Tat kann bewiesen werden — ich weiß nicht, ob irgendwo ein formaler Beweis veröffentlicht ist —, daß eine absolut allgemeine Lösung der Gleichung (8) dargestellt ist durch die Formel:

$$\Sigma \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^h \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^i \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^j \left\{ \frac{1}{r} \left[ F\left(t - \frac{r}{v}\right) + f\left(t + \frac{r}{v}\right) \right] \right\};$$

$$r = \sqrt{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]}, \quad (10)$$

wo mit  $\Sigma$  die Summen für alle ganzzahligen  $h, i, j$  und für beliebige verschiedene Werte von  $x', y', z'$  bezeichnet sind.

§ 5. Ich will jetzt nur den einfachsten aller Fälle betrachten, den nämlich, in dem die Bewegung in jedem Punkte  $(x, 0, 0)$  und  $(0, y, z)$  parallel zu  $XX'$  und wo für alle Werte von  $y$  und  $z$  die Verschiebung  $\xi$  für positive und negative Werte von  $x$  die nämliche ist. Zu diesem Zwecke brauchen wir nur zu setzen  $x' = y' = z' = 0$ ; wir finden dann, daß in unseren Ausdrücken für  $\xi, \eta, \zeta$  keine Beträge von  $h, i, j$  vorkommen können, die größer als 2 sind. Unser besonderer in der Überschrift dieser Abhandlung gekennzeichneten Gegenstand schließt nach innen verlaufende, von fernen Quellen herkommende Wellen aus, und demnach verschwindet  $f\left(t + \frac{r}{v}\right)$ .

§ 6. In den §§ 5—8 seiner Abhandlung zeigt Stokes, daß jede beliebige Bewegung eines elastischen Festkörpers, in dessen ganzer Ausdehnung kein Teil desselben eine äußere Kraftwirkung erfährt, in zwei Teile zerlegt werden kann, von denen jeder ohne den anderen zu bestehen vermag, in deren einem die Verschiebung ohne Änderung des Volumens vor sich geht, und in deren anderem sie ohne Drehung ist. Wenn wir mit  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  die äquivoluminalen und mit  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  die irrotationalen Komponenten bezeichnen, kann folglich die vollständige Lösung der Gleichungen (1) dargestellt werden durch:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2; \eta = \eta_1 + \eta_2; \zeta = \xi_1 + \xi_2, \quad (11)$$

wobei die Größen  $\xi_1, \eta_1, \xi_1$  und  $\xi_2, \eta_2, \xi_2$  die folgenden Bedingungen (12) und (13) erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \xi_1}{\partial z} &= 0; \\ u^2 \nabla^2 \xi_1 &= \frac{d^2 \xi_1}{dt^2}; u^2 \nabla^2 \eta_1 = \frac{d^2 \eta_1}{dt^2}; u^2 \nabla^2 \xi_1 = \frac{d^2 \xi_1}{dt^2}; u^2 = \frac{n}{\varrho}; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{\partial W}{\partial x}; \eta_2 = \frac{\partial W}{\partial y}; \xi_2 = \frac{\partial W}{\partial z}; \\ \text{hier ist } W &\text{ eine Lösung der Gleichung:} \\ v^2 \nabla^2 W &= \frac{d^2 W}{dt^2}; v^2 = \frac{k + \frac{4}{3}n}{\varrho}; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Die erste der Gleichungen (12) zeigt, daß in der Komponente ( $\xi_1, \eta_1, \xi_1$ ) der Lösung dem Wesen nach in keinem Teile des Festkörpers eine Ausdehnung oder Zusammendrückung vorkommt, das heißt, daß die Verschiebung ohne Raumänderung erfolgt. Aus den ersten drei Gleichungen in (13) erhellt, daß die Komponente ( $\xi_2, \eta_2, \xi_2$ ) der Verschiebung ihrem Wesen nach ohne Rotation geschieht.

§ 7. Wir können nun sehen, daß die allgemeinste, die Bedingungen des § 5 erfüllende, rotationslose Lösung ist:

$$\xi_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{F_2}{r}; \eta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{F_2}{r}; \xi_2 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{F_2}{r}, \quad (14)$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + \frac{\partial \xi_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \frac{d^2 F_2}{dt^2} \right); \quad (14')$$

und die allgemeinste Lösung ohne Volumänderung, die dieselben Bedingungen erfüllt, ist:

$$\xi_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{F_1}{r} - \frac{d^2 F_1}{dt^2} \frac{1}{u^2 r}; \eta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{F_1}{r}; \xi_1 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{F_1}{r}, \quad (15)$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \xi_1}{\partial z} = 0. \quad (15')$$

Die Symbole  $F_1$  und  $F_2$  sind der Kürze wegen zur Bezeichnung willkürlicher Funktionen von bzw.  $\left(t - \frac{r}{u}\right)$  und  $\left(t - \frac{r}{v}\right)$  eingeführt. Hieraus folgt als allgemeinste, die Bedingungen des § 5 erfüllende Lösung:

$$\xi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\Phi}{r} - \frac{d^2 F_1}{dt^2} \frac{1}{u^2 r}; \eta = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\Phi}{r}; \xi = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{\Phi}{r}, \quad (16)$$

wo  $\Phi$  eine Funktion von  $r$  und  $t$  bedeutet, die folgendermaßen näher bestimmt ist:

$$\Phi(r, t) = F_1\left(t - \frac{r}{u}\right) + F_2\left(t - \frac{r}{v}\right). \quad (17)$$

Bezeichnet man die Differentialquotienten nach  $r$  mit Akzenten und, nach Newton, diejenigen nach  $t$  durch Punkte, so ergibt sich:

$$\Phi' = -\left(\frac{\dot{F}_1}{u} + \frac{\dot{F}_2}{v}\right); \Phi'' = \frac{\ddot{F}_1}{u^2} + \frac{\ddot{F}_2}{v^2}; \Phi''' = -\left(\frac{\ddot{\dot{F}}_1}{u^3} + \frac{\ddot{\dot{F}}_2}{v^3}\right). \quad (18)$$

Indem wir jetzt die Differentiationen in (16) ausführen, finden wir:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x^2 \left( \frac{\Phi''}{r^3} - \frac{3\Phi'}{r^4} + \frac{3\Phi}{r^5} \right) + \frac{\Phi'}{r^2} - \frac{\Phi}{r^3} - \frac{\ddot{F}_1}{u^2 r} \\ \eta &= xy \left( \frac{\Phi''}{r^3} - \frac{3\Phi'}{r^4} + \frac{3\Phi}{r^5} \right) \\ \zeta &= xz \left( \frac{\Phi''}{r^3} - \frac{3\Phi'}{r^4} + \frac{3\Phi}{r^5} \right). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

§ 8. Zur Bestimmung der Kraftkomponenten durch die Gleichungen (7) brauchen wir Werte von  $\delta$ ,  $e$ ,  $f$  und  $c$ . Benutzt man (2) und geht auf (16) zurück, so sieht man, daß ist:

$$c = 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\ddot{F}_1}{r}. \quad (20)$$

Hieraus und nach (19) finden wir:

$$c = y \left\{ 2 \left[ x^2 \left( \frac{\Phi'''}{r^4} - \frac{6\Phi''}{r^5} + \frac{15\Phi'}{r^6} - \frac{15\Phi}{r^7} \right) + \frac{\Phi''}{r^3} - \frac{3\Phi'}{r^4} + \frac{3\Phi}{r^5} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\ddot{\dot{F}}_1}{u^3} + \frac{1}{r^5} \frac{\ddot{\dot{F}}_1}{u^2} \right\}. \quad (21)$$

Aus (16), (14') und (15') ergibt sich:

$$\delta = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\ddot{F}_2}{r} = -x \left( \frac{1}{r^2} \frac{\ddot{\dot{F}}_2}{v^3} + \frac{1}{r^3} \frac{\ddot{\dot{F}}_2}{v^2} \right); \quad (22)$$

und aus Gleichung (19) finden wir durch direkte Anwendung auf die ersten drei Beziehungen in (2)

$$\left. \begin{aligned} e &= x \left\{ x^2 \left( \frac{\Phi'''}{r^4} - \frac{6\Phi''}{r^5} + \frac{15\Phi'}{r^6} - \frac{15\Phi}{r^7} \right) + 3 \left( \frac{\Phi''}{r^3} - \frac{3\Phi'}{r^4} + \frac{3\Phi}{r^5} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\ddot{\dot{F}}_1}{u^3} + \frac{1}{r^5} \frac{\ddot{\dot{F}}_1}{u^2} \right\} \\ f &= x \left\{ y^2 \left( \frac{\Phi'''}{r^4} - \frac{6\Phi''}{r^5} + \frac{15\Phi'}{r^6} - \frac{15\Phi}{r^7} \right) + \frac{\Phi''}{r^3} - \frac{3\Phi'}{r^4} + \frac{3\Phi}{r^5} \right\} \\ g &= x \left\{ z^2 \left( \frac{\Phi'''}{r^4} - \frac{6\Phi''}{r^5} + \frac{15\Phi'}{r^6} - \frac{15\Phi}{r^7} \right) + \frac{\Phi''}{r^3} - \frac{3\Phi'}{r^4} + \frac{3\Phi}{r^5} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Die Addition dieser drei Formeln zu  $e + f + g$  gibt wegen (18) den für  $\delta$  in Gleichung (22) angegebenen Wert, wodurch die Beziehungen kontrolliert sind.

§ 9. Diese Formeln (22) und (23) ergeben, in Gleichung (5) verwendet, die Kraftkomponenten für die Flächeneinheit an einem beliebigen Punkte der Grenzfläche ( $S$  in § 1) eines im Festkörper befindlichen Hohlraumes beliebiger Form unter der Bedingung, daß die Bewegung im Festkörper durch die Gleichungen (19) dargestellt werden kann. Nimmt man den Hohlraum kugelförmig an, wie in § 2, und ist sein Radius  $q$ , so hat man in (23) und (5) zu setzen

$$x = q\lambda; \quad y = q\mu; \quad z = q\nu; \quad (24)$$

und wenn man dann  $\nu = 0$  feststellt, erhält man, wie in (7), für jeden Punkt der Oberfläche im Meridian  $z = 0$  zwei Kraftkomponenten, die sich folgendermaßen darstellen lassen:

$$\left. \begin{aligned} X &= (k - \frac{2}{3}n)C_2\lambda^2 - n\{2\lambda^2 A + 2(2\lambda^2 + 1)B + (\lambda^2 + 1)C_1\} \\ Y &= (k - \frac{2}{3}n)C_2\lambda\mu - n\lambda\mu(2A + 4B + C_2), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

wo gesetzt ist

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\Phi'''}{q} - \frac{6\Phi''}{q^2} + \frac{15\Phi'}{q^3} - \frac{15\Phi}{q^4} \\ B &= \frac{\Phi''}{q^2} - \frac{3\Phi'}{q^3} + \frac{3\Phi}{q^4} \\ C_1 &= \frac{\ddot{\mathfrak{F}}_1}{qu^3} + \frac{\ddot{\mathfrak{F}}_2}{q^2u^2} \\ C_2 &= \frac{\ddot{\mathfrak{F}}_2}{qv^3} + \frac{\ddot{\mathfrak{F}}_3}{q^2v^2}; \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$\Phi$  und  $\mathfrak{F}$  bedeuten hier  $\Phi$  und  $F$ , mit  $q$  an Stelle von  $r$ .

§ 10. Wir gehen auf Gleichungen (19) zurück und untersuchen den Charakter der durch die Formeln dargestellten Bewegungen. Der Kürze wegen wollen wir  $XX'$  einfach die Achse und die durch  $YY'$ ,  $ZZ'$  bestimmte Ebene die Äquatorialebene nennen. Zunächst nehmen wir  $y = 0$ ,  $z = 0$  an und demgemäß  $x = r$ . Wir finden dann mittels (18)

$$(\text{axial}) \quad \xi = \frac{1}{r} \frac{\ddot{F}_2}{v^2} + \frac{2}{r^2} \left( \frac{\dot{F}_1}{u} + \frac{\dot{F}_2}{v} \right) + \frac{2}{r^3} (F_1 + F_2); \quad \eta = 0; \quad \xi = 0. \quad (27)$$

Setzen wir sodann  $x = 0$ , so ergibt sich

$$(\text{äquatorial}) \quad \xi = -\frac{1}{r} \frac{\ddot{F}_1}{u^2} - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\dot{F}_1}{u} + \frac{\dot{F}_2}{v} \right) - \frac{1}{r^3} (F_1 + F_2); \quad \eta = 0; \quad \xi = 0. \quad (28)$$

Demgemäß erhalten wir für sehr kleine Werte von  $r$

$$\left. \begin{aligned} (\text{axial}) \quad \xi &\doteq + \frac{2}{r^3} (F_1 + F_2) \\ (\text{äquatorial}) \quad \xi &\doteq - \frac{1}{r^3} (F_1 + F_2); \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

und für sehr große Werte von  $r$

$$\left. \begin{aligned} (\text{axial}) \quad \xi &\doteq + \frac{1}{r} \frac{\ddot{F}_2}{v^2} \\ (\text{äquatorial}) \quad \xi &\doteq - \frac{1}{r} \frac{\ddot{F}_1}{u^2}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

So sehen wir, daß für sehr weit entfernte Stellen die Bewegung in der Achse annähernd die allein von der rotationslosen Welle und die Bewegung in der Äquatorialebene allein die von der ohne Volumänderung verlaufenden Welle herrührende ist; daß ferner bei gleichen Werten von  $F_1$  und  $F_2$  die

rotationslosen und die bei unverändertem Volumen verlaufenden Komponenten zu diesen Verschiebungen Beiträge liefern, die den Quadraten der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten umgekehrt proportional sind. Andererseits zeigen die Gleichungen (29) für dem Mittelpunkte sehr nahe gelegene Orte, daß sowohl in der Achse als auch in der Äquatorialebene der rotationslose und der ohne Volumänderung verlaufende Teil gleichmäßig sich in den Verschiebungen geltend machen.

§ 11. Die Gleichungen (25) und (26) geben uns vollen Aufschluß über die Kraft, die auf die Grenzfläche unseres sphärischen Hohlraumes wirken muß, um zu bewirken, daß die Bewegung in der ganzen Zeit genau die durch die Gleichungen (19) beschriebene ist, wo  $F_1$  und  $F_2$  beliebige willkürliche Funktionen sind. So dürfen wir voraussetzen, daß beide Funktionen,  $F_1(t - q/u)$  und  $F_2(t - q/v)$  für alle negativen Werte von  $t$  Null sind, und daß sie andererseits wieder Null sind für alle Werte von  $t$ , die eine gewisse Grenze  $\tau$  übersteigen. In einem beliebigen Abstände vom Mittelpunkte  $r$  dauert die Störung während der Zeit

$$\begin{aligned} \text{von} \quad & t = \frac{r-q}{v} \quad \text{bis} \quad t = \frac{r-q}{v} + \tau \\ \text{und von} \quad & t = \frac{r-q}{u} \quad \text{bis} \quad t = \frac{r-q}{u} + \tau. \end{aligned} \quad (31)$$

Nehmen wir  $v > u$  an, so erkennen wir, daß diese beiden Zeiträume übereinandergreifen um die Zeit

$$\begin{aligned} & \frac{r-q}{v} + \tau - \frac{r-q}{u}, \\ \text{falls ist} \quad & r - q < \tau \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Andererseits eilt in jedem Punkte des Raumes jenseits des Radius  $q + \tau/(1/u - 1/v)$ , die Welle größerer Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach außen weiter, ehe die Welle kleinerer Geschwindigkeit sie erreicht, und die Durchgangszeit jeder Welle durch diesen Punkt ist  $\tau$ . Der Festkörper ist durchaus ungestört und in Ruhe an allen Stellen, die jenseits der schnelleren Welle, zwischen den beiden Wellen und diesseits der weniger schnellen von den beiden Wellen liegen.

§ 12. Die Ausdrücke (25) und (26) für die Komponenten der Oberflächenkraft an der Grenzfläche des Hohlraumes, die erforderlich ist, die vorausgesetzte Bewegung hervorzurufen, enthalten  $\ddot{\mathfrak{F}}_1$  und  $\ddot{\mathfrak{F}}_2$ . Demgemäß würden wir, wenn  $r = q$  ist, für  $t = 0$  oder  $t = \tau$  unendliche Beträge finden, wenn nicht  $\ddot{F}_1$  und  $\ddot{F}_2$  für  $\tau = 0$  und  $t = \tau$  verschwinden. Auf Grund dieser Bedingung ist der einfachste mögliche Ausdruck für jede willkürliche Funktion, die die beiden einzelnen Wellen des § 7 darstellen soll, von der Form

$$\mathfrak{F} = (1 - \chi^2)^3, \quad \text{wo} \quad \chi = \frac{2t}{\tau} - 1 \quad \text{ist.} \quad (33)$$

Hieraus folgt durch mehrfaches Differenzieren nach  $t$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathfrak{F}} &= -\frac{12}{\tau} \chi (1 - \chi^2)^2 \\ \ddot{\mathfrak{F}} &= \frac{24}{\tau^2} (-1 + 6\chi^2 - 5\chi^4) \\ \ddot{\mathfrak{F}} &= \frac{48}{\tau^3} (12\chi - 20\chi^3). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Die folgenden vier Kurven (Fig. 49) stellen diese vier Funktionen (33) und (34) dar.

§ 13. Nehmen wir jetzt endgültig an

$$\left. \begin{aligned} F_1\left(t - \frac{r}{u}\right) &= c_1 q^3 (1 - \chi_1^2)^3 \\ F_2\left(t - \frac{r}{v}\right) &= c_2 q^3 (1 - \chi_2^2)^3, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

wo gesetzt ist

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= \left(t - \frac{r-q}{u} - \frac{1}{2}\tau\right) / \frac{1}{2}\tau \\ \chi_2 &= \left(t - \frac{r-q}{v} - \frac{1}{2}\tau\right) / \frac{1}{2}\tau \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

und fassen die Bewegungen ohne Volumänderung und diejenigen ohne Rotation gesondert, so erhalten wir, unter Benutzung der Gleichungen (19), (18), (35), (34), für die Komponenten ohne Volumänderung folgende Ergebnisse:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Äquatorial} \quad x = 0; \quad \eta_1 = 0, \\ \xi_1 = -c_1 \left( \frac{q^3}{r^3} \mathfrak{X}_1 + \frac{12q^3}{r^2 u \tau} \mathfrak{X}_1' + \frac{24q^3}{r u^2 \tau^2} \mathfrak{X}_1'' \right). \end{array} \right\} \quad (37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Kegel von } 45^\circ \text{ Breite, } x^2 = xy = \frac{1}{2} r^2, \\ \xi_1 = c_1 \left( \frac{1}{2} \frac{q^3}{r^3} \mathfrak{X}_1 + \frac{6q^3}{r^2 u \tau} \mathfrak{X}_1' - \frac{12q^3}{r u^2 \tau^2} \mathfrak{X}_1'' \right) \\ \eta_1 = \frac{1}{2} c_1 \left( \frac{3q^3}{r^3} \mathfrak{X}_1 + \frac{36q^3}{r^2 u \tau} \mathfrak{X}_1' + \frac{24q^3}{r u^2 \tau^2} \mathfrak{X}_1'' \right). \end{array} \right\} \quad (38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Axial} \quad x^2 = r^2; \quad \eta_1 = 0, \\ \xi_1 = c_1 \left( \frac{2q^3}{r^3} \mathfrak{X}_1 + \frac{24q^3}{r^2 u \tau} \mathfrak{X}_1' \right); \end{array} \right\} \quad (39)$$

hier ist

$$\mathfrak{X}_1 = (1 - \chi_1^2)^3; \quad \mathfrak{X}_1' = -(1 - \chi_1^2)^2 \chi_1; \quad \mathfrak{X}_1'' = -1 + 6\chi_1^2 - 5\chi_1^4. \quad (40)$$

§ 14. In ähnlicher Weise ergibt sich für die Komponenten ohne Rotation

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Äquatorial} \quad x = 0; \quad \eta_2 = 0, \\ \xi_2 = -c_2 \left( \frac{q^3}{r^3} \mathfrak{X}_2 + \frac{12q^3}{r^2 v \tau} \mathfrak{X}_2' \right); \end{array} \right\} \quad (41)$$

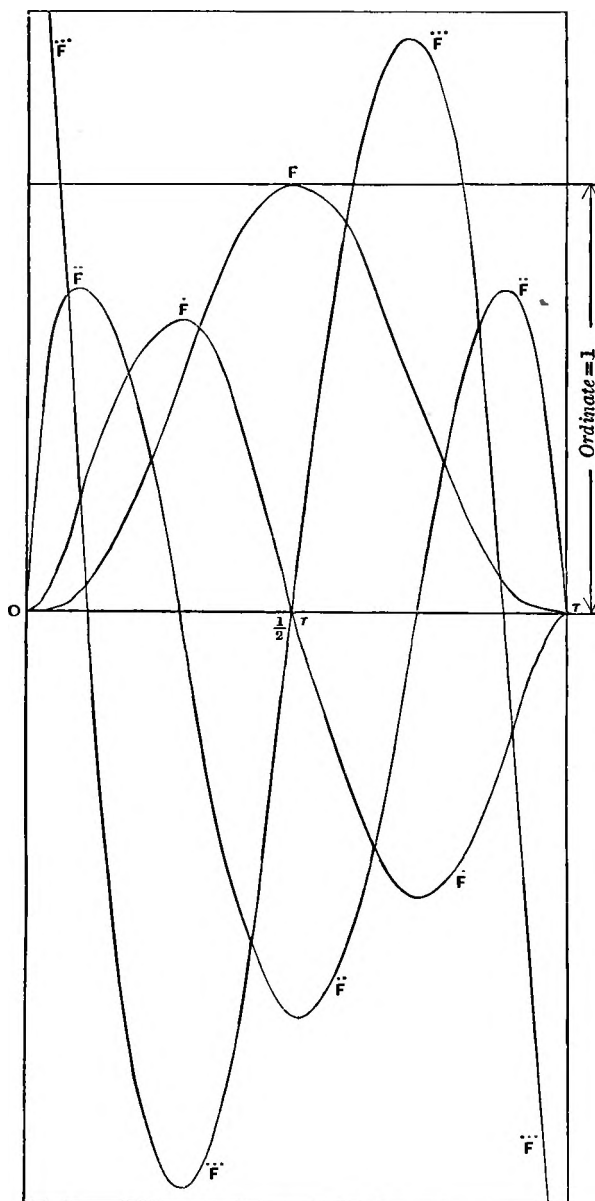


Fig. 49.

Maßstab von  $\dot{\mathfrak{F}} = \frac{1}{6}$  des Maßstabes von  $\mathfrak{F}$

" "  $\ddot{\mathfrak{F}} = \frac{1}{25}$  " " "  $\mathfrak{F}$

" "  $\dddot{\mathfrak{F}} = \frac{1}{125}$  " " "  $\mathfrak{F}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Kegel von } 45^0 \text{ Breite, } x^2 = xy = \frac{1}{2} r^2, \\ \xi_2 = c_2 \left( \frac{1}{2} \frac{q^3}{r^3} \mathfrak{X}_2 + \frac{6 q^3}{r^2 v \tau} \mathfrak{X}_2' + \frac{12 q^3}{r v^2 \tau^2} \mathfrak{X}_2'' \right) \\ \eta_2 = \frac{1}{2} c_2 \left( \frac{3 q^3}{r^3} \mathfrak{X}_2 + \frac{36 q^3}{r^2 v \tau} \mathfrak{X}_2' + \frac{24 q^3}{r v^2 \tau^2} \mathfrak{X}_2'' \right); \end{array} \right. \quad (42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Axial } x^2 = r^2; \quad \eta_2 = 0, \\ \xi_2 = c_2 \left( \frac{2 q^3}{r^3} \mathfrak{X}_2 + \frac{24 q^3}{r^2 v \tau} \mathfrak{X}_2' + \frac{24 q^3}{r v^2 \tau^2} \mathfrak{X}_2'' \right); \end{array} \right. \quad (43)$$

wo  $\mathfrak{X}_2$  usw. gegeben sind durch (40), nur daß  $\chi_2$  für  $\chi_1$  zu setzen ist;  $\chi_1$  und  $\chi_2$  sind durch (36) bestimmt.

§ 15. Der Charakter der Bewegung durch den Festkörper hindurch, wie sie vollständig durch (19) beschrieben ist, wird aus einem sorgfältigen Studium der Einzelheiten für die äquatorialen, konalen und axialen Orte, wie sie deutlich in den Gleichungen (37) bis (43) für jede Komponente einzeln, für die ohne Raumänderung und die ohne Rotation verlaufende, sich kennzeichnen, vollständig verstanden werden. Die Kurve  $\mathfrak{X}$  in der Zeichnung des § 12 zeigt die Geschichte der Bewegung, die einem beliebigen Punkte der Oberfläche  $S$  für jede Komponente allein und demnach auch für beide zusammen in jedem Falle gegeben werden muß, in dem  $q$  äußerst klein ist im Vergleich mit der kleineren der beiden Größen  $u\tau$ ,  $v\tau$ , die wir der Kürze wegen als Wellenlängen bezeichnen wollen. Die Kurve  $\mathfrak{X}$  gibt die Geschichte der Bewegung wieder, die durch jede der beiden Wellen hervorgerufen wird, wenn diese durch irgendeinen Punkt geht, dessen Abstand vom Mittelpunkte sehr groß ist im Vergleich mit der Länge ihrer eigenen Welle. Aber die drei algebraischen Funktionen  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$  kommen sämtlich in dem Ausdrucke für die Bewegung vor, die von jeder der beiden Wellen herrührt, wenn die schnellere so weit vorangeeilt ist, daß ihr hinteres Ende von der Front der langsameren getrennt ist, aber noch nicht so weit, daß ihre Wellenlänge (das ist die konstante Dicke der Schale, in der sie verläuft) groß ist gegenüber ihrem inneren Radius. Schauen wir auf die Zeichnung und beachten wir, daß im Anfangspunkte bei  $S$  eine bloße Bewegung jedes Punktes in einer Richtung und wieder zurück, wie sie durch  $\mathfrak{X}$  dargestellt ist, in weit entfernten Orten eine Bewegung ( $\mathfrak{X}$ ) bis zu einer gewissen Verschiebung  $d$ , dann zurück durch die Null bis zu einer Verschiebung  $1,36 \times d$  in der entgegengesetzten Richtung, weiter zurück durch die Null bis  $d$  in der ersten Richtung und endlich zurück in den Ruhezustand bei Null hervorruft. Beachten wir ferner, daß die Richtung von  $d$  radial ist in der rotationslosen Welle und senkrecht zum Radius in der ohne Volumänderung verlaufenden Welle, und endlich, daß  $d$  sich für jede radiale Linie umgekehrt proportional dem Abstände vom Mittelpunkte ändert.

§ 16. Wir ziehen eine beliebige Linie  $OPK$  in irgendeiner festgelegten Richtung durch  $O$ , den Mittelpunkt der sphärischen Fläche  $S$ , an der die die ganze Bewegung verursachende Kraft wirkt. In dem besonderen Falle der §§ 12—15 und in jedem Falle, in dem man voraussetzt, daß die Funktionen  $F_1\left(t - \frac{q}{u}\right)$  und  $F_2\left(t - \frac{q}{v}\right)$  von  $t = 0$  bis  $t = \tau$  die Form  $t^3(\tau - t)^3 A_i t^i$



haben, wo  $i$  eine ganze Zahl bedeutet, ist der zeitliche Verlauf der Bewegung des Punktes  $P$  darstellbar durch  $B_0 + B_1 t + \dots + B_{6+i} t^{6+i}$  und ihr räumlicher Verlauf ( $t$  konstant und  $r$  veränderlich) durch  $C_{-3} r^{-3} + C_{-2} r^{-2} + \dots + C_{5+i} r^{5+i}$ ; die vollständige Formel in ihrer Abhängigkeit von  $t$  und  $r$  ist explizit in den Gleichungen (19) gegeben. Der elementare algebraische Charakter der Formeln und das genaue Verschwinden der Verschiebung für jeden Punkt des Festkörpers, für den  $r > q + vt$  ist, und zwischen  $r = q + v(t - \tau)$  und  $r = q + ut$ , wenn  $v(t - \tau) > ut$  ist; und zwischen  $r = q$  und  $r = q + u(t - \tau)$ , wenn  $t > \tau$  ist: alle diese interessanten Eigenschaften der Lösung einer immerhin etwas verwickelten mechanischen Aufgabe sind durch den besonderen Charakter der die Bewegung hervorrufenden, auf  $S$  wirkenden Kraft gesichert, die wir gemäß den §§ 8, 9 so bestimmen können, daß sie jene Eigenschaften zur Folge hat. Aber alle diese charakteristischen Eigenschaften, außer der ersten (das Verschwinden jeder Bewegung im ganzen Raume außerhalb der Kugelfläche  $r = q + vt$ ), gehen verloren, wenn wir auf  $S^1$ ) eine willkürliche Kraft wirken lassen, oder eine solche Kraft, die eine willkürliche Formänderung oder Bewegung der Fläche  $S$  zur Folge hat. Es sei beispielsweise  $S$  eine gedachte starre, sphärische Grenzfläche unseres Hohlraumes, und es werde ihr eine unendlich kleine willkürliche Bewegung mitgeteilt. Wir brauchen hier eine unendlich kleine Drehung von  $S$  nicht in Betracht zu ziehen; die dadurch entstehenden, in ihrem Charakter besonders einfachen sphärischen Wellen sind in meinen in Baltimore gehaltenen Vorlesungen<sup>2)</sup> untersucht und in meinen Mitteilungen an die British Association und im Philosophical Magazine<sup>3)</sup> aus der letzten Zeit dargelegt worden. Ebenso wenig brauchen wir krummlinige Bewegungen des Mittelpunktes von  $S$  in Betracht zu ziehen, da bei unendlich kleiner Bewegung die unabhängige Übereinanderlagerung von  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Bewegungen jede beliebige krummlinige Bewegung hervorbringt.

§ 17. Wählen wir endgültig  $\mathfrak{E}(t)$  oder einfach  $\mathfrak{E}$ , eine willkürliche Funktion der Zeit, zur Bezeichnung des Ausschlages des Mittelpunktes der Fläche  $S$  aus ihrer Gleichgewichtslage in der Richtung  $OX$ , und bezeichnen mit

$d^{-1}\mathfrak{E}$ ,  $d^{-2}\mathfrak{E}$  die Größen  $\int_0^t dt \mathfrak{E}$  und  $\int_0^t dt \int_0^t dt \mathfrak{E}$ , so besteht unsere Auf-

gabe darin, unter der Annahme, daß der Festkörper zur Zeit  $t = 0$  sich überall in Ruhe und ohne Zwang befindet, für jeden Punkt des Festkörpers ( $r > q$ ) für die ganze folgende Zeit ( $t$  positiv) ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) zu bestimmen, mit der Bedingung, daß für  $r = q$

$$\xi = \mathfrak{E}(t), \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0 \quad (44)$$

ist. Diese letzteren Werte geben in (19) eingesetzt

1) Wenn der Innenraum von  $S$  mit einem Festkörper von derselben Qualität angefüllt ist wie der äußere Raum, bleibt die Lösung algebraisch, falls der die Kraft darstellende Ausdruck algebraisch ist, wenn auch unstetig. Die Verschiebung von  $S$  hört auf nicht zur Zeit  $t = \tau$ , wenn die Kraft aufhört, sondern zur Zeit  $t = \tau + 2q/u$ , wenn das Ende der durch sie erzeugten, nach innen verlaufenden Welle den Mittelpunkt erreicht hat und andererseits außen bis  $r = q$  gelangt ist.

2) S. 66 f. und 126 f. oben.

3) B. A. Report 1898, p. 783; Phil. Mag., Nov. 1898, p. 484.

$$0 = \frac{\ddot{\mathfrak{F}}_1(t)}{u^2} + \frac{\ddot{\mathfrak{F}}_2(t)}{v^2} + 3 \left\{ \frac{1}{q} \left[ \frac{\dot{\mathfrak{F}}_1(t)}{u} + \frac{\dot{\mathfrak{F}}_2(t)}{v} \right] + \frac{1}{q^2} [\mathfrak{F}_1(t) + \mathfrak{F}_2(t)] \right\} \quad (45)$$

und

$$\mathfrak{G}(t) = -\frac{1}{q^2} \left[ \frac{\dot{\mathfrak{F}}_1(t)}{u} + \frac{\dot{\mathfrak{F}}_2(t)}{v} \right] - \frac{1}{q^3} [\mathfrak{F}_1(t) + \mathfrak{F}_2(t)] - \frac{1}{q} \frac{\ddot{\mathfrak{F}}_1(t)}{u^2}. \quad (46)$$

Addiert man  $3q \times (46)$  zu (45), so findet sich

$$3q \mathfrak{G}(t) = -2 \frac{\ddot{\mathfrak{F}}_1(t)}{u^2} + \frac{\ddot{\mathfrak{F}}_2(t)}{v^2} \quad (47)$$

und hieraus durch Integration

$$\frac{\dot{\mathfrak{F}}_2(t)}{v^2} = 2 \frac{\dot{\mathfrak{F}}_1(t)}{u^2} + 3q d^{-2} \mathfrak{G}(t); \quad (48)$$

und durch Eliminieren von  $\mathfrak{F}_2$  aus (46)

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{q}(u+2v) \frac{d}{dt} + \frac{1}{q^2}(u^2+2v^2) \right] \mathfrak{F}_1(t) = \mathfrak{G}(t), \quad (49)$$

wo

$$\mathfrak{G}(t) = -qu^2 \left( 1 + \frac{3v}{q} d^{-1} + \frac{3v^2}{q^2} d^{-2} \right) \mathfrak{G}(t). \quad (50)$$

§ 18. Ich hoffe, später diese Aufgabe weiter für den Fall einer Bewegung zu bearbeiten, die zur Zeit  $t=0$  vom Ruhezustande aus anfängt, und für die  $\mathfrak{G}(t)$  eine willkürliche Funktion ist. Indem ich mich aber vorläufig auf den Fall beschränke, daß  $S$  sich in einer hin- und herschwingenden, einfach harmonischen Bewegung befunden hat, noch befindet und dauernd in ihr gehalten wird, nehme ich an

$$\mathfrak{G}(t) = h \sin \omega t. \quad (51)$$

Bei dieser Annahme ergibt (50)

$$\mathfrak{G}(t) = hqu^2 \left[ \left( \frac{3v^2}{q^2 \omega^2} - 1 \right) \sin \omega t + \frac{3v}{q\omega} \cos \omega t \right]. \quad (52)$$

Um (49) in der für diese Form von  $\mathfrak{G}(t)$  passendsten Weise aufzulösen, haben wir jetzt symbolisch

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(t) &= \frac{1}{\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{q}(u+2v) \frac{d}{dt} + \frac{1}{q^2}(u^2+2v^2)} \mathfrak{G}(t) \\ &= \frac{\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{q^2}(u^2+2v^2) - \frac{1}{q}(u+2v) \frac{d}{dt}}{\left[ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{q^2}(u^2+2v^2) \right]^2 - \left[ \frac{1}{q}(u+2v) \frac{d}{dt} \right]^2} \mathfrak{G}(t) \end{aligned}$$

und nach Auflösung dieser Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(t) &= \\ hqu^2 \frac{\left\{ \frac{3v^2}{q^4 v^2}(u^2+2v^2) + \frac{1}{q^2}(v^2+3vu-u^2) + \omega^2 \right\} \sin \omega t + \frac{u-v}{q\omega} \left( \frac{3uv}{q^2} + \omega^2 \right) \cos \omega t}{\left[ \frac{1}{q^2}(u^2+2v^2) - \omega^2 \right]^2 + \frac{\omega^2}{q^2}(u+2v)^2}. \quad (53) \end{aligned}$$

Ist  $\tilde{\mathfrak{X}}_1$  so bestimmt, dann liefert die Gleichung (48) die Funktion  $\tilde{\mathfrak{X}}_2$  folgendermaßen:

$$\frac{\tilde{\mathfrak{X}}_2(t)}{v^2} = \frac{2\tilde{\mathfrak{X}}_1(t)}{u^2} - \frac{3hq}{\omega^2} \sin \omega t. \quad (54)$$

Für  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  finden wir jetzt nach (19)

$$\left. \begin{aligned} \xi &= B(r, t)x^2 - \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\tilde{\mathfrak{X}}_1(t_1)}{u} + \frac{\tilde{\mathfrak{X}}_2(t_2)}{v} \right] - \frac{1}{r^3} [\tilde{\mathfrak{X}}_1(t_1) + \tilde{\mathfrak{X}}_2(t_2)] - \frac{1}{r} \frac{\ddot{\tilde{\mathfrak{X}}}_1(t_1)}{u^2}; \\ \eta &= B(r, t)xy; \\ \zeta &= B(r, t)xz, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

wo nach der der obigen Gleichung (26) entsprechenden Bezeichnung gesetzt ist

$$\left. \begin{aligned} B(r, t) &= \frac{1}{r^3} \left[ \frac{\ddot{\tilde{\mathfrak{X}}}_1(t_1)}{u^2} + \frac{\ddot{\tilde{\mathfrak{X}}}_2(t_2)}{v^2} \right] + \frac{3}{r^4} \left[ \frac{\dot{\tilde{\mathfrak{X}}}_1(t_1)}{u} + \frac{\dot{\tilde{\mathfrak{X}}}_2(t_2)}{v} \right] + \frac{3}{r^5} [\tilde{\mathfrak{X}}_1(t_1) + \tilde{\mathfrak{X}}_2(t_2)]; \\ t_1 &= t - \frac{r-q}{u}; \quad t_2 = t - \frac{r-q}{v} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

§ 19. Die Wellenlängen der beiden Wellenarten sind bzw.  $\frac{2\pi u}{\omega}$  und  $\frac{2\pi v}{\omega}$ . Für Werte von  $r$ , die im Vergleich mit der größeren von diesen Wellenlängen sehr groß sind, gehen die rechten Seiten von (55) annäherungsweise auf die  $\tilde{\mathfrak{X}}_1$  und  $\tilde{\mathfrak{X}}_2$  enthaltenden Glieder zurück. Diese Glieder stellen bezüglich einen Zug von Wellen ohne Volumänderung oder von Wellen transversaler Schwingung und einen Zug von Wellen ohne Drehung oder longitudinaler Schwingung dar; und die Amplitude jeder Welle, wie sie nach außen zieht, variiert umgekehrt wie  $r$ .

§ 20. Für den Fall eines unzusammendrückbaren Festkörpers ist  $v = \infty$ , was vermöge (54) ergibt

$$\frac{\ddot{\tilde{\mathfrak{X}}}_1(t)}{u^2} = -\frac{3}{2} hq \sin \omega t; \quad (57)$$

und vermöge (55) für ein sehr großes  $r$

$$\left. \begin{aligned} \xi &\doteq -\frac{3}{2} hq \left( \frac{x^2}{r^3} - \frac{1}{r} \right) \sin \omega t; \\ \eta &\doteq -\frac{3}{2} hq \frac{xy}{r^3} \sin \omega t; \\ \zeta &\doteq -\frac{3}{2} hq \frac{xz}{r^3} \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Diese Gleichungen beschreiben für große Abstände vom Anfangspunkte die von einer starren Kugel mit dem Radius  $q$ , die in einer Hin- und Herbewegung nach der Formel  $h \sin \omega t$  gehalten wird, erzeugte Wellenbewegung vollständig.

§ 21. Die so dargestellte Bewegung ohne jede Volumenänderung besteht in nach außen ziehenden Wellen, die ihre Schwingungsrichtung in

Meridianebenen und sehr angenähert<sup>1)</sup> senkrecht zur Radialrichtung und eine Schwingungsweite gleich  $\frac{3}{2}h \frac{q}{r} \sin \theta$  haben, wenn mit  $\theta$  der Winkel zwischen  $r$  und der Achse bezeichnet wird. Der allmähliche Übergang von der einfachen Bewegung  $\xi = h \sin \omega t$  an der Oberfläche der starren Kugel im elastischen Festkörper zu der Bewegung in Abständen, die im Vergleich mit  $q$  mäßig sind und dann weiter hinaus zu derjenigen in größeren Abständen, in denen die Bewegung sehr angenähert die reine durch (58) dargestellte Wellenbewegung ist, bildet einen sehr interessanten Gegenstand aufs einzelne gerichteter Untersuchung und Erläuterung. Die Formeln, die die mittleren Bewegungen darstellen, werden gefunden, wenn man in (45)  $v = \infty$  setzt und diese Gleichung zur Bestimmung von  $\mathfrak{F}_2(t)$  in Ausdrücken von  $\mathfrak{F}_1(t)$  und dann (55) und (56), für welche  $v = \infty$  ergibt  $t_2 = t$ , zur Bestimmung von  $\xi, \eta, \zeta$  benutzt. Es sind die folgenden: —

$$\left. \begin{aligned} \xi &= B(r, t) x^2 - \left(\frac{q}{r}\right)^3 \frac{h}{2} \left[ \left(1 - \frac{3u^2}{q^2 \omega^2}\right) \sin \omega t + \frac{3u^2}{q^2 \omega^2} \sin \omega t_1 - \frac{3u}{q\omega} \cos \omega t \right] \\ &\quad - \left(\frac{q}{r}\right)^2 \frac{3h}{2} \frac{u}{q\omega} \cos \omega t_1 + \frac{q}{r} \frac{3h}{2} \sin \omega t_1; \\ \eta &= B(r, t) xy; \quad \zeta = B(r, t) xz. \end{aligned} \right\} (59)^2$$

Hierin ist

$$\left. \begin{aligned} r^2 B(r, t) &= \left(\frac{q}{r}\right)^2 \frac{3h}{2} \left[ \left(1 - \frac{3u^2}{q^2 \omega^2}\right) \sin \omega t + \frac{3u^2}{q^2 \omega^2} \sin \omega t_1 - \frac{3u}{q\omega} \cos \omega t \right] \\ &\quad + \left(\frac{q}{r}\right)^2 \frac{9h}{2} \frac{u}{q\omega} \cos \omega t_1 - \frac{q}{r} \frac{3h}{2} \sin \omega t_1^2; \\ t_1 &= t - \frac{r-q}{u}. \end{aligned} \right\} (60)$$

Für den besonderen Fall, daß die Wellenlänge gleich dem Radius ist, haben wir

$$q = \frac{2\pi u}{\omega}, \quad (61)$$

was uns ermöglicht, einfach  $\frac{1}{2\pi}$  für  $u/q\omega$  in den Gleichungen (59) und (60) zu setzen. Für die graphische Darstellung dieses Falles nehmen wir  $z = 0$  an, wodurch alle Verschiebungen in der  $xy$ -Ebene liegen.

§ 22. Die nachstehenden Zeichnungen Fig. 50 u. 51, S. 166, 167, verhelfen uns zum vollständigen Verständnis des Charakters der Bewegung des Festkörpers in dem ganzen die schwingende starre Kugel umgebenden Raume. Sie zeigen uns<sup>2)</sup> Verschiebungen und Bewegungen von Punkten, deren Gleichgewichtslagen in der Äquatorialebene, in dem Kegel von 45° Breite und in der axialen Linie sind. Fig. 50 stellt Verschiebungen dar in dem Augenblicke, in

1) Es ist dies streng der Fall, wenn die Wellenlänge und  $q$  im Vergleich mit  $r$  zugleich unendlich klein sind.

2) Übrigens hat man zur Kontrolle  $\xi = B(r, t) (x^2 - \frac{1}{3}r^2) + \frac{h}{r} q \sin \omega t$ .

3) Von links oben nach rechts unten.

D. H.  
D. H.

dem die Kugel sich durch ihre Mittellage hindurch nach rechts bewegt. Fig. 51 zeigt Verschiebungen eine Viertelperiode später, wenn die Kugel sich am Ende ihrer nach rechts verlaufenden Bewegung befindet. Beide Figuren zeigen ferner<sup>1)</sup> die Bahn einer einzelnen Partikel, deren Gleichgewichtslage sich auf der Kegelfläche von  $45^\circ$  im Abstände  $\frac{1}{4}q$  vom Mittelpunkt der Kugel befindet. Die Bahnbewegung verläuft in der Richtung der Uhrzeiger. Es ist interessant, in der Fig. 51<sup>2)</sup> verdeutlicht zu sehen, wie die axiale Bewegung allmählich von  $\pm h$  an der Oberfläche der Kugel auf eine sehr kleine Weite im Abstände  $q$  von der Fläche oder  $2q$  vom Mittelpunkt zurückgeht, und lehrt uns die allmähliche Annäherung an Null bei immer größeren Abständen durch die kleinen angefügten Hilfszeichnungen<sup>3)</sup> verstehen, in denen die Größen der axialen Verschiebungen zu zwei gewählten Zeiten durch Ordinaten verzeichnet sind.

§ 23. Der allmähliche Übergang von der zur Achse parallelen Bewegung  $h \sin \omega t$  an der Oberfläche der Kugel zu der Bewegung

$$- \frac{3}{2} \frac{q}{r} h \sin \theta \sin \omega t$$

in großen Abständen von der Kugel in jeder beliebigen Richtung wird durch die diagonalen Darstellungen in den beiden Zeichnungen für den Fall  $\theta = 45^\circ$  interessant erläutert. Es muß bemerkt werden, daß in der Natur  $h$  nur ein kleiner Bruchteil von  $q$ , dem Radius der Kugel, sein darf, praktisch nicht mehr als  $\frac{1}{100}$ , damit die Zwänge innerhalb der Elastizitätsgrenzen der meisten elastischen Körper bleiben, und das Gesetz der einfachen Proportionalität zwischen den Deformationen und Zwängen (Hookes: Ut tensio sic vis) annähernd richtig ist. In der Zeichnung habe ich  $h = \frac{1}{4}q$  angenommen; wenn wir uns aber jede Verschiebung auf  $\frac{1}{20}$  der gezeichneten Größe verkleinert vorstellen, ohne die gleichfalls verzeichnete Richtung zu ändern, dann erhalten wir eine sehr angenäherte Darstellung der wirklichen Bewegungen, die so klein sein würden, daß sie bei einer Kugel von 6 cm Durchmesser für das Auge kaum bemerkbar wären.

§ 24. Kehren wir zu unserer Lösung (53), (54), (55), (56) für willkürliche oder periodische Bewegung einer starren, in einen isotropen, elastischen Festkörper von endlichem Widerstand gegen Zusammendrückung und endlicher Starrheit eingesenkten Kugel zurück. Für Abstände von der Kugel, die im Vergleich mit  $q$ , ihrem Radius, sehr groß sind, das heißt für sehr kleine  $q/r$ , gehen (55) und (56) über in

$$\left. \begin{aligned} \xi &\doteq B(r, t) x^2 - \frac{1}{r} \frac{\ddot{\xi}_1(t_1)}{u^2}; \\ \eta &\doteq B(r, t) xy; \quad \zeta \doteq B(r, t) xz; \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

$$\left. \begin{aligned} r^2 B(r, t) &\doteq \frac{1}{r} \left[ \frac{\ddot{\xi}_1(t_1)}{u^2} + \frac{\ddot{\xi}_2(t_2)}{v^2} \right], \\ \text{wobei ist} \quad t_1 &= t - \frac{r-q}{u} \quad t_2 = t - \frac{r-q}{v} \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

1) In der ellipsoidischen gestrichelten Linie.

2) An der gestrichelten Pfeillinie zu beiden Seiten von  $OX$ .

3) Rechts die horizontalen, sinusoiden Linien.

D. H.

D. H.

D. H.

Setzen wir jetzt in die Gleichungen (62) den Wert von  $B(r, t)$  aus (63) ein und eliminieren  $\ddot{\mathfrak{F}}_2(t_2)$  mit Hilfe von (47), so finden wir

$$\left. \begin{aligned} \xi &\doteq -\frac{r^2}{r^3} \frac{x^2}{u^2} \ddot{\mathfrak{F}}_1(t_1) + \frac{x^2}{r^3} \left[ 2 \frac{\ddot{\mathfrak{F}}_1(t_2)}{u^2} + 3q \mathfrak{E}(t_2) \right] \\ \eta &\doteq + \frac{xy}{r^3} \frac{\ddot{\mathfrak{F}}_1(t_1)}{u^2} + \frac{xy}{r^3} \left[ 2 \frac{\ddot{\mathfrak{F}}_1(t_2)}{u^2} + 3q \mathfrak{E}(t_2) \right] \\ \zeta &\doteq + \frac{xz}{r^3} \frac{\ddot{\mathfrak{F}}_1(t_1)}{u^2} + \frac{xz}{r^3} \left[ 2 \frac{\ddot{\mathfrak{F}}_1(t_2)}{u^2} + 3q \mathfrak{E}(t_2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

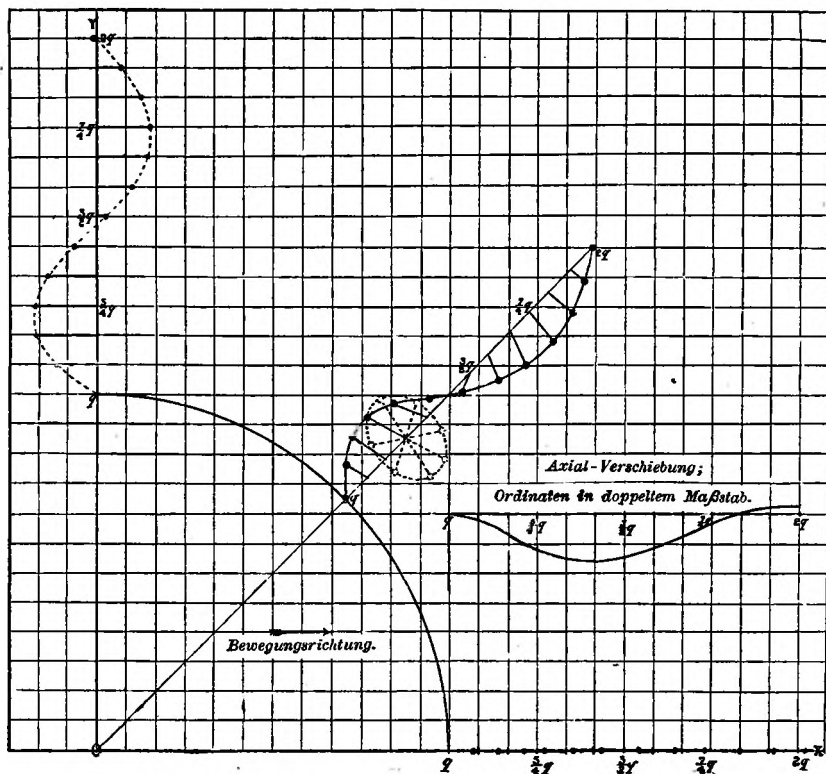


Fig. 50.

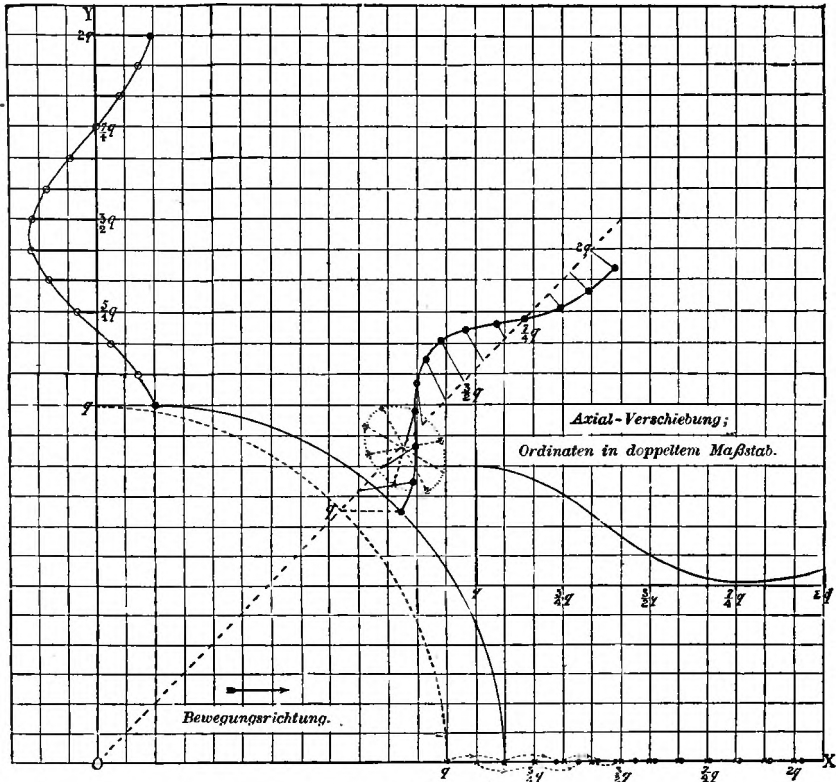
Die Glieder dieser Formeln, die  $t_1$  und  $t_2$  als Argumente haben, stellen zwei gesonderte Systeme einer Wellenbewegung dar; das erste System ist ohne Volumenänderung, das zweite ohne Drehung, und sie ziehen vom Mittelpunkt der Störung mit den Geschwindigkeiten  $u$  und  $v$  nach außen.

§ 25. Ich behalte mir die Behandlung des Falles, daß  $\mathfrak{E}(t)$  unstetig ist, mit Null für  $t = 0$  beginnend und mit Null für  $t = \tau$  aufhörend für eine spätere Gelegenheit vor. Ich bemerke für jetzt nur vorweggreifend, daß die durch die Differentialgleichung (49) bestimmte Funktion  $\mathfrak{F}_1(t)$  zwar bei  $t = 0$  mit Null beginnt, sich aber nach dem Exponential-Gesetze ( $e^{-kt}$ ) der Null nähert, wenn  $t$  ins Unendliche ansteigt, und daß demgemäß, weil

das gleiche zufolge (48) auch für  $\mathfrak{F}_2(t)$  gelten muß, weder die Wellenbewegung ohne Volumenänderung noch die ohne Drehung eine begrenzte einzelne Welle von der Dauer  $\tau$  ist, sondern daß im Gegenteil jede einen unendlich lange währenden Nachzug hat.

§ 26. Allgemein können wir, wenn die Kugel sich in der einfachen harmonischen Bewegung,  $h \sin \omega t$ , parallel zu  $OX$  befindet, der Kürze wegen, setzen

$$\mathfrak{F}_1(t) = \frac{\hbar q u^2}{\omega^2} (K \sin \omega t + L \cos \omega t),$$



**Fig. 51.**

wobei ist

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{3v^2}{q^4\omega^4}(u^2 + 2v^2) + \frac{1}{q^2\omega^2}(v^2 + 3vu - u^2) + 1 \\ L &= \frac{\frac{u-v}{q\omega}(3uv + 1)}{\left[\frac{1}{q^2\omega^2}(u^2 + 2v^2) - 1\right]^2 + \frac{1}{q^2\omega^2}(u + 2v)^2} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

In dieser Bezeichnungsweise ergibt (64) für große Entfernungen vom Mittelpunkte

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{hq}{r} \left\{ \frac{r^2 - x^2}{r} (K \sin \omega t_1 + L \cos \omega t_1) + \frac{x^2}{r^2} [(3-2K) \sin \omega t_2 - 2L \cos \omega t_2] \right\}; \\ \eta &= \frac{hq}{r} \left\{ -\frac{xy}{r^2} (K \sin \omega t_1 + L \cos \omega t_1) + \frac{xy}{r^2} [(3-2K) \sin \omega t_2 - 2L \cos \omega t_2] \right\}; \\ \zeta &= \frac{hq}{r} \left\{ -\frac{xz}{r^2} (K \sin \omega t_1 + L \cos \omega t_1) + \frac{xz}{r^2} [(3-2K) \sin \omega t_2 - 2L \cos \omega t_2] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Diese Gleichungen stellen zwei Reihen einfach harmonischer Wellen dar, eine ohne Volumenänderung und eine ohne Drehung, deren Wellenlängen bezüglich sind  $2\pi u/\omega$ ,  $2\pi v/\omega$ . Die größten Verschiebungen in den beiden Reihen von Punkten der Kugeloberfläche eines halbvertikalen Winkels  $\theta$  und mit der Achse  $OX$  sind bezüglich

$$\left. \begin{aligned} (\text{ohne Volumenänderung}) \quad & \frac{hq}{r} \sqrt{K^2 + L^2} \sin \theta; \\ (\text{ohne Drehung}) \quad & \frac{hq}{r} \sqrt{(3-2K)^2 + 4L^2} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

§ 27. Der Betrag der nach außen von einer einzelnen Wellenreihe beider Arten übergeführten Energie ist für eine Periode gleich der Summe der kinetischen und potentiellen Energie, oder, was dasselbe gibt, gleich dem Doppelten der gesamten kinetischen Energie des Mediums zwischen zwei konzentrischen Kugeloberflächen, deren Radien sich voneinander um eine Wellenlänge unterscheiden. Nun ist die durchschnittliche kinetische Energie im Verlaufe einer Wellenlänge in jedem Teile der sphärischen Schale die Hälfte der kinetischen Energie im Augenblicke größter Geschwindigkeit. Demgemäß ist die gesamte in einer Periode übergeführte Energie gleich der Wellenlänge multipliziert in das Oberflächenintegral, genommen über die ganze Kugeloberfläche, der größten kinetischen Energie in einem beliebigen Punkte für die Volumeneinheit; und demnach ist die in der Zeiteinheit übergeführte Energie gleich dem Produkte der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dieses Flächenintegral. So finden wir als Beträge für diese Energien mit den durch (67) dargestellten Amplituden und in der Zeiteinheit

$$\left. \begin{aligned} (\text{ohne Volumenänderung}) \quad E_1 &= \frac{4\pi}{3} \rho h^2 q^2 \omega^2 (K^2 + L^2) u; \\ (\text{ohne Drehung}) \quad E_2 &= \frac{2\pi}{3} \rho h^2 q^2 \omega^2 [(3-2K)^2 + 4L^2] v. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

§ 28. Die Summe dieser beiden Ausdrücke ist der gesamte Betrag der in der Zeiteinheit übergeführten Energie und muß gleich dem Durchschnittsbetrage der durch die schwingende Kugel auf den umgebenden elastischen Festkörper ausgeübten Arbeit sein. Wenn wir aber den Betrag der obigen Summe mit  $E$  bezeichnen, haben wir

$$E = \frac{2\pi\rho}{3} h^2 q^2 \omega^2 \{ 2u (K^2 + L^2) + v [(3-2K)^2 + 4L^2] \}. \quad (69)$$

§ 29. Zur Bestätigung dieses Satzes wollen wir zunächst die resultierende Kraft  $P$  suchen, mit welcher die Kugel den elastischen Festkörper



drückt und zieht, und dann die gesamte Arbeit, die  $P$  in einer Periode leistet, und hieraus endlich die durchschnittliche Arbeit in der Zeiteinheit bestimmen. Gehen wir auf § 9 zurück, so sehen wir, daß  $P$  das Flächenintegral von  $X$  über die Kugelfläche mit dem Radius  $q$  ist. Demnach finden wir auf Grund der ersten der Gleichungen (25), die wir vermöge der Beziehungen

$$k + \frac{4}{3}n = \rho v^2; \quad n = \rho u^2 \quad (70)$$

auch, wie folgt, schreiben können:

$$X = \rho \{ C_2 \lambda^2 v^2 - [2\lambda^2(A + C_2) + 2(2\lambda^2 + 1)B + (\lambda^2 + 1)C_1] u^2 \}; \quad (71)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{4\pi q^3 \rho}{3} \{ C_2 v^2 - 2(A + 5B + 2C_1 + C_2) u^2 \} \\ &= \frac{4\pi q^3 \rho}{3} \left\{ \ddot{\xi}_2 + \frac{\ddot{\xi}_2}{q^2} - 2 \left( \ddot{\xi}_1 + \frac{\ddot{\xi}_1}{q^2} \right) \right\} \\ &= \frac{Q}{q} \left\{ 2(v - u) \frac{\ddot{\xi}_1}{q^2 u^2} + 2(v^2 - u^2) \frac{\ddot{\xi}_1}{q^2 u^2} + 3v \mathfrak{E} + \frac{3v^2}{q} \mathfrak{E} \right\}, \quad (72) \end{aligned}$$

wo  $Q$  für  $\frac{4}{3}\pi q^3 \rho$  gesetzt ist und die Masse bedeutet, die unsere starre Kugel besäße, wenn ihre Dichte gleich der des elastischen Festkörpers wäre. Hieraus folgt vermöge (65) für eine einfache harmonische Bewegung mit der Periode  $2\pi/\omega$

$$\begin{aligned} P &= Q\omega^3 h \left\{ \left( 2K \frac{u^2 - v^2}{q^2 \omega^2} - 2L \frac{u - v}{q\omega} + 3 \frac{v^2}{q^2 \omega^2} \right) \sin \omega t \right. \\ &\quad \left. + \left( 2K \frac{u - v}{q\omega} + 2L \frac{u^2 - v^2}{q^2 \omega^2} + \frac{3v}{q\omega} \right) \cos \omega t \right\}; \quad (72') \end{aligned}$$

oder, wenn man die Werte von  $K$  und  $L$  aus (65) einsetzt und den gemeinsamen Nenner mit  $D$  bezeichnet,

$$\begin{aligned} P &= \frac{Q\omega^2 h}{D} \\ &\left\{ \left[ \frac{9u^2 v^2}{q^6 \omega^6} (u^2 + 2v^2 + q^2 \omega^2) - \frac{2}{q^4 \omega^4} (u^2 - v^2)^2 + \frac{1}{q^2 \omega^2} (4uv - v^2) \right] \sin \omega t \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{2u}{q\omega} \left( \frac{9v^4}{q^4 \omega^4} + \frac{3v^2}{q^2 \omega^2} + 1 \right) + \frac{v}{q\omega} \left( \frac{9u^4}{q^4 \omega^4} + \frac{3u^2}{q^2 \omega^2} + 1 \right) \right] \cos \omega t. \right\} \quad (72'') \end{aligned}$$

Dies kann kurz auch geschrieben werden

$$P = h(a \sin \omega t + b \cos \omega t). \quad (72''')$$

Schließlich erhalten wir für die Arbeit  $A$  bei der Periode  $\tau$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt P \mathfrak{E}(t) = h^2 b \omega \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} h^2 b \omega \quad (73) \\ &= \frac{Q\omega^2 h^2}{2D} \left[ \frac{2u}{q} \left( \frac{9v^4}{q^4 \omega^4} + \frac{3v^2}{q^2 \omega^2} + 1 \right) + \frac{v}{q} \left( \frac{9u^4}{q^4 \omega^4} + \frac{3u^2}{q^2 \omega^2} + 1 \right) \right]. \quad (73') \end{aligned}$$

§ 30. Die Übereinstimmung dieses direkten Ausdruckes für die geleistete Arbeit mit dem Ausdrucke (69), der die in auswärts ziehenden Wellen

in großen Entfernungen vom Mittelpunkte hervorgerufene Wirkung darstellt, zu beweisen, ist eine sehr langwierige rechnerische Arbeit, bei der  $K$  und  $L$  in (69) aus (65) einzuführen sind. Sie wird aber sehr einfach mit Hilfe der folgenden abgeänderten Ausdrücke für  $\mathfrak{F}_1(t)$  und  $\mathfrak{F}_2(t)$ , die übrigens auch für andere Zwecke nützlich sind. Aus (48) und (50) erhalten wir durch Eliminieren von  $\mathfrak{F}_1$  einen (49) ähnlichen Ausdruck, nämlich

$$\left. \begin{aligned} & \left[ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{q} (u + 2v) \frac{d}{dt} + \frac{1}{q^2} (u^2 + 2v^2) \right] \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{G}(t), \\ & \text{wo gesetzt ist} \\ & \mathfrak{G}(t) = qv^2 \left( 1 + \frac{3q}{q} d^{-1} + \frac{3u^2}{q^2} d^{-2} \right) \mathfrak{E}(t). \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Wir können jetzt (50) schreiben in der Form

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{G}(t) &= hqu^2 G \sin(\omega t + \alpha); \\ \text{und ähnlich} \\ \mathfrak{H}(t) &= hqv^2 H \sin(\omega t - \beta). \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Dabei sind die Werte von  $G$ ,  $H$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\left. \begin{aligned} G \cos \alpha &= \frac{3v^2}{q^2 \omega^2} - 1; & G \sin \alpha &= \frac{3v}{q\omega}; \\ H \cos \beta &= 1 - \frac{3u^2}{q^2 \omega^2}; & H \sin \beta &= \frac{3u}{q\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Aus der zweiten der Gleichungen (53) erhalten wir so

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F}_1(t) &= hqu^2 G \frac{M \sin(\omega t + \alpha) - N \cos(\omega t + \alpha)}{M^2 + N^2}; \\ \text{und mit (54)} \\ \mathfrak{F}_2(t) &= hqv^2 H \frac{M \sin(\omega t - \beta) - N \cos(\omega t - \beta)}{M^2 + N^2}, \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

wobei ist

$$M^2 = \left( \frac{u^2 + 2v^2}{q^2} - \omega^2 \right)^2; \quad N^2 = \left( \frac{(u + 2v)}{q} \right)^2.$$

Nach dem Untersuchungsverfahren, das uns (69) geliefert hat, finden wir jetzt für die Summe der Beträge an übergeführter Energie

$$\mathfrak{E} = \frac{2\pi e}{3} h^2 q^2 \omega^2 \frac{2u G^2 + v H^2}{M^2 + N^2}. \quad (78)$$

Setzen wir die Werte von  $G$ ,  $H$ ,  $M$ ,  $N$  ein und benutzen das Zeichen  $Q$ , so ergibt sich

$$E = \frac{1}{2} Q \omega^2 h^2 \frac{\frac{2u}{q} \left( \frac{9v^4}{q^4 \omega^4} + \frac{3v^2}{q^2 \omega^2} + 1 \right) + \frac{v}{q} \left( \frac{9u^4}{q^4 \omega^4} + \frac{3u^2}{q^2 \omega^2} + 1 \right)}{\left[ \frac{1}{q^2 \omega^2} (u^2 + 2v^2) - 1 \right]^2 + \frac{1}{q^2 \omega^2} (u + 2v)^2}. \quad (79)$$

Dies stimmt aber mit dem im (73) gegebenen Werte von  $A$  überein, und so ist der Beweis vollständig.

§ 31. Aus (78) folgt

$$E_1 = \frac{2\pi\varrho}{3} h^2 q^2 \omega^2 \frac{2uG^2}{M^2 + N^2} \quad E_2 = \frac{2\pi\varrho}{3} h^2 q^2 \omega^2 \frac{vH^2}{M^2 + N^2}.$$

Bezeichnet man mit  $J$  das Verhältnis der Energie der Welle ohne Volumenänderung zu der ohne Drehung, so erhält man also

$$J = \frac{2uG^2}{vH^2} = \frac{2u \left( \frac{9v^4}{q^4\omega^4} + \frac{3v^2}{q^2\omega^2} + 1 \right)}{v \left( \frac{9u^4}{q^4\omega^4} + \frac{3u^2}{q^2\omega^2} + 1 \right)}. \quad (80)$$

§ 32. Wir betrachten die folgenden vier Fälle:

a)  $q\omega$  ist sehr groß im Vergleich mit der größeren der beiden Geschwindigkeiten  $u$  und  $v$ :

$$J \div \frac{2u}{v}.$$

b)  $q\omega = v$ :

$$J = \frac{26}{\frac{v}{u} + \frac{3u}{v} + \frac{9u^3}{v^3}}.$$

c)  $q\omega = u$ :

$$J = \frac{2}{13} \left( \frac{u}{v} + \frac{3v}{u} + \frac{9v^3}{u^3} \right).$$

d)  $q\omega$  ist sehr klein im Vergleich mit der kleineren der beiden Geschwindigkeiten  $u$  und  $v$ :

$$J \div \frac{2v^3}{u^3}.$$

Wenn  $v = \infty$  ist, können die Fälle a) und b) nicht eintreten, und in den Fällen c) und d) sehen wir, daß dann  $J = \infty$  ist, das heißt, daß die ganze Energie durch die Wellen ohne Volumenänderung fortgeführt wird. Wenn  $v$  sehr klein ist im Vergleich mit  $u$ , finden wir, daß obwohl in den Fällen a) und c)  $J$  unendlich groß ist, in den Fällen b) und d)  $J$  dann Null wird. Dies widerlegt meines Erachtens vollkommen meine frühere Hypothese<sup>1)</sup> einer sehr kleinen Geschwindigkeit für die Wellenbewegung ohne Drehung in der Wellentheorie des Lichtes.<sup>2)</sup>

§ 33. Wir wollen jetzt einige Beispiele durchführen von der Art, wie sie in einem Zusatze zu dieser Vorlesung vom 6. März 1899 angeregt sind (S. 149), jedoch mit der Vereinfachung, daß wir eine starre, gewichtlose kugelförmige Grenzfläche für den Hohlraum annehmen; wir wollen sie kurz die Schale nennen. Vorher wollen wir aber im allgemeinen untersuchen, welche in einem einfachen Verhältnisse zur Geschwindigkeit stehende Kraft man auf eine an eine gewichtlose Feder in der oben S. 116 beschriebenen Weise angebrachte Masse  $m$  einwirken lassen muß, um die Schale in einfacher harmonischer Bewegung  $h \sin \omega t$  schwingend zu erhalten und dem-

1) „On the Reflexion and Refraction of Light“, Phil. Mag. 1888, 2. Halbjahr.

2) Vergleiche jedoch Vorlesung XIX, § 169.

D. H.

gemäß die Arbeit zu leisten, durch welche die beiden Reihen Wellen ausgesandt werden, mit denen wir uns beschäftigt haben. Bedeutet  $\gamma$  die für die Einheit der Geschwindigkeit von  $m$  erforderliche Kraft, so ist  $\gamma e$  die Arbeit, die auf  $m$  zu einer beliebigen Zeit innerhalb der Zeiteinheit wirken muß, wenn  $e$  die Verschiebung dieser Masse aus ihrer mittleren Lage bezeichnet. Nun müssen die Federn, die auf die Schale mit der Kraft  $P$  der obigen Gleichung (72') einwirken sollen, da sie gewichtlos sind, mit derselben Kraft auf  $m$  zurückwirken, so daß die Bewegungsgleichung für  $m$  ist

$$m \frac{d^2 e}{dt^2} = -P + \gamma \frac{de}{dt}. \quad (82)$$

Und nach den Gesetzen der elastischen Wirkung der Federn haben wir

$$P = c (\bar{e} - h \sin \omega t), \quad (83)$$

wo  $c$  das bezeichnet, was ich die „Steifheit“ des Federnsystems nenne.

§ 34. Für  $e$  ergeben (83) und (72'')

$$e = h \left[ \left( 1 + \frac{a}{c} \right) \sin \omega t + \frac{b}{c} \cos \omega t \right]; \quad (84)$$

setzen wir dies in (82) ein, so finden wir

$$\begin{aligned} m\omega^2 \left[ \left( 1 + \frac{a}{c} \right) \sin \omega t + \frac{b}{c} \cos \omega t \right] \\ = \left( a + \gamma \omega \frac{b}{c} \right) \sin \omega t + \left[ b - \gamma \omega \left( 1 + \frac{a}{c} \right) \right] \cos \omega t; \end{aligned}$$

demnach muß sein

$$\left( 1 + \frac{a}{c} \right) m\omega^2 = a + \frac{b}{c} \gamma \omega \quad \text{und} \quad \frac{b}{c} m\omega^2 = b - \left( 1 + \frac{a}{c} \right) \gamma \omega.$$

Dies ergibt, nach den beiden Unbekannten  $\gamma \omega$  und  $m\omega^2$  aufgelöst,

$$\gamma \omega = \frac{bc^2}{(a+c)^2 + b^2} \quad (85)$$

und

$$m\omega^2 = \frac{c[a(a+c) + b^2]}{(a+c)^2 + b^2}. \quad (86)$$

Wenn wir  $\omega$  und  $c$  als bekannt voraussetzen, sagen uns diese Gleichungen im Verein mit (72'') und (72''') für  $a$  und  $b$ , was  $m/Q$  sein muß, damit die Kraft, die aufgewendet wird, um die periodische Bewegung der Schale aufrechtzuerhalten, in einfachem Verhältnisse zur Geschwindigkeit variere; und sie ergeben  $\gamma$ , die Größe dieser Kraft für die Einheit der Geschwindigkeit.

§ 35. Wenn wir mit  $E'$  die maximale kinetische Energie bezeichnen, finden wir sofort aus (84)

$$E' = \frac{1}{2} h^2 m \omega^2 \left[ \left( 1 + \frac{a}{c} \right)^2 + \left( \frac{b}{c} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} h^2 \frac{m \omega b}{\gamma}. \quad (87)$$

Und aus (73) finden wir für die in einer Periode von  $P$  auf die Schale ausgeübte Arbeit

$$\tau A' = \frac{1}{2} \tau h^2 \omega b. \quad (88)$$

Diese Arbeit muß ebenso groß sein wie die von  $\gamma \dot{e}$  in einer Periode geleistete Arbeit. Letztere ist aber

$$\int_0^{\tau} dt \dot{e} \gamma \dot{e}, \text{ also nach (84) } \frac{1}{2} \tau \gamma \omega^2 h^2 \left[ \left(1 + \frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \right]. \quad (89)$$

Die Übereinstimmung zwischen (89) und (88) wird gesichert durch (85).

§ 36. Nach (87), (89), und da  $\tau \omega = 2\pi$  ist, ferner nach (86) und (85) finden wir

$$\frac{E'}{\tau A'} = \frac{m}{\tau \gamma} = \frac{m \omega^2}{2\pi \gamma \omega} = \frac{a(a+c) + b^2}{2\pi b c}, \quad (90)$$

was, wie wir sehen werden, ein wichtiges Resultat ist mit Bezug auf die Ansammlung von Energie in Vibratoren zur Erzeugung von Wellenzügen.

§ 37. Wir beachten jetzt, daß die Größen  $a, b, c$  sämtlich von den Dimensionen einer „longitudinalen Steifheit“ sind, das heißt Kraft/Länge, oder Masse/(Zeit)<sup>2</sup>, und wir schreiben der Deutlichkeit wegen die ganzen Ausdrücke nach (72'') und (72'''), wie folgt, nieder:

$$\left. \begin{aligned} a &= Q \omega^2 \frac{\frac{9u^2v^2}{q^4\omega^4} \left( \frac{u^2+2v^2}{q^2\omega^2} + 1 \right) - 2 \left( \frac{u^2-v^2}{q^2\omega^2} \right)^2 + \frac{4uv-v^2}{q^2\omega^2}}{\left( \frac{u^2+2v^2}{q^2\omega^2} - 1 \right)^2 + \left( \frac{u+2v}{q\omega} \right)^2} \\ b &= Q \omega^2 \frac{\frac{2u}{q\omega} \left( \frac{9v^4}{q^4\omega^4} + \frac{3v^2}{q^2\omega^2} + 1 \right) + \frac{v}{q\omega} \left( \frac{9u^4}{q^4\omega^4} + \frac{3u^2}{q^2\omega^2} + 1 \right)}{\left( \frac{u^2+2v^2}{q^2\omega^2} - 1 \right)^2 + \left( \frac{u+2v}{q\omega} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

§ 38. Wenn  $q\omega$  im Vergleich mit der größeren der beiden Geschwindigkeiten  $u$  oder  $v$  (Fall I des § 32) sehr groß ist, erhalten wir

$$a \doteq Q \omega^2 \frac{4uv-v^2}{q^2\omega^2}; \quad b \doteq Q \omega^2 \frac{v}{q\omega}$$

und folglich

$$\frac{a}{b} \doteq 0; \quad \frac{E'}{\tau A'} \doteq \frac{b}{2\pi c}. \quad (92)$$

Dieser Fall ist interessant in Verbindung mit der Mechanik von Wellen in einem elastischen Festkörper, aber anscheinend nicht in Hinsicht auf Licht.

§ 39. Ist umgekehrt  $q\omega$  sehr klein im Vergleich mit der kleineren der beiden Geschwindigkeiten  $u$  oder  $v$  (Fall IV des § 32), so findet man

$$\left. \begin{aligned} a &\doteq Q \omega^2 \frac{9u^2/q^2\omega^2}{u^2/v^2+2}; \quad b \doteq Q \omega^2 \frac{9(u^2/v^2+2)u/q\omega}{(u^2/v^2+2)^2} \\ \text{und folglich} \\ \frac{a}{b} &\doteq \frac{(u^2/v^2+2)u/q\omega}{u^2/v^2+2} \text{ d. h. sehr groß; } \frac{E'}{\tau A'} \doteq \frac{a(a+c)}{2\pi b c} \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

1) Und  $v$  groß im Verhältnis zu  $u$ , sonst hat man  $b \doteq Q \omega^2 \frac{2u+v}{q\omega}$ .

D. H.

Dieser Fall ist gerade in Hinsicht auf die molekularen Lichtquellen höchst interessant.

§ 40. Ist  $c$  sehr klein im Vergleich mit  $a + \frac{b^2}{a}$ , so finden wir

$$\frac{E'}{\tau A'} \div \frac{a^2/b + b}{2\pi c}; \quad \gamma\omega \div \frac{bc^2}{a^2 + b^2}; \quad m\omega^2 \div c. \quad (94)$$

§ 41. Bei  $c = \infty$  erhalten wir

$$\frac{E'}{\tau A'} = \frac{a}{2\pi b}; \quad \gamma\omega = b; \quad m\omega^2 = a. \quad (95)$$

Dies ist der einfache Fall einer starren Kugel mit der Masse  $m$ , die fest in einen starren, elastischen Körper eingebettet ist, wenn keine andere Elastizität als die des umgebenden Körpers ins Spiel kommt. Er ist interessant im Hinblick auf die Theorie der Himmelsbläue von Stokes und Rayleigh.

§ 42. Endlich für  $v = \infty$  haben wir

$$a = Q\omega^2 \left( \frac{9u^2}{2q^2\omega^2} - \frac{1}{2} \right); \quad b = Q\omega^2 \frac{9u}{2q\omega}. \quad (96)$$

Dieser Fall ist von höchstem Interesse und von größter Wichtigkeit hinsichtlich der mechanischen Lichttheorie.

§ 43. Fassen wir jetzt das besondere Beispiel ins Auge, auf das in dem Zusatze vom 6. März 1899 (S. 149) oben hingewiesen ist; dieses ist besonders bedeutungsvoll, da es zu Fällen gehört, die zwischen denen des § 38 und des § 39 in der Mitte liegen. Es handelt sich also um eine große Granitmasse mit einem kugelförmigen Hohlraum von 10 Zentimeter Durchmesser, auf den ein innerer einfach harmonischer Vibrator wirkt. Wir nehmen der leichten Rechnung wegen  $q^3\omega^2 = 10^9$ . Dann wird  $\omega^2 = 40 \times 10^6$ ,  $\omega = 6324$ ,  $q\omega = 31620$  und die Sekunden-Schwingungszahl im Hohlraume  $\frac{\omega}{2\pi} = 1006,5$ .

Nun sind die Geschwindigkeiten der Wellen ohne Raumänderung und derjenigen ohne Drehung im Granit<sup>1)</sup> etwa 2,2 und 4 Kilometer in der Sekunde; also haben wir  $u = 2,2 \times 10^5$ ,  $v = 4 \times 10^5$ . Hieraus und aus den Gleichungen (80) und (91) folgt

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{q\omega} &= 6,957; & \frac{u^2}{q^2\omega^2} &= 48,4; & \frac{u^4}{q^4\omega^4} &= 2342,56; \\ \frac{v}{q\omega} &= 12,649; & \frac{v^2}{q^2\omega^2} &= 160; & \frac{v^4}{q^4\omega^4} &= 25600; \\ J &= 11,96; & a &= 189,1 \times Q\omega^2; & b &= 25,59 \times Q\omega^2; & \frac{a}{b} &= 7,390. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Damit erhält man auf Grund der Gleichungen (85), (86), (90), wenn man der Kürze wegen  $c = s Q\omega^2$  setzt,

$$\left. \begin{aligned} \gamma\omega &= \frac{25,59 s^2}{(189,1 + s)^2 + 654,8} \times Q\omega^2; & \frac{m}{Q} &= \frac{[189,1 (189,1 + s) + 654,8] s}{(189,1 + s)^2 + 654,8} \\ \frac{E'}{\tau A'} &= \frac{7,390 (189,1 + s) + 25,59}{2\pi s} = 1,176 + \frac{226}{s}. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

1) Gray and Milne, Phil. Mag., Nov. 1881.

§ 44. Als einen ersten Unterfall wählen wir (§ 41)  $c = \infty$ , also auch  $s = \infty$ ; dann finden wir nach (95), (97)

$$m = 189,1 Q; \text{ und } E'/\tau A' = 1,176.$$

Diese Zahlen lehren, daß die kinetische Energie von  $m$  in jedem Augenblicke eines Durchganges durch seine Mittellage nur 1,176 der in einer Periode von den auswärts ziehenden Wellen fortgeführten Energie ersetzt, obwohl die Masse von  $m$  an 189 mal soviel beträgt als die der Granitmenge, die nötig ist, um den Hohlraum auszufüllen. Hieraus sehen wir, daß wenn die bewegende Kraft  $\gamma c$  aufhörte, die Bewegung von  $m$  noch weiter dauern, aber im Verlaufe von sechs oder sieben Mal  $\tau$  nahezu vernichtet sein würde. Die Untersuchung des nicht sehr einfachen Gesetzes eines derartigen Fortbestehens von Bewegung bietet eine äußerst interessante Aufgabe, die ganz bequem nach den Methoden des obigen § 25 vollständig durchgeführt werden kann. Für jetzt beschränken wir uns auf die Fälle, in denen  $E'/\tau A'$  sehr groß ist.

§ 45. Einen solchen Fall haben wir in den §§ 39, 41 vor uns, wenn wir anstatt  $1006\frac{1}{2}$  Perioden in der Sekunde nur 1,0065 nehmen; dies macht  $q^2 \omega^2 = 1000$ ;  $q \omega = 10 \sqrt{10} = 31,620$ ,  $\omega = 2 \sqrt{10} = 6,324$ ; und nach (93), (95) mit denselben Werten von  $u$  und  $v$  für Granit

$$a = 1,892 \times 10^8 \times Q \omega^2; \quad \frac{a}{b} = 7394; \quad \frac{E'}{\tau A'} = 1177; \quad (99)$$

$$m = 1,892 \times 10^8 \times Q.$$

Hiernach ist in diesem Falle bei so langsamer Schwingung des Vibrators die kinetische Energie der Masse  $m$  (die jetzt mehr als hunderttausendmal größer wäre als im vorigen Falle) bei dem Durchgange durch die Mitte ihrer Ausschlagsweite nahezu das 1200 fache der Arbeit, die erforderlich ist, um ihre Schwingungen in dem Betrage von 1,0065 Perioden in der Sekunde aufrechtzuerhalten, und der für  $a$  gefundene Wert zeigt, in (95) eingesetzt, daß die Masse  $m$ , wenn man annimmt, daß sie eine starre, den Hohlraum ausfüllende Kugel ist, 189 Millionen mal so dicht sein muß wie der sie umgebende Granit, wenn diese Schwingungsperiode durch eine der Geschwindigkeit proportionale Kraft (vgl. § 40) soll aufrechterhalten werden können. Es ist nun leicht zu sehen, daß, wenn die die Bewegung erhaltende Kraft aufhört, die starre Kugel mit nahezu derselben Periode weiterschwingen würde, aber ausklingend nach dem Gesetze

$$h e^{-\frac{t/\tau}{2854}} \sin \frac{2\pi t}{\tau}; \quad (100)$$

und es wird ein entsprechendes Ausklingen in den Amplituden der beiden nach außen in allen Richtungen ziehenden Wellenzüge in großen Entfernungen vom Anfangspunkte bestehen, wenn, gemäß den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten  $u$ ,  $v$ , die Wirkungen des Aufhörens der die Bewegung unterhaltenden Kraft einen besondern Abstand zu erreichen vermocht haben.

Es ist eine sehr interessante mathematische Aufgabe, auf die am Ende des § 44 hingewiesen ist, nämlich die Bewegung für die ganze zukünftige Zeit zu bestimmen, wenn die Masse  $m$  ohne jede wirkende Kraft gelassen

wird, nach irgendwelchen Anfangsbedingungen und mit einem beliebigen großen oder kleinen Betrage von  $m/Q$ .

§ 46. Wir gehen jetzt auf die Schwingungen in dem Betrage von  $1006\frac{1}{2}$  Perioden in der Sekunde zurück und behalten alle früheren Zahlen wie in § 43. Wir wenden uns zu (98) und beachten, daß, um  $E'/\tau A'$  sehr groß zu machen,  $s$  ein sehr kleiner Bruch sein muß, und daß sich daraus ergibt  $m/Q \approx s$ . Um einen Vibrator herzustellen, der sich im Resultat nicht sehr von der Violinsaite unterscheidet, auf die S. 149, 150 hingewiesen ist, sei  $m$  eine kleine Granitkugel von  $\frac{1}{2}$  cm Durchmesser. Dies ergibt  $m = Q/8000$  und demgemäß  $s = 1/8000$ . Damit folgt, auf Grund der Gleichung (98),  $E'/\tau A' = 1808001$ . Hieraus und aus dem, was wir über Wellenbewegung wissen, schließen wir, daß wenn die Masse  $m$  mit irgendeiner gegebenen Geschwindigkeit  $v$ , aus ihrer Gleichgewichtslage fortgetrieben wird, sie für alle Ewigkeit weiterschwingen wird mit einer Amplitude, die abnimmt nach der Formel

$$C e^{-\frac{t/\tau}{3616002}} \sin \frac{2\pi t}{\tau}. \quad (101)$$

So wird die Schwingungsweite der Masse  $m$  in 3616002 Perioden<sup>1)</sup> im Verhältnisse von  $e$  zu 1, (also annähernd  $2\frac{3}{4}$  zu 1) durch Abgabe ihrer Energie verkleinert, die durch zwei Arten von Wellen nach außen übergeführt wird, von denen, nach dem Werte von  $J$  in der Gleichung (97), die ohne Volumänderung verlaufenden zwölfmal soviel aufnehmen wie die ohne Drehung verlaufenden.

---

1) In einer Stunde.



## Fünfzehnte Vorlesung.

### Elastizitätskoeffizienten, Wellenverbreitung und Schwingungsrichtung, Theorie der Doppelbrechung.

#### a) Molekular.

Wenn wir uns wieder unserm Modell zuwenden (S. 147 ff.), werden wir in kurzer Zeit einen Zustand finden, der nicht sehr von einer einfachen harmonischen Bewegung verschieden ist, falls wir die Bewegung sehr allmählich steigern. Wir nehmen erst eine erregende Schwingung von kürzerer Periode als die kürzeste der natürlichen Perioden. Wir müssen dafür sorgen, daß der Vibrator mit einer gleichförmigen Weite schwingt. Sie übermäßig groß zu machen ist nicht nötig, sie muß hinreichend deutlich sein. Halten wir sie lange genug aufrecht, so sehen wir schließlich einen Schwingungszustand, bei dem jeder Stab sich in der Richtung bewegt, die derjenigen des ihm nächsten Stabes entgegengesetzt ist. Also wenn die erregende Periode kleiner ist als die kleinste der drei natürlichen Perioden, werden sich die aufeinander folgenden Stäbe zuletzt in entgegengesetzten Richtungen bewegen. Jetzt lassen wir eine Schwingung, deren Periode länger ist als die der größten Masse, sich über die einfach harmonische Bewegung lagern, auf die wir unser Augenmerk richten. Wir erreichen dieses, indem wir auf die Schwingung der obersten Partikel einen Widerstand ausüben. In Wirklichkeit wird diese Partikel bei dem geeigneten Stande der Dinge (das heißt, wenn die Bewegung eine durchaus einfach harmonische ist) alsdann eine äußerst kleine Bewegung besitzen, und sie wird sich, soweit sie sich überhaupt bewegt, in einer Richtung bewegen, die derjenigen der unmittelbar unter ihr befindlichen Partikel entgegengesetzt ist.<sup>1)</sup> Man kann diese Partikel auch ganz zur Ruhe bringen, wenn auch mit einiger Mühe. Alsdann bewegen sich  $m_2$  und  $m_1$  in entgegengesetzten Richtungen und davon die untere Masse  $m_1$  in der der Richtung des Erregers entgegengesetzten. So haben wir eine Schwingung, die kürzer ist als die kürzeste natürliche Bewegung. Jetzt richte ich sie so ein, daß sie mit der kürzesten dieser Perioden übereinstimmt, wir kommen so zum ersten „kritischen“ Zustand. Was ich jetzt tue, besteht darin, die Schwingung sehr allmählich zu steigern. Ich mache dabei mit dem System genau dasselbe, was beispielsweise mit der Natriummolekel geschieht, wenn Licht durch Natriumdampf geleitet wird. Wir können jedoch sicher sein, daß die Schwingungsenergie der Natriummolekel während des Durchganges von wenigstens zweihunderttausend Wellen durch das Mittel anwächst, während wir hier höchstens zwei Dutzend solcher Wellen aussondern, um die Schwingung in unserm Apparat anwachsen zu machen. Wir müssen aber die enorme Schwingung

1) Bei den unmittelbaren Vorführungen wirkte Prof. Mendenhall mit.

beachten, die wir jetzt vor uns haben, und dieser den Zustand der Dinge gegenüberstellen, den wir eben zuvor anschauten. Die oberste Partikel ist jetzt in Bewegung und führt eine Schwingung mit derselben Periode und in derselben Phase aus wie die unterste, allerdings mit einer vergleichsweise sehr geringen Schwingungsweite. Die zweite Partikel wird, ich fürchte, den Faden zerreißen. (Durch bifilare Aufhängung einer Uhr in der Weise, daß die Periode der bifilaren Aufhängung nahezu mit der der Unruhe übereinstimmt, würde man in ähnlicher Weise einen Zustand wilder Schwingung erhalten. Doch würde man bei Ausführung eines derartigen Versuches mit einer Uhr diese leicht verderben.) So in die Augen fallend ist dieser erste kritische Zustand gegenüber dem früheren Stande der Dinge, als die Periode des Erregers weit entfernt davon war, mit irgendeiner der Grundperioden übereinzustimmen.

Wir gehen jetzt zu unserm molaren Gegenstande, dem elastischen Festkörper zurück.

### b) Molar.

Nach Rankine verfährt man thlipsinomisch, wenn man die Deformationskomponenten durch die elastischen Zug-(Zwang-)Komponenten ausdrückt, dagegen tasinomisch, wenn man das Umgekehrte tut.

So sehen wir, wenn wir auf die elfte Vorlesung (S. 105) zurückgehen, in den sechs Gleichungen (1) 36 tasinomische Koeffizienten, die die sechs Deformationskomponenten als lineare Funktionen der sechs Zwangskomponenten darstellen, und wir finden vermöge der 15 Gleichungen zwischen den 36 Komponenten genau 21 unabhängige Werte, die berühmten 21 Koeffizienten von Green. Benutzen wir jetzt diese sechs Gleichungen zur Bestimmung der sechs Größen  $e, f, g, a, b, c$  durch  $P, Q, R, S, T, U$ , so haben wir

$$\left. \begin{aligned} e &= (PP)P + (PQ)Q + (PR)R + (PS)S + (PT)T + (PU)U, \\ f &= (QP)P + (QQ)Q + (QR)R + (QS)S + (QT)T + (QU)U, \\ g &= (RP)P + (RQ)Q + (RR)R + (RS)S + (RT)T + (RU)U, \\ a &= (SP)P + (SQ)Q + (SR)R + (SS)S + (ST)T + (SU)U, \\ b &= (TP)P + (TQ)Q + (TR)R + (TS)S + (TT)T + (TU)U, \\ c &= (UP)P + (UQ)Q + (UR)R + (US)S + (UT)U + (UU)U, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wo mit  $(PP)$ ,  $(PQ)$  usw. algebraische Funktionen der Koeffizienten (11), (12), (22) usw. bezeichnet sind, die durch Elimination gefunden werden. Dieses Verfahren ergibt vermöge der 15 Gleichungen  $(12) = (21)$  usw.  $(PQ) = (QP)$  usw. im ganzen 15 Beziehungen. Die sich ergebenden 21 unabhängigen Koeffizienten  $(PP)$ ,  $(PQ)$  usw. bilden das, was Rankine die thlipsinomischen Koeffizienten nennt. Nehmen wir nun aus der zweiten Vorlesung S. 16

$$E = \frac{1}{2} (Pe + Qf + Rg + Sa + Tb + Uc) \quad (2)$$

und eliminieren aus dieser Formel mittels der Gleichungen (1) der elften Vorlesung (S. 105) die Größen  $P, Q, R$ , so finden wir die tasinomische quadratische Funktion für die Energie, die wir in der zweiten Vorlesung (S. 16) kennen gelernt haben. Eliminiert man dagegen mittels unserer vorliegenden

sechs Gleichungen aus dieser Energiegleichung die Größen  $e, f, g, a, b, c$ , so ergibt sich die entsprechende thlipsinomische Formel für die Energie mit den 21 unabhängigen Koeffizienten  $(PP), (PQ)$  usw.<sup>1)</sup> In gewissem Sinne können diese Koeffizienten, die tasinomischen sowohl als die thlipsinomischen, Elastizitätsmoduln genannt werden, insofern als jede von ihnen ein bestimmtes numerisches Maß einer bestimmten elastischen Eigenschaft ist. Ich habe jedoch im besonderen, indem ich der Analogie des Youngschen Moduls gefolgt bin, einen Modul definiert als einen Zwang geteilt durch eine Deformation. Wenn wir bei dieser Definition bleiben, sind die tasinomischen Koeffizienten die eigentlichen Moduln, dagegen die thlipsinomischen Koeffizienten reziproke Moduln.

Die Behandlung der Frage nach der Kompressibilität oder Inkompressibilität ist thlipsinomisch einfacher als unsere tasinomische Behandlung desselben Gegenstandes. Nämlich es ist, wenn die Ausdehnung  $e + f + g$  mit  $\delta$  bezeichnet wird,

$$\begin{aligned} \delta = & [(PP) + (QP) + (RP)] P + [(PQ) + (QQ) + (RQ)] Q \\ & + [(PR) + (QR) + (RR)] R + [(PS) + (QS) + (RS)] S \\ & + [(PT) + (QT) + (RT)] T + [(PU) + (QU) + (RU)] U. \end{aligned} \quad (3)$$

Wenn  $P$  der einzige Zug ist, wird hiernach eine Ausdehnung  $[(PP) + (QP) + (RP)] P$  hervorgerufen; und ebenso wird, wenn  $S$  der alleinige Zug ist, eine Ausdehnung  $[(PS) + (QS) + (RS)] S$  veranlaßt. Wir sehen sonach, daß  $S$ , eine Art Zug, der in einem isotropen Festkörper nur eine Drilling hervorrufen würde, in einem äolotropen Festkörper auch Verdichtung oder Verdünnung bewirken kann. Die Koeffizienten von  $P, Q, R, S, T, U$  in unserer Gleichung für  $\delta$  mögen als Kompressibilitäten bezeichnet werden. Ihre reziproken Werte sind (gemäß meiner Definition eines Moduln) Moduln der Kompressibilität. In einem isotropen Festkörper verschwindet jeder von den letzten drei Koeffizienten in  $\delta$ ; und der reziproke Wert eines jeden der drei andern ist das Dreifache dessen, was ich (Zweite Vorlesung S. 18) mit  $k$  bezeichnet und den Kompressibilitätsmodul oder Raummodul genannt habe, nämlich  $P/\delta$ , wenn  $P$  einen in allen Richtungen gleichen Antrieb oder negativen Druck bedeutet.

Ein äolotroper Festkörper ist inkompressibel, wenn, und kompressibel, wenn nicht jeder der sechs Koeffizienten in unserm Ausdrucke für  $\delta$  verschwindet. Das heißt: es ist für die Inkompressibilität notwendig und hinreichend, daß ist

$$\left. \begin{aligned} (PP) + (QP) + (RP) &= 0, \\ (PQ) + (QQ) + (RQ) &= 0, \\ (PR) + (QR) + (RR) &= 0, \\ (PS) + (QS) + (RS) &= 0, \\ (PT) + (QT) + (RT) &= 0, \\ (PU) + (QU) + (RU) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

So sehen wir, daß sechs Gleichungen zwischen den Koeffizienten aus-

1) Vgl. Thomson und Tait § 673, (12) — (20).

reichen, festzulegen, daß keine Verdichtungs-Verdünnungswellen auftreten können, oder was dasselbe ist, daß in jeder ebenen Welle die Schwingung streng in der Ebene der Wellenfläche liegt; und demgemäß irrt Green, wenn er, indem er sich beschränken will „auf die Betrachtung allein der Medien, in denen die Richtungen der transversalen Schwingungen stets genau in der Wellenfläche liegen“, sagt<sup>1)</sup>: „Dieses Grundprinzip der Theorie von Fresnel liefert 14 Beziehungen zwischen den 21 ursprünglich in unserer Funktion vorkommenden Konstanten.“ Was Green in Wirklichkeit gefunden und bewiesen hat, waren 14 Gleichungen, die feststellen und auch notwendig sind festzustellen, daß es ebene Wellen geben kann, deren Schwingungen genau in der Wellenebene liegen, während zugleich Verdichtungs-Verdünnungswellen in dem Medium bestehen können. Was wir jetzt gefunden haben, ist, daß nicht 14, sondern schon 6 Gleichungen ausreichen, die Inkompressibilität zu sichern und zu bewirken, daß die Richtung der Schwingung in jeder ebenen Welle genau in der Wellenebene liege.

7. März 1899. — Ich habe erst heute eine interessante und lehrreiche Art für die Weiterbehandlung dieser sechs Gleichungen der Inkompressibilität gefunden, die in der Baltimore-Vorlesung am 14. Oktober 1884 mitgeteilt sind. Indem wir mit Hilfe der ersten drei von diesen Gleichungen ( $PP$ ), ( $QQ$ ), ( $RR$ ) und mit Hilfe der andern drei ( $PS$ ), ( $QT$ ), ( $RU$ ) aus der Energiegleichung eliminieren, finden wir

$$\begin{aligned} 2E = & -[(QR)(Q-R)^2 + (RP)(R-P)^2 + (PQ)(P-Q)^2] \\ & + 2\{[(QU)U - (RT)T](Q-R) + [(RS)S - (PU)U](R-P) \\ & \quad + [(PT)T - (QS)S](P-Q)\} \\ & + (SS)S^2 + (TT)T^2 + (UU)U^2 \\ & + 2[(TV)TU + (US)US + (ST)ST]. \end{aligned} \quad (5)$$

In diesem Ausdrucke kommen die Größen  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  nur in ihren Differenzen vor, woraus das interessante Ergebnis für das mechanische Gesetz folgt, daß diese Größen nichts zur potentiellen Energie beitragen, wenn sie alle einander gleich sind, also wenn  $P = Q = R$  ist.

Die drei Differenzen  $Q - R$ ,  $R - P$ ,  $P - Q$  sind nur zwei unabhängigen Veränderlichen äquivalent; denn wenn wir  $P - Q = V$  und  $P - R = W$  setzen, ist  $Q - R = W - V$ , und der Ausdruck für  $E$  wird so eine homogene quadratische Funktion der fünf unabhängigen Größen,  $V$ ,  $W$ ,  $S$ ,  $T$ ,  $U$  mit 15 unabhängigen Koeffizienten; wir können sie, wie folgt, schreiben:

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2} \{ & (VV)V^2 + (WW)W^2 + (SS)S^2 + (TT)T^2 + (UU)U^2 \} \\ & + (VW)VW + (VS)VS + (VT)VT + (VU)VU \\ & + (WS)WS + (WT)WT + (WU)WU \\ & + (ST)ST + (SU)SU + (TU)TU \end{aligned} \quad (6)$$

Die Differentialkoeffizienten dieser Größe nach  $S$ ,  $T$ ,  $U$  sind schließlich, wie früher,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Bezeichnen wir noch mit  $h$  und  $i$  ihre Differentialkoeffizienten nach  $V$  und  $W$ , so finden wir

1) Green, Collected Papers, S. 293.

$$\left. \begin{aligned} h &= (VV) V + (VW) W + (VS) S + (VT) T + (VU) U, \\ i &= (WV) V + (WW) W + (WS) S + (WT) T + (WU) U, \\ a &= (SV) V + (SW) W + (SS) S + (ST) T + (SU) U, \\ b &= (TV) V + (TW) W + (TS) S + (TT) T + (TU) U, \\ c &= (UV) V + (UW) W + (US) S + (UT) T + (UU) U; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

und wir erhalten

$$E = \frac{1}{2} (hV + iW + aS + bT + cU). \quad (8)$$

Die mechanische Deutung zeigt, daß  $h$  darstellen muß  $-f$  und  $i$  darstellen muß  $-g$ , wenn  $V$  und  $W$  darstellen  $P-Q$  und  $P-R$ .

Löst man die fünf linearen Gleichungen (7) nach  $V, W, S, T, U$  auf, so findet man die tasinomischen Ausdrücke für die fünf Zugkomponenten, dargestellt durch die fünf Deformationskomponenten, die wir in folgender Weise schreiben können:

$$\left. \begin{aligned} V &= (hh) h + (hi) i + (ha) a + (hb) b + (hc) c, \\ W &= (ih) h + (ii) i + (ia) a + (ib) b + (ic) c, \\ S &= (ah) h + (ai) i + (aa) a + (ab) b + (ac) c, \\ T &= (bh) h + (bi) i + (ba) a + (bb) b + (bc) c, \\ U &= (ch) h + (ci) i + (ca) a + (cb) b + (cc) c. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Das algebraische Verfahren zeigt uns, daß ist

$$(hi) = (ih); \quad (ha) = (ah) \text{ usw.}, \quad (10)$$

so daß wir jetzt die 15 unabhängigen tasinomischen Koeffizienten aus den 15 thlipsinomischen gefunden haben. Indem man schließlich mit Hilfe der Gleichungen (9) die Größen  $V, W, S, T, U$  aus (8) eliminiert, findet man den tasinomischen quadratischen Ausdruck für die Energie]

Wie ich es in der ersten Vorlesung ausgesprochen habe, besteht eine tatsächlich nicht zu überwindende Schwierigkeit. In der Wellentheorie des Lichtes sollte die Geschwindigkeit der Welle von der Drillungsebene abhängen. Wenn Sie die Einzelheiten der Bewegung in der Wellenfläche,<sup>1)</sup> wie sie für einen inkompressibeln äolotropen elastischen Festkörper behandelt sind, mit Eigenschaften der Koeffizienten, die hinreichen, jede Schräge zu vernichten, vergleichen, so werden Sie finden, daß hiernach die Wellenfläche genau mit Fresnels Wellenfläche übereinstimmt; nur daß wir statt der Richtung der Schwingungslinie der Partikel, wie in der Konstruktion von Fresnel, die Normale zur Drillungsebene als die Richtung haben, von welcher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit abhängt.

Ich sehe keinen Weg, die Schwierigkeit zu überwinden, die darin besteht, daß die rückwirkenden Kräfte in einem elastischen Festkörper — die Kräfte, die die Schwingung bestimmen — von der Deformation abhängen, die der Festkörper erleidet, und von dieser allein. Ich habe mich nie befriedigt gefunden von dem geistreichen Verfahren, mittels dessen Green darüber hinweggeht. Stokes sagt in seinem Bericht über die Doppelbrechung

1) Zwölfte Vorlesung S. 109 f.; Dreizehnte Vorlesung S. 139.

S. 265 (British Association 1862): „In seiner Abhandlung über Brechung hat Green die Hypothese von Fresnel, nach der die Schwingungen senkrecht zur Polarisationssebene verlaufen, adoptiert. Er wurde naturgemäß dazu geführt, zu prüfen, ob die Gesetze der Doppelbrechung auf Grund dieser Annahme erklärt werden können. Wenn das Medium in seinem ungestörten Zustande einem Drucke ausgesetzt wird, der in verschiedenen Richtungen verschieden ist, werden in die Funktion  $\Phi$  sechs zusätzliche Konstanten eingeführt, oder auch drei für den Fall des Vorhandenseins einer Symmetrieebene, auf die das Medium bezogen werden kann. Für Wellen, die senkrecht zu den Hauptachsen verlaufen, sind die Schwingungsrichtungen und die quadrierten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten die folgenden:

Welle senkrecht zu		$x$	$y$	$z$
Schwingungsrichtung	$x$	$G + A$	$N + B$	$M + C$
	$y$	$N + A$	$H + B$	$L + C$
	$z$	$M + A$	$L + B$	$J + C$

Green nimmt in Übereinstimmung mit der Theorie von Fresnel und mit der Beobachtung (falls man voraussetzt, daß die Schwingungen im polarisierten Lichte senkrecht zur Polarisationssebene geschehen) an, daß für alle Wellen, die senkrecht zu zwei beliebigen von den Hauptachsen verlaufen und durch Schwingungen in Richtung der dritten Achse fortgepflanzt werden, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieselbe ist.“

Wir wollen zusehen, was dieser Satz meint, ehe wir untersuchen, ob er, wie Green voraussetzt, durch die Einführung eines „äußeren Druckes“

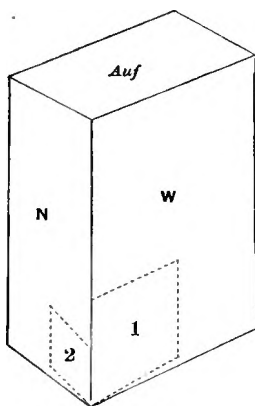


Fig. 52.

bewiesen werden kann. Wir fassen Wellen ins Auge, die ihre Vorderflächen parallel zu den Seiten  $N$  und  $W$  (Nord und West) dieser bestehend, Fig. 52, dargestellten Büchse haben. Die Seiten sollen zu zwei von den drei Hauptachsen des Kristalls senkrecht sein, die Schwingungen demnach in Richtung der dritten Achse (auf und ab) verlaufen. Wir stellen uns zunächst die Welle vor, die sich nach Süden ausbreitet, die Wellenebene ist  $N$ . Die auf- und abwärts gerichtete Bewegung unter Festhalten von  $N$  ergibt eine Zerrung ähnlich der mit 1 bezeichneten, bei der aus einem Quadrat ein Rhombus wird. Dies stellt eine Deformation im Festkörper dar, der dem ersten Zustande der Bewegung entspricht. In ähnlicher Weise veranlaßt eine in östlicher Richtung fortschreitende Welle eine Zerrung der Art, wie sie mit 2 bezeichnet

ist, indem auch jetzt die Schwingung als nach oben gerichtet gedacht ist. Die Annahme besteht nun darin, daß die eine von diesen Wellenreihen mit derselben Geschwindigkeit fortgepflanzt wird wie die andere. Das heißt, die Wellen, die ihre Zerrung in dieser Westebene haben, besitzen dieselbe Ge-

schwindigkeit wie die Wellen, die ihre Zerrung in dieser Nordebene besitzen. Das Wesen unseres elastischen Festkörpers besteht aber darin, daß er drei verschiedene Starrheiten besitzt, eine für Zerrung in dieser Ebene  $W$ , eine für Zerrung in dieser Ebene  $N$  und eine für Zerrung in der letzten Hauptebene (der Horizontalebene unserer Büchse). Und die ungereimte Annahme besagt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nicht von den Ebenen der zerrenden Deformation, sondern einfach und allein von der Schwingungsrichtung abhängen sollen.

Die Einführung dessen, was er „äußeren“ Druck nennt, seitens Greens, die ihm drei andere Koeffizienten liefert, ist mir immer als von zweifelhafter Stichhaltigkeit erschienen. In der kleinen, Stokes entlehnten Tabelle sind  $L$ ,  $M$ ,  $N$  die drei Hauptstarrheiten, (44), (55), (66) unserer Bezeichnung.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sind die Wirkungen dieses äußeren Druckes. Die Tabelle gibt die quadrierten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bei Wellen verschiedener Wellennormalen mit Schwingungsrichtungen längs den Achsen. Aus der Annahme von Green folgt für Schwingungen in der  $x$ -Richtung  $N + B = M + C$ , was zusammen mit den beiden entsprechenden Gleichungen für Schwingungen in den Richtungen  $y$ ,  $z$  ergibt

$$A - L = B - M = C - N.$$

[7. März 1899 Zusatz. Über Cauchys und Greens Lehre von einer äußeren Kraft zur mechanischen Erklärung der Kinematik der Doppelbrechung von Fresnel.<sup>1)</sup>

§ 1. Die mechanische Theorie der Polarisation durch Spiegelung von Green, die mechanische Theorie der Brechung des polarisierten Lichtes von Stokes und die Theorie der Himmelsbläue von Stokes und Rayleigh, alle diese Theorien stimmen darin überein, daß sie, wie mir scheint, unumstößlich den von Anfang an von Fresnel gezogenen Schluß beweisen, wonach in planpolarisiertem Lichte die Schwingungslinie senkrecht zur Polarisationssebene ist; dabei gilt als „Polarisationssebene“ die Ebene, die durch den Strahl geht und senkrecht zur spiegelnden Fläche verläuft, wenn das Licht durch Spiegelung polarisiert ist.

§ 2. Wenn polarisiertes Licht durch einen Kristall hindurch fortgepflanzt wird, und wenn Strahlen in jeder der Hauptebenen untersucht werden, findet man:

(1) Ein Strahl, dessen Polarisationssebene in der Hauptebene liegt, bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit, welches auch seine Richtung sei (daher wird er als „ordentlicher Strahl“ für diese Hauptebene bezeichnet); und (2) Ein Strahl, dessen Polarisationssebene senkrecht zur Hauptebene ist, — er wird als „außerordentlicher Strahl“ dieser Ebene bezeichnet — pflanzt sich mit einer Geschwindigkeit fort, die für verschiedene Richtungen verschieden ist und den größten und kleinsten Wert in zwei zueinander senkrechten Richtungen des Strahles hat.

§ 3. Hiernach und nach § 1 sind die Geschwindigkeiten aller Strahlen, deren Schwingungen senkrecht zu einer Hauptebene verlaufen, dieselben; dagegen sind die Geschwindigkeiten von Strahlen in einer Hauptebene, deren

<sup>1)</sup> Wieder abgedruckt, mit Ergänzungen, aus Proc. R. S. E. Vol. XV 1887, S. 21 und Phil. Mag. Vol. XXV, 1888, S. 116.

Schwingungsrichtungen in derselben Hauptebene liegen, je nach der Richtung des Strahles verschieden und haben ihren größten und kleinsten Wert in Richtungen des Strahles, die zueinander senkrecht stehen. Aber in der laminaren zerrenden oder drillenden Bewegung, in der die Wellenbewegung des Lichtes besteht, ist die „Schiebungsebene“<sup>1)</sup> (oder die „Drillungsebene“, wie sie manche nennen) die Ebene durch die Richtung des Strahles und die Richtung der Schwingung; und demgemäß sollte es der ordentliche Strahl sein, der seine Schwingungslinie in der Hauptebene hat, falls die Verschiedenheit des Äthers in verschiedenen Richtungen bloß in einer Äolotropie gleich der eines undeformierten elastischen Festkörpers besteht.<sup>2)</sup> Folglich muß der Äther in einem Kristall eine Eigenschaft besitzen, die ihrem Wesen nach verschieden ist von einer bloß innerlichen solchen Äolotropie; eine Eigenschaft, die den beiden Strahlen, von denen bei dem einen die Schwingungslinie und Fortpflanzungsrichtung bezüglich mit der Fortpflanzungsrichtung und der Schwingungslinie des andern zusammenfällt, verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten erteilt.

§ 4. Die Schwierigkeit, sich vorzustellen, worin diese Eigenschaft bestehen möge, und die vollständige Unmöglichkeit der Mechanik, die Doppelbrechung ohne sie zu erklären, wurden allgemein als die größte Unvollkommenheit der Theorie der Optik empfunden.

Es ist allerdings richtig, daß seit 1839 ein Vorschlag für diese Erklärung stets der Welt vorgelegen hat; sie war unabhängig von Cauchy und von Green gegeben in dem, was Stokes ihre „zweiten Theorien der Doppelbrechung“ genannt hat, die am gleichen Tage, dem 20. Mai des bezeichneten Jahres, der Französischen Akademie der Wissenschaften und der Philosophical Society Cambridge eingereicht wurde. Stokes hat in seinem Berichte über die Doppelbrechung<sup>3)</sup> eine vollkommen klare Auseinandersetzung dieser Erklärung geliefert. Sie wurde anderweitig nur wenig beachtet und wurde nicht allgemein annehmbar gefunden; vielleicht weil ein gewisser Schein von Künstlichkeit und Willkürlichkeit der Hypothese ihr das Vertrauen entzogen hat. Was aber auch der Grund oder die Gründe dafür gewesen sein mögen, aus denen man nicht auf sie eingegangen ist, und obwohl sie zweifellos unrichtig ist, sowohl wie sie Cauchy als auch wie sie Green gegeben hat, so enthält sie doch das, was meines Erachtens das wahre Prinzip der Erklärung ist, nämlich, daß der Äther in einem doppelbrechenden Kristall ein elastischer Festkörper ist, der in verschiedenen Richtungen von der unbewegten, ponderablen Materie ungleichmäßig gedrückt oder ungleichmäßig gezogen wird.

§ 5. Die Arbeit Cauchys über die Wellentheorie des Lichtes ist ganz und gar verwickelt und bis zu einem gewissen Grade unrichtig durch die

1) Thomson und Tait, Theoretische Physik, § 171 (oder Elements, § 150).

2) Die elementare mechanische Theorie elastischer Festkörper zeigt, daß bei dieser Annahme wohl eine größte und kleinste Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Strahlen in Richtungen vorhanden sein könnte, die einen Winkel von  $45^\circ$  miteinander bilden, daß aber die Geschwindigkeiten ihrem Wesen nach einander gleich sein müßten für irgend zwei Richtungen, die gegeneinander unter  $90^\circ$  geneigt sind, in der Hauptebene, wenn die Schwingungslinie in dieser Ebene liegt.

3) British Association Report, 1862.



Einführung der falschen Lehre<sup>1)</sup> von Navier-Poisson, nach der die Kompressibilität auf theoretischem Wege aus der Starrheit berechnet werden kann; eine Lehre, die Green mit Recht und zweckmäßig beiseite schiebt, indem er einfach Inkompressibilität voraussetzt. In anderer Hinsicht sind „die zweiten Theorien der Doppelbrechung“, wie sie Stokes nennt, von Cauchy und von Green fast identisch. Beide nehmen an, daß der Äther im Kristall ein seiner Natur nach innerlich äolotropischer elastischer Festkörper ist, dessen Äolotropie durch inneren Druck oder Zug verändert wird, der in verschiedenen Richtungen gleich oder ungleich ist und durch eine (mit bezug auf den Äther) äußere Kraft hervorgerufen und im Gleichgewicht gehalten wird. Beide Theorien sind darum verfehlt, weil sie die inneren Starrheitsmoduln (Koeffizienten) durch den Gleichgewichtsdruck unbeeinflusst lassen und drei neue Glieder einführen mit Koeffizienten ( $A, B, C$  in der Bezeichnung von Green), die die ganze Wirkung des Gleichgewichtsdruckes darstellen sollen. Dies liefert für den Fall eines seiner Natur nach isotropen Festkörpers eine scheinbare Vergrößerung der Starrheit und demnach auch der Wellengeschwindigkeit durch willkürlich angewendeten gleichen Zug<sup>2)</sup> in allen Richtungen und eine Verminderung durch willkürlich angewendeten gleichen positiven Druck in allen Richtungen, was offenbar falsch ist. So würde schließlich ein nach allen Richtungen auswärts senkrecht zur Grenzfläche gerichteter, für die Flächeneinheit dem Dreifachen des eigenen Starrheitsmoduls gleicher Zug eine scheinbar vierfache Starrheit und demgemäß eine doppelte Wellengeschwindigkeit ergeben. Positiver, normaler, nach innen gerichteter, dem eigenen Starrheitsmodul gleicher Druck müßte die Starrheit und die Wellengeschwindigkeit zum Verschwinden bringen — d. h. aus dem Festkörper eine Flüssigkeit machen. Und andererseits würde negativer Druck oder auswärts gerichteter Zug auf eine inkompressible Flüssigkeit ihr eine scheinbare Starrheit verleihen und sie in den Stand setzen, Transversalwellen fortzuführen. Es ist aber offenbar, daß abstrakte Mechanik, für nach allen Richtungen gleichen Druck oder Zug, keine Wirkung auf irgendeine physikalische Eigenschaft eines inkompressibeln festen oder flüssigen Körpers nachweisen kann.

§ 6. Weiter würde ein in verschiedenen Richtungen ungleicher Zug oder Druck auf einen isotropen inkompressibeln Festkörper nach der Formel (A) von Green auf S. 303 seiner gesammelten Mathematical Papers bewirken, daß die Geschwindigkeit einer ebenen Welle einfach von der Wellenfront abhängt, und ihre Maximum-, Minimimum- und Minimum-Werte für Wellenfronten hat, die senkrecht sind zu den Richtungen des größten Zuges, des mittleren und des kleinsten Zuges. Aus ihrer Wellenfläche würde ein einfaches Ellipsoid werden. Dies alles würde auch für den Fall eines in verschiedenen Richtungen ungleichmäßig gedehnten Nebels genau

1) Vgl. Stokes, „On the Friction of Fluids in Motion and on the Equilibrium and Motion of Elastic Solids“, Camb. Phil. Trans. 1845, §§ 19, 20; abgedruckt in Stokes' Mathematical and Physical Papers, Vol. I, S. 123; oder Thomson und Tait, Theoretische Physik, §§ 684, 685; oder Elements, §§ 655, 656.

2) So wenig ist für die Deutung der Formeln der beiden Forscher geschehen, daß bis jetzt noch nicht bemerkt worden ist, daß positive Werte der Cauchyschen Koeffizienten  $G, H, J$  oder der von Green eingeführten  $A, B, C$  Züge bezeichnen und negative Werte Drucke.

richtig sein, und es erschien mir als ein sehr interessantes und wichtiges Resultat, bis ich fand (wie § 19 unten gezeigt ist), daß es eben nicht richtig ist.

§ 7. Um die Zwangstheorie der Doppelbrechung ganz zu verstehen, wird es für uns nützlich sein (wie es offenbar in der abstrakten Mechanik geschehen muß), die Aufgabe des § 6 direkt und vollständig durchzuarbeiten; wir sprechen sie folgendermaßen aus: Wir setzen voraus, auf einen Festkörper, der, wenn auf ihn kein Zwang wirkt, isotrop ist, werde durch einen auf seine Grenzfläche wirkenden Druck ein Zwang so ausgeübt, daß in seinem Innenraume eine homogene Deformation mit folgender Bestimmung herrscht:

Die Koordinaten eines beliebigen Punktes  $M$  der Masse, die ohne Zwang  $\xi, \eta, \zeta$  sind, gehen vermöge der Deformation über in

$$\xi\sqrt{\alpha}, \eta\sqrt{\beta}, \zeta\sqrt{\gamma}; \quad (1)$$

$\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \sqrt{\gamma}$ , oder die „Hauptelongationen“<sup>1)</sup> sollen dabei dieselben sein, welchen Punkt  $M$  des Festkörpers man auch wählen mag. Infolge der Inkompressibilität ist

$$\alpha\beta\gamma = 1. \quad (2)$$

Der Kürze wegen wollen wir den so bestimmten Deformationszustand mit  $(\alpha, \beta, \gamma)$  bezeichnen.

§ 8. Als eine rein kinematische Vorarbeit mag gefordert werden, die Beträge der Hauptdeformationen zu finden, wenn der bereits gemäß (1), (2) im Deformationszustande befindliche Körper noch eine Verschiebung erleidet durch eine Schubkraft  $\sigma$ , die in folgender Weise bestimmt sei: Die Koordinaten  $x, y, z$  des nämlichen Teilchens  $M$  seien ausgedrückt durch

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi\sqrt{\alpha} + \sigma pl \\ y &= \eta\sqrt{\beta} + \sigma pm \\ z &= \zeta\sqrt{\gamma} + \sigma pn \end{aligned} \right\}; \quad (3)$$

wo

$$p = OP = \lambda\xi\sqrt{\alpha} + \mu\eta\sqrt{\beta} + \nu\zeta\sqrt{\gamma}; \quad (4)$$

und

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1; \quad (5)$$

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0 \quad (6)$$

ist. Hier bezeichnen  $\lambda, \mu, \nu$  die Richtungskosinus von  $OP$ , der Normale der Schiebungsebene, und  $l, m, n$  die Richtungskosinus der zerrenden Verschiebungen. Die Hauptachsen der resultierenden Deformationen sind die Richtungen von  $OM$ , in denen diese Länge ihren größten oder kleinsten Wert hat, der der Bedingung unterworfen ist

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1; \quad (7)$$

und ihre größten, mittleren und kleinsten Beträge sind die drei gesuchten Beträge der Deformation. Nun ist

1) Vgl. Kap. IV der „Mathematical Theory of Elasticity“ (W. Thomson), Trans. Roy. Soc. Lond. 1856, wiederabgedruckt in Vol. III der Mathematical and Physical Papers, oder Thomson und Tait, Theoretische Physik, §§ 160, 164, oder Elements, §§ 141, 158.

$$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 \alpha + \eta^2 \beta + \zeta^2 \gamma + 2\sigma(l\xi\sqrt{\alpha} + m\eta\sqrt{\beta} + n\zeta\sqrt{\gamma})p + \sigma^2 p^3; \quad (8)$$

und damit diese Größe ein der Gleichung (7) genügendes Maximum oder Minimum wird, muß sein

$$\frac{\partial(\frac{1}{2}OM^2)}{\partial\xi} = q\xi; \quad \frac{\partial(\frac{1}{2}OM^2)}{\partial\eta} = q\eta; \quad \frac{\partial(\frac{1}{2}OM^2)}{\partial\zeta} = q\zeta. \quad (9)$$

Hier ist vermöge der Gleichung (7) und da  $OM^2$  eine homogene quadratische Funktion von  $\xi, \eta, \zeta$  ist<sup>1)</sup>

$$q = OM^2. \quad (10')$$

Die kubische Determinanten-Gleichung der Beziehungen unter (9), nämlich

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A} - q)(\mathfrak{B} - q)(\mathfrak{C} - q) - a^2(\mathfrak{A} - q) - b^2(\mathfrak{B} - q) \\ - c^2(\mathfrak{C} - q) + 2abc = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

wo gesetzt ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = \alpha(1 + 2\sigma l\lambda + \sigma^2 \lambda^2); \quad \mathfrak{B} = \beta(1 + 2\sigma m\mu + \sigma^2 \mu^2); \\ \mathfrak{C} = \gamma(1 + 2\sigma n\nu + \sigma^2 \nu^2) \end{aligned} \quad (11)$$

und

$$\begin{aligned} a = \sqrt{(\beta\gamma)}[\sigma(m\nu + n\mu) + \sigma^2 \mu\nu]; \quad b = \sqrt{(\gamma\alpha)}[\sigma(n\lambda + l\nu) + \sigma^2 \nu\lambda]; \\ c = \sqrt{\alpha\beta}[\sigma(l\mu + m\lambda) + \sigma^2 \lambda\mu] \end{aligned} \quad (12)$$

liefert drei positive reelle Werte für  $q$ , deren Quadratwurzeln zufolge (10') die gesuchten Beträge der Hauptdeformationen sind.

§ 9. Wir treten jetzt in die Mechanik unseres Gegenstandes ein und beachten, daß die Isotropie (§ 1) bedingt, daß die Arbeit des äußeren Druckes, die erforderlich ist, den Festkörper aus dem undeformierten Zustande (1, 1, 1) in den Deformationszustand  $(\alpha, \beta, \gamma)$  überzuführen, von der Richtung der Normalachsen der Deformation unabhängig ist und allein von den Größen  $\alpha, \beta, \gamma$  abhängt. Wenn demnach ihre Größe für die Einheit des Volumens, als potentielle Energie im Zustande  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , gerechnet von Null im Zustande (1, 1, 1), mit  $E$  bezeichnet und gesetzt wird,

$$E = \psi(\alpha, \beta, \gamma), \quad (13)$$

muß  $\psi$  eine Funktion sein, deren Betrag unverändert bleibt, so oft die Werte von  $\alpha, \beta, \gamma$  untereinander vertauscht werden. Fassen wir einen Teil des Festkörpers ins Auge, der im deformationslosen Zustande einen Würfel mit der Längeneinheit als Kante bildet, und der im Deformationszustande  $(\alpha, \beta, \gamma)$  ein rechtwinkliges Parallelepiped  $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \sqrt{\gamma}$  ist, so sehen wir vermöge der Isotropie und Symmetrie, daß der Zug oder Druck auf jede der sechs Seitenflächen dieses Körpers, der erforderlich ist, um die Substanz in dem Zustande  $(\alpha, \beta, \gamma)$  zu erhalten, normal zu dieser Fläche wirkt. Sind die Beträge dieser Kräfte für die Flächeneinheit, die auf die drei Flächenpaare wirken, jede als

1) Nach dem Eulerschen Satz. Die Gleichungen (9) und (7) geben nämlich

$$q = \left( \xi \frac{\partial(\frac{1}{2}MO^2)}{\partial\xi} + \eta \frac{\partial(\frac{1}{2}MO^2)}{\partial\eta} + \zeta \frac{\partial(\frac{1}{2}MO^2)}{\partial\zeta} \right). \quad \text{D. H.}$$

positiv oder negativ gerechnet, je nachdem die Kraft ein positiver Zug oder ein positiver Druck ist, bzw.  $A, B, C$ , so müssen wir setzen

$$A + B + C = 0; \quad (14)$$

denn ein in allen Richtungen gleichmäßiger Zug oder Druck ruft keine Wirkung hervor, da der Festkörper ja inkompressibel ist. Die bei jeder unendlich kleinen Änderung aus dem Zustande  $(\alpha, \beta, \gamma)$  geleistete Arbeit wird aber (zufolge (1))

$$\left. \begin{aligned} W' &= A\sqrt{(\beta\gamma)}d(\sqrt{\alpha}) + B\sqrt{(\gamma\alpha)}d(\sqrt{\beta}) + C\sqrt{(\alpha\beta)}d(\sqrt{\gamma}), \\ \text{oder (wegen } \alpha\beta\gamma &= 1) \text{ Gleichung (2)} \\ W' &= \frac{A}{2\alpha}d\alpha + \frac{B}{2\beta}d\beta + \frac{C}{2\gamma}d\gamma \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

§ 10. Es seien  $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$  irgendwelche Variationen von  $\alpha, \beta, \gamma$ , die mit (2) verträglich sind, so daß ist

$$\left. \begin{aligned} (\alpha + \delta\alpha)(\beta + \delta\beta)(\gamma + \delta\gamma) &= 1 \\ \alpha\beta\gamma &= 1 \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

Setzen wir jetzt  $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$  so klein voraus, daß wir die dritten Potenzen und die entsprechenden Produkte sowie alle höheren Produkte vernachlässigen dürfen, so wird

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha} + \frac{\delta\beta}{\beta} + \frac{\delta\gamma}{\gamma} + \alpha\delta\beta\delta\gamma + \beta\delta\gamma\delta\alpha + \gamma\delta\alpha\delta\beta = 0. \quad (17)$$

Also folgt<sup>1)</sup>

$$\left(\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\delta\beta}{\beta} + \frac{\delta\gamma}{\gamma}\right)^2, \quad (17')$$

und hieraus und aus den symmetrischen Ausdrücken erhält man nach (2)

$$\left. \begin{aligned} 2\delta\beta\delta\gamma &= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\delta\alpha^2}{\alpha^2} - \frac{\delta\beta^2}{\beta^2} - \frac{\delta\gamma^2}{\gamma^2} \right); \\ 2\delta\gamma\delta\alpha &= \frac{1}{\beta} \left( \frac{\delta\beta^2}{\beta^2} - \frac{\delta\gamma^2}{\gamma^2} - \frac{\delta\alpha^2}{\alpha^2} \right); \\ 2\delta\alpha\delta\beta &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\delta\gamma^2}{\gamma^2} - \frac{\delta\alpha^2}{\alpha^2} - \frac{\delta\beta^2}{\beta^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

§ 11. Wenn jetzt mit  $E + \delta E$  die Energie für die Masseneinheit des Festkörpers bei dem Zustande

$$(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta, \gamma + \delta\gamma)$$

bezeichnet wird, ist nach dem Taylorschen Satze

$$\delta E = H_1 + H_2 + H_3 + \text{usw.},$$

wo mit  $H_1, H_2$  usw. homogene Funktionen von  $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$  vom ersten, zweiten usw. Grade bezeichnet sind. Läßt man die dritten Potenzen usw. fort,

1) Die Gleichung (17') ergibt sich auch unmittelbar aus  $\delta(\alpha\beta\gamma) = 0$ .  
D. H.

eliminiert die Produkte aus  $H_2$  mit den Gleichungen (18) und benutzt für  $H_1$  den Wert  $W'$  aus (15), so findet man

$$\delta E = \frac{1}{2} \left( A \delta \alpha + B \delta \beta + C \delta \gamma + G \frac{\delta \alpha^2}{\alpha^2} + H \frac{\delta \beta^2}{\beta^2} + J \frac{\delta \gamma^2}{\gamma^2} \right), \quad (19)$$

wo mit  $G, H, J$  drei Koeffizienten bezeichnet sind, die von der Natur der die Energie darstellenden Funktion  $\psi$  abhängen. So haben wir in (19) mit Rücksicht auf (14) genau fünf Koeffizienten unabhängig disponibel,  $A, B, G, H, J$ ; und dies ist die richtige Zahl, da vermöge  $\alpha \beta \gamma = 1$  das  $E$  eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen ist.

§ 12. Für den Fall  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$  wird

$$A = B = C = 0,$$

und setzt man

$$G = H = J = G_1,$$

so wird

$$\delta E = \frac{1}{2} G_1 (\delta \alpha^2 + \delta \beta^2 + \delta \gamma^2).$$

Hieraus ersehen wir, daß  $2 G_1$  einfach der Starrheitsmodul des unter keinem Zwange stehenden Festkörpers ist; denn wenn wir  $\delta \gamma = 0$  machen, haben wir  $\delta \alpha = -\delta \beta$ , und der Zwang besteht in einer unendlich kleinen Drillung in der  $(xy)$  Ebene, die auf zwei Arten als eine einfache Schiebung aufgefaßt werden kann, deren Größe  $\delta \alpha^1$  ist (da diese Größe das Zweifache der Ausweichung in einer der Normalachsen ist).

§ 13. Wir gehen auf die Gleichungen (10), (11) und (12) zurück und nehmen  $\sigma$  so klein an, daß  $\sigma^3$  und die höheren Potenzen vernachlässigt werden können. Bei diesem Grade der Annäherung lassen wir  $abc$  in (10) fort und sehen, daß die drei Wurzeln dieser Gleichung bezüglich sind

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \mathfrak{A} - \frac{b^2}{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}} - \frac{c^2}{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}}, \\ q_2 &= \mathfrak{B} - \frac{c^2}{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}} - \frac{a^2}{\mathfrak{C} - \mathfrak{B}}, \\ q_3 &= \mathfrak{C} - \frac{a^2}{\mathfrak{B} - \mathfrak{C}} - \frac{b^2}{\mathfrak{A} - \mathfrak{C}}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

vorausgesetzt, daß keine von den die Nenner bildenden Differenzen unendlich klein ist. Der Fall, daß irgendeine dieser Differenzen unendlich klein oder Null ist, bedarf, wie wir am Schlusse sehen werden, keiner besonderen Behandlung, obwohl allerdings eine solche besondere Behandlung notwendig sein wird, um in jedem einzelnen solchen Falle jeden Schritt des Verfahrens zu deuten.

§ 14. Setzen wir in die Ausdrücke (20) für  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, a, b, c$  ihre Werte aus (11) und (12), lassen dabei  $\sigma^3$  und höhere Potenzen außer acht und bezeichnen mit  $\delta \alpha, \delta \beta, \delta \gamma$  die Größen, um die die drei obigen Wurzeln bzw.  $\alpha, \beta, \gamma$  übersteigen, so finden wir

$$\left. \begin{aligned} q_1 - \alpha = \delta \alpha = \alpha \left\{ 2 \sigma l \lambda + \sigma^2 \left[ \lambda^2 - \frac{\gamma}{\gamma - \alpha} (n \lambda + l \nu)^2 - \frac{\beta}{\beta - \alpha} (l \mu + m \lambda)^2 \right] \right\}, \\ q_2 - \beta = \delta \beta = \beta \left\{ 2 \sigma m \mu + \sigma^2 \left[ \mu^2 - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} (l \mu + m \lambda)^2 - \frac{\gamma}{\gamma - \beta} (m \nu + n \mu)^2 \right] \right\}, \\ q_3 - \gamma = \delta \gamma = \gamma \left\{ 2 \sigma n \nu + \sigma^2 \left[ \nu^2 - \frac{\beta}{\beta - \gamma} (m \nu + n \mu)^2 - \frac{\alpha}{\alpha - \gamma} (n \lambda + l \nu)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Hiervon machen wir in (19) Gebrauch und erhalten so

$$\left. \begin{aligned} \delta E = & \sigma(A l \lambda + B m \mu + C n \nu) \\ & + \frac{1}{2} \sigma^2 \{ A \lambda^2 + B \mu^2 + C \nu^2 \\ & + L(m \nu + n \mu)^2 + M(n \lambda + l \nu)^2 + N(l \mu + m \lambda)^2 \} \\ & + 2 \sigma^2 (G l^2 \lambda^2 + H m^2 \mu^2 + J n^2 \nu^2), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

wo gesetzt ist

$$L = \frac{B \gamma - C \beta}{\beta - \gamma}; \quad M = \frac{C \alpha - A \gamma}{\gamma - \alpha}; \quad N = \frac{A \beta - B \alpha}{\alpha - \beta}. \quad (23)$$

§ 15. Nun finden wir aus (5) und (6)

$$(m \nu + n \mu)^2 = 1 - l^2 - \lambda^2 + 2(l^2 \lambda^2 - m^2 \mu^2 - n^2 \nu^2). \quad (24)$$

Damit und mit den symmetrischen Ausdrücken geht (22) über in

$$\left. \begin{aligned} \delta E = & \sigma(A l \lambda + B m \mu + C n \nu) \\ & + \frac{1}{2} \sigma^2 \{ L + M + N + (A - L) \lambda^2 + (B - M) \mu^2 + (C - N) \nu^2 \\ & - L l^2 - M m^2 - N n^2 + 2[(2G + L - M - N) l^2 \lambda^2 \\ & + (2H + M - N - L) m^2 \mu^2 + (2J + N - L - M) n^2 \nu^2] \}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

§ 16. Um dieses Resultat statisch zu interpretieren, stellen wir uns vor, der Festkörper sei in einem Zustande homogener Deformation ( $\alpha, \beta, \gamma$ ), die durch seine ganze Masse wirkt, gegeben, und es sei in ihm eine begrenzte, ebene Platte von der Dicke  $h$  und sehr großem Querschnitte  $Q$  durch eine Bewegung gemäß den Definitionen (3), (4), (5), (6) des § 8 verschoben. Die Grenzebenen der Platte sollen unbewegt bleiben und der ganze außerhalb der Platte befindliche Festkörper soll demgemäß weiter nicht gestört werden als durch die geringe, um den Rand der Platte herum durch die Verschiebung ihrer Substanzen hervorgerufene Zerrung. Der analytische Ausdruck hierfür ist<sup>1)</sup>

$$\sigma = f(p), \quad (26)$$

wo  $f$  irgendeine Funktion von  $p = OP$  bedeutet, für welche ist

$$\int_0^h f(p) dp = 0. \quad (27)$$

Wenn mit  $W$  die zur Erzeugung der vorausgesetzten Verschiebung erforderliche Arbeit bezeichnet wird, haben wir

$$W = Q \int_0^h p \delta E + \mathfrak{B}. \quad (28)$$

1) Ich habe den Text etwas geändert, konditionell statt affirmativ, weil mir die Richtigkeit der Gleichung (27) sonst nicht zweifellos erschien. D. H.

Hier ist  $\delta E$  durch die Gleichung (25) mit der Maßgabe gegeben, daß alles in diesem Ausdrucke außer  $\sigma$ , einer Funktion von  $OP$ , konstant ist, und bedeutet  $\mathfrak{B}$  die an dem Festkörper außerhalb der Grenzfläche der Platte geleistete Arbeit. In diesem Ausdrucke verschwindet die erste Reihe von (25) vermöge (27), und es bleibt

$$\frac{W - \mathfrak{B}}{Q} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &L + M + N \\ &+ (A - L)\lambda^2 + (B - M)\mu^2 + (C - N)\nu^2 \\ &- Ll^2 - Mm^2 - Nn^2 + 2[(2G + L - M - N)l^2\lambda^2 \\ &+ (2H + M - N - L)m^2\mu^2 \\ &+ (2J + N - L - M)n^2\nu^2] \end{aligned} \right\} \int_0^h \sigma^2 dp. \quad (29)$$

Wenn jeder Durchmesser der Platte im Vergleich zu ihrer Dicke unendlich groß ist, muß  $\mathfrak{B}/Q$  unendlich klein sein, und drückt die rechte Seite von (29) die Arbeit für die Flächeneinheit der Platte aus, die erforderlich ist, die vorausgesetzte schiebende Bewegung zu erzeugen.

§ 17. Lösen wir jetzt die Aufgabe, die den Bedingungen der Gleichungen (5) und (6) des § 8 genügenden Beträge von  $l$ ,  $m$ ,  $n$  zu finden, die den Faktor in den Klammern  $\{ \}$  auf der rechten Seite der Gleichung (29) zu einem Maximum oder Minimum machen. Die Aufgabe besteht nur darin, die beiden Hauptachsen der Ellipse zu finden, in der das Ellipsoid

$$[2(2G + L - M - N)\lambda^2 - L]x^2 + [2(2H + M - N - L)\mu^2 - M]y^2 + [2(2J + N + L - M)\nu^2 - N]z^2 = \text{konst.} \quad (30)$$

von der Ebene

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0 \quad (31)$$

geschnitten wird. Wenn die Verschiebung in einer der beiden so bestimmten Richtungen ( $l$ ,  $m$ ,  $n$ ) erfolgt, dann verläuft die zu ihrer Unterhaltung erforderliche Kraft in der Richtung der Verschiebung; und die Größe dieser Kraft für die Einheit des Materials der Platte in jedem Punkte in ihr ist, wie sich leicht zeigen läßt,

$$\{M\} \frac{d\sigma}{dp}, \quad (32)$$

wobei mit  $\{M\}$  der größte oder kleinste Wert des in geschlungenen Klammern stehenden Faktors von (29) bezeichnet wird.

§ 18. Wenn wir jetzt vom Gleichgewichte zur Bewegung übergehen, sehen wir sofort, daß, wenn die Dichte als der Einheit gleich angenommen wird,

$$V = \sqrt{\{M\}} \quad (33)$$

die Geschwindigkeit  $V$  jeder der beiden einfachen Wellen feststellt, deren Wellenfront senkrecht zu ( $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ) ist. Betrachten wir den Fall einer zu einer der drei Hauptachsebenen, beispielsweise ( $yz$ ), senkrechten Wellenfläche, so ist  $\lambda = 0$ , und wir sehen vermöge der Symmetrie, daß wir, um den Ausdruck in der Klammer  $\{ \}$  in (29) zu einem Maximum oder Minimum zu machen, haben müssen

$$\left. \begin{array}{l} \text{(Schwingung senkrecht zur Hauptebene)} \\ l = 1, m = 0, n = 0 \\ \text{(Schwingung in der Hauptebene), } l = 0, m = -\nu, n = \mu \end{array} \right\} \quad (34)$$

Folglich finden wir für die beiden Fälle:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Schwingung senkrecht zu } yz \\ v^2 = M + N + (B - M)\mu^2 + (C - N)\nu^2 \end{array} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Schwingung in } yz \\ v^2 = L + B\mu^2 + C\nu^2 + 4(H + J - L)\mu^2\nu^2 \end{array} \right\} \quad (36)$$

§ 19. Nach der Theorie von Fresnel muß (35) konstant sein und muß das letzte Glied von (36) verschwinden. Für diese und die entsprechenden Schlüsse für die beiden andern Hauptebenen ist hinreichend und notwendig, daß man hat

$$A - L \quad B - M = C - N \quad (37)$$

und

$$H + J - L; J + G - M; G + H - N. \quad (38)$$

Setzt man in der letzten der Gleichungen (37)  $M$  und  $N$  um, führt für diese Größen ihre aus (23) sich ergebenden Werte ein und dividiert beide Seiten durch  $\beta\gamma$ , so findet man

$$\frac{C - A}{\beta\gamma - \alpha\beta} = \frac{A - B}{\gamma\alpha - \beta\gamma} \quad (39)$$

Hieraus folgt<sup>1)</sup>

$$\frac{B - C}{\gamma\alpha - \alpha\beta} = \frac{C - A}{\alpha\beta - \beta\gamma} = \frac{A - B}{\beta\gamma - \gamma\alpha} \quad (40)$$

Die erste dieser Gleichungen ist aber äquivalent der ersten der Gleichungen (37); und so sehen wir, daß diese beiden Gleichungen (37) nur einer Gleichung äquivalent sind; und (39) ist eine geeignete Form dieser einen. Aus ihr ergibt sich, indem wir Gleichung (14) berücksichtigen und mit  $q$  einen Faktor bezeichnen, der eine beliebige Funktion von  $(\alpha, \beta, \gamma)$  sein mag:

$$\left. \begin{array}{l} A = q(S - \beta\gamma); B = q(S - \gamma\alpha); C = q(S - \alpha\beta), \\ \text{wo gesetzt ist} \\ S = \frac{1}{3}(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta); \end{array} \right\} \quad (41)$$

und dann folgt aus (23)

$$\left. \begin{array}{l} L = q[\alpha(\beta + \gamma) - S]; M = q[\beta(\gamma + \alpha) - S]; \\ N = q[\gamma(\alpha + \beta) - S], \\ \text{oder} \\ L = q(2S - \beta\gamma); M = q(2S - \gamma\alpha); N = q(2S - \alpha\beta). \end{array} \right\} \quad (42)$$

Nach Gleichung (2) können wir (41) und (42) auch auf folgende für manche Zwecke geeignetere Formen bringen:

1) Aus  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  folgt  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ .



$$A = q \left( S - \frac{1}{\alpha} \right); \quad B = q \left( S - \frac{1}{\beta} \right); \quad C = q \left( S - \frac{1}{\gamma} \right). \quad (43)$$

$$L = q \left( 2S - \frac{1}{\alpha} \right) = A + qS; \quad M = q \left( 2S - \frac{1}{\beta} \right) = B + qS; \\ N = q \left( 2S - \frac{1}{\gamma} \right) = C + qS, \quad (44)$$

wobei zugleich

$$S = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right\} \quad (45)$$

ist. Weiter finden wir  $G, H, J$ ; nach (38), (44) und (45) ist

$$G + H + J = \frac{1}{2} (L + M + N) = \frac{3}{2} qS = \frac{1}{2} q \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right), \quad (46)$$

woraus sich nach (38) und (44) ergibt:

$$G = q \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} S \right); \quad H = q \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2} S \right); \quad J = q \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2} S \right). \quad (47)$$

§ 20. Benutzt man (43) und (47) in (19), so erhält man

$$\delta E = \frac{1}{2} q \left\{ -\frac{\delta \alpha}{\alpha^2} - \frac{\delta \beta}{\beta^2} - \frac{\delta \gamma}{\gamma^2} + S \left( \frac{\delta \alpha}{\alpha} + \frac{\delta \beta}{\beta} + \frac{\delta \gamma}{\gamma} \right) \right. \\ \left. + \frac{\delta \alpha^2}{\alpha^3} + \frac{\delta \beta^2}{\beta^3} + \frac{\delta \gamma^2}{\gamma^3} - \frac{1}{2} S \left( \frac{\delta \alpha^2}{\alpha^2} + \frac{\delta \beta^2}{\beta^2} + \frac{\delta \gamma^2}{\gamma^2} \right) \right\}. \quad (48)$$

Nun ist nach (2)  $\log(\alpha \beta \gamma) = 0$ . Bildet man demnach die Variation dieses Ausdruckes bis auf Glieder zweiter Ordnung, so wird

$$\frac{\delta \alpha}{\alpha} + \frac{\delta \beta}{\beta} + \frac{\delta \gamma}{\gamma} - \frac{1}{2} \left( \frac{\delta \alpha^2}{\alpha^2} + \frac{\delta \beta^2}{\beta^2} + \frac{\delta \gamma^2}{\gamma^2} \right) = 0, \quad (49)$$

wodurch (48) übergeht in

$$\delta E = \frac{1}{2} q \left( -\frac{\delta \alpha}{\alpha^2} - \frac{\delta \beta}{\beta^2} - \frac{\delta \gamma}{\gamma^2} + \frac{\delta \alpha^2}{\alpha^3} + \frac{\delta \beta^2}{\beta^3} + \frac{\delta \gamma^2}{\gamma^3} \right), \quad (50)$$

und beachtet man, daß die dritten und höheren Potenzen zu vernachlässigen sind, so sieht man, daß (50) äquivalent ist,

$$\delta E = \frac{1}{2} q \delta \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right). \quad (51)$$

Wenn also  $q$  als konstant angenommen wird, so findet man demnach:

$$E = \frac{1}{2} q \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - 3 \right). \quad (52)$$

Es ist klar, daß  $q$  stationär (das heißt  $\delta q = 0$ ) sein muß für alle beliebigen Werte von  $\alpha, \beta, \gamma$ , für die (52) gilt; und umgekehrt, wenn (52) für alle Werte gilt, muß  $q$  für alle Werte von  $\alpha, \beta, \gamma$  konstant sein.

§ 21. Gehen wir auf Gleichung (29) zurück, nehmen  $Q$  so groß an, daß  $\mathfrak{B}/Q$  vernachlässigt werden kann, und vereinfachen nach (46), (43), (44) und (45), so finden wir:

$$W = Q \left( \frac{l^2}{\alpha} + \frac{m^2}{\beta} + \frac{n^2}{\gamma} \right) \int_0^h d\rho \sigma^2; \quad (53)$$

und die Aufgabe (§ 17),  $l, m, n$  auf Grund der Bedingungen (5) und (6) so zu bestimmen, daß  $l^2/\alpha + m^2/\beta + n^2/\gamma$  für gegebene Werte von  $\lambda, \mu, \nu$  ein Maximum oder Minimum wird, führt zu den Gleichungen:

$$\omega\lambda - \omega'l + \frac{l}{\alpha} = 0; \quad \omega\mu - \omega'm + \frac{m}{\beta} = 0; \quad \omega\nu - \omega'n + \frac{n}{\gamma} = 0, \quad (54)$$

wo mit  $\omega$  und  $\omega'$  unbestimmte Faktoren bezeichnet sind; es folgt hieraus:

$$\omega' = \frac{l^2}{\alpha} + \frac{m^2}{\beta} + \frac{n^2}{\gamma}; \quad (55)$$

$$\omega^2 = l^2 \left( \omega' - \frac{1}{\alpha} \right)^2 + m^2 \left( \omega' - \frac{1}{\beta} \right)^2 + n^2 \left( \omega' - \frac{1}{\gamma} \right)^2. \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega\lambda &= l \left( -\frac{1-l^2}{\alpha} + \frac{m^2}{\beta} + \frac{n^2}{\gamma} \right) \\ \omega\mu &= m \left( \frac{l^2}{\alpha} - \frac{1-m^2}{\beta} + \frac{n^2}{\gamma} \right) \\ \omega\nu &= n \left( \frac{l^2}{\alpha} + \frac{m^2}{\beta} - \frac{1-n^2}{\gamma} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (57)$$

Diese Formeln sind nicht direkt geeignet,  $l, m, n$  aus  $\lambda, \mu, \nu$  zu finden; vgl. § 33 (die gewöhnlichen Formeln für die Lösung dieser Aufgabe brauchen hier nicht niedergeschrieben zu werden); sie liefern aber  $\lambda, \mu, \nu$  explizit aus den als bekannt vorausgesetzten Größen  $l, m, n$ ; das heißt, sie lösen die Aufgabe, die Wellenfläche der einfachen ebenen Welle zu finden, deren Schwingungsrichtung ( $l, m, n$ ) ist. Die Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$V^2 = g \left( \frac{l^2}{\alpha} + \frac{m^2}{\beta} + \frac{n^2}{\gamma} \right). \quad (58)$$

Es ist interessant zu bemerken, daß diese Geschwindigkeit hiernach allein von der Richtung der Schwingungslinie abhängt, und daß es (abgesehen von den besonderen Fällen teilweiser oder vollständiger Isotropie) gerade eine Wellenfläche für jede beliebige Schwingungslinie gibt. Dies sind aber genau die Bedingungen der Kinematik der Doppelbrechung von Fresnel mit allen Einzelheiten.

§ 22. Wir gehen weiter auf die Gleichungen (35) und (36) zurück und sehen zu, ob wir sie zur Darstellung der Doppelbrechung mit der Schwingungslinie in der Polarisationssebene einrichten können. Dies würde erfordern, daß (36) den ordinären Strahl darstellt, und demnach zunächst die Befriedigung der Gleichung (38) voraussetzen, wie dies auch die andere Annahme tut; aber an Stelle der Gleichung (37) erhalten wir, da dann (36) überhaupt konstant zu machen ist:

$$A = B = C, \quad (59)$$

und demgemäß muß jede dieser Größen wegen (14) Null und

$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

sein, so daß wir zur vollständigen Isotropie gelangt sind. Folglich kann unsere vorliegende Form (§ 7) der Deformationstheorie der Doppelbrechung nicht so eingerichtet werden, daß sie eine Schwingungslinie in der Rich-

tung der Polarisationssebene liefert.<sup>1)</sup> Wir haben gesehen (§ 21), daß sie wirklich eine Schwingungslinie senkrecht zur Polarisationssebene mit genau der Fresnelschen Form der Wellenfläche ergibt, wenn sie für den Zweck der einfachen Annahme angepaßt wird, daß die potentielle Energie des im Zwangszustande befindlichen Festkörpers durch (52) bei konstantem  $q$  dargestellt wird. Es ist wichtig zu bemerken, daß  $q$  der Starrheitsmodul des nicht im Zwangszustande befindlichen isotropen Festkörpers ist.

§ 23. Aus (58) ersehen wir noch, daß die Geschwindigkeiten der den drei Richtungen  $l = 1, m = 0, n = 0$ ;  $l = 0, m = 1, n = 0$ ;  $l = 0, m = 0, n = 1$  entsprechenden Wellen bezüglich sind  $\sqrt{q/\alpha}$ ,  $\sqrt{q/\beta}$ ,  $\sqrt{q/\gamma}$ . Folglich ist die Geschwindigkeit jeder beliebigen Welle, deren Schwingung irgendeiner der drei Hauptelongationen parallel ist, multipliziert mit der Wurzel aus dieser Elongation, gleich der Geschwindigkeit einer Welle in dem keiner Deformation ausgesetzten isotropen Festkörper.

[§§ 24 . . . 34, Zusatz vom März 1899.]

§ 24. Um unser Verständnis des in § 7 eingeführten und in § 20 (52) und § 22 näher bestimmten, gedachten Festkörpers zu befestigen und aufzuklären, stellen wir uns in ihm einen Stab vor, dessen Länge im undeformierten Zustande  $l$  und dessen Querschnittsinhalt  $A$  ist. Für unseren vorliegenden Zweck kann der Querschnitt jede beliebige Form haben, wenn er nur von einem Ende bis zum anderen gleichförmig ist. Wir denken uns an beiden Enden entgegengesetzte Kräfte  $P$  wirkend; und wenn dann bei diesem Zwange Gleichgewicht besteht, mag die Länge  $x$  und der Querschnitt  $A'$  sein. Dann ist  $A' = lA/x$ , da der Festkörper inkompressibel sein soll. Die verhältnismäßigen Verkürzungen aller Durchmesser eines Querschnittes werden gleich sein, weil ein seitlicher Druck nicht besteht. Wenn sich die Größen  $\alpha, \beta, \gamma$  aus (52) auf die Länge unseres Stabes und zwei zu ihm senkrechte Richtungen beziehen, erhalten wir somit:

$$\alpha = \frac{x^2}{l^2}; \quad \beta = \gamma = \frac{l}{x}, \quad (60)$$

und demgemäß nach (52):

$$E = \frac{1}{2} q \left( \frac{l^2}{x^2} + \frac{2x}{l} - 3 \right) lA, \quad (61)$$

wo  $E$  die ganze Arbeit bedeutet, die erforderlich ist, die bezeichnete Änderung unseres Stabes, dessen Raumgröße  $lA$  ist, zu bewirken. Demgemäß finden wir, wegen  $P = dE/dx$

1) Es gibt in diesem Falle überhaupt keinen Strahl, denn nach (23) sind auch  $L, M, N$  gleich Null, und es wird nach (35) wie nach (36) das  $v^2$  identisch Null. Auch  $H, J, G$  sind dann Null nach (38) und ebenso ist  $\frac{W}{Q} - \mathfrak{B} = 0$ . Die ganze Theorie entfällt. Um dieser Eventualität zu entgehen, setzt eben der Herr Verfasser  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ . Aber dann werden alle Konstanten mit Ausnahme von  $A, B, C$  unbestimmt und das Problem läßt eine bestimmte Behandlung nicht zu. Demnach bringt also wohl auch diese Betrachtung in der berühmten Frage keine Entscheidung.  
D. H.

$$P = q \left( -\frac{l^2}{x^3} + \frac{1}{l} \right) l A \text{ und } \delta P = 3q \frac{l^3 A}{x^4} \delta x = 3q \frac{l^2 A'}{x^5} \delta x. \quad (62)$$

Bezeichnet man mit  $M$  den Youngschen Modul für Werte von  $x$ , die nicht unendlich wenig von  $l$  verschieden sind, und definiert man ihn durch  $\frac{\delta P/A'}{\delta x/x}$ , so findet man also:

$$M = 3q \frac{l^2}{x^2}. \quad (63)$$

Demnach verkleinert eine Vergrößerung der Länge von  $l$  auf  $x$  den Youngschen Modul, wie er oben definiert ist, im Verhältnisse von  $l^2$  zu  $x^2$ .

§ 25. Die durch die Konstanz von  $q$ , zu deren Annahme wir durch die Annahme der Fresnelschen Gesetze für die Fortpflanzung des Lichtes durch einen Kristall gezwungen wurden, ausgedrückte Eigenschaft unseres gedachten Festkörpers ist interessant mit Rücksicht auf die Ausdehnung von Theorien und Anschauungen über die Elastizität von Festkörpern unter dem Einfluß von unendlich kleinen Deformationen, für die allein bisher eine dynamische mathematische Theorie entwickelt ist, auf nicht unendlich kleine Deformationen. Die Vergleichung der Beziehung zwischen Kraft und Verlängerung für einen Stab aus unserer gedachten Substanz, wie deren Eigenschaften in der obigen Gleichung (62) dargestellt sind, mit der Erscheinung an einem Stück eines Kautschukfadens oder eines Kautschukbandes, wie sie sich im Versuch zeigt, bietet in der erweiterten Theorie eine wenn auch kurze, doch sehr instruktive Belehrung.

§ 26. Vor zehn Jahren habe ich gegen meine Neigung die Deformationstheorie der Fresnelschen Gesetze der Doppelbrechung unter dem Zwange anderer Aufgaben liegen lassen, ohne meine Arbeit weit genug fortzuführen, um die vollständigen Ausdrücke für das Gleichgewicht und die Bewegung des elastischen Festkörpers für jede beliebige unendlich kleine Abweichung aus der Lage ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) zu finden. Hier gebe ich die Fortsetzung, deren Mangel ich damals empfunden habe.

Es seien ( $x_0, y_0, z_0$ ) die Koordinaten eines Punktes des Festkörpers in seinem nicht deformierten Zustande ( $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$ ) und ( $x, y, z$ ) die Koordinaten desselben Punktes im Deformationszustande ( $\alpha, \beta, \gamma$ ). Wenn die Koordinatenachsen die drei Linien der größten, der mittleren und der kleinsten Elongation sind (diese Achsen sind ihrem Wesen nach<sup>1)</sup> gegeneinander rechtwinklig), so hat man also:

$$x = x_0 \sqrt{\alpha}; \quad y = y_0 \sqrt{\beta}; \quad z = z_0 \sqrt{\gamma}. \quad (64)$$

Die Materie dieses Punktes ( $x, y, z$ ) sei nun nach ( $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$ ) verschoben, wobei die Verrückungen  $\xi, \eta, \zeta$ , die nur der Bedingung unterworfen sind, daß keine Änderung der Raumgröße eintritt, irgendwelche beliebige Werte für jeden innerhalb eines bestimmten Raumes  $S$  liegenden Punkt haben mögen, außerhalb dessen das Mittel in dem ungestörten Zustande ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) verbleiben soll.

1) Vgl. Thomson und Tait, § 164.

Die Änderung der Verschiebung  $(\xi, \eta, \zeta)$  von Punkt zu Punkt eines Festkörpers sei nun eine so stetige, daß jeder der neun Quotienten:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \xi}{\partial z}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial z}, \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (65)$$

einen unendlich kleinen Zahlenwert besitzt. Wir fassen das System körperlicher Kräfte ins Auge, das in dem Festkörper innerhalb des gestörten Teiles  $S$  wirken muß, um die genannte Verschiebung  $(\xi, \eta, \zeta)$  hervorzurufen. Bezeichnen  $X\Omega$ ,  $Y\Omega$ ,  $Z\Omega$  Komponenten der Kraft, die auf irgendein unendlich kleines Volumen  $\Omega$  der den Punkt  $(x, y, z)$  umgebenden Materie wirken müssen, so besteht unsere direkt lösbare Aufgabe darin,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  für einen beliebigen Punkt zu bestimmen, wenn  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  für jeden Punkt gegeben sind.

§ 27. Unsere Voraussetzung hinsichtlich der unendlich kleinen Deformationen, die darin besteht, daß die unendlich kleine, der Verschiebung  $(\xi, \eta, \zeta)$  entsprechende Deformation sich der endlichen Deformation  $(\alpha, \beta, \gamma)$  überlagert, hat zur unmittelbaren Folge, daß, wenn die Verschiebung nicht  $(\xi, \eta, \zeta)$ , sondern  $(c\xi, c\eta, c\zeta)$  ist, wo  $c$  eine unter der Einheit liegende Zahl bedeutet und für jeden Punkt des gestörten Gebietes denselben Wert hat, die Kraft, die erforderlich ist, das Mittel in diesem Zustande zu erhalten, statt aus den Komponenten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  aus denen  $cX$ ,  $cY$ ,  $cZ$  besteht. Wenn man die gesamte, zur Hervorrufung der Verschiebung  $(\xi, \eta, \zeta)$  erforderliche Arbeit mit  $\delta E$  bezeichnet, erhält man demnach:

$$\delta E = \frac{1}{2} \iiint dx dy dz (X\xi + Y\eta + Z\zeta), \quad (66)$$

wo  $\iiint dx dy dz$  die Integration über den Raum  $S$  feststellt.

§ 28. Nun ist nach (52):

$$\begin{aligned} \delta E &= \frac{1}{2} q \iiint dx dy dz \left( \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\gamma'} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} \right) \Big| \\ &= \frac{1}{2} q \iiint dx dy dz (\beta'\gamma' + \gamma'\alpha' + \alpha'\beta' - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta) \Big|, \end{aligned} \quad (67)$$

wenn mit  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  die Quadrate der Hauptelongationen (§ 7 oben) bezeichnet werden, wie sie vermöge der unendlich kleinen Verschiebung  $(\xi, \eta, \zeta)$  aus  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  entstanden sind.

Um  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  zu finden, ziehen wir vorübergehend parallel zu unseren ursprünglichen Achsen  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  Achsen durch den Punkt  $(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$ , den wir der Kürze wegen mit  $Q$  bezeichnen. Es sei ferner  $P$  ein Punkt des Festkörpers in unendlich kleinem Abstände von  $Q$ , und es seien seine Koordinaten in bezug auf die vorübergehend eingeführten Achsen  $(f, g, h)$ , und endlich seien in bezug auf dieselben Achsen  $(f_0, g_0, h_0)$  die Koordinaten der Lage  $P_0$ , die der Punkt  $P$  einnehmen würde, wenn der ganze Festkörper ohne Deformation wäre; dann ist <sup>2)</sup>:

1) Eigentlich ist  $\delta E = \frac{1}{2} \iiint dx dy dz [\int (X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta)]$ . Es sind also Glieder von höherer Ordnung als der ersten vernachlässigt. Dieses ist für die spätere Vergleichung mit von Wichtigkeit. D. H.

2) Thomson und Tait, Theoret. Phys., § 135.

$$\left. \begin{aligned} f &= \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) f_0 \sqrt{\alpha} + \frac{\partial \xi}{\partial y} g_0 \sqrt{\beta} + \frac{\partial \xi}{\partial z} h_0 \sqrt{\gamma} \\ g &= \frac{\partial \eta}{\partial x} f_0 \sqrt{\alpha} + \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) g_0 \sqrt{\beta} + \frac{\partial \eta}{\partial z} h_0 \sqrt{\gamma} \\ h &= \frac{\partial \xi}{\partial x} f_0 \sqrt{\alpha} + \frac{\partial \xi}{\partial y} g_0 \sqrt{\beta} + \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) h_0 \sqrt{\gamma} \\ PQ^2 &= f^2 + g^2 + h^2; P_0 Q^2 = f_0^2 + g_0^2 + h_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Hieraus findet man:

$$\left(\frac{PQ}{P_0 Q}\right)^2 = Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2(amn + bnl + clm), \quad (69)$$

wenn mit  $l, m, n$  die Verhältnisse  $\frac{f_0}{P_0 Q}, \frac{g_0}{P_0 Q}, \frac{h_0}{P_0 Q}$  bezeichnet werden und ist:

$$\left. \begin{aligned} A &= \alpha \left\{ \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 \right\} \\ B &= \beta \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 \right\} \\ C &= \gamma \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 \right\} \\ a &= \sqrt{\beta \gamma} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) \right\} \\ b &= \sqrt{\gamma \alpha} \left\{ \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) \right\} \\ c &= \sqrt{\alpha \beta} \left\{ \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Die Beträge von  $\alpha', \beta', \gamma'$  sind die Maximum-, Minimimum- und Minimumwerte von (69), die der Bedingung  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$  unterworfen sind, und demnach sind sie nach der allgemein bekannten Lösung dieser Aufgabe die drei ihrem Wesen nach reellen Wurzeln der kubischen Gleichung

$$(A - \varrho)(B - \varrho)(C - \varrho) - a^2(A - \varrho) - b^2(B - \varrho) - c^2(C - \varrho) + 2abc = 0. \quad (71)$$

Bildet man den Koeffizienten von  $\varrho$  in der Entwicklung dieses Ausdruckes, so findet man

$$\begin{aligned} \beta' \gamma' + \gamma' \alpha' + \alpha' \beta' &= BC + CA + AB - a^2 - b^2 - c^2 \\ &= (1 + F)\beta\gamma + (1 + G)\gamma\alpha + (1 + H)\alpha\beta, \end{aligned} \quad (72)$$

wo  $F, G, H$  symmetrische algebraische Funktionen vierten Grades der neun Quotienten unter (65) sind. Läßt man alle Glieder von höherem als dem zweiten Grade fort, so wird

$$F = 2\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2 + 4\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial z} - 2\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (73)$$

und symmetrische Ausdrücke für  $G$  und  $H$ . Geht man jetzt auf (67) zurück

und beachtet, daß  $\alpha\beta\gamma = 1$  und  $\alpha'\beta'\gamma' = 1$  ist und daß  $\alpha, \beta, \gamma$  im ganzen Festkörper konstant sein sollen, so findet man nach (67)

$$\delta E = \frac{1}{2} q \left( \frac{1}{\alpha} \iiint dxdydz F + \frac{1}{\beta} \iiint dxdydz G + \frac{1}{\gamma} \iiint dxdydz H \right). \quad (74)$$

Um  $\iiint dxdydz F$  unter Benutzung von (73) zu finden, beachten wir zunächst, daß wir durch einfache Integration nach  $y$  und nach  $z$  erhalten

$$\iiint dxdydz \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0; \quad \iiint dxdydz \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0, \quad (75)$$

da sowohl  $\eta$  als  $\xi$  in dem Raume außerhalb  $S$  verschwinden.<sup>1)</sup> Aus demselben Grunde finden wir mittels partieller Integration [dreizehnte Vorlesung, Gleichung (7) oben]

$$\iiint dxdydz \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \iiint dxdydz \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad (76)$$

und so folgt

$$\iiint dxdydz F = \iiint dxdydz \left\{ \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right\}. \quad (77)$$

§ 29. Nun ergibt die Bedingung

$$\begin{aligned} \alpha' \beta' \gamma' &= 1; \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (78)$$

+ Gliedern, die Potenzen und Produkte der Verhältnisse enthalten.

Folglich finden wir unter Fortlassung von Potenzen über der zweiten

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \quad (79)$$

und (77) geht über in

$$\iiint dxdydz F = \iiint dxdydz \left\{ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right\}. \quad (80)$$

Entsprechende symmetrische Gleichungen finden wir für  $G$  und  $H$ . Setzt man diese in (74) ein, so geht die Gleichung über in

$$\begin{aligned} \delta E &= \frac{1}{2} q \iiint dxdydz \left[ \frac{1}{\alpha} \left\{ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta} \left\{ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{1}{\gamma} \left\{ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right\} \right]. \end{aligned} \quad (81)$$

Von den neun Gliedern dieser Gleichung (81) greifen wir eines heraus, beispielsweise das dritte, und wenden auf dieses das Verfahren der partiellen Integration an. Wir bekommen dann<sup>2)</sup>

1) Eigentlich ist vorausgesetzt, daß  $\eta, \xi$  auf der Oberfläche von  $S$  verschwinden, was nachher übrigens auch hervorgehoben wird. D. H.

2) Unter gleicher Voraussetzung wie früher. D. H.

$$\iiint dxdydz \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 = - \iiint dxdydz \xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}. \quad (82)$$

Behandelt man die andern Glieder ebenso, so ergibt sich demnach

$$\delta E = - \frac{1}{2} q \iiint dxdydz \left( \xi \frac{\nabla^2 \xi}{\alpha} + \eta \frac{\nabla^2 \eta}{\beta} + \zeta \frac{\nabla^2 \zeta}{\gamma} \right). \quad (83)$$

§ 30. Der Ausdruck für  $\delta E$  muß dem der obigen Gleichung (66) für jeden möglichen Wert von  $\xi, \eta, \zeta$  gleich sein.<sup>1)</sup> Wenn alle Werte möglich wären, müßten demnach die Koeffizienten von  $\xi, \eta, \zeta$  in (66) einzeln den Koeffizienten von  $\xi, \eta, \zeta$  in (83) gleich sein. In Wirklichkeit sind aber nur solche Werte von  $\xi, \eta, \zeta$  möglich, welche die Bedingung erfüllen, daß der Raum ungeändert bleibt, und die Methode der unbestimmten Multiplikatoren von Lagrange fügt der rechten Seite der Gleichung (83) noch das folgende Glied hinzu

$$\frac{1}{2} \iiint dxdydz \lambda \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2. \quad (84)$$

Dies geht nach der weiteren Methode der partiellen Integration über in

$$\frac{1}{2} \iiint dxdydz \left( \xi \frac{\partial \varpi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varpi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varpi}{\partial z} \right), \quad (85)$$

wenn gesetzt ist

$$\varpi = - \lambda \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right). \quad (86)$$

§ 31. Wir müssen nun nach dem glänzend wirkungsvollen Verfahren von Lagrange einzeln die Koeffizienten von  $\xi, \eta, \zeta$  der Gleichung (66) den Koeffizienten derselben Größen in der Gleichung (83) unter Hinzufügung von (85) gleichsetzen. So finden wir

$$X = - \frac{q}{\alpha} \nabla^2 \xi + \frac{\partial \varpi}{\partial x}; \quad Y = - \frac{q}{\beta} \nabla^2 \eta + \frac{\partial \varpi}{\partial y}; \quad Z = - \frac{q}{\gamma} \nabla^2 \zeta + \frac{\partial \varpi}{\partial z} \quad (87)$$

als Gleichungen für das Gleichgewicht unseres Festkörpers, wenn jeder Punkt seiner Grenzfläche festgehalten wird und sein Innenraum aus dem bestimmten Deformationszustande  $(\alpha, \beta, \gamma)$  durch Kräfte  $X, Y, Z$  gestört wird, die unendlich kleine Verschiebungen  $(\xi, \eta, \zeta)$  erzeugen, welche allein der Bedingung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad (88)$$

unterworfen sind, so daß in keinem Teile eine Dichteänderung eintreten kann. Wenn die Gleichung nicht befriedigt würde, würden die Gleichungen (87) mit der durch (86) gegebenen Größe  $\varpi$  die Lösung einer gewissen bestimmten Aufgabe über einen kompressibeln, homogenen Festkörper bilden, der eine gewisse bestimmte Eigenschaft vollkommener Elastizität für Änderungen der Form und der Dichte besitzt, die durch die Koeffizienten  $q$  und  $\lambda$  bestimmt sind. Von dieser Aufgabe zu der uns beschäftigenden gibt es einen stetigen Übergang, wenn man  $\lambda$  überall unendlich groß macht und so die linke Seite

1) Vgl. S. 168.



der Gleichung (88), welche die räumliche Ausdehnung darstellt, zum Verschwinden bringt, damit nach (86) das  $\bar{\omega}$  als eine Größe beibehalten werden kann, die so bestimmt zu werden vermag, daß sie die Bedingung jeder beliebigen vorgelegten Aufgabe erfüllt.<sup>1)</sup> So haben wir in (87), (88), wenn  $X, Y, Z$  als gegeben vorausgesetzt werden, vier Gleichungen zur Bestimmung der vier unbekannten Größen  $\bar{\omega}, \xi, \eta, \zeta$ .

§ 32. Jetzt setzen wir voraus, daß der Festkörper, nachdem er durch auf ihn wirkende Kräfte aus dem Zustande  $(\alpha, \beta, \gamma)$  unendlich wenig gestört worden ist, sich selbst überlassen wird. Nach dem d'Alembertschen Prinzip wird die Bewegung durch das bestimmt, was aus den Gleichungen des Gleichgewichts (87) wird, wenn man in ihnen  $-\varrho \ddot{\xi}, -\varrho \ddot{\eta}, -\varrho \ddot{\zeta}$  für  $X, Y, Z$  setzt, wobei  $\varrho$  die Dichte des Festkörpers bezeichnet. So finden wir als Bewegungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \frac{q}{\alpha} \nabla^2 \xi - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}; & \varrho \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \frac{q}{\beta} \nabla^2 \eta - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}; \\ \varrho \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \frac{q}{\gamma} \nabla^2 \zeta - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

§ 33. Wir sind nunmehr in der Lage, auf Grund dieser Gleichungen die Aufgabe der Wellenbewegung nach einem mehr direkten und synthetischen Verfahren durchzuführen, als das ist, nach welchem wir zur Lösung in dem obigen § 21 geführt wurden. Der einfachste mathematische Ausdruck, der ebene Wellen in den Bezeichnungen der Gleichungen (89) definiert, ist

$$\left. \begin{aligned} p &= \lambda x + \mu y + \nu z. \\ \xi &= l f(p - vt); & \eta &= m f(p - vt); & \zeta &= n f(p - vt). \\ \bar{\omega} &= F(p - vt), \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

wo  $\lambda, \mu, \nu$  die Richtungskosinus der Wellennormale und  $l, m, n$  die der Schwingung bedeuten. Unsere Forderung der Inkompressibilität ergibt

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0. \quad (91)$$

Durch Eliminieren der Größen  $\xi, \eta, \zeta, \bar{\omega}$  aus (89) mit Hilfe von (90) finden wir

$$\left. \begin{aligned} l(\varrho v^2 - q\alpha^{-1}) &= \lambda q\omega; \\ m(\varrho v^2 - q\beta^{-1}) &= \mu q\omega; \\ n(\varrho v^2 - q\gamma^{-1}) &= \nu q\omega, \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

wenn gesetzt wird

$$\omega = -\frac{1}{q} \frac{\partial F}{\partial p} / \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}. \quad (93)$$

1) Ob die Gleichungen (87) dann noch bestehen können, scheint mir zweifelhaft, da bei ihrer Ableitung von den Inkompressibilitätsbeziehungen  $\alpha\beta\gamma = 1$ ,  $\alpha'\beta'\gamma' = 1$  schon Gebrauch gemacht ist. Gleichung (67) beruht schon auf diesen Beziehungen, dann (74), (78), (80) usf. Indessen stimmen die Formeln mit bekannten überein. Eigentlich hat nur Lagrange die den obigen entsprechenden hydrodynamischen und aerodynamischen Gleichungen befriedigend abgeleitet, die Näherungsbedeutung der Gleichungen tritt bei ihm scharf hervor und ebenso ihre Beziehung zueinander. Man sehe die *Mécanique Analytique*, deutsche Ausgabe, Abschnitt XI. D. H.

Diese Gleichungen sind mit den unter (54) identisch, sobald man für  $\varrho v^2$  einführt  $q\omega'$ .

§ 34. Multiplizieren wir die Gleichungen (92) bezüglich mit

$$\lambda(\varrho v^2 - q\alpha^{-1})^{-1}, \quad \mu(\varrho v^2 - q\beta^{-1})^{-1}, \quad \nu(\varrho v^2 - q\gamma^{-1})^{-1},$$

addieren und berücksichtigen (91), so finden wir

$$\frac{\lambda^2}{\varrho v^2 - q\alpha^{-1}} + \frac{\mu^2}{\varrho v^2 - q\beta^{-1}} + \frac{\nu^2}{\varrho v^2 - q\gamma^{-1}} = 0. \quad (94)$$

Dies ist eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von  $v^2$  mit zwei ihrem Wesen nach reellen und positiven Wurzeln. Andererseits finden wir vermöge der Gleichung

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

aus (92)

$$\frac{1}{q^2 \omega^2} = \left\{ \left( \frac{\lambda}{\varrho v^2 - q\alpha^{-1}} \right)^2 + \left( \frac{\mu}{\varrho v^2 - q\beta^{-1}} \right)^2 + \left( \frac{\nu}{\varrho v^2 - q\gamma^{-1}} \right)^2 \right\}. \quad (95)$$

Die Gleichungen (94) und (95) geben uns  $v^2$  und  $\omega$ , und die (92) liefern darauf explizit  $l, m, n$ , wenn  $\lambda, \mu, \nu$  gegeben sind. So erhalten wir die vollständige Bestimmung von  $(l, m, n)$  der Schwingungsrichtung in ihrer Abhängigkeit von  $(\lambda, \mu, \nu)$ , der Richtung der Wellennormale und der konstanten Koeffizienten

$$q\alpha^{-1}, \quad q\beta^{-1}, \quad q\gamma^{-1}.$$

Unsere Lösung ist mit der von Fresnel identisch und führt zu genau derselben Form der Wellenfläche.

[§§ 35 ... 47; Zusatz vom April 1901.]

§ 35. Es wird fortan vorteilhaft sein,  $a^2, b^2, c^2$  an Stelle von  $\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}$  zu setzen. So erhalten wir nach § 7, wenn mit  $x_0, y_0, z_0$  und  $x, y, z$  die Koordinaten eines und desselben Punktes einmal in dem undeformierten, das andre Mal im deformierten Festkörper bezeichnet werden,

$$x = \frac{x_0}{a}; \quad y = \frac{y_0}{b}; \quad z = \frac{z_0}{c}. \quad (96)$$

Aber es ist

$$e = \frac{1-a}{a}; \quad f = \frac{1-b}{b}; \quad g = \frac{1-c}{c}, \quad (97)$$

woraus folgt

$$e = \frac{x-x_0}{x_0}; \quad f = \frac{y-y_0}{y_0}; \quad g = \frac{z-z_0}{z_0}. \quad (98)$$

Aus (97) erhält man somit

$$a = \frac{1}{1+e}; \quad b = \frac{1}{1+f}; \quad c = \frac{1}{1+g} \quad (99)$$

und hieraus

$$(1+e)(1+f)(1+g) = \frac{1}{abc} = 1. \quad (100)$$

1) Im Original ist links der Faktor  $\frac{1}{q^2}$  nachzutragen.

Die Hauptelongationen beim Übergange aus dem nicht deformierten in den deformierten Festkörper sind  $a^{-1}$ ,  $b^{-1}$ ,  $c^{-1}$ , und die Hauptelongationen aus dem deformierten in den nicht deformierten Festkörper sind  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Als Arbeit  $E$  für die Volumeneinheit, die erforderlich ist, den Festkörper aus dem undeformierten in den deformierten Zustand überzuführen, haben wir nach (52)

$$E = \frac{1}{2} q(a^2 + b^2 + c^2 - 3). \quad (101)$$

Hieraus findet sich, wenn man beachtet, daß  $abc = 1$  ist,

$$P = -(qa^2 + \bar{w}); \quad Q = -(qb^2 + \bar{w}); \quad R = -(qc^2 + \bar{w}) \quad (102)$$

oder, wie man nach (99) auch schreiben kann,

$$\left. \begin{aligned} P &= eq \frac{2+e}{(1+e)^2} - \bar{w} - q \\ Q &= fq \frac{2+f}{(1+f)^2} - \bar{w} - q \\ R &= gq \frac{2+g}{(1+g)^2} - \bar{w} - q \end{aligned} \right\}, \quad (103)$$

wo mit  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  die Normalkomponenten pro Flächeneinheit der Zugkräfte (positiv gerechnet, wenn sie nach außen wirken) bezeichnet werden, die auf die drei Flächenpaare eines rechtwinkligen Parallelepipeden wirken müssen, um es im Zustande der Deformation ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) mit den Hauptelongationen senkrecht zu diesen Flächenpaaren zu erhalten, und wo  $\bar{w}$  einen willkürlichen, nach allen Richtungen gleichförmigen Druck bedeutet. Der Beweis ist der folgende: Wir fassen einen Würfel, dessen Kante die Längeneinheit ist, in dem nicht im Deformationszustande befindlichen Festkörper ins Auge. Nach Eintritt der Deformation sind die Längen seiner Kanten  $1/a$ ,  $1/b$ ,  $1/c$  und die Inhalte der Seitenflächen  $\frac{1}{bc}$ ,  $\frac{1}{ca}$ ,  $\frac{1}{ab}$  oder, was wegen  $abc = 1$  das gleiche gibt,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Demnach ist die Gleichung für die Arbeit, die geleistet wird, wenn  $a$ ,  $b$ ,  $c$  in  $a + \delta a$ ,  $b + \delta b$ ,  $c + \delta c$  geändert werden,

$$Pa\delta\frac{1}{a} + Qb\delta\frac{1}{b} + Rc\delta\frac{1}{c} = q\delta E = q(a\delta a + b\delta b + c\delta c). \quad (104)$$

Nun ist  $abc = 1$  (Konstanz des Volumens), also

$$\frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} + \frac{\delta c}{c} = 0. \quad (105)$$

Folglich erhält man nach dem Verfahren von Lagrange

$$- \frac{P}{a} \delta a - \frac{Q}{b} \delta b - \frac{R}{c} \delta c = \left(qa + \frac{\bar{w}}{a}\right) \delta a + \left(qb + \frac{\bar{w}}{b}\right) \delta b + \left(qc + \frac{\bar{w}}{c}\right) \delta c, \quad (106)$$

wo mit  $\bar{w}$  ein „unbestimmter Multiplikator“ bezeichnet ist, und wir finden endgültig

$$-P = qa^2 + \bar{w}; \quad -Q = qb^2 + \bar{w}; \quad -R = qc^2 + \bar{w}, \quad (107)$$

was (102) beweist. Die Bedeutung von  $\bar{w}$ , einer willkürlichen Größe, ist hier ein nach allen Richtungen gleichförmiger Druck, der, da der Festkörper

inkompressibel ist, in willkürlicher Weise auf die Grenzfläche irgendeines Teiles desselben wirken kann, ohne irgendeinen der tatsächlichen Zustände zu ändern.

§ 36. Nach § 33, (92) sehen wir, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von Wellen, deren Schwingungslinien parallel den Achsen  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  sind, die Beträge haben

$$a \sqrt{\frac{q}{\varrho}}, \quad b \sqrt{\frac{q}{\varrho}}, \quad c \sqrt{\frac{q}{\varrho}}. \quad (108)$$

So ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle, deren Vorderfläche parallel der Ebene  $YOZ$  verläuft ( $\lambda = 1$ ,  $\mu = 0$ ,  $\nu = 0$ ),  $b \sqrt{\frac{q}{\varrho}}$ , wenn ihre Schwingungslinie parallel  $OY$  ( $l = 0$ ,  $m = 1$ ,  $n = 0$ ) und  $c \sqrt{\frac{q}{\varrho}}$ , wenn ihre Schwingungslinie parallel  $OZ$  ( $l = 0$ ,  $m = 0$ ,  $n = 1$ ) ist; ähnliches gilt für Wellen, deren Flächen parallel  $ZX$  und  $XY$  sind.

Der Kürze wegen wollen wir  $a \sqrt{\frac{q}{\varrho}}$ ,  $b \sqrt{\frac{q}{\varrho}}$ ,  $c \sqrt{\frac{q}{\varrho}}$  die Hauptgeschwindigkeiten von Licht im Kristall und  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  seine drei Hauptsymmetrielinien nennen. Wir können diese Linien nicht als optische Achsen bezeichnen, da im gewöhnlichen Sprachgebrauch das Wort Achse für die ein- und zweiachsigen Kristalle bereits einen bestimmten Sinn hat.

§ 37. Um die Mechanik der Deformationstheorie der Doppelbrechung vollständig zu verstehen, wollen wir als Beispiel Aragonit betrachten, einen zweiachsigen Kristall, dessen Hauptbrechungsindizes sind 1,5301, 1,6816, 1,6859. Wenn, unserer Theorie entsprechend, die optische Äolotropie von ungleicher Ausdehnung und Zusammenziehung des in dem Kristall befindlichen Äthers in verschiedenen Richtungen ohne Änderung des Volumens herrührt, während dabei die Hauptelongationen in einfacher Proportionalität zu den drei Hauptgeschwindigkeiten des Lichtes in ihm stehen, dann würde die Vernichtung der Ausdehnung und Zusammenziehung Isotropie mit dem Brechungsindex 1,6309, der Kubikwurzel aus dem Produkte der drei Hauptindizes, ergeben. Bezeichnen wir mit  $V$  die zu diesem mittleren Index gehörige Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so sind demnach die drei Hauptgeschwindigkeiten in dem wirklichen Kristall (da sie den Brechungsindizes umgekehrt proportional variieren) 1,0659  $V$ , 0,9687  $V$ , 0,9679  $V$ ; ihr Produkt ist  $V^3$ . Folglich erhalten wir, gemäß unserer Begriffsbestimmung in § 7 und § 35 oben,

$$a = 1,0659; \quad b = 0,9687; \quad c = 0,9679.$$

§ 38. Die gestrichelte Ellipse in der Figur 53 stelle einen Querschnitt eines elliptisch-zylindrischen Stückes Aragonit dar, dessen Figurachse in der Richtung der größten Elongation des Äthers liegt. Der Durchmesser  $A'A$  sei die Richtung der größten Zusammenziehung und  $B'B$  die des Minimimums (Ausdehnung-Zusammenziehung; tatsächlich tritt in diesem Falle längs dieser Linie eine Verlängerung ein). Der Kreis in der Figur zeigt die ungestörte Lage der Ätherpartikel an, die in dem Kristall in die durch die gestrichelte Ellipse angedeuteten Lagen gezwängt sind. Die Achsen der Ellipse sind beziehungsweise gleich  $1/1,0659$  und  $1/0,9687$  des Durchmessers des Kreises.

Zuerst fassen wir Wellen ins Auge, deren Vorderflächen der Ebene der Zeichnung parallel sind. Wenn ihre Schwingungen parallel  $OA$ , der Richtung der größten Zusammenziehung (sc. im Kristall) verlaufen, sind ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeiten  $1,0659 V$ ; gehen ihre Schwingungen parallel  $OB$ , so sind ihre Geschwindigkeiten  $0,9687 V$ .

Dann fassen wir Wellen ins Auge, deren Vorderflächen senkrecht zur Ebene der Zeichnung sind. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit aller der-

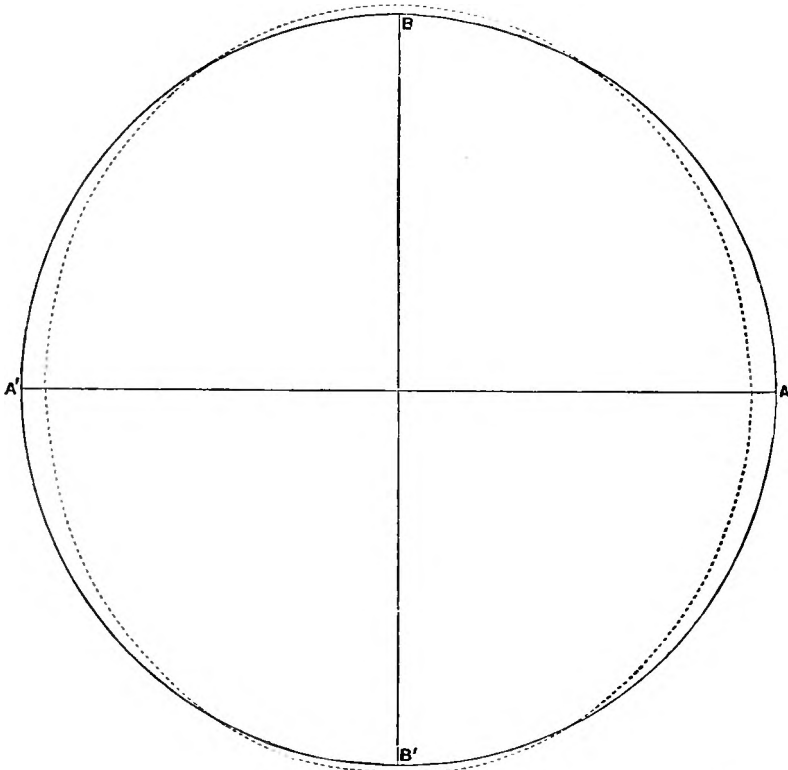


Fig. 53.

jenigen unter ihnen, deren Schwingungen senkrecht zu dieser letzteren Ebene verlaufen, ist  $0,9679 V$ , da ihre Schwingungslinien sämtlich in der Richtung der größten Elongation liegen. Wenn ihre Schwingungen in der Ebene der Zeichnung und parallel  $OA$  verlaufen, ist ihre Geschwindigkeit  $1,0659 V$ ; wenn ihre Schwingungen parallel  $OB$  verlaufen, sind ihre Geschwindigkeiten  $0,9687 V$ . Die erste dieser beiden ist die größte, die andere die kleinste unter den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten aller Wellen, deren Schwingungen in dieser Ebene verlaufen; das Verhältnis der einen zur andern ist  $1,100$ .

§ 39. Es ist interessant bei dem Anschauen unserer Zeichnung, zu bedenken, wie schwach die Drillung des Äthers ist, die gebraucht wird, um im Aragonit die Doppelbrechung hervorzurufen. Wäre die Zeichnung für die Ebene  $ZOX'$  ausgeführt worden, welche die Schwingungslinien für die größte

und kleinste Geschwindigkeit enthält (Verhältnis der größten zur kleinsten 1,101), so wäre die Zunahme der Elliptizität der Ellipse für das Auge gar nicht bemerkbar. Nur ein und einhalb Prozent etwa größer würde sich das Verhältnis des Unterschiedes der Durchmesser der Ellipse zum Durchmesser des Kreises in der entsprechenden Zeichnung für isländischen Spat zeigen (Verhältnis des größten zum kleinsten Brechungsvermögen 1,115). Für salpetersaures Natrium ist das Verhältnis noch etwas größer (1,188). Für alle andern Kristalle, deren Doppelbrechung meines Wissens gemessen ist, ist es kleiner als für isländischen Spat. Bei so kleinen Drillingen des Äthers innerhalb des Kristalles, wie sie die Theorie in allen diesen bekannten Fällen nur erfordert, können wir kaum umhin, die Konstanz unseres Koeffizienten  $q$  anzunehmen, eine Annahme, zu der wir auch gezwungen sind, §§ 20, 25 oben, wenn wir die Theorie den Fresnelschen Gesetzen für das einen Kristall durchdringende Licht anpassen wollen, ohne Rücksicht auf die Größe oder Kleinheit der Doppelbrechung. Hiernach erkennen wir, daß wir in der Tat ohne jede willkürliche Voraussetzung einer oder mehrerer neuen Eigenschaften des Äthers zu dem gelangt wären, was eine vollständige Erklärung der Haupterscheinungen der Doppelbrechung abgibt, wenn wir nur einzusehen vermöchten, wie die Molekel der Materie auf den Äther so einwirken können, daß sie einen Zug liefern, der imstande ist, die Deformation zu erzeugen, mit der wir uns bisher beschäftigt haben. Die Unmöglichkeit, dies einzusehen, hat mich abgehalten und hält mich noch von der Überzeugung ab, daß die Zugtheorie die wahre Erklärung der Doppelbrechung liefert.

§ 40. Jetzt, ganz neuerdings, fiel mir ein, daß die Schwierigkeit möglicherweise überwunden werden könnte, wenn wir, wie mir aus andern Gründen nötig scheint, eine Hypothese über die Bewegung der ponderablen Materie durch den Äther annehmen, die ich vor einem Jahre in einer Freitagsvorlesung, am 27. April 1900, vor der Royal Institution (im vorliegenden Bande als Anhang *B* wieder abgedruckt) und mit etwas mehr Einzelheiten in einer Mitteilung<sup>1)</sup> an die Royal Society of Edinburgh und an den internationalen Physikerkongreß<sup>2)</sup> vergangenen August (Anhang *A* unten) vorgeschlagen habe. Nach dieser Hypothese ist der Äther ein struktureloser, stetiger elastischer Festkörper, der den ganzen Raum durchdringt und zusammen mit den Atomen ponderabler Materie überall, wo ponderable Materie vorhanden ist, Raum erfüllt; dann besteht die Wirkung zwischen ponderabler Materie und Äther in Anziehungen und Abstoßungen innerhalb des von jedem Atom eingenommenen Raumes. Diese Anziehungen und Abstoßungen würden ihrem Wesen nach unwirksam sein, wenn Äther unendlichen Widerstand gegen Kräfte bieten würde, die ihn zusammenzudrücken oder auszudehnen suchen, das heißt, wenn der Äther absolut inkompressibel wäre. Hiernach muß der Äther, während wir zugeben, daß er Kräften, die ihn zusammenzudrücken oder auszudehnen suchen, hinreichend widersteht, um Licht und strahlende Wärme durch Wellen rein transversaler Schwingung (Wellen ohne Volumänderung, wie ich sie genannt habe) zu erklären, dennoch gewissen zusammendrückenden oder ausdehnenden Kräften so weit weichen, daß andere bekannte Tatsachen ebenfalls erklärt werden, die von den gegenseitigen Kräften zwischen

1) Proc. Roy. Soc. Edin. Juli 1900; Phil. Mag. Aug. 1900.

2) Reports, Vol. II. S. 1.

Äther und ponderabler Materie abhängen. Ich habe den Gedanken ausgesprochen,<sup>1)</sup> daß es entgegengesetzt elektrisch geladene Atome sein mögen, die die Eigenschaft haben, den in ihnen befindlichen Äther zusammenzudrücken, beziehungsweise zu verdünnen. Für den Augenblick aber will ich, um unsere Voraussetzungen möglichst zu vereinfachen, annehmen, daß das Kraftgesetz zwischen dem Atom und dem in ihm befindlichen Äther derart sei, daß die mittlere Dichte des Äthers innerhalb des Atoms gleich der Dichte des ungestörten, außerhalb des Atoms befindlichen Äthers ist, und daß konzentrische, sphärische Flächen innerhalb des Atoms Flächen gleicher Dichte sind. Wir können uns leicht vorstellen, daß die Kräfte zwischen Äther und Atomen ungeheuer groß sind im Vergleich mit den außerhalb der Atome durch eine wellenförmige oder eine andere Bewegung des Äthers und durch die Elastizität des Äthers ins Spiel gerufenen, beispielsweise mit denen in den Zwischenräumen zwischen den Atomen in einem festen Körper oder in dem von den Molekeln eines Gases nach der kinetischen Gastheorie durchlaufenen Raume oder in dem in unsern Laboratorien erreichbaren Vakuum oder in dem interstellaren Raume.

§ 41. Um unsern Vorstellungen eine bestimmte Richtung zu geben, mag der Äther in dem zentralen Teile des Atoms Zusammendrückung und in

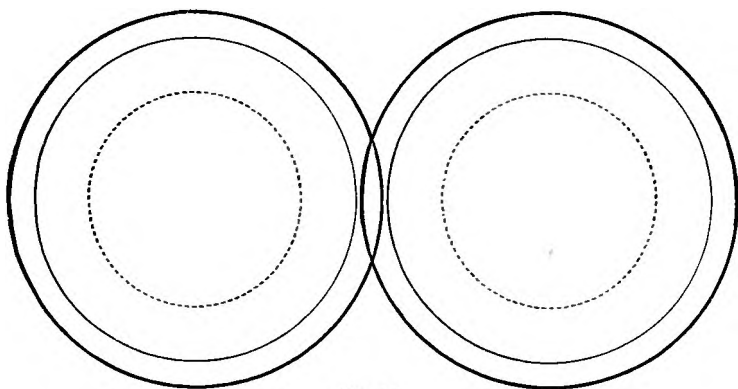


Fig. 54.

dem äußeren Teile Verdünnung erleiden nach dem allgemein in § 5, Anhang A erklärten Gesetze, wie es ins einzelne durch die Formeln (9) und (11) dieses Abschnittes dargestellt und mit numerischen und graphischen Verdeutlichungen für einen besondern Fall in §§ 5—8 beschrieben ist. Eine Betrachtung der Kolonnen 3 und 4 der Tabelle im Anhang A tut dar, daß im Abstände  $r = 0,56$  vom Mittelpunkte des Atoms die Dichte des Äthers gleich der ungestörten Dichte außerhalb des Atoms ist, und daß von  $r = 0,56$  bis  $r = 1$  die Dichte auf ein Minimum 0,35 bei  $r = 0,865$  abnimmt, und dann wieder auf die ungestörte Dichte, 1, an der Grenzfläche des Atoms ( $r = 1$ ) anwächst. In jedem der beiden in Fig. 54 dargestellten Atome wird die sphärische Fläche erster ungestörter Dichte durch einen gestrichelten Kreis, die der geringsten Dichte durch einen dünnen, ausgezogenen und die

1) Congrès International de Physique, Reports, Vol. II S. 19; ferner Phil. Mag. Sept. 1900.

Grenzfläche des Atoms durch einen starken Kreis angedeutet. Da die Ätherdichte vom Mittelpunkte bis zur Fläche geringster Dichte ununterbrochen abnimmt, muß die von dem Atom auf den Äther ausgeübte Kraft innerhalb dieses sphärischen Raumes nach dem Mittelpunkte hin gerichtet, attraktiv, sein; und da die Ätherdichte von der Fläche kleinster Dichte aus nach der Grenzfläche des Atoms hin ununterbrochen wächst, muß die von dem Atom auf den Äther ausgeübte Kraft in jedem Teile der außerhalb jener Fläche befindlichen Schale eine repulsive sein.

§ 42. Jetzt setzen wir voraus, daß zwei Atome irgendwie in einer Lage zueinander gehalten werden, wie sie in Fig. 54 dargestellt ist, daß sie nämlich in einem linsenförmigen Raume übereinandergreifen, der außerhalb der Fläche kleinster Ätherdichte in jedem der beiden Atome liegt. Die Verdünnung des Äthers in diesem linsenförmigen Raume ist vermöge der vereinten Wirkung der beiden Atome größer als in den nicht übereinandergreifenden Teilen der beiden Atome, die sich in gleichen Abständen von den Mittelpunkten befinden. Erinnern wir uns, daß jedes Atom den Äther in seinen zentralen Teilen anzieht, in jedem außerhalb der Fläche kleinster Dichte befindlichen Teile ihn aber abstößt, so sehen wir demnach ein, daß die von jedem Atom auf den in dem linsenförmigen Raume, in dem die Atome übereinandergreifen, befindlichen Äther ausgeübte Abstoßung kleiner ist als die Abstoßung in entgegengesetzter Richtung auf einen gleichen und ähnlichen Teil des in ihm auf der anderen Seite von seinem Mittelpunkte aus befindlichen Äthers. Demgemäß gibt die Reaktion des Äthers auf die Atome Kräfte, die die Atome einander zu nähern suchen, also scheinbare Anziehungen. Diesen scheinbaren Anziehungen wird durch Abstoßungen zwischen den Atomen selbst das Gleichgewicht gehalten, wenn zwei Atome, wie in Fig. 54 angedeutet, gleichwohl in Ruhe bleiben. Es erscheint nicht unwahrscheinlich, daß dies die Kräfte sind, die an dem Gleichgewichte der beiden Atome der bekannten zweiatomigen Gase  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $H_2$  mitwirken. Ich nehme an, daß das Verhalten der Kräfte zwischen Äther und Atomen und das der Elastizität des Äthers unter dem Einfluß dieser Kräfte derartig ist, daß kein außerhalb der Atome befindlicher Teil des Äthers irgendeine Verschiebung erleidet infolge der innerhalb des von diesen Atomen einzeln und von den beiden Atomen in dem von ihnen zugleich eingenommenen Raume gemeinsam tatsächlich hervorgerufenen Verschiebungen. Diese Annahme schließt die weitere ein, daß der aus dem linsenförmigen Raume, in dem die Atome ineinandergreifen, vermöge der hier stattfindenden besonderen Verdünnung fortgetriebene Äther infolge der Anziehungen der Atome auf den Äther der zentralen Gegenden in diese zentralen Gegenden der beiden Atome gezogen wird. In einem Zusatze zur achtzehnten Vorlesung über die Reflexion und die Brechung des Lichtes werde ich Gelegenheit haben, diese Annahme zu erläutern und zu begründen.

§ 43. Als eine Darstellung eines optisch isotropen Kristalles fassen wir eine homogene Ansammlung von Atomen auf, die wir der Einfachheit wegen uns in einer würfelförmigen Anordnung, wie sie in Fig. 55 gezeigt ist, vorstellen. Jedes der am Rande befindlichen Atome erleidet von dem in seinem Innern befindlichen Äther eine nach innen gerichtete resultierende Kraft, und dieser wird durch die Abstoßung das Gleichgewicht gehalten, die das ihm nächste, nach innen liegende Atom auf dieses Atom ausübt. Für jedes Atom



außer denen, die an den Außenflächen liegen, halten die Kräfte, mit denen der in ihm befindliche Äther in verschiedenen Richtungen auf dasselbe einwirkt, einander das Gleichgewicht; und dasselbe tun die Kräfte, mit denen die es umgebenden Atome auf das Atom wirken. Aber jedes an der Außenfläche befindliche Atom erleidet eine resultierende Abstoßung von den anderen es berührenden Atomen, und dieser nach außen gerichteten Abstoßung wird durch die entgegengesetzte Anziehung das Gleichgewicht gehalten, die der Äther auf das Atom ausübt. Demnach üben alle an der Außengrenze des Kristallwürfels liegenden Atome auf den innerhalb des ihn enthaltenden Würfels befindlichen Äther einen nach außen gerichteten Zug aus. In Übereinstimmung mit der am Ende des § 42 ausgesprochenen Annahme bleibt die Lage und Form eines jeden außerhalb der Atome befindlichen Ätherteilchens ungestört durch die Kräfte, die von den Atomen in dem von ihnen einzeln und gemeinsam eingenommenen Raume ausgeübt werden; und nur in diesen Räumen wird der Äther durch die Atome gestört.

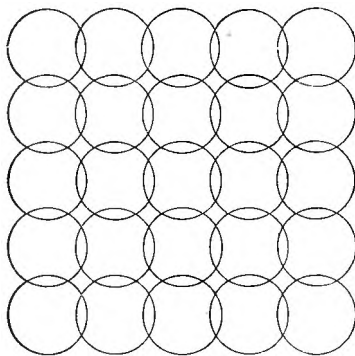


Fig. 55.

§ 44. Jetzt setzen wir voraus, daß durch Kräfte, die auf die Atome in der durch die Pfeile in Fig. 56 angedeuteten Weise wirken, die Zwischenräume zwischen den Mittelpunkten benachbarter Atome, wie es in der Zeichnung gezeigt ist, nach einer Richtung vergrößert, und nach der dazu senkrechten verkleinert werden. Bei dieser Anordnung der Atome wird der Äther von den Atomen in den mit  $AC$  und  $BD$  parallelen Richtungen stärker nach außen getrieben als in den zu  $AB$  und  $CD$  parallelen. Da aber (§§ 42, 43 oben) der Äther in den Zwischenräumen zwischen den Atomen weder einer Deformation, noch einem Zwange ausgesetzt sein soll, so erleidet demnach der innerhalb der Atome befindliche Äther einen Überschuß an auswärts treibendem Zuge in der Richtung parallel zu  $AC$  und  $BD$  über den Zug, der in den zu dieser Richtung senkrechten Linien auswärts treibend wirkt. So würde, wenn keine Äolotropie der Trägheit vorhanden wäre und wenn die Deformationstheorie, die wir (§§ 35, 36) für homogenen Äther durchgeführt haben, auf die durchschnittliche Wirkung des gesamten Äthers mit seinen großen Ungleichheiten der Dichte in dem von einer Atomanhäufung eingenommenen Raume anwendbar sein sollte, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Drillungswellen größer sein, wenn die Schwingungsrichtung parallel

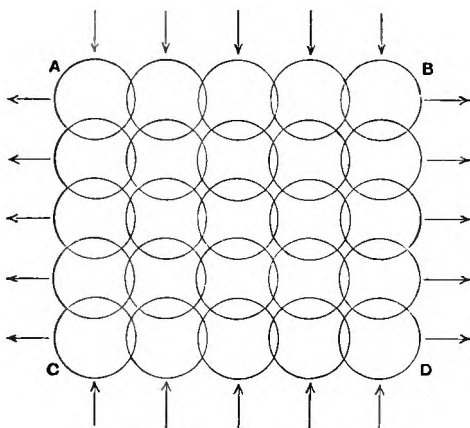


Fig. 56.

$AC$  und  $BD$  ist, als wenn sie parallel  $AB$  und  $CD$  ist. Aber leider! ist dies genau das Umgekehrte von dem, was vor vierzehn Jahren Kerr durch eine experimentelle Untersuchung von streng beweisender Art für die von David Brewster siebzig Jahre vorher entdeckte doppelbrechende Wirkung von ungleichmäßig gepreßtem Glase<sup>1)</sup> gefunden hat. Wir sind also gezwungen zuzugeben, daß eines unserer beiden „wenn“ oder daß beide nicht zutreffen.

§ 45. Es scheint mir jetzt einer Untersuchung wert, ob die wahre Erklärung der Doppelbrechung eines natürlichen Kristalles oder eines ungleichmäßig gepreßten Glasstückes möglicherweise die ist, die Glazebrook in einer anderen in demselben Bande des Philosophical Magazine, wie die bereits zitierte von Kerr, veröffentlichten Abhandlung<sup>2)</sup> angegeben hat. Glazebrook machte die bemerkenswerte Entdeckung, die in seiner Gleichung (14) (S. 525) ausgedrückt ist, daß, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Verdichtungs-Verdünnungswelle Null ist, die von der Äolotropischen Trägheit herrührenden beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Drillungswellen mit der gleichen Wellenfront<sup>3)</sup> dieselben sind wie die durch meine Gleichung (94), ursprünglich von Fresnel, angegebenen; hieraus folgt, daß die Wellenfläche genau die Fresnelsche ist. Es ist sicher ein höchst interessantes Resultat, daß die Wellenfläche genau die Fresnelsche sein soll, gleichviel ob die optische Äolotropie von einer Differenz der Elastizität in verschiedenen Richtungen in einem inkompressibeln elastischen Festkörper oder von einer Äolotropie der Trägheit in einem ideal elastischen Festkörper herrührt, der auch einen negativen Kompressibilitätsmodul von genau der Größe besitzt, daß durch ihn die Geschwindigkeit der Verdünnungs-Verdichtungswelle Null wird. In der Theorie von Glazebrook ist die Schwingungsrichtung senkrecht zur Linie des Strahles und erleidet der Festkörper bei der schwingenden Bewegung eine geringe Raumänderung verbunden mit reiner Drillung. Nach der Deformationstheorie der §§ 7—34 liegt die Schwingungslinie genau in der Wellenfront und senkrecht zur Wellennormale und tritt keine Raumänderung ein.

§ 46. In der achtzehnten Vorlesung, wenn wir uns mit der Reflexion und Brechung des Lichtes zu befassen haben, werden wir sehen, daß die Formel für die drei Strahlen, den einfallenden, den reflektierten und den gebrochenen, wenn die Schwingungslinie in ihrer Ebene liegt, eine strenge mechanische Folgerung aus der Annahme ist, daß die Geschwindigkeit der Verdichtungs-Verdünnungswelle in beiden Medien Null ist, oder auch nur in einem der Medien, wenn das andere sich inkompressibel verhält. Aber die Schwierigkeiten, die darin bestehen, daß man die Geschwindigkeit der Verdichtungs-Verdünnungswellen im ungestörten Äther des ganzen Raumes sowie in dem zwischen den Atomen ponderabler Materie befindlichen gleich Null annehmen soll, sind nicht überwunden.

1) „Experiments on the Birefringent Action of Strained Glass“, Phil. Mag. Oct. 1888, S. 339.

2) „On the Application of Sir William Thomsons Theorie of a Contractile Ether to Double Refraction, Dispersion, Metallic Reflexion, and other Optical Problems.“ Phil. Mag. Dec. 1888, S. 524.

3)  $l$ ,  $m$ ,  $n$  sind in der Abhandlung von Glazebrook die Richtungskosinus der Normale zur Wellenfront, dagegen  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  in meinen Formeln in §§ 18, 21, 33, 34 oben.

§ 47. Man bemerkt (§§ 3, 4, 7, 21, 22, 24, 25, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 45 oben), daß nach vierzehnjähriger ernstlicher und vielversprechender Betrachtung der Deformationstheorie der Doppelbrechung ich nicht imstande bin zu sehen, wie sie eine richtige Erklärung der Doppelbrechung liefern kann, weder für natürliche Kristalle noch für isotrope Festkörper, die ungleichen Pressungen in verschiedenen Richtungen unterworfen sind.<sup>1)</sup> Nichtsdestowenige rhaben die mathematischen Untersuchungen der §§ 7—21 und §§ 24—34, wie sie für die abstrakte Mechanik eines inkompressibeln elastischen Festkörpers von Bedeutung sind, auch eine wichtige Anwendbarkeit auf den Einfluß ponderabler Materie auf Äther. Sie beweisen in Wirklichkeit die Richtigkeit der Annahme am Ende des § 42, obwohl die Kräfte innerhalb der Atome immer noch zu erklären bleiben; denn jede Drillung von Äther in dem einen Kristall umgebenden Raume, auch wenn sie so gering ist wie die in der obigen Fig. 53 § 38 anschaulich gemachte, würde in der außerhalb des Kristalles befindlichen Luft oder im Vakuum eine Doppelbrechung hervorrufen, die zwar außerhalb nicht so groß ist wie im Innern des Kristalls, immerhin aber dicht an ihm nicht wesentlich kleiner sein kann. Sie nimmt zwar mit der Entfernung vom Kristalle ab, aber in einem Abstände von einigen Durchmessern der Masse sollte sie noch vollkommen merklich sein.

1) Am Ende dieser so merkwürdigen Vorlesung möchte ich auch meiner Ansicht Ausdruck geben, daß ich nämlich es überhaupt für ausgeschlossen halte, auf dem Wege der üblichen Lehren, sei es ohne, sei es mit Zuhilfenahme von Wirkungen substantieller Atome, zu einer befriedigenden Elastizitätstheorie und Wellentheorie zu gelangen. Es scheint mir unmöglich, solche Theorien zu schaffen, solange man die inneren Kräfte explizit annimmt, statt sie mit den Bewegungen aus einem Satz simultaner Differentialgleichungen zu berechnen. Ich habe hierüber in meiner „Thermodynamik“, Bd. I, S. 310 ff., eingehend gehandelt und dort auch an Beispielen gezeigt, wie außerordentlich z. B. die Ausdrücke für die Elastizitätskräfte in Gasen, aus den simultanen Gleichungen abgeleitet, von denen der üblichen Theorie abweichen, und wie sich diese Ausdrücke überhaupt nach dem Problem richten, so daß sich allgemeine Formeln gar nicht angeben lassen. Ich mühe mich seit längerer Zeit mit einer Entwicklung dieser Ansicht für die Wellenlehre ab. Aber sie ist so schwierig, daß ich nicht recht vorwärts komme, man hat ja sich mit 9 Differentialgleichungen mehr zu plagen und kennt noch nicht einmal diese 9 Differentialgleichungen ausreichend.

D. H.

## Sechzehnte Vorlesung.

### Äthereigenschaften, die Himmelskörper und ihre Bewegung.

[Das Folgende war Gegenstand einer Doppelvorlesung; da aber der Inhalt des ersten Theiles, mit Erweiterungen, die sich teilweise auf experimentelle Entdeckungen verschiedener Forscher stützen, die erst in der Zwischenzeit ausgeführt sind, in den mit Daten versehenen Zusätzen zu den Seiten 118 bis 125 und 140 bis 146 oben bereits mitgeteilt ist, wird hier nur der zweite Teil gegeben.]

Ich möchte jetzt etwas näher auf das einzelne bezüglich der absoluten Größe der Massen und Energien eingehen, damit nichts in unsern Anschauungen über diesen Teil unseres Gegenstandes unbestimmt bleibe; und ich fange damit an, daß ich eine alte Arbeit von mir über die Energie des Sonnenlichtes und die Dichte des Äthers vorlese und erläutere.<sup>1)</sup>

Bemerkung über die mögliche Dichte des lichtführenden Mediums und über den mechanischen Wert einer Kubikmeile<sup>2)</sup> Sonnenlicht.

[Aus Edin. Roy. Soc. Trans. Vol. XXI, Part I, May 1854; Phil. Mag. IX, 1854; Comptes Rendus XXXIX, Sept. 1854; Art. LXVII der Math. and Phys. Papers.]

§ 1. Daß ein Medium existieren muß, welches eine stetige materielle Verbindung im Raume bis zu dem fernsten sichtbaren Körper bildet, ist eine grundlegende Annahme in der Wellentheorie des Lichtes. Ob dieses Medium eine Fortsetzung unserer eigenen Atmosphäre ist (wie es mir am wahrscheinlichsten<sup>4)</sup> dünkt) oder nicht, seine Existenz ist eine Tatsache, die nicht in Frage gestellt werden kann, in Anbetracht des überwältigenden Einleuchtens der Wellentheorie. Die Untersuchung seiner Eigenschaft mit allen zugänglichen Mitteln ist darum ein Gegenstand höchsten Interesses.

---

1) 20. Nov. 1899 . . . 28. März 1901. Von hier ab bis zum Ende der Vorlesungen sollen die Abschnitte fortlaufend numeriert werden.

2) [Bemerkung vom 22. Dez. 1892. Die hirnerwüstende Verkehrtheit der insularen Trägheit, die die englischen Techniker noch verdammt, nach Meilen, Yard, Fuß, nach Gran, Pfund, Unzen, Acres zu rechnen, wird in merkwürdiger Weise illustriert durch die Überschrift und die numerischen Resultate dieses Aufsatzes, wie sie ursprünglich veröffentlicht sind.] (Man kann sich nur freuen, daß dies der Engländer sagt. Inzwischen macht das metrische Maßsystem doch auch in England Fortschritte, die Schwierigkeit seiner Einführung liegt anscheinend mehr auf sozialpolitischem Gebiete. D. H.)

3) [13. Okt. 1899. In dem vorliegenden Wiederabdruck als Teil meiner Vorlesung XVI in Baltimore, 1884, führe ich Kubikkilometer an Stelle der in der Überschrift genannten „Kubikmeile“ ein und benutze in dem Aufsatz selbst ausschließlich das französische metrische System.]

4) [13. Okt. 1899. — Jetzt nicht mehr so. Im Jahre 1854 kannte ich noch nicht die kinetische Gastheorie.]

Als erste Frage bietet sich uns naturgemäß diese: Was ist die absolute Dichte des Lichtäthers in einem beliebigen Teile des Raumes? Es ist mir nicht bekannt, daß bisher irgendein Versuch gemacht ist, diese Frage zu beantworten, und der augenblickliche Stand der Wissenschaft liefert auch nicht hinreichende Tatsachen zur Beantwortung dieser Frage. Es ist mir jedoch in den Sinn gekommen, daß man wohl eine untere Grenze für die Dichte des lichtführenden Mediums in dem interplanetaren Raume feststellen kann, wenn man den mechanischen Wert des Sonnenlichtes in Betracht zieht, wie er in früheren Mitteilungen an die Royal Society [Trans. R. S. E.; Mechanical Energies of the Solar System; neuveröffentlicht in Art. LXVI der Math. and Phys. Papers] aus den Angaben von Pouillet über die Sonnenstrahlung und aus Joules mechanischem Äquivalent der Wärmeeinheit abgeleitet ist. So ist der auf 1235 g cm geschätzte Wert der Sonnenstrahlung in der Sekunde für das Quadratcentimeter im Abstände der Erde von der Sonne derselbe wie der mechanische Wert von Sonnenlicht im lichtführenden Medium in einem Raume von so vielen Kubikcentimetern wie die Zahl der Zentimeter, die die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in der Sekunde ausmacht.<sup>1)</sup> Demgemäß ist der mechanische Wert der ganzen Energie, der kinetischen und der potentiellen, der Störung, die in dem Raume eines Kubikcentimeters im Abstände der Erde von der Sonne<sup>2)</sup> bewirkt wird,

$$\frac{1235}{3 \times 10^{10}} \text{ oder } \frac{412}{10^{10}} \text{ Zentimeter-Gramm.}$$

§ 2. Der mechanische Wert eines Kubikkilometers Sonnenlicht auf der Erde ist folglich 412 Meter-Kilogramm, also äquivalent der Arbeit einer Pferdekraft für 5,4 Sekunden. Dieses Resultat vermag eine gewisse Vorstellung von dem wirklichen Betrage an mechanischer Energie der Lichtbewegungen und Kräfte innerhalb unserer eigenen Atmosphäre zu geben. Um nur die Durchleuchtung von 11 Kubikkilometer zu beginnen, ist ein Betrag an Arbeit erforderlich, der einer Pferdekraft für eine Minute gleichkommt; derselbe Betrag an Energie besteht in dem Raume, solange das Licht fortfährt ihn zu durchsetzen; und wenn die Lichtquelle plötzlich aufhört, muß diese Menge ihn verlassen, ehe die Beleuchtung aufhört.<sup>3)</sup> Die Materie, die diese Energie besitzt, ist das lichtführende Medium. Wenn wir dann noch die Geschwindigkeit der schwingenden Bewegungen kennen, sind wir imstande, die Dichte des lichtführenden Mediums festzustellen; oder umgekehrt, wenn wir die Dichte des Mediums kennen, vermögen wir die durchschnittliche Geschwindigkeit der schwingenden Partikel zu bestimmen.

§ 3. Ohne jede derartige Kenntnis vermögen wir eine obere Grenze für die Geschwindigkeiten anzugeben und aus dieser eine untere Grenze für die

1) Nach bekannten Lehren, vgl. auch S. 168.

D. H.

2) Der mechanische Wert des Sonnenlichtes in irgendeinem Raume nahe der Sonnenoberfläche muß größer sein als in einem gleich großen Raume im Abstände der Erde im Verhältnis des Quadrates der Erdferne zum Quadrate des Sonnenradius, das heißt annähernd wie 46000 zu 1. Der mechanische Wert eines Kubikcentimeters Sonnenlicht nahe der Sonne muß demnach sein  $\frac{1235 \times 46000}{3 \times 10^{10}}$ , oder etwa 0,0019 Zentimeter-Gramm.

3) Ähnlich finden wir 4140 Pferdekraften für eine Minute als den Betrag an Arbeit, der erforderlich ist, die Energie zu erzeugen, die in einem Kubikkilometer Licht nahe der Sonne besteht.

Menge Materie abzuleiten, indem wir die Natur der Bewegungen betrachten, die die Lichtwellen ausmachen. Denn es erscheint sicher, daß die Amplituden der die strahlende Wärme und das Licht bildenden Bewegungen nur kleine Bruchteile der Wellenlängen sind und daß die größten Geschwindigkeiten der schwingenden Partikel sehr klein sein müssen im Vergleich mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen.<sup>1)</sup>

§ 4. Betrachten wir beispielsweise homogenes, ebenpolarisiertes Licht; die größte Schwingungsgeschwindigkeit werde mit  $v$ , der Abstand, bis zu dem eine Partikel nach jeder Seite von ihrer Gleichgewichtslage aus schwingt, mit  $A$  und die Wellenlänge mit  $\lambda$  bezeichnet. Dann ist, wenn  $V$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Licht oder strahlender Wärme genannt wird,

$$\frac{v}{V} = 2\pi \frac{A}{\lambda};$$

und wenn  $A$  ein kleiner Bruchteil von  $\lambda$  ist, muß folglich auch  $v$  ein kleiner Bruchteil (ein  $2\pi$  mal so großer) von  $V$  sein. Dieselbe Beziehung gilt auch für zirkularpolarisiertes Licht, da in der Zeit, in der eine Partikel einmal sich in einem Kreise vom Radius  $A$  herumbewegt, die Welle um eine Strecke  $\lambda$  fortgeschritten ist. Nun besteht der ganze mechanische Wert von homogenem ebenpolarisiertem Lichte, das sich in einem unendlich kleinen, nur Partikel in merklich derselben Schwingungsphase enthaltenden Raume befindet, in den Augenblicken, in denen sich die Partikel an den Endpunkten ihrer Ausschläge aufhalten, lediglich aus potentieller Energie, wenn sich die Partikel nach ihren Gleichgewichtslagen hin- oder von ihnen fortbewegen, teils aus potentieller, teils aus kinetischer Energie, und ganz aus kinetischer Energie, wenn sie durch diese Lagen hindurchgehen. Der ganze Wert der Energie hat aber einen konstanten Betrag, also muß die Energie in jedem Augenblicke gleich sein der halben Masse multipliziert mit dem Quadrate der Geschwindigkeit, die die Partikel in dem letzterwähnten Falle besitzen. Die Geschwindigkeit einer beliebigen Partikel, die durch ihre Gleichgewichtslage schwingt, ist aber die größte Schwingungsgeschwindigkeit. Diese haben wir mit  $v$  bezeichnet; und wenn wir noch  $\rho$  die Menge schwingender Materie nennen, die in einem gewissen Raume, beispielsweise in einer Raumeinheit enthalten ist, beträgt der gesamte mechanische Wert der ganzen Energie, sowohl der kinetischen wie der potentiellen, der Störung in diesem Raume in einer beliebigen Zeit  $\frac{1}{2} \rho v^2$ . Die mechanische Energie zirkularpolarisierten Lichtes in jedem Augenblicke ist (wie von Professor Stokes mir gegenüber hervorgehoben ist) halb kinetische Energie der rotierenden Partikel und halb potentielle Energie der in dem lichtführenden Medium unterhaltenen Drilling; und demnach liefert, wenn  $v$  zur Bezeichnung der konstanten Geschwindigkeit der Bewegung jeder einzelnen Partikel gewählt wird, das Doppelte des vorigen Ausdruckes den mechanischen Wert der ganzen Störung in einer Volumeneinheit im vorliegenden Falle.

§ 5. Es ist hiernach klar, daß für jede Art elliptisch polarisierten Lichtes der mechanische Wert der Störung in einer Volumeneinheit zwischen  $\frac{1}{2} \rho v^2$  und  $\rho v^2$  liegt, wo mit  $v$  wieder die größte Geschwindigkeit der schwingenden Teilchen bezeichnet ist. Der mechanische Wert der von einer Anzahl

1) Wie ja auch in den Meereswellen.

nebeneinander bestehender, in derselben Ebene polarisierter Wellenreihen mit verschiedenen Perioden unterhaltenen Störung ist die Summe der von jeder homogenen Reihe einzeln herrührenden mechanischen Werte, und die größte Geschwindigkeit, die von irgendeinem der schwingenden Teilchen möglicherweise erreicht werden kann, ist die Summe der einzelnen, von den verschiedenen Reihen herrührenden Geschwindigkeiten. Genau dieselbe Bemerkung gilt für nebeneinander bestehende Reihen zirkularpolarisierter Wellen verschiedener Perioden. Demnach ist der mechanische Wert sicher kleiner als die Hälfte des Produktes aus der Masse und dem Quadrate der größten von einem Teilchen erlangten Geschwindigkeit, wenn die Störung in der Über-einanderlagerung verschiedener Reihen ebenpolarisierter Wellen besteht; und wir dürfen für jede Art Strahlung von Licht oder Wärme, außer für eine Reihe homogener zirkularpolarisierter Wellen, schließen, daß der mechanische Wert der in irgendeinem Raume aufrechterhaltenen Störung kleiner ist als das Produkt aus der Masse und dem Quadrate der größten von einem Teilchen in den verschiedenen Phasen seiner Bewegung erlangten Geschwindigkeit. Wieviel kleiner er in einem Strahlungskomplex wie dem Sonnenlicht oder der Sonnenwärme ist, können wir nicht sagen, da wir nicht wissen, wie hoch die Geschwindigkeit eines Teilchens in irgendeinem Augenblicke vermöge der Übereinanderlagerung verschiedener Bewegungen anwachsen kann; vielleicht vermöchte es, indem zufällig die sich übereinanderlagernden Bewegungen im Sinne übereinstimmen, sogar zu einem Betrage sein, der im Vergleiche mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit beträchtlich ist. Wir können aber sicher sein, daß das Produkt aus der Masse und dem Quadrate einer gewöhnlich vorkommenden Maximalgeschwindigkeit oder dem Mittel aus einer großen Menge maximaler Geschwindigkeiten eines schwingenden Teilchens den wahren mechanischen Wert der Störung nicht in irgendwie erheblichem Grade übersteigen kann.

§ 6. Nehmen wir jedoch auch den bestimmten Ausdruck für den mechanischen Wert der Störung bei homogenem, zirkularpolarisiertem Lichte, dem einzigen, in dem die Geschwindigkeiten aller Teilchen konstant und die nämlichen sind, hinzu, so können wir allgemein in einem beliebigen Falle die mittlere Geschwindigkeit als eine solche Geschwindigkeit definieren, daß das Produkt aus ihrem Quadrate und der Masse des schwingenden Teilchens gleich ist dem gesamten mechanischen Werte der kinetischen und potentiellen Energie der Störung in einem bestimmten von dem Teilchen durchlaufenen Raume; und nach allem, was wir über die mechanische Theorie von Schwingungen wissen, scheint es sicher, daß diese Geschwindigkeit ein sehr kleiner Bruchteil der Fortpflanzungsgeschwindigkeit sein wird, auch in dem Lichte oder der strahlenden Wärme höchster Intensität, wenn sie sich nur nach den bekannten Gesetzen ausbreiten. Bezeichnet man für den Fall von Sonnenlicht im Abstände der Erde von der Sonne diese Geschwindigkeit mit  $v$  und nennt man  $W$  die in Gramm ausgedrückte Masse irgendeines Volumens des Lichtäthers, so erhalten wir für den mechanischen Wert der Störung in eben diesem Raume in Gravitationseinheiten an der Erdoberfläche

$$E = \frac{W}{g} v^2,$$

wo  $g$  die Zahl 981 bedeutet, die in absoluten Kräfteinheiten (cm. g. s.) die Schwerkraft auf ein Gramm mißt. Nun haben wir nach der Beobachtung von Pouillet in der letzten Anmerkung zu dem obigen § 1  $\frac{1235 \times 46000}{V}$

für den mechanischen Wert eines Kubikzentimeters Sonnenlicht in der Nähe der Sonne in Zentimeter-Gramm gefunden; demnach muß die Masse eines Kubikzentimeters Äther, in Gramm ausgedrückt, gegeben sein durch die Gleichung

$$W = \frac{981 \times 1235 \times 46000}{v^2 V}.$$

Wenn wir  $v = \frac{1}{n} V$  annehmen, geht dies über in

$$\begin{aligned} W &= \frac{981 \times 1235 \times 46000}{V^3} \times n^2 = \frac{981 \times 1235 \times 46000}{(3 \times 10^{10})^3} \times n^2 \\ &= \frac{20,64}{10^{22}} \times n^2 \text{ Gramm;} \end{aligned}$$

und für die Masse eines Kubikkilometers, in Gramm ausgedrückt, finden wir

$$W' = \frac{20,64}{10^{22}} \times n^2.$$

§ 7. Es ist vollkommen unmöglich, eine bestimmte Grenze für das Verhältnis festzustellen, in dem  $v$  zu  $V$  steht; es erscheint aber unwahrscheinlich, daß  $v$  größer als etwa  $\frac{1}{50} V$  für irgendeine Lichtart ist, die den beobachteten Gesetzen folgt. Wir dürfen schließen, daß ein Kubikzentimeter des lichtführenden Mediums in dem Raume nahe der Sonne wahrscheinlich nicht weniger als  $516 \times 10^{-20}$  Gramm Materie und ein Kubikkilometer nicht weniger als  $516 \times 10^{-5}$  Gramm enthält.

§ 8. [16. Nov. 1899. Wir haben starken Grund zu der Meinung, daß die Dichte des Äthers im ganzen interplanetaren und interstellaren Raume die gleiche ist. Wenn man die Dichte des Wassers entsprechend dem konventionellen französischen metrischen System als Einheit wählt, besagen demnach die obigen Angaben, daß die Dichte des Äthers im Vakuum oder einem von jeder ponderablen Materie befreiten Raume überall wahrscheinlich nicht kleiner als  $5 \times 10^{-18}$  ist.

Demgemäß wird die Starrheit (da sie dem Produkte aus der Dichte und dem Quadrate der Lichtgeschwindigkeit gleich ist) nicht kleiner sein als 4500 Dyn.<sup>1)</sup> pro Quadratcentimeter. Bei diesem überaus hohen Betrage der unteren Grenze für die Starrheit des Äthers ist es, wie wir in einem Zusatze zur neunzehnten Vorlesung sehen werden, fast unmöglich, sich mit irgendwelchen Annahmen über die Größe der Molekeln und über den Starrheitsmodul des Äthers für Bruch eine strahlende Molekel vorzustellen, die sich durch den Äther bewegt und dabei den Äther verschiebt sowohl vermöge der translatorischen als auch der schwingenden Bewegungen. Ebenso ist es unmöglich, die bekannte Kleinheit des Ätherwiderstandes gegen die

1) Vgl. Math. and Phys. Papers, Vol. III, S. 522; und setze in der letzten Reihe der Tab. 4 an Stelle von „ $q > 10^{-22}$ “: „ $q < 10^{-22}$ “.



Bewegungen der Planeten und Kometen oder kleinerer ponderabler Körper wie derer zu erklären, mit denen wir in unserm Heim an der Erdoberfläche umgehen und experimentieren können, wenn der Äther zur Seite gestoßen werden muß, um dem Körper, der sich durch ihn bewegt, die Bahn freizumachen. Wir werden uns also gezwungen sehen, die Notwendigkeit gewisser Hypothesen für die freie Bewegung ponderabler Körper durch den Äther hindurch ins Auge zu fassen, nach denen er nur durch Verdichtungen und Verdünnungen gestört wird, ohne daß zugleich Ausfüllung desselben Raumes nacheinander durch die beiden Substanzen eintritt.] Vgl. Phil. Mag. Aug. 1900, S. 181—198.

§ 9. Ich möchte eine kurze Rechnung durchführen, um zu zeigen, eine wie große drückende Kraft durch die Sonnenanziehung auf den Lichtäther ausgeübt wird. Wir sind gewohnt, den Äther imponderabel zu nennen. Wie können wir aber wissen, daß er imponderabel ist? Wenn wir nie mit der Luft anders als durch die Sinne in Verbindung gekommen wären, bestünde die Luft für uns imponderabel; wir wissen aber durch den Versuch, daß eine evakuierte Glaskugel eine Gewichtszunahme zeigt, wenn man Luft in sie einfließen läßt. Wir haben nicht den geringsten Grund zu glauben, daß der Lichtäther imponderabel ist. [17. Nov. 1899. Ich sehe jetzt, daß wir den stärkst möglichen Grund haben zu glauben, daß der Äther in der Tat imponderabel ist.] Er wird ebenso von der Sonne angezogen wie die Luft. Jedenfalls bleibt die Last des Beweises bei denen, die behaupten, daß er imponderabel ist. Oder, wir werden unsere Anschauungen über das, was Gravitation ist, abändern müssen, wenn wir eine Substanz vor uns haben, die sich im Raume ausbreitet mit einer Anziehung zwischen ihren Teilen, ohne von andern Körpern angezogen zu werden. [17. Nov. 1899. Besteht aber irgendeine Gravitationsanziehung zwischen verschiedenen Äthermengen? Sicher nicht, es sei denn, daß der Äther entweder unendlich widerstandsfähig gegen Verdichtung ist, oder daß nur eine begrenzte Raumgröße von ihm ausgefüllt wird. Wir nehmen an, daß Äther im Raume bis auf unendlich große Entfernungen nach allen Richtungen ausgebreitet ist. Jede hinreichend große kugelförmige Menge desselben würde, wenn ihre Oberfläche absolut festgehalten wird, durch die gegenseitige Gravitation ihrer Teile heterogen werden; und dieser Tendenz könnte sicher nicht dadurch entgegengewirkt werden, daß man die vorausgesetzte Starrheit der Grenzfläche beseitigte, und auch nicht durch die nach außen sich ins Unendliche erstreckende Ätheranziehung. Der Druck im Mittelpunkte einer kugelförmigen Menge homogener, gravitierender Materie ist dem Quadrate des Radius proportional und kann demnach, wenn man die Kugel groß genug macht, so groß gemacht werden, wie man will, welches auch die Dichte sei. In der Tat würde homogener Äther, bei gegenseitiger Gravitation zwischen seinen Teilen, wenn er sich über den ganzen Raum erstreckt, seinem Wesen nach instabil sein, es sei denn, daß er unendlichen Widerstand gegen zusammendrückende oder ausdehnende Kräfte leistet. Wenn wir annehmen, daß Äther bis zu einem gewissen Grade zusammendrückbar und ausdehnbar ist, und wir meinen, daß er sich über den ganzen Raum erstreckt, dann müssen wir schließen, daß keine gegenseitige Gravitation zwischen seinen Teilen besteht, und wir können nicht glauben, daß er durch Gravitation von der Sonne, der Erde oder von irgendeiner ponderablen Materie angezogen wird; das heißt, wir müssen

zu der Anschauung kommen, daß der Äther eine Substanz ist, für die das allgemeine Gravitationsgesetz nicht gilt.<sup>1)</sup>

§ 10. Inzwischen ist es eine interessante und bestimmte Frage, darüber nachzudenken, welches Gewicht eine Säule aus Lichtäther von unendlicher Höhe, die auf der Sonne ruht, besitzen würde, wenn man die Sonne als kalt und ruhend annimmt und für einen Augenblick voraussetzt, daß der Äther durch Gravitation von der Sonne so angezogen wird, wie wenn er ponderable Materie von der Dichte  $5 \times 10^{-18}$  wäre. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze ist das Gewicht einer gleichförmigen vertikalen Säule  $AB$  von der Masse  $w$  pro Längeneinheit, deren Längsrichtung durch den Kraftmittelpunkt  $C$  geht,

$$\frac{mw}{CA} - \frac{mw}{CB}; \text{ oder } \frac{mw}{CA}, \text{ wenn } CB = \infty \text{ ist,}$$

wo mit  $m$  die Anziehung auf die Masseneinheit im Einheitsabstande bezeichnet ist. Setzen wir  $mwCA/CA^2$  für  $mw/CA$ , so sehen wir, daß die Anziehung auf eine unendliche Säule unter dem Einfluß einer dem Quadrate des Abstandes vom Mittelpunkte umgekehrt proportionalen Kraft gleich ist der Anziehung auf eine Säule, deren Länge dem Abstände ihres näheren Endes vom Mittelpunkte gleich ist, und die durch eine gleichförmige Kraft angegriffen wird, die der auf das dem Mittelpunkte nähere Ende wirkenden Schwerkraft gleichkommt. Der Sonnenradius ist  $697 \times 10^8$  cm und die Schwerkraft an ihrer Oberfläche ist 27 mal<sup>2)</sup> so groß wie die Schwerkraft an der Erdoberfläche, oder etwa 27000 Dyn. für das Gramm Masse. Demgemäß würde die Sonnenanziehung auf eine Äthersäule von einem Quadrat-zentimeter Querschnitt, wenn der Äther die Dichte  $5 \times 10^{-18}$  hat und sich von der Sonnenoberfläche ins Unendliche erstreckt,  $9,4 \times 10^{-8}$  Dyn. betragen, wenn der Äther ponderabel wäre.

§ 11. Betrachtungen, die denen ähnlich sind, die ich im November 1899 dem obigen § 9 angefügt habe, führen zu dem entscheidenden Beweise, daß die mittlere Dichte ponderabler Materie in jedem sehr großen kugelförmigen Raume um so kleiner ist, je größer der Radius ist, und für einen unendlich großen Radius unendlich klein ist. Wenn es nicht so wäre, würde die Mehrzahl der Körper im Universum jeder eine unendlich große Gravitationskraft erfahren. Dies ist eine kurze Feststellung des Wesens des folgenden Beweises.

§ 12. Es sei  $V$  irgendein von einer geschlossenen Fläche  $S$  begrenzter Raumteil, außerhalb und innerhalb dessen sich ponderable Körper befinden;  $M$  bedeute die Summe der Massen aller innerhalb  $S$  befindlichen Körper und  $\varrho$  die mittlere Dichte der gesamten in  $V$  befindlichen Materie. Dann ist

$$M = \varrho V. \quad (1)$$

Wenn dann  $Q$  den mittleren Betrag der Normalkomponente der Gravitationskraft an allen Punkten der Fläche  $S$  bezeichnet, wird

1) Ich weiß nicht recht, ob diese Deduktion nicht einen Zirkelschluß enthält. Wenn die ponderable Materie mitwirkt, könnte doch wohl ein stabiler Zustand im Äther entstehen, der bei Nichtmitwirkung nicht vorhanden ist. D. H.

2) Diese Zahlen sind in den folgenden Werten für die Masse und den Radius der Sonne und den Radius der Erde begründet: Sonnenmasse = 324 000 Erdmassen; Sonnenradius = 697 000 Kilometer; Erdradius = 6371 Kilometer.

$$QS = 4\pi M = 4\pi \rho V \quad (2)$$

nach einem allgemeinen von Green vor dreiundsiebzig Jahren entdeckten Satze über den Kraftbetrag an einer Fläche von beliebiger Form, wenn die Wirkung von Materie (schwerer, oder gedachter elektrischer, oder gedachter magnetischer) herrührt, die nach dem Newtonschen Gesetze des umgekehrten Quadrates der Entfernung erfolgt. Es ist interessant zu bemerken, daß das Oberflächenintegral über die Normalkomponente der Kraft, die von der außerhalb einer geschlossenen Fläche befindlichen Materie herrührt, für die gesamte Fläche Null ist. Wenn die nach innen wirkende Normalkomponente der Kraft positiv gerechnet wird, muß die nach außen wirkende natürlich negativ genommen werden. In der Gleichung (2) kann die normale Kraftkomponente an einzelnen Punkten der Fläche  $S$  nach außen gerichtet sein, nämlich da, wo die Tangentialebene von der Fläche geschnitten wird. Wenn die Fläche aber vollständig konvex ist, muß die normale Kraftkomponente überall nach innen laufen.

§ 13. Es sei jetzt die Fläche eine Kugelfläche mit dem Radius  $r$ . Dann ist

$$S = 4\pi r^2; \quad V = \frac{4\pi}{3} r^3; \quad V = \frac{1}{3} rS. \quad (3)$$

Demgemäß ergibt (2) für eine Kugelfläche

$$Q = \frac{4\pi}{3} \rho r = \frac{M}{r^2}. \quad (4)$$

Daraus folgt, daß die durchschnittliche normale Kraftkomponente über die Fläche  $S$  unendlich groß ist, wenn  $\rho$  endlich und  $r$  unendlich groß ist. Und dies reicht zum Beweise der Behauptung des § 11 aus.

§ 14. Es sei zum Beispiel

$$r = 150 \cdot 10^6 \cdot 206 \cdot 10^6 = 3,09 \cdot 10^{16} \text{ Kilometer.} \quad (5)$$

Dies ist der Abstand eines Sternes, der eine Parallaxe von ein tausendstel Sekunde besitzt; denn der mittlere Abstand der Erde von der Sonne beträgt einhundertfünfzig Millionen Kilometer, und zweihundertsechstausend Winkelsekunden sind im Einheitswinkel enthalten. Wir wollen nun untersuchen, ob in einer Kugel von jenem Radius so viel Materie wie die tausendmillionenfache Sonnenmasse oder, um uns kurz auszudrücken, ob tausend Millionen Sonnen darin enthalten sein können. Die Masse der Sonne ist 324000 mal so groß wie die der Erde, und demgemäß ist unsere der Untersuchung unterzogene Menge Materie  $3,24 \cdot 10^{14}$  mal so groß wie die Erdmasse. Wenn wir die Schwerkraft an der Erdoberfläche mit  $g$  bezeichnen, erhalten wir folglich nach (4)

$$Q = 3,24 \cdot 10^{14} \left( \frac{6,37 \cdot 10^8}{3,09 \cdot 10^{16}} \right)^2 g = 1,37 \cdot 10^{-11} \cdot g. \quad (6)$$

Wenn die radiale Kraft an allen Punkten der Kugelfläche die gleiche wäre, würde demnach ihr Betrag  $1,37 \cdot 10^{-11}$  mal so groß sein wie die Schwerkraft an der Erdoberfläche, und jeder an oder nahe dieser Fläche befindliche Körper würde eine nach dem Mittelpunkt gerichtete Beschleunigung erfahren von der Größe

$$1,37 \cdot 10^{-11} \text{ Kilometer/(Sekunde)}^2, \quad (7)$$

da  $g$  annähernd 1000 Zentimeter/(Sekunde)<sup>2</sup> oder 0,01 Kilometer/(Sekunde)<sup>2</sup>

beträgt. Wenn die normale Kraft nicht gleichförmig ist, dann erleiden auf oder nahe der Kugelfläche befindliche Körper immer noch eine nach dem Mittelpunkte gerichtete Beschleunigung, jedoch teils eine größere, teils eine kleinere als die angegebene. Nimmt man Gleichförmigkeit an, so würde ein Teilchen, das von der Oberfläche jener Kugel aus ohne Geschwindigkeit zu fallen beginnt, in einem Jahre (einunddreißig und eine halbe Million Sekunden) eine Geschwindigkeit  $4,32 \cdot 10^{-6}$  Kilometer in der Sekunde erlangen. Unter der gleichen Beschleunigung würde die Geschwindigkeit in fünf Millionen Jahren 21,6 Kilometer in der Sekunde erreichen, und der Weg, den es in fünf Millionen Jahren zurückgelegt hat, betrüge  $0,17 \cdot 10^{16}$  Kilometer, also nur  $0,055r$  (5). Dieser Weg ist für die angenommenen Verhältnisse noch so klein, daß die Kraft sich nur wenig ändern würde, es sei denn dadurch, daß der Körper zufällig in die Nähe eines andern Körpers kommt. Wenn dieselbe konstante Beschleunigung fünfundzwanzig Millionen Jahren wirkte, würde der Weg  $4,25 \cdot 10^{16}$  Kilometer, also mehr als den Radius  $r$  betragen; demnach kann der Betrag der Beschleunigung eine Zeit von fünfundzwanzig Millionen Jahren nicht annähernd der gleiche bleiben. In der Tat würden viele Chancen dafür vorhanden sein, daß die Beschleunigung dann weit größer ist als 108 Kilometer in der Sekunde, und viele andere Gründe ebenso, daß sie beträchtlich kleiner ist.

§ 15. Ohne den Versuch zu machen, die Aufgabe zu lösen, die Bewegungen und Geschwindigkeiten der tausend Millionen Körper zu ermitteln, sehen wir, daß, wenn sie sich vor fünfundzwanzig Millionen Jahren in Ruhe<sup>1)</sup> gleichförmig oder ungleichförmig in unserer Kugel (5) von  $3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer verteilt befunden haben, ein großer Teil von ihnen jetzt Geschwindigkeiten besäße, nicht kleiner als 20 oder 30 Kilometer in der Sekunde, während viele kleinere Geschwindigkeiten haben würden; und sicher würden einige Geschwindigkeiten besitzen, größer als 108 Kilometer in der Sekunde. Oder wenn sie vor Tausenden Millionen Jahren sich in Ruhe befunden haben, in Abständen, die im Vergleich mit dem Radius  $r$  (5) groß sind, so verteilt, daß sie jetzt in einer kugelförmigen Fläche vom Radius  $r$  (5) vorübergehend gleiche Abstände besitzen, dann würde ihre mittlere Geschwindigkeit (berechnet als die Quadratwurzel aus dem Mittel der Quadrate ihrer wirklichen Geschwindigkeiten) jetzt 50,4 Kilometer in der Sekunde betragen.<sup>2)</sup> Diese Größe ist nicht sehr verschieden von dem, was wir von den für uns sicht-

1) „Die potentielle Energie der Gravitation mag in Wirklichkeit der zuletzt geschaffene Vorgänger aller Bewegung, der Wärme und des Lichtes in unserm gegenwärtigen Universum sein.“ Vgl. *Mechanical Antecedents of Motion, Heat and Light*, Art. LXIX meiner *Collected Math. and Phys. Papers*, Vol. II.

2) Um diese Behauptung zu beweisen, beachten wir, daß, wie leicht gefunden wird, der Verbrauch an Gravitationsenergie

$$(E = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R^2 dx dy dz$$

Thomson und Tait, *Theoretische Physik*, Teil II, § 549), wenn eine sehr große Zahl,  $N$ , von gleichen Massen, aus dem Ruhezustande in unendlich großen Abständen voneinander, in eine gleichmäßige Verteilung innerhalb einer Kugel vom Radius  $r$  gelangt,  $\frac{1}{10} Fr$  ist, wo mit  $F$  die resultierende Kraft der Anziehung ihrer aller auf einen materiellen Punkt bezeichnet wird, dessen Masse

baren Sternen wissen. So ist es sehr wohl möglich, vielleicht sogar wahrscheinlich, daß so viel Materie, wie etwa tausend Millionen Sonnen enthalten, innerhalb des Abstandes, der einer Parallaxe von ein tausendstel Sek. ( $3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer) entspricht, vorhanden ist. Es scheint aber vollkommen gewiß zu sein, daß innerhalb eines solchen Raumes nicht so viel Materie enthalten sein kann, wie zehntausend Millionen Sonnen besitzen; denn wenn so viel vorhanden wäre, müßten wir weit größere Geschwindigkeiten bei den sichtbaren Sternen finden, als die Beobachtung zeigt, gemäß den folgenden Tabellen von Resultaten und Feststellungen über den Gegenstand aus der neuesten Zeit nach den wissenschaftlichen Autoritäten.

Aus dem Annuaire du Bureau des Longitudes (Paris, 1901).

Größe	Bezeichnung des Sterns	Abstand von der Erde in Billionen Kilometer	Jährliche Eigenbewegung	Parallaxe	Geschwindigkeiten senkrecht zur Gesichtslinie in Kilometer pro Sekunde
0,7	$\alpha$ Centauri .....	43	3,62''	0,72''	23,9
6,8	21185 Lalande ....	64	4,75	0,48	47,1
5,1	61 Cygni .....	70	5,17	0,44	55,7
— 1,4	Sirius .....	83	1,32	0,37	17,0
8,2	18609 Arg.-Oeltzen	88	2,30	0,35	31,3
7,9	34 Groombridge ..	99	2,83	0,31	43,5
7,5	9352 Lacaille ....	110	6,97	0,28	118,5
0,5	Procyon .....	110	1,26	0,27	22,2
9,0	11677 Arg.-Oeltzen	119	3,05	0,26	55,7
6,5	1643 Fedorenko ..	123	1,43	0,25	27,2
8,5	21258 Lalande ....	128	4,40	0,24	87,1
4,7	$\sigma$ Draconis .....	128	1,84	0,24	36,5
3,6	$\eta$ Cassiopeiae ....	147	1,19	0,21	27,0
0,2	$\alpha$ Aurigae .....	147	0,43	0,21	9,8
9,0	17415 Arg.-Oeltzen	154	1,27	0,20	30,2
0,9	$\alpha$ Aquilae .....	154	0,64	0,20	15,2
5,2	$\varepsilon$ „Indien“ .....	154	4,60	0,20	109,5
4,5	$\sigma^2$ Eridani .....	181	4,05	0,17	113,2
2,4	$\beta$ Cassiopeiae ....	193	0,57	0,16	16,9
1,0	$\alpha$ Tauri .....	206	0,19	0,15	6,0
7,0	1831 Fedorenko ..	206	0,42	0,15	13,3
4,1	$\rho'$ Ophiuchi .....	206	1,13	0,15	35,8
0,2	Vega .....	206	0,36	0,15	11,4
2,2	$\alpha$ Urs. Min. (Polarst.)	440	0,05	0,07	3,4

gleich der Summe ihrer Massen ist und der sich auf der Oberfläche der Kugel befindet. Nun wird dieser Verbrauch an Gravitationskraft ganz zur Schaffung kinetischer Energie verwendet; und demnach ist  $\Sigma \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{10} F r$ ; und da nach (7)  $F = 1,37 \cdot 10^{-13} \Sigma m$  ist, so folgt

$$\frac{\Sigma m v^2}{\Sigma m} = \frac{3}{5} 1,37 \cdot 10^{-13} r,$$

was für den Fall gleicher Massen, wenn für den Wert von  $r$  (5) angenommen wird, ergibt

$$V_{\Sigma v^2} = V \left( \frac{3}{5} 1,37 \cdot 10^{-13} \cdot 3,09 \cdot 10^{16} \right) = 50,4 \text{ Kilometer in der Sekunde.}$$

Sterne, die die größten beobachteten Geschwindigkeiten in der Gesichtslinie besitzen. (Auszug des Astronomer Royal aus einem Artikel von W. W. Campbell, Direktor der Licksternwarte, im *Astro-physical Journal*, Januar 1901.)

Größe	Stern	Rektazension h m	Deklination	Geschwindigkeit
4,6	$\varepsilon$ Andromedae . . . . .	0 33	+ 28° 46'	— 84 km pro Sek.
	$\mu$ Cassiopeiae . . . . .	1 0	+ 54 20	— 97 " "
	$\delta$ Leporis . . . . .	5 47	— 20 54	+ 95 " "
4,2	$\theta$ Canis Majoris . . . . .	6 50	— 11 55	+ 96 " "
	$\iota$ Pegasi . . . . .	21 17	+ 19 23	— 76 " "
4,1	$\mu$ Sagittarii . . . . .	18 8	— 21 1	— 76 " "

Das Zeichen + bedeutet Entfernen von der Erde, das Zeichen — Annähern an die Erde.

Bewegungen von Sternen in der Gesichtslinie, wie sie im Observatorium zu Potsdam 1889—1891 bestimmt sind. (Mitgeteilt von Professor Becker, Universitätssternwarte in Glasgow.)

Stern	Größe	Geschwindigkeit relativ zur Sonne km	Stern	Größe	Geschwindigkeit relativ zur Sonne km
$\alpha$ Andromedae . . .	2,0	+ 4,5	$\gamma$ Leonis . . . . .	2,0	— 38,5
$\beta$ Cassiopeiae . . .	2,1	+ 5,2	$\beta$ Ursae Majoris . .	2,3	— 29,3
$\alpha$ Cassiopeiae . . .	var.	— 15,2	$\alpha$ Ursae Majoris . .	2,0	— 11,9
$\gamma$ Cassiopeiae . . .	2,0	— 3,5	$\delta$ Leonis . . . . .	2,3	— 14,4
$\beta$ Andromedae . . .	2,3	+ 11,2	$\beta$ Leonis . . . . .	2,0	— 12,2
$\alpha$ Ursae Minoris . .	2,0	— 25,9	$\gamma$ Ursae Majoris . .	2,3	— 26,6
$\gamma$ Andromedae . . .	2,4	— 12,9	$\varepsilon$ Ursae Majoris . .	2,0	— 30,3
$\alpha$ Arietis . . . . .	2,0	— 14,7	$\alpha$ Virginis . . . . .	1,0	— 14,8
$\beta$ Persei . . . . .	var.	— 1,5	$\zeta$ Ursae Majoris . .	2,1	— 31,2
$\alpha$ Persei . . . . .	2,0	— 10,3	$\eta$ Ursae Majoris . .	2,0	— 26,2
$\alpha$ Tauri . . . . .	1,0	+ 48,5	$\alpha$ Bootis . . . . .	1,0	— 7,7
$\alpha$ Aurigae . . . . .	1,0	+ 24,5	$\varepsilon$ Bootis . . . . .	2,0	— 16,3
$\beta$ Orionis . . . . .	1,0	+ 16,4	$\beta$ Ursae Minoris . .	2,0	+ 14,2
$\gamma$ Orionis . . . . .	2,0	+ 9,2	$\beta$ Librae . . . . .	2,0	— 9,6
$\beta$ Tauri . . . . .	2,0	+ 8,0	$\alpha$ Coronae . . . . .	2,0	+ 32,0
$\delta$ Orionis . . . . .	2,5	+ 0,9	$\alpha$ Serpentis . . . . .	2,3	+ 22,3
$\varepsilon$ Orionis . . . . .	2,0	+ 26,5	$\beta$ Herculis . . . . .	2,3	— 35,3
$\zeta$ Orionis . . . . .	2,0	+ 14,8	$\alpha$ Ophiuchi . . . . .	2,0	+ 19,2
$\alpha$ Orionis . . . . .	var.	+ 17,2	$\alpha$ Lyrae . . . . .	1,0	+ 15,3
$\beta$ Aurigae . . . . .	2,0	— 28,1	$\alpha$ Aquilae . . . . .	1,3	— 36,9
$\gamma$ Geminorum . . . .	2,3	— 16,6	$\gamma$ Cygni . . . . .	2,4	— 6,4
$\alpha$ Canis Majoris . .	1,0	— 15,6	$\alpha$ Cygni . . . . .	1,6	— 8,0
$\alpha$ Geminorum . . . .	2,3	— 29,7	$\varepsilon$ Pegasi . . . . .	2,3	+ 8,0
$\alpha$ Canis Minoris . .	1,0	— 9,2	$\beta$ Pegasi . . . . .	var.	+ 6,7
$\beta$ Geminorum . . . .	1,3	+ 1,1	$\alpha$ Pegasi . . . . .	2,0	+ 1,3
$\alpha$ Leonis . . . . .	1,3	— 9,1			

Die Geschwindigkeit der Sonne relativ zu den Sternen ist nach Kempf und Risteen wahrscheinlich etwa 19 Kilometer in der Sekunde. Bezüglich

der größten Eigenbewegungen und Geschwindigkeiten gibt mir Sir Norman Lockyer folgende Auskunft: „Der Stern mit der größten bekannten Eigenbewegung (quer zur Gesichtslinie) ist 243 Cordoba = 8,7" im Jahre. Die Geschwindigkeit in Kilometer ist nicht bekannt.“

„1830 Groombridge hat eine Eigenbewegung von 7,0" im Jahre und eine Parallaxe von 0,089"; hieraus ergibt sich als Geschwindigkeit quer zur Gesichtslinie 370 Kilometer in der Sekunde. Es sind jedoch abweichende Schätzungen der Parallaxe ausgeführt worden, und demnach ist diese Geschwindigkeit einigermaßen unsicher. Der Stern mit der größten bekannten Geschwindigkeit in der Gesichtslinie ist  $\zeta$  Herculis, der 70 km in der Sekunde durchläuft.“

„Die dunkellinige Komponente der Nova Persei näherte sich der Erde mit einer Geschwindigkeit von mehr als 1100 Kilometer in der Sekunde.“ Diese letzterwähnte und größte Geschwindigkeit ist wahrscheinlich die eines Gaswirbels aus vergleichsweise kleinen, geschmolzenen und verdampften Partikeln, der von zwei großen, festen oder flüssigen, zusammengestoßenen Massen seitlich herausgeschleudert wurde, genau so wie wir es in Hammerwerken in den Bahnen kleiner Bruchstücke sehen, die nahezu horizontal fortgeschleudert werden, wenn ein Block aus Gußeisen durch eine schwere, aus einer Höhe von etwa zwanzig Fuß herabfallende Masse zertrümmert wird.

§ 16. Newcomb hat eine äußerst interessante Betrachtung über die sehr große Geschwindigkeit von 1830 Groombridge mitgeteilt, die folgendermaßen schließt: „Wenn der fragliche Stern zu unserm Sternsystem gehört, dann müssen die Massen oder der Bereich dieses Systems vielmal größer sein, als die Fernrohrbeobachtung und die astronomische Untersuchung andeuten.“ Wir können die Alternative in konziser Form folgendermaßen aussprechen:

„Entweder sind die Körper, die unser Universum bilden, ungeheuer viel massiger und zahlreicher, als die Untersuchung mit dem Fernrohr anzudeuten scheint, oder 1830 Groombridge ist ein Durchbrenner-Stern, der in uneingeschränktem Laufe durch den unendlichen Raum mit einem so großen Moment fortfliegt, daß die Anziehung aller Körper des Universums ihn nie aufhalten kann.“

Welcher von diesen beiden Schlüssen der wahrscheinlichere ist, können wir nicht zu sagen uns vermessen. Daß der Stern weder aufgehalten noch weit aus seiner Bahn abgelenkt werden kann, bis er die äußerste Grenze überschritten hat, bis zu der das Fernrohr je gedungen ist, können wir vernünftigerweise als sicher betrachten. Bis er soweit gelangt ist, wird zwei oder drei Millionen Jahre dauern. Ob auf ihn dann Anziehungskräfte, von denen die Wissenschaft jetzt nichts weiß, einwirken und ihn dorthin wieder zurückführen werden, von wo er ausgegangen ist, oder ob er in gerader Richtung in alle Ewigkeit seinen Weg fortsetzen wird, ist unmöglich zu sagen.

Ganz dieselbe Alternative gilt für die Vorgeschichte dieses Körpers. Wenn die Geschwindigkeit von zweihundert oder mehr (englischen) Meilen in der Sekunde, mit der er sich bewegt, jede Geschwindigkeit übersteigt, die durch die Anziehung aller andern Körper des Universums hervorgerufen werden kann, dann muß er von Anfang an durch den Raum vorwärts geeilt sein und muß, aus unendlicher Entfernung kommend, jetzt das erste und einzige Mal unser System durchziehen.“

§ 17. In allen diesen Betrachtungen scheint mir die Möglichkeit übersehen zu sein, daß der Stern an einem andern Stern in einem so kleinen Abstände wie etwa des Ein-, Zwei- oder Dreifachen des Sonnenradius vorbeigeeilt sein könnte. Daß aber ein solcher Zufall gar nicht so außerordentlich selten ist, scheint mir durch die Häufigkeit der neuen Sterne (Zusammenstöße und ihre Folgen), wie sie in der Astronomie bekannt sind, bewiesen. Nehmen wir zum Beispiel an, 1830 Groombridge, der sich mit einer Geschwindigkeit von 370 Kilometer in der Sekunde bewegt, laufe hinter einem Stern her, dessen Masse zwanzigmal so groß ist wie die der Sonne, und der sich nahezu in derselben Richtung mit einer Geschwindigkeit von 50 Kilometer in der Sekunde bewegt, hole ihn ein und komme noch gerade so nahe an ihm vorüber, daß ein Zusammenstoß vermieden wird; dann würde seine eigene Richtung nahezu umgekehrt, und seine Geschwindigkeit würde um nahe an 100 Kilometer pro Sekunde verringert werden. Durch zwei oder drei solche Zufälle würde der größere Teil seiner kinetischen Energie an bedeutendere Körper abgegeben sein, die sich vorher mit Geschwindigkeiten bewegt haben, die kleiner sind als 100 Kilometer in der Sekunde. Denkt man sich nun diese wenn auch ersonnene, aber doch durchaus mögliche Geschichte umgekehrt, so sieht man, daß 1830 Groombridge in einer weit zurückliegenden Zeit eine Geschwindigkeit von weniger als 100 Kilometer pro Sekunde besessen haben kann, und daß seine jetzige große Geschwindigkeit durch einige Fälle großer Annäherung an andere Körper von weit größerer Masse als seine eigene hervorgerufen sein mag, die sich vorher in Richtungen bewegt haben, die der seinigen entgegengesetzt waren, mit Geschwindigkeiten von weniger als 100 Kilometer in der Sekunde. Immerhin scheint es mir auch wohl möglich, daß die geistreiche Annahme von Newcomb zutrifft, und daß 1830 Groombridge ein schwärmender Stern ist, der in unsere Milchstraße eingedrungen und bestimmt ist, sie im Verlaufe von vielleicht zwei oder drei Millionen Jahren zu durchziehen und dann in den Raum zu entschwinden, ohne je wieder zu uns zurückzukehren.

§ 18. Viele von unsern angenommenen tausend Millionen Körpern, vielleicht eine große Mehrheit von ihnen, mögen dunkle Körper sein; wir wollen aber für einen Augenblick voraussetzen, sie seien sämtlich hell und von derselben Art und Helligkeit wie unsere Sonne, und wir wollen auf Grund dieser Annahme und der weiteren Annahmen, daß sie in einer Kugel (5) vom Radius  $3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer gleichmäßig verteilt sind und daß es außerhalb dieser Kugel weiter keine Sterne gibt, finden, welches der Gesamtbetrag an Sternlicht im Vergleich mit dem Sonnenlicht ist. Es sei  $n$  die Anzahl einer Ansammlung von Kugeln vom Radius  $a$  in der Volumeneinheit, die gleichförmig in einem ungeheuren Raume verstreut sind. Dann ist die Anzahl in einer Schale vom Radius  $q$  und der Dicke  $dq$  gleich  $n \cdot 4\pi q^2 dq$ , und die Summe ihrer scheinbaren Flächen vom Mittelpunkte aus gesehen ist gleich

$$\frac{\pi a^2}{q^2} n \cdot 4\pi q^2 dq \text{ oder } n \cdot 4\pi^2 a^2 dq.$$

Integriert man von  $q = 0$  bis  $q = r$ , so erhält man demnach

$$n \cdot 4\pi^2 a^2 r \quad (8)$$



als Summe der scheinbaren Flächen. Wenn jetzt  $N$  die ganze Anzahl in der Kugel vom Radius  $r$  ist, so haben wir

$$n = N \cdot \left( \frac{4\pi}{3} r^3 \right). \quad (9)$$

Demnach geht (8) über in  $N \cdot 3\pi \left( \frac{a}{r} \right)^2$ ; und wenn wir mit  $\alpha$  das Verhältnis der Summe der scheinbaren Flächen aller Kugeln zu  $4\pi$  bezeichnen, erhalten wir

$$\alpha = \frac{3}{4} N \left( \frac{a}{r} \right)^2. \quad (10)$$

$(1 - \alpha)/\alpha$ , was sehr nahe gleich  $1/\alpha$  ist, gibt das Verhältnis der scheinbaren, nicht von Sternen besetzten Fläche zu der Summe der scheinbaren Flächen aller Scheiben. Demgemäß ist  $\alpha$  das Verhältnis der scheinbaren Helligkeit unseres sterndurchmusterten Himmels zur Helligkeit unserer Sonnenscheibe. Fälle ganzer oder teilweiser Verdunkelungen zweier Sterne durcheinander würden bei den von uns vorausgesetzten Werten von  $r$  und  $a$  so selten sein, daß sie nur einen zu vernachlässigenden Abzug der Gesamtgröße von (10) ausmachen, auch wenn er nach den Gesetzen der rein geometrischen Optik berechnet würde. Dieser zu vernachlässigende Abzug würde aber fast ganz durch Diffraction aufgehoben werden, die bewirkt, daß das Gesamtlicht von zwei Sternen, von denen der eine durch den andern verdeckt wird, sehr nahe dasselbe ist, wie wenn der entferntere frei von dem näheren gesehen würde.<sup>1)</sup>

§ 19. Nach unserer Annahme des § 18 haben wir  $N = 10^9$ ,  $a = 7 \cdot 10^5$  Kilometer und demgemäß  $r/a = 4.4 \cdot 10^{10}$ . Folglich ist gemäß (10)

$$\alpha = 3,87 \cdot 10^{-13}. \quad (11)$$

Dieses äußerst kleine Verhältnis wird uns dazu verhelfen, eine alte und berühmte Hypothese zu prüfen, nach der nämlich, wenn wir weit genug in den Raum hineinschauen könnten, der ganze Himmel mit Sternscheiben besetzt erschiene, die vielleicht sämtlich ebenso hell leuchteten wie unsere eigene Sonne, und daß der Grund dafür, daß der ganze Nacht- und Tageshimmel nicht so hell ist wie die Sonnenscheibe, darin zu finden sei, daß das den Raum durchsetzende Licht eine Absorption erleidet. Beachten wir, daß, wenn wir  $r$  ändern, während die Dichte der Materie dieselbe bleibt,  $N$  sich proportional der dritten Potenz von  $r$  ändert. Folglich ändert sich nach (10)  $\alpha$  einfach wie  $r$ ; und demgemäß muß, wenn wir  $a$  auf  $3,87/100$  oder die Summe der scheinbaren Flächen der Scheiben auf etwa 4 Prozent des gesamten Himmels bringen wollen, der Radius  $10'' r$  oder  $3,09 \cdot 10^{21}$  Kilometer sein. Nun bewegt sich das Licht mit einer Geschwindigkeit von 300 000 Kilometer in der Sekunde oder  $9,45 \cdot 10^{12}$  Kilometer im Jahre. Demnach würde es  $3,27 \cdot 10^{14}$  oder etwa  $3\frac{1}{4} \cdot 10^{14}$  Jahre gebrauchen, um von den fernstliegenden Sonnen unserer großen Kugel zum Mittelpunkte zu gelangen. Nun besitzen wir aber unwiderlegliche Hinweise darauf, daß die gesamte Lebens-

1) Diese Bemerkung, die sich ja auch von selbst aufdrängt, widerspricht unmittelbar einer mehrfach wiederholten Behauptung von Arrhenius über den Verlust des Lichtes verdeckter Sterne.

D. H.

dauer unserer Sonne als Selbstleuchter nur eine sehr mäßige Anzahl Millionen Jahre, wahrscheinlich weniger als 50 Millionen, möglicherweise zwischen 50 und 100 Millionen beträgt.<sup>1)</sup> Wir wollen sehr freigebig sein und jedem unserer Sterne eine Lebensdauer als Selbstleuchter von 100 Millionen Jahren zuschreiben. So würde die Zeit, die das Licht braucht, um von den an der Außenfläche unserer Kugel befindlichen Sternen nach dem Mittelpunkt zu gelangen, dreieinviertel Millionen Mal die Lebensdauer eines Sterns ausmachen. Demnach würde, wenn alle Sterne in unserer ungeheuren Kugel gleichzeitig zu scheinen begonnen haben, die dreieinviertelmillionenfache Lebensdauer eines Sterns vergehen, ehe der Beginn des Lichtes von den an der Grenzfläche befindlichen Sternen die Erde erreichen könnte, und in keinem Augenblicke würde Licht von mehr als einem äußerst kleinen Bruchteile aller Sterne zu ihr gelangen. Um den ganzen Himmel von dem Lichte aller Sterne gleichzeitig erglühen zu lassen, müßten die Anfänge der verschiedenen Sterne in um so frühere Zeiten verlegt werden, je weiter sie entfernt sind, und müßten so abgestimmt sein, daß die Ankunftszeit des Lichtes jedes einzelnen an der Erde in die Zeit der Dauer des Lichtes aller andern an der Erde fällt. Unsere Annahme gleichförmiger Dichte der Verteilung ist übrigens vollkommen willkürlich, und (§§ 13, 15 oben) wir müßten in unserer größeren Kugel des § 19 die Dichte viel kleiner annehmen als in der kleineren Kugel (5). Und in Wirklichkeit scheint es, daß nicht genug Sterne (helle oder dunkle) vorhanden sind, um eine Gesamtsternscheibenfläche zu bilden, die größer ist als  $10^{-12}$  oder  $10^{-11}$  des ganzen Himmels. Vgl. Anhang D, „Über die Anhäufung schwerer Materie in irgendeinem Teile des Universums“.

§ 20. Um zu verstehen, wie dünn unsere gedachte Verteilung von 1000 Millionen Sonnen ist, dividieren wir den Gesamtumfang unserer Kugel vom Radius  $r$  (5) durch  $10^9$ ; dann finden wir  $123,5 \cdot 10^{39}$  Kubikkilometer als Raum für jede Sonne. Nehmen wir hieraus die Kubikwurzel, so ergibt sich  $4,98 \cdot 10^{13}$  Kilometer als Kante des entsprechenden Würfels. Wenn die Sterne genau in würfelförmiger Ordnung angeordnet wären, mit unserer Sonne an einer zu acht benachbarten Würfeln gehörigen Ecke, würde sich jeder ihrer nächsten sechs Nachbarn im Abstände von  $4,98 \cdot 10^{13}$  Kilometer befinden; dies ist aber ein Abstand, der einer Parallaxe von  $0,62''$  entspricht. Unsere Sonne würde in einem so großen Abstände gesehen wahrscheinlich als ein Stern zwischen erster und zweiter Größe erscheinen. Wir wollen für einen Augenblick annehmen, daß jede von unsern 1000 Millionen Sonnen dieselbe Masse wie unsere Sonne und eine solche Helligkeit besitzt, daß sie in einem der Parallaxe  $1,0''$  entsprechenden Abstände als Stern erster Größe erscheint. Dann würde die Helligkeit im Abstände  $r$  (5), die einer Parallaxe von  $0,001''$  Sekunde entspricht, ein Milliontel jener betragen, und die entferntesten unserer angenommenen Sterne würden mittels kräftiger Teleskope als Sterne sechzehnter Größe erkennbar sein. Newcomb (Popular Astronomy, 1883, p. 424) schätzt die Zahl der mit modernen Teleskopen sicht-

1) Darüber denken bekanntlich sehr viele Naturforscher anders, am meisten abweichend steht vielleicht Arrhenius. Dessen Buch „Das Werden der Welten“. Ich darf auch auf mein Buch „Die Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft“ hinweisen in Teubners Sammlung aus „Natur und Geisteswelt“.

baren Sterne auf 30 bis 50 Millionen. Young (General Astronomy, S. 448) geht über diese Rechnung hinaus und schätzt die Gesamtzahl der mittels des Lickteleskops sichtbaren Sterne auf 100 Millionen. Dies ist nur der zehnte Teil der von uns angenommenen Anzahl. Nichtsdestoweniger ist es wahrscheinlich, daß es vielleicht an die 1000 Millionen Sterne innerhalb des Abstandes  $r$  (5) gibt; aber viele von ihnen mögen erloschen oder überhaupt dunkel sein, und neun Zehntel von ihnen mögen nicht ganz dunkel, jedoch nicht hell genug sein, um von uns bei ihrer tatsächlichen Entfernung gesehen zu werden.

§ 21. Ich brauche wohl nicht zu wiederholen, daß unsere Annahme gleichförmiger Verteilung eine vollständig willkürliche ist. Wie weit diese Annahme davon entfernt ist, annähernd richtig zu sein, wird durch Herschels Anschauung von der Form des Weltalls dargetan, wie in der Popular Astronomy, S. 469 von Newcomb gezeigt ist. Es ist vollkommen sicher, daß die wirklich sichtbaren, innerhalb des Abstandes  $r$  (5) von uns befindlichen Sterne in einzelnen Teilen der ganzen Kugel stärker angehäuft sind als in andern. Ebenso sicher ist aber, daß sie nicht, wie wir angenommen haben, sämtlich gleich stark leuchtend sind, daß sie vielmehr in dieser Hinsicht weit voneinander abweichen. Ebenso sicher ist es ferner, daß die Massen einzelner weit größer sind als die Massen anderer, wie sich aus der folgenden Tabelle ergibt, die für mich von Prof. Becker aus André's *Traité d'Astronomie Stellaire* zusammengestellt ist und die Summen der Massen der Komponenten und die Daten angibt, aus denen diese bestimmt sind.

	Parallaxe	halbe große Achse		Periode in Jahren	$M + M'$ , in Einheiten der Sonnen- masse
		In Sekunden	durch die halbe große Achse der Erdbahn ausgedrückt		
$\alpha$ Centauri . . .	0,75''	18,17	25	84	2,0
61 Cygni . . .	0,44	29,48	68	783	0,5
Sirius . . .	0,39	8,31	24	52	3,2
Procyon . . .	0,27	5,84	4	40	6,3
$\sigma^2$ Eridani . . .	0,19	5,72	28	176	0,9
$\eta$ Cassiopeiae . . .	0,15	8,20	39	190	4,3
$\varrho$ Ophiuchi . . .	0,15	4,60	30	88	3,6
$\gamma$ Virginis . . .	0,05 <sup>1)</sup>	3,99	79 <sup>2)</sup>	194	15,0
$\gamma$ Leonis . . .	0,02 <sup>1)</sup>	1,98	102 <sup>2)</sup>	407	6,5

§ 22. Es mag sich auch noch eine große Menge Materie in vielen Sternen außerhalb der Kugel von  $3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer Radius befinden; wie-

1) Nach spektroskopischen Beobachtungen von Belopolsky in Pultava und den Bahnelementen.

2) Die Parallaxe ist aus theoretischen Bestimmungen des Verhältnisses der großen Halbachse der Bahn des Doppelsterns zur großen Halbachse der Erdbahn berechnet.

viel Materie auch außerhalb vorhanden sein mag, so möchte es doch durch die Beobachtungen in §§ 11—21 in hohem Maße wahrscheinlich gemacht sein, daß die gesamte Menge Materie innerhalb der Kugel größer ist als das Hundertmillionenfache und kleiner als das Zweitausendmillionenfache der Sonnenmasse.

Ich möchte noch zum Schluß meinen Dank Sir Norman Lockyer, dem Königlichen Astronomen, Herrn Christie, Sir Robert Ball und Prof. Becker für ihre Freundlichkeit aussprechen, mit der sie die große Mühe übernommen haben, mich über die astronomischen Angaben zu unterrichten, die sich in den obigen §§ 11—21 äußerst nützlich für mich erwiesen haben.<sup>1)</sup>

---

1) Zum Ganzen vergleiche man, was Kant in so bewunderungswürdiger Weise in seiner „Naturgeschichte des Himmels“ und in noch völlig unübertroffener Allgemeinheit sagt, namentlich I. Teil, sodann II. Teil, siebentes und achttes Hauptstück.  
D. H.

## Siebzehnte Vorlesung.

### Molekeln und ihre Größe, Zahl und Abstände; Theorie der Himmelskörper; das Himmelslicht.

(Umgeändert (1901, 1902) als Erweiterung der sechzehnten Vorlesung.)

§ 23. Bisher haben wir bei allen unsern Betrachtungen nichts über absolute Dimensionen in der molekularen Struktur erfahren und haben uns damit begnügt, anzunehmen, daß der Abstand zwischen zwei benachbarten Molekeln in Gasen oder Flüssigkeiten oder Kristallen oder nichtkristallischen Festkörpern im Vergleich mit der kürzesten Wellenlänge von Licht, mit dem wir uns beschäftigen, sehr klein sei. Auch für die Dispersion, das heißt für die Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei verschiedener Wellenlänge, war es für uns nicht notwendig, uns der Lehre Cauchys anzuschließen, nach der die Sphäre der molekularen Wirkung mit der Wellenlänge vergleichbar sein soll. Wir haben gesehen, daß die Dispersion richtig erklärt werden kann und wahrscheinlich auch wirklich richtig erklärt wird, wenn die Perioden unserer Lichtwellen nicht unendlich groß im Vergleich mit gewissen Perioden molekularer Schwingung sind, und bei diesen Anschauungen können die Dimensionen der molekularen Struktur, soweit Dispersion in Betracht kommt, im Vergleich mit den Wellenlängen des Lichtes so klein sein, wie wir sie uns vorstellen wollen. Nichtsdestoweniger ist es äußerst interessant und für das vernünftige Studium molekularer Strukturen und der Mechanik des Lichtes wichtig, einige wohlbegründete Anschauungen über die wahrscheinlichen Abstände zwischen den Mittelpunkten benachbarter Molekeln in ponderabler Materie aller Art zu besitzen, während wir vorderhand uns unter allen Umständen den Äther als vollkommen kontinuierlich und strukturlos vorstellen. Es mag ja in der Zukunft gefunden werden, daß auch der Äther eine molekulare Struktur besitzt, vielleicht feinkörniger als irgendeine Struktur ponderabler Materie; für jetzt aber sehen wir weder irgendeinen Grund noch können wir uns einen solchen dafür denken, daß der Äther anders als kontinuierlich und homogen sich in unendlich kleinen, zusammenhängenden, von anderer Materie als Äther freien Räumen befindet.

§ 24. Der erste Vorschlag für die Schätzung der Dimensionen der molekularen Struktur in der gewöhnlichen Materie ist meines Wissens von Thomas Young<sup>1)</sup> im Jahre 1805 als Ergebnis seiner und der der Sache nach identischen Theorie der kapillaren Anziehung von Laplace gemacht worden. In dieser rein dynamischen Theorie fand er, daß das Gebiet der anziehenden Kohäsionskraft gleich  $3T/K$  ist, wo mit  $T$  die jetzt allgemein

1) „On the Cohesion of Fluids,“ Phil. Trans., 1805; Collected Works, Vol. I, S. 461.

bekannte Youngsche Spannung der freien Oberfläche einer Flüssigkeit und mit  $K$  ein vielfaches Integral bezeichnet ist, das in den Formeln von Laplace vorkommt und jetzt vielfach als Laplacesche Konstante  $K$  zitiert wird, über deren Bedeutung in den Spalten der *Nature* und in andern Zeitschriften viel gestritten worden ist. Lord Rayleigh gibt in seinem Artikel „On the Theory of Surface Forces“<sup>1)</sup> vom Jahre 1890 folgende sehr interessante Darstellung der Art von Young, die molekularen Dimensionen zu schätzen. Er sagt:

§ 25. „Eine der bemerkenswertesten Tatsachen in der Bearbeitung von Young ist seine Schätzung des Gebietes  $a$  der anziehenden Kraft auf Grund der Gleichung  $T = \frac{1}{3} a K$ . Nicht einmal habe ich einen Hinweis darauf gefunden, und es wird, glaube ich, allgemein angenommen, daß der erste Versuch dieser Art nicht mehr als zwanzig Jahre alt ist. Indem er  $K$  auf 23000 Atmosphären und  $T$  auf 3 Gran pro Zoll schätzt, findet Young, daß die Ausdehnung der Kohäsionskraft auf etwa den 250 millionten Teil eines Zolles [ $10^{-8}$  cm] begrenzt werden muß; und er fährt fort: „Auch ist es nicht sehr wahrscheinlich, daß irgendein Fehler in den gemachten Voraussetzungen möglicherweise dieses Resultat so weit entstellt haben kann, daß es dadurch um das Mehrfache größer oder kleiner geworden wäre, als der Wirklichkeit entspricht.“ ... Young fährt noch weiter fort: — „Mit ähnlichen Grenzen der Unsicherheit können wir etwas einer hypothetischen Schätzung des gegenseitigen Abstandes der Dampfpartikel oder selbst der elementaren Atome von Flüssigkeiten, die ja als nahezu in Berührung miteinander befindlich vorausgesetzt werden, Ähnliches finden; denn wenn der Abstand, bei welchem die Kohäsionskraft zu wirken beginnt, bei konstanter Temperatur konstant ist, und wenn die Dampfpartikel bei ihrer Annäherung auf diesen Abstand kondensiert werden, so folgt, daß bei 60° Fahrenheit (15,56° C) der Abstand der Partikel reinen Wasserdampfes etwa ein Zweihundertfünzigmilliontel Zoll beträgt; und da die Dichte dieses Dampfes ungefähr ein Sechzigtausendstel derjenigen des Wassers ist, muß der Abstand der Partikel etwa vierzigmal so groß sein; folglich muß der Abstand der Wasserpartikel etwa ein Tausendmilliontel Zoll<sup>2)</sup> [ $0,025 \times 10^{-8}$  cm] betragen. Es ist wahr, daß das Resultat dieser Rechnung je nach der Temperatur der verglichenen Substanzen beträchtlich verschieden ausfallen wird. Diese Abweichung macht indessen den Gehalt des Schlusses nicht vollkommen ungültig ... und im ganzen erscheint es erträglich richtig anzunehmen, daß, welche Fehler auch der Bestimmung noch anhaften mögen, der Durchmesser oder der Abstand der Wasserpartikel zwischen zwei Tausendmilliontel und einem Zehntausendmilliontel Zoll [zwischen  $0,125 \times 10^{-8}$  und  $0,025 \times 10^{-8}$  cm] liegt.“ „Diese Stelle ist trotz ihres großen Interesses so vollständig übersehen worden, daß ich es gewagt habe, sie kurz anzuführen, obwohl die Frage nach der Größe der Atome außerhalb des Gebietes der vorliegenden Abhandlung liegt.“

1) Phil. Mag. Vol. XXX, 1890, S. 474.

2) Young nimmt hier, auffallend unempfindlich für die kinetische Gastheorie, an, daß die Molekeln von Wasserdampf bei 60° Fahr. einander berühren (oder sich in direkter, gegenseitiger Einwirkung befinden); und gelangt so zu einer weit feineren Körnung für flüssiges Wasser, als er gefunden hätte, wenn er den Molekeln des Dampfes hinreichend freie Bahnen zugesprochen hätte, um dem Boyleschen Gesetze zu genügen.

§ 26. Der nächste Versuch, die Dimensionen der molekularen Struktur in der gewöhnlichen Materie zu schätzen, findet sich, soviel ich weiß, in einem Auszuge aus einem Briefe von mir an Joule über die Kontaktelektrizität von Metallen, der in den *Proceedings der Manchester Literary and Philosophical Society*<sup>1)</sup> vom 21. Jan. 1862 veröffentlicht ist und die folgende Stelle enthält: — „Zink und Kupfer, die durch einen metallischen Bogen miteinander verbunden sind, ziehen einander aus jedem Abstände an; dasselbe tun Platinplatten, von denen die eine mit Sauerstoff, die andere mit Wasserstoff bedeckt ist. Ich kann nun den Betrag der Kraft angeben und berechnen, ein wie großes Maß chemischer Affinität elektrisch verbraucht wird, bevor zwei solche Scheiben in einen Abstand von weniger als  $\frac{1}{1000}$  Zoll, oder in einen noch kleineren Abstand bis herab zu einer Grenze gelangt sind, innerhalb deren die molekulare Heterogenität merkbar wird. Dies liefert uns schließlich eine bestimmte Grenze für die Größe der Atome, oder richtiger, da ich an Atome nicht glaube, für die Dimensionen der molekularen Strukturen.“ Die hier aufgestellte Theorie wurde etwas vollständiger in einer Mitteilung an die *Nature* im März 1870 über „Die Größe der Atome“<sup>2)</sup> und in einer Freitagsvorlesung<sup>3)</sup> vor der Royal Institution über denselben Gegenstand am 3. Februar 1883 ausgeführt; um sie aber näher zu erläutern, dazu fehlte damals die Kenntnis der Verbrennungswärme von Kupfer und Zink. Versuche von Prof. Roberts-Austen und von Dr. A. Galt haben in den letzten vier Jahren diese Lücke ausgefüllt, und ich konnte in einem Nachwort vom Februar 1898 zu einer Freitagsvorlesung über „Kontaktelektrizität“, die ich vor der Royal Institution am 21. Mai 1897 gehalten hatte, aussprechen: „Wir können nicht umhin zu sehen, daß die molekularen Strukturen in Abständen von ein hundertmilliontel Zentimeter bemerkbar werden, und wir dürfen es für hochwahrscheinlich annehmen, daß der Abstand irgendeines Punktes von einer benachbarten Molekel in Kupfer oder Zink kleiner ist als ein Hundertmilliontel und größer ist als ein Tausendmilliontel eines Zentimeters.“ Und so war ich auch imstande, die folgende bestimmte Behauptung zu bestätigen, die ich in meinem bereits zitierten Artikel in der *Nature* (1870) ausgesprochen hatte: — „Platten aus Zink und Kupfer von ein dreihundertmilliontel<sup>4)</sup> Zentimeter Dicke bilden, dicht aneinander gelegt eine große Annäherung an eine chemische Verbindung, wenn wirklich so dünne Platten hergestellt werden können, ohne daß man Atome spaltet.“

§ 27. In demselben Artikel führten thermodynamische Überlegungen über das Ausziehen eines Flüssigkeitsfadens entgegen einer Oberflächenspannung zu dem folgenden Resultat: — „Der Schluß ist unvermeidlich, daß eine Wasserhaut stark in ihrer kontraktiven Kraft sinkt, ehe sie auf eine Dicke von ein zweihundertmilliontel Zentimeter herabgedrückt ist. Nun

1) Wieder abgedruckt als Art. 22 meines *Electrostatics and Magnetism*.

2) Wiederholt als Anhang (F) in Thomson und Tait, *Theoretische Physik*, Band II, S. 499, engl. zweite Ausgabe

3) Neu veröffentlicht in *Popular Lectures and Adresses*, Bd. I.

4) Um die auch im Original bestehende Unsicherheit des Ausdrucks zu heben: Gemeint ist  $\frac{1}{300\,000\,000}$ . Ähnliches gilt für die folgenden Angaben

ist es kaum nach irgendeiner denkbaren Molekulartheorie möglich, daß irgend-ein beträchtlicher Abfall der kontraktiven Kraft eintritt, solange in der Dicke noch mehrere Molekeln vorhanden sind. Es ist demgemäß sehr wahrscheinlich, daß nicht mehrere Molekeln in einer Dicke von ein zweihundertmilliontel Zentimeter Wasser vorhanden sind.“ Mehr ins Einzelne gehende Betrachtungen über die beim Ausdehnen einer Wasserhaut geleistete Arbeit haben mich in meiner Vorlesung vor der Royal Institution vom Jahre 1883 dazu geführt, ein einhundertmilliontel Zentimeter anstatt des in dem angeführten Satze angenommenen zweihundertmilliontel zu setzen. Andererseits lieferte eine Betrachtung der großen dunkeln Flecke, die wir alle an einer Seifenblase oder einer Seifenhaut, ehe sie platzt, kennen, und die in einer höchst interessanten Weise von Newton<sup>1)</sup> beschrieben worden sind, den absoluten Beweis dafür, daß die Haut ihre Spannkraft in dem schwarzen Fleck behält, in dem die Dicke offenbar weit kleiner als  $\frac{1}{60003}$  Zentimeter ist, welches der Dicke des wolkigen Weiß entspricht, von dem der Fleck umrandet wird. Und ferner hat im Jahre 1883 die bewunderungswürdige Anwendung optischer und elektrischer Meßverfahren von Reinold und Rücker<sup>2)</sup> bewiesen, daß die Dicke der schwarzen Haut in der „Plateauschen Flüssigkeit“ und in gewöhnlicher Seifenlösung zwischen einem achthunderttausendstel und einem milliontel Zentimeter liegt. So war es sicher, daß die Seifenhaut bei einer Dicke von etwa ein milliontel Zentimeter ihre volle Spannkraft besitzt, und daß die Spannkraft zwischen ein milliontel und ein hundertmilliontel Zentimeter ungemein abfällt.

§ 28. Äußerst interessant in Verbindung hiermit ist die Untersuchung, die unabhängig voneinander Röntgen<sup>3)</sup> und Rayleigh<sup>4)</sup> ausgeführt und im Jahre 1890 veröffentlicht haben über die Menge Öl, die auf der Flächeneinheit über Wasser ausgebreitet werden muß, wenn eine merkliche Störung seiner kapillaren Spannung hervorgerufen werden soll. Beide Experimentatoren drücken ihre Resultate in ihrer Abhängigkeit von der Dicke der Haut aus, so berechnet, als ob Öl unendlich homogen und strukturlos wäre, aber mit dem deutlichen Hinweis darauf, daß die Häute molekular gegliedert und auch nicht annähernd homogen waren. Rayleigh fand, daß Olivenöl, welches schnell auf einer vorher gesäuberten Wasserfläche aus einem am kurzen Platindraht herangebrachten Vorrat vollständig ausgebreitet wurde, einen merklichen Einfluß auf kleine schwimmende Kampherstücke ausübte, wo die Dicke der Ölschicht  $10,6 \times 10^{-8}$  cm, und keinen merklichen Einfluß dort, wo die Dicke  $8,1 \times 10^{-8}$  cm betrug. Es würde hoch interessant sein, wenn möglich, noch andere Beweise (optische oder mechanische oder elektrische oder chemische) für das Vorhandensein einer Ölhaut auf Wasser oder von Häuten aus andern Flüssigkeiten auf Festkörpern wie Glas oder Metallen zu finden, die durch bestimmte Wirkungen immer kleinere Dicken feststellen. Röntgen, der Äther anstatt Kampher verwendete, fand entsprechende Anzeichen für

1) Newtons Optics pp. 187, 191, Ausgaben von 1721, Zweites Buch, Teil I; dargelegt in meiner Royal Institution Lecture, Pop. Lectures and Adresses, Vol. I, S. 175.

2) „On the Limiting Thickness of Liquid Films,“ Roy. Soc. Proc. April 19, 1883; Phil. Trans. 1883, Part. II, S. 321.

3) Wied. Ann. Vol. XLI. 1890, S. 321.

4) Proc. Roy. Soc. Vol. XLVII. 1890, S. 364.



$5,6 \times 10^{-8}$  cm dicke Schichten. So wäre es beispielsweise auch sehr interessant, eine eingehende Untersuchung über die elektrische Leitfähigkeit eines vollkommen sauberen Stabes aus weißem Glase von höchster Isolierkraft in einer Atmosphäre auszuführen, die gemessene Mengen Wasserdampf enthält. Wenn das Glas sich auf irgendeiner über dem Taupunkt des Dampfes liegenden Temperatur befindet, zeigt es, soviel wir wissen, keine optische Erscheinung, die einen Druck des kondensierten Dampfes auf es erkennen läßt; aber außerordentlich große Unterschiede in der elektrischen Leitfähigkeit, die der Dichte des umgebenden Dampfes entsprechen, beweisen die Anwesenheit von Wasser auf der Oberfläche des Glases, oder in den Zwischenräumen zwischen seinen Molekeln und bilden so das einzige Anzeichen für das Vorhandensein des Dampfes. Rayleigh selbst hat diese Anschauung in einem Aufsätze aus jüngerer Zeit, „Investigations on Capillarity“ in dem *Philosophical Magazine*<sup>1)</sup> ausgesprochen. Aus den Schätzungen der Größe der Molekeln von Argon, Wasserstoff, Sauerstoff, Kohlenoxyd, Kohlensäure, Äthylen ( $C_2H_4$ ) und andern Gasen, die wir später (§ 47) zu betrachten haben werden, können wir urteilen, daß aller Wahrscheinlichkeit nach, wenn wir hinreichend mikroskopisch schauende Augen besäßen, um Atome und Molekeln zu sehen, wir in diesen dünnen Häutchen, mit denen Rayleigh und Röntgen experimentiert haben, nur Molekeln von Öl sehen würden, die in größeren und kleineren Abständen voneinander liegen, aber an keinem Teile des Häutchens eine Ölmolekel über einer andern liegend oder Molekeln unmittelbar sich aneinander stützend.

§ 29. Eine sehr wichtige und interessante Methode, die Größe von Atomen zu schätzen, die sich auf die kinetische Gastheorie stützt, ist zuerst, soviel ich weiß, von Loschmidt<sup>2)</sup> in Österreich und von Johnstone Stoney in Irland ersonnen worden. Der Sache nach dieselbe Methode ist mir später eingefallen und von mir in der *Nature* im März 1870 in einem Aufsätze<sup>3)</sup> über „die Größe der Atome“, auf den ich schon oben § 26 hingewiesen habe, beschrieben worden; diesem Aufsätze sind die Anführungen in diesem und dem folgenden Paragraphen entnommen.

„Die vor etwa hundert Jahren von Daniel Bernoulli ersonnene kinetische Gastheorie wurde in den letzten fünfundzwanzig Jahren von Herapath, Joule, Clausius und Maxwell zu einer so großen Vollkommenheit ausgestaltet, daß wir jetzt in ihr befriedigende Erklärungen für alle nicht chemischen und nicht elektrischen<sup>4)</sup> Eigenschaften der Gase finden. Wie schwierig es auch sein mag, sich auch nur vorzustellen, was für ein Ding eine Molekel ist, können wir es doch als eine durch die Wissenschaft sichergestellte Wahrheit betrachten, daß ein Gas aus sich bewegenden Molekeln besteht, die aus ihren geradlinigen mit konstanten Geschwindigkeiten zurückgelegten Bahnen durch Zusammenstöße oder gegenseitige Beeinflussungen gestört werden, die so selten sind, daß die mittlere Länge

1) Phil. Mag. Okt. 1899, S. 337.

2) Sitzungsberichte der Wiener Akademie, 12. Okt. 1865, S. 395.

3) Wiederabgedruckt als Anhang (F) zu Thomson und Tait, *Natural Philosophy* Teil II, S. 499. (Die deutsche Ausgabe enthält diesen Anhang nicht. D. H.)

4) Daß dieser Vorbehalt gegenwärtig zum Teil fallen gelassen werden darf, ist bekannt. D. H.

der annähernd geradlinigen Wegteile jeder einzelnen Molekel vielmal größer ist als der durchschnittliche Abstand vom Mittelpunkte einer jeden Molekel zum Mittelpunkte der ihr nächsten Molekel, zu jeder beliebigen Zeit. Wenn wir für einen Augenblick annehmen, daß sämtliche Molekeln harte elastische Kugeln von gleicher Größe sind, die einander nur durch gegenseitige Berührung beeinflussen, so finden wir für jede Molekel einfach einen Zickzackweg, der aus geradlinigen Stücken mit plötzlichen Richtungsänderungen zusammengesetzt ist. . . . Wir können aber nicht glauben, daß die einzelnen Molekeln von Gasen allgemein, oder auch nur von irgendeinem Gase, solche harte elastische Kugeln sind. Je zwei beliebige von den bewegten Partikeln oder Molekeln müssen aufeinander in irgendeiner Weise einwirken, so daß, wenn sie sehr nahe aneinander vorüberkommen, sie eine beträchtliche Ablenkung der Bahn und Änderung in der Geschwindigkeit jede an der andern hervorrufen. Diese gegenseitige Einwirkung (Kraft genannt) ist in verschiedenen Abständen verschieden und muß sich gemäß den Änderungen des Abstandes nach gewissen ganz bestimmten Gesetzen ändern. Wenn die Partikeln harte elastische Kugeln wären, die aufeinander nur bei Berührung einwirken, würde das Kraftgesetz die Kraft Null ergeben, falls der Abstand von Mittelpunkt zu Mittelpunkt die Summe der Radien übersteigt, und unendlich große Abstoßung für jeden Abstand, der kleiner ist als die Summe der Radien. Diese Hypothese mit ihrer „festen und harten“ Scheidung zwischen der Kraft Null und der Kraft Unendlich scheint einer Milderung zu bedürfen.“ Die Theorie von Boscovich ergänzt in klarer Weise die notwendige Milderung.

§ 30. Um unsere Gedanken auf einen bestimmten Punkt zu richten, wollen wir wieder annehmen, daß die Kraft absolut Null ist, wenn der Abstand zwischen zwei Mittelpunkten eine bestimmte Grenze  $\lambda$  übersteigt; wenn aber der Abstand kleiner als  $\lambda$  ist, wollen wir annehmen, daß eine entweder anziehende oder abstoßende Kraft zu wirken beginnt, und bei Herabminderung des Abstandes nach Null hin allmählich in eine Abstoßung von sehr großer Stärke übergeht. So definierte Partikeln will ich Boscovichsche Atome nennen. In diesem Sinne wollen wir  $\frac{1}{2} \lambda$  als Radius des Atoms und  $\lambda$  als seinen Durchmesser bezeichnen. Wir werden sagen, daß zwei Atome miteinander in Kollision sind, wenn der Abstand zwischen ihren Mittelpunkten kleiner als  $\lambda$  ist. So „werden zwei in Kollision befindliche Molekeln eine gegenseitige Abstoßung bewirken, vermöge deren der Abstand zwischen ihren Mittelpunkten, nachdem er auf ein Minimum herabgesunken war, zu wachsen anfangen wird, indem die Molekeln sich voneinander entfernen. Dieses Minimum des Abstandes würde der Summe der Radien gleich sein, wenn die Molekeln unendlich harte Kugeln wären; in Wirklichkeit müssen wir aber annehmen, daß jenes Minimum bei verschiedenen Kollisionen sehr verschieden ist.“

§ 31. Die das Wesentliche darstellende Eigenschaft eines Gases besteht, wie wir gesehen haben, darin, daß die gerade Linie gleichförmiger Bewegung einer jeden Molekel zwischen zwei Kollisionen, die als freie Bahn bezeichnet wird, lang ist im Vergleich mit den Abständen zwischen den Mittelpunkten während der Kollision. In einem idealen, vollkommenen Gase würden die freien Bahnen im Vergleich mit den Abständen zwischen den Mittelpunkten während des Zusammenstoßes wie unendlich lang, aber im Vergleich mit jeder

durch unsere Sinne direkt wahrnehmbaren Länge noch unendlich kurz sein; eine Bedingung, die verlangt, daß die Anzahl der Molekeln in jedem wahrnehmbaren Raume außerordentlich groß ist. Wir werden sehen, daß bei Gasen, die bei gewöhnlichen Drucken und Temperaturen bezüglich der Zusammendrückbarkeit, der Ausdehnung unter dem Einfluß der Wärme und den spezifischen Wärmen den idealen, vollkommenen Gasen noch am nächsten kommen, wie beispielsweise bei Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, Kohlenmonoxyd, die freie Bahn wahrscheinlich nicht mehr als etwa hundertmal so groß ist wie der Abstand zwischen den Mittelpunkten während der Zusammenstöße, und in absoluter Größe etwas weniger als  $10^{-5}$  cm beträgt. Obwohl diese mäßigen Größen hinreichen für die wohlbekannte außerordentlich nahe Übereinstimmung der Gesetze, denen diese realen Gase folgen, mit den für die idealen Gase geltenden, werden wir sehen, daß bei Kondensationen große Abweichungen von den Gasgesetzen sich zeigen, die hinreichen, die freien Bahnen auf das Zwei- oder Dreifache des Durchmessers der Molekeln herabzudrücken, oder die freien Bahnen überhaupt aufzuheben.

§ 32. Es ist die experimentelle Bestimmung der Diffusionskraft, welche vermöge der kinetischen Gastheorie die besten Mittel zur Schätzung der Größe der Atome oder Molekeln und der Anzahl der in einem Kubikzentimeter Gas bei irgendeiner festgestellten Dichte befindlichen Molekeln liefert. Wir wollen demnach jetzt sorgfältig die kinetische Theorie dieser Wirkungen betrachten und ferner gleichzeitig die mit ihnen eng verbundenen Eigenschaften der thermischen Leitfähigkeit und der Viskosität, die zuerst von Clausius und Clerk Maxwell entdeckt und in glänzender Weise behandelt sind.

§ 33. Nach ihrer schönen Theorie haben wir es mit drei Arten der Diffusion zu tun, mit der Diffusion von Molekeln, der Diffusion von Energie und der Diffusion von Momenten. Auch in Festkörpern, wie Gold und Blei, hat Roberts-Austen Molekelndiffusion von Gold in Blei und von Blei in Gold zwischen zwei Stücken der Metalle entdeckt, wenn sie gegeneinander gepreßt werden. Aber der Betrag der durch diese bewunderungswürdige Entdeckung erwiesenen Diffusion ist so außerordentlich klein, daß wir für die meisten Zwecke, für theoretische wie für praktische, von der Wanderung irgendeiner Molekel in einem beliebigen Festkörper nach Orten, die sich unter dem direkten Einfluß der unmittelbar benachbarten Molekeln befinden, absehen können. Momentdiffusion findet in einem elastischen Festkörper bei einer Wellenbewegung statt, Diffusion von Energie macht die Wärmeleitung in ihm aus. Diese beiden Diffusionen werden allein durch die Übertragung von Bewegung und von Energie von Molekel zu Molekel bewirkt und in Festkörpern praktisch nicht durch die Diffusion von Molekeln selbst unterstützt. Auch in Flüssigkeiten ist die Molekelndiffusion, obwohl bei ihnen vollständige molekulare Diffusionsmöglichkeit vorhanden ist, äußerst klein im Vergleich mit den beiden andern Diffusionen, so klein, daß auch hier die Wärmeleitung und die Diffusion von Momenten, letztere zugehörig zu den Erscheinungen der Viskosität, praktisch durch Molekelndiffusion nicht gefördert wird. So ist beispielsweise die Wärmediffusion in<sup>1)</sup> Wasser (0,002

1) Math. and Phys. Papers, Vol. III, S. 226. Wegen der das Diffusionsvermögen und die Viskosität betreffenden Erklärung vgl. auch denselben Band, S. 428—435.

nach der ersten Untersuchung von J. T. Bottomley oder etwa 0,0015<sup>1)</sup> nach seinen späteren Messungen) einige hundert Mal so groß und die Momentdiffusion ein- bis zweitausend Mal so groß wie die Molekelndiffusion von Kochsalz und anderen Salzen wie Sulfate, Chloride, Bromide und Jodide darin.

§ 34. Wir dürfen die beiden Bewegungsdiffusionen einer Flüssigkeit als gänzlich von einer Übertragung von Bewegung von einer Molekel zur andern herrührend auffassen. Dies kommt daher, daß jede Molekel sich stets unter dem Einfluß der ihr benachbarten befindet und keine freie Bahn besitzt. Wenn Flüssigkeit verdünnt wird, entweder allmählich, wie in den Versuchen von Andrews, die den kontinuierlichen Übergang vom flüssigen in den gasförmigen Zustand erweisen, oder plötzlich, wie bei der Verdampfung, werden die Molekeln weniger gedrängt, und jede Molekel gewinnt immer mehr Freiheit. Ist die Dichte so gering geworden, daß die geraden freien Bahnen im Vergleich mit den Durchmessern der Molekeln groß sind, so rühren die beiden Bewegungsdiffusionen, deren eine zur Übertragung von Energie, deren andere zur Übertragung von Momenten dient, sicher hauptsächlich gerade von der freien geradlinigen Bewegung der Molekeln zwischen ihren Zusammenstößen her. Ein Austausch von Energie oder von Momenten zwischen zwei Molekeln während ihres Zusammenstoßes wird freilich die Resultate bloßer Übertragung bis zu einem gewissen Grade ändern. Aber wir dürfen erwarten, daß dann die Bewegungsdiffusionen zwar etwas größer jedoch annähernd so groß sein werden wie die Molekelndiffusionen. Wenn diese Anschauungen richtig sind, würde folgen, daß in einem homogenen Gase, in dem ja die freien Bahnen im Vergleich mit den Durchmessern der Molekeln lang sind, die Viskosität gleich dem Produkte aus dem molekularen Diffusionsvermögen und der Dichte, und die thermische Leitfähigkeit gleich dem Produkte aus dem molekularen Diffusionsvermögen und der Wärmekapazität für die Raumeinheit bei konstantem Drucke ist; und daß, wenn irgendwelche Abweichungen von der Richtigkeit dieser Gleichheiten auftreten, sie in der Richtung liegen, daß die Bewegungsdiffusionsvermögen etwas größer sind als das molekulare Diffusionsvermögen. Aber ach! wir werden, § 45, sehen, daß bis jetzt Versuche diese Schlüsse nicht bestätigen; im Gegenteil ist das Diffusionsvermögen für Momente aller der vier Gase, für die allein die molekularen Diffusionsvermögen durch Versuch bestimmt sind, nicht nur nicht größer oder wenigstens gleich dem Produkte aus der Dichte und dem molekularen Diffusionsvermögen, sondern es beträgt vielmehr in allen Fällen etwas weniger als drei Viertel des so berechneten Wertes.

§ 35. Ich sehe keine Erklärung für diese Abweichung von dem, was theoretisch vollkommen richtig erscheint.<sup>2)</sup> Genaue Bestimmungen von Viskositäten sind sowohl bei Gasen als bei Flüssigkeiten sehr leicht nach der Aspirationsmethode von Graham ausführbar. Dagegen sind auch nur rohe

1) Siehe eine Abhandlung von Milner und Chattrik, Phil. Mag. Vol. XLVIII. 1899.

2) Es bestehen doch wohl bei den Zusammenstößen, auch von den Vorgängen innerhalb der Molekeln selbst abgesehen, Wirkungen zwischen den Molekeln, sie müssen auf die Bewegungsdiffusion verringend wirken. Ferner würde die Viskosität experimentell kleiner ausfallen, wenn die Molekeln sich in irgendeinem Abstände abstoßen sollten. D. H.

angenäherte experimentelle Bestimmungen von thermischen Diffusionsvermögen äußerst schwierig und ich glaube, es sind noch keine solche nach richtigen experimentellen Prinzipien ausgeführt worden<sup>1)</sup>, sicherlich keine solchen, die nicht durch Strömungen des dem Versuche unterzogenen Gases getrübt sind, oder die genau genug sind, um eine gute Prüfung der theoretischen Beziehung zwischen dem thermischen und dem materiellen Diffusionsvermögen abzugeben, wie sie durch die folgende, aus der obigen in Worten gegebenen Auseinandersetzung über die drei Diffusionsvermögen eines Gases abgeleiteten Gleichung ausgedrückt wird, nämlich

$$\lambda = K \varrho \frac{\mu}{\varrho} = K \mu = k c \mu,$$

wo mit  $\lambda$  die thermische Leitfähigkeit, mit  $\mu$  die Viskosität, mit  $\varrho$  die Dichte, mit  $K\varrho$  die Wärmekapazität für die Raumeinheit bei konstantem Druck, mit  $K$  die Wärmekapazität für die Einheit der Masse bei konstantem Druck, mit  $c$  die Wärmekapazität der Masseneinheit bei konstantem Volumen und mit  $k$  das Verhältnis der Wärmekapazität bei konstantem Drucke zur Wärmekapazität bei konstantem Volumen bezeichnet ist. Es ist interessant, zu bemerken, wie nahe theoretische Forscher<sup>2)</sup> der Beziehung  $\lambda = k c \mu$  gekommen sind; Clausius gab an  $\lambda = \frac{5}{3} c \mu$ ; O. E. Meyer  $\lambda = 1,6027 c \mu$  und Maxwell  $\lambda = \frac{5}{3} c \mu$ . Der Wert von Maxwell ist in der Tat  $\lambda = k c \mu$  für den Fall eines einatomigen Gases.

§ 36. Um genau zu verstehen, was unter molekularem Diffusionsvermögen gemeint ist, wollen wir uns ein homogenes Gas zwischen zwei unendlichen parallelen Ebenen  $GGG$  und  $RRR$ , die um  $a$  voneinander entfernt sind, vorstellen und annehmen, es befinde sich anfangs im Gleichgewichte, das heißt mit gleichen Molekelzahlen und gleichen kinetischen Gesamtenergien in gleichen Räumen und mit dem Integral Null über die Komponente des Moments in einer beliebigen und jeden Richtung.  $N$  sei die Molekelzahl in der Volumeneinheit. Die Molekeln seien teils grün, teils rot gezeichnet, und immer wenn eine rot gezeichnete Molekel die Ebene  $GGG$  berührt, werde ihre Bezeichnung in grün geändert, und immer wenn eine grün gezeichnete Molekel die Ebene  $RRR$  berührt hat, werde ihre Bezeichnung in rot verwandelt. Diese Umbezeichnungen sind nicht imstande, auch nur im geringsten Grade die Masse oder die Form oder die Elastizität der Molekeln zu ändern, ebensowenig stören sie das Gleichgewicht des Gases oder ändern sie die Bewegung irgendeiner seiner Partikeln; sie geben uns nur die Mittel an die Hand, in Gedanken die Geschichte jeder einzelnen Molekel oder jeder Gruppe von Molekeln festzustellen, die sich gemäß der kinetischen Natur eines Gases hin- und herbewegen und mit anderen Molekeln zusammenstoßen.

1) Soviel ich weiß, gründeten sich alle bisher gemachten Versuche zur Bestimmung der thermischen Leitungsfähigkeit von Gasen auf Beobachtungen über das Maß der Übertragung von Wärme zwischen einer Thermometerkugel oder einem gespannten ein elektrisches Widerstandsthermometer bildenden Metall-drahte und den Wandungen des das Thermometer und das untersuchte Gas enthaltenden Gefäßes. Vgl. Wiedemanns Annalen, 1888 Vol XXXIV, S. 623 und 1891, Vol. XLIV, S. 177. Für andere Quellenangaben vgl. O. E. Meyer, § 107.

2) Vgl. die letzten zehn Zeilen des Buches von O. E. Meyer.

§ 37. Welches auch die ursprüngliche Verteilung der grün und rot gezeichneten Molekeln sein mag, so ist doch klar, daß schließlich ein regelmäßiger Übergang aller grün gezeichneten an der Ebene  $GGG$  und aller rot gezeichneten an der Ebene  $RRR$  stattfinden muß nach dem Gesetze

$$g = N \frac{x}{a}; \quad r = N \frac{a-x}{a}, \quad (1)$$

wenn mit  $g$  und  $r$  die Anzahl grün und rot gezeichneter Molekeln in der Raumeinheit im Abstände  $x$  von der Ebene  $RRR$  dargestellt werden. In diesem Zustande rein statistischen Gleichgewichtes wird die Gesamtzahl der irgendeine parallele Zwischenebene in der Richtung von  $GGG$  nach  $RRR$  durchsetzenden Molekeln gleich sein der Zahl der in derselben Zeit sie von  $RRR$  nach  $GGG$  durchsetzenden; es wird aber eine größere Anzahl grün gezeichneter Molekeln nach  $RRR$  hin als nach  $GGG$  hin wandern und eine um ebensoviel größere Anzahl rot gezeichneter Molekeln wird nach  $GGG$  hin als nach  $RRR$  hin wandern. Wenn wir diese Differenz für die Flächeneinheit in der Zeiteinheit mit  $QN$  bezeichnen, so erhalten wir für das, was ich als materielles Diffusionsvermögen bezeichnet habe (was Maxwell „Diffusionskoeffizient“ genannt hat),

$$D = Qa. \quad (2)$$

Wir dürfen diese Gleichung als die Definition des Diffusionsvermögens auffassen. Ich bemerke, daß  $Q$  die Dimension  $LT^{-1}$  hat, da die Größe  $D$  bekanntlich die Dimensionen  $L^2T^{-1}$  besitzt, wie wir sie in Quadratcentimeter pro Sekunde ausdrücken.

§ 38. Bisher haben wir vorausgesetzt, daß die  $G$ - und die  $R$ -Partikel in jeder Hinsicht dieselben Eigenschaften besitzen, und das mit  $D$  bezeichnete Diffusionsvermögen ist das Diffusionsvermögen zwischen den Molekeln eines homogenen Gases. Wir können aber auch voraussetzen, daß die  $G$ - und die  $R$ -Molekeln von verschiedenen Eigenschaften sind und daß die Ansammlungen von  $G$ -Molekeln und  $R$ -Molekeln in zwei verschiedenen Gasen bestehen. Alles, was oben beschrieben ist, wird auch für die Diffusionen zwischen diesen beiden Gasen gelten, außer daß die beiden Differenzen, die gleich sind, wenn die rot und die grün gezeichneten Molekeln dieselben Eigenschaften besitzen, nicht mehr gleich sind oder doch wenigstens nicht mehr ohne besonderen Beweis als gleich angenommen werden dürfen bei verschiedenen Gasen. Wir wollen also mit  $Q_g N$  den Überschuß der Anzahl der irgendeine Zwischenebene nach  $RRR$  hin durchsetzenden  $G$  Molekeln über die Anzahl der sie nach  $GGG$  hin durchsetzenden bezeichnen, und mit  $Q_r N$  den Überschuß der Anzahl der nach  $GGG$  hin wandernden  $R$ -Molekeln über die nach  $RRR$  hin wandernden. Dann finden wir zwei verschiedene Diffusionsvermögen, deren Mittelwerte in dem ganzen Gebiete zwischen den beiden Grenzebenen gegeben sind durch die Gleichungen

$$D_g = Q_g a; \quad D_r = Q_r a;$$

hier bedeutet  $D_g$  das Diffusionsvermögen der grün gezeichneten Molekeln und  $D_r$  das Diffusionsvermögen der rot gezeichneten Molekeln in der heterogenen Mischung unter den in § 37 erläuterten Umständen. Jetzt dürfen wir nicht mehr annehmen, daß die Gradienten der Dichte der beiden Gase

gleichförmig sind, wie dies in den Gleichungen (1) des § 37 ausgedrückt ist, da die Homogenität, von der diese Gleichungen abhängen, nicht mehr besteht.

§ 39. Um dies praktisch zu erläutern<sup>1)</sup> seien in der figürlichen Darstellung, Fig. 57, die Ebenen  $GGG$  und  $RRR$  äußerst dünne Platten aus trockenem, porösem Material, etwa aus dem unglasierten Ton, wie er in den Versuchen von Graham benutzt ist. An Stelle der grün und rot gezeichneten Molekeln wollen wir uns zwei Gase vorstellen, die ich  $G$  und  $R$  nenne, die in Fülle durch zwei nicht poröse Rohre aus Glas oder Metall zugeführt und so geleitet werden, daß sie radial in Berührung mit den Endplatten ausströmen, wie dies in der Zeichnung angedeutet ist. Wenn die beiden Ströme der beiden reinen Gase hinreichend reichlich sind, werden die Räume  $GGG$ ,  $RRR$  nahe den Innenflächen der porösen Endplatten von den Gasen  $G$  und  $R$  in nahezu reinem Zustande ausgefüllt werden können. Genau rein können sie darin nicht sein,

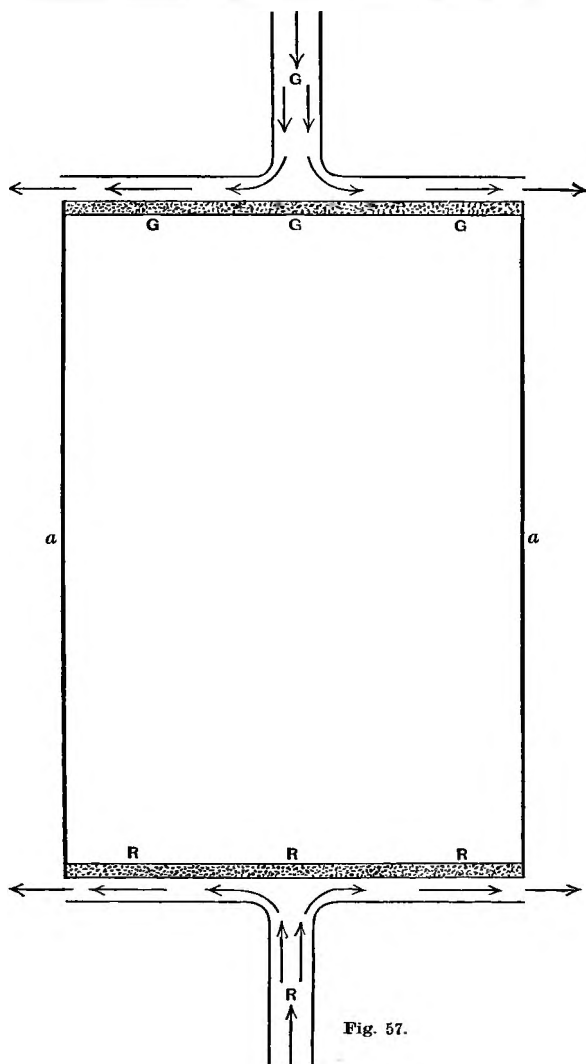


Fig. 57.

1) Bei einem wirklich auszuführenden Versuch dürfte es nötig sein, die Differenz der Verhältnisse des  $G$ -Gases zu beiden Seiten der  $RRR$ -Platte und des  $R$ -Gases zu beiden Seiten der  $GGG$ -Platte in Anschlag zu bringen. Dies wird in der Praxis äußerst schwierig, wenn nicht unmöglich sein. Diese Schwierigkeit ist der analog, auf die man stößt, wenn man die elektrischen Widerstände der Verbindungen an den Enden eines massiven Metallstabes, dessen elektrischen Widerstand man zu messen wünscht, in Rechnung zieht. Aber die einfache und genaue „Potentialmethode“, nach der diese Schwierigkeit in dem Falle des elektrischen Widerstandes leicht und vollkommen überwunden wird, ist hier nicht anwendbar. Ich führe jedoch die im Text beschriebene Anordnung nicht als einen brauchbaren Plan für die Messung des Diffusionsvermögens zwischen zwei Gasen an. Auch wenn keine andere Schwierigkeit bestände, wären die Mengen der zur Ausführung des Versuches erforderlichen zwei reinen Gase unpraktisch groß.

auch wenn die Geschwindigkeiten der an den Außenseiten der porösen Endplatten vorüberstreichenden Gase mit den molekularen Geschwindigkeiten in den Gasen vergleichbar wären und zugleich die porösen Platten so dünn wären, daß sie in ihrer Dickenausdehnung nur zwei oder drei Molekeln fester Materie enthielten. Die in Kontakt mit den nächsten Flächen der porösen Platten befindlichen Gase werden aber bei praktisch ausführbarer Dünne der Platten immerhin wahrscheinlich einigermaßen annähernd rein sein, wenn  $a$ , der Abstand zwischen den beiden Platten, nicht kleiner als fünf oder sechs Zentimeter und die gleitenden Geschwindigkeiten ziemlich (aber nicht unausführbar) groß sind. Nach der Bezeichnung des § 37 ist  $Q_g$  die Menge des in der Zeitsekunde durch  $GGG$  eintretenden und durch  $RRR$  austretenden  $G$ -Gases für das Quadratcentimeter Fläche,  $Q_r$  die Menge  $R$ -Gas, die in der Zeitsekunde für das Quadratcentimeter durch  $RRR$  ein- und durch  $GGG$  austritt, wo als Einheit der Menge eines jeden Gases diejenige angenommen ist, die in dem Zuführungsrohr ein Kubikcentimeter ausfüllt. Die Gleichungen

$$D_g = Q_g \frac{a}{(1-g-r)}, \quad D_r = Q_r \frac{a}{(1-g-r)},$$

in denen mit  $g$  und  $r$  die verhältnismäßigen Mengen des  $G$ -Gases an  $R$  und des  $R$ -Gases an  $G$  bezeichnet sind, bestimmen die durchschnittlichen Diffusionsvermögen der beiden Gase unter den Umständen, unter denen sie bestehen, in den verschiedenen Teilen der Länge  $a$  zwischen den Endplatten. Ich habe diese Feststellung vorsichtig ausgedrückt, um sowohl die Annahme gleicher Werte der Diffusionsvermögen der beiden Gase als auch die der Gleichheit des Diffusionsvermögens jedes einzelnen Gases überall in dem Raume zwischen den beiden Endplatten zu vermeiden. Soviel ich weiß, ist eine Verschiedenheit der Diffusionsvermögen der beiden Gase bisher noch von niemand, der über den Gegenstand geschrieben hat, unterschoben worden.<sup>1)</sup> Was tatsächlich durch die Versuche von Loschmidt, § 43, weiter unten, gegeben ist, ist das arithmetische Mittel aus den beiden Diffusionsvermögen  $D_g$  und  $D_r$ .

§ 40. Im Jahre 1877 hat O. E. Meyer auf Grund theoretischer Überlegungen, die mir vollkommen stichhaltig scheinen, die Meinung ausgesprochen, daß die Ineinanderdiffusion zweier Gase entsprechend den Verhältnissen der beiden an der Mischung beteiligten Gase variiert. In der Ausgabe seiner „Kinetischen Gastheorie“<sup>2)</sup> vom Jahre 1899 lenkt er wieder die Aufmerksamkeit auf diese Anschauung und führt Resultate verschiedener Beobachter, Loschmidt, Obermayer, Waitz, an, die sie zu unterstützen scheinen, sie jedoch nicht, wie er sagt, vollkommen bindend beweisen. Andererseits ergibt die Theorie von Maxwell (§ 41, weiter unten) das Diffusionsvermögen zwischen zwei Gasen als unabhängig von ihren Mengenverhältnissen, und sie gibt nur einen einzigen Ausdruck für Diffusionsvermögen, aus dem zu folgen scheint, daß nach dieser Theorie die beiden Diffusions-

1) Wie diese auffallend scheinende Behauptung zu verstehen ist, erhellt aus dem folgenden. Doch sei mir gestattet, zu der hier angegebenen Literatur auch auf mein Werk „Thermodynamik und Kinetik der Körper“ hinzuweisen, Bd. I, S. 338 ff. D. H.

2) Übersetzt (englisch) von Baynes, S. 264, deutsche Ausgabe 1899, S. 100 f.



vermögen einander gleich sind. Der Gegenstand ist äußerst schwierig und von größtem, theoretischem wie praktischem Interesse; und eine eingehende experimentelle Untersuchung erscheint in hohem Maße erwünscht.

§ 41. Im Jahre 1873<sup>1)</sup> gab Maxwell als Resultat einer theoretischen Untersuchung die folgende Formel an, die das Diffusionsvermögen zwischen zwei Gasen ( $D_{12}$ ) unabhängig von dem Verhältnisse der beiden Gase in irgendeinem Teile der Mischung darstellt; dabei ist vorausgesetzt, daß jedes Gas aus kugelförmigen Atomen besteht, wie sie Boscovich angenommen hat, die aufeinander nach dem Gesetze einwirken, daß die Kraft Null ist für alle Abstände, die die (mit  $s_{12}$  bezeichnete) Summe der Radien übersteigt und in einer unendlich großen Abstoßung besteht, wenn der Abstand zwischen ihren Mittelpunkten unendlich wenig kleiner als jener Abstand ist. Die Formel lautet

$$D_{12} = \frac{1}{2\sqrt{6\pi}} \frac{V}{N} \frac{1}{s_{12}^2} \sqrt{\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right)}, \quad (1)$$

wo  $w_1$  und  $w_2$  die Massen der Molekeln in den beiden Gasen sind, auf die Masse einer Wasserstoffmolekel als Einheit bezogen,  $V$  die Quadratwurzel aus dem Mittel der Quadrate der Geschwindigkeiten der Molekeln in Wasserstoff bei 0° C und  $N$  die Anzahl der Molekeln in einem Kubikzentimeter eines Gases (die ja nach dem Arvogadroschen Gesetze in allen Gasen dieselbe ist) bei 0° C und dem normalen Atmosphärendruck bedeutet. Ich finde die folgende einfachere Formel mehr geeignet

$$D_{12} = \frac{1}{2\sqrt{6\pi}} \frac{1}{N s_{12}^2} \sqrt{(V_1^2 + V_2^2)}, \quad (2)$$

wo  $V_1^2$ ,  $V_2^2$  die mittleren Quadrate der molekularen Geschwindigkeiten der beiden Gase bei 0° C sind, und die Werte  $3p/q$  für die beiden Gase, also das dreifache der Quadrate ihrer nach Newton berechneten Schallgeschwindigkeiten bei dieser Temperatur, besitzen. Der Kürze wegen wollen wir als mittlere molekulare Geschwindigkeit die Quadratwurzel aus dem Mittel der Quadrate der Geschwindigkeiten der Molekeln bezeichnen. Die nämliche Formel ist schließlich auch auf das molekulare Diffusionsvermögen eines einzelnen Gases anwendbar; wenn man als seine mittlere molekulare Geschwindigkeit  $V_1 = V_2 = V$ , und  $s_{12} = s$  als den Durchmesser seiner Molekeln annimmt; dann finden wir

$$D = \frac{1}{2\sqrt{3\pi}} \frac{V}{N s^2}. \quad (3)$$

§ 42. Es ist unangängig, durch irgendein direktes Verfahren das molekulare Diffusionsvermögen eines einzelnen Gases zu finden, da wir keine Möglichkeit haben, seine Partikel in der im obigen § 36 dargelegten Weise zu kennzeichnen; aber die Theorie von Maxwell gibt uns in einer äußerst interessanten Weise das Mittel, das Diffusionsvermögen jedes einzelnen von drei Gasen aus drei Versuchen zu berechnen, die die Diffusionsvermögen zwischen je zweien von ihnen bestimmen. Aus dem zwischen je zweien von ihnen durch den Versuch ermittelten Diffusionsvermögen finden wir nach (2) § 41 einen Wert

1) „On Loschmidts Experiments on Diffusion in relation to the Kinetic Theory of Gases“. Nature, Aug. 1873; Scientific Papers, Vol. II, pp. 343–350.

von  $s_{12} \sqrt{(2 \sqrt{3\pi N})}$  für jedes Paar. Wir haben aber außerdem  $s_{12} = \frac{1}{2}(s_1 + s_2)^{1)}$ , woraus sich ergibt

$$s_1 = s_{12} + s_{13} - s_{23}; \quad s_2 = s_{12} + s_{23} - s_{13}; \quad s_3 = s_{13} + s_{23} - s_{12}. \quad (1)$$

Indem wir so die drei Werte von  $s \sqrt{(2 \sqrt{3\pi N})}$  berechnen und sie in (3) § 41 verwenden, finden wir einzeln die molekularen Diffusionsvermögen jedes der drei Gase.

§ 43. In zwei Mitteilungen<sup>2)</sup> an die Wiener Akademie der Wissenschaften beschreibt Loschmidt im Jahre 1870 experimentelle Bestimmungen der Diffusionsvermögen zwischen zehn Paaren Gasen, die nach einem wohl-durchdachten Verfahren mit großer Sorgfalt zur Sicherung der Genauigkeit ausgeführt sind. In jedem einzelnen Falle wird das durch Versuch ermittelte Diffusionsvermögen zwischen zwei Gasen unter allen Umständen etwa annähernd das Mittel aus den Diffusionsvermögen nach § 39 sein, wenn diese ungleich sind. Die auf 0° C und den atmosphärischen Normaldruck reduzierten und — um von Loschmidts Quadratmeter für die Stunde zu dem jetzt gebräuchlichen Quadratzentimeter für die Sekunde überzugehen — mit 2,78 multiplizierten Zahlen sind die folgenden:

Tabelle für Ineinanderdiffusionen.

Gaspaare	$D$ in qcm pro Sekunde	Gaspaare	$D$ in qcm pro Sekunde
H <sub>2</sub> , O <sub>2</sub>	0,7214	CO, CO <sub>2</sub>	0,1406
H <sub>2</sub> , CO	0,6422	CO <sub>2</sub> , Luft	0,1423
H <sub>2</sub> , CO <sub>2</sub>	0,5558	CO <sub>2</sub> , NO	0,0984
O <sub>2</sub> , CO	0,1802	CO <sub>2</sub> , CH <sub>4</sub>	0,1587
O <sub>2</sub> , CO <sub>2</sub>	0,1409	SO <sub>2</sub> , H <sub>2</sub>	0,4809

In den ersten sechs von diesen Paaren kommt jedes der vier Gase H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, CO, CO<sub>2</sub> dreimal vor, und wir haben vier Reihen von drei Diffusionsvermögen zwischen je zwei Gasen, die im ganzen drei Bestimmungen des Diffusionsvermögens jedes einzelnen Gases wie folgt ergeben:

Gase	Gaspaare	$D_1$	Gaspaare	$D_2$
H <sub>2</sub> .... (1)	(12, 13, 23) ....	1,32	(12, 13, 23) ....	0,193
	(12, 14, 24) ....	1,35	(12, 14, 24) ....	0,190
	(13, 14, 34) ....	1,26	(23, 24, 34) ....	0,183
O <sub>2</sub> .... (2)	Mittel 1,31		Mittel 0,189	
CO .... (3)	$D_3$		$D_4$	
CO <sub>2</sub> .... (4)	(12, 13, 23) ....	0,169	(12, 14, 24) ....	0,106
	(13, 14, 34) ....	0,175	(13, 14, 34) ....	0,111
	(23, 24, 34) ....	0,178	(23, 24, 34) ....	0,109
	Mittel 0,174		Mittel 0,109	

1) Dies stimmt mit der Gleichung (4) von Maxwell überein, zeigt aber, daß seine Gleichung (6) unkorrekt ist.

2) „Experimental-Untersuchungen über die Diffusion von Gasen ohne poröse Scheidewände“, Sitz. d. k. Akad. d. Wissensch., 10. März und 12. Mai 1870.

Bedenkt man die große Schwierigkeit der experimentellen Untersuchung, so darf man die Übereinstimmung zwischen den drei Resultaten für jedes einzelne Gas im ganzen für sehr zufriedenstellend ansehen, sowohl hinsichtlich der Genauigkeit der Loschmidtschen Versuche als hinsichtlich der Richtigkeit der Maxwellschen Theorie. Es ist sicher ein sehr merkwürdiges Ergebnis von Theorie und Experiment, in den vier Mitteln aus den Reihen von je drei Bestimmungen etwas gefunden zu haben, was für die vier Gase Wasserstoff, Sauerstoff, Kohlenoxyd und Kohlendioxyd in gewissem Grade als große Annäherung an die absoluten Werte einer scheinbar so fern von der Möglichkeit experimenteller Beobachtung liegenden Eigenschaft, wie das Diffusionsvermögen zwischen den Molekeln eines einzelnen Gases eine solche ist, bezeichnet werden kann.

§ 44. Maxwell hat in seinen theoretischen Arbeiten aus verschiedenen Zeiten zwei sehr verschiedene Anschauungen über die innere Mechanik der Viskosität in einem einzelnen Gase aufgestellt, beide interessant, und jede zweifellos stichhaltig. In der einen<sup>1)</sup> wird die Wirkung der Viskosität als eine Nachwirkung von einer „instantanen Starrheit eines Gases“ nachgewiesen. In der andern<sup>2)</sup> wird die Viskosität als eine Diffusion eines Moments angesprochen; und auf S. 347 seiner im obigen § 41 erwähnten Arbeit teilt er als aus „der Theorie“ folgend, aber ohne Beweis, eine Formel (5) mit, die in Verbindung mit (1) ergibt

$$\frac{\mu}{\varrho} = D, \quad (1)$$

wo mit  $\varrho$  die Dichte, mit  $\mu$  die Viskosität und mit  $D$  das Molekeln-Diffusionsvermögen eines beliebigen einzelnen Gases bezeichnet ist. Andererseits hatte er in seiner Abhandlung von 1866 Formeln angegeben, aus denen sich berechnet<sup>3)</sup>

$$\frac{\mu}{\varrho} = 0,648 D. \quad (2)$$

§ 45. Indem ich die Viskosität als durch Diffusion eines Moments erklärt betrachtete, glaubte ich stets (§ 34 oben) die Gleichung (1) als für annähernd richtig für jedes beliebige Gas, ein einatomiges, zweiatomiges oder auch vielatomiges ansehen zu dürfen, vorausgesetzt nur, daß die Dauer der mittlern freien Bahn groß ist im Vergleich mit der Summe der dauernden Zusammenstöße. Es trifft sich aber unglücklich für diese Anschauung, daß Vergleichen der vorzüglichen experimentellen Bestimmungen Loschmidts über das Diffusionsvermögen mit zweifellos genauen Bestimmungen Grahams nach seinen ersten Versuchen über Viskosität mit dem Transpirationsverfahren

1) Trans. Roy. Soc., Mai 1866; Scientific Papers, Vol. II, p. 70.

2) „Molecules“, a lecture delivered before the Brit. Assoc. at Bradford, Scientific Papers, Vol. II, p. 376. Vgl. auch O. E. Meyer, Kinetische Gastheorie (Baynes' Übers. 1899) §§ 74–76, S. 73 ff. der deutschen Ausgabe von 1899.

3) Die Formel für die Viskosität (Sc. Papers, Vol. II, p. 68), zusammengekommen mit der Formel für molekulares Diffusionsvermögen eines einzelnen Gases, wie es aus der Formel für das Diffusionsvermögen zwischen zwei Gasen von gleicher Dichte abgeleitet ist, ergibt  $\frac{\mu}{\varrho} D = \frac{A_1}{3A_2}$ , was nach den auf p. 43 des Vol. II, Sc. Papers gegebenen Werten von  $A_1$  und  $A_2$  gleich 0,648 ist.

und mit jüngeren Versuchen von Obermayer und andern Beobachtern große Abweichungen von Gleichung (1) aufweisen und eine weit bessere Übereinstimmung mit der Gleichung (2) dartun. Wählt man 0,0000900, 0,001430, 0,001234 und 0,001974 als die normalen Dichten der vier Gase Wasserstoff, Sauerstoff, Kohlenmonoxyd und Kohlendioxyd<sup>1)</sup> und multipliziert diese mit den Diffusionsvermögen nach den Versuchen von Loschmidt und nach der Theorie von Maxwell, so erhalten wir in dieser Weise die folgende Vergleichung mit den Viskositäten Obermayers bei 0° und Normaldruck, wodurch die Diskrepanz zwischen Versuch und der mir einleuchtenden in § 34 angeführten Theorie aufgedeckt wird.

Kol. 1	Kol. 2	Kol. 3	Kol. 4
Gas	Viskosität, berechnet nach der Maxwell'schen Theorie aus den Diffusionsvermögen nach Loschmidt $\mu = \varrho D$	Viskositäten nach Obermayer <sup>2)</sup>	Verhältnis der Werte in Kol. 3 zu denjenigen in Kol. 2
H <sub>2</sub>	0,000119	0,0000822	0,691
O <sub>2</sub>	0,000269	0,0001873	0,696
CO	0,000212	0,0001630	0,769
CO <sub>2</sub>	0,000218	0,0001414	0,649

§ 46. Lassen wir diese Abweichung unerklärt und eliminieren  $D$  aus (1) § 44 und (3) § 41, so finden wir als Maxwells letzten Ausdruck für die theoretische Beziehung zwischen der Molekelzahl pro Kubikzentimeter, dem Durchmesser der Molekeln, der molekularen Geschwindigkeit, der Dichte und Viskosität eines einzelnen Gases

$$Ns^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \frac{V\varrho}{\mu} = 0,1629 \frac{V\varrho}{\mu}. \quad (1)$$

Da die Zahl Gramm und die Anzahl Molekeln in einem Kubikzentimeter  $\varrho$  und  $N$  sind, gibt  $\varrho/N$  die Masse einer Molekel, in Gramm ausgedrückt. Bezeichnet man diese mit  $m$ , so erhält man hiernach

$$m = 2\sqrt{3}\pi \frac{\mu}{V} s^2 = 6,140 \frac{\mu}{V} s^2. \quad (2)$$

In diesen Formeln, wie sie ursprünglich von Maxwell für den Fall eines aus harten sphärischen Atomen zusammengesetzten Gases untersucht sind, ist  $s$  durchaus der Durchmesser des Atoms und ist bei allen Temperaturen und Dichten des Gases der nämliche. Wenn wir die Formeln auf zweiatomige oder mehratomige Gase oder auf ein atomiges, aus kugelförmigen Atomen bestehendes Gas anwenden, dessen Wirkungssphären bei dem Zusammenstoß,

1) Die genaueren Zahlen sind, mit  $10^{-8}$  multipliziert, 0,08955; 1,42923; 1,25058; 1,96519; an den obigen Angaben wird aber dadurch fast nichts geändert.

D. H.

2) Später veröffentlichte Zahlen sind: 0,0000861; 0,0001878; 0,0001625; 0,0001383. Die Zahlen der Kolumne 4 werden hiernach 0,724; 0,698; 0,766; 0,634.

D. H.

je nach der Heftigkeit des Stoßes, mehr oder weniger übereinandergreifen, kann  $s$  als der Durchmesser definiert werden, den ein ideales hartes sphärisches Atom, das an Masse der wirklichen Molekel gleich ist, haben muß, um dieselbe Viskosität wie das wirkliche Gas, bei irgendeiner besonderen Temperatur zu liefern. Da dies die strenge Definition von  $s$  ist, können wir diese Größe den mittleren kürzesten Abstand zwischen den Trägheitsmittelpunkten der im Zusammenstoß befindlichen Molekeln nennen, der geeignet ist, die wahre Viskosität zu liefern; eine Bezeichnung oder ein Ausdruck, der uns zum Verständnis des definierten Begriffes verhilft.

§ 47. Für ein aus harten, kugelförmigen Atomen bestehendes ideales Gas zeigt Gleichung (2) § 46, wenn wir uns erinnern, daß  $V$  von der Dichte unabhängig ist und sich wie  $t^{\frac{1}{2}}$  ( $t$  bezeichnet die absolute Temperatur) ändert, daß auch die Viskosität von der Dichte unabhängig ist und sich annähernd wie  $t^{\frac{1}{2}}$  ändert. Die experimentellen Bestimmungen der Viskosität von Argon bei verschiedenen Temperaturen durch Rayleigh zeigen, daß für dieses ein-

Kol. 1	Kol. 2	Kol. 3	Kol. 4	Kol. 5	Kol. 6	Kol. 7	Kol. 8	Kol. 9
Gas	$\rho$ in Gramm für das Kubik- zenti- meter aus- gedrückt	$\mu$ in Dyn für das Quadrat- zenti- meter aus- gedrückt	$V$ in Zenti- meter für die Se- kunde aus- gedrückt	$Ns^2$ in (Zenti- meter) <sup>-1</sup> aus- gedrückt	Wählt man $N = 10^{20}$ (§ 50), so er- hält man demnach $s$ bei 0° C in Zentimeter aus- gedrückt	Wählt man $N = 10^{20}$ so erhält man $m$ in Gramm aus- gedrückt	Mittlere freie Bahn nach der Formel von Maxwell <sup>1)</sup> $l = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi N s^2}$ in Zentimeter	Verhältnis des von den Molekeln eingenom- menen Raumes zu dem ganzen Raume $N \frac{\pi}{6} s^2$
CO <sub>2</sub>	0,001974	0,0001414	39200	89200	$2,99 \cdot 10^{-8}$	$19,74 \cdot 10^{-24}$	$2,52 \cdot 10^{-6}$	$1,390 \cdot 10^{-3}$
H <sub>2</sub>	0,000090	0,0000822	184000	32800	1,81	0,90	6,89	0,311
CO	0,001234	0,0001630	49600	61200	2,47	12,34	3,68	0,792
N <sub>2</sub>	0,001275	0,0001635	49200	61600	2,48	12,57	3,66	0,800
O <sub>2</sub>	0,00143	0,0001873	46100	57300	2,39	14,3	3,93	0,719
Argon	0,001781	0,0002083	41300	57500	2,40	17,81	3,91	0,722

atomige Gas die Viskosität sich wie  $t^{0,815}$  ändert; folglich zeigt Gleichung (2) § 46, daß  $s^2$  wie  $t^{-0,315}$  und demgemäß  $s$  wie  $t^{-0,16}$  variiert. Experimentelle Bestimmungen von Viskositäten und der Verhältnisse ihrer Änderungen mit der Temperatur für Kohlensäure, Äthylen, Äthylenchlorid und salpetrige Säure durch Obermayer<sup>2)</sup> zeigen weiter, daß für diese Gase die Viskosität bis zu einem gewissen Grade der Genauigkeit der absoluten Temperatur nahezu proportional ist; demnach variiert  $s^2$  nahezu wie  $t^{-0,5}$ . Seine Bestimmungen für fünf molekular einfachere Gase, Luft, Wasserstoff, Kohlenoxyd, Stickstoff und Sauerstoff, zeigen, daß die Zunahme von  $\mu$  und demnach von  $s^{-2}$  mit der Temperatur, wie zu erwarten, beträchtlich kleiner ist als für die mehr komplexen Gase, mit denen er seine Bestimmungen ausgeführt

1) Maxwell, Collected Papers, Vol. II, p. 348, Gleichungen (7). Die Formel enthält in ihrem Abdruck einen sehr störenden Fehler, nämlich  $\sqrt{2}\pi$  an Stelle von  $\sqrt{2} \cdot \pi$ .

2) Obermayer, Wien. Akad. 1876, 16. März, Bd. 73, S. 433.

hat. Nimmt man die Viskositäten bei  $0^{\circ}\text{C}$  für Kohlensäure und die vier oben genannten einfachen Gase und die von Rayleigh für Argon gefundene nebst den bekannten Dichten aller dieser sechs Gase bei  $0^{\circ}\text{C}$  und Normaldruck, so erhalten wir die vorstehende Tabelle (S. 245) der in § 46 (1) angegebenen Werte<sup>1)</sup>

§ 48. Die Bedeutung der Größe „ $s$ “ des Durchmessers, wie er in § 46 definiert sich findet, ist für das einatomige Gas, Argon, einfacher als für irgendeines von den andern Gasen; und glücklicherweise kennen wir für Argon die Dichte, nicht bloß im gasförmigen Zustande (0,001781), sondern auch im flüssigen (1,42)<sup>2)</sup>. Die letztere ist 797 mal so groß wie die erstere. Nun scheint es, wenn man alle Umstände berücksichtigt, wahrscheinlich, daß die Anhäufung von Atomen in der Flüssigkeit etwas weniger dicht ist als eine Ansammlung von Kugeln vom Durchmesser  $s$ , die bei kubischer Anordnung einander gerade berühren; um aber nicht sogleich zu Anfang eine Hypothese zu machen, mag  $qs$  der Abstand von Mittelpunkt zu Mittelpunkt einer kubischen Anordnung der Molekeln sein, die 797 mal dichter ist als das Gas bei  $0^{\circ}\text{C}$  und Atmosphärendruck; dann ist  $q$  größer als 1, wenn die Flüssigkeit weniger dicht und kleiner als 1, wenn die Flüssigkeit dichter ist als die kubische Anordnung, falls die als Kugeln vom Durchmesser  $s$  betrachteten Molekeln einander gerade berühren. Wir haben

$$797N = 1/(qs)^3 \quad (3)$$

und für Argon ist dann nach § 46 (1)

$$Ns^2 = 57500. \quad (4)$$

Eliminiert man  $s$  aus diesen Gleichungen, so findet man

$$N = 797^2 \cdot 57500^3 q^6 = 1,21 \cdot 10^{20} q^6. \quad (5)$$

Wenn die Atome von Argon ideale harte Kugeln wären, die aufeinander nur wirken, falls sie sich berühren, sonst aber keine Kraft ausüben, müßte fast sicher  $q \geq 1$  sein (da es bei dichterem Packung als bei der in kubischer Anordnung nicht möglich scheint, daß die Ansammlung hinreichende relative Beweglichkeit ihrer Teile besäße, um ihr Flüssigkeitscharakter zu geben), und demgemäß müßte  $N > 1,21 \cdot 10^{20}$  sein.

§ 49. Für Kohlensäure, Wasserstoff, Stickstoff und Sauerstoff besitzen wir experimentelle Bestimmungen der Dichten im festen oder flüssigen Zustande; und wenn wir diese Gase so behandeln, wie wir Argon behandelt haben, ohne darauf Rücksicht zu nehmen, daß sie nicht einatomig sind, finden wir für sie Resultate, wie sie sich in der folgenden Tabelle (S. 247) zeigen. In dieser Tabelle bedeutet  $q$  das Verhältnis des Abstandes der Mittelpunkte der einander nächsten Molekeln in einer gedachten kubischen Ansammlung von der gleichen Dichte wie die im festen oder flüssigen Zustande, wie sie in den Kolonnen 3 und 2 angedeutet ist, zu  $s$ .

1) Zu allem vorausgehenden darf ich wieder auf mein S. 240 angeführtes Buch, Bd. I, insbesondere S. 202 ff., 313 ff., sowie auf eine Arbeit von mir in der Festschrift für Boltzmann S. 510 ff. verweisen. Es sind unter Zuhilfenahme der mechanischen Definition des zweiten Hauptsatzes Formeln entwickelt, die auch den Zusammenhang mit der Atomzahl darlegen und die sich der Erfahrung gut anpassen.

D. H.

2) Vgl. Baly and Donan, Chem. Journ., Juli 1902.

Kol. 1	Kol. 2	Kol. 3	Kol. 4	Kol. 5
Gas	Dichte im festen oder flüssigen Zustande	Verhältnis der Dichte im festen oder flüssigen Zustande zur Normaldichte des Gases	Anzahl der Molekeln im Kubikzentimeter Gas bei der normalen Dichte $N$	Werte von $q$ (§46) gemäß der Bedingung, daß $q^{-6} = 1,21$ für Argon (flüssiges, verglichen mit Gas bei 0° und Atmosphärendruck) ist
CO <sub>2</sub>	fest . . . . . 1,58	800	$4,55 \cdot 10^{20} \cdot q^6$	0,771
H <sub>2</sub>	flüssig bei 17° absolut . . 0,090	1000	0,352 „	1,191
N <sub>2</sub>	{ flüssig . . . . . 1,047	833	1,62 „	0,923
	{ fest . . . . . 1,400	1114	2,90 „	0,837
O <sub>2</sub>	flüssig bei seinem Gefrierpunkte . . . . . 1,27	888	1,49 „	0,936
Argon	{ flüssig bei 84° absolut . . 1,42	797	1,21 „	0,969
	{ fest . . . . . 1,396 <sup>1)</sup>	784	1,17 „	0,974

§ 50. Nach dem Avogardoschen Gesetze ist die Anzahl der Molekeln im Kubikzentimeter für alle „vollkommenen“ Gase bei derselben Temperatur und demselben Drucke die nämliche; und selbst Kohlensäure steht für unsere vorliegenden Betrachtungen einem „vollkommenen Gase“ hinreichend nahe. Demnach sind die wirklichen Werte von  $q^6$  den Zahlen, mit denen diese Größe in Col. 4 der obigen Tabelle multipliziert sind, umgekehrt proportional. Nun scheint es, wenn man alle Umstände in Betracht zieht, wahrscheinlich, daß für Argon, das im flüssigen Zustande die Dichte 1,42 besitzt,  $q$  etwas, aber nicht viel größer als eins ist. Wäre  $q$  genau gleich 1, so ergäbe sich  $N = 1,21 \cdot 10^{20}$ ; und ich habe  $q = (1,21)^{-\frac{1}{6}}$  oder 0,969 gewählt, um für  $N$  die runde Zahl  $10^{20}$  zu erhalten. Col. 6 des § 47 ist mit diesem Werte von  $N$  berechnet; es ist aber nicht unwahrscheinlich, daß der richtige Wert von  $N$  beträchtlich größer ist.<sup>2) 3)</sup>

1) Nach einer Mitteilung von Prof. W. Ramsay vom 23. Juli 1901.

2) Maxwell schätzte auf Grund der von Lorentz, Meyer und Kopp angenommenen „Molekularvolumina“ chemischer Elemente, ohne von dem, was wir jetzt von den Dichten des flüssigen Sauerstoffs und des flüssigen Wasserstoffs und der Flüssigkeit des damals noch nicht entdeckten Argongases wissen, etwas zu kennen,  $N = 0,19 \cdot 10^{20}$  (Maxwell, Collected Papers, Vol. II, p. 350); ein Wert, der noch etwas kleiner ist als ein Fünftel des von mir geschätzten Wertes  $10^{20}$ . Auf derselben Seite seiner Abhandlung ist eine Tabelle geschätzter Durchmesser von Molekeln mitgeteilt, die etwa 3,2 oder 3,3 mal größer sind als meine Schätzungen in Col. 6 meiner Tabelle in § 47. In einem früheren Teile seiner Abhandlung (p. 348) gibt Maxwell Schätzungen der freien Bahnen für dieselben Gase, aus denen ich nach seiner Formel (7), wenn sie so wie in Col. 8 meiner Tabelle in § 47 verbessert wird, Werte von  $N$  finde, die sich zwischen  $6,05 \cdot 10^{18}$  und  $6,96 \cdot 10^{18}$  bewegen, also etwa ein Drittel von  $0,19 \cdot 10^{20}$ . Seine unkorrigierte Formel  $\sqrt{2}\pi$  (an Stelle von  $\sqrt{2} \cdot \pi$ ) liefert Werte von  $N$ , die  $\sqrt{\pi}$  oder 1,77 mal so groß sind, also immer noch zu klein gegenüber seiner schließlichen Schätzung. Der Widerspruch ist also durch den Druckfehler in der Formel nicht erklärt, und ich finde auch keine Erklärung. Die freien Bahnen, wie sie Maxwell angegeben hat, sind 1,3 oder 1,4 mal so groß wie die von mir angegebenen.

3) Gegenwärtig wird die Zahl Molekeln in einer Gram molekel Wasserstoff angenommen zu  $6,25 \times 10^{23}$ , woraus sich  $N = 0,56 \times 10^{20}$  ergibt, also ungefähr das Mittel zwischen der Thomsonschen und der erstangeführten Maxwell'schen Zahl.

D. H.

§ 51. Verglichen mit dem Werte für das einatomige Argon, sind die kleineren Werte von  $q$  für die zweiatomigen Gase, Stickstoff und Sauerstoff, und die noch kleineren Werte für die dreiatomige Kohlensäure vollkommen derart, wie sie ohne jede besondere Betrachtung eines Kraftgesetzes für verschiedene Abstände zwischen den Atomen erwartet werden darf. Es scheint, daß die zweiatomigen Molekeln von Stickstoff und Sauerstoff und noch mehr die dreiatomigen Molekeln der Kohlensäure tatsächlich größer sind, wenn sie sich frei im gasförmigen Zustande bewegen, als wenn sie in flüssiger oder fester Ansammlung dicht zusammengepackt sind. Aber die herausfallende Größe von  $q$  für den zweiatomigen Wasserstoff ist nicht so leicht erklärt, und sie bildet einen äußerst interessanten Gegenstand für Molekularspekulationen, obwohl sie oder jede andere Wahrheit in der Natur durch ein eigenes Kraftgesetz nach der Lehre von Boscovich sich erklären läßt, die wir ja heutzutage alle (viele von uns freilich, ohne zu wissen, daß wir es tun) als grundlegende Hypothese für die Physik und Chemie anerkennen. Ich hoffe, auf diese Frage, soweit sie den Wasserstoff betrifft, noch in einem die Kristallographie behandelnden Zusatze zurückzukommen.

Ich bin Professor Dewar sehr verbunden für die Mitteilungen über die Dichte des flüssigen Wasserstoffs und die Dichten anderer verflüssigter oder gefrorener Gase, die er mir bei verschiedenen Gelegenheiten innerhalb der letzten drei Jahre gemacht hat.

§ 52. Eine neue Methode, eine untere Grenze für die Anzahl Molekeln in einem Kubikzentimeter eines Gases zu finden, die von allem bisher nur Erdachten sehr verschieden und für uns wegen ihrer Verbindung mit der Wellentheorie des Lichtes besonders interessant ist, wurde im Jahre 1899 von Lord Rayleigh<sup>1)</sup> angegeben als eine Folgerung aus seiner mechanischen Theorie der Himmelsbläue, die er 18 Jahre vorher aufgestellt hatte. Viele frühere Forscher, auch Newton, hatten das vom blauen Himmel ausgehende Licht, gleichviel ob er klar blau, oder neblig, oder wolkig oder regnerisch ist, feinen suspendierten Partikeln zugeschrieben, die Teile des Sonnenlichtes aus ihrer regelmäßigen Bahn ablenken; aber niemand hat, soviel ich weiß, vor Rayleigh irgendeinen Gedanken veröffentlicht, durch den die Bläue des wolkenlosen Himmels zu erklären ist.<sup>2)</sup> Stokes hatte in seiner berühmten Abhandlung über die Fluoreszenz<sup>3)</sup> die richtige Theorie von dem, was über die Polarisation der Himmelsbläue bekannt war, in der folgenden nach der Bezeichnung von Rayleigh „signifikanten Bemerkung“ geliefert: „Nun scheint mir dieses Resultat eine nicht fernliegende Bedeutung für die Frage nach den Richtungen der Schwingungen in polarisiertem Lichte zu besitzen. Solange die suspendierten Teilchen im Vergleich mit den Lichtwellen groß sind, tritt Spiegelung in der Weise auf, wie an einem Teile der Oberfläche eines großen in die Flüssigkeit eingesenkten Festkörpers; und es kann weiter kein Schluß darüber gezogen werden. Wenn aber der Durchmesser der Teilchen verglichen mit der Wellenlänge des Lichtes klein ist, erscheint es klar, daß die Schwingungen in einem reflektierten Strahl nicht zu den Schwingungen im

1) Rayleigh, Collected Papers, Vol. I, Art. VIII, p. 87.

2) Vgl. jedoch Clausius, Poggendorffs Annalen Bd. 72, S. 295; Bd. 76, S. 161, 188; Bd. 84, S. 449; Bd. 88, S. 543. D. H.

3) „On the Change of Refrangibility of Light“ Phil. Trans. 1852 und Collected Papers, Vol. III.



einfallenden Strahl senkrecht sein können“; dies schließt zugleich ein, daß das Licht, welches in Richtungen senkrecht zu dem erregenden einfallenden Strahl zerstreut wird, stets seine Schwingungen senkrecht zur Ebene des einfallenden und des abgestreuten Strahles hat, vorausgesetzt also, daß der Durchmesser der die Zerstreuung bewirkenden Molekeln im Vergleich mit der Wellenlänge des Lichtes sehr klein ist. In der Unterhaltung sprach Stokes mit mir von diesem Schlusse und erklärte mir mit vollkommener Klarheit und Vollständigkeit seine mechanische Begründung, und verwendete ihn auch zur Erklärung der Polarisation des Lichtes des wolkenlosen Himmels, wenn diese in einer zur Richtung der Sonne senkrechten Richtung angeschaut wird. Er hat mir aber nicht davon gesprochen (obwohl ich nicht zweifle, daß er selbst es gewußt hat), warum das in einer beliebigen Richtung gesehene Licht des wolkenlosen Himmels blau erscheint; ich hätte mich dessen sicherlich erinnert.

§ 53. Rayleigh hat diese Tatsache vollkommen in seiner ersten Abhandlung (1871) erklärt und das mitgeteilt, was jetzt als Gesetz von Rayleigh über die Himmelsbläue bekannt ist und besagt, daß unter der Voraussetzung, daß die Durchmesser der suspendierten Teilchen im Vergleich mit den Wellenlängen klein sind, die Menge zerstreuten Lichtes im Verhältnis zu dem einfallenden Lichte, je nach den verschiedenen Wellenlängen, umgekehrt wie die vierte Potenz dieser Wellenlänge sich verhält. Während also das zerstreute Licht dieselbe Farbe hat wie das auffallende, wenn dieses homogen (einfarbig) ist, muß (bei weißem Licht) das Verhältnis des zerstreuten Lichtes zu dem auffallenden für das Violett siebenmal so groß wie für das Rot des sichtbaren Spektrums sein; und das erklärt eben die stark blaue oder violette Färbung des klarsten Himmels.

§ 54. Die mechanische Theorie zeigt, daß der Teil des Lichtes des blauen Himmels, wenn es in einer zur Richtung der Sonne senkrechten Richtung angeschaut wird, der von Sonnenlicht herrührt, das auf eine einzelne Partikel von einem im Vergleich mit der Wellenlänge des auffallenden Lichtes sehr kleinen Durchmesser fällt, aus Schwingungen besteht, die zu der durch diese beiden Richtungen bestimmten Ebene normal sind; das heißt es ist in der durch die Sonne gehenden Ebene vollkommen polarisiert. In seiner Abhandlung aus dem Jahre 1871<sup>1)</sup> hebt Rayleigh hervor, daß jede Partikel beleuchtet wird nicht bloß von dem direkten Lichte der Sonne, sondern auch von Licht, das an andern Partikeln zerstreut ist, sodann von Erdlicht und teilweise auch von suspendierten Partikeln, deren Dimensionen nicht klein sind im Vergleich mit den Wellenlängen des wirksamen Lichtes. Und so erklärt sich die durch die Beobachtung festgestellte Tatsache, daß die Polarisation auch des klarsten blauen Himmels in einem Abstände von  $90^\circ$  von der Sonne nicht absolut vollkommen ist, wenn sie sich auch sehr angenähert vollkommen zeigt. Nur sehr wenig Polarisation findet sich in dem in einer beliebigen Richtung angeschauten Lichte weißer Wolken, und ebenso in dem von einem nahe über dem Horizonte befindlichen Teile eines wolkenlosen Himmels herrührenden, auch wenn es in einem Abstände von  $90^\circ$  von der Sonne angeschaut wird. Dies kommt teilweise daher, daß die Partikel, die in diesen Fällen das Licht aussenden, nicht klein sind im Vergleich mit den Wellenlängen, und teilweise daher, daß sie viel zur gegen-

1) Collected Papers, Vol. I, p. 94.

seitigen Beleuchtung neben dem auf sie direkt auffallenden Sonnenlicht beitragen.

§ 55. Als Grundlage seiner mechanischen Theorie nimmt Rayleigh schließlich an, daß die suspendierten Teilchen so wirken, als ob der Äther in den von ihnen ausgefüllten Räumen dichter wäre als der ungestörte Äther, im übrigen aber nicht durch die Materie der Partikel selbst beeinflusst würde. Stillschweigend nimmt er weiter überall an, daß der Abstand von Partikel zu Partikel im Vergleich mit dem größten Durchmesser jeder einzelnen Partikel sehr groß ist. Ferner nimmt er an, daß diese dichteren Teile des Äthers dieselbe Starrheit wie der ungestörte Äther besitzen; es ist aber offenbar, daß diese letztere Annahme das Resultat nicht wesentlich beeinflussen kann, sobald der größte Durchmesser der einzelnen Partikel im Vergleich mit ihrem Abstände von der nächsten benachbarten und mit den Wellenlängen des Lichtes sehr klein ist; und in der Tat habe ich auf Grund der Untersuchungen in §§ 41, 42 der vierzehnten Vorlesung für starre sphärische Molekeln, die in den Äther eingebettet sind, genau dasselbe Resultat wie Rayleigh gefunden, nämlich das folgende:

$$k = \frac{8\pi^3 n}{3} \left( \frac{D' - D}{D} \frac{T}{\lambda^2} \right)^2 = 82,67 n \left( \frac{D' - D}{D} \frac{T}{\lambda^2} \right)^2, \quad (1)$$

wo  $\lambda$  die Wellenlänge des als homogen vorausgesetzten auffallenden Lichtes bezeichnet,  $T$  das Volumen jeder suspendierten Partikel,  $D$  die ungestörte Dichte des Äthers,  $D'$  die mittlere Dichte des Äthers innerhalb der Partikel,  $n$  die Anzahl der Partikel im Kubikzentimeter und  $k$  den verhältnismäßigen Verlust des auffallenden homogenen Lichtes, wie er durch die Zerstreuung in allen Richtungen an den suspendierten Partikeln im Kubikzentimeter durchsetzter Luft verursacht wird. So ist

$$1 - e^{-kx} \quad (2)$$

der Verlust an Licht bei der Durchstrahlung der Strecke  $x$  (in Zentimeter gemessen) im Äther, wenn er durch suspendierte Partikel gestört ist.

Es ist beachtenswert, daß  $D'$  nicht in der ganzen Partikel gleichförmig zu sein braucht. Ferner ist beachtenswert, daß die Form des Raumes  $T$  ganz beliebig ist, vorausgesetzt, daß nur der größte Durchmesser im Vergleich mit  $\lambda$  sehr klein ist. Die Formel setzt voraus, daß  $T(D' - D)$  für alle Partikel denselben Wert hat. Wir werden Fälle zu betrachten haben, in denen die Unterschiede von  $T$  und  $D'$  für verschiedene Partikel für das Resultat von Bedeutung sind; und um diese einzuschließen, wollen wir die Formel

$$k = \frac{82,67}{\lambda^4} \sum \left[ \frac{(D' - D) T}{D} \right]^2 \quad (3)$$

benutzen, in der  $\sum \left[ \frac{(D' - D) T}{D} \right]^2$  die Summe der  $\left[ \frac{(D' - D) T}{D} \right]^2$  für alle Partikel in einem Kubikzentimeter bedeutet.

§ 56. Setzen wir nun voraus, daß die Anzahl der in einem Würfel, dessen Kante eine Wellenlänge beträgt, suspendierten Partikel sehr groß ist und daß der größte Durchmesser der einzelnen Partikel im Vergleich zu ihrem Abstand von der nächsten benachbarten Partikel sehr klein ist, so sehen wir, daß die wirksame Dichte des zwischen den Partikeln schwingenden Äthers ist

$$\varrho = D + \Sigma T(D' - D); \quad (4)$$

und demgemäß finden wir, wenn mit  $u$  und  $u'$  die Lichtgeschwindigkeiten einerseits im reinen Äther, andererseits in dem durch die suspendierten Partikel gestörten bezeichnet wird (achte Vorlesung S. 65 ff.)

$$u^2 = u'^2 \left[ 1 + \sum \frac{T(D' - D)}{D} \right]. \quad (5)$$

Nennen wir hiernach  $\mu$  den Brechungsindex des gestörten Äthers, während der des reinen 1 ist, so erhalten wir also

$$\mu = \left[ 1 + \sum \frac{T(D' - D)}{D} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

und folglich

$$\mu^2 - 1 = \sum \frac{T(D' - D)}{D}. \quad (7)$$

§ 57. Rayleigh führt ein Beispiel zur Klarlegung der wirklichen Durchsichtigkeit unserer Atmosphäre an und sagt: „Vielleicht die besten Daten für eine Vergleichung bietet uns die Veränderung der Helligkeit von Sternen in verschiedenen Höhen. Bouguer und andere schätzen die durchgelassene Lichtmenge eines im Zenit befindlichen Sternes durch unsere ganze Atmosphäre auf etwa 0,8. Dies entspricht 8,3 Kilometer (der ‚Höhe der homogenen Atmosphäre‘ bei 10° C) Luft bei Normaldruck.“ Demnach finden wir für ein Medium von der so charakterisierten Durchsichtigkeit  $e^{-830000k} = 0,8$ ; dies ergibt  $1/k = 3720000 \text{ cm} = 37,2 \text{ km}$ .

§. 58. Wir wollen für einen Augenblick annehmen, der so definierte Mangel an Durchsichtigkeit rühre gänzlich von der Tatsache her, daß die letzten Luftmolekel nicht unendlich klein und unendlich zahlreich sind, so daß vielmehr die „suspendierten Partikel“, von denen bisher gesprochen ist, die Molekeln  $N_2$ ,  $O_2$  sind, und ferner, daß die Größe  $(D' - D)T$  für Stickstoff und Sauerstoff dieselbe ist. Dann ergibt der bekannte Brechungsexponent der Luft ( $\mu = 1,0003$ ), der für alles sichtbare Licht hinreichend nahe derselbe ist, vermöge der obigen Gleichung (7)

$$\sum \frac{(D' - D)T}{D} = 0,0006,$$

und indem

$$\sum \frac{D' - D}{D} T = n \frac{D' - D}{D} T$$

gesetzt wird,

$$n \frac{D' - D}{D} T = 0,0006.$$

Benutzen wir diesen Wert in (1), so finden wir

$$k = \frac{29,76}{n\lambda^4 \cdot 10^6}, \quad (8)$$

was der Verlust an direktem Sonnenlicht für ein durchstrahltes Zentimeter Luft wäre, wenn das ganze Licht dieselbe Wellenlänge  $\lambda$  besäße. Eine solche Einfachheit haben wir aber in der Angabe von Bouguer über die Durchsichtigkeit für die tatsächliche Mischung, aus der ja das Sonnenlicht besteht, nicht; da die Formel  $k^{-1}$  proportional der vierten Potenz der Wellen-

länge macht, und jeder wolkenlose Sonnen- und Monduntergang und jeder Sonnen- und Mondaufgang über der See und jeder wolkenlose Anblick der unter dem Horizont befindlichen Sonne oder des Mondes durch das auf einem hohen Berge befindliche Auge beweist, daß die Durchsichtigkeit in Wirklichkeit weit größer ist für rotes Licht als für das durchschnittliche ungetrübte Licht eines beliebigen leuchtenden Körpers, wenn auch wahrscheinlich nicht so viel größer, daß sie proportional der vierten Potenz der Wellenlänge wäre. Trotzdem haben wir die sichere Empfindung, daß die Bouguersche Schätzung des Lichtverlustes beim vertikalen Durchgang durch die ganze Atmosphäre nahezu richtig ist für den hellsten Teil des Spektrums, der etwa der *D*-Linie von der Wellenlänge  $5,89 \cdot 10^{-5}$  cm oder (eine passende runde Zahl)  $6 \cdot 10^{-5}$ , wie sie Rayleigh angenommen hat, entspricht. Mit diesem Werte von  $\lambda$  und  $3,72 \cdot 10^6$  Zentimeter für  $k^{-1}$  ergibt (8) für atmosphärische Luft bei  $10^0$  und Normaldruck  $n = 8,54 \cdot 10^{18}$ . Nun ist es vollkommen sicher, daß ein sehr großer Teil des von Bouguer geschätzten Lichtverlustes von suspendierten Partikeln herrührt; und demgemäß ist es sicher, daß die Anzahl der Molekeln in einem Kubikzentimeter Gas bei Normaltemperatur und Normaldruck beträchtlich größer als  $8,54 \cdot 10^{18}$  ist.

§ 59. Dieser von Rayleigh aus seiner mechanischen Theorie der Absorption des Lichtes von direkten durch die Luft gehenden Strahlen gezogene Schluß, der sehr bestimmt eine untere Grenze für die Anzahl der in einem Kubikzentimeter Gas befindlichen Molekeln gibt, ist vielleicht die am meisten wohlbegründete von allen bisher aufgestellten Schätzungen über Größe und Anzahl der Atome. Wir werden sehen (§§ 73—79, weiter unten), daß eine weit höhere untere Grenze auf denselben Prinzipien durch sorgfältige Untersuchung des Lichtverlustes begründet wird, der von den letzten Molekeln reiner Luft und von suspendierter Materie herrührt, die zweifellos in allen Teilen unserer Atmosphäre vorhanden ist, auch dort, wo sie sich absolut wolkenfrei zeigt, das heißt wärmer ist als der Taupunkt, wenn also keine flüssigen Wasserkügelchen da sind, die Wolken oder Nebel bilden.

§ 60. Gehen wir jetzt zum andern Extrem der versuchsweisen Annahme des § 58 über und setzen, während wir dort, wie wir es als richtig anerkennen, angenommen haben, daß das beobachtete Brechungsvermögen ganz oder fast ganz von den letzten Molekeln der Luft herrührt, nunmehr voraus, daß die von Bouguer geschätzte Undurchsichtigkeit ganz durch suspendierte Partikeln verursacht wird, die wir der Kürze wegen als Staub bezeichnen wollen (gleichviel, ob sie trocken oder naß sind). Man muß dann beachten, daß die Partikel allgemein von sehr ungleicher Größe sind; aber der Einfachheit wegen wollen wir einen Fall wählen, in dem sie alle gleich sind, und wollen ihre Anzahl nur zu  $\frac{1}{10000}$  von jenen  $8,54 \cdot 10^{18}$  setzen, die, wie wir in § 59 gefunden haben, Bouguers geschätztem Grade der Undurchsichtigkeit für  $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$  und dem richtigen Brechungsvermögen der Luft entsprechen. Unter Zugrundelegung derselben Undurchsichtigkeit finden wir jetzt, daß der Beitrag der die Undurchsichtigkeit verursachenden Partikel zu dem Brechungsvermögen nur  $\frac{1}{100}$  des bekannten Brechungsvermögens der Luft ist. Die Anzahl der Staubbpartikel, die wir für diese Wirkung angenommen haben, ist  $8,54 \cdot 10^{14}$  im Kubikzentimeter oder 184 in der Kubikwellenlänge, und wir können voraussetzen, daß diese Zahl nahezu oder vollkommen groß genug ist, um die Richtigkeit der in § 56 für das Brechungsvermögen ge-

gebenen mechanischen Theorie möglich zu machen. Es erscheint mir aber fast sicher, daß  $8,54 \cdot 10^{14}$  unbändig größer ist als die größte Zahl Staubpartikel im Kubikzentimeter, von der die wohlbekannte Verschleiertheit der klarsten wolkenlosen Luft in den unteren Teilen unserer Atmosphäre herrührt, und daß die richtigen Zahlen wahrscheinlich denen nahe liegen, die Aitken<sup>1)</sup> gezählt hat, nämlich zwischen 42500 (Hyères, 4<sup>h</sup> p. m. 5. April 1892) und 43 (Kingairloch, Argyllshire, 1<sup>h</sup> p. m. 26. Juli 1891).

§ 61. Jetzt wollen wir im Gegenteil untersuchen, wie klein die Anzahl der Partikel im Kubikzentimeter sein muß, um den von Bouguer geschätzten Grad der Undurchsichtigkeit hervorzurufen, während die Partikel nicht im Vergleich zur Wellenlänge so groß sind, daß sie die Anwendbarkeit der Theorie von Rayleigh ausschließen. Wir versuchen es, mit  $T = 10^{-3} \lambda^3$  (d. h. das Volumen der Partikel sei  $\frac{1}{1000}$  einer Kubikwellenlänge oder der Durchmesser einer Partikel sei, roh gerechnet,  $\frac{1}{10}$  der Wellenlänge), was hinreichend klein für eine gute angenäherte Anwendung der Rayleighschen Theorie zu sein scheint; und wir setzen, bloß um ein Beispiel zu bilden, voraus,  $D'$  sei die optische Dichte des Wassers, während  $D$  die des Äthers ist, d. h. daß  $D'/D = (1,3337)^2 = 1,78$  beträgt. So erhalten wir  $(D' - D) T/D = 0,00078 \lambda^3$ ; und wenn man  $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$  und  $k^{-1} = 3,72 \cdot 10^6$  (1) setzt, ergibt sich  $n = 1,485 \cdot 10^6$ , oder etwa einundhalb Millionen Partikel im Kubikzentimeter. Wenn diese Zahl auch größer ist als die größte für Luft in der freien Natur von Aitken gefundene Anzahl, so ist sie doch interessant, da sie zeigt, daß der von Bouguer geschätzte Undurchsichtigkeitsgrad verursacht sein kann durch suspendierte Teilchen, deren Zahl hinreichend klein ist, um keinen bemerkenswerten Beitrag zum Brechungsvermögen zu liefern, und doch nicht zu groß für die Theorie von Rayleigh sich erweist. Wenn wir aber bei Tage durch klare Luft schauen und sehen, wie weit die Farbe von einigen hundert Meter oder einigen Kilometer Luft, mit der Öffnung einer Höhle oder dem tiefsten Schatten eines Berges oder Waldes als Hintergrund<sup>2)</sup>, von Azur oder tiefem Blau entfernt ist, und wenn wir bei schönem, sonnigem Wetter das Aussehen des immer, auch an den klarsten Tagen über der Szenerie zwischen Bergen und Hügeln sichtbaren als merklich ins Grau spielenden Dunstschleiers feststellen, und wenn wir bei Nacht auf See das Feuer eines Leuchtturmes in der Entfernung von 45 oder 50 Kilometer sehen und bemerken, wie wenig Röte es zeigt, und wenn wir sehen, daß die untergehende Sonne, nachdem sie soviel von ihrem Glanze verloren hat, daß wir geradezu ihr ins Antlitz schauen können, manchmal weißlich, öfter rötlich, selten was man als rubinrot bezeichnen kann, erscheint: so möchte ich glauben, daß wir einen vollen Beweis für die Anschauung haben, daß der Mangel an vollkommener Klarheit der unteren Schichten unserer Atmosphäre im allgemeinen von suspendierten Teilchen herrührt, die zu groß sind, um annähernd das Gesetz von Rayleigh bezüglich der vierten Potenz der Wellenlänge zu erfüllen.

§ 62. Aber auch wenn sie klein genug wären für die Theorie von Rayleigh, bliebe noch die Frage bestehen: Sind sie klein und zahlreich ge-

1) Trans. R. S. E. 1894. Vol. XXXVII, Part III, pp. 675. 672.

2) Wohl entsprechend dem absolut dunkeln Raume hinter der Luft, wenn diese begrenzt sein sollte. D. H.

nug, um das Brechungsvermögen der Luft zu erklären? Auf diese Frage müssen wir, wie wir jetzt sehen werden, mit einem unbedenklichen „Nein“ antworten; und weit weniger als der von Bouguer geschätzte Grad der Undurchsichtigkeit, wahrscheinlich nicht einmal ein Viertel oder ein Fünftel, rührt von den letzten Luftmolekeln her. In einer Abhandlung von Quirino Majorana in den Verhandlungen der R. Accademia dei Lincei sind Beobachtungen dieses Forschers in Sizilien, zu Catania und auf dem Ätna, und des Herrn Gaudenzio Sella auf dem Monte Rosa in der Schweiz beschrieben, die das Verhältnis der Helligkeit der Sonnenoberfläche zu der Helligkeit des in irgendeiner Richtung angeschauten Himmels bestimmen. Dieses Verhältnis bezeichnen sie mit  $r$ . Ein besonders bemerkenswertes Ergebnis von Majorana ist dieses, daß der Wert von  $r$  am Krater des Ätna fünfmal so groß ist wie in Catania. Die Barometerhöhen waren annähernd 53,6 und 76 cm, also war die Atmosphäre über Catania nur 1,42mal so dicht wie die über dem Ätna, und dennoch verursachte sie fünfmal soviel Lichtzerstreuung durch ihre eignen Partikel und die in ihr suspendierten Partikel. Dies beweist sofort, daß ein großer Teil der Zerstreuung von den letzteren, den suspendierten Partikeln, herrühren muß, und daß mehr von ihnen, als dem Verhältnisse der Dichten entspricht, in der unterhalb des Niveaus des Ätna als über diesem befindlichen Luft vorhanden sind. Bei den Beobachtungen von Majorana wurde gefunden, daß „außer für nahe dem Horizont gelegene Gegenden die Leuchtkraft des Himmels, wenn er vom Gipfel des Ätna angeschaut wird, in allen Richtungen einen merklich gleichen Wert hat“. Diese Gleichförmigkeit wurde auch für Punkte in der Nähe der Sonne beobachtet, so nahe an ihr, als man die Beobachtung ausführen konnte, ohne daß direktes Licht von der Sonne in das Instrument gelangte. Ich kann nur annehmen, daß diese scheinbare Gleichförmigkeit eine nur teilweise war. Es ist vollkommen sicher, daß bei von oben herabstrahlendem Sonnenlicht und bei Licht, das von irgendwoher, von der Erde, der See oder einem Dunstgebilde nach oben strahlend die höher gelegene Luft erleuchtet, die Intensität des über dem Krater befindlichen blauen Lichtes in verschiedenen Richtungen sehr verschieden sein muß. Dies wird durch die folgende Untersuchung bewiesen, die eine bloße Anwendung der Theorie von Rayleigh auf die uns vorliegende Frage ist. Aber nach der Beschreibung von Majorana dürfen wir unter allen Umständen annehmen, daß er, wie bei seinen Beobachtungen von Catania aus, auch vom Ätna aus die am wenigsten leuchtenden Teile des Himmels (Phil. Mag., Mai 1901, p. 561) für die registrierten Resultate (p. 562) seiner Beobachtungen gewählt hat.

§ 63. Die Zeichnung Fig. 58 ist eine schematische Darstellung einer einzelnen Molekel oder Partikel  $T$ , auf die das durch die parallelen Geraden angedeutete Sonnenlicht fällt und Anlaß zu dem durch ein bei  $E$  befindliches Auge geschauten zerstreuten Licht gibt. Wir nehmen an, daß die Molekel oder Partikel gegenüber der von ihr verdrängten Äthermenge ein so großes Gewicht hat, daß sie praktisch durch die Ätherschwingung nicht bewegt wird; und der Einfachheit wegen nehmen wir jetzt an, daß der Äther sich frei durch das Volumen  $T$  bewegt und dabei dichter wird, ohne seine Geschwindigkeit zu ändern, wenn er in diesen festbestimmten Raum eintritt, und weniger dicht, wenn er ihn verläßt. In den obigen §§ 41, 42 der vierzehnten Vorlesung und im Anhang A ist eine bestimmte Hypothese auseinander-

gesetzt, die dem Äther keine andere Eigenschaft zuschreibt als die Elastizität, wie sie ein äußerst homogener, vollkommen elastischer Körper besitzt, und ferner die Wirkung einer Kraft zwischen ihm und der ponderablen Materie, die denselben Raum einnimmt. Hiernach wirkt der Äther innerhalb des Teilchens auf außerhalb desselben befindlichen bewegten Äther genau so, wie es der Fall sein würde, wenn unsere jetzige vorübergehende Annahme einer magisch vermehrten Dichte innerhalb des Raumes einer absolut feststehenden Molekel in der Natur verwirklicht wäre. Für unsere vorliegende Aufgabe dürfen wir, wenn wir wollen, Rayleigh folgend, alle ponderable Materie überhaupt fortdenken und bloß annehmen, daß  $T$  nicht etwas Festes, sondern nur ein dichter Teil des Äthers ist. Und wenn der größte Durchmesser dieses Ätherteiles gegenüber der Wellenlänge hinreichend klein ist, macht es keinen nicht zu vernachlässigenden Unterschied, ob wir einerseits annehmen, der Äther in  $T$  habe dieselbe Starrheit wie der umgebende freie Äther, oder andererseits voraussetzen, daß er vollkommen starr ist, wie in den Untersuchungen in §§ 1—46 der vierzehnten Vorlesung, die sich mit einer in den Äther eingesenkten starren Kugel beschäftigen.

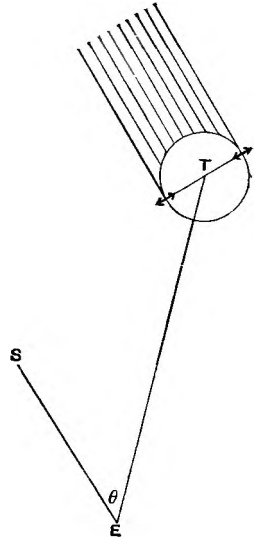


Fig. 58.

§ 64. Wir zerlegen das einfallende Licht in zwei Komponenten  $\tilde{\omega}$  und  $\varrho$  in der Zeichenebene und in der zu dieser senkrechten Ebene und fassen zunächst die in der Zeichenebene, durch die gepfeilte Linie symbolisch gekennzeichnet, ins Auge; sie läßt sich darstellen durch

$$\tilde{\omega} \sin \frac{2\pi u t}{\lambda},$$

wenn  $u$  die Lichtgeschwindigkeit und  $\lambda$  die Wellenlänge bedeutet. Die größere Dichte des Äthers innerhalb  $T$  übt auf den Äther der Umgebung in der Richtung der primären Schwingung und gegen die Richtung ihrer Beschleunigung eine Reaktionskraft aus, deren Größe ist

$$\frac{I(D' - D)}{D} \tilde{\omega} \frac{2\pi u}{\lambda} \cos \frac{2\pi u t}{\lambda}. \quad (9)$$

Diese alternierende Kraft ruft einen Zug sphärischer Wellen hervor, die sich von  $T$  aus in allen Richtungen ausbreiten und deren Verschiebungen, auch die größten, im Vergleich mit  $\tilde{\omega}$  sehr klein sind, die aber in einem beliebigen Punkte  $E$  im Abstände  $r$  von  $T$ , im Vergleich mit dem größten Durchmesser von  $T$  groß, durch den folgenden Ausdruck<sup>1)</sup> gegeben ist:

1) Dieser Ausdruck wird nach §§ 41, 42 der vierzehnten Vorlesung leicht gefunden. Die Kompliziertheit der Formeln in den §§ 8—40 rührt davon her, daß in die Untersuchung Kräfte und Verschiebungen in kleinen Abständen von  $T$  eingeschlossen sind und daß die Bedingung gestellt ist, daß  $T$  ein starrer sphärischer Körper ist. Die Theorie der §§ 33—36 mit  $c = 0$  und die Einzelheiten der §§ 37—39, wenn sie durch die Annahme  $v = \infty$  weiter vereinfacht sind, führen leicht zu den Formeln (10) und (11) im Text.

$$\xi \cos \frac{2\pi}{\lambda} (ut - r)$$

mit

$$\xi = \tilde{\omega} \frac{\pi T(D' - D)}{r\lambda^2 D} \cos \theta, \quad (10)$$

wo  $\theta$  der Winkel zwischen der Richtung der Sonne und der Geraden  $TE$  ist. Die Formel (10) liefert, in geeigneter Weise modifiziert, um sie auf die andere Komponente der ursprünglichen Schwingung, d. h. auf die zur Ebene der Zeichnung senkrechte, anwendbar zu machen, für die von dieser Komponente herrührende Verschiebung in  $E$

$$\eta \cos \frac{2\pi}{\lambda} (ut - r),$$

mit

$$\eta = \varrho \frac{\pi T(D' - D)}{r\lambda^2 D}. \quad (11)$$

Folglich finden wir für die Lichtmenge, die von  $T$  in der Zeiteinheit auf eine zu  $ET$  senkrechte Flächeneinheit bei  $E$  fällt, in passenden Einheiten gemessen

$$\xi^2 + \eta^2 = \left[ \frac{\pi T(D' - D)}{r\lambda^2 D} \right]^2 (\tilde{\omega}^2 \cos^2 \theta + \varrho^2). \quad (12)$$

§ 65. Wir betrachten jetzt das von einer großen horizontalen, 1 cm dicken ebenen Luftschicht ausgesandte zerstreute Licht.  $T$  der Fig. 58 sei eine von der ungeheuren Anzahl Partikeln in einem Teile dieser Schicht, die einen kleinen Raumwinkel  $\Omega$  überspannt, der im Winkelabstande  $\beta$  vom Zenit von einem in der Entfernung  $r$  befindlichen Auge angeschaut wird. Der Rauminhalt dieses Teiles der Schicht beträgt  $\Omega r^2 \sec \beta$  Kubikzentimeter; und demgemäß finden wir, wenn  $\Sigma$  die Summe für alle in einem Kubikzentimeter enthaltenen Partikeln bezeichnet, die hinreichend klein für die Anwendbarkeit der Theorie von Rayleigh sind, und  $q$  die von ihnen aus dem dem Teile  $\Omega r^2 \sec \beta$  der Schicht ausgeströmte und auf ein zu  $ET$  senkrechtes bei  $E$  befindliches Quadratzentimeter fallende Lichtmenge angibt,

$$q = \frac{\pi^2}{\lambda^4} \sum \left[ \frac{T(D' - D)}{D} \right]^2 (\tilde{\omega}^2 \cos^2 \theta + \varrho^2) \Omega \sec \beta. \quad (13)$$

Summiert man diesen Ausdruck über die durch alle leuchtenden Elemente der Sonne gelieferten Beiträge und setzt

$$\int q = Q,$$

um diese Summation anzudeuten, so erhalten wir an Stelle des Faktors

$$\tilde{\omega}^2 \cos^2 \theta + \varrho^2, \\ \cos^2 \theta \int \tilde{\omega}^2 + \int \varrho^2;$$

und wir finden

$$\int \tilde{\omega}^2 = \int \varrho^2 = \frac{1}{2} S, \quad (14)$$

wenn mit  $S$  die gesamte Lichtmenge bezeichnet wird, die von der Sonne senkrecht auf die Flächeneinheit an der besonderen betrachteten Stelle der



Atmosphäre fällt. Folglich liefert die Summation von (13) für alles den Teil  $\Omega r^2 \sec \beta$  der Schicht treffende Licht

$$Q = \frac{\pi^2}{\lambda^4} \sum \left[ \frac{T(D' - D)}{D} \right]^2 \Omega S \left( \frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \right) \sec \beta. \quad (15)$$

§ 66. Um den Punkt des Himmels, dessen Beleuchtung so dargestellt ist, zu bestimmen, sei  $\xi$  die Zenitdistanz der Sonne und  $\psi$  das von der Sonne aus gemessene Azimut der längs der Linie  $ET$  geschauten Stelle des Himmels. Diese Stelle und die Sonne und der Zenit bilden die Ecken eines sphärischen Dreiecks  $SZT$ , dessen Seite  $ST$  gleich  $\theta$  ist. Demnach wird

$$\cos \theta = \cos \xi \cos \beta + \sin \xi \sin \beta \cos \psi. \quad (16)$$

Jetzt sei beispielsweise die Sonne im Zenit, dann ist  $\xi = 0$ ,  $\theta = \beta$ , und Gleichung (15) geht über in

$$Q = \frac{\pi^2}{\lambda^4} \sum \left[ \frac{T(D' - D)}{D} \right]^2 \Omega S \frac{1}{2} (\cos \beta + \sec \beta). \quad (17)$$

Dies zeigt, daß die geringste Helligkeit des Himmels um die Sonne herum herrscht, im Zenit, und daß die Helligkeit auf unendlich ansteigt am Horizont (dies ist leicht zu deuten). Das Gesetz des Anwachsens der Helligkeit vom Zenit zum Horizont wird in der folgenden Tabelle der Werte von  $\frac{1}{2} (\cos \beta + \sec \beta)$  von  $10^0$  zu  $10^0$  zwischen  $0^0$  und  $90^0$  dargestellt.

$\beta$	$\frac{1}{2} (\cos \beta + \sec \beta)$	$\beta$	$\frac{1}{2} (\cos \beta + \sec \beta)$
$0^0$	1,000	$50^0$	1,099
$10^0$	1,000	$60^0$	1,250
$20^0$	1,002	$70^0$	1,633
$30^0$	1,010	$80^0$	2,966
$40^0$	1,036	$90^0$	$\infty$

§ 67. Anstatt der betrachteten Beleuchtung an einer zur Gesichtslinie normalen Ebene wollen wir die auf ein Quadratcentimeter einer horizontalen Ebene fallende Beleuchtung ins Auge fassen, welche von unserer großen ein Zentimeter dicken Schicht ausgeht. Die Menge dieses in der Zeiteinheit von einem Teile des Himmels, der einen kleinen Raumwinkel  $\Omega$  überspannt und sich in der Zenitdistanz  $\beta$  befindet, kommenden Lichtes ist  $Q \cos \beta$ . Setzt man  $\Omega = \sin \beta d\beta d\psi$  an und integriert, so findet sich für das von einer ein Zentimeter dicken horizontalen Schicht auf ein horizontales Quadratcentimeter des Bodens fallende Licht

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\beta \sin \beta \cdot Q \cos \beta = \frac{4\pi^3}{3\lambda^4} \sum \left[ \frac{T(D' - D)}{D} \right]^2 S. \quad (18)$$

Nun sendet jede Molekel und Partikel des Staubes ebensoviel Licht nach oben wie nach unten. Demgemäß stellt das Doppelte des Ausdruckes (18) die von den direkten Strahlen einer vertikalen Sonne bei der Durchstrahlung einer ein Zentimeter dicken horizontalen Schicht verlorene Lichtmenge dar. Dies stimmt mit dem Ausdruck für  $k$  in (1) des § 55 überein, wie es sein muß.

§ 68. Der Betrag nach (15) ist von dem Abstände der Schicht über der Niveaufläche des beobachtenden Auges **unabhängig**. Wenn man mit  $H$  die Höhe der oberen Grenzfläche einer gedachten homogenen, aus all den letzten Molekeln und aus dem ganzen Staube der wirklichen Atmosphäre, der in ihr zerstreut ist, bestehenden Atmosphäre bezeichnet, und mit  $s$  das ganze Licht auf der Flächeneinheit einer in  $E$  zu  $ET$  senkrechten Ebene, das von allen Molekeln und dem Staube innerhalb des Raumwinkels  $\Omega$  ausgeht und von dem von der Sonne direkt auf diese Körperchen fallenden Lichte herrührt, so findet man demnach

$$\frac{s}{S} = H \sec \beta \frac{\pi^2}{\lambda^4} \sum \left[ \frac{T(D' - D)}{D} \right]^2 \Omega \cdot \frac{1}{2} (\cos^2 \vartheta + 1); \quad (19)$$

vorausgesetzt, daß man in allen Fällen der Anwendung, welche sie auch sein möge, die Verminderung des direkten Sonnenlichtes bei seinem wirklichen Durchgange durch die Luft bis zum Auge des Beobachters oder bis zu dem Teile der Luft, dessen Helligkeit beobachtet wird, vernachlässigen darf und ebenso die Verminderung des von der Luft ausgesandten zerstreuten Lichtes bei seinem Durchgange durch die Luft bis zum Beobachter. Diese Voraussetzung ist, wie wir sehen werden, bei den Beobachtungen Majoranas am Krater des Ätna für Zenitdistanzen der Sonne, die  $60^\circ$  nicht übersteigen, und bei der Beobachtung Sellas am Monte Rosa, bei der die Zenitdistanz  $50^\circ$  betragen hat, praktisch erfüllt. Hingegen dürfte bei der von Majorana registrierten Beobachtung am Ätna um  $5^h 50^m$  vormittags, als die Zenitdistanz der Sonne  $81,71^\circ$  betrug, wovon der sec 6,928 ist, eine bedeutende Verminderung des Sonnenlichtes, das die vertikal über dem Beobachter befindliche Luft erreichte und eine noch beträchtlich bedeutendere Verminderung des direkt vom Beobachter gesehenen Sonnenlichtes stattgefunden haben. Dies würde dahin wirken, das den Beobachter erreichende Sonnenlicht gegenüber dem Himmelslichte weniger stark erscheinen zu lassen, als es der Gleichung (19) entspricht, und dürfte die Tatsache erklären, daß die erste Zahl in der dritten Kolumne der Tabelle im folgenden § 69 kleiner ist als die erste Zahl in der vierten Kolumne; jedoch scheint es mir wahrscheinlicher, daß die Kleinheit der ersten beiden Zahlen in der dritten Kolumne, die auf eine beträchtlich größere Helligkeit des Himmels hinweisen, als der Gleichung (19) entspricht, teilweise oder hauptsächlich von dem Staube in der Luft am Zenit herrührt, der sich bei der Feuchtigkeit des frühen Morgens optisch besonders geltend gemacht hat. In der Tat wird die Größe der Helligkeit des Himmels, wie sie sich in der Kleinheit der ersten drei Zahlen der dritten Kolumne im Vergleich mit den entsprechenden Zahlen der vierten Kolumne zeigt, höchst wahrscheinlich durch graue Schleier zu Beginn des Morgens erklärt.

§ 69. Die Resultate der Beobachtungen Majoranas am Krater des Ätna sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben, deren erste und dritte Reihe dem Philosophical Magazine, Mai 1901 entnommen, sind und deren zweite Kolumne mir in freundlicher Weise von Herrn Majorana in einem Briefe mitgeteilt worden ist. Die in der vierten Kolumne angegebenen Werte von  $S/s$  sind nach § 68 (19) berechnet. Dabei wurde der Faktor  $\sec \beta (\cos^2 \theta + 1)$  so gewählt, daß er bei der Zenitdistanz  $44,6^\circ$  der von Majorana benutzten Größe  $r$  entsprach, indem die Annahme gemacht

Kol. 1	Kol. 2	Kol. 3	Kol. 4	Kol. 5
Zeit	Zenitdistanz der Sonne $\xi$	Verhältnis der Helligkeit der Sonnenscheibe zur Helligkeit des Himmels $\frac{S}{s}$	$\frac{S}{s}$	Zenitdistanz des am wenigsten hellen Teiles des Himmels $\beta$
5h 50 <sup>m</sup> a. m.	81,7°	2570000	4820000	5,5°
7	68,0	3125000	4610000	14,4
8	56,1	3650000	4310000	21,7
9	44,6	3930000	3930000	27,8
11	29,9	3760000	3370000	33,6

wurde, daß die beobachtete Himmelsgegend in jedem Falle (vgl. § 62 oben) sich an der Stelle geringster Helligkeit, wie sie durch Gleichung (21) festgestellt wird, befunden hat. Es ist offenbar, daß diese Lage sich in einem vertikalen durch die Sonne gehenden größten Kreise und vom Zenit aus auf der der Sonne entgegengesetzten Seite befindet; und so erhält man  $\theta = \xi + \beta$ . Demnach geht (19) über in

$$\frac{s}{S} = H \frac{\pi^2}{\lambda^4} \sum \left[ \frac{T(D' - D)}{D} \right]^2 \Omega \cdot \frac{1}{2} \sec \beta [\cos^2 (\xi + \beta) + 1]. \quad (20)$$

Um (20) zu einem Minimum zu machen, muß dann sein

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2 \sin 2 (\beta + \xi)}{3 + \cos 2 (\beta + \xi)}. \quad (21)$$

Der Wert von  $\beta$ , der diese Gleichung für einen beliebigen gegebenen Wert von  $\xi$  befriedigt, wird leicht durch Probieren nach der regula falsi gefunden, indem man sich von einer kurzen vorbereitenden Tabelle der Werte von  $\beta$  für angenommene Werte von  $\beta + \xi$  leiten läßt. Kol. 5 gibt so gefundene Werte von  $\beta$  an, die hinreichend genau sind, um die in Kol. 4 mitgeteilten Werte von  $S/s$  für die betreffenden Werte von  $\xi$  zu liefern.

§ 70. Wir schränken uns für jetzt auf die Beobachtungen Majoranas um 9<sup>h</sup> a. m., da die Zenitdistanz der Sonne etwa 44,6° betrug. Es sei  $e$  das Verhältnis des die Luft über dem Krater des Ätna beleuchtenden Lichtes, das um diese Zeit von der Luft, der Erde und dem unterhalb des Kraters befindlichen Wasser herrührte und demgemäß  $1 - e$  das Verhältnis der beobachteten Helligkeit des Himmels, die von den direkten Sonnenstrahlen herrührte und durch (19), § 69 ausgedrückt wird. So findet man für  $\beta = 27,8^\circ$ ,  $\xi = 44,6^\circ$  und  $\theta = 72,4^\circ$  das  $S/s = 3930000 (1 - e)$  an Stelle des in Kol. 4, § 69 angeführten Wertes. Mit diesem ergibt Gleichung (20)

$$\sum \left[ \frac{T(D' - D)}{D} \right]^2 = \frac{\lambda^4 (1 - e)}{H \Omega} \cdot 4,18 \cdot 10^{-8}. \quad (22)$$

Hier muß man, um eine Vergleichung zwischen dem gesamten Lichte der Sonne und dem von einer gleichen scheinbaren Fläche des Himmels ausgestrahlten Lichte auszuführen, setzen

$$\Omega = \pi/(214,6)^2 = 1/14660^1),$$

1) Der Abstand der Sonne von der Erde ist der 214,6 fache Radius der Sonne.

da dies die von der Erde aus gesehene scheinbare Fläche der Sonne ist. Was die Größe  $H$  betrifft, so ist diese das, was man gemeinhin „die Höhe der homogenen Atmosphäre“ nennt, und sie beträgt, ob an der Spitze des Ätna oder am Meeresspiegel,

$$7,988 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{t}{273}\right) \text{ Zentimeter,}$$

falls  $t$  die Temperatur an der Stelle bezeichnet, von der aus  $H$  gerechnet wird. Wenn man diese Temperatur zu  $15^0 \text{ C}$  annimmt, findet man

$$H = 8,43 \cdot 10^5 \text{ Zentimeter.}$$

So geht (22) über in

$$\sum \left[ \frac{T(D' - D)}{D} \right]^2 = \lambda^4 (1 - e) 0,728 \cdot 10^{-9}. \quad (23)$$

§ 71. Jetzt wollen wir mit  $f$  und mit  $1 - f$  die Teile von (23) bezeichnen, die von den letzten Luftmolekeln und von dem Staube herrühren. Dann ist

$$n \left[ \frac{T(D' - D)}{D} \right]^2 = \lambda^4 f (1 - e) \cdot 0,728 \cdot 10^{-9}, \quad (24)$$

wo mit  $n$  die Anzahl der letzten Molekeln in einem Kubikzentimeter Luft an der Spitze des Ätna bezeichnet wird, und  $T(D' - D)/D$  sich auf irgendeine von diesen Molekeln bezieht; dabei ist jeder etwaige Unterschied, der vielleicht zwischen Sauerstoff und Stickstoff besteht, außer acht gelassen worden. Nimmt man jetzt an, daß das Brechungsvermögen der Atmosphäre praktisch von den letzten Molekeln herrührt, und daß kein nennenswerter Teil desselben dem in der Luft befindlichen Staube zu verdanken ist, dann ergibt sich nach (7), § 56

$$0,0002 = n \frac{T(D' - D)}{2D}, \quad (25)$$

denn die Zahl auf der linken Seite gibt mit hinreichender Annäherung das Brechungsvermögen von Luft am Krater des Ätna an (barometrischer Druck 53,6 cm Quecksilber). Es folgt hieraus

$$\left[ \frac{T(D' - D)}{D} \right]^2 = \frac{1}{n^2} 1,6 \cdot 10^{-7}, \quad (26)$$

und man findet, wenn man dies in (24) einsetzt

$$n = \frac{220}{\lambda^4 f (1 - e)}. \quad (27)$$

Hier besteht noch, ebenso wie in § 58 in Verbindung mit der Schätzung des Lichtverlustes beim Durchgange durch die Luft nach Bouguer, eine im Wesen liegende Unsicherheit bezüglich der wirksamen Wellenlänge; und wir wollen aus denselben Gründen, wie in § 58 geschehen,  $\lambda = 6 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$  als das für die betrachteten Umstände geeignete Mittel annehmen. Mit diesem Werte von  $\lambda$  geht (27) über in

$$n = \frac{1}{f(1 - e)} 1,69 \cdot 10^{19}. \quad (28)$$

§ 72. Bei den Beobachtungen von Sella am Monte Rosa betrug die Zenitdistanz der Sonne etwa  $50^0$  und die Stelle am Himmel, welche beobachtet wurde, lag im Zenit. Sella fand die Helligkeit der Sonnenscheibe etwa 5 000 000 mal so groß wie die dieser Stelle. Behandelt man dieses Resultat wie die Ergebnisse in den §§ 70, 71, setzt in Gleichung (20)  $\beta = 0$  und nimmt an, die Temperatur am Beobachtungsorte habe  $0^0 \text{ C}$ , der Barometerstand 49 cm betragen, so findet man

$$n' = \frac{1}{f'(1-e')} 2,34 \cdot 10^{19}, \quad (29)$$

wenn  $e'$ ,  $f'$  und  $n'$  die Beträge von  $e$ ,  $f$ ,  $n$  an diesem Beobachtungsorte, auf dem Monte Rosa, genannt werden. Wir bezeichnen jetzt mit  $N$  die Anzahl Molekeln in einem Kubikzentimeter Luft bei  $0^0 \text{ C}$  und 75 Zentimeter Quecksilberdruck, und erhalten unter der Annahme, daß die Temperatur der Luft am Gipfel des Ätna  $15^0$  und auf dem Monte Rosa  $0^0$  betragen hat, nach dem Gesetze von Boyle und Charles

$$N = n \frac{75}{53,6} \left(1 + \frac{15}{273}\right) = n' \frac{75}{49}$$

oder

$$N = 1,48 n = 1,53 n'. \quad (30)$$

Hieraus findet man nach (28) und (29)

$$N = \frac{2,50}{f(1-e)} \cdot 10^{19} = \frac{3,58}{f'(1-e')} \cdot 10^{19}. \quad (31)$$

§ 73. Um die Beträge von  $e$  und  $e'$ , wie sie in §§ 70, 72 definiert sind, zu schätzen, betrachten wir die Albedos<sup>1)</sup> der Erde, wie sie von einem Ballon aus gesehen werden dürften, der sich an den von Majorana und G. Sella beobachteten Stellen des blauen Himmels bzw. über dem Ätna und über dem Monte Rosa befindet. Diese möchten etwa 0,2 und 0,4 betragen; die letztere ist so viel größer zu schätzen wegen der großen Menge Schnee, der dazu beiträgt, den Himmel über dem Monte Rosa zu beleuchten. Bei so viel bloßer Vermutung in unsern Daten brauchen wir uns nicht in eine nähere Untersuchung über den Beitrag der Erdstrahlung von unten an zu dem Himmelslichte nach dem Prinzip der §§ 67, 68, so interessant sie auch

1) Albedo ist ein von Lambert vor 150 Jahren eingeführtes Wort zur Bezeichnung des Verhältnisses des ganzen von einem durchaus unpolierten Festkörper oder von einer Wolkenmasse ausgesandten Lichtes zu dem Gesamtbetrage des auffallenden Lichtes. Die Albedo eines gedachten vollkommen weißen Körpers ist 1. Mein Freund Professor Becker war so freundlich, mir die folgende Tabelle einiger von verschiedenen Beobachtern und Experimentatoren bestimmten Albedos nach dem Buche von Müller, Die Photometrie der Gestirne (Leipzig, 1897) mitzuteilen.

Merkur . . . . .	0,14	Uranus . . . . .	0,60
Venus . . . . .	0,76	Neptun . . . . .	0,52
Mond . . . . .	0,34	Schnee . . . . .	0,78
Mars . . . . .	0,22	Weißes Papier . .	0,70
Jupiter . . . . .	0,62	Weißer Sandstein .	0,24
Saturn . . . . .	0,72	Dampfender Boden	0,08

sein möge, einzulassen, und wollen als ganz rohe Schätzung 0,2 und 0,4 als die Beträge von  $e$  und  $e'$  annehmen. Dann geht (31) über in

$$N = \frac{3,12}{f} \cdot 10^{19} = \frac{5,97}{f'} \cdot 10^{19}. \quad (32)$$

§ 74. Nun könnte aber nur dann, wenn das gesamte Licht des Himmels von den letzten Molekeln herrührte, von denen das Brechungsvermögen abhängt,  $f$  oder  $f'$  einen Wert erreichen, der an die Einheit grenzt. Wenn dies für den von G. Sella über dem Monte Rosa im Jahre 1900 angeschauten blauen Himmel der Fall gewesen sein sollte, hätten wir  $f' = 1$  und demnach  $N = 5,97 \cdot 10^{19}$ . Es ist aber äußerst wahrscheinlich, daß auch bei dem klarsten Wetter über den höchsten Bergspitzen ein beträchtlicher Teil des Lichtes des Himmels von suspendierten Partikeln herrührt, die weit größer sind als die letzten Molekeln von  $N_2$ ,  $O_2$  der Atmosphäre; und demnach machen es die Beobachtungen der Helligkeit des Himmels über dem Monte Rosa im Sommer 1900 wahrscheinlich, daß  $N$  größer ist als  $5,97 \cdot 10^{19}$ . Wenn wir jetzt unsere Schätzung der Zahl von Molekeln in einem Kubikzentimeter Luft bei  $0^\circ$  und Normaldruck aus § 50 wieder aufnehmen, nämlich  $N = 10^{20}$ , finden wir  $1 - f = 0,688$  und  $1 - f' = 0,403$ ; d. h. nach den verschiedenen Annahmen, die wir gemacht haben, rührte 0,688 des gesamten Lichtes des von Majorana über dem Ätna beobachteten Himmels teiles von Staub her, und von dem von Sella am Monte Rosa beobachteten ist nur 0,403 dem Staube zuzuschreiben. Es ist wohl möglich, daß dieser Schluß genau richtig ist, und es ist sehr wahrscheinlich, daß er eine Annäherung an die Wahrheit gibt. Aber im ganzen zeigen diese Beobachtungen, soweit man sich auf sie verlassen kann, die Wahrscheinlichkeit eines Mindestbetrages von  $10^{20}$  für  $N$ .<sup>1)</sup>

§ 75. Alle Beobachtungen, über die in den §§ 57—74 berichtet ist, leiden an dem Fehler, daß sie ihrem Wesen nach ein physiologisches Urteil über die Empfindung der Differenz der Intensitäten zweier Lichtquellen von verschiedenen Farben enthalten. Wenn man zwei sehr verschieden gefärbte, Seite an Seite liegende Schatten eines Stiftes anschaut, von denen der eine blau oder violett ist und von einer vergleichsweise nahen Kerze entworfen wird, der andere rötlich-gelb und von einer glänzend weißen, weit entfernten Glühlampe oder von einer noch weiter entfernten elektrischen Bogenlampe oder vom Monde verursacht wird, ist es, sobald man das Rumfordsche photometrische Verfahren anwendet, äußerst wunderbar zu finden, wie übereinstimmend ein halbes Dutzend Laboratoriumspraktikanten und selbst, wenig erfahrene, Beobachter erklären: dies ist intensiver! oder: jenes ist intensiver! oder: keines ist intensiver als das andere! Wenn die beiden Bilder für gleich stark erklärt werden, besagt die Erklärung, daß die verschieden gefärbten Lichter der beiden auf dem weißen Papier nebeneinander liegenden beschatteten Stellen gemäß der physiologischen Empfindung des Auges gleich hell sind. Dies besagt aber nichts für irgendwelche bestimmte Teile der beiden Lichtquellen; und die Einstimmigkeit oder die Größe der Majorität

1) Mit der S. 247 Anmerkung 3 angegebenen Zahl für  $N$  finden sich  $f = 0,57$ ,  $f' = 1,1$ . Letztere Zahl ist nicht zulässig, allein die Formeln enthalten ja viele unsichere Annahmen, vielleicht ist die Zahl für  $e'$  zu groß. D. H.

der Beobachter, die dies erklären, beweist nur eine physiologische Übereinstimmung in dem Empfindungsvermögen gesunder durchschnittlicher Augen (von denen farbenblinde Augen zweifellos bestürzend abweichen werden): Zwei kreisförmige Flächen weißen Papiers wurden bei den Beobachtungen Sellas am Monte Rosa, ein Kreis und eine ihn umgebende Fläche von Mattglas bei den Beobachtungen Majoranas mit dem schönen Himmelsphotometer eigener Konstruktion am Ätna angeschaut, wenn sie einerseits von abgeschwächtem Sonnenlicht von unveränderter Farbe, andererseits von Licht vom blauen Himmel her beleuchtet wurden. Die sonnenbeleuchteten Flächen erscheinen rötlich-gelb im Kontrast mit den vom Himmel beleuchteten Flächen, die azurblau sind. Was versteht man darunter, wenn die beiden so weit voneinander abweichenden Flächen für gleich hell erklärt werden? Die größte Annäherung an eine Antwort auf diese Frage ist oben am Ende des § 71 gegeben, sie ist aber hervorragend unbefriedigend. Dasselbe kann mit Recht von der Behandlung der Angabe Bouguers in § 57 gesagt werden, obwohl die Beobachter, auf die Bouguer sich stützt, nicht durch das Bewußtsein gestört worden zu sein scheinen, daß in dem, was sie zu bestimmen oder durch Beobachtung zu finden versuchten, etwas Unbestimmbares liegt.

§ 76. Um Resultate zu erhalten, die nicht durch die in § 75 beschriebene Unvollkommenheit des physiologischen Urteils gefälscht sind, ist die Newtonsche Zerlegung des beobachteten Lichtes durch ein Prisma oder etwas diesem Gleichwertiges notwendig. Prismatische Zerlegung wurde von Rayleigh selbst für das blaue Licht des Himmels benutzt, noch bevor er seine mechanische Theorie ausgearbeitet hatte. Er verglich das prismatische Spektrum von Licht, das vom Zenit herkam, mit dem von Sonnenlicht, das durch weißes Papier diffundiert war; und er fand mit Hilfe einer Kurve, die er aus etwa 30 Vergleichen abgeleitet hatte, die sich über das Spektralgebiet von der Linie *C* bis über *F* hinaus erstreckte, die folgenden Resultate für vier verschiedene Wellenlängen:

Spektrallinie. . . .	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>b<sub>3</sub></i>	<i>F</i>
Wellenlänge. . . .	656,2	589,2	517,3	486,2
Beobachtete Helligkeit	1	1,64	2,84	3,60
Berechnete nach $\lambda^{-4}$ .	1	1,54	2,52	3,34.

Hierüber macht er die folgenden Bemerkungen: „Es muß bemerkt werden, daß der mit dem diffundierten Lichte verglichene Himmel noch blauer war, als die Theorie ergibt, wenn man annimmt, daß das vom Papier diffundierte Licht als demjenigen ähnlich zu achten ist, dessen Zerstreuung den Himmel beleuchtet. Es ist möglich, daß das Papier leicht gelb gefärbt war; oder die Ursache kann auch darin liegen, daß das Sonnenlicht, wenn es uns erreicht, gelb ist im Vergleich mit demjenigen in den oberen Regionen der Atmosphäre. Es wäre ein Mißgriff, den Beobachtungen in ihrer jetzigen unvollständigen Form ein großes Gewicht beizumessen; immerhin zeigen sie in gewissem Grade, daß eine mehr oder weniger der des Himmels gleiche Färbung zustande kommt, wenn man die Elemente des weißen Lichtes in Mengen annimmt, die  $\lambda^{-4}$  proportional sind. Ich weiß nicht, wie unerwartet die Beobachtungen auf andere wirken; ich persönlich habe einen so großen Unterschied, wie ihn diese Beobachtungen zeigen, nicht erwartet, daß näm-

lich das Verhältnis für  $F$  mehr als dreimal so groß ist wie das für  $C$ .<sup>4</sup> Was mich betrifft, so stimme ich diesem letzten Ausspruche Rayleighs vollkommen bei. Ein Zweifel an der Zuverlässigkeit seiner Beobachtungsergebnisse kann nicht aufkommen; es scheint mir aber äußerst wahrscheinlich, ja fast sicher, daß die gelbe oder orange Farbe des durch das Papier gesehenen Sonnenlichtes, die durch die größere Absorption von grünen, blauen und violetten Strahlen verursacht wird, den so großen relativen Reichtum an grünen, blauen und violetten Strahlen erklären, den die Resultate für den beobachteten blauen Himmel am Zenit zeigen.

§ 77. Eine an 20 Tagen, zwischen dem Monat Juli 1900 und dem Februar 1901 ausgeführte Reihe von Untersuchungen über die Bläue des Himmels wird in einer sehr interessanten Abhandlung „Ricerche sul Bleu del Cielo“ beschrieben, die der königlichen Universität zu Rom von Dr. Giuseppe Zettwuch als These zur Erlangung der Würde eines Doktors der Physik vorgelegt worden ist. Bei diesen Untersuchungen wurde prismatisch zerlegtes, vom Himmel kommendes Licht mit prismatisch zerlegtem direkten Sonnenlicht verglichen, das durch einen engen Spalt abgeschwächt war; diese Resultate waren also nicht vermöge etwaiger ungleicher Absorptionen direkten Sonnenlichtes im Beobachtungsapparate verfälscht. Eine Übersetzung der vom Verfasser selbst gegebenen Zusammenstellung seiner Schlüsse ist im Philosophical Magazine für August 1902 veröffentlicht; man ersieht aus dieser Publikation, daß die Bläue des Himmels, auch wenn das klarste Azur herrschte, weit weniger tief war als das durch das Rayleighsche Gesetz der Proportionalität zu  $\lambda^{-4}$  bestimmte wahre Blau. Demnach muß, nach der Theorie Rayleighs (vgl. § 53 oben), stets viel von dem Lichte von Partikeln ausgegangen sein, die nicht im Verhältnis zur Wellenlänge äußerst klein sind. So haben wir in den Untersuchungen Zettwuchs eine starke Bestätigung der oben in den §§ 54, 58, 61, 75 dargelegten und der in den §§ 78, 79 folgenden Gesichtspunkte.

§ 78. Durch die Freundlichkeit des Professor Becker bin ich jetzt in der Lage, die 170 Jahre alte Lehre Bouguers durch die Resultate einer Untersuchung zu ergänzen, die Professor Müller vom Potsdamer Observatorium ausgeführt hat. In dieser wurde, durch Vergleichung des Sonnenspektrums mit dem Spektrum einer Petroleumflamme, für verschiedene Zenitdistanzen der Sonne der (in der folgenden Formel mit  $p$  bezeichnete) bis zum Meeresspiegel gelangende Teil des vertikal in unsere Atmosphäre eintretenden homogenen Lichtes für alle Wellenlängen von  $4,4 \cdot 10^{-5}$  bis  $6,8 \cdot 10^{-6}$  festgestellt. Es läßt sich annehmen, obwohl ich nicht finde, daß dies direkt ausgesprochen ist, daß nur die klarste in Potsdam vorkommende Atmosphäre bei diesen Beobachtungen ausgenutzt ist. Um eine Vergleichung mit der Rayleighschen Theorie zu erhalten, hat Professor Becker die logarithmischen Resultate Müllers arithmetisch in zwei Teile zerlegt: einen konstanten und einen andern, umgekehrt wie die vierte Potenz der Wellenlänge variierenden Teil. Die resultierende Formel<sup>1)</sup>, etwas abgeändert, nm die Vergleichung mit den obigen §§ 57—59 zu erleichtern, ist die folgende:

$$p = e^{-(0,0887 + 0,0772 z^{-4})} = 0,9152 e^{-0,0772 z^{-4}} \quad (33)$$

1) Müller, Die Photometrie der Gestirne, S. 140.



wo  $z = \lambda/6 \cdot 10^{-5}$  ist. Hinsichtlich der beiden hier angegebenen Faktoren dürfen wir, roh gesprochen, sagen, daß der erste Faktor von suspendierten Partikeln herrührt, die zu groß sind, als daß auf sie das Gesetz von Rayleigh Anwendung fände, und der zweite von Partikeln, die für diese Anwendung nicht zu groß sind. Für den Fall  $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$  ( $z = 1$ ) ergibt dies

$$p = 0,9152 \cdot 0,9258 = 0,847. \quad (34)$$

§ 79. Nimmt man den letzten Summanden im Exponenten und den letzten in Formel (34) angegebenen Faktor an und behandelt ihn gemäß den obigen §§ 57—59 und benutzt man ferner, wie in § 55,  $k$  zur Bezeichnung des verhältnismäßigen Lichtverlustes im Zentimeter, der von Teilchen herrührt, die hinreichend klein für die Anwendbarkeit der Rayleighschen Theorie sind, gleichviel ob es „suspendierte Partikel“ oder letzte Luftmolekel oder beides sind, so findet man  $e^{-830000k} = 0,9258$ , woraus sich ergibt  $k^{-1} = 10,76 \cdot 10^6$  cm. Wenn wir, wie in § 58, für einen Augenblick voraussetzen, daß der so bestimmte Mangel an voller Durchsichtigkeit gänzlich von den letzten Luftteilchen verursacht wird, so finden wir folglich nach der Theorie des Brechungsvermögens  $n \frac{T(D-D)}{D} = 0,0006$ ; und hieraus würden wir nach der Gleichung (1) des § 55 unter der Annahme  $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$  für die Molekelzahl im Kubikzentimeter erhalten  $n = 2,47 \cdot 10^{19}$ . Es ist aber fast gewiß, daß ein Teil, und höchstwahrscheinlich ein sehr großer Teil, des von Partikeln, die für die Anwendbarkeit der Rayleighschen Theorie hinreichend klein sind, veranlaßten Verlustes an Durchsichtigkeit von „suspendierten Partikeln“ herrührt, die größer sind als die letzten Molekeln, und wir schließen, daß die Anzahl der letzten Molekel im Kubikzentimeter größer, und sehr wahrscheinlich weit größer, ist als  $2,47 \cdot 10^{19}$ . So finden wir aus den sichereren und vollständigeren Angaben Müllers über die Extinktion von Licht verschiedener Wellenlänge, das die Luft durchsetzt, eine untere Grenze für die Anzahl Molekeln im Kubikzentimeter, die nahezu dreimal so groß ist wie die, von der Rayleigh gezeigt hat, daß sie aus den Angaben von Bouguer folgt.

Substanz	Masse eines Atoms in Gramm	Dichte		Anzahl der Atome, oder der Molekeln $H_2O$ , im ccm	Abstand zwischen den Mittelpunkten bei der wirklichen Dichte, wenn kubisch angeordnet, in cm
H	$0,45 \cdot 10^{-24}$	flüssig bei $17^\circ$ abs.	0,090	$200 \cdot 10^{21}$	$1,71 \cdot 10^{-8}$
O	7,15	beim Gefrierpunkt	1,27	178	1,78
$H_2O$	8,05	Wasser	1,00	124	2,00
$H_2O$	8,05	Eis	0,917	114	2,06
$H_2O$	8,05	Dampf bei $0^\circ C$	$0,487 \cdot 10^{-5}$	$605 \cdot 10^{15}$	118,2
N	6,29	flüssig	1,047	$166 \cdot 10^{21}$	1,82
Argon	17,81	"	1,42	79,7	2,32
Gold	88,52	fest	19,32	218	1,66
Silber	48,47	"	10,53	217	1,66
Kupfer	28,43	"	8,95	315	1,47
Eisen	25,15	"	7,86	313	1,47
Zink	29,80	"	7,15	245	1,60

§ 80. Nimmt man, etwas willkürlich, als Resultat der §§ 23—77 an, daß die Anzahl Molekeln in einem Kubikzentimeter eines vollkommenen Gases bei Normaltemperatur und bei Normaldruck  $10^{20}$  beträgt, so findet man die vorstehende interessante Tabelle (S. 265) von Schlüssen bezüglich der Atomgewichte und der molekularen Dimensionen von verflüssigten Gasen, von Wasser, von Eis und von festen Metallen.

§ 81. In der einleitenden Vorlesung (S. 8) haben wir die Frage aufgeworfen: „Sind die Lichtschwingungen normal zu oder liegen sie in der Polarisationssebene?“ — indem wir als Polarisationssebene für durch Reflexion polarisiertes Licht die durch den einfallenden und den reflektierten Strahl bestimmte Ebene definierten. Wir sind jetzt in der Lage zu antworten: senkrecht zur Polarisationssebene, und zwar mit einer großen Zuversicht zu antworten, die sich auf zwei experimentelle Beweise stützt, die beide von Stokes geliefert sind, und von denen meiner Meinung nach jeder für sich allein für diesen Schluß hinreicht.

I. Die durch Beobachtung festgestellte Tatsache, daß ein großer Teil des Lichtes des blauen Himmels, wenn dieser in einer beliebigen zur Richtung nach der Sonne senkrechten Richtung und nicht zu nahe dem Horizonte angeschaut wird, in der durch die Sonne gehenden Ebene polarisiert ist; diese Tatsache nach der Theorie der achten Vorlesung, S. 71, 72, 73, und der siebzehnten Vorlesung §§ 52, 54, 63 gedeutet.

II. Die Beobachtung, daß die Polarisationssebene sich ändert, wenn sich die Richtung planpolarisierten Lichtes beim Durchgange durch ein Fraunhofersches Gitter, durch Diffraction um einen großen Winkel ändert; beschrieben und gedeutet in Teil II seiner großen Abhandlung „On the Dynamical Theory of Diffraction“<sup>1)</sup>. In einem kurzen ihrem Wiederabdruck angefügten Zusatze S. 327, 328 erwähnt Stokes Versuche von Holtzmann<sup>2)</sup>, die kurz nach jener Abhandlung veröffentlicht wurden, die zu scheinbar von seinen Schlüssen abweichenden Resultaten führten, und gibt eine plausible Erklärung für den Grund der Abweichung; ferner berichtet er über spätere, mit seinen eigenen übereinstimmende Versuche von Lorenz in Dänemark.

So finden wir in der zweiten Beobachtung eine Bestätigung des zuerst von Stokes aus I gezogenen Schlusses, daß die Schwingungen in planpolarisiertem Lichte senkrecht zur Polarisationssebene sind.

§ 81'. Schließlich besitzen wir eine noch mächtigere Bestätigung des ursprünglichen Stokesschen Schlusses, in der Tat einen unwiderleglichen, unabhängigen Beweis dafür, daß die Lichtschwingungen senkrecht zur Polarisationssebene verlaufen, bei Rayleigh, einen Beweis, der sich auf eine wunderbare unabhängig von ihm und von Lorenz in Dänemark gemachte Entdeckung bezüglich der Reflexion von Wellen an einer ebenen Grenzfläche zwischen zwei elastischen Festkörpern von verschiedener Starrheit, aber gleicher Dichte stützt. Daß nämlich, wenn der Unterschied der Starrheiten klein ist, falls die Schwingungen in der Einfallsebene verlaufen sollten, zwei Einfallswinkel ( $\pi/8$  und  $3\pi/8$ ) vorhanden sein müssen, von denen jeder vollständige Extinktion des reflektierten Lichtes ergibt. Das heißt, es besteht

1) Reprint of Mathematical and Physical Papers, Vol. II, pp. 290—327.

2) Poggendorffs Annalen, Vol. XCIX (1856), S. 446, oder Philosophical Magazine, Vol. XIII, p. 135.

nicht ein „Polarisationswinkel“  $\arctg \mu$ , sondern zwei „polarisierende Winkel“  $22,5^0$  und  $67,2^0$  finden sich, was mit der Beobachtung vollkommen unvereinbar ist. Die altbekannte Tatsache (§ 123 weiter unten bewiesen), daß, wenn die Dichten gleich und die Starrheiten ungleich sind, zur Einfallsebene senkrechte Schwingungen reflektiertes Licht liefern, das Fresnels Tangentengesetz unterworfen ist und demnach verschwindet, wenn der Einfallswinkel  $\arctg \mu$  ist, hat die falsche Annahme sehr nahegelegt, daß durch Reflexion polarisiertes Licht mit der Inzidenz  $\arctg \mu$  seine Schwingungen in der Einfallsebene hat; diese Annahme wird aber vollkommen durch die beiden Extinktionswinkel des reflektierten Strahles widerlegt, die sie für Schwingungen in der Einfalls- und Reflexionsebene zur Konsequenz besitzt.

Aus alledem dürfen wir als eine der sichersten Theorien im ganzen Gebiete der Naturerkenntnis die ansehen, daß eben polarisiertes Licht aus Ätherschwingungen besteht, die zur Polarisationssebene senkrecht sind.

---

## Achtzehnte Vorlesung.

### Reflexion und Polarisation des Lichtes, Metallreflexion, Phasenänderungen.

(Nen redigiert 1902.)

§ 82. Der Gegenstand dieser Vorlesung, wie sie ursprünglich gehalten wurde, war „Spiegelung und Brechung von Licht“. Ich habe es aber neuerdings richtiger befunden, die „Brechung“ aus der Überschrift fortzulassen, da wir (§ 130, weiter unten), wenn die reflektierende Substanz durchsichtig ist und wenn wir die Gesetze der Fortpflanzung der Ätherwellen in ihr kennen, die Menge und die Art des gebrochenen Lichtes für jede Menge und Art einfallenden Lichtes und für jeden Einfallswinkel zu berechnen vermögen, sobald wir die Menge und die Art des reflektierten Lichtes kennen. Wenn aber die spiegelnde Substanz undurchsichtig ist, gibt es kein „gebrochenes“ Licht; aber es besteht in dem innerhalb der Materie des spiegelnden Körpers befindlichen Äther eine schwingende Bewegung von der Periode der Bewegung, die das einfallende Licht ausmacht, die in ihrer Amplitude mit wachsendem Abstände  $D$  von der Grenzfläche nach dem Exponentialgesetze  $e^{-mD}$  abnimmt. Wenn  $m^{-1}$  gleich 10000 Wellenlängen, also etwa einem halben Zentimeter gleich ist, wird die Amplitude der Störung im Abstände eines halben Zentimeters von der Grenzfläche nach innen  $e^{-1}$  der Amplitude des eingedrungenen Lichtes und die Intensität  $e^{-2}$  oder  $1/7,39$  der Intensität des eingedrungenen Lichtes sein. Die Substanz mag nach Belieben als undurchsichtig oder nicht undurchsichtig bezeichnet werden; tatsächlich ist sie dann so weit entfernt von vollkommener Undurchsichtigkeit, daß wir den Fall theoretisch und experimentell, wie es uns paßt, nach der gewöhnlichen Theorie des „reflektierten“ und des „gebrochenen“ Lichtes behandeln dürfen. Der Brechungsindex kann zuversichtlich gemessen werden, indem wir sehr kleine Prismen verwenden, die an ihrer dicksten Stelle nicht mehr als 1 mm stark sind. Wenn aber andererseits die Undurchsichtigkeit eine so nahe vollkommene ist, daß  $m^{-1}$  zehn Wellenlängen oder gar nur zwei oder drei beträgt, besitzen wir keine Möglichkeit, das gewöhnliche Brechungsgesetz anzuwenden, und es kann auch keine passende Modifikation desselben geeignet benutzt werden. Das Übersehen dieser negativen Tatsache hat manche Experimentatoren zur Vergeudung kostbarer Zeit und Arbeit verführt, indem sie durchsichtige Metallprismen herstellten und mit ihnen experimentierten, deren Dicke von so wenig wie möglich an der Kante bis zu einer Größe von der Ordnung des gewöhnlichen Goldblattes im Abstände von zwei bis drei Millimeter von der Kante anwuchs.

§ 83. Ein weit geeigneteres Verfahren, die Fortpflanzung von Äther-schwingungen in Metallen zu untersuchen, ist das meines Wissens zuerst von Quincke, und später von andern geschickten Experimentatoren an-

gewandte; bei diesem wurde eine äußerst dünne gleichmäßige Platte des Festkörpers benutzt und die (für Metalle von Quincke negativ gefundene!) Phasenverzögerung von Licht, das durch ihn hindurchgeleitet wurde, nach dem bekannten Interferenzverfahren gemessen. Einige mathematische Theoretiker haben ihre Arbeit in gewissem Sinne dadurch beeinträchtigt, daß sie an der „Brechung“ festhielten und wilde Reihen reeller Zahlen für die Brechungsindizes<sup>1)</sup> von Metallen (für verschiedene Inzidenzen verschieden!) in ihrer Bearbeitung des von Metallen zurückgeworfenen Lichtes mitteilten; nachdem Mac Cullagh und Cauchy es ausgesprochen hatten, daß die gewöhnlich beobachteten Ergebnisse bei der Spiegung des Lichtes an Metallen mit einiger Annäherung durch die Formeln von Fresnel dargestellt werden können, wenn man  $\mu = ip + q$  setzt, wo  $p$  und  $q$  reelle Zahlen sind und  $p$  sicher nicht Null ist,  $q$  für Silber sehr nahe Null ist, oder vollständig Null für das, was ich als ideales Silber zu bezeichnen vorschlage (§§ 150, 151, weiter unten). Die Berücksichtigung dieser Umstände veranlaßte mich, also das Wort „Brechung“ in der Überschrift der achtzehnten Vorlesung zu streichen.

§ 84. Die Theorie der Fortpflanzung einer Ätherbewegung in einem undurchsichtigen Festkörper, die von irgendeiner Störung innerhalb desselben, einschließlich der durch Licht hervorgerufenen, das auf die Oberfläche des Körpers fällt, herrührt, bildet einen äußerst wichtigen Gegenstand für experimentelle Forschung und für Untersuchungen auf dem Gebiete der mathematischen Mechanik. Die Theorie, mit der wir uns später versuchsweise beschäftigen wollen (§ 159), ist die der Fortpflanzung einer schwingenden Bewegung im Äther, wenn sie unter dem Einflusse von Molekeln ponderabler Materie steht, der dahin wirkt, daß die Formeln für Wellenbewegung abgeändert werden, indem er das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu einer reellen negativen Größe oder einer komplexen macht. Wir werden weiter unten in § 159 sehen, daß eine neue Molekulartheorie eine vollkommen hinreichende Erklärung dessen liefert, was ich als ideales Silber bezeichnet habe, nämlich eine Substanz, die Licht bei jeder Inzidenz und in jedem Polarisationsazimut ohne Verlust reflektiert; dabei ist ihre Eigenschaft in der Wellentheorie durch einen reellen negativen Wert für das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit imaginärer Wellen in dem in ihr befindlichen Äther definiert. Bei flüssigem Quecksilber würde man möglicherweise, wenn es mit einer sehr vollkommen gereinigten Oberfläche untersucht würde, finden, daß es Licht ebenso gut oder doch nahezu ebenso gut reflektiert, wie es nach den erfolgreichen Versuchen von Sir John Conroy (§ 88, weiter unten) eine Silberfläche tut, so daß es vielleicht die Definition von idealem Silber erfüllt; allerdings hat Rayleigh ermittelt, daß nur 0,753 des auffallenden Lichtes von gut gereinigtem Quecksilber unter Luft reflektiert wird.<sup>2)</sup>

§ 85. Auch ohne Anwendung wissenschaftlicher Photometrie kann jeder sehen, daß Licht von Gold, Stahl, Kupfer, Messing, Zinn, Zink, auch wenn diese Metalle noch so gut poliert sind, weit weniger reflektiert wird

1)  $\mu$  ist im wesentlichen das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den beiden Medien, von denen die eine nach guten theoretischen Gründen eine imaginäre oder komplexe Größe sein kann. Vgl. §§ 144—152.

2) Phil. Mag. 1892; Collected Papers, Vol. IV.

als von Silber, und demnach weit geringer als das ganze auffallende Licht. Obwohl viele ausgezeichnete Untersuchungen von vielen geschickten Experimentatoren angestellt sind über die Polarisationszerlegung von Licht, das von all diesen Metallen reflektiert wird, liefern doch nur wenige von ihnen Resultate über das Verhältnis des gesamten reflektierten zu dem gesamten auffallenden Lichte. Es scheint tatsächlich, daß außer Rayleigh nur Potter<sup>1)</sup> und Conroy<sup>2)</sup> direkt das gesamte an Metallen reflektierte mit dem gesamten auffallenden Lichte verglichen haben (vgl. § 88, weiter unten).<sup>3)</sup> Conroy fand bei Verwendung seines äußerst vollkommenen Silberspiegels und eines Einfallswinkels von  $30^\circ$ , daß das Verhältnis des reflektierten Lichtes zum einfallenden Lichte 97,3 Prozent für Licht betrug, das senkrecht zur Einfallsebene schwingt, und 99,9 Prozent für Licht, das in<sup>4)</sup> der Einfallsebene schwingt, und demgemäß 98,6 Prozent für gewöhnliches unpolarisiertes Licht. Bei Spiegelmetall — und Stahl — und Zinnspiegeln fand er bei einem Einfallswinkel von  $30^\circ$  und unpolarisiertem Licht, daß das reflektierte Licht — bei Spiegelmetall 66,9 Prozent, bei Stahl 54,9 und bei Zinn 44,4 Prozent<sup>5)</sup> ausmacht. Aus diesen Messungen sowohl, als aus der gewöhnlichen nichtwissenschaftlichen Beobachtung erkennen wir, daß wesentlich mehr Licht bei der Spiegelung an andern Metallen als an Silber verloren wird; und da Licht nicht durch das Metall hindurchgeht, ist es vollkommen klar, daß seine Energie in einem äußerst dünnen Gebiete (sicherlich nicht mehr als zwei oder drei Wellenlängen) an der Oberfläche des Metalles in Wärme umgewandelt sein muß. Demnach kann das Quadrat der imaginären Geschwindigkeit der imaginären Lichtwelle in andern Metallen als Silber keine reelle negative Größe sein, da, wie wir leicht aus der mathematischen Behandlung erkennen, dies keine Umwandlung von Lichtenergie in Wärme zur Folge haben, und demnach (§§ 150, 157 weiter unten) totale Reflexion bei jedem Einfallswinkel ergeben würde. In § 159 ist eine mechanische Theorie zur Erklärung der Umwandlung des auffallenden Lichtes zwischen den in einem Abstände von zwei oder drei Wellenlängen von der Grenzfläche des Metallspiegels liegenden Molekeln in Wärme aufgestellt. Es bildet dies nur einen Umriß des gesamten Gebietes der Untersuchung, die erforderlich ist, alle Arten von Opazität der Materie, fester, flüssiger und gasförmiger, zu erklären.

§ 86. Jetzt wollen wir uns eine Vorstellung von der Reflexion von Licht an vollkommen polierten Flächen bilden. Wenn die Substanz unendlich fein gekörnt ist, kann die Politur praktisch als vollkommen gelten, so daß kein Licht anders reflektiert wird, als nach dem Gesetze der Gleichheit des Einfallswinkels mit dem Reflexionswinkel. In Wirklichkeit liefert aber die molekulare Struktur von Festkörpern eine Oberfläche, die ihrem Wesen nach nicht unendlich fein gekörnt ist; und die beste Annäherung an eine vollkommene künstlich hergestellte oder in der Natur gefundene Politur,

1) Edinburgh Journal of Science, Vol. III, 1830, p. 278—288.

2) Proc. R. S., Vol. XXVIII, Jan. 1879, p. 242—250; Vol. XXXI, März 1881, p. 486—500; Vol. XXXV, Febr. 1883, p. 26—41; Vol. XXXVI, Jan. 1884, p. 187—198; Vol. XXXVII, Mai 1884, p. 36—42.

3) Vgl. jedoch Literatur in Winckelmanns Handbuch der Physik. D. H.

4) Ich habe keinen weitem Fall eines größeren Reflexionsvermögens für Schwingungen in der Einfallsebene als für solche senkrecht zu ihr erwähnt gefunden.

5) Proc. R. S., Feb. 1883, Vol. XXXV, S. 31, 32.

wie an den Oberflächen von Flüssigkeiten oder an kristallischen Flächen oder den Spaltflächen von Festkörpern, wird durch eine sandbedeckte Straße versinnbildlicht, die so glatt ist, wie sie eine Dampfwalze walzen kann. In optischer Hinsicht bestände die Politur als nur wenig geringer denn vollkommen, wenn die Abstände zwischen den nächsten Teilchen in der molekularen Struktur sehr klein wären im Vergleich mit der Wellenlänge des auffallenden Lichtes. In § 80 schätzten wir die Abstände zwischen den nächstbenachbarten Molekeln in gewöhnlichen Festkörpern und Flüssigkeiten von  $1,5 \cdot 10^{-8}$  bis  $2 \cdot 10^{-8}$  cm, was  $\frac{1}{4000}$  bis  $\frac{1}{3000}$  der mittleren Wellenlänge des sichtbaren Lichtes ( $6 \cdot 10^{-5}$  cm) ausmacht. Die bestmögliche Politur ist hiernach sicherlich reichlich praktisch vollkommen für die Reflexion des Lichtes. Aber wenn die Arbeit einer Dampfwalze irgendwo weniger vollkommen ist, als sie möglicherweise sein kann, so gibt es unregelmäßige Höhlungen (Erhöhungen oder Vertiefungen) mit Breiten, die sich, sagen wir, auf etwa  $\frac{1}{200}$  der Wellenlänge des mittleren sichtbaren Lichtes erstrecken, und dann würde die Politur wahrscheinlich auch optisch nicht mehr vollkommen sein. Der Mangel an Vollkommenheit würde an einem sehr schwachen blauen Lichte kenntlich sein, das nach allen Richtungen von einem, nur von einer einzigen Lampe oder von der Sonne beleuchteten Spiegel ausgesandt wird. Der beste Weg, dieses blaue Licht zu untersuchen, wäre der, Sonnenlicht in einen sonst dunkeln Raum durch ein rundes Loch in einem Fensterladen oder einem Metallschirm zu leiten, der auf der nach dem Raume hin liegenden Seite so gut wie möglich geschwärzt ist, und den zu untersuchenden Spiegel im Mittelpunkt des Lichtstrahles in passender Entfernung von dem Loche aufzustellen. Wenn die Politur optisch vollkommen ist, wird keinerlei Licht an irgendeinem Teile des Spiegels von einem Auge bemerkt, das sich irgendwo anders als in dem Strahlengange des eigentlich reflektierten, von der Sonne oder dem Himmel kommenden Lichte befindet. In andern Worten, da der ganze Raum dunkel und der Schirm in der Umgebung des Loches vollkommen schwarz ist, würde der ganze Spiegel vollkommen schwarz erscheinen, wenn er von einem Auge angeschaut wird, das sich an einem Orte befindet, von dem aus es kein Bild (des Loches und demgemäß) irgendeines Teiles des Himmels oder der Sonne sehen kann. Ein Zustand sehr naher, aber nicht optisch ganz vollkommener Politur würde an einem schwachen violett-blauen Lichte kenntlich sein, das von dem Spiegel ausgesandt wird, statt daß er absolut schwärz wäre. Die Färbung muß das genaue  $\lambda^{-4}$ -Blau von Rayleigh sein, wenn der Mangel an Vollkommenheit der Politur von Vertiefungen herrührt, die im Vergleich mit der Wellenlänge klein sind (aber trotzdem groß im Vergleich mit den Abständen zwischen den nächstbenachbarten Molekeln). Wenn diese Bedingung erfüllt ist, muß das infolge des Mangels in der Vollkommenheit der Politur an der Oberfläche gesehene Licht, wenn es in irgendeiner zur Richtung des einfallenden Strahles senkrechten Richtung angeschaut wird, als vollständig in der durch diese beiden Richtungen bestimmten Ebene polarisiert befunden werden. Alles, was hier in diesem § 86 gesagt ist, gilt für die Spiegung an jeder Art Fläche, gleichviel ob der reflektierende Körper fest oder flüssig oder metallisch oder undurchsichtig mit einem beliebigen Grade der Undurchsichtigkeit oder durchsichtig ist. Eine experimentelle Prüfung der Politur natürlicher Kristallflächen wäre interessant.

§ 87. Wertvolle photometrische Versuche bezüglich der Reflexion von Licht an Metallen sind ausgeführt worden von Bouguer, Biot, Brewster, Potter, Jamin, Quinke, De Senarmont, De la Provostaye und Desains und von Conroy.<sup>1)</sup> Aber weit mehr Versuche sind zu wünschen nicht bloß über die direkte Spiegung an Metallen, sondern auch über die Spiegung bei allen Einfallswinkeln an Metallen und andern undurchsichtigen und durchsichtigen Festkörpern und Flüssigkeiten. In jedem Einzelfalle sollte die Intensität des reflektierten Lichtes mit der Intensität des gesamten einfallenden Lichtes verglichen werden, und zwar zunächst ohne künstliche Polarisation des einfallenden und ohne Polarisationszerlegung des reflektierten Lichtes. Es ist in hohem Maße zu wünschen, daß eine eingehende Untersuchung dieser Art ausgeführt wird. Es wäre dies eine sehr leichte Arbeit, da eine rohe photometrische Schätzung bald ausgeführt ist, außer wenn sie durch einen Farbenunterschied in den zu vergleichenden Lichtquellen unmöglich gemacht wird.

Absolute Bestimmungen reflektierten Lichtes für die Einheit des auffallenden Lichtes können nicht mit großer Genauigkeit ausgeführt werden, wegen der in der Sache begründeten Schwierigkeit oder der praktischen Unmöglichkeit sehr genauer photometrischer Beobachtungen, selbst wenn, wie es in hohem Maße bei reflektiertem Lichte der Fall ist, keine merkliche Verschiedenheit der Färbung der beiden zu vergleichenden Lichtquellen vorhanden ist.

§ 88. Die umstehende Zeichnung Fig. 59 stellt für Einfallswinkel zwischen  $10^0$  und  $80^0$  die Reflexionsvermögen<sup>2)</sup> von Silber, Spiegelmetall, Stahl und Zinn nach den Beobachtungen von Potter, Conroy und Jamin dar (die ausgezogenen Kurven beziehen sich auf die Beobachtungen von Conroy, von den gestrichelten rührt die für Spiegelmetall von Potter, die für Stahl von Jamin her), und ebenso für alle Einfallswinkel von  $0^0$  bis  $90^0$  die Reflexionsvermögen von Diamant, Flintglas und Wasser, berechnet aus den bewunderungswürdigen Formeln von Fresnel. Die letzteren Darstellungen kommen wahrscheinlich für fast alle durchsichtigen Körper, selbst wenn sie ein so hohes Brechungsvermögen wie Diamant (§§ 96, 100 weiter unten) besitzen, der Wahrheit näher als irgendwelche bisher ausgeführten oder für das menschliche Auge möglichen photometrischen Beobachtungen. Die Ordinaten geben das reflektierte Licht in Teilen des einfallenden Lichtes bei den Einfallswinkeln wieder, die durch die Abszissen dargestellt sind. Jamins Resultate<sup>3)</sup> für Stahl werden von ihm selbst als die Mittel aus

1) Bouguer, *Traité d'Optique*, 1760, S. 27, 131; Biot, *Ann. de Chimie*, 1815, Vol. XCIV, S. 209; Brewster, *A Treatise on new Philosophical Instruments*, Edin. 1813, S. 347; Phil. Trans. 1830, S. 69; Potter, *Edin. Journ. of Science*, 1830; De la Provostaye et Desains, *Ann. de Chim. et de Phys.* [3], 1849, Vol. XXVII, S. 109 und 1850 Vol. XXX S. 159, 276; Conroy, *Proc. R. S.*; vgl. § 84 oben. Vgl. Mascart, *Traité d'Optique*, Vol. II, 1891 S. 441–459.

2) Ich schlage das Wort Reflexionsvermögen zur Bezeichnung des Verhältnisses des gesamten reflektierten Lichtes zum gesamten einfallenden Lichte vor, gleichviel ob das einfallende Licht unpolarisiert ist wie bei den Berechnungen für Fig. 59 angenommen, oder planpolarisiert, in oder senkrecht zur Einfallsebene, wie bei denen für die Figuren 62–65, ferner gleichviel ob es gewöhnliches weißes Licht oder homogenes Licht oder Licht von irgendeiner gemischten Färbung ist.

3) Mascart, *Traité d'Optique*, Vol. II S. 534, 536.



den Reflexionsvermögen für Licht, das in, und solches, das senkrecht zu der durch den einfallenden und den reflektierten Strahl gehenden Ebene polarisiert ist, gegeben; jede einzelne dieser Größen ist photometrisch bestimmt durch Vergleichung mit den nach den Formeln von Fresnel berechneten Reflexionsvermögen von Glas. Die sechs Kurven für Metalle<sup>1)</sup> in der Zeichnung (Fig. 59) geben die sämtlichen meines Wissens bisher durch Beobachtung bestimmten Reflexionsvermögen wieder; mit Ausnahme derjenigen nach Jamin<sup>2)</sup>

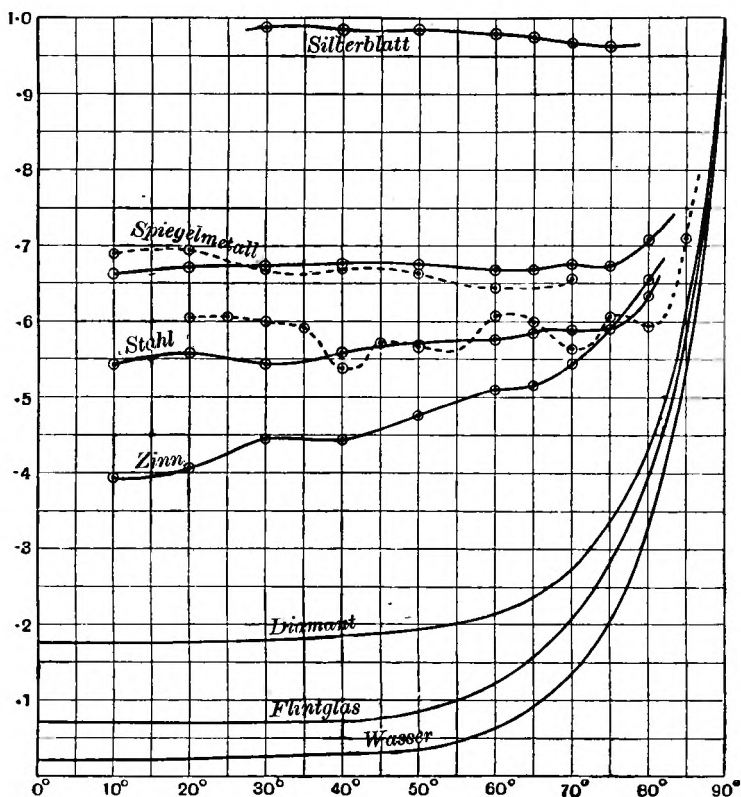


Fig. 59.

für normale Inzidenz von homogenen Lichtstrahlen von Rot bis Violett an Metallen und derjenigen von Rayleigh<sup>3)</sup> für nahezu normale Inzidenz weißen Lichtes an Quecksilber und Glas. Alle diese Kurven treffen sich oder würden sich, in Gedanken fortgeführt, in der oberen rechten Ecke treffen, und zeigen so bei streifender Inzidenz totale Reflexion. Die drei berechneten Kurven sind Mittelkurven für Licht, das in und senkrecht der Einfallsebene polarisiert ist, und dazu gehören § 102 ff.

1) Die vier ausgezogenen Kurven nach Conroy, von den zwei gestrichelten Kurven die für Spiegelmetall nach Potter, die für Stahl nach Jamin.

2) Ibid. p. 544.

3) Scientific Papers Vol. II und IV; Proc. R. S. 1886, Phil. Mag. 1892.

§ 89. Die weiteren Zeichnungen (Figg. 60a, 60b) geben (im wesentlichen nach dem von Bouguer, Potter und Conroy benutzten Prinzip) den meiner Meinung nach besten und einfachsten Plan zur Ausführung photometrischer Bestimmungen von Reflexionsvermögen. Die Mittelpunkte von Lampen, Spiegel und Schirm befinden sich sämtlich in einer Horizontalebene, die als Zeichenebene gewählt ist. Die Schirme und die reflektierende Fläche des

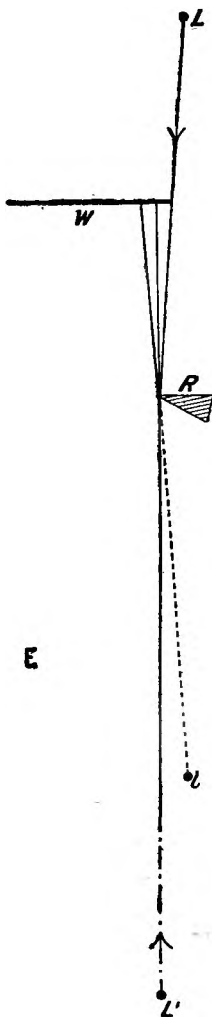


Fig. 60 a.

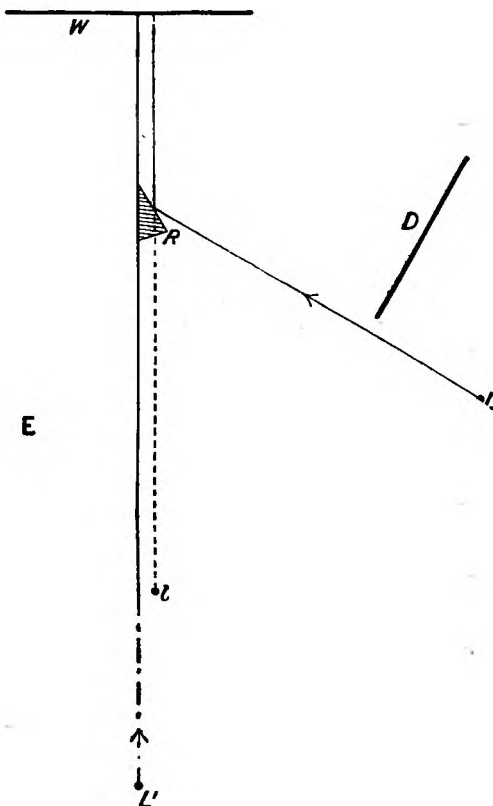


Fig. 60 b.

Spiegels sind vertikale Ebenen.  $R$  ist die reflektierende Fläche, die als eine der Flächen eines Prismas mit spitzem Winkel angedeutet ist.  $L$ ,  $L'$  sind zwei so nahe wie möglich gleiche und ähnliche Lampen (je schmäler die horizontalen Dimensionen, um so besser<sup>1</sup>), vorausgesetzt, daß das auf

1) Das beste nicht elektrische Licht für diesen Zweck, das ich kenne, ist die gewöhnliche Flachbrenner-Paraffinlampe mit einem Schirm, der einen engen vertikalen Schlitz besitzt und nahe dem Zugglase mit seiner Mittellinie in der Mittelebene der flachen Flamme aufgestellt ist. Der Zweck des Schirmes ist, das

den Spiegel geworfene Licht hinreichend ist).  $L'$  ist zu weit von  $R$  entfernt, als daß die richtige Lage in der Zeichnung wiedergegeben werden könnte; die Richtung dieser Lampe, wie sie von  $R$  aus erscheint, ist durch die gestrichelte Gerade dargestellt.  $W$  deutet einen undurchsichtigen Schirm an, der auf der nach  $E$  hin liegenden Seite mit weißem Papier belegt ist;  $E$  stellt das Auge des Beobachters, in Fig. 60a in der Lage für sehr nahe direkte Inzidenz, in Fig. 60b für eine Inzidenz von etwa  $60^\circ$  dar. Beide Zeichnungen geben im Maßstabe von etwa ein Zehntel bis ein Zwanzigstel annähernd die geeigneten Dimensionen für den Fall wieder, in dem der Spiegel eine Fläche von Flintglas vom Brechungsindex 1,714 bildet, und wie sie nach der Fresnelschen Theorie durch das Mittel aus den Ordinaten der Kurven 1 und 2 der Fig. 64 (§ 102 weiter unten), die mit den Reflexionsvermögen  $\frac{1}{14}$  und  $\frac{1}{4}$  bei den Inzidenzen  $0^\circ$  und  $60^\circ$  festgestellt sind. Das bei  $E$  befindliche Auge sieht einen schmalen Teil des weißen Schirmes auf der rechten Seite nur von  $l$ , dem Bilde von  $L$  im Spiegel, beleuchtet, und den übrigen linken Teil des Schirmes ganz in der von  $L'$  ausgehenden direkten Beleuchtung. Verschiebt man  $L'$  ein wenig nach rechts oder ein wenig nach links, so kann man es so einrichten, daß man entweder einen sehr schmalen dunkeln Raum oder einen Raum von doppelter Helligkeit zwischen den beiden Beleuchtungen erhält, und so wird das Auge bei der Beurteilung der vollkommenen Gleichheit der beiden Beleuchtungen unterstützt. Wenn, wie in Fig. 60b, der Einfallswinkel  $45^\circ$  übersteigt, ist ein dunkler Schirm  $DD$  notwendig, um zu verhindern, daß das Licht von  $L$  direkt auf den Schirm  $W$  fällt. Das Verfahren, auf das ich hier mit Einzelheiten hingewiesen habe, ist vollkommen geeignet für reflektierende Körper, gleichviel ob sie durchsichtig oder metallisch sind oder andere Eigenheiten der Undurchsichtigkeit besitzen, vorausgesetzt, daß der Spiegel nicht weniger als zwei oder drei cm breit hergestellt werden kann. Wenn aber, wie es beim Diamant der Fall ist, nur ein sehr kleiner Spiegel in Frage kommen wird, ist eine Änderung des Verfahrens vorzuziehen oder sogar notwendig, die ein direktes Anschauen der zu vergleichenden Lichtquellen (ohne Projektion auf einen weißen Schirm) ermöglicht. Für Flüssigkeiten schließlich ist eine Abänderung dahin erforderlich, daß ihre Spiegelung in einer Vertikalebene verfolgt werden kann.

§ 90. Wie am Ende des § 87 bemerkt ist, können absolute Bestimmungen von Reflexionsvermögen nicht mit großer Genauigkeit ausgeführt werden, wegen der Unvollkommenheit der Empfindlichkeit des Auges für relative Lichtstärken, auch wenn die Färbungen genau dieselben sind. Andererseits

vom Zugglase reflektierte Licht abzublenden ohne irgend etwas von dem Lichte der Flamme selbst abzuschneiden; die Breite des Schlitzes muß demnach sehr wenig größer sein als die Dicke der Flamme. Diese Anordnung liefert eine weit dünnere und beständigere Lichtlinie als irgendeine nicht mit einem Schirme versehene Kerze und weit mehr Licht; und sie liefert auch mehr Licht, als durch einen Schlitz von derselben Breite von einer Paraffinlampe mit rundem Dochte austritt. Eine elektrische Lampe der ursprünglichen „hair-pin“-Konstruktion von Edison mit einem geschlitzten Schirm, der das vom Glase reflektierte Licht abblendet, würde noch geeigneter als die Paraffinlampe sein und mehr Licht mit schärferem Schatten geben. (Bekanntlich hat Lummer die Praxis und Theorie der photometrischen Untersuchungen aufs höchste ausgebildet. D. H.)

ist ein sehr hoher Genauigkeitsgrad leicht durch folgendes Verfahren<sup>1)</sup> zu erreichen, wenn die Aufgabe vorliegt, für jeden beliebigen Einfallswinkel die reflektierten Lichtmengen zu vergleichen, die von der Inzidenz einerseits in, andererseits senkrecht zu der Einfallsebene schwingenden Lichtes gleicher Stärke herrühren.

Man verwende zwei Nicols, die ich der Kürze wegen mit  $N_1$  und  $N_2$  bezeichnen will, in dem Gange des einfallenden, bzw. des reflektierten Strahles; man benutze ferner einen Fresnelschen Rhombus ( $F$ ) zwischen der reflektierenden Fläche und  $N_2$ . Man stelle  $N_2$  so auf und halte es dauernd so aufgestellt, daß seine beiden Hauptebenen mit der Reflexionsebene einen Winkel von  $45^\circ$  bilden, jedoch mit der leichten Möglichkeit, es aus jeder der acht so definierten Lagen mit der nötigen genauen Justierung in jede andere dieser Lagen überzuführen. Der Kürze wegen will ich als Nullstellungen von  $N_1$  und  $F$  diejenigen bezeichnen, in denen ihre Hauptebenen mit der Einfallsebene und Reflexionsebene Winkel von  $45^\circ$  bilden. Während des Verlaufes einer Beobachtung müssen  $N_1$  und  $F$  um verschiedene Winkel,  $n$  und  $f$ , aus ihrer Nullstellung herausgedreht werden, bis vollständiges Auslöschen des durch  $N_2$  kommenden Lichtes erreicht ist.

§ 91. Zu Anfang einer Beobachtung drehe man, bei einem beliebig gewählten Einfallswinkel des Lichtes an der reflektierenden Fläche,  $N_1$  in eine Lage, die so nahe wie möglich vollständiges Auslöschen des aus  $N_2$  austretenden Lichtes ergibt. Man verbessere dieses Auslöschen, wenn es geht, durch Drehen von  $F$  nach der einen oder der anderen Richtung, und stelle das möglich beste Auslöschen durch abwechselndes Drehen von  $N_2$  und  $F$  her. Absolut vollkommene Auslöschung wird in dieser Weise an einem Punkte des Feldes erreicht, wenn homogenes Licht benutzt wird und wenn die Nicols und der Rhombus vollkommene, der Theorie entsprechende Apparate sind. Die Resultate der vollkommen durchgeführten Beobachtung sind die beiden Winkel ( $n, f$ ), um die  $N_1$  und  $F$  aus ihren Nullagen herausgedreht werden müssen, um für die anderen Inzidenzen vollständiges Auslöschen durch  $N_2$  zu liefern. Aus dem so gefundenen Winkel  $f$  berechnet man durch zwei einfache Formeln (7) des § 93 die Verhältnisse der Schwingungsamplituden der beiden weiter unten definierten Komponenten ( $G, g$ ) der reflektierten Schwingungen in der Reflexionsebene zu der Schwingungsamplitude ( $C$ ) der reflektierten, zu dieser Ebene senkrechten Schwingungen. Die hier erwähnten bestimmten Komponenten sind ( $G$ ) Schwingungen mit derselben Phase wie  $C$  und ( $g$ ) Schwingungen mit einer um eine Viertelperiode vor  $C$  vorausgeeilten Phase. Es ist klar, daß, wenn  $g = 0$  ist, man vollständiges Auslöschen erhalten würde, ohne daß man  $F$  aus seiner Nullage herausdreht und daß dieses durch dieselbe Justierung von  $N_1$  gefunden werden würde, wie wenn ein Fresnelscher Rhombus im Strahlengange gar nicht vorhanden wäre. ( $C$  entspricht dem  $C'$  der §§ 117, 123 weiter unten.)

§ 92. Die Figuren 61a und 61b bedeuten Zeichnungen in Ebenen, die zu dem reflektierten und zu dem einfallenden Lichte senkrecht sind. Es sei  $O$  ein Punkt im Strahlengange zwischen der reflektierenden Fläche und dem Fresnelschen Rhombus; es sei ferner  $OG$  die Reflexionsebene des von der

1) Ursprünglich von Mac Cullagh angegeben. Vgl. seine Collected Works, S. 239; ebenso Stokes, Collected Works, Vol. III, S. 99.

reflektierenden Fläche kommenden Lichtes und  $OZ$  sei zu dieser Ebene senkrecht. Es sei  $ON_2$  die Schwingungsebene<sup>1)</sup> des zweiten Nicols und  $OP$  die Polarisations Ebene (die senkrecht zu  $ON_2$  ist). Es sei  $OF$  eine durch den eintretenden Strahl gehende Ebene, die zu den Flächenschnitten<sup>2)</sup> des Fresnelschen Rhombus senkrecht ist; diese Ebene ist in der Zeichnung in der Lage angedeutet, in der sie weiter um einen Winkel  $f = N_2 OF$  von der Nullage  $ON_2$  fortgedreht ist.  $OK$  sei senkrecht zu  $OF$ . Bezüglich der Zeichen erkennen wir nach § 158<sup>v</sup> (1), daß in Fig. 61a für reflektierte und in Fig. 61b für einfallende Schwingungen  $OG$  positiv ist.

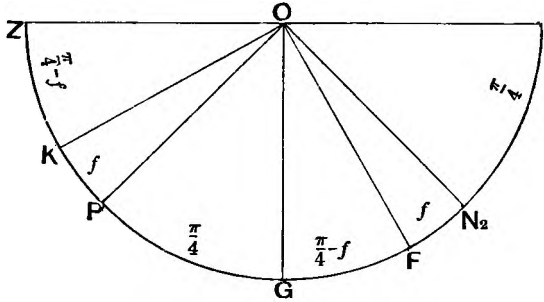


Fig. 61a.

Indem wir das von der reflektierenden Fläche kommende und auf den Fresnelschen Rhombus fallende Licht ins Auge fassen, sei  $C \sin \omega t$  die längs  $OZ$  verlaufende Komponente und  $G \sin \omega t - g \cos \omega t$  die Komponente längs  $OG$  der Verschiebung eines Ätherteilchens, dessen Gleichgewichtslage  $O$  ist, zur Zeit  $t$ .  $G/C$  und  $g/C$  sind zwei Funktionen des durch die eben beschriebene Beobachtung zu bestimmenden Winkels. Nach den geeigneten Zerlegungen und Zusammensetzungen für Schwingungskomponenten in den Hauptebenen des Fresnelschen Rhombus finden wir folgende Verschiebungen:

$$\left. \begin{aligned} \sin \omega t \cdot \left[ G \cos \left( \frac{\pi}{4} - f \right) - C \sin \left( \frac{\pi}{4} - f \right) \right] \text{ längs } OF \\ \sin \omega t \cdot \left[ G \sin \left( \frac{\pi}{4} - f \right) + C \cos \left( \frac{\pi}{4} - f \right) \right] \quad \text{,,} \quad OK \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

und

$$\left. \begin{aligned} - \cos \omega t \cdot g \cos \left( \frac{\pi}{4} - f \right) \text{ längs } OF \\ - \cos \omega t \cdot g \sin \left( \frac{\pi}{4} - f \right) \quad \text{,,} \quad OK \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Durch die beiden totalen inneren Reflexionen an den schrägen Flächen des Fresnelschen Rhombus sind die Schwingungskomponenten in der Ebene  $OF$  um eine Viertelperiode gegenüber den zu  $OF$  senkrechten Schwingungskomponenten vorausgeeilt. Wir müssen demnach, um die Schwingungskomponenten zur Zeit  $t$  in einem Punkte der Bahn des aus dem Fresnelschen Rhombus austretenden Lichtes zu finden, in den Komponenten längs  $OF$  der Ausdrücke (1) und (2)  $\sin \omega t$  in  $\cos \omega t$  und  $\cos \omega t$  in  $-\sin \omega t$  verwandeln und die Komponenten längs  $OK$  unverändert lassen. So finden wir für die Schwingungskomponenten in dem gewählten Punkte in der Bahn des aus dem

1) Ich gebrauche der Kürze wegen diesen Ausdruck zur Bezeichnung der Schwingungsebene des durch das Nicol gegangenen Lichtes.

2) Ein Ausdruck zur Bezeichnung der Schnitte der durchsetzten Flächen mit den reflektierenden Flächen. Vgl. § 158<sup>x</sup> weiter unten.

Fresnelschen Rhombus austretenden nach dem zweiten Nicol gehenden Lichtes das Folgende:

$$\left. \begin{aligned} \sin \omega t \cdot g \cos \left( \frac{\pi}{4} - f \right) & \quad \text{l\"angs } OF \\ \sin \omega t \cdot \left[ G \sin \left( \frac{\pi}{4} - f \right) + C \cos \left( \frac{\pi}{4} - f \right) \right] & \quad \text{,, } OK \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega t \cdot \left[ G \cos \left( \frac{\pi}{4} - f \right) - C \sin \left( \frac{\pi}{4} - f \right) \right] & \quad \text{l\"angs } OF \\ - \cos \omega t \cdot g \sin \left( \frac{\pi}{4} - f \right) & \quad \text{,, } OK \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

§ 93. Für das Auslöschen durch das zweite Nicol muß die Summe aller zu  $ON_2$  parallelen Schwingungskomponenten des das Nicol erreichenden Lichtes Null sein, und demgemäß erhalten wir durch die geeignete Zerlegung und Zusammensetzung, indem wir die so gefundenen Koeffizienten von  $\sin \omega t$  und  $\cos \omega t$  einzeln gleich Null machen

$$- \left[ G \sin \left( \frac{\pi}{4} - f \right) + C \cos \left( \frac{\pi}{4} - f \right) \right] \sin f + g \cos \left( \frac{\pi}{4} - f \right) \cos f = 0, \quad (5)$$

$$+ \left[ G \cos \left( \frac{\pi}{4} - f \right) - C \sin \left( \frac{\pi}{4} - f \right) \right] \cos f + g \sin \left( \frac{\pi}{4} - f \right) \sin f = 0. \quad (6)$$

Löst man diese Gleichungen nach  $G$  und  $g$  auf, so findet man

$$G = \frac{1 + \cos 4f}{2 + \sin 4f} C; \quad g = \frac{2 \sin 2f}{2 + \sin 4f} C \quad (7)$$

§ 94. Wir kommen jetzt auf das Licht zurück, das aus dem ersten Nicol austritt und auf die reflektierende Fläche fällt. Es sei  $J$  seine Schwingungsamplitude. Die Schwingungsamplituden seiner Komponenten in und senkrecht zu der Einfallsebene sind:

$$J \cos \left( \frac{\pi}{4} - n \right)$$

und

$$- J \sin \left( \frac{\pi}{4} - n \right),$$

wenn das Nicol um den Winkel  $n$ , wie es in Fig. 61 b angedeutet ist, aus seiner

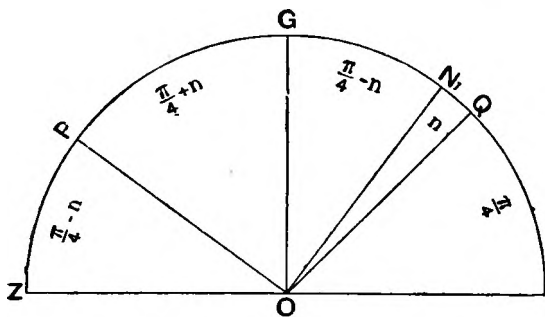


Fig. 61 b.

Nullage  $OQ$  herausgedreht ist;  $ON_1$  ist dabei die Schwingungsebene des ersten Nicols.

§ 94'. Es sei  $S$  das Verhältnis der reflektierten zur einfallenden Schwingungsamplitude für die zur Ebene  $OG$  senkrechte Schwingungskomponente. Fassen wir zunächst die Komponente des auffallenden Lichtes ins Auge, die ihre Schwingungen in der Ebene  $OG$  hat; es seien  $T$  und  $E$  die Verhältnisse der Schwingungsamplituden zweier Teilkomponenten ihres reflektierten Lichtes, die beide in der Ebene  $OG$  schwingen, zu der Schwin-

gungsamplitude der einfallenden Komponente; von diesen Komponenten befindet sich eine in derselben Phase wie die Komponente des senkrecht zu  $OG$  schwingenden reflektierten Lichtes, die andere in einer hinter dieser um eine Viertelperiode zurückbleibenden Phase.<sup>1)</sup> Wir haben hiernach

$$C = -J \sin\left(\frac{\pi}{4} - n\right) S, \quad G = J \cos\left(\frac{\pi}{4} - n\right) T, \quad g = J \cos\left(\frac{\pi}{4} - n\right) E. \quad (8)$$

Aus diesen Gleichungen und den Gleichungen (7) findet man

$$\frac{T}{S} = -\frac{1 + \cos 4f}{2 + \sin 4f} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - n\right), \quad \frac{E}{S} = \frac{-2 \sin 2f}{2 + \sin 4f} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - n\right). \quad (9)$$

So liefert dieses experimentelle Resultat ( $f, n$ ) die beiden Komponenten ( $T, E$ ) der reflektierten Schwingungen in der Reflexionsebene, wenn die alleinige Komponente ( $S$ ) der zur Reflexionsebene senkrechten Schwingungen bekannt ist.

§ 95. Wir wenden uns wieder dem § 90 zu und beachten, daß wir uns mit vier unabhängigen Variabeln zu beschäftigen haben: — dem Einfallswinkel, den Orientierungen der beiden Nicols und der Orientierung des Fresnelschen Rhombus. Zwei beliebige von diesen vier Größen können schließlich für die Veränderung gewählt werden, während die beiden andern konstant gehalten werden, um dafür zu sorgen, daß, bei Verwendung homogenen Lichtes, vom Mittelpunkte des Feldes in das Auge dringendes Licht ausgelöscht wird, in andern Worten, daß im Mittelpunkte des Feldes absolute Dunkelheit erzeugt wird. Theoretisch gibt es genau einen Punkt (einen Punkt absoluter Dunkelheit), in dem das Auslöschen ein vollständiges ist, und es wird stets, bevor die gewünschte Justierung vollkommen erreicht ist, ein dunkler Fleck erkennbar sein, der sich jedoch nicht im Mittelpunkte des Feldes befindet. Ändert man irgendeine von den vier unabhängigen Veränderlichen, so wird dadurch der dunkle Fleck verschoben, und allgemein wird man zwei von ihnen abändern müssen, um seine Verschiebung nach dem Mittelpunkte des Feldes hin für die gewünschte Justierung zu veranlassen. Was in Wirklichkeit allgemein bemerkt wird, ist, wie ich glaube, nicht ein dunkler Fleck, sondern ein dunkles Band, und dieses läßt man wandern, bis es, wenn die besterreichbare Annäherung an die gewünschte Justierung gewonnen ist, durch die Mitte wandert. Wenn schwaches oder mäßiges Licht, etwa das Licht des weißen

1) Wenn der reflektierende Körper Glas oder ein anderer durchsichtiger isotroper Festkörper oder eine Flüssigkeit ist, bestimmt Fresnels Prophezeiung (wir können sie nicht als physikalische oder mechanische Theorie erklären)

$$S = -\frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)}, \quad T = -\frac{\operatorname{tg}(i - r)}{\operatorname{tg}(i + r)}, \quad E = 0.$$

Die Bezeichnung im Text ist teilweise Rayleigh (Scientific Papers, Vol. III, S. 496—512) entlehnt, der  $S$  und  $T$  benutzt hat, um die „Sinusformel“ und die „Tangensformel“ von Fresnel zu symbolisieren. Was ich im Text mit  $E$  bezeichnet habe, ist für alle durchsichtigen Festkörper und Flüssigkeiten sicher sehr klein; und obwohl man allgemein der Meinung ist, daß diese Größe für Substanzen von hoher Brechbarkeit, wie Diamant, merklich ist, hat Rayleigh ihre Existenz für sie alle in Frage gestellt und die Anschauung ausgesprochen, daß ihr Nichtverschwinden von fremdem Stoffe auf der reflektierenden Oberfläche herrührt. Ich glaube jedoch, daß Airy und Brewster und Stokes, die sie die Diamant-eigenschaft genannt haben, und Fresnel selbst, obwohl sie aus seiner Theorie herausfällt, im Rechte waren, als sie sie für real erklärten. Vgl. § 158 weiter unten.

Himmels, benutzt wird, mag das ganze Feld absolut dunkel erscheinen und mag auch weiter so erscheinen, während irgendeine von den vier Veränderlichen um einen halben Grad oder mehr geändert wird. Für subtilere Messungen muß also intensiveres Licht verwendet werden, eine stark leuchtende Flamme oder elektrisches Bogenlicht oder Kalklicht oder, am besten von allen, eine wolkenlose Sonne, wie bei der sehr eindringenden Untersuchung des vom Wasser bei einer dem Polarisationswinkel sehr nahe kommenden Inzidenz reflektierten Lichtes von Rayleigh, deren Resultate weiter unten § 105 mitgeteilt werden.

§ 95'. Eine leichte Art, zu erkennen, daß gerade zwei unabhängige Veränderliche nötig sind, das gewünschte Auslöschen zu erhalten, besteht darin, unsere Aufmerksamkeit allein auf den Mittelpunkt des Feldes zu richten und uns vorzustellen, daß das Licht, welches von ihm ausgehend das Auge erreicht, wenn das Auslöschen nicht vollkommen ist, in zwei polarisierte Komponenten zerlegt ist, deren Schwingungslinien zueinander senkrecht sind. Das gewünschte Auslöschen erfordert das Verschwinden dieser beiden Komponenten und nichts weiter. Eine geeignete Änderung der gewählten unabhängigen Veränderlichen sichert endgültig das Verschwinden dieser beiden Größen, wenn allgemein als homogen bezeichnetes Licht, d. h. Licht, dessen sämtliche Schwingungen gleiche Perioden besitzen, verwendet wird.

§ 95". In dem ins einzelne gehenden Plan der §§ 90—94 sind als die beiden unabhängigen Veränderlichen die Orientierung des ersten Nicols und die Orientierung des Fresnelschen Rhombus gewählt. Dies ist auch vollkommen passend, wenn  $N_2$  auf einem Mechanismus montiert ist, der geeignet ist, ihm die Freiheit zu geben, sich in einer zu seiner Achse senkrechten Ebene zu bewegen und seine Orientierung um diese Achse konstant zu halten. Der Fresnelsche Rhombus muß so montiert sein, daß er sich frei um eine Achse bewegen kann, die in der Richtung des in ihn eintretenden Lichtes festliegt, und er muß ein kurzes, das aus ihm austretende Licht umgebendes Rohr tragen, in das  $N_2$  ohne Zwang einpaßt. So führt denn der Fresnelsche Rhombus, wenn er um die Richtung des von dem Spiegel reflektierten Lichtes gedreht wird,  $N_2$  in einem Kreise (gewissermaßen wie ein hohler Kurbelschaft) herum, so daß es sich stets in der geeigneten Lage befindet, das austretende Licht dem Auge des Beobachters zuzuführen.

Zwei andere Wahlen unabhängiger Veränderlichen, die beide meiner Meinung nach ebenso wohlbegründet und ebenso geeignet sind wie die der §§ 90—94, aber darum einfacher sind, weil man nach ihnen nicht der besonderen Einrichtung zum Herumführen von  $N_2$  bedarf, sind weiter unten in § 98 beschrieben.

§ 96. Nichts in den §§ 90—95 setzt irgendeine Hypothese voraus, und wir haben in ihnen ein vollständiges Beobachtungsverfahren zur Bestimmung von  $T/S$  und  $E/S$  ohne jede Photometrie. Diese Größen sind dabei für einfallende Schwingungen, die mit der Einfallsebene einen Winkel von  $45^\circ$  bilden, die Intensitäten der beiden Komponenten des reflektierten Lichtes, die in der Einfallsebene schwingen, ausgedrückt durch die Intensität der senkrecht zu dieser Ebene schwingenden Komponente des reflektierten Lichtes. Vollständig durchgeführt würde diese Untersuchung interessanten und wichtigen Aufschluß über durchsichtige Flüssigkeiten und Festkörper und über Metalle und andere undurchsichtige Festkörper geben für das ganze Gebiet einer



Inzidenz zwischen  $0^0$  und  $90^0$ . Sie kann äußerst genaue Werte von  $T/S$  für durchsichtige Flüssigkeiten und Festkörper liefern; und es würde interessant sein zu ermitteln, wie weit ihre Ergebnisse mit der Formel  $\frac{\cos(i + i')}{\cos(i - i')}$ , die das Fresnelsche „Tangentengesetz“ und das „Sinusgesetz“ zur Konsequenz haben, in Übereinstimmung sind.

§ 96. Fresnel selbst benutzte das Verfahren<sup>1)</sup> für die Spiegung an Wasser und an Glas bei Inzidenzen zwischen  $24^0$  und  $89^0$  (ohne Verwendung seines, des Fresnelschen, Rhombus) und fand Werte für  $\arctg\left(\frac{T}{S}\right)$ , die von  $\arctg\left(\frac{\cos(i + i')}{\cos(i - i')}1^0$  abwichen. Es wurde aber angenommen, daß diese Abweichungen durch die Unvollkommenheit seines Apparates und durch die Verwendung weißen Lichtes<sup>2)</sup> zu erklären sind. Eine ähnliche Untersuchung wurde von Brewster<sup>3)</sup> an einigen Glassorten und an Diamant weitergeführt. Beispielsweise wichen bei Ermittlungen an einem Glase mit dem Brechungsindex 1,4826 seine Resultate für  $\arctg\left(\frac{T}{S}\right)$  von  $\arctg\left(\frac{\cos(i + i')}{\cos(i - i')}\pm 1^0 4'$  ab, eine Größe, die er für innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegend erachtete. Für Diamant fand er größere Abweichungen, die aber systematische zu sein schienen und keine Beobachtungsfehler. Bei Verwendung eines Fresnelschen Rhombus nach dem Verfahren der §§ 90—94 hätte er wahrscheinlich die zureichende Verbesserung der Fresnelschen Formel gefunden, die zur Wiedergabe der Polarisationszerlegung durch Reflexion für Diamant erforderlich ist. Kann es sein, daß sowohl Fresnel als Brewster die Genauigkeit ihrer eigenen Versuche unterschätzt haben, und daß auch für Wasser und Glas die Abweichungen, die sie von Fresnels  $\frac{\cos(i + i')}{\cos(i - i')}$  gefunden haben, tatsächlich vorhanden und nicht Beobachtungsfehler sind? Der Gegenstand fordert dringend eine vollständige Untersuchung nach der Methode der §§ 90—98 mit aller erreichbaren Genauigkeit und mit Instrumenten von der heutzutage möglichen Präzision.

§ 97. Der Leser dürfte es interessant finden, die Formeln des § 94 über das ganze Gebiet von Inzidenzen zwischen  $0^0$  und  $90^0$  zu verfolgen. Für jetzt wollen wir nur den Fall des Einfallswinkels ins Auge fassen, der  $T=0$  macht. Dieser bedeutet nämlich eine Inzidenz, die, wenn das einfallende Licht in irgendeiner zur Einfallsebene schrägen Ebene polarisiert ist, für die Komponenten des reflektierten Lichtes, von denen die eine in dieser Ebene, die andere senkrecht zu ihr schwingt, eine Phasendifferenz von  $90^0$  liefert; sie wurde von Cauchy und, soviel ich weiß, von allen späteren Schriftstellern als Hauptinzidenz bezeichnet. Wir werden sofort (§§ 97'', 99, 105) sehen, daß Beobachtung und Theorie für jede durchsichtige Substanz eine Inzidenz oder eine ungerade Anzahl solcher Inzidenzen nachweisen, die diese Bedingung erfüllen. Nach der Beobachtung und nach der Theorie wissen wir (§ 81 oben), daß dieser Fall eintritt nicht durch Verschwinden von  $S$ , son-

1) Fresnel, Œuvres, Vol. I, S. 646.

2) Mascart, Traité d'Optiques, Vol. II, S. 466.

3) Brewster, Phil. Trans., 1830. Vgl. auch Mascart, Vol. II, S. 466.

dern durch Verschwinden von  $T$ . Um aber  $T = 0$  zu erhalten, finden wir nach (9) für den Fall der Hauptinzidenz  $1 + \cos 4f = 0$  und demnach  $f = \pm 45^\circ$ . Daraus ergibt sich vermöge (9) (wenn wir  $f = +45^\circ$  annehmen) für die Hauptinzidenz

$$E/S = \operatorname{tg} (n - \pi/4) = k. \quad (10)$$

§ 97'. Die hier eingeführte GröÙe  $k$  ist die Bezeichnung von Jamin, die auch Rayleigh adoptiert hat. Sie ist das Verhältniß der Schwingungsamplitude von reflektierten Schwingungen in der Einfallsebene zur Schwingungsamplitude von Schwingungen senkrecht zu dieser Ebene, wenn das einfallende Licht in einer zur Einfallsebene unter  $45^\circ$  geneigten Ebene polarisiert ist, und wenn der Einfallswinkel ein solcher ist, daß die Phasen der beiden reflektierten Komponenten um  $90^\circ$  voneinander verschieden sind.  $k$  ist positiv oder negativ, je nachdem die Phase der reflektierten Schwingung in der Einfallsebene um  $90^\circ$  gegen die zu ihr senkrechte Komponente zurückbleibt oder ihr voraneilt. Diese GröÙe ist positiv, wenn (wie in jedem wohlverbürgten Falle<sup>1)</sup>) sowohl für durchsichtige wie für metallische Spiegel) die Beobachtung  $n > 45^\circ$  ergibt; sie würde negativ sein, wenn  $n < 45^\circ$  ist.

§ 97''. Der durch unsere Beobachtung, § 97, gefundene Winkel  $n - \pi/4$  wird als das „Hauptazimut“ bezeichnet. Vgl. weiter unten § 158<sup>xvii</sup>. Es war bei den guten Schriftstellern über die Polarisation des Lichtes, insbesondere in ihrer Beziehung zur Spiegung und Brechung, gebräuchlich, die Bezeichnung „Azimut“<sup>2)</sup> dem Winkel zwischen zwei durch die Richtung eines Lichtstrahles gehenden Ebenen beizulegen, beispielsweise dem Winkel zwischen der Einfallsebene und der Schwingungsebene geradlinig polarisierten Lichtes. Als „Hauptazimut“ für Spiegung an irgendeiner polierten Fläche definiere ich den Winkel zwischen der Schwingungsebene polarisierten Lichtes, das mit der Hauptinzidenz einfällt, und der Einfallsebene, bei der das reflektierte Licht zirkularpolarisiert ist. Es gibt eine, und nur eine, Hauptinzidenz für jeden bekannten Spiegel, abgesehen von der inneren Reflexion im Diamant und in andern Substanzen, deren Brechungsindex 2,414 übersteigt, die drei Hauptinzidenzen besitzen (vgl. § 158''' unten). Die Anzahl ist ihrem Wesen nach ungerade; hierauf gründet sich die Theorie der Polarisation von Licht durch Spiegung.

§ 98. Die Schwingungsebene des einfallenden Lichtes ist gegen die Einfallsebene unter dem Winkel  $n - 45^\circ$  geneigt, die für die Hauptinzidenz die Eigenschaft hat, die beiden Komponenten des reflektierten Lichtes gleich zu machen und demnach das Licht in zirkularpolarisiertes zu verwandeln. Wie auch der Fresnelsche Rhombus gedreht werden mag, zirkularpolarisiertes Licht, das in ihn eingefallen ist, verläßt ihn planpolarisiert. Bei der mit den Einzelheiten in den §§ 90–94 beschriebenen Beobachtung wird er so gedreht,

1) Vgl. Jamin, Cours de Physique, Vol. II, S. 694, 695; ebenso weiter unten §§ 105, 154, 158<sup>v</sup>, 159'', 179, 182.

2) Dies ist, wenn richtig verstanden, sehr passend, obwohl es nicht ganz korrekt ist. Azimut ist in der Astronomie seinem Wesen nach ein Winkel in einer Horizontalebene oder ein Winkel zwischen zwei Vertikalebene. Ein Leser, der mit der Astronomie vollständig vertraut ist, würde natürlich meinen, daß dies darunter zu verstehen ist, wenn ein Schriftsteller über Optik, der von der Reflexion an einem horizontalen Spiegel spricht, den Ausdruck „Hauptazimut“ anwendet.

daß die Schwingungsebene des aus ihm austretenden Lichtes senkrecht zu der festgelegten Schwingungsebene von  $N_2$  ist. Demgemäß kommen wir auf den Gedanken, daß eine vorteilhafte Abänderung dieser Einzelheiten die folgende sein möchte: den Fresnelschen Rhombus mit seinen Hauptebenen unter  $45^\circ$  gegen die Reflexionsebene festzuhalten und  $N_2$  so zu montieren, daß es sich frei um die Richtung des aus dem Fresnelschen Rhombus austretenden Lichtes drehen kann. Abwechselnde Drehungen von  $N_2$  und  $N_1$  liefern dann das gewünschte Auslöschen für irgendeinen Einfallswinkel. Man nehme  $f = 0$  in (1), (2), (3), (4), woraus sich  $GOF = 45^\circ$  in Fig. 61a ergibt. Dann sei  $n_2$  der Winkel (in Richtung des Uhrzeigers in der abgeänderten Fig. 61a) zwischen  $OF$  und  $ON_2$ , und es werde gesetzt  $n = \frac{1}{4}\pi + \alpha$  in Fig. 61b. Eliminiert man dann  $G$  und  $g$  aus (3), (4) mittels (8) und geht wie in § 93 vor, so erhält man

$$T/S = \operatorname{tg} \alpha \cos 2n_2; \quad E/S = -\operatorname{tg} \alpha \sin 2n_2; \quad E/T = -\operatorname{tg} 2n_2. \quad (10')$$

Wenn  $\alpha$  positiv ist, ergibt sich aus der Beobachtung  $n_2$  negativ, falls dieser Winkel spitz genommen wird. Für die Hauptinzidenz ergibt er sich zu  $-45^\circ$ , und es wird  $E/S = \operatorname{tg} \alpha$ . Die Phasenverzögerung von  $(E, T)$  hinter  $(S)$  ist  $-2n_2$ . Negativ bedeutet eine Änderung in der dem Uhrzeiger-gang entgegengesetzten Richtung der Fig. 61a. Vgl. § 158<sup>xvii</sup>.

§ 99. Die folgende Tabelle (S. 284) gibt für sechs verschiedene Metalle Bestimmungen der Hauptinzidenzen und Hauptazimute wieder, wie sie von Jamin und Conroy ausgeführt sind, die mit Licht aus verschiedenen Teilen des Sonnenspektrums gearbeitet haben. Diese Tabelle enthält meiner Meinung nach fast alles, was nach bisher angestellten Beobachtungen über Polarisationsanalyse bei an Metallen reflektiertem homogenem Lichte bekannt ist. Die Verschiedenheiten zwischen den beiden Beobachtern für Silber sind wahrscheinlich wirkliche und rühren von den Verschiedenheiten im Zustande der Spiegelflächen zu den Zeiten der Versuche her, die sich durch die Art des Polierens und durch den zeitlichen Verfall erklären. Man sieht, daß für jede Farbe Jamins  $k^2$  zwischen den beiden Werten liegt, die Conroy für dieselbe Platte erhalten hat, nachdem er sie mit Rot und mit Zinnpulver poliert hatte. Andererseits sind alle Hauptinzidenzen bei Conroy für Silber größer als bei Jamin, und zwar um erheblichere Abweichungen für gelbes und blaues Licht als für rotes.

Experimentelle Bestimmungen von  $T/S$  und  $E/S$ , (9) oder (10'), über das ganze Gebiet der Inzidenz, unterhalb und oberhalb der Hauptinzidenz, fehlen noch.

§ 100. Was die durchsichtigen Festkörper und Flüssigkeiten betrifft, so können wir es als sicher betrachten, daß die Fresnelschen Gesetze, die

$$-S = \frac{\sin(i - i')}{\sin(i + i')}, \quad -T = \frac{\operatorname{tg}(i - i')}{\operatorname{tg}(i + i')}, \quad E = 0 \quad (11)$$

ergeben, im ganzen Inzidenzgebiete von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  sehr nahe richtig sind. Es ist aber, wie schon § 95 gesagt ist, noch sehr zu wünschen, daß experimentelle Bestimmungen der Größe  $S/T$  in dem ganzen Gebiete ausgeführt werden, um entweder zu beweisen, daß diese Größe weit weniger von  $\frac{\cos(i + i')}{\cos(i - i')}$  abweicht als von Fresnel selbst und von Brewster bei ihren Versuchen ge-

Jamin <sup>1)</sup>						Conroy <sup>2)</sup>					
Farbe		Silber	Spiegel- metall	Glocken- metall	Stahl	Zink	Farbe	Gold, poliert mit Chamois und	Silber poliert mit	Zinn	
								Rot	Zinn- pulver	Rot	Zinn- pulver
Äußerstes Rot	$\left\{ \begin{array}{l} H.i = 75^{\circ} 45' \\ H.a = 41^{\circ} 37' \\ k^2 = 0,7892 \end{array} \right.$						Rot	$\left\{ \begin{array}{l} 74^{\circ} 21' \\ 40^{\circ} 31' \\ 0,7303 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 73^{\circ} 57' \\ 41^{\circ} 52' \\ 0,8032 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 76^{\circ} 11' \\ 32^{\circ} 43' \\ 0,4127 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 76^{\circ} 29' \\ 43^{\circ} 51' \\ 0,9228 \end{array} \right.$
Orange . . . .	$\left\{ \begin{array}{l} H.i = 72^{\circ} 48' \\ H.a = 40^{\circ} 23' \\ k^2 = 0,7235 \end{array} \right.$										
D-Linie . . . .	$\left\{ \begin{array}{l} H.i = 72^{\circ} 30' \\ H.a = 40^{\circ} 9' \\ k^2 = 0,7117 \end{array} \right.$						Gelb	$\left\{ \begin{array}{l} 72^{\circ} 26' \\ 40^{\circ} 9' \\ 0,7117 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 71^{\circ} 43' \\ 41^{\circ} 14' \\ 0,7683 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 75^{\circ} 27' \\ 35^{\circ} 41' \\ 0,5157 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 74^{\circ} 37' \\ 43^{\circ} 22' \\ 0,8922 \end{array} \right.$
E " . . . .	$\left\{ \begin{array}{l} H.i = 71^{\circ} 30' \\ H.a = 40^{\circ} 19' \\ k^2 = 0,7201 \end{array} \right.$										
F " . . . .	$\left\{ \begin{array}{l} H.i = 69^{\circ} 34' \\ H.a = 39^{\circ} 46' \\ k^2 = 0,6926 \end{array} \right.$						Blau	$\left\{ \begin{array}{l} 68^{\circ} 31' \\ 33^{\circ} 54' \\ 0,4516 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 67^{\circ} 10' \\ 35^{\circ} 40' \\ 0,5151 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 73^{\circ} 19' \\ 39^{\circ} 28' \\ 0,6780 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 71^{\circ} 33' \\ 43^{\circ} 0' \\ 0,8696 \end{array} \right.$
H " . . . .	$\left\{ \begin{array}{l} H.i = 66^{\circ} 12' \\ H.a = 39^{\circ} 50' \\ k^2 = 0,6959 \end{array} \right.$										

Natriumlicht

74° 17'  
31° 26'  
0,3736

1) Vgl. Mascart, Traité d'Optique Vol. II, S. 539.

2) Proc. R. S. Vol. XXXI. 1880—81, S. 490, 495  
und Vol. XXXV. 1883, S. 33.

funden ist, oder wenn sie merklich von jener Formel abweichen sollte, um die Abweichungen festzustellen. Es ist jedoch sicher, daß bei der Hauptinzidenz die Übereinstimmung mit der Fresnelschen Formel (die, in der Bezeichnung des § 94',  $E=0$  zur Folge hat) äußerst eng ist; aber die sehr kleinen Abweichungen, wie sie von Jamin und Rayleigh bei ihren Versuchen gefunden und durch die in der Tabelle § 105 angegebenen Werte von  $k$  dargestellt wurden, sind wahrscheinlich in Wirklichkeit vorhanden. Eine äußerst genaue Untersuchung über die Übereinstimmung der Hauptinzidenz mit  $\arctg \mu$  — Brewsters Untersuchung betrifft nur eine Schätzung dieser Größe, — eine Untersuchung wie Rayleighs hinsichtlich der Annäherung von  $k$  an Null für reine Wasserflächen — fehlt noch<sup>1)</sup> und ist meines Wissens bisher weder für Wasser noch für einen andern durchsichtigen Körper versucht worden. Vgl. §§ 180, 182 weiter unten.

Bisher haben wir uns, außer in den §§ 81, 84, 86, ausschließlich mit der Naturgeschichte unseres Gegenstandes beschäftigt und haben von seiner mechanischen Theorie gar nicht Notiz genommen; zur Betrachtung dieser wollen wir jetzt übergehen.

§ 101. Die Lehre Greens von einem inkompressiblen elastischen Festkörper, dessen Starrheit zu beiden Seiten einer Zwischenfläche gleich, dessen Dichte aber ungleich ist, durch die die Reflexion und Brechung von Licht erklärt werden soll, führt für Schwingungen, die senkrecht zur Einfallsebene verlaufen (§ 123 weiter unten) genau zu dem Sinusgesetze, das Fresnel für Licht angegeben hat, das in der Einfallsebene polarisiert ist. Andererseits liefert jene Lehre für Schwingungen in der Einfallsebene eine Formel (§§ 104, 105, 146 weiter unten), die nur, wenn der Brechungsindex unendlich wenig von der Einheit verschieden ist, mit dem von Fresnel für Licht, das senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, angegebenen Tangentengesetze übereinstimmt, aber sehr weit von Fresnel und von den Beobachtungsergebnissen in allen den Fällen abweicht, in denen der Brechungsindex hinreichend von der Einheit verschieden ist, um Gegenstand der Beobachtung oder Messung zu werden.

§ 102. Die Figuren 62, 63, 64, verdeutlichen, jede durch eine einzige Kurve (Kurve 1) die vollkommene Übereinstimmung zwischen Green und Fresnel für das Reflexionsgesetz bei verschiedenen Inzidenzen, wenn die Schwingungen (nach Green) senkrecht zur Einfallsebene verlaufen, und durch zwei andere Kurven die große Abweichung, wenn die Schwingungen (nach Green) in der Einfallsebene vor sich gehen.

In jeder Zeichnung gibt:

Kurve 1, für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene (nach Green), das Verhältniß des reflektierten zum einfallenden Lichte gemäß dem Sinusgesetze von Fresnel

1) Die Stelle ist im Original, anscheinend infolge Ausfalls eines Wortes oder einiger Worte, vielleicht auch aus zu starker Elliptizität des Ausdrucks, die der Verfasser liebt, unverständlich, ich kann daher für die Richtigkeit der Wiedergabe nicht bürgen. Der Wortlaut ist: An exceedingly minute scrutiny as to the agreement of the Principal incidence with  $\tan^{-1} \mu$ , Brewsters estimate of it; — a scrutiny such as Rayleigh made relatively to the approach to nullity...“

D. H.

2) Camb. Phil. Soc. Dec. 1837; Greens Collected Papers, S. 246, 258, 267, 268

$$\left[ \frac{\sin(i - i)}{\sin(i + i)} \right]^2,$$

wie es theoretisch von Green auf Grund der Annahme gleicher Starrheiten und ungleicher Dichten in den beiden Medien bewiesen ist.

Kurve 2, für Schwingungen in der Einfallsebene (nach Green), das Verhältnis des reflektierten zu dem einfallenden Lichte gemäß dem Fresnelschen Tangentengesetze

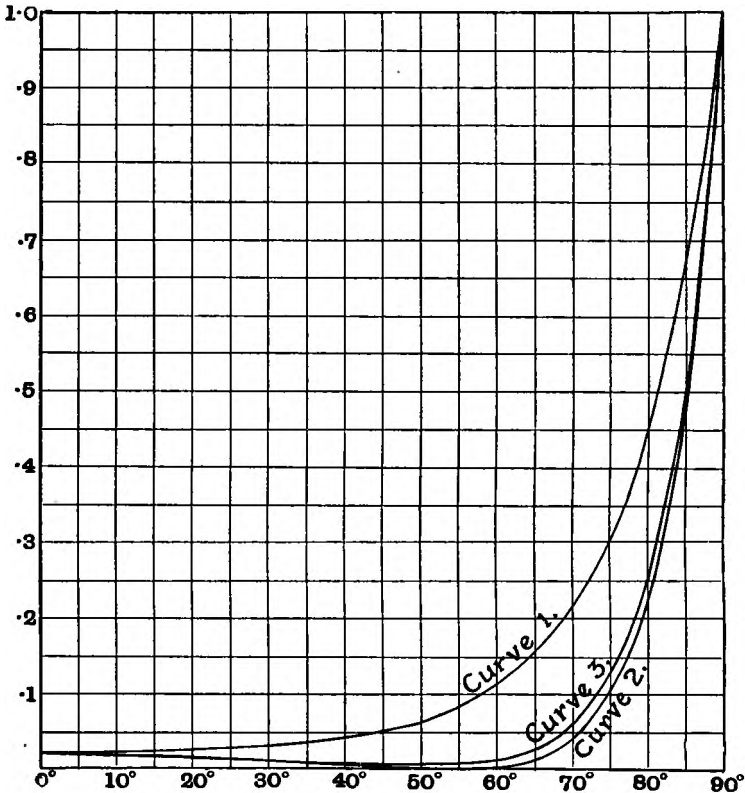


Fig. 62.

$$\left[ \frac{\text{tg}(i - i)}{\text{tg}(i + i)} \right]^2$$

wieder.

Kurve 3, für Schwingungen in der Einfallsebene, das Verhältnis der reflektierten zu der einfallenden Wirkung (Maß der geleisteten Arbeit) für die Flächeneinheit der Wellenebene an, wie es streng von Green (§ 146 weiter unten) für ebene Wellen, die auf eine ebene Zwischenfläche zwischen elastischen Festkörpern fallen, die verschiedene Dichten, aber gleiche Starrheiten zeigen, auf Grund der Annahme abgeleitet ist, daß jeder Festkörper absolut inkompressibel ist, und daß die beiden Festkörper sich an der Zwischenfläche in unmittelbarer Berührung befinden.

In allen Zeichnungen stellen Abszissen von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  „Einfallswinkel“, d. h. Winkel zwischen Wellennormalen und der Trennungsfächennormale oder Winkel zwischen den Wellenebenen und der Trennungsfläche der Körper dar.

§ 103. Die Kurven 2 und 3 der Fig. 62 zeigen für Wasser ( $\mu = 1,334$ ) eine anscheinend gute Übereinstimmung zwischen Fresnel und Green auch für Schwingungen in der Reflexionsebene (nach Green). Allein der Maßstab der Zeichnung ist zu klein, um für Inzidenzen unter  $60^\circ$  oder  $65^\circ$ , insbeson-

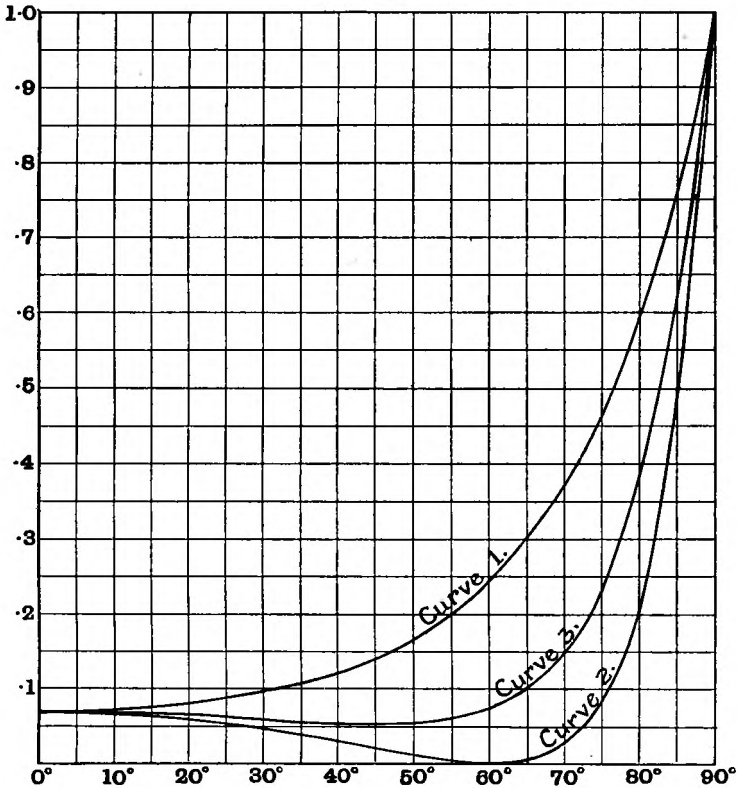


Fig. 63.

dere in der Nähe des Polarisationswinkels,  $53,1^\circ$ , bedeutende Unterschiede hervortreten zu lassen; dieser Übelstand ist in der Zeichnung nach größerem Maßstabe, Fig. 65, beseitigt, die die Kurven 2 und 3 der Fig. 62 in einem 48,5 mal so großen Verhältnis wiedergeben. In dieser Zeichnung ist für Schwingungen in der Einfallsebene die Einheit der Lichtintensität das beim Einfallswinkel Null reflektierte Licht, und nicht, wie in den andern, das einfallende Licht bei der Inzidenz  $i$ . Die Kurve 2 zeigt in den Figuren 62 und 65 für Wasser das vollständige Auslöschen bei einem Einfallswinkel  $\arctg \mu$ , wie er durch die Formel von Fresnel angegeben ist. Kurve 3 (nach der Formel von Green) zeigt für einen etwas kleineren Einfallswinkel ( $50,0^\circ$  statt  $53,1^\circ$ ) ein Intensitätsminimum gleich 0,295 des direkt reflektierten

Lichtes; d. h. nach der Formel von Green ist das direkt vom Wasser reflektierte Licht nur  $3\frac{1}{2}$ mal so stark wie das Licht, welches unter dem Winkel reflektiert wird, der am wenigsten davon liefert.

§ 104. Um zu prüfen, ob Fresnel oder Green der Wahrheit näher kommt, nehme man ein schwarzes japanisches Teebrett, in das so viel Wasser gegossen ist, daß es den Boden bedeckt, und schaue durch ein Nicolsches Prisma nach dem Bilde einer sich im Wasser spiegelnden Kerze. Nach einer

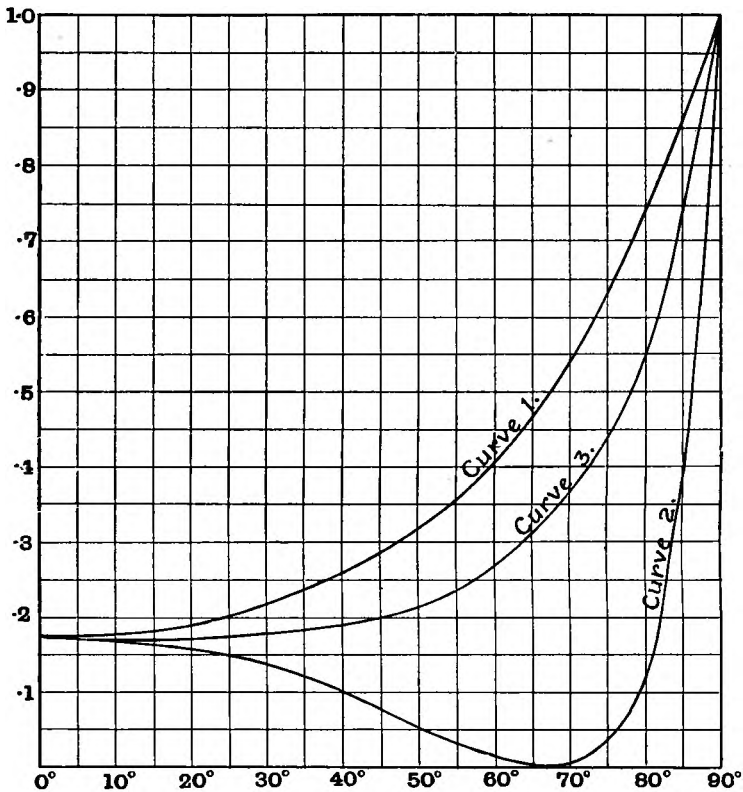


Fig. 64.

halben Minute Probieren findet man leicht eine geeignete Neigung des Lichtes und Orientierung des Nicol, die das liefert, was als Auslöschung des Lichtes erscheint. Um zu prüfen, wie weit das Auslöschen ein vollkommenes ist, kann ein Gehilfe ein Stück schwarzes Tuch zwischen der Kerze und der Wasserfläche abwechselnd heben und senken, wobei er Sorge zu tragen hat, daß er es so weit senkt, das das Bild der Kerze verlöscht wird, wenn es durch das Nicol noch nicht verlöscht ist. Hält man das Nicol fest in der Hand und dreht es, bis es das beste Auslöschen liefert, das man damit erzielen kann, so findet man keinen Unterschied in dem, was man sieht, ob der Schirm unten oder oben ist, das zeigt dann eine dichte Annäherung an ein vollkommenes Auslöschen an. Indem man sich nun ein Urteil über die



Helligkeit des Bildes der Kerze schafft, wenn es bei nahezu normaler Inzidenz durch das Nicol und in Abständen, in denen dieses Bild gesehen werden kann, angeschaut wird, meine ich, kann man sicher schätzen, daß das vom Wasser bei normaler Inzidenz reflektierte Licht wenigstens 500 (und nicht, wie es nach Green sein müßte,  $3\frac{1}{2}$ ) mal so intensiv ist wie das kaum bemerkbare Licht bei größter Annäherung an das Auslöschchen, welches das Nicol bei der Inzidenz unter dem Polarisationswinkel liefert. Und nach genauen

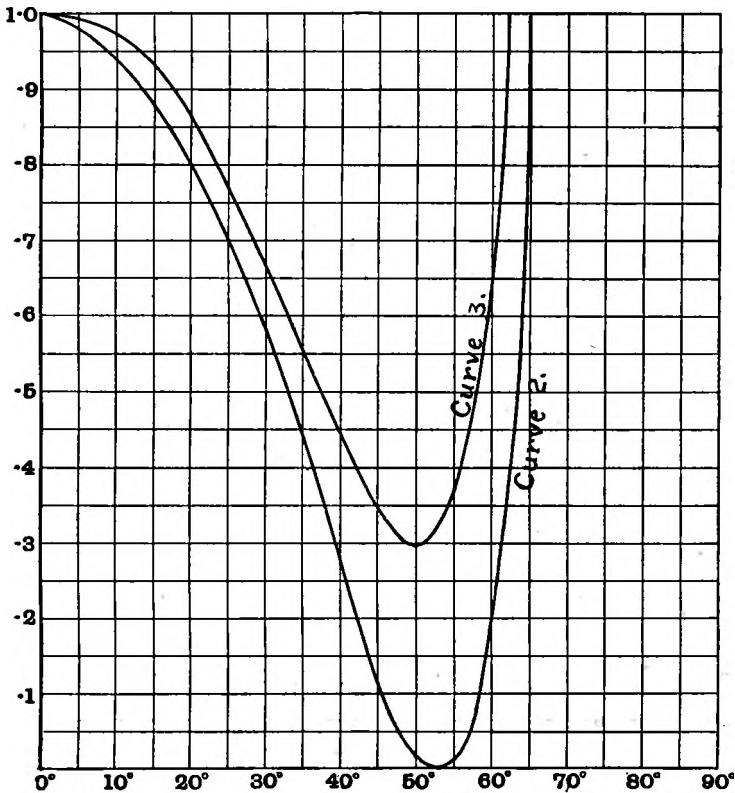


Fig. 65.

Versuchen von Rayleigh (§ 105 weiter unten) wissen wir, daß es 25 000 000 mal so groß ist, wenn die Wasseroberfläche nicht durch Öl oder Schaum oder sonst wie verunreinigt ist. Es wäre nur  $3\frac{1}{3}$  mal so stark, wenn Greens Theorie (ohne Änderung der Hypothese) auf die physikalische Aufgabe anwendbar wäre. Schauen wir auf Fig. 65, so erkennen wir, daß für Wasser die Theorie von Green (Kurve 3) ungemein weit von der Wirklichkeit abweicht, während die Formel von Fresnel bei einem Einfallswinkel von  $53,1^\circ$  vollkommen mit der Wirklichkeit übereinstimmt. Achten wir auf Fig. 62, so sehen wir noch größere Unterschiede zwischen den Kurven 2 und 3 auch bei dem großen Einfallswinkel von  $75^\circ$ , obwohl bei  $90^\circ$  vollkommenes Zusammenlaufen besteht.

§ 105. Weiter zeigt die Kurve 3 in den Figuren 63 und 64, daß für Flintglas Greens Theorie kaum eine Verminderung an reflektiertem Lichte liefert, während sie für Diamant tatsächlich eine Zunahme ergibt, wenn der Einfallswinkel von Null bis  $\arctg \mu$ , dem Brewsterschen Polarisationswinkel, ansteigt. Und doch zeigt eine oberflächliche Beobachtung mit weiter keinem Hilfsmittel als einem einzigen Nicolschen Prisma sowohl für Flintglas als für Diamant eine Abschwächung der Helligkeit von der direkt reflektierten Lichtes bis auf den Grad fast vollkommener Dunkelheit bei einer Inzidenz von  $\arctg \mu$ , wenn bei dem Studium der Reflexion das Nicol so gehalten wird, daß seine Polarisationssebene senkrecht zur Reflexionsebene steht (in andern Worten, daß das hindurchgehende Licht seine Schwingung in der Reflexionsebene hat).

Eine leicht und bequem zu beobachtende Erscheinung, die die Polarisation durch Reflexion betrifft, ist die folgende: — Man dreht ein Nicol so, daß es die in der Reflexionsebene verlaufenden Schwingungen hindurchläßt, dann sinkt die Stärke des reflektierten Lichtes durch Vergrößern des Einfallswinkels bis  $\arctg \mu$ , bis nahe zu Null, und steigt hierauf bis zur Totalität, wenn man den Einfallswinkel weiter bis  $90^\circ$  steigert.

Ein anderes Verfahren ist das folgende: Licht, das bei einem konstanten Einfallswinkel reflektiert wird, schwächt sich von einer größten Stärke auf die kleinste ab, indem man das Nicol so um  $90^\circ$  um seine Achse dreht, daß die Schwingungsrichtung der hindurchgehenden Strahlen nicht mehr zur Reflexionsebene senkrecht ist, sondern in dieser Ebene liegt. Die Abschwächung vom Maximum zum Minimum ist die Differenz zwischen den Ordinaten zweier Kurven, die für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene und für Schwingungen in der Einfallsebene die Intensität des reflektierten Lichtes für verschiedene Einfallswinkel darstellen. Diese beiden Kurven werden für alle durchsichtigen Körper aller Wahrscheinlichkeit nach fast vollkommen mit dem Fresnelschen Sinusgesetz und dem Tangentengesetze übereinstimmen (Kurven 1 und 2 der Zeichnungen). Wir besitzen jedoch wenig oder keine genau gemessenen vergleichenden Beobachtungen außer für Einfallswinkel, die dem Polarisationswinkel sehr nahe kommen. Nach einem Versuchsverfahren,

Substanz	$\mu$	Polarisationswinkel $\arctg \mu$	Verhältnisse der Schwingungsamplituden und Stärken reflektierten Lichtes, bei gleichen einfallenden Strahlen die in der Einfallsebene und senkrecht zu ihr schwingen	
			$k$	$k^2$
„Durchsichtiger Arsenschwefel“ (Realgar) . . . . .	2,454	67,8°	+ 0,0850	1/138
„Durchsichtige Blende“ (Zinksulfid) . . . . .	2,371	67,1°	+ 0,0420	1/567
Diamant . . . . .	2,434	67,7°	+ 0,0190	1/2770
Flintglas . . . . .	1,714	59,7°	+ 0,0180	1/3086
„Glas“ . . . . .	1,487	56,1°	+ 0,0060	1/27778
Flußspat . . . . .	1,441	55,2°	— 0,0084	1/14172
Absoluter Alkohol . . . . .	1,366	53,8°	+ 0,00208	1/231160
Wasser (Jamin) . . . . .	1,334	53,1°	— 0,00577	1/30030
Wasser, mit besonders gereinigter Oberfläche (Rayleigh) . .	1,334	53,1°	+ 0,0002	1/25000000

das von dem in § 95 oben angedeuteten sehr verschieden ist, fand Jamin<sup>1)</sup> für acht Substanzen, deren Brechungsindizes zwischen 2,454 und 1,334 lagen, die in der vorstehenden Tabelle wiedergegebenen Resultate; zu diesen kommt noch eine von Rayleigh für Wasser, dessen Oberfläche sorgfältig von Öl oder Schaum oder sonst einer andern Substanz als Wasser und Luft vollständig befreit war, ausgeführte Messung hinzu. Die größte Zahl in der letzten Reihe  $1/138$  wäre in der Zeichnung Fig. 65 kaum bemerkbar; und überhaupt wäre keine solche für die übrigen sieben Substanzen ohne eine starke Vergrößerung des Maßstabes bemerkbar.

§ 106. Obwohl diese Resultate sich nur auf das Verhältnis der Ordinaten der Kurve 1 zu denen der Kurve 2 in jedem Falle für einen bestimmten Einfallswinkel beziehen, und die absoluten Beträge von Einheitsmengen auffallenden Lichtes nicht berühren, können wir dennoch als fast vollkommen sicher oder wenigstens (§§ 100, 125) hochwahrscheinlich schließen, daß Kurve 1 (Fresnels Sinusgesetz) und Kurve 2 (Fresnels Tangentengesetz), beide für alle andern Inzidenzen nahezu ebenso richtig sind wie für die kritischen Inzidenzen, für die die Beobachtungen ausgeführt sind. Wir werden in der Tat (§§ 125, 133 weiter unten) bei der mechanischen Theorie, zu der wir übergehen, sehen, daß das Sinusgesetz für Schwingungen, die senkrecht zur Einfallsebene verlaufen, auf Grund der Annahme, daß die Starrheiten in den beiden Medien gleich und die Dichten ungleich sind, vollkommen genau ist, und daß die einzige Verbesserung an Greens theoretischen Forderungen, die das reflektierte Licht, dessen Schwingungen in der Einfallsebene verlaufen, bei dem Winkel  $\arctg \mu$  zum angenäherten Verschwinden führt, eine entsprechend enge Annäherung an Fresnels Tangentengesetz in dem ganzen Gebiete der Inzidenzen von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  liefert.

(Die folgenden §§ 107—111 sind einer von mir im September und Oktober 1888 geschriebenen und im Philosophical Magazine für 1888, zweites Halbjahr veröffentlichten Abhandlung entnommen.)

§ 107. „Seit der ersten Veröffentlichung von Cauchys Arbeit über den Gegenstand im Jahre 1830 und derjenigen Greens im Jahre 1837 sind von vielen Forschern viele Versuche gemacht worden, eine mechanische Grundlage für Fresnels Gesetze der Spiegelung und Brechung von Licht zu gewinnen, bisher aber sämtlich ohne Erfolg. Bei der Wiederaufnahme meiner eigenen Bemühungen seit der Versammlung der British Association in Bath habe ich zunächst festgestellt, daß Annahmen über Konstitution von Substanz und Äther entsprechend einer nichtzähen Flüssigkeit, die zwischen den Poren eines inkompressiblen, übrigens aber wie ein Schwamm gestalteten Festkörpers hindurchgeht, die Abweichung von Fresnels Reflexionsgesetz für Schwingungen in der Einfallsebene nicht vermindern, sondern im Gegenteil vergrößern. Nachdem ich so nach vielen verschiedenen vorangegangenen

1) Ann. de Chimie et de Physique, 1850, Vol. XXIX, S. 303 und 1851, Vol. XXXI, S. 179; und S. 174 auf S. 180, 181 verbessert. (Eine Verwechslung von Cauchys  $\varepsilon$  und Jamins  $k$  ist in den Abhandlungen von Jamin äußerst störend. Nach vieler in unangenehmer Weise auf den Versuch, den Sinn der sich widersprechenden Tabellen der Resultate zu verstehen, verwendeter Zeit habe ich das, was mir als wahrscheinlich richtige Darstellung erschien, in der zu § 105 gehörigen Tabelle mitgeteilt.)

Bemühungen, die in Verbindung mit den Vorbereitungen für meine Baltimore-Vorlesungen zu jener Zeit vor vier Jahren begonnen, hatten scheinbar alle Möglichkeiten bei einem inkompressiblen elastischen Festkörper erschöpft hatte, ohne den Glauben an eine Lichttheorie und an die Dynamik zu verlieren, und da ich wußte, daß die Verdichtungs-Verdünnungswelle jeden Festkörper mit positiver Kompressibilität als Grundannahme ungeeignet macht<sup>1)</sup>, erkannte ich, daß nichts übrigblieb als ein Festkörper von einer derartigen negativen Kompressibilität, daß sie die Geschwindigkeit der Verdichtungs-Verdünnungswelle zur Null herabsinken oder sehr klein macht. So prüfte ich diese Annahme und fand sofort, daß sie unter Beibehalten anderer Voraussetzungen, die sich von denjenigen Greens nicht unterscheiden, Fresnels 'Tangentengesetz' für Schwingungen in der Einfallsebene und sein 'Sinusgesetz' für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene genau befriedigt. Ich bemerkte dann, daß homogener luftfreier Schaum, der am Zusammenfallen durch Adhäsion an ein Gefäß gehindert wird, dessen Wandungen nach allen Richtungen unendlich fern sind, genau die Bedingung der Geschwindigkeit Null für eine Verdichtungs-Verdünnungswelle erfüllt und dabei eine bestimmte Starrheit und Formelastizität und eine bestimmte Geschwindigkeit für eine Drillungswelle besitzt, die leicht mit einer guten Annäherung an vollkommene Genauigkeit berechnet werden kann."

§ 108. „Green hebt in seiner ursprünglichen Abhandlung ‚On the Reflexion and Refraction of Light‘ hervor, daß man die Verdichtungs-Verdünnungswelle auf zwei Arten loswerden kann, 1. indem ihre Geschwindigkeit unendlich klein ist, 2. indem ihre Geschwindigkeit unendlich groß ist. Jedoch läßt er die erste Annahme kurz fallen und bekennt sich zur letzteren in folgendem Satze: ‚Und es ist nicht schwer zu beweisen, daß das Gleichgewicht unseres Mediums instabil wäre, außer wenn  $A/B > 4/3$  ist. Wir werden demgemäß zu der Annahme des letzteren Wertes von  $A/B$ <sup>2)</sup> gedrängt‘, ( $\infty$ ), und so zu der Annahme, daß im Lichtäther die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen, die sich in Normal-Schwingungen bewegen, sehr groß im Vergleich mit der gewöhnlichen Lichtes ist.‘ So entstand die ‚Gallerte‘-Theorie des Äthers, die vor fünfzig Jahren das Feld gegen alle theoretischen Angreifer behauptet und gleichwohl auch jetzt ihr Fundament noch nicht gut begründet hat.“

§ 109. „Wir wollen aber Greens Bemerkung über die Unstabilität näher untersuchen. In der elementaren Mechanik wird jede mögliche unendlich kleine Bewegung des Mediums als in Wellenbewegung unter Konstanthaltung des Volumens und in Verdichtungs-Verdünnungswellen zerlegbar nachgewiesen. Sicher also; besteht eine wirkliche, bestimmte Fortpflanzungsgeschwindigkeit für jede der beiden Arten Wellenbewegung, so muß das Gleichgewicht stabil sein. Und so finde ich, daß gerade Greens eigene Formel<sup>3)</sup> beweist, daß dies der Fall ist, vorausgesetzt, daß wir entweder annehmen, der Äther erstreckte sich über den ganzen unbegrenzten Raum, oder daß ein festes Gefäß vorhanden ist, daß ihn einschließt. Eine begrenzte Menge von Greens homogenem Medium, die sich im Raume

1) Greens Collected Papers, S. 246.

2)  $A$  und  $B$  sind die Quadrate von Geschwindigkeiten der Verdichtungs- und der Drillungswellen, wenn man die Dichte des Mediums der Einheit gleichsetzt.

3) Collected Papers S. 253, Formel (C).

selbst überlassen wird, würde dieselbe Art Stabilität oder Unstabilität besitzen, je nachdem  $A/B > 4/3$  oder  $A/B < 4/3$  ist. In der Tat ist  $A - 4/3 B$  nach der Bezeichnung von Green das, was ich den ‚Raummodul‘<sup>(1)</sup> genannt und mit  $k$  bezeichnet habe (nämlich die unendlich kleine Druckänderung geteilt durch die durch sie hervorgerufene unendlich kleine Änderung der Raumeinheit; oder der reziproke Wert dessen, was gemeinhin als ‚die Kompressibilität‘ bezeichnet wird).  $B$  ist das, was ich die ‚Starrheit‘ als Abkürzung für ‚Starrheitsmodul‘ bezeichnet habe, eine Größe, die wir ihrem Wesen nach als positiv betrachten müssen. So ist also unter Greens Grenze  $A/B > 4/3$  einfach eine positive Kompressibilität oder ein positiver Raummodul zu verstehen<sup>2)</sup>; und die Art der Instabilität, die ihn vor der Zulassung jeder Annahme, die  $A/B < 4/3$  macht, abgeschreckt hat, ist das spontane Sichzusammenziehen einer begrenzten Menge, wenn sie in einem Raume sich selbst überlassen wird, der unendlich wenig kleiner, oder die spontane Ausdehnung, wenn sie in einem Raume, der unendlich wenig größer ist als der für das Gleichgewicht nötige Raum. Diese Unstabilität geht aber vermöge der Starrheit des Mediums in Stabilität über, wenn man die Grenzfläche des Mediums an ein starres einschließendes Gefäß heftet. Wieviel kleiner  $A/B$  als  $4/3$  sein kann, wollen wir jetzt untersuchen, und wir werden, wie wir schon vorweg angegeben haben, finden, daß für die Stabilität nur notwendig ist, daß  $A/B$  positiv ist.“

§ 110. „Fassen wir die Formel (C) von Green ins Auge. Um aber das Energieprinzip, das sie ausdrückt, deutlicher hervortreten zu lassen (er benutzt eben bloß nicht die Worte ‚Energie‘ oder ‚Arbeit‘!), soll  $W$  die Menge Arbeit bezeichnen, die für die Raumeinheit der Substanz erforderlich ist, um sie aus ihrem ungezwungenen Gleichgewichte in einen Gleichgewichtszustand überzuführen, in dem Materie, die sich ursprünglich in  $(x, y, z)$  befand, sich in  $(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$  befindet. Dabei seien  $\xi, \eta, \zeta$  solche Funktionen von  $x, y, z$ , daß jeder von den neun Differentialkoeffizienten  $\partial \xi / \partial x, \partial \xi / \partial y, \dots, \partial \eta / \partial x, \dots$  usw. eine unendlich kleine Zahl ist. Dann haben wir

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2} \left\{ A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \right. \\ \left. + B \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right] \right. \\ \left. - 4 B \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Dies ist, abgesehen von der Bezeichnung, dasselbe wie die in Thomson und Taits Theoretischer Physik § 693 (7) angegebene Formel für die Energie.“

§ 111. „Um die gesamte Arbeit zu finden, die erforderlich ist, um die gegebene Menge Festkörper aus dem ungezwungenen Gleichgewichte in den Deformationszustand  $(\xi, \eta, \zeta)$  überzuführen, müssen wir  $\iiint dx dy dz W$  über den Raum des starren einhüllenden Gefäßes bilden. Wir greifen zunächst die letzte Reihe des Ausdruckes (1) heraus, integrieren jedes der drei Glieder

1) Encyclopaedia Britannica, Artikel „Elasticity“; wiederabgedruckt in Vol. III meiner Collected Papers.

2) Diese physikalische Stabilitätsbedingung hat bekanntlich namentlich in der Thermodynamik höchste Bedeutung. D. H.

nacheinander zweimal in der allgemein bekannten Weise partiell mit der Bedingung, daß an der Grenzfläche  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ ,  $\zeta = 0$  ist, und transformieren damit den Faktor in der letzten Klammer in<sup>1)</sup>

$$\iiint dxdydz \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right).$$

Durch Addition dieses Integrals mit seinem Faktor  $-4B$  zu den übrigen Gliedern von (1) unter dem Zeichen  $\iiint dxdydz$  finden wir schließlich

$$\iiint dxdydz W = \frac{1}{2} \iiint dxdydz \left\{ A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + B \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}. \quad (2)$$

Dies zeigt<sup>2)</sup>, daß positive Arbeit erforderlich ist, den Festkörper aus seinem ungezwungenen Gleichgewichtszustande in den Zustand  $(\xi, \eta, \zeta)$  überzuführen, und demnach ist sein ungezwungener Gleichgewichtszustand stabil, wenn  $A$  und  $B$  zugleich positiv sind, wie klein auch diese Größen sein mögen.“

§ 112. Die direkt aus den Gleichgewichtsgleichungen abgeleiteten Bewegungsgleichungen des allgemeinen elastischen Festkörpers sind, wie wir in der zweiten Vorlesung S. 19f. gefunden haben, wenn mit  $\varrho$  die Dichte bezeichnet wird,

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \\ \varrho \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial z} \\ \varrho \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

wo mit  $\xi, \eta, \zeta$  (wie oben nach Green) Verschiebungen, mit  $P, Q, R$  normale Zugkomponenten (für die Flächeneinheit) an den zu  $x, y, z$  senkrechten Zwischenflächen und mit  $S, T, U$  die tangentialen Zugkomponenten in folgender Weise bezeichnet sind:

$$\left. \begin{aligned} S &\left\{ \begin{array}{l} = \text{Zug parallel zu } y \text{ auf die zu } z \text{ senkrechte Fläche} \\ = \text{ " " " } z \text{ " " " } y \text{ " " " } \end{array} \right. \\ T &\left\{ \begin{array}{l} = \text{ " " " } z \text{ " " " } x \text{ " " " } \\ = \text{ " " " } x \text{ " " " } z \text{ " " " } \end{array} \right. \\ U &\left\{ \begin{array}{l} = \text{ " " " } x \text{ " " " } y \text{ " " " } \\ = \text{ " " " } y \text{ " " " } x \text{ " " " } \end{array} \right. \end{aligned} \right\}^3) \quad (4)$$

§ 113. Für einen isotropen Festkörper haben wir in der zweiten Vorlesung (S. 20) gefunden

1) S. 199 Gl. (76). D. H.  
 2) Die Formel enthält, wie man sieht, die Energie der Raumänderung und die Energie der Drillung. D. H.  
 3) Wegen der Kirchhoffschen Bezeichnungen vgl. S. 17. D. H.

$$S = n \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \right); \quad T = n \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right); \quad U = n \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \quad (5)$$

$$P = \left( k - \frac{2}{3}n \right) \delta + 2n \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad Q = \left( k - \frac{2}{3}n \right) \delta + 2n \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad R = \left( k - \frac{2}{3}n \right) \delta + 2n \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (6)$$

wo gesetzt ist

$$\delta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (7)$$

Bei Anwendung dieser Werte für  $S, T, U, P, Q, R$  in (3) ergibt sich (Vierzehnte Vorlesung S. 151)

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \left( k + \frac{1}{3}n \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} + n \nabla^2 \xi \\ \varrho \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \left( k + \frac{1}{3}n \right) \frac{\partial \delta}{\partial y} + n \nabla^2 \eta \\ \varrho \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \left( k + \frac{1}{3}n \right) \frac{\partial \delta}{\partial z} + n \nabla^2 \zeta \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

§ 114. Bildet man für die erste von den Gleichungen (8)  $\partial/\partial x$ , für die zweite  $\partial/\partial y$  und für die dritte  $\partial/\partial z$  und addiert, so erhält man

$$\varrho \frac{d^2 \delta}{dt^2} = A \nabla^2 \delta, \quad (9)$$

wo

$$A = k + \frac{4}{3}n \quad (10)$$

gesetzt ist; diese Größe ist dabei das Greensche „ $A$ “, wie es in den obigen §§ 108, 111 benutzt ist.

Wir setzen jetzt<sup>1)</sup>

$$\xi_1 = \xi - \frac{\partial}{\partial x} \nabla^{-2} \delta; \quad \eta_1 = \eta - \frac{\partial}{\partial y} \nabla^{-2} \delta; \quad \zeta_1 = \zeta - \frac{\partial}{\partial z} \nabla^{-2} \delta, \quad (11)$$

was die Bedingung

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

einschließt. So finden wir nach den Gleichungen (8), (9) und (10)

$$\varrho \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = n \nabla^2 \xi_1; \quad \varrho \frac{d^2 \eta_1}{dt^2} = n \nabla^2 \eta_1; \quad \varrho \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} = n \nabla^2 \zeta_1. \quad (13)$$

Die Gleichungen (9), (12) und (13) zeigen, daß jede mögliche unendlich kleine Verschiebung aus Mustern der Verdichtungs-Verdünnungswelle (9) und solchen der Drillungswelle (13), die nebeneinander bestehen, zusammengesetzt ist; und sie zeigen weiter, daß die Verschiebung in der Verdichtungs-Verdünnungswelle ohne Rotation ist, da wir aus (11) entnehmen, daß ein vollkommen allgemeiner Ausdruck für ihre Komponenten  $\xi - \xi_1, \eta - \eta_1, \zeta - \zeta_1$ , wenn wir diese Größen mit  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$  bezeichnen, ist:

1)  $\nabla^{-2}$  bedeutet die entgegengesetzte Operation wie  $\nabla^2$ , so daß beide, nacheinander angewendet, sich aufheben, demnach ist  $\varrho \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \nabla^{-2} \delta \right) = \varrho \frac{\partial}{\partial x} \left( \nabla^{-2} \frac{d^2 \delta}{dt^2} \right) = A \frac{\partial}{\partial x} \nabla^{-2} \nabla^2 \delta$  (nach 9)  $= A \frac{\partial \delta}{\partial x}$  usf. D. H.

$$\xi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \eta_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \zeta_2 = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (14)$$

aus welchen Gleichungen nach (11)  $\psi$ , wenn  $\delta$  bekannt ist, bestimmt wird durch<sup>1)</sup>

$$\nabla^2 \psi = \delta. \quad (15)$$

Hieraus folgt, da  $\delta$  die Gleichung (9) erfüllt<sup>2)</sup>

$$\varrho \frac{d^2 \psi}{dt^2} = A \nabla^2 \psi; \quad (16)$$

und wir sehen schließlich, daß die allgemeinste Lösung der Gleichungen für unendlich kleine Bewegungen gegeben ist durch

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta = \eta_1 + \eta_2; \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 \quad (17)$$

mit der Bedingung, daß die Größen  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  die Gleichungen (12) und (13) und die  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$  die Gleichungen (14) und (16) befriedigen (S. 32 ff).

§ 115 Die allgemeinen Lösungen der Gleichungen (11) und (12) für ebene Wellen gleichbleibenden Volumens und der Gleichungen (14) und (16) für ebene Verdichtungs-Verdünnungswellen sind (wie sich leicht durch Differenzieren beweisen läßt) die folgenden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi_1}{A} = \frac{\eta_1}{B} = \frac{\zeta_1}{C} = f \left( t - \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z}{u} \right), \\ u = \sqrt{\frac{n}{\varrho}}, \text{ und } \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Ferner

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi_2}{\alpha_2} = \frac{\eta_2}{\beta_2} = \frac{\zeta_2}{\gamma_2} = H f \left( t - \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z}{v} \right), \\ v = \sqrt{\frac{k + \frac{1}{2}n}{\varrho}}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Hier ist  $H$  eine Konstante, und zwar gleich der Verschiebung in der Verdichtungs-Verdünnungswelle, wenn  $f=1$  ist. Weiter sind auch  $A, B, C$  Konstanten, und zwar gleich den  $x, y, z$ -Komponenten der von der Welle konstanten Volumens herrührenden Verschiebung, wenn  $f=1$  ist. Sodann bedeuten  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  die Richtungskosinus der Normalen der Wellenebenen<sup>3)</sup> der beiden Wellen. Endlich geben  $u, v$  die Fortpflanzungsge-

1) Poissons allgemein bekannter Fundamentalsatz der elementaren mathematischen Behandlung einer umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung variierenden Kraft sagt uns, daß, wenn  $\delta$  bekannt oder willkürlich im ganzen Raume gegeben ist,  $\nabla^{-2} \delta$  bestimmt ist; es ist dies nämlich das Potential einer gedachten Materieverteilung, deren Dichte gleich  $\frac{-\delta}{4\pi}$  ist.

2) Man hat nach (15)  $\psi = \nabla^{-2} \delta$ , also  $\frac{d^2 \psi}{dt^2} = \nabla^{-2} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = \frac{A}{\varrho} \nabla^{-2} \nabla^2 \delta$   
[nach (9)] =  $\frac{A}{\varrho} \delta = \frac{A}{\varrho} \nabla^2 \psi$  [nach (15)]. D. H.

3) Unter der „Wellenebene“ einer ebenen Welle verstehe ich irgendeine Ebene, die durch Partikel geht, die sich sämtlich in der gleichen Bewegungs-



schwindigkeiten der Welle gleichen Volumens und der Verdichtungs-Verdünnungswelle. In der Verdichtungs-Verdünnungswelle liegt die Verschiebung der Schwingungsrichtung in der zur Wellenebene normalen Richtung ( $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ).

§ 116. Für das Problem der Spiegelung und Brechung an einer Fläche zwischen zwei Medien, die wir (nach Green) das obere und das untere Medium nennen wollen, sei die Zwischenfläche eine horizontale Ebene, die wir zur  $XOZ$ -Ebene wählen. Die Wellenebene sei senkrecht zu  $XOY$ . Dann wird in den Gleichungen (18) und (19)  $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$ . Der Kürze wegen wollen wir öfters die Ebene der Inzidenz und der Brechung mit  $P$  bezeichnen.

I. § 117. Beginnen wir mit Schwingungen senkrecht zu  $P$ , also parallel zur Zwischenebene, so haben wir  $A = 0, B = 0$ ; und (18) geht für eine einfallende Welle, wie sie in Fig. 66 dargestellt ist, über in

$$\xi = Cf(t - ax + by), \quad (20)$$

wo gesetzt ist

$$a = \frac{\sin i}{u}, \quad b = \frac{\cos i}{u}, \quad \text{und wo } u = \sqrt{\frac{n}{\rho}} \text{ ist.} \quad (21)$$

$OZ$  ist senkrecht zur Zeichnung nach dem Auge des Lesers gerichtet.

Die Wellenebenen der einfallenden ( $J$ ), der reflektierten ( $J'$ ) und der gebrochenen ( $J''$ ) Welle sind in Fig. 66 für den besonderen Fall einer Inzidenz unter  $30^\circ$  und den Brechungsindex für Flintglas  $= 1,724$ , der  $i = 16,9^\circ$  macht, angedeutet.

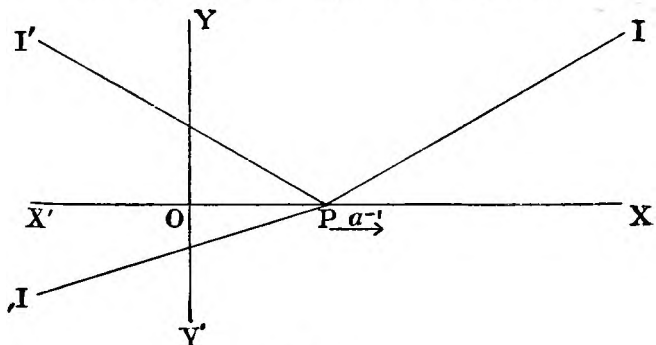


Fig. 66.

Für die reflektierte und die gebrochene Welle können wir bzw.  $180 - i$  und  $i'$  an Stelle von  $i$ , und  $C', C$  an Stelle von  $C$  setzen. Es ist

phase befinden. Beispielsweise kann in sinusartigen ebenen Wellen als „Wellenebene“ eine von den Ebenen gewählt werden, die Partikel enthält, welche keine Verschiebung, sondern maximale Geschwindigkeit besitzen, oder es kann als solche eine Ebene gewählt werden, deren Partikel maximale Verschiebung, aber keine Geschwindigkeit besitzen. Für eine beliebige Impulswelle (wie sie im Texte durch die Funktion  $f$  ausgedrückt ist, die in einem bestimmten Gebiete willkürlich, für alle Argumente zu beiden Seiten dieses Gebietes aber Null ist) kann als „Wellenebene“ eine beliebige gewählt werden, die durch in derselben Bewegungsphase befindliche Partikel geht. In diesem Falle gibt es eine Wellenfront und einen Wellenrücken; bei der sinusartigen Welle hat man weder eine Vorder- noch eine Hinterfläche. Ich habe deswegen das Wort „Wellenebene“ dem allgemein (doch nicht bei uns. D. H.) gebräuchlichen Worte „Wellenfront“ vorgezogen.

$$\frac{\sin i}{u} = \frac{\sin i}{u}; \text{ dabei ist } u = \sqrt{\frac{n}{\rho}}. \quad (22)$$

Die Größen  $C'$  und  $C$  sind durch die weiter unten folgende Gleichung (28) gegeben. So finden wir für die Verschiebungen in den beiden Medien, die von den drei Wellen herrühren

$$\xi + \xi' = Cf(t - ax + by) + C'f(t - ax - by) \text{ im oberen Medium (23)}$$

$$\xi = C'f(t - ax + by) \text{ im unteren Medium, (24)}$$

wo

$$b = \frac{\cos i}{u} \text{ mit der Bedingung } u = \sqrt{\frac{n}{\rho}} \quad (25)$$

ist;  $b$  und  $u$  sind positiv. Wir beachten, daß  $y$  im unteren Medium negativ ist, und bemerken, daß man vermöge der Gleichungen (21), (22), (25) hat

$$b^2 = u^{-2} - a^2, \quad b^2 = u^{-2} - a^2. \quad (25')$$

Die einzige geometrische Bedingung, die an der Zwischenfläche zu erfüllen ist, wird

$$\xi + \xi' = \xi \text{ für } y = 0;$$

dies ergibt

$$C + C' = C. \quad (26)$$

Die einzige mechanische Bedingung wird gefunden, wenn man § 113 (5) beachtet. Sie ist

$$S = S \text{ für } y = 0;$$

und dies ergibt

$$nb(C - C') = n_b b C. \quad (27)$$

Hieraus findet man

$$C' = \frac{bn - b_n}{b_n + bn} C, \quad C = \frac{2bn}{b_n + bn} C. \quad (28)$$

§ 118. Die Bedeutung dieser Formeln ist klar, wenn die mit den verschiedenen Symbolen bezeichneten Größen sämtlich reell sind. Aber in einem wichtigen und hochinteressanten Falle einer reellen einfallenden Welle, die durch das erste Glied der Gleichung (23) dargestellt ist, werden, obwohl alle einzelnen Größen reell sind, die Ausdrücke (24) und (25) imaginär, da  $b$  imaginär ist. Dieser Fall tritt ein, wenn

$$a^{-1} < u \text{ ist;} \quad (29)$$

oder, in Worten ausgedrückt, wenn die Geschwindigkeit des Ziehens ebener Wellen an der Zwischenebene kleiner ist als die Geschwindigkeit der Welle im unteren Medium. In diesem Falle wird  $a^2 - u^{-2}$  positiv; bezeichnet man den Wert dieser Größe mit  $q^2$ , so kann man setzen  $b = -iq^1$  wo  $q$  reell ist, und zwar positiv vermöge der Bemerkungen in § 118. So geht (28) über in

1) Vgl. die Fußnote zu § 158'' weiter unten.

$$\left. \begin{aligned} C' &= \frac{bn + iq, n}{bn - iq, n} C = \frac{b^2 n^2 - q^2, n^2 + 2iqbn, n}{b^2 n^2 + q^2, n^2} C, \\ ,C &= \frac{2bn}{bn - iq, n} C = \frac{2bn(bn + iq, n)}{b^2 n^2 + q^2, n^2} C \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Wir haben also in (24) eine imaginäre Größe,  $b = -iq^1$  in dem Argument von  $f$  für das untere Medium.

§ 119. Um reelle Resultate zu erhalten, müssen wir  $f$  passend so wählen, daß  $f(t - ax - iqy) = F + iG$  wird, wo  $F$  und  $G$  reell sind. Wir können dies leicht in zwei Weisen tun, (31) oder (32), indem wir  $\tau$ , eine willkürliche Zeitdauer, einführen und setzen

$$\left. \begin{aligned} f(t - ax + by) &= \frac{1}{t - ax + by + i\tau} = \frac{t - ax + by - i\tau}{(t - ax + by)^2 + \tau^2} \\ f(t - ax + ,by) &= \frac{1}{t - ax - iqy + i\tau} = \frac{t - ax - i(\tau - qy)}{(t - ax)^2 + (\tau - qy)^2} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Oder

$$\left. \begin{aligned} f(t - ax + by) &= e^{i\omega(t - ax + by)} = \cos \omega(t - ax + by) + i \sin \omega(t - ax + by) \\ f(t - ax + ,by) &= e^{i\omega(t - ax - iqy)} = e^{i\omega qy} [\cos \omega(t - ax) + i \sin \omega(t - ax)] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Die zweite Annahme ist geeignet, die Resultate darzustellen, die dem Einfall eines Zuges sinusartiger Wellen folgen; die erste, die wir zunächst aufnehmen wollen, ist für die Resultate geeignet, die dem Einfall eines einzigen Impulses folgen.

§ 120. Vermöge der Gleichungen (23), (24) und (30) ergibt (31): für die einfallende Welle im oberen Medium

$$\xi = \frac{t - ax + by - i\tau}{(t - ax + by)^2 + \tau^2} C, \quad (33)$$

für die reflektierte Welle im oberen Medium

$$\xi' = \frac{[(b^2 n^2 - q^2, n^2)(t - ax - by) + 2qbn, n\tau] + i[2qbn, n(t - ax - by) - (b^2 n^2 - q^2, n^2)\tau]}{(b^2 n^2 + q^2, n^2)[(t - ax - by)^2 + \tau^2]} C, \quad (34)$$

und für die Störung im unteren Medium

$$, \xi = \frac{2\{[b^2 n^2(t - ax) + qbn, n(\tau - qy)] + i[qbn, n(t - ax) - b^2 n^2(\tau - qy)]\}}{(b^2 n^2 + q^2, n^2)[(t - ax)^2 + (\tau - qy)^2]} C. \quad (35)$$

Die reellen Teile dieser drei Gleichungen stellen eine gewisse Form einer willkürlich gegebenen einfallenden Welle dar und die aus ihr folgende reflektierte Welle im oberen Medium und die Störung (eine Oberflächenwelle, die einer erzwungenen Seewelle analog ist) im unteren Medium. Ebenso geben die imaginären Teile nach der Entfernung von  $i$  eine andere Form einer einfallenden Welle nebst ihren Folgen in dem oberen und dem unteren Medium. In keinem Falle bewegt sich irgendeine Stelle in dem unteren Medium von der Zwischenfläche fort, und demgemäß wird die ganze Wirksamkeit der einfallenden Welle in jedem Falle durch die reflektierte Welle

1) Im Original ist versehentlich hier und im folgenden öfter 2 statt  $i$  gedruckt. D. H.

im oberen Medium fortgeführt; das heißt es tritt totale Reflexion ein. Es ist interessant zu sehen, daß diese totale Reflexion, die reflektierte Welle, in jedem Falle in ihrem Charakter von der einfallenden Welle verschieden ist,

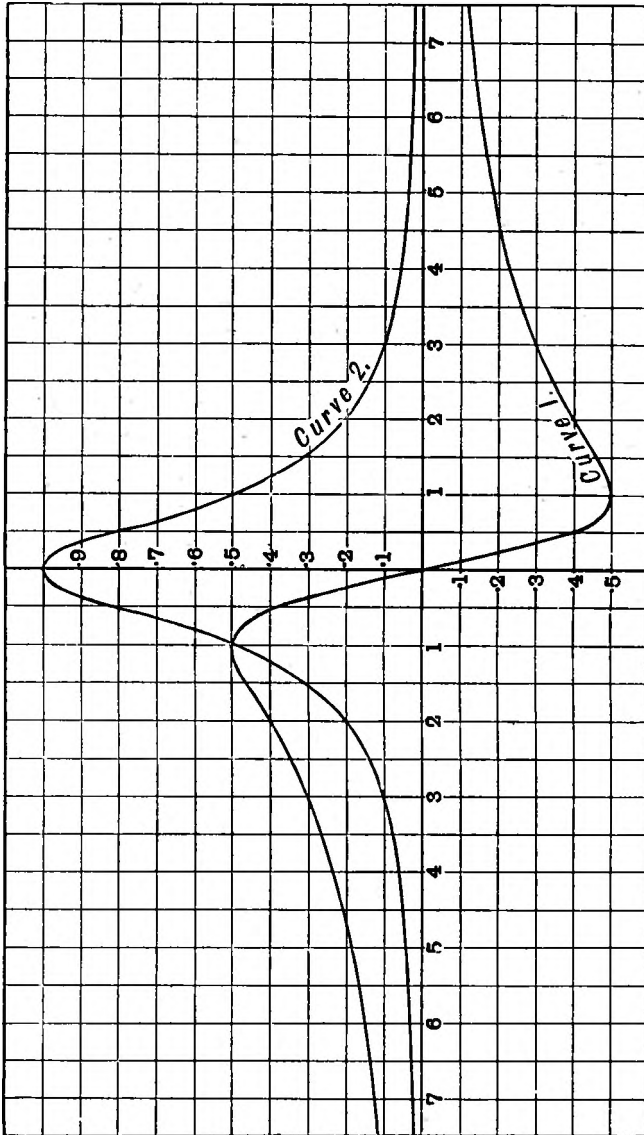


Fig 67.

ausgenommen für direkte Inzidenz; und zwar dadurch verschieden, daß sie aus zwei Komponenten zusammengesetzt ist, von denen die eine denselben Charakter hat wie die eine einfallende Welle für diese Lösung und die andere denselben Charakter wie die andere einfallende Welle für die andere Lösung.

Dies entspricht dem Phasenwechsel (§§ 152 und 158<sup>IV</sup> weiter unten) bei totaler innerer Reflexion von Wellen, deren Schwingungen senkrecht zu  $P$  sind.

§ 121. Die vorstehende Zeichnung (Fig. 67) gibt den Charakter der beiden Formen einfallender Wellen und läßt den der beiden Komponenten der gezwungenen Flächenwelle in dem unteren Medium, auf die in § 120 hingewiesen ist, durch Kombination ermitteln. Die beiden Kurven stellen von  $t = -\infty$  bis  $t = +\infty$  den Teil der Verschiebung einer beliebigen Partikel in dem oberen Medium dar, der von der einen oder der anderen der beiden Formen der einfallenden Welle allein herrührt. Die Abszisse in jeder Kurve ist  $t$ ; die Ordinaten der beiden Kurven sind die folgenden<sup>1)</sup>:

$$\text{Kurve 1, } t^2 + \frac{\tau^2}{\tau^2}, \text{ und Kurve 2, } \frac{\tau}{t^2 + \tau^2}.$$

Die Ordinateneinheit ist in beiden Fällen  $\tau^{-1}$ .

Die Störung in dem unteren Medium ist eine gezwungene Welle, deren Charakter durch Verbindung dieser beiden Kurven gegeben ist und die unter der Zwischenebene mit der Geschwindigkeit  $a^{-1}$  forteilt.

§ 122. Alle Ausführungen des § 120 gelten ebenso für die totale Reflexion sinusartiger Wellen, die die Eigenschaft besitzen, daß die Charaktere der einfallenden Wellen beziehungsweise durch einen Kosinus und einen Sinus wiedergegeben sind, und daß der Unterschied zwischen ihnen einfach in einer Phasenverschiedenheit besteht. Sobald wir die reellen Teile der Formel untersucht haben, erhalten wir deshalb nichts Neues, wenn wir die imaginären Teile behandeln. Die reellen Teile der Ausdrücke (23) und (24) ergeben in Verbindung mit (32) für  $f$  und (30) für  $C$ :

Einfallende Welle

$$\xi = C \cos \omega(t - ax + by), \quad (36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Reflektierte Welle} \\ \xi' = C \frac{(b^2 n^2 - q^2, n^2) \cos \omega(t - ax - by) - 2qb n, n \sin \omega(t - ax - by)}{b^2 n^2 + q^2, n^2} \end{array} \right\}; \quad (37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Gezwungene Welle im unteren Medium} \\ \xi = C \frac{2b n e^{-\omega q y} [b n \cos \omega(t - ax) - q, n \sin \omega(t - ax)]}{b^2 n^2 + q^2, n^2} \end{array} \right\}. \quad (38)$$

So sehen wir, daß die Amplitude der resultierenden reflektierten Welle  $C$  ist, und daß ihre Phase um  $\arctan [2qb n n / (b^2 n^2 - q^2, n^2)]$  vorwärtsgerückt ist, und daß die Phase des gezwungenen Wellenzuges im unteren Medium vor der der einfallenden Welle um  $\arctan (q, n / b n)$  voraus ist.

§ 123. Indem wir den Fall totaler Reflexion auf § 158' verschieben und uns wieder der Spiegelung und Brechung zuwenden, das heißt dem Falle, daß beide Größen  $b$  und  $\beta$  reell sind, sehen wir, daß die Gleichungen (28) für den Fall gleicher Starrheiten ergeben

$$-\frac{C'}{C} = \frac{b - \beta}{\beta + b} = \frac{\operatorname{ctg} i - \operatorname{ctg} i'}{\operatorname{ctg} i + \operatorname{ctg} i'} = \frac{\sin(i - i')}{\sin(i + i')}, \quad (39)$$

und dies ist das Fresnelsche „Sinusgesetz“; und zu diesem gehört für den gebrochenen Strahl

$$\frac{C}{C'} = \frac{2 \operatorname{ctg} i}{\operatorname{ctg} i + \operatorname{ctg} i} = \frac{2 \cos i \sin i}{\sin(i + i)}. \quad (40)$$

In dem Falle gleicher Dichten und ungleicher Starrheiten ist

$$n/n' = \sin^2 i / \sin^2 i,$$

und aus den Gleichungen (28) folgt

$$\frac{C'}{C} = \frac{\cos i}{\cos i} - \frac{\sin i}{\sin i} = \frac{\sin 2i - \sin 2i}{\sin 2i + \sin 2i} = \frac{\operatorname{tg}(i - i)}{\operatorname{tg}(i + i)}, \quad (41)$$

und dies ist Fresnels „Tangentengesetz“; zu ihm gehört für den gebrochenen Strahl

$$\frac{C}{C'} = \frac{2 \sin i \cos i}{\sin i \cos i + \sin i \cos i} = \frac{2 \sin 2i}{\sin 2i + \sin 2i}. \quad (42)$$

Der dritte Ausdruck in (41) ist in vieler Hinsicht bequemer als Fresnels schöne „Tangentenformel“.

§ 124. Diese Formeln, die sowohl für Stöße als für Züge sinusartiger Wellen gelten, zeigen ohne jede Hypothese über Kompressibilität oder Nichtkompressibilität des Äthers, daß, wenn die Dichten der Medien zu beiden Seiten der Zwischenfläche gleich sind, Fresnels „Tangentengesetz“ durch die reflektierten Wellen erfüllt wird, falls die Schwingungen der Zwischenfläche parallel sind; und demgemäß verschwindet das reflektierte Licht, wenn der Brechungswinkel das Komplement des Einfallswinkels ist. Demnach würde nicht polarisiertes Licht, das unter dem Winkel einfällt, der diese Bedingung erfüllt, reflektiertes Licht liefern, das nur aus Schwingungen in der Ebene des einfallenden und des reflektierten Strahles besteht. Nun haben wir (§ 81) nach Stokes' mechanischer Theorie der Lichtzerstreuung an Partikeln, die im Vergleich mit der Wellenlänge klein sind, wie bei seiner Erklärung der Himmelsbläue, und ebenso nach seinen Gitterversuchen und ihrer Erklärung und ihrer Bestätigung durch Rayleigh und Lorenz aus Dänemark (§ 81') gesehen, daß in dem durch Reflexion polarisierten Lichte die Schwingungen senkrecht zur Polarisationssebene sind, die als die Ebene des einfallenden und des polarisierten Strahles definiert ist, das heißt, die Schwingungen im reflektierten Strahle sind der Zwischenebene parallel. Demnach ist es sicher, daß die Dichten der Medien zu beiden Seiten der Zwischenebene nicht gleich sind; und daß die Dichten und Starrheiten so beschaffen sein müssen, daß sie für keinen Einfallswinkel einen verschwindenden reflektierten Strahl liefern, wenn wie in § 123 die Schwingungen der Zwischenebene parallel geschehen.

§ 125. Andererseits zeigen die Formeln (39), (40), daß die Annahme gleicher Starrheiten nicht nur für keinen Einfallswinkel einen verschwindenden Strahl ergibt, sondern tatsächlich Fresnels „Sinusgesetz“ der Reflexion für alle Einfallswinkel befriedigt, wenn die Schwingungen der Zwischenfläche

1) Im Original ist der Faktor 2 nachzutragen.

parallel sind. Schauen wir auf die Gleichungen (28) und (39) zurück, so sehen wir, daß Fresnels „Sinusgesetz“ algebraisch dargestellt wird durch

$$\frac{b, n - b n}{b, n + b n} = \frac{b - b}{b + b}. \quad (43)$$

Wenn diese Gleichung für irgendeinen Wert von  $b/b$ , der von 0 und  $\infty$  verschieden ist, zutrifft, muß  $n/n = 1$  sein. Demnach müssen, wenn bei Schwingungen, die parallel der Zwischenebene verlaufen, Fresnels „Sinusgesetz“ für irgendeinen von  $90^\circ$  verschiedenen Einfallswinkel genau richtig ist, die Starrheiten der Medien zu beiden Seiten gleich sein, und das „Sinusgesetz“ ist dann für alle Einfallswinkel genau richtig; ein sehr wichtiger Satz.

II. § 126. Wir gehen nunmehr zu dem schwierigeren Falle von Schwingungen über, die in der Einfallsebene verlaufen, und nehmen wieder  $XOZ$  als Zwischenebene an; sie sei wieder horizontal, ferner seien die Wellenebenen senkrecht zu  $XOY$ . An Stelle der einzigen Verschiebungskomponente,  $\xi$ , und der einzigen Komponente des Oberflächenzuges,  $S$ , der §§ 117—125, haben wir jetzt zwei Verschiebungskomponenten  $\eta, \xi$  und zwei Komponenten des Oberflächenzuges, nämlich  $Q$  senkrecht zur Zwischenebene und  $U$  parallel zur  $X$ -Richtung in der Zwischenebene. Die Bedingungen an der Zwischenebene sollen die sein, daß jede von diesen vier Größen zu beiden Seiten der Zwischenebene gleiche Werte hat. Wir haben es jetzt wesentlich noch mit der weiteren Komplikation zweier Wellenreihen zu tun, einer solchen invariablen Volumens und einer von Verdichtungs-Verdünnungswellen. Für die einfallenden Wellen im oberen Medium können wir beliebig eine dieser beiden Arten von Wellen ansetzen; aber der Auffall auf die Zwischenfläche zwischen zwei Medien von verschiedener Dichte oder verschiedener Starrheit könnte zum Entstehen reflektierter Wellen beider Arten im oberen Medium und gebrochener Wellen beider Arten im unteren Medium Anlaß geben. Es wird demnach richtig sein, auch bei den einfallenden Wellen mit solchen beider Arten zu beginnen.

§ 127. Kehren wir jetzt zu § 115 gemäß den in § 126 gewählten Einzelheiten zurück und nehmen  $j$  für den Einfallswinkel der Verdichtungs-Verdünnungswellen an, so haben wir  $\gamma_1 = 0$ ,  $C = 0$ ,  $\gamma_2 = 0$  und dürfen setzen

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \sin i, & A &= G \cos i, & \alpha_2 &= \sin j, \\ \beta_1 &= -\cos i; & B &= G \sin i; & \beta_2 &= -\cos j. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Hiernach finden wir an Stelle von (18) und (19) jetzt

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\eta_1}{\sin i} = G f \left( t - \frac{x \sin i - y \cos i}{u} \right), \\ u &= \sqrt{\frac{n}{\rho}}; \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= -\frac{\eta_2}{\cos j} = H f \left( t - \frac{x \sin j - y \cos j}{v} \right), \\ v &= \sqrt{\frac{k + \frac{1}{2}n}{\rho}} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

für die je zwei Komponenten der beiden Arten einfallender Wellen.

Für die reflektierten Wellen im oberen Medium haben wir  $-\cos i$ ,  $-\cos j$  an Stelle von  $\cos i$ ,  $\cos j$  zu setzen, während  $\sin i$ ,  $\sin j$  dieselben Werte wie für die einfallenden Wellen behalten. Es seien  $-G'$  und  $+H'$  die Konstanten für die Größen der reflektierten Strahlen, die den Größen  $G$ ,  $H$  für die einfallenden Strahlen entsprechen. So erhält man für die gesamten Verschiebungskomponenten, die von den vier Wellen im oberen Medium herrühren

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \cos i G f\left(t - \frac{x \sin i - y \cos i}{u}\right) + \sin j H f\left(t - \frac{x \sin j - y \cos j}{v}\right) \\ &+ \cos i G' f\left(t - \frac{x \sin i + y \cos i}{u}\right) + \sin j H' f\left(t - \frac{x \sin j + y \cos j}{v}\right); \\ \eta &= \sin i G f\left(t - \frac{x \sin i - y \cos i}{u}\right) - \cos j H f\left(t - \frac{x \sin j - y \cos j}{v}\right) \\ &- \sin i G' f\left(t - \frac{x \sin i + y \cos i}{u}\right) + \cos j H' f\left(t - \frac{x \sin j + y \cos j}{v}\right); \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

und für die gesamten Verschiebungskomponenten im unteren Medium dieselben Formeln mit bzw.  $i, j, u, v, G, H, 0, 0$ , an Stelle von  $i, j, u, v, G, H, G', H'$ .

§ 128. Bildet man aus diesen Formeln die Resultierenden der  $(\xi, \eta)$  Komponenten der Verschiebungen in den einzelnen Wellen, so erhält man folgendes:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Wellen gleichen Volumens} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Einfallende} \quad G f\left(t - \frac{x \sin i - y \cos i}{u}\right) \\ \text{Reflektierte} \quad G' f\left(t - \frac{x \sin i + y \cos i}{u}\right) \\ \text{Gebrochene} \quad , G f\left(t - \frac{x \sin ,i - y \cos ,i}{,u}\right); \end{array} \right. \\ \\ \text{Verdichtungs-Verdünnungs-} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Einfallende} \quad H f\left(t - \frac{x \sin j - y \cos j}{v}\right) \\ \text{Reflektierte} \quad H' f\left(t - \frac{x \sin j + y \cos j}{v}\right) \\ \text{welle} \quad \text{Gebrochene} \quad , H f\left(t - \frac{x \sin ,j - y \cos ,j}{,v}\right). \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

§ 129. Wir setzen jetzt, um die Verschiebungskomponenten an der Zwischenfläche zu finden,  $y = 0$  und nehmen die Werte entsprechend gerichteter Größen zu beiden Seiten einander gleich, so sehen wir zunächst, daß die Argumente der Funktion  $f$ , wenn  $y$  Null ist, sämtlich einander gleich sein müssen, und daß der Koeffizient von  $x$  der reziproke Wert der Geschwindigkeit der Spur jeder der vier Wellen auf der Zwischenebene ist; und wenn wir diese Geschwindigkeit mit  $a^{-1}$  bezeichnen, erhalten wir

$$a = \frac{\sin i}{u} = \frac{\sin ,i}{,u} = \frac{\sin j}{v} = \frac{\sin ,j}{,v}. \quad (48)$$

Die letzten drei Gleichungen drücken die Brechungsgesetze für beide Arten Wellen in dem unteren Medium aus, die sich aus beiden Arten in dem oberen Medium ergeben. Sie zeigen, daß die Sinus der Einfalls- und der



Brechungswinkel sich zueinander umgekehrt wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten verhalten, gleichviel ob die beiden betrachteten Wellen derselben Art oder verschiedener Art sind. Der Kürze wegen wollen wir im folgenden setzen

$$\frac{\cos i}{u} = b, \quad \frac{\cos i}{,u} = ,b, \quad \frac{\cos j}{v} = c, \quad \frac{\cos j}{,v} = ,c; \quad (49)$$

woraus wir mit (48) finden

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 = u^{-2} = \frac{e}{n}, \quad a^2 + c^2 = v^{-2} = \frac{e}{k + \frac{2}{3}n}; \\ a^2 + ,b^2 = ,u^{-2} = \frac{e}{,n}, \quad a^2 + ,c^2 = ,v^{-2} = \frac{e}{,k + \frac{2}{3},n}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

§ 130. Setzt man jetzt  $f(t - ax) = \psi$ , so folgen aus (47) mit  $y = 0$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= [bu(G + G') + av(H + H')]\psi, \\ \eta &= [au(G - G') + cv(-H + H')]\psi \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

als Verschiebungskomponenten des oberen Mediums an der Zwischenfläche.

Benutzt man weiter (47), um  $Q$  und  $U$  vermöge der Gleichungen (6) und (5) des § 113 zu ermitteln, und nimmt  $y = 0$ , so ergeben sich weiter als Komponenten des Flächenzuges des oberen Mediums an der Zwischenfläche

$$\left. \begin{aligned} Q &= n[2abu(G + G') - hv(H + H')]\psi, \\ U &= n[gu(G - G') + 2acv(H - H')]\psi, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

wo gesetzt ist

$$\left. \begin{aligned} g &= b^2 - a^2, \\ nh &= (k - \frac{2}{3}n)v^{-2} + 2nc^2 = e + 2n(c^2 - v^{-2}) = e - 2na^2. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Indem man die Glieder der Gleichungen (51) und (52) herausgreift, die  $G$  und  $H$  enthalten und in ihnen  $,G, ,H, ,b, ,c, ,g, ,h, ,v, ,n, ,k$  für  $G, H, b, c, g, h, v, n, k$  setzt, findet man für die beiden gebrochenen Wellen in dem unteren Medium die Verschiebungskomponenten und die Komponenten des Flächenzuges wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} ,\xi &= (,b, ,u, G + ,a, ,v, H)\psi, \\ ,\eta &= (,a, ,u, G - ,c, ,v, H)\psi; \\ ,Q &= ,n[2,ab, ,u, G - ,h, ,v, H]\psi, \\ ,U &= ,n[,g, ,u, G + 2,ac, ,v, H]\psi. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Durch Gleichsetzung jeder einzelnen Komponente der beiden Gleichungssätze, wie in § 126 gesagt ist, erlangen wir die folgenden vier Gleichungen zur Bestimmung der vier gesuchten Größen  $,G, ,H, ,G', ,H'$ , ausgedrückt durch die beiden gegebenen Größen  $G, H$

$$\left. \begin{aligned} bu(G + G') + av(H + H') &= ,b, ,u, G + ,a, ,v, H, \\ au(G - G') - cv(H - H') &= ,a, ,u, G - ,c, ,v, H; \\ n[2abu(G + G') - hv(H + H')] &= ,n[2,ab, ,u, G - ,h, ,v, H], \\ n[gu(G - G') + 2acv(H - H')] &= ,n[,g, ,u, G + 2,ac, ,v, H]. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

§ 131. Man fasse für den Augenblick  $G - G'$  und  $H + H'$  als die bekannten Größen und  $G + G'$ ,  $H - H'$ ,  $G$ ,  $H$  als unbekannt auf, so ergeben die erste und dritte Gleichung zwei Werte von  $G + G'$ , und die zweite und die vierte zwei Werte von  $H - H'$ , nämlich

$$\left. \begin{aligned} G + G' &= \frac{1}{b_u} (b, u, G + a, v, H) - \frac{a v}{b u} (H + H') \\ &= \frac{n}{2 n a b u} (2 a, b, u, G - h, v, H) + \frac{h v}{2 a b u} (H + H'), \\ H - H' &= -\frac{1}{c v} (a, u, G - c, v, H) + \frac{a u}{c v} (G - G') \\ &= \frac{n}{2 n a c v} (g, u, G + 2 a, c, v, H) - \frac{g u}{2 a c v} (G - G'). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Die Gleichungen zwischen den zweiten und dritten Gliedern dieser beiden Doppelgleichungen können zur Bestimmung von  $G$ ,  $H$  durch  $G - G'$  und  $H + H'$  benutzt werden. Nach einigen vereinfachenden Reduktionen erhält man

$$\left. \begin{aligned} 2 a, b (n - n), u, G + [q + 2 (n - n) a^2], v, H &= q v (H + H') \\ [q + 2 (n - n) a^2], u, G - 2 a, c (n - n), v, H &= q u (G - G'). \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Indem wir aus diesen Gleichungen  $G$  und  $H$  berechnen und die Resultate entweder in den ersten oder in den zweiten von den Gleichungspaaren (56) benutzen, erhalten wir  $G + G'$  und  $H - H'$  durch  $G - G'$  und  $H + H'$  ausgedrückt. Daraus ergibt sich dann  $G'$  und  $H'$  durch  $G$  und  $H$ . So bekommen wir schließlich  $G'$ ,  $H'$ ;  $G$ ,  $H$  ausgedrückt durch die gegebenen Größen  $G$ ,  $H$ . Dies hätte übrigens auch direkt aus den vier Gleichungen (55) durch Bildung der geeigneten Determinanten gefunden werden können. Die algebraische Arbeit ist auf beide Arten etwas langwierig.

§ 132. Aber das Verfahren, das wir in § 131 eingeschlagen haben, bietet den Vorteil, daß es uns die beiden Zwischengleichungen (57) liefert, die sich sehr vereinfachen, sobald  $n = n$  ist. Für diesen Fall gehen sie über in

$$q, v, H = q v (H + H'), \quad q, u, G = q u (G - G'). \quad (58)$$

Wir wollen jetzt diesen Fall mit der weiteren Vereinfachung  $H = 0$  zu Ende führen; denn die besondere Aufgabe, die wir zu lösen wünschen, ist die, die beiden reflektierten Wellen ( $G'$ ,  $H'$ ) und die beiden gebrochenen Wellen ( $G$ ,  $H$ ) zu finden, die von einer einzigen Welle invariabler Dichte ( $G$ ) herühren. Eliminiert man  $G$ ,  $H$  aus den ersten beiden von den Gleichungen (55) mit Hilfe von (58) mit  $H = 0$  und bestimmt man  $G'$  und  $H'$  aus den beiden so erhaltenen Gleichungen, so bekommt man

$$- G' = \frac{q b - e, b - L}{q b + e, b + L} G, \quad (59)$$

$$- H' = 2 \frac{\frac{q b}{(q - e) a} L}{q b + e, b + L} \frac{u}{v} G, \quad (60)$$

wo gesetzt ist

$$L = \frac{(q - e)^2 a^2}{q c + e, c}. \quad (61)$$

Schließlich ergibt (58)

$$,G = 2 \frac{e b}{,e b + e ,b + L} ,u G, \quad (62)$$

$$- ,H = 2 \frac{e b}{(e - e) a} \frac{L}{,e b + e ,b + L} ,u G. \quad (63)$$

Dies vervollständigt die Theorie der Reflexion und Brechung von Wellen an einer ebenen Zwischenfläche zwischen zwei gewöhnlichen elastischen Festkörpern mit beliebig gegebenen Raummoduln und Starrheiten; wenn die Berührung ohne Gleiten stattfindet.

§ 133. Wir beachten jetzt, daß nach den Gleichungen (49), (48) ist

$$\frac{,b}{b} = \frac{u \cos i}{,u \cos i} = \frac{\sin i \cos i}{\sin i \cos i} \quad (64)$$

und nach (50) mit  $n = ,n$

$$q/,q = ,u^2/u^2 \quad (65)$$

woraus nach (64) folgt

$$\frac{q ,b}{,q b} = \frac{\sin i \cos i}{\sin i \cos i} = \frac{\sin 2 i}{\sin 2 i}. \quad (66)$$

Hiernach sehen wir, daß, wenn  $L = 0$  ist, man bekommt

$$- \frac{G'}{G} = \frac{\sin 2 i - \sin 2 ,i}{\sin 2 i + \sin 2 ,i} = \frac{\operatorname{tg} (i - ,i)}{\operatorname{tg} (i + ,i)} \quad (67)$$

Dies ist die Formel von Fresnel für die Spiegelung, wenn die Schwingungen in der Einfallsebene verlaufen.

Schauen wir auf Gleichung (61), so sehen wir, daß diese Bedingung  $L = 0$  für andere als direkte Inzidenz nur erfüllt sein kann, wenn entweder  $c$  oder  $,c$  oder diese beiden Größen unendlich groß sind; denn, § 129 (48),  $a$  kann nur für direkte Inzidenz ( $i = 0$ ) Null sein. Aus (50) aber folgt, daß, wenn  $c$  oder  $,c$  sehr groß werden soll,  $v$  oder  $,v$  sehr klein sein muß. Wir werden später (Neunzehnte Vorlesung, § 167) gute physikalische Gründe dafür finden, daß für ungestörten Äther  $v = \infty$  anzunehmen ist, wie es Green getan hat, und  $,v$  hinreichend klein vorauszusetzen ist, um zwar  $L$  nicht absolut zur Null zu machen, aber doch so klein, wie nötig ist, um die nahe Annäherung an die Richtigkeit zu erzielen, welche durch die Beobachtung für Fresnels Formeln für die große Mehrheit durchsichtiger flüssiger und fester Körper, einschließlich der optisch-isotropen Kristalle, bewiesen wird, und dabei doch  $L$  noch hinreichend groß zu erhalten, um abgeänderte Formeln zu besitzen, die die am Diamant, dem Zinksulfid, dem Arsensulfid usw. (vgl. § 105 oben und § 182 unten) gefundenen Abweichungen von Fresnels Formel darstellen zu können.

§ 134. Inzwischen wollen wir einige interessante und wichtige Eigenschaften der allgemeinen Aufgabe des § 130 ohne die Einschränkung  $n = ,n$  ins Auge fassen; und ebenso ihre Lösung für den Fall  $n = ,n$ , wie sie § 123 (39), (40) und § 132 (59) . . . (63) dargestellt ist. Zugleich mit der von der Annahme  $v = \infty$  herrührenden Änderung in einem, ponderable Materie nicht enthaltenden, Raum; und mit der besonderen weiteren Änderung in Rücksicht auf Ätherwellen oder -Schwingungen in dem von (festen oder flüssigen) Me-

tallen eingenommenen Raum, um den durch Beobachtung entdeckten Tatsachen der metallischen Reflexion Rechnung zu tragen.

§ 135. Wir nehmen zunächst direkte Inzidenz sowohl einer Welle invariabler Dichte als einer Verdichtungs-Verdünnungswelle. Für diese haben wir in §§ 129, 130

$$\left. \begin{aligned} i = ,i = ,j = 0; \quad a = 0; \quad b = \frac{1}{u}; \quad ,b = \frac{1}{,u}; \quad c = v^{-1}; \quad ,c = ,v^{-1}; \\ u^{-2} = b^2 = g = h = \frac{e}{n}; \quad ,u^{-2} = ,b^{-2} = ,g = ,h = ,\frac{e}{,n}. \end{aligned} \right\}$$

Diese Einzelheiten verwandeln (55) in

$$\left. \begin{aligned} G + G' &= ,G, \\ H - H' &= ,H, \\ qv(H + H') &= ,q, v, ,H, \\ qu(G - G') &= ,q, u, ,G. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Die erste und die vierte von diesen Gleichungen liefern  $G'$  und  $,G$  durch  $G$  ausgedrückt; die zweite und dritte  $H'$  und  $,H$  durch  $H$ . So bestätigen unsere Formeln das, was auch ohne sie offenbar ist; daß direkt einfallende Wellen, wenn sie die Dichte unverändert lassen, auch reflektierte und weitergeführte Wellen mit unveränderter Dichte ergeben, und daß, wenn sie Verdichtungs-Verdünnungswellen sind, sie auch solche reflektierte und weitergeführte Wellen veranlassen. Für direkte Inzidenz bemerken wir, daß in den Wellen gleicher Dichte die Verschiebung parallel der reflektierenden Fläche ist und in der  $x$ -Richtung liegt; bei den Verdichtungs-Verdünnungswellen ist sie senkrecht zur reflektierenden Fläche, also in der  $y$ -Richtung. Für die Verhältnisse dieser Verschiebungen finden wir nach (68) folgendes:

$$\text{(Wellen invariabler Dichte)} \quad \frac{G'}{G} = \frac{,e, u - e u}{,e, u + e u}; \quad \frac{,G}{G} = \frac{2 e u}{,e, u + e u}. \quad (69)$$

$$\text{(Verdichtungs-Verdünnungswelle)} \quad \frac{H'}{H} = \frac{,e, v - e v}{,e, v + e v}; \quad \frac{,H}{H} = \frac{2 e v}{,e, v + e v}. \quad (70)$$

Vom Standpunkt der Theorie überhaupt ist es interessant zu sehen, daß, wenn die Festkörper an der Zwischenfläche ohne Gleiten fest aneinander haften, wir bei direkter Inzidenz, für Wellen invariabler Dichte mit transversaler Schwingung dieselben Beziehungen zwischen den Verschiebungen der reflektierten und der weitergeführten Wellen einerseits und der einfallenden Welle andererseits, ausgedrückt durch die Dichten und Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, finden wie für die Verdichtungs-Verdünnungswellen, deren Schwingungen longitudinal in der Fortpflanzungsrichtung geschehen. Wenn dagegen die Verbindung zwischen den beiden Festkörpern nur durch Normaldruck gehalten würde, und wenn die Oberflächen der beiden Festkörper an der Zwischenfläche vollständig ohne Reibung wären und vollständige Freiheit für tangentiales Gleiten zuließen, wäre die Reflexion im Falle direkt einfallender Wellen mit transversaler Schwingung eine totale, und es wäre überhaupt keine Überführung solcher Wellen in den andern Festkörper vorhanden.

§ 136. Für die physikalische Optik ist die Lösung (69) von äußerster Bedeutung. Eliminieren wir  $q, ,q$  aus diesen Gleichungen durch

$$\varrho = nu^{-2}, \quad \varrho = n, u^{-2},$$

so ergibt sich

$$- \frac{G'}{G} = \frac{nu - n, u}{nu + n, u}; \quad \frac{G'}{G} = \frac{2n, u}{nu + n, u}. \quad (71)$$

Indem man  $u/u$  mit  $\mu$  (dem Brechungsindex) bezeichnet, folgt hiernach, daß wir für die reflektierte Welle in den beiden Fällen gleicher Starrheit oder gleicher Dichte erhalten

$$\frac{G'}{G} = \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \text{ oder } \frac{G'}{G} = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}. \quad (72)$$

So ist  $G'/G$  in den beiden Fällen dem absoluten Werte nach gleich, aber von verschiedenem Zeichen, und da das Verhältniß  $J'$  der Intensität des reflektierten zu der des einfallenden Lichtes gleich  $(G'/G)^2$  ist, findet sich dieses Verhältniß gleich

$$J' = \left( \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^2, \quad (73)$$

also für die beiden Fälle, nämlich den Fall gleicher Dichten und den gleicher Starrheiten von dem nämlichen Betrage; ein altbekanntes und sehr wichtiges Resultat der physikalischen Optik. Es wurde meines Wissens zuerst von Thomas Young angegeben; es wird ebenfalls gefunden, wenn man in den Formeln von Fresnel für die Reflexion polarisierten Lichtes bei beliebiger Inzidenz  $i=0$  setzt. Aber die eingehende mechanische Theorie beweist, daß, wenn das Brechungsvermögen  $\mu - 1$  anders als entweder durch gleiche Starrheiten oder durch gleiche Dichten erzeugt wird, das Verhältniß des reflektierten zum einfallenden Lichte nicht genau dem Gesetze unter (73) folgt. Auf diese theoretische Wahrheit ist in meiner einleitenden Vorlesung (S. 10, 11 oben) hingewiesen worden, und ich bin damals auf Grund der photometrischen Bestimmungen von Professor Rood zu dem Schlusse gelangt, daß die beobachtete Menge des an Glas reflektierten Lichtes zu gut mit (73) übereinstimmt, als daß die Annahme einer Abweichung von entweder gleichen Starrheiten oder gleichen Dichten möglich wäre, die hinreichen würde, Greens mechanische Theorie der Polarisation von Licht durch Spiegelung zu verbessern. Dieser Schluß wird im ganzen durch Rayleighs sehr eingehende Untersuchung der Spiegelung von Licht an Gläsern verschiedener Art<sup>1)</sup> bestätigt; allein die großen Verschiedenheiten des Reflexionsvermögens, die er an der Oberfläche desselben Glasstückes bei verschiedenen Politurzuständen fand, machen es unmöglich, vollkommen zufriedenstellende Resultate hinsichtlich der Übereinstimmung mit der Theorie zu erhalten, wie wir aus der folgenden Äußerung ersehen, die er als Zusammenfassung seiner Untersuchung betrachtet.

„Im ganzen wird der Schluß nahegelegt, daß frisch polierte Glasflächen ein Reflexionsvermögen besitzen, das nicht mehr als 1 bis 2 Prozent von dem durch die Fresnelsche Formel gegebenen abweicht, daß aber nach einigen Monaten oder Jahren die Spiegelung um 10 bis 30 Prozent abnehmen mag, und dies ohne sichtbaren Verlust an Glanz.“

1) „On the Intensity of Light Reflected from certain surfaces at nearly Perpendicular Incidence“, Proc. R. S., XI, S. 275—294, 1886; und Scientific Papers, II, pp. 522—542.

„Die Frage nach der Ursache dieser Abnahme befriedigend zu beantworten, bin ich nicht in der Lage. Etwas wie eine Verschlechterung der Oberfläche müßte, wie man erwarten sollte, bei einer näheren Besichtigung entdeckt werden; doch nichts derartiges konnte gefunden werden. Eine Oberflächenschicht von kleinerem Index, die sich unter dem Einfluß der Atmosphäre gebildet haben könnte, wenn sie auch nicht dicker wäre als  $1/1000000$  Zoll, würde eine verminderte Spiegelung erklären. Möglicherweise würde kombinierte Untersuchung von an Glasflächen unter verschiedenen Umständen reflektierten und durch sie hindurchgelassenen Lichtstrahlen zu einem besseren Verständnisse des Gegenstandes führen. Wenn die oberflächliche Haut durch Diffusion oder Absorption des Lichtes wirkt, müßte man erwarten, daß das hindurchgelassene Licht abnimmt. Handelt es sich andererseits mehr um Zwischenlagerung einer durchsichtigen Schicht von einem Zwischenindex, so würde diese einen Zuwachs an hindurchgelassenem Licht zur Folge haben und eine ebenso große Abnahme an reflektiertem Lichte. Hier bietet sich offenbar Gelegenheit für viele weitere Untersuchungen; ich muß mich aber damit begnügen, diese Gedanken auszusprechen.“

§ 137. Nunmehr wollen wir streifende Inzidenz ( $i = 90^\circ$ ,  $b = 0$ ,  $a = u^{-1}$ ) einer Welle invariabler Dichte ins Auge fassen, die in der Einfallsebene und demgemäß nahezu senkrecht zur reflektierenden Fläche verläuft. Wir sehen unmittelbar, daß die Gleichungen (55) befriedigt werden durch

$$H = 0; H' = 0, \text{ , } H = 0, \text{ , } G = 0, G - G' = 0.$$

Dies zeigt, daß wir für gleiche wie für ungleiche Starrheiten annähernd totale Reflexion erhalten, und daß die Phase des reflektierten Lichtes  $G = G'$  entspricht. Aus den Betrachtungen in § 136 zu Gleichung (71) sieht man, daß im Falle gleicher Starrheiten der beiden Medien  $G'/G$  für direkte Inzidenz negativ ist, während wir jetzt finden, daß diese Größe für streifende Inzidenz positiv ausfällt. Ist also dieser Quotient für alle Inzidenzen reell, so muß er demnach für eine besondere Inzidenz Null sein. Diese Tatsache ist für die Theorie der Polarisation durch Reflexion und für die der Hauptinzidenzen grundlegend.

§ 138. Wenn wir andererseits für gleiche Dichten und ungleiche Starrheiten die Untersuchungen in § 135 (69) beachten, sehen wir, daß  $G'/G$  für direkte Inzidenz positiv ist, und ferner, daß diese Größe nach § 137 für streifende Inzidenz gleichfalls positiv,  $+1$  ist. Demnach kann sie, wenn  $i$  von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  ansteigt, nicht genau einmal oder eine ungrade Anzahl Male verschwinden; wohl aber kann sie zweimal oder eine gerade Anzahl Male verschwinden. Hierauf ist bei der Erklärung der merkwürdigen Entdeckung von Lorenz und von Rayleigh, über die in § 81 berichtet ist, wesentlich Rücksicht genommen worden.

§ 138'. Wenn wir schließlich auf § 123 zurückgehen, sehen wir, daß unsere Behandlung der Aufgabe festgestellt hat, daß für direkte Inzidenz  $C'/C$  zugleich mit  $G'/G$  negativ oder positiv ist, je nachdem die Starrheiten oder die Dichten in den beiden Medien gleich sind. Dagegen ist für streifende Inzidenz  $C'/C$ , während diese Größe auch jetzt noch für gleiche Starrheiten negativ bleibt, für gleiche Dichten positiv.

§ 139. So weit bestätigt alles, was wir wissen, Theorie und Experiment, Greens ursprüngliche Annahme gleicher Starrheiten und verschiedener

Dichten, die er gemacht hat, um zu erklären, daß Licht an durchsichtigen Körpern reflektiert und von ihnen hindurchgelassen wird. Ehe wir in der neunzehnten Vorlesung auf die in Aussicht gestellte Vereinigung der Gesetze von Fresnel mit der mechanischen Theorie für durchsichtige Substanzen übergehen, wollen wir, während wir an der Ansicht gleicher Starrheit des Äthers im leeren Raume und in dem von ponderabler Materie beliebiger Art eingenommenen Raume festhalten, kurz untersuchen, welche Annahmen wir für unsere Lösung des § 132 [(59)—(63)] machen müssen, um bekannte Tatsachen über die Spiegelung von Licht an Metallen und anderen undurchsichtigen Körpern zu erklären.

§ 140. Der äußerst hohe Grad an Undurchsichtigkeit, den alle Metalle für Licht aller Perioden zeigen, von solchen, die beträchtlich länger sind als die des äußersten Rot des sichtbaren Spektrums ( $2,5 \cdot 10^{-15}$  Sek. für die Linie *A*) bis zu solchen, die beträchtlich kürzer sind als die des äußersten Violett ( $1,3 \cdot 10^{-15}$  Sek. für die Linie *H*), ist die bestimmteste unter den auffallenden Charakteristiken dieser Körper, während der große Glanz des an ihnen sowohl direkt als unter irgendeinem Winkel außer bei streifender Inzidenz<sup>1)</sup> reflektierten Lichtes, verglichen mit dem an Glas oder Kristallen oder sonst glänzendst polierten bekannten und für das Auge wahrnehmbaren nichtmetallischen Körpern, ihre offenkundigste und bestbekannte Eigenschaft ist. Die Undurchsichtigkeit dünner Metallplatten, soweit sie bisher für alle Lichtarten von Rot bis Violett untersucht worden ist, hat sich anscheinend als eine vollkommene für alle Dicken über  $3 \cdot 10^{-5}$  cm (oder eine halbe Wellenlänge des gelben Lichtes in Luft) erwiesen. Wenn bei dem Goldschlägerverfahren die Dicke des Goldblattes auf  $2 \cdot 10^{-5}$  cm (oder etwa ein Drittel der Wellenlänge des gelben Lichtes) herabgedrückt ist, fängt es an, merklich durchscheinend zu werden, indem es schwaches grünes Licht hindurchläßt, wenn es von einer Seite durch starkes weißes Licht beleuchtet wird. Das dünnste gewöhnliche Goldblatt ( $0,7 \cdot 10^{-5}$  cm oder eben ein Achtel

1) Wenn die Neigung einfallenden Lichtes wächst und sich mehr und mehr der streifenden Inzidenz nähert, kommt der Glanz des reflektierten Lichtes mehr und mehr der Gleichheit mit dem einfallenden Lichte nahe. Bei einer der streifenden unendlich nahen Inzidenz finden wir theoretisch (§ 137) totale Reflexion an jeder polierten Fläche; Politur ist dabei wie in § 86 oben definiert. In der Tat finden wir sogar durch die Beobachtung an Flächen wie berußtem Glas, die doch kaum nach irgendeiner Erklärung als poliert bezeichnet werden können, eine deutliche Tendenz zu totaler Reflexion, wenn der Einfallswinkel bis auf nahe an  $90^\circ$  gesteigert wird.

Ein verblüffender Versuch kann in der Weise angestellt werden, daß man auf einem mit einem Tischtuch aus schwarzem Velvet bedeckten Tisch nebeneinander zwei flache Glasstücke, eines berußt, eines blank, legt, mit einer Anordnung von Licht und Schirm, wie sie in der Zeichnung Fig. 68 angedeutet ist. *L* ist eine Lampe, die in der Hand gehalten und leicht nach Wunsch gehoben und gesenkt werden kann. *OO'* ist ein undurchsichtiger Schirm. *PP'* ist ein Schirm aus weißem Papier, der auf dem Tische steht. Es würde stutzig machen, wenn wir das Resultat nicht erwarteten, zu sehen, wie viel Licht von dem Ruß über der Grenze des Schattens von *OO'* auf *PP'* reflektiert wird. Der Versuch wird noch auffallender, wenn man neben die beiden Glasplatten eine flache Platte aus poliertem Silber legt und sieht, wie nahe sowohl die berußte wie die blanke Glasplatte mit der Silberplatte bezüglich der totalen Reflexion wetteifert, wenn die Lampe *L* mehr und mehr nahe der streifenden Inzidenz ihres Lichtes gesenkt wird. Ebenso ist es interessant, den Papierschirm *PP'* zu entfernen und die drei

der Wellenlänge gelben Lichtes) ist ganz auffallend durchscheinend und gibt dem durchfallenden Lichte eine stark grüne Färbung. Silberfolie, die  $1,5 \cdot 10^{-5}$  cm dick ist (also beträchtlich dünner als eben schon durchscheinendes Goldblatt), ist für elektrisches Licht, soweit es unsere Augen zu beurteilen imstande sind, vollkommen undurchsichtig; doch ist es für ein selbst unsichtbares violettes Licht in einem kleinen Wellenlängengebiet zwischen etwa  $3,07 \cdot 10^{-5}$  bis  $3,32 \cdot 10^{-5}$  cm<sup>1</sup>) (Schwingungsperioden von  $1,02 \cdot 10^{-15}$  bis  $1,11 \cdot 10^{-15}$  Sek.) durchlässig.

§ 141. Die so sehr große Undurchsichtigkeit der Metalle ist für Röntgenstrahlen (die wahrscheinlich aus Licht von Perioden bestehen, die weit unter  $10^{-15}$  Sek. liegen) ganz und gar nicht mehr vorhanden; denn Aluminiumbleche, deren Dicke bis zu zwei oder drei Zentimeter beträgt, sind für sie durchlässig. Für gewisse Eigenschaften der Röntgenstrahlen ist sogar so dickes Bleiblech nicht vollkommen undurchsichtig.

§ 142. Wir haben keine experimentelle Kenntnis über die Undurchsichtigkeit äußerst dünner Metallhäute für strahlende Wärme, deren Periode länger ist als die des rotesten sichtbaren Lichtes. Es erscheint nicht unwahrscheinlich, daß in dem ganzen Periodengebiet bis hinauf zu Perioden von

Platten und die Lampe mit einem Auge anzuschauen, das sich in den Lagen befindet, in denen es das von den drei Spiegeln, dem beruhten und dem polierten Glase und dem polierten Silber, reflektierte Licht empfängt.

Ein anderer interessanter Versuch besteht darin, daß man durch ein Nicol auf die drei Flächen oder auf eine blanken Quecksilber- oder Wasserfläche, wenn sie von *L* aus bei nahezu streifender Inzidenz in einem dunkeln Raume beleuchtet wird, vertikal niederschaut. Eine überraschend große Menge Licht wird dann

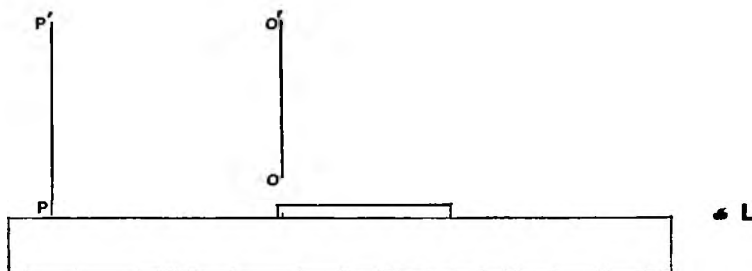


Fig. 68.

an der beruhten Fläche bemerkt, und man erkennt, daß es fast ganz zu Schwingungen polarisiert ist, die senkrecht zu der durch *L* und die Gesichtslinie bestimmten Ebene verlaufen. Wenn das Glas und das Silber sehr gut poliert und blank sind, wird wenig oder gar kein von ihnen ausgehendes Licht beobachtet werden; nur wenn *L* sehr intensiv ist, würde wahrscheinlich ein schwaches Licht sichtbar sein, das ebenso polarisiert ist, wie das vom Ruß ausgehende, was auf einen Mangel an molekularer Vollkommenheit in der Politur hinweisen würde, oder auf einen Mangel an optischer Vollkommenheit in der vollkommensten Politur, die bei der molekularen Konstitution des Festkörpers oder der Flüssigkeit möglich ist — entsprechend den in § 86 behandelten Prinzipien.

1) Vgl. S. 185, 186 der Popular Lectures and Adresses, Vol. I, Ed. 1891 (Freitag-Abend-Vorlesung vor der Royal Institution, 3. Febr. 1883), wo Versuche beschrieben sind, die das Reflexionsvermögen und die Durchsichtigkeit einiger äußerst dünnen Bleche von Platin, Gold und Silber beleuchten, die ich der Freundlichkeit des Professor Dewar verdanke.



$2 \cdot 10^{-13}$  Sek., in dem über das Brechungs- und das Reflexionsvermögen von Steinsalz und Sylvin Versuche von Langley, Rubens, Paschen, Rubens und Nicols und Rubens und Aschkinass Messungen ausgeführt sind (vgl. oben, zwölfte Vorlesung, S. 120 ff.), die Undurchsichtigkeit von Goldblatt und anderer dünnster Metallfolie ebenso vollkommen oder nahezu ebenso vollkommen sein kann wie für sichtbares Licht.

§ 143. Wenn wir aber zu wesentlich längeren Perioden übergehen, finden wir sicher, daß diese dünnen Metallblättchen für Variationen magnetischer Kraft vollkommen durchlässig sind. So ist Kupfer in einer Dicke von  $7 \cdot 10^{-5}$  cm (ungefähr eine Wellenlänge orangen Lichtes in Luft), obwohl es für eine Variation magnetischer Kraft, deren Periode ein Drittel oder ein Fünftel von  $1/(8 \cdot 10^9)$  Sek. beträgt, sich fast vollkommen undurchlässig verhält, für Perioden magnetischer Kraft, die drei- oder viermal  $1/(8 \cdot 10^9)$  Sek. betragen, und für alle längeren Perioden fast vollkommen durchlässig.<sup>1)</sup>

Wählt man größere Dicken, so findet sich, daß eine zwei Millimeter starke Kupferplatte ein fast vollkommener Schirm, also fast vollkommen undurchlässig, für die Übertragung der magnetischen Influenz eines kleinen Stabmagnets ist, der 8000 mal in der Sekunde<sup>2)</sup> rotiert, etwas undurchlässig, aber nicht ganz so stark, wenn die Geschwindigkeit 100 Touren in der Sekunde beträgt, fast, aber nicht vollkommen durchlässig, das heißt also wenig aufhaltend, wenn überhaupt merklich schirmend, wenn die Geschwindigkeit eine Tour in der Sekunde erreicht; nicht merklich schirmend, wenn die Periode 10 Sekunden oder mehr ausmacht. Nun können wir nach dem, was an der sogenannten elektromagnetischen Lichttheorie zweifellos wirklich richtig ist, einen Stabmagnet, der um eine zu seiner Längsrichtung senkrechte Achse rotiert, oder der einen Pol hat, der in einer geraden Linie hin- und herzuschwingen gezwungen wird, wie eine Lampe auffassen. Wir können ihn wie eine Lampe betrachten, die Licht aussendet von einer Periode, die gleich seiner Rotations- bzw. seiner Schwingungsperiode ist. Für das Licht dieser Lampe ist zwei Millimeter dickes Kupferblech fast vollkommen durchsichtig, wenn die Periode etwas länger als eine Sekunde ist, es ist aber fast vollkommen undurchsichtig, wenn die Periode auf etwas weniger als  $1/8000$  einer Sekunde bis herab zu einem Achthundertmillionenmilliontel einer Sekunde (die Periode des äußersten Violett) sinkt, und ist wahrscheinlich absolut undurchlässig für noch kleinere Perioden bis herab zu denen der Röntgenstrahlen, wenn wir diese Strahlen als von Vibratoren herrührend auffassen, die nach jedem Stoße eine hinreichende Anzahl von Folgeschwingungen liefern, daß von einer Periode überhaupt gesprochen werden kann. Was auch die unterscheidende Charakteristik des Röntgenlichtes sein mag, zwei Millimeter dickes Kupferblech ist für dieses merklich durchscheinend, und Aluminiumblech ist es in noch höherem Maße.

1) Man denke an die bekannten Versuche von H. Hertz über elektromagnetische Wellen, die entlang Metalldrähten laufen. Die Theorie ist ja jetzt hinreichend entwickelt, wozu namentlich die Elektrodynamik so viel beigetragen hat. Hierher gehört auch die neuerdings viel studierte Frage des Verhaltens der Erde als Leiter gegen die drahtlosen Wellen. D. H.

2) Vgl. § 3 des Zusatzes K, „Über veränderliche elektrische und magnetische Schirmwirkung“, der aus Proc. R. Soc., Vol. XLIX, 9. April 1891, wiederabgedruckt ist; ferner Math. and Phys. Papers, Vol. III, Art. CII, „Ether, Electricity and Ponderable Matter“, § 35.

§ 144. Wir dürfen wohl mit Recht eine eingehende und zufriedenstellende Untersuchung, bei der mathematischer Scharfsinn und experimentelles Geschick zusammenarbeiten, erwarten, durch die wir die stetige Beziehung zwischen der Reflexion und Durchlichtung von Metallen und durchsichtigen Körpern und den Erscheinungen elektrischer und magnetischer Variationen in isolierender Materie, in nichtmagnetischen Metallen, in weichem Eisen und in gehärtetem Stahl für alle Schwingungsperioden, von denen der Röntgenstrahlen bis zu solchen von zehn oder zwanzig oder mehr Sekunden, in ihrem Wesen verstehen lernen. Sie muß notwendig auch die Beziehung zwischen der elektrischen Leitfähigkeit der Metalle und ihrer Undurchsichtigkeit aufdecken.<sup>1)</sup> Sie muß auch eine Betrachtung der molekularen und der atomistischen Struktur enthalten. Maxwells elektromagnetische Lichttheorie war ihrer Anlage nach molar<sup>2)</sup>, und demnach hat sie nichts mit der Theorie der Dispersion zu tun, die ihrem Wesen nach eng mit der metallischen Reflexion und Durchsichtigkeit verknüpft ist. Dennoch war dieser Mann, außerhalb seiner elektromagnetischen Lichttheorie, einer der ersten Führer in der Molekularlehre des neunzehnten Jahrhunderts; Beweis: seine kinetische Gastheorie, seine Schätzung der Form und des Gewichtes von Atomen; seine Vorwegnahme der molekularen Theorie der gewöhnlichen und der anomalen Dispersion von Sellmeier-Helmholtz, die in einer Examenfrage aus Cambridge veröffentlicht ist.<sup>3)</sup>

§ 145. Zunächst jedoch wollen wir, ohne jede Hypothese über die Molekeln und ohne über Greens rein molare Theorie eines unendlichen Widerstandes gegen Kompression und seine Annahme gleicher wirksamer Starrheiten des Äthers in allen Körpern und in dem von ponderabler Materie freien Raume hinauszugehen, versuchen, wie nahe wir einer Erklärung des hohen Reflexionsvermögens und der großen Undurchsichtigkeit der Metalle kommen können. Entweder große Starrheit oder große Dichte oder sowohl große Starrheit als große Dichte des Äthers in Metallen würde diese beiden Eigenschaften erklären; jedoch haben wir zugestimmt, Verschiedenheiten in

1) Das ist bekanntlich mittlerweile schon zum Teil geschehen. D. H.

2) „Wir wollen aber annehmen, daß wir schon über alle diese Schwierigkeiten (hinsichtlich der Elektrolyse) hinweg sind, indem wir uns einfach mit der Tatsache begnügen, daß die Ladung der Einzelmolekel eine ein für allemal gleiche, weder mit der Zeit noch mit der Substanz veränderliche Größe besitzt. Ich nenne der Bequemlichkeit wegen diese Ladung eine Elektrizitätsmolekel. So grobsinnlich dieser Ausdruck ist und so wenig er sich auch mit dem Geiste dieses Werkes verträgt, so soll er uns doch schließlich dazu verhelfen, klar auszusprechen, was wir bis jetzt von den Vorgängen bei der Elektrolyse wissen, und welche Schwierigkeiten noch zu überwinden sind.“ Maxwell, *Electricity and Magnetism*, Vol. I, p. 312; deutsch von B. Weinstein, S. 397.

3) Rayleigh sagt in einer Anmerkung, die er 1899 dem Ende seiner Abhandlung „On the Reflexion and Refraction of Light by Intensely Opaque Matter“ (Phil. Mag. 1872; neuveröffentlicht als Art. XVI seiner *Scientific Papers*, Vol. I) folgendes:

„Ich habe später gefunden, daß Maxwell (vor Sellmeier) das Problem der anomalen Dispersion behandelt hat. Seine Resultate sind in der mathematischen Tripos-Prüfung vom 21. Jan. 1869 (vgl. Cambridge-Calendar für dieses Jahr) enthalten.“

In dieser Prüfungsfrage ist bereits das später von Helmholtz eingeführte die Viskosität berücksichtigende Glied vorhanden.

der Starrheit nicht anzunehmen, und es bleibt so nur die Möglichkeit großer Dichte. Es ist jedoch interessant zu bemerken, daß unendliche Starrheit genau dasselbe Gesetz ergeben würde wie unendliche Dichte, weil jede extreme Hypothese einfach den Äther an der Zwischenfläche vollkommen unbeweglich festhalten würde; und dies auch dann, wenn wir den Äther innerhalb von Flüssigkeiten und Festkörpern kompressibel sein lassen, wie wir es später tun werden.

§ 146. Wir kehren zu § 132 (59)–(63) zurück und setzen, im Anschluß an Green,  $v = \infty$  und  $\nu = \infty$ . Dann wird vermöge (50)  $c = c = -ai^1$ , und (61) und (59) gehen über in

$$L = Kai \quad (74)$$

und

$$\left. \begin{aligned} -\frac{G'}{G} = \frac{\rho b - \rho, b - Kai}{\rho b + \rho, b + Kai} &= \sqrt{\frac{(\rho b - \rho, b)^2 + K^2 a^2}{(\rho b + \rho, b)^2 + K^2 a^2}} [\cos(\varphi + \psi) - i \sin(\varphi + \psi)], \\ \text{wo gesetzt ist} \quad K &= \frac{(\rho - \rho')^2}{\rho + \rho'}; \quad \varphi = \arctg \frac{Ka}{\rho b - \rho, b}, \quad \psi = \arctg \frac{Ka}{\rho b + \rho, b}. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Dies stimmt mit dem Resultat von Green<sup>2)</sup> überein, und das Quadrat des ersten Faktors im endgültigen Ausdruck für  $-\frac{G'}{G}$  ist die Formel, nach der die Kurve 3 der Figg. 62, 63, 64 in den obigen §§ 102, 103 für Wasser, Flintglas und Diamant berechnet wurde.

§ 147. Um diese Lösung auf dem für die physikalische Optik geeigneten Wege auszuwerten, setzen wir

$$f(\vartheta) = e^{i\omega\vartheta} = \cos \omega\vartheta + i \sin \omega\vartheta, \quad (76)$$

nehmen für die einfallende Welle

$$\vartheta = t - \frac{s}{u} \quad (77)$$

und setzen diese Beziehung weiter für die reflektierte Welle fort. Dabei soll  $s$  eine Strecke auf dem Wege des einfallenden Strahles bedeuten, die in dem reflektierten Strahl fortgeführt ist.

Wir verwenden diese Annahme in § 128 und nehmen für reale Verhältnisse den reellen Teil jedes so gefundenen Ausdrucks. Auf diese Weise erhalten wir für die Schwingungsverschiebung

Einfallende Welle:

$$G \cos \omega \left( t - \frac{s}{u} \right), \quad G \sin \omega \left( t - \frac{s}{u} \right)$$

Reflektierte Welle:

$$\left. \begin{aligned} -G \sqrt{\frac{(\rho b - \rho, b)^2 + K^2 a^2}{(\rho b + \rho, b)^2 + K^2 a^2}} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{s}{u} \right) - (\varphi + \psi) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

1) Man nehme  $-ai$  (und nicht  $+ai$ ), wo  $a$  positiv ist, damit in § 128  $H$  im oberen Medium den Extinktionskoeffizienten  $e^{-\omega ay}$  und im unteren den Extinktionskoeffizienten  $e^{\omega ay}$  erhalte. Vgl. Anmerkung zu § 158". Vgl. ferner § 128 und (49) und (54).

2) Green, Mathematical Papers, S. 267.

§ 148. Jetzt sei für einen Augenblick  $\rho/\varrho = \infty$ . Dann wird  $K/\varrho = 1$ ;  $\varphi = \psi = i$ ;<sup>1)</sup> und es ergibt sich für die Schwingungsverschiebung in der reflektierten Welle

$$-G \cos \left[ \omega \left( t - \frac{s}{u} \right) - 2i \right] = G \cos \left[ \omega \left( t - \frac{s}{u} \right) + \pi - 2i \right].$$

Hiernach ist die Schwingungsweite und damit die Intensität wie beim einfallenden Strahl  $G$ . Also folgt, daß für Schwingungen in der Einfallsebene bei jeder Inzidenz die Reflexion eine totale ist (was wir übrigens auch ohne mathematische Untersuchung wissen, da kein Energieverlust eintritt). Ferner lehrt die Formel, daß der reflektierte Strahl in seiner Phase gegen den einfallenden Strahl um  $\pi - 2i$  vorangeeilt ist. Für Schwingungen, die senkrecht zur Einfallsebene verlaufen, folgt der entsprechende Satz aus der Formel (39) des § 123, jedoch mit einer Phasenänderung von genau  $\pi$ . Demnach gibt eine Inzidenz von  $45^\circ$ , und nicht eine solche von  $70^\circ$  bis  $76^\circ$  wie bei Metallen, (§ 99 oben) einen Phasenunterschied von  $90^\circ$ . Weiter ist nach den Formeln leicht zu sehen, daß Werte von  $\rho/\varrho$ , die hinreichend groß sind, um den Glanz metallischer Reflexion zu liefern, nicht geeignet sind, auch nur eine Annäherung an die elliptische und zirkuläre Polarisation zu zeigen, die die Beobachtungen (§ 99 oben) doch bei allen metallischen Reflexionen nachweisen. Obwohl also unsere Versuchshypothese großer wirksamer Dichte des Äthers in der Substanz zu Reflexionen und demgemäß zu allgemeinen Erscheinungen führt, die das unbewaffnete Auge nicht von dem unterscheiden kann, was wir bei den Metallen verwirklicht sehen, versagt sie doch vollkommen bei der Erklärung der durch die Polarisationsanalyse entdeckten Eigenschaften des reflektierten Lichtes. Da wir so sehen, daß keine reelle positive wirksame Dichte in der Substanz die Eigenschaften der metallischen Reflexion vollständig erklären kann, schließen wir, daß die wirksame Dichte negativ oder imaginär ist; und so sind wir durch genaue mechanische Überlegungen zu der glänzenden Vorahnung von Mac Cullagh und von Cauchy gelangt, daß nämlich die metallische Reflexion durch einen imaginären Brechungsindex zu erklären ist.

§ 149. In § 159 weiter unten werden wir auf Grund einer neuen Molekulartheorie, zu der ich durch Betrachtung sehr verschiedener Gegenstände geführt worden bin, eine vollkommen klare und einfache mechanische Erklärung einer reellen negativen Größe für die wirksame Dichte von Äther eines Festkörpers, einer Flüssigkeit oder eines Gases finden, der von Lichtwellen einer beliebigen innerhalb bestimmter Grenzen liegenden Periode durchsetzt wird. Wir werden ferner bestimmte molekulare und dimensionale Bedingungen finden, die uns möglicherweise eine sichere molekulare Grundlage auch für eine imaginäre wirksame Dichte liefern können; immerhin sind wir noch sehr weit von der vollkommenen Durcharbeitung der vollständigen mechanischen Theorie entfernt.

Wir schließen hiernach die vorliegende Vorlesung mit einem kurzen Überblick über die Quasiwellenbewegung, die in einem elastischen Medium

1) Zunächst, nach (75), ist  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$ , nach (48), (49) hat man  $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} i$ , somit  $\varphi = i$ , ebenso  $\psi$ . Von Vielfachem von  $\pi$  kann selbstverständlich abgesehen werden. Im Original steht in der folgenden Formel  $\sin$ . D. H.

existieren kann, das eine bestimmte negative oder imaginäre wirksame Dichte  $\rho$  besitzt, und über die Lichtreflexion an einer ebenen Oberfläche eines solchen Mediums.

§ 150. Die Starrheit sei  $n$ , reell; und die Dichte  $\rho$  sei eine komplexe Größe, für die keine Einschränkung gemacht werde, folgender Art

$$\rho = \bar{\omega} (\cos \varphi - i \sin \varphi), \quad (79)$$

wo  $\bar{\omega}$  und  $\varphi$  reell sind und der Einfachheit wegen beide als positiv angenommen werden mögen. Dies ergibt für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen invariabler Dichte

$$\left. \begin{aligned} u &= w (\cos \tfrac{1}{2} \varphi + i \sin \tfrac{1}{2} \varphi); \quad u^{-1} = w^{-1} (\cos \tfrac{1}{2} \varphi - i \sin \tfrac{1}{2} \varphi), \\ \text{wo} \quad v &= \sqrt{\frac{n}{\bar{\omega}}} \text{ eine reelle Geschwindigkeit ist.} \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Weiter seien in solchen Wellen zur Zeit  $t$ ,  $\eta + i\eta'$  Verschiebungen in einer zu  $OX$  senkrechten Wellenebene. Wir wählen dann für unsere willkürliche Funktion

$$f(\vartheta) = e^{i\omega\vartheta},$$

und erhalten so

$$\eta + i\eta' = e^{i\omega(t-x/u)}. \quad (81)$$

Hieraus finden wir, wenn wir  $u^{-1}$  aus (80) nehmen, als reelle Lösung

$$\eta = e^{-\omega(x/w) \sin \frac{1}{2} \varphi} \cos \omega(t - [x/w] \cos \tfrac{1}{2} \varphi). \quad (82)$$

Dies zeigt, daß die Wellenebene sich in der  $+x$ -Richtung mit der Geschwindigkeit  $w \sec \frac{1}{2} \varphi$  und mit einer Schwingungsamplitude fortbewegt, die nach dem Exponentialgesetze  $e^{-\omega(x/w) \sin \frac{1}{2} \varphi}$  abnimmt. Es ist interessant zu bemerken, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser subsidiären Welle vermöge des Faktors  $\sec \frac{1}{2} \varphi$  ihrem Wesen nach größer ist als die Geschwindigkeit in einem Medium von einer reellen, dem Modul  $\bar{\omega}$  unserer imaginären Dichte gleichen Dichte, und unendlich groß wird, wenn  $\frac{1}{2} \varphi = 90^\circ$  ist. Dies verdeutlicht die Entdeckung Quinckes, daß die Geschwindigkeit des Lichtes in einer dünnen Metallhaut größer ist als in Luft.

§ 151. Wir bemerken jetzt, daß, je nachdem der reelle Teil der komplexen Größe  $\rho$  positiv oder negativ ist, man hat  $\varphi < 90^\circ$  oder  $> 90^\circ$ , daß in dem Grenzfalle, daß  $\rho$  positiv reell ist,  $\varphi$  Null ist und daß in dem andern Grenzfalle ( $\rho$  eine reelle negative Größe)  $\varphi$  gleich  $180^\circ$  ist. In jedem Falle zwischen diesen Grenzen liegt  $\frac{1}{2} \varphi$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$ , und ist demnach sowohl  $\cos \frac{1}{2} \varphi$  wie  $\sin \frac{1}{2} \varphi$  positiv. Dadurch ist ein Energieverlust in der sich einwärts bewegenden Welle angedeutet, ausgenommen den zweiten Grenzfalle,  $\frac{1}{2} \varphi = 90^\circ$ , in dem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unendlich groß ist und (82) übergeht in

$$\eta = e^{-\omega x/w} \sin \omega t. \quad (83)$$

Diese Formel stellt stehende Ätherwellen in der Substanz dar, die nach innen nach dem Exponentialgesetz abnehmen, und beweist, daß keine fortgesetzte Aufwendung von Energie stattfindet. Wir schließen hieraus, daß für unser ideales Silber die wirksame Quasidichte seines Äthers wesentlich reell

negativ ist; daß sie aber für alle Metalle, deren Reflexionsvermögen kein vollkommenes ist, eine komplexe Größe sein muß, deren reeller Teil sowohl negativ wie positiv sein kann.

§ 152. Wir beschränken unsere Aufmerksamkeit für jetzt auf ideales Silber und auf mehr molare Resultate der für die neunzehnte Vorlesung in Aussicht gestellten Molekulartheorie, setzen in den §§ 123, 132

$$-\mu^2 = \nu^2, \quad (84)$$

wo mit  $\nu^2$  eine reelle positive Zahl bezeichnet ist, und wollen die Phasendifferenz zwischen den in den §§ 123 und 132 angegebenen Komponenten finden, die von einfallendem Lichte herrühren, das in einer gegen die Einfallsebene schrägen Ebene polarisiert ist. Diese Phasendifferenz ist für die Hauptinzenz (vgl. § 97 oben)  $90^\circ$ . Ich habe die Arbeit mit Greens Annahme  $v = \infty$ ,  $\nu = \infty$  in § 132 durchgeführt und habe mit der in § 147 angegebenen Formel für  $G'/G$  gefunden, daß für alle Werte von  $\nu^2$  zwischen 0 und  $\infty$  sich Hauptinzenzen zwischen  $0^\circ$  und  $45^\circ$  ergeben. Nun zeigt die Beobachtung für alle Lichtarten und alle Metalle die Hauptinzenzen zwischen  $45^\circ$  und  $90^\circ$  (vgl. die Tabelle des § 99, die für alle bisher ausgeführten Beobachtungen metallischer Reflexion, soweit sie allgemein bekannt sind, Hauptinzenzen zwischen  $66^\circ$  und  $78^\circ$  nachweist). Demgemäß widerlegt die Polarisationsanalyse des reflektierten Lichtes für metallische Reflexion Greens Annahme unendlich großer Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Verdichtungs-Verdünnungswellen innerhalb des Metalles ebenso, wie sie für durchsichtige Substanzen in den §§ 104, 105 durch die bloße Beobachtung nichtanalysierter Spiegelungen widerlegt wurde.

§ 153. Indem wir den Ergebnissen der neunzehnten Vorlesung vorgreifen, wie wir es auch schon in § 133 oben getan haben, wollen wir demnach jetzt zwar in dem Äther außerhalb des Metalles die Annahme  $v = \infty$  beibehalten, aber  $\nu$  innerhalb des Metalles so klein annehmen, daß praktisch  $L$  verschwindet. Dadurch gehen (39) und (59) § 123 und § 132 über in

$$\frac{-C'}{C} = \frac{b-b}{b+b}; \quad \frac{-G'}{G} = \frac{e b - e, b}{e b + e, b}. \quad (85)$$

Setzen wir jetzt in (39) und in diesen Ausdrücken

$$\frac{b}{b} = \frac{u}{u} r; \quad \frac{e}{e} = -\nu^2; \quad \frac{u}{u} = -\sqrt{-1} \nu, \quad (86)$$

also nach (49)

$$r = \frac{\cos i}{\cos i} = \frac{\sqrt{\nu^2 + \sin^2 i}}{\nu \cos i}, \quad (87)$$

so finden wir

$$\frac{-C'}{C} = \frac{-i \nu r - 1}{-i \nu r + 1} = \frac{\nu r - i}{\nu r + i}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (88)$$

und

$$\frac{-G'}{G} = \frac{\nu - i r}{\nu + i r}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (89)$$

1) Das Zeichen Minus ist hier gewählt worden, damit  $e^{+p\nu}$  und nicht  $e^{-p\nu}$  der dämpfende Faktor von  $G$  werde, da  $p^{-1}$  eine positive Länge bedeutet. Vgl. Anmerkungen zu §§ 146, 158".

Jetzt machen wir

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{vr} = \theta, \quad \operatorname{arctg} \frac{r}{v} = \vartheta, \quad (90)$$

so gehen (88) und (89) über in

$$-\frac{C'}{C} = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos 2\theta - i \sin 2\theta \dots, \quad i = \sqrt{-1} \quad (91)$$

und

$$-\frac{G'}{G} = \frac{\cos \vartheta - i \sin \vartheta}{\cos \vartheta + i \sin \vartheta} = \cos 2\vartheta - i \sin 2\vartheta \dots, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (92)$$

Diese Formeln lehren<sup>1)</sup>, daß totale Reflexion für die beiden Fälle von Schwingungen stattfindet, die senkrecht zur Einfallsebene und in dieser Ebene verlaufen, und sie liefern uns  $2\theta$  und  $2\vartheta$ , Größen, die wir der Kürze wegen als „die Phasen der Schwingungen“ bezeichnen möchten. So erhalten wir, wenn wir mit  $P$  die durch die Inzidenz und die Reflexion bestimmte Ebene bezeichnen: Schwingungsphase senkrecht zu  $P$  — Schwingungsphase in  $P = 2(\vartheta - \theta)$ . (93)

$i$	$\theta = \operatorname{arctg} \frac{1}{vr}$	$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{r}{v}$	$2(\vartheta - \theta)$
0°	54,7°	54,7°	0,0°
10	53,5	55,9	4,8
20	50,1	59,1	18,0
30	45,0	63,4	36,8
40	38,7	68,2	59,0
50	31,7	72,9	82,4
53,2	29,3	74,3	90,0
60	24,1	77,4	106,6
70	16,2	81,7	131,0
80	8,2	86,9	155,4
90	0,0	90,0	180,0

$$v^2 = 0,5.$$

$i$	$\theta = \operatorname{arctg} \frac{1}{vr}$	$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{r}{v}$	$2(\vartheta - \theta)$
0°	17,5°	17,5°	0,0°
10	17,3	17,8	1,0
20	16,5	18,7	4,4
30	15,1	20,3	10,4
40	13,4	22,8	18,8
50	11,2	26,8	31,2
60	8,7	33,3	49,2
70	5,9	44,0	76,2
73,8	4,8	49,7	89,8
80	3,0	62,3	118,6
90	0,0	90,0	180,0

$$v^2 = 10.$$

1) Nach derselben Schlußfolge wie in § 147, 148.

Dies besagt, daß die zu  $P$  senkrechten Schwingungen den in  $P$  stattfindenden um  $2(\vartheta - \theta)$  voraneilen.

Welchen positiven Betrag  $\nu^2$  auch haben möge, so ist diese Differenz nach (87) und (90) ihrem Wesen nach Null für die Inzidenz  $i = 0$ ; und wir finden, daß sie von  $+90^\circ$  bis  $+180^\circ$  anwächst, wenn  $i$  von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  steigt, wie dies durch die vorstehenden beiden Tabellen gezeigt wird, die für die beiden Fälle  $\nu^2 = 0,5$  und  $\nu^2 = 10$  berechnet sind.

§ 154. Der Einfallswinkel ( $53,2^\circ$  für  $\nu^2 = 0,5$ ,  $73,8^\circ$  für  $\nu^2 = 10$ ), der die Phasendifferenz  $90^\circ$  ergibt, ist das, was als Hauptinzidenz (§ 97, oben) eingeführt ist. Da die Reflexionen für die beiden Polarisationskomponenten des einfallenden Lichtes vollkommen sein sollen, ist dasjenige Azimut, das für die „Hauptinzidenz“ Zirkularpolarisation des reflektierten Lichtes liefert, d. h. das „Hauptazimut“,  $45^\circ$ . Für alle wirklichen Metalle zeigt die Beobachtung, daß die Phasendifferenz  $2(\vartheta - \theta)$  positiv ist, d. h. daß die in der Spiegelungsebene verlaufende Schwingung hinter der senkrecht zu ihr verlaufenden zurückbleibt; in Übereinstimmung mit dem, was wir für ideales Silber auf Grund der mechanischen Theorie fanden [Gleichung (93)].

§ 155. Das leichteste mathematische Verfahren, die Hauptinzidenz  $J$  für einen beliebig gegebenen Wert von  $\nu^2$  zu finden, ist algebraisch, und zwar das folgende. Für die Hauptinzidenz haben wir

$$2(\vartheta - \theta) = 90^\circ. \quad (94)$$

Dies ergibt  $\operatorname{tg} 2\vartheta \operatorname{tg} 2\theta = -1$ , oder algebraisch gesprochen nach (90)

$$\frac{4\nu^2 r^2}{(\nu^2 r^2 - 1)(\nu^2 - r^2)} = -1, \quad (95)$$

woraus folgt

$$\nu^4 - r^2(\nu^2 + 4 + \nu^{-2}) + 1 = 0. \quad (96)$$

Nimmt man die größere Wurzel dieser als nach  $r^2$  quadratisch zu behandelnden Gleichung und setzt sie für  $r^2$  in den allgemeinen Ausdruck

$$\operatorname{tg}^2 i = \nu^2(r^2 - 1)/(\nu^2 + 1), \quad (97)$$

der sich aus (87) für  $i$ , durch  $\nu$  und  $r$  ausgedrückt ergibt, ein, so findet man

$\nu$	$\nu^2$	$\operatorname{tg} J$	$J$
0,00	0,00	1,000	45,0°
0,50	0,25	1,193	50,0
0,71	0,50	1,333	53,1
1,00	1,00	1,554	57,2
1,41	2,00	1,887	62,1
2,00	4,00	2,387	67,2
2,45	6,00	2,786	70,3
3,16	10,00	3,438	73,8
3,74	14,00	3,982	75,9
4,00	16,00	4,223	76,6
4,47	20,0	4,680	77,9
6,00	36,0	6,160	80,8
10,00	100,0	10,10	84,3
14,00	196,0	14,07	85,9
20,00	400,0	20,05	87,1



$\operatorname{tg}^2 J$  für die Hauptinzipidenzen. Die kleinere Wurzel der quadratischen Gleichung wird verworfen, da sie  $\operatorname{tg}^2 J$  negativ macht.

Die vorstehende Tabelle wurde so direkt berechnet, nm für vierzehn Werte von  $\nu$  oder  $\nu^2$  die Hauptinzipidenz  $J$  nachzuweisen.

§ 156. Die umgekehrte Aufgabe,  $\nu^2$  für eine beliebig gegebene Hauptinzipidenz zu finden, führt nach (96) und (97) zu einer kubischen Gleichung für  $\nu^2$ . Die Tabelle des § 155 beweist, daß diese Gleichung eine und nur eine positive Wurzel für jeden Wert von  $J$  zwischen  $45^\circ$  und  $90^\circ$  besitzt und keine reelle positive Wurzel für Werte von  $J$  zwischen  $0^\circ$  und  $45^\circ$ . Für unsern vorliegenden Zweck wird sie äußerst leicht durch die regula falsi unter Zuhilfenahme der Tabelle aus § 155 gelöst. Ich habe so für die drei von Conroy gemessenen Hauptinzipidenzen für rotes, gelbes und blaues Licht die folgenden Beträge für  $\nu$  und  $\nu^2$  ermittelt.

	$J$	$\nu$	$\nu^2$
Rot	$76^\circ 29'$	3,9	15,2
Gelb	$74^\circ 37'$	3,3	10,9
Blau	$71^\circ 33'$	2,7	7,29

§ 157. Die Zeichnung des § 88 zeigt, daß die von Conroy benutzte Silberhaut, die in der Weise, wie er es getan hat, mit Zinnaschenpulver poliert war, als unserm idealen Silber äußerst nahe kommend betrachtet werden kann. Diese Anschauung wird durch seine drei Hauptazimute  $43^\circ 51'$ ,  $43^\circ 52'$ ,  $43^\circ 0'$  bestätigt, da diese Winkel eine nahezu so gute Annäherung an  $45^\circ$  bilden, wie möglich ist (vgl. § 159'' weiter unten). Aber ihr Zurückbleiben unter  $45^\circ$  um ein bis zwei Grad ist zweifellos ein wirkliches, und weist auf die Korrektur der reellen Werte von  $\nu^2$  durch Hinzufügen eines kleinen rein imaginären Gliedes hin. So kann man, um den Formeln des § 150 mit Conroys Silber zu genügen  $\bar{\omega}$  als positive Größe beibehalten und  $\varphi = 180 - \chi$  annehmen; dann mag der Winkel  $\chi$ , der für ideales Silber Null sein müßte, für wirkliches Silber einen kleinen Wert von einigen Grad haben.

§ 158. Es wäre interessant, den Gegenstand weiter zu verfolgen und nach dem Silber andere Metalle zu behandeln, für die wir experimentelle Daten nach Art der in der Tabelle des § 99 mitgeteilten besitzen. Um dies durchzuführen, können wir vorteilhaft in (87), (88), (89) setzen

$$\nu^2 = p(\cos \chi - i \sin \chi) \quad (98)$$

und die experimentellen Daten über die Hauptinzipidenz und das Hauptazimut verwenden, um in jedem Einzelfalle die beiden unbekannten Größen  $p \cos \chi$  und  $p \sin \chi$  zu bestimmen; allein die Zeit fehlt hierzu. Das wäre eine wirkliche Ausführung der Theorie oder der empirischen Formel von Mac Cullagh und Cauchy, wenn man letztere mit den Beobachtungsergebnissen über metallische Reflexion vergliche, wie sie von Eisenlohr, Jamin, Conroy und anderen<sup>1)</sup> gegeben sind. Bisher ist die Übereinstimmung der Theorie

1) Basset, Physical Optics §§ 371, 380; Mascart, Traité d'Optique, Vol. II.  
Kelvin-Weinstein, Molekuldynamik.

mit der Beobachtung zwar einigermaßen annähernd, aber nicht vollkommen zufriedenstellend befunden. Stokes, der die Abhandlung Nr. III von Conroy mitteilt (Proc. R. S. Febr. 15, 1883), kommentiert diesen Mangel an vollkommener Übereinstimmung und nimmt an, daß er davon herrührt, daß in die metallische Reflexion das mit eingeschlossen wird, was er als die „Diamanteigenschaft“ einer Substanz bezeichnet, eine Eigenschaft, die erforderlich ist, die Abweichung von Fresnels Gesetz der Reflexion von Licht an durchsichtigen Körpern zu erklären, und die vor achtzig Jahren von Airy am Diamant entdeckt worden ist. Diese Diamanteigenschaft läßt sich, wie wir in der neunzehnten Vorlesung § 173 sehen werden, mechanisch durch die Annahme eines kleinen imaginären Wertes  $iq$  für die Geschwindigkeit der Verdichtungs-Verdünnungswellen in der Substanz erklären, der aber nicht so klein ist, daß er  $L$  in unsern Formeln des § 132 ganz zur Null machte. Die Größe der Diamanteigenschaft läßt sich durch das Verhältnis  $q/u$  messen, und ich schlage vor, sie als Adamantinismus zu bezeichnen. Auch eine kleine Abweichung von der genauen Gleichheit in den wirksamen Starrheiten des Äthers in den beiden Medien kann als Mittel dafür in Anspruch genommen werden, eine Übereinstimmung zwischen der mechanischen Theorie und der Beobachtung für die Reflexion von Licht an allen Substanzen, durchsichtigen und metallisch oder andersartig undurchsichtigen, zu erzielen.

§ 158<sup>I</sup>. Inzwischen schließe ich die vorliegende achtzehnte Vorlesung über die Reflexion von Licht mit einer Anwendung der §§ 123 (39) und 132 (59), indem ich  $L = 0$  setze, auf die Theorie des Fresnelschen Rhombus.

Das Medium, in dem  $u$  die Lichtgeschwindigkeit ist, sei ein durchsichtiger Festkörper oder eine solche Flüssigkeit, und das andere Medium sei ungestörter Äther. Wir dürfen jetzt nicht mehr die bequeme Bezeichnung Greens aus § 116 verwenden und das erstere als „das obere“, das letztere als „das untere“ bezeichnen. Jetzt ist

$$\begin{aligned} u > u; \varrho > \varrho; i > i; u/u = \mu; \varrho/\varrho = \mu^2; \\ \sin i = \mu \sin i; b = \cos i/u; b = \cos i/u. \end{aligned} \quad (98^I)$$

Der Bequemlichkeit wegen schreiben wir bei der Durchführung des Falles  $i > i$  die oben angeführten Gleichungen folgendermaßen

$$\frac{C'}{C} = \frac{b - b}{b + b}; \quad \frac{G'}{G} = \frac{\varrho \cdot b - \varrho \cdot b}{\varrho \cdot b + \varrho \cdot b}. \quad (98^{II})$$

Das Zeichen Minus ist so auf den linken Seiten getilgt, da vermöge  $i > i$  jetzt  $\frac{C'}{C}$  im ganzen Gebiete der nichttotalen Reflexion [ $i = 0$  bis  $i = \arcsin(1/\mu)$ , was  $i = 90^\circ$  ergibt] positiv ist, und da  $G'/G$  in dem Gebiete bis zum Brewsterschen Winkel des reflektierten Strahles Null [ $i = 0$  bis  $i = \arctg(1/\mu)$ ] positiv ist. Von  $i = \arctg(1/\mu)$  bis  $i = \arcsin(1/\mu)$  nimmt  $G'/G$  von 0 bis  $-1$  ab, und ist imaginär-komplex mit dem Modul 1 in dem ganzen Gebiete totaler Reflexion [ $i = \arcsin(1/\mu)$  bis  $i = 90^\circ$ ].

§ 158<sup>II</sup>. Wenn  $i$  zwischen  $\arcsin(1/\mu)$  und  $90^\circ$  liegt, ist  $b^2$  reell negativ, und man erhält, wenn man den Wert dieser Größe (wie in § 118) mit  $-q^2$  bezeichnet,

$$b = -iq \quad i = \sqrt{-1},$$

woraus sich nach (98<sup>I</sup>) ergibt<sup>1)</sup>

$$q = b \frac{\sqrt{(\mu^2 \sin^2 i - 1)}}{\mu \cos i} \quad (98^{III})$$

Man beachte, daß  $q$  von 0 bis  $\infty$  wächst, wenn  $i$  von  $\arcsin(1/\mu)$  bis  $90^\circ$  zunimmt. Benutzt man (98<sup>III</sup>) in (98<sup>II</sup>), so folgt

$$\frac{C'}{C} = \frac{b + iq}{b - iq}; \quad \frac{G'}{G} = \frac{\mu^2 q - ib}{\mu^2 q + ib}. \quad i = \sqrt{-1}, \quad (98^{IV})$$

und hieraus nach der Moivreschen Formel

$$\frac{C'}{C} = \cos 2\psi + i \sin 2\psi; \quad \frac{G'}{G} = \cos 2\chi - i \sin 2\chi; \quad i = \sqrt{-1} \quad (98^V)$$

und demgemäß

$$\psi = \arctg \frac{q}{b}; \quad \chi = \arctg \frac{b}{\mu^2 q}. \quad (98^{VI})$$

Aus (98<sup>VI</sup>) und (98<sup>III</sup>) ersehen wir, daß  $\psi$  von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  wächst und  $\chi$  von  $90^\circ$  bis  $0^\circ$  abnimmt, wenn  $i$  von  $\arcsin(\mu^{-1})$  bis  $90^\circ$  zunimmt.

§ 158<sup>III</sup>. Setzt man für einen Augenblick  $q/b = x$ , so folgt

$$\frac{d}{dx}(\psi + \chi) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\mu^2 x^2 + \mu^{-2}}. \quad (98^{VII})$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich Null, so findet man für  $(\psi + \chi)$  ein Minimum

$$\text{bei } q/b = \mu^{-1}, \text{ woraus sich ergibt } \psi = \chi = \arctg(\mu^{-1}). \quad (98^{VIII})$$

Damit aber  $q/b = \mu^{-1}$  werde, muß nach (98<sup>III</sup>) sein  $\operatorname{tg}^2 i = 2/(\mu^2 - 1)$ . Hieraus schließen wir, daß wenn  $i$  von  $\arcsin(\mu^{-1})$  auf  $\arctg \sqrt{2/(\mu^2 - 1)}$  ansteigt,  $(\psi + \chi)$  von  $90^\circ$  bis  $2 \arctg(\mu^{-1})$  abnimmt und nachher wiederum bis  $90^\circ$  wächst, wenn  $i$  bis  $90^\circ$  ansteigt. Dieses Ergebnisses werden wir uns in § 158<sup>VI</sup> bedienen.

§ 158<sup>IV</sup>. Machen wir nun, wie in § 147, die Nutzenanwendung von den durchgeführten Rechnungen, so finden wir für Schwingungen senkrecht zu und für solche in der Einfall- und Reflexionsebene ( $P$ ) die folgenden reellen Lösungen:

$$\text{Schwingungen senkrecht zu } P \left\{ \begin{array}{l} \text{Einfallende Welle: } C \cos \omega \left( t - \frac{s}{u} \right) \\ \text{Reflektierte Welle: } C \cos \left[ \omega \left( t - \frac{s}{u} \right) + 2\psi \right] \end{array} \right. \quad (98^{IX})$$

$$\text{Schwingungen in } P \left\{ \begin{array}{l} \text{Einfallende Welle: } G \cos \omega \left( t - \frac{s}{u} \right) \\ \text{Reflektierte Welle: } G \cos \left[ \omega \left( t - \frac{s}{u} \right) - 2\chi \right] \end{array} \right. \quad (98^X)$$

1) Das Zeichen Minus ist hier gewählt, damit sich als Reduktionsfaktor für  $C$  und  $G$  für die Störung in dem außerhalb befindlichen Äther  $e^{2\omega y}$  und nicht  $e^{-2\omega y}$  ergibt, vgl. § 128; dabei ist  $y$  an der reflektierenden Fläche Null und außerhalb negativ gerechnet.

So sehen wir, daß die reflektierten Schwingungen in der Ebene  $P$  in ihrer Phase um  $2(\psi + \chi)$  hinter den reflektierten Schwingungen senkrecht zu  $P$  zurückbleiben. Aus § 158<sup>III</sup> erkennen wir weiter, daß dieses Zurückbleiben bei zwei Inzidenzen,  $i = \arcsin(\mu^{-1})$  und  $i = 90^\circ$  (den Grenzen der totalen Reflexion),  $180^\circ$  beträgt, und ferner, daß es bis zu einem Minimum,  $4 \arctg(\mu^{-1})$ , bei dem zwischen diesen Grenzen liegenden Einfallswinkel  $i = \arctg \sqrt{2/(\mu^2 - 1)}$  abnimmt.

Das Zurückbleiben der Phase in dem ganzen Gebiete totaler Reflexion wird weiter unten in Tabelle II des § 158<sup>V</sup> (S. 326 ff.) für vier Brechungsindizes 1,46; 1,5; 1,51 und 1,6 dargestellt.

Die erste Kolumne gibt die Inzidenzwinkel an.

Die Kolnmnen 2 und 3 geben das absolute Zurückbleiben der Phase durch Reflexion bzw. in und senkrecht zu der Ebene  $P$  wieder.

Die Kolumne 4 stellt das Zurückbleiben der Phase der Schwingungen in  $P$  hinter den Schwingungen senkrecht zu  $P$  dar, wie es durch eine einzige Reflexion hervorgerufen wird.

Die Zahlen in Kolumne 4 sind, doppelt genommen, das gesamte Zurückbleiben durch zwei Reflexionen bei demselben Einfallswinkel  $i$  von Schwingungen in der Ebene  $P$  hinter Schwingungen senkrecht zu der Ebene  $P$ . Alle diese Zahlen liegen zwischen  $180^\circ$  und  $360^\circ$ , und demgemäß zeigt dies ein Voraneilen der Phase der Schwingungen in  $P$  vor der Phase derjenigen senkrecht zu  $P$  um den Betrag, um den jede dieser Zahlen kleiner ist als  $360^\circ$ . Dementsprechend stellen die Zahlen in der Kolumne 5 der Tabelle II im Effekt das Voraneilen der Phase der Schwingungen in der Ebene  $P$  vor den Schwingungen senkrecht zu der Ebene  $P$  nach zwei Reflexionen dar.

§ 158<sup>V</sup>. Man sieht, daß alle in der Kolumne 4 der Tabelle II enthaltenen Phasendifferenzen stumpfe Winkel sind mit Minimumswerten, die in Tabelle I sich finden. Diese letztere Tabelle ist auch auf Zinksulfid, Diamant und Realgar ausgedehnt. Aus der Tabelle I selbst erkennt man noch, daß die Phasendifferenz für innere Reflexion in verschiedenen Glassorten und für alle bekannten durchsichtigen Körper, deren Brechungsindex kleiner als 2,414 ist, für alle Einfallswinkel in dem ganzen Gebiete der totalen inneren Reflexion stumpfe Winkel sind. Dieser Schluß war für mich sehr überraschend, da man vor achtzig Jahren gemeint hat, daß für totale innere Reflexion in Glas die Phasendifferenz bei einer einzelnen Reflexion ein spitzer Winkel sei,

Totale innere Reflexion. Tabelle I

Brechungsindex $\mu$	Brewsterscher Winkel $\arctg(1/\mu)$	Grenzwinkel für totale innere Reflexion $\arcsin(1/\mu)$	Inzidenz für kleinste Phasendifferenz $\arctg \sqrt{2/(\mu^2 - 1)}$	Kleinste Phasendifferenz $4 \arctg(1/\mu)$
1,46	34° 24,5'	43° 14'	53° 3'	137° 38'
1,50	33 41,25	41° 49'	51° 40'	134 45
1,51	33 30,75	41 28	51 20	134 3
1,60	32 0,25	38 41	48 33	128 1
(Zinksulfid) 2,371	22 52	24 57	33 20	91 28
$\mu = \operatorname{ctg} 22\frac{1}{2}^\circ = 2,414$	22 30	24 28	32 46	90 0
(Diamant) 2,434	22 20	24 15	32 31	89 20
(Realgar) 2,454	22 10	24 3	32 15	88 40

und daß er für jede Reflexion im Fresnelschen Rhombus  $45^0$  betrage und nicht  $135^0$ , wie wir es jetzt wissen. Warum es so ist, können wir leicht durch die folgenden einfachen Überlegungen sehen.

(1). Zirkularpolarisiertes Licht hat in jedem Falle direkter Inzidenz und Reflexion (an Metallen oder Glas, äußerer oder innerer) seine kreisförmigen Bahnbewegungen in den einfallenden und reflektierten Wellen in denselben absoluten Richtungen. Demnach läuft die Kreisbewegung, wenn sie einem den einfallenden Strahl aufnehmenden Auge der Gangrichtung des Uhrzeigers entgegengesetzt erscheint, einem den reflektierten Strahl auffangenden Auge in Richtung des Uhrzeigers. (Hiernach ist die Anordnung bezüglich der Zeichen in den Figuren 61a und 61b des § 92 folgendermaßen zu verstehen: Zuerst stellen wir uns vor, die beiden Zeichnungen entsprechen der normalen Inzidenz für das einfallende Licht, Fig. 61b, mit dem Gesicht unten, nach oben hingeschaut, und für das reflektierte Licht, Fig. 61a, mit dem Gesicht oben, nach unten hingeschaut. Hierauf neige man die beiden Ebenen stetig, so daß alle Inzidenzen von  $i = 0^0$  bis  $i = 90^0$  erfolgen.)

(2). Zuerst nehme man außen reflektiertes Licht, dessen kreisförmige Bahnen dem Gange des Uhrzeigers entgegengesetzt verlaufen, das auf Glas mit zu vernachlässigendem Adamantinismus fällt, und lasse den Einfallswinkel von  $0^0$  bis zu dem Brewsterschen  $\arctg(\mu)$  anwachsen. Die das reflektierte Licht bildende Bewegung verläuft in elliptischen Bahnen im Sinne des Uhrzeigers mit wachsender Elliptizität, bis sie bei  $\arctg(\mu)$  geradlinig wird; die großen Achsen der Ellipsen sind dabei zur Reflexionsebene senkrecht. Läßt man jetzt den Einfallswinkel bis  $90^0$  ansteigen, so werden die Bewegungsbahnen elliptisch entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers mit abnehmender Elliptizität (auch jetzt sind die großen Achsen zur Reflexionsebene senkrecht), und werden unendlich nahe kreisförmig, wenn die Inzidenz unendlich nahe streifend wird.<sup>1)</sup>

(3). Wir verfahren wie in (2), jedoch betrachten wir innere und nicht äußere Reflexion an einer Glasfläche. Das einfallende zirkularpolarisierte Licht sei wieder dem Sinne des Uhrzeigers entgegengesetzt gerichtet. Mit Inzidenzen, die von  $i = 0$  an wachsen, ist das reflektierte Licht in Richtung des Uhrzeigers elliptisch, mit wachsender Exzentrizität, bis es bei dem Brewsterschen  $\arctg(1/\mu)$  geradlinig wird. Läßt man  $i$  weiter wachsen, so ist das reflektierte Licht elliptisch entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers mit abnehmender Exzentrizität, bis es an der Grenze der totalen inneren Reflexion  $\arcsin(1/\mu)$  zirkular wird. Läßt man  $i$  noch weiter bis  $90^0$  ansteigen, so wird das reflektierte Licht elliptisch, immer noch dem Sinne des Uhrzeigers entgegengesetzt, mit bis zu einem Maximum bei  $i = \arctg \sqrt{2/(\mu^2 - 1)}$  zunehmender und dann wieder abnehmender Exzentrizität, bis die Bahn wiederum unendlich nahe kreisförmig wird, sobald  $i$  unendlich wenig kleiner als  $90^0$  ist.

(4). Wenn die Reflexion nicht an Glas, sondern an einer Substanz erfolgt, deren Brechungsindex 2,414 ist, dann liefert zirkularpolarisiertes Licht, dessen Bewegung gegen den Uhrzeiger gerichtet ist und das unter Winkeln

1) Hier und an vielen anderen Stellen ist auf innere und äußere Reflexion zu achten, wonach es sich um  $\arctg \frac{1}{\mu}$  oder um  $\arctg \mu$  handelt. D. H.

Totale innere Reflexion. Tabelle II.

	Kol. 1	Kol. 2	Kol. 3	Kol. 4	Kol. 5
$i$		$\psi$ und $\chi$ , nur bis auf die nächste volle Minute berechnet, außer für den Fall, daß sie sich gleich ergeben.		$2(\psi + \chi)$ ; nämlich das wirkliche Zurückbleiben der Phase der in der Ebene $P$ verlaufenden Schwingungen hinter den senkrecht zu dieser Ebene verlaufenden, durch eine Reflexion verursacht.	$360^\circ - 4(\psi + \chi)$ ; nämlich das effektive Voranreiten der Phase der in der Ebene $P$ verlaufenden Schwingungen vor den senkrecht zu dieser Ebene verlaufenden, durch zwei Reflexionen verursacht.
		$2\psi$	$2\chi$		
$\mu = 1,50$	$41^\circ 48,6'$	$0^\circ 0'$	$180^\circ 0'$	$180^\circ 0'$	$0^\circ 0'$
	42	8 50	160 16	169 6	21 48
	43	22 14	132 18	154 32	50 56
	44	30 22	117 36	147 58	64 4
	45	36 52	106 14	143 6	73 48
	46	42 30	97 36	140 6	79 48
	47	47 34	90 28	138 2	83 56
	48	52 16	84 20	136 36	86 48
	49	56 40	79 0	135 40	88 40
	50	60 50	74 16	135 6	89 48
	51	64 48	70 0	134 48	90 24
	51 40,3	67 22,8	67 22,8	134 45,6 (Min.)	90 28,8 (Max.)
	52	68 36	66 10	134 46	90 28
	53	72 18	62 38	134 56	90 8
	53 12				90 0
	54	75 54	59 22	135 16	89 28
	55	78 4	57 26	135 30	89 0
	56	82 46	53 32	136 18	87 24
	57	86 6	50 52	136 58	86 4
	58	89 22	48 24	137 46	84 28
	59	92 34	46 2	138 36	82 48
	60	95 44	43 48	139 32	80 56
	70	125 22	25 52	151 14	57 32
	80	153 4	12 8	165 12	29 36
	90	180 0	0 0	180 0	0 0
$\mu = 1,46$	$43^\circ 13,8'$	$0 0$	$180 0$	$180 0$	$0 0$
	44	18 18	142 6	160 24	39 12
	45	27 56	124 22	152 18	55 24
	46	35 8	112 0	147 8	65 44
	47	41 14	102 34	143 48	72 24
	48	46 38	94 52	141 30	77 0
	49	51 34	88 18	139 52	80 16
	50	56 10	82 38	138 48	82 24
	51	60 32	77 36	138 8	83 44
	52	64 40	73 6	137 46	84 28
	53	68 38	69 1	137 39	84 42
	53 2,98	68 49,0	68 49,0	137 38,0 (Min.)	84 44 (Max.)
	54	72 26	65 16	137 42	84 36
	55	76 8	61 50	137 58	84 4
	56	79 44	58 38	138 22	83 16
	57	83 16	55 40	138 56	82 8
	58	86 40	52 48	139 28	81 4
	59	90 2	50 14	140 16	79 28
	60	93 20	47 46	141 6	77 48
	70	124 0	28 0	152 0	56 0
	80	152 26	13 8	165 34	28 52
	90	180 0	0 0	180 0	0 0

Totale innere Reflexion. Tabelle II. Fortsetzung.

Kol. 1	Kol. 2		Kol. 3		Kol. 4		Kol. 5	
$i$	$\psi$ und $\chi$ , nur bis auf die nächste volle Minute berechnet, außer für den Fall, daß sie sich gleich ergeben.				$2(\psi + \chi)$ ; nämlich das wirkliche Zurückbleiben der Phase der in der Ebene $P$ verlaufenden Schwingungen hinter den senkrecht zu dieser Ebene verlaufenden, durch eine Reflexion verursacht		$360^\circ - 4(\psi + \chi)$ ; nämlich das effektive Voraneilen der Phase der in der Ebene $P$ verlaufenden Schwingungen vor den senkrecht zu dieser Ebene verlaufenden, durch zwei Reflexionen verursacht.	
	$2\psi$		$2\chi$					
$\mu = 1,51$	41° 28,3'	0° 0'	180° 0'		180° 0'		0° 0'	
	42	14 40	147 16		161 56		36 8	
	43	25 6	126 8		151 14		57 32	
	44	32 30	112 46		145 16		69 28	
	45	38 38	102 46		141 24		77 12	
	46	44 0	94 42		138 42		82 36	
	47	48 54	87 42		136 36		86 48	
	48	53 30	82 4		135 34		88 52	
	49	57 46	76 58		134 44		90 32	
	50	61 50	72 26		134 16		91 28	
	51	65 44	68 20		134 4		91 52	
	51 20,41	67 1,7	67 1,7		134 3,4 (Min.)		91 53,2 (Max.)	
	52	69 30	64 36		134 6		91 48	
	53	73 6	61 12		134 18		91 24	
	54	76 38	58 2		134 40		90 40	
	54 37						90 0	
	55	80 6	55 6		135 12		89 36	
	56	83 26	52 22		135 48		88 24	
	57	86 44	49 48		136 32		86 56	
	58	89 58	47 22		137 20		85 20	
	59	93 8	45 4		138 12		83 36	
	60	96 16	42 54		139 10		81 40	
	70	125 40	25 22		151 2		57 56	
	80	154 4	11 32		165 36		28 48	
	90	180 0	0 0		180 0		0 0	
$\mu = 1,60$	38° 40,9'	0 0	180 0		180 0		0 0	
	39	10 48	152 48		163 36		33 48	
	40	22 12	126 40		148 52		62 16	
	41	29 36	111 50		141 26		77 8	
	42	35 38	101 6		136 44		86 32	
	43	40 56	92 36		133 32		92 56	
	44	45 42	85 40		131 22		97 16	
	45	50 4	79 48		129 52		100 16	
	46	54 18	74 38		128 56		102 8	
	47	58 14	70 6		128 20		103 20	
	48	62 0	66 4		128 4		103 52	
	48 33,0	64 0,6	64 0,6		128 1,2 (Min.)		103 57,6 (Max.)	
	49	65 38	62 24		128 2		103 56	
	50	69 6	59 6		128 12		103 36	
	51	72 34	56 2		128 36		102 48	
	52	75 54	53 14		129 8		101 44	
	53	79 6	50 38		129 44		100 32	
	54	82 18	48 10		130 28		99 4	
	55	85 24	45 52		131 16		97 28	
	56	88 28	43 42		132 10		95 40	
	57	91 30	41 40		133 10		93 40	
	58	94 30	39 42		134 12		91 36	
	58 44						90 0	
	59	97 26	37 52		135 18		89 24	
	60	100 20	36 6		136 26		87 8	
	70	128 2	21 34		149 36		60 48	
	80	154 18	10 12		164 30		31 0	
	90	180 0	0 0		180 0		0 0	

auffällt, die von  $24^{\circ} 28'$  an zunehmen, totale Reflexion und gegen den Uhrzeigergang gerichtete kreisförmige Bahnen, die elliptisch mit wachsender Exzentrizität werden und für  $i = 32^{\circ} 46'$  in gerade Linien übergehen. Weiteres Anwachsen von  $i$  bis  $90^{\circ}$  verursacht elliptische Bahnen mit abnehmender Exzentrizität bis zum Übergang in kreisförmige; sämtlich entgegengesetzt der Richtung des Uhrzeigerganges.

(5). Diamant und Realgar und alle anderen Substanzen, für die  $\mu > 2,414$  ist, haben drei Hauptinzenzen für innere Reflexion, eine mit nicht-totaler Reflexion bei dem Brewsterschen Winkel  $\arctg(1/\mu)$  und zwei innerhalb des Gebietes totaler Reflexion; die eine ist kleiner, die andere größer als die Inzidenz, die die Phasendifferenz zu einem Minimum macht. Gegen die Richtung des Uhrzeigerganges zirkulärpolarisiertes Licht, das unter einem beliebigen Winkel zwischen den beiden letztgenannten Hauptinzenzen einfällt, liefert für das reflektierte Licht elliptische Bahnen im Sinne des Uhrzeigerganges, die bei einem bestimmten Zwischenwinkel eine kleinste Abweichung von der Kreisform (wir wollen diese Form die kleinster Elliptizität nennen) zeigen.

(6). Es ist interessant zu beachten, daß in allen Fällen das reflektierte Licht, je nachdem diese Phasendifferenz stumpfe oder spitze Winkel gibt, gegen die oder in der Richtung des Uhrzeigerganges schwingt, wenn das einfallende Licht zirkulär gegen die Richtung des Uhrzeigerganges schwingt. Dies gibt in Verbindung mit den Darlegungen des § 158<sup>XVII</sup> ein einfaches Mittel, die Feststellungen (1, 2, 3, 4, 5) experimentell zu prüfen. Der so für die Wahrheit der Angabe, daß die Phasendifferenz in allen Fällen bei nahezu streifender Inzidenz  $180^{\circ}$  ist, beizubringende experimentelle Beweis ist sehr leicht und klar; denn der Versuch kann so angeordnet werden, daß das Auge gleichzeitig das einfallende und das reflektierte Licht sieht; beides wird durch dieselbe Anordnung der analysierenden Fresnelschen (oder Viertelwellenlänge) Platte und des Nicolschen Prismas ausgelöscht.

(7). Die unter (1) des vorliegenden Abschnittes angeführte und in den Figuren 61a und 61b verdeutlichte Zeichenregel muß berücksichtigt werden, wenn man die Bedeutung der Phasendifferenz zwischen zwei geradlinigen Komponenten reflektierten Lichtes feststellen will, die von geradlinig schwingendem einfallendem Lichte herrühren. So sehen wir, daß wenn die Schwingungsebene des einfallenden Lichtes entgegen dem Sinne des Uhrzeigerganges von  $P$  aus gedreht wird, die Bahnen des reflektierten Lichtes entgegen der Uhrzeigerbewegung oder in ihrer Richtung verlaufen, je nachdem die in der Ebene  $P$  schwingende Komponente hinter der zu  $P$  senkrechten Komponente zurückbleibt oder ihr voraneilt. Vgl. § 158<sup>XVII</sup> weiter unten.

§ 158<sup>VI</sup>. Die höchst ausgezeichnete Erfindung, der Fresnelsche Rhombus, verschafft eine Phasendifferenz von  $90^{\circ}$  zwischen den in der Ebene  $P$  und den senkrecht zu dieser Ebene verlaufenden Schwingungen. Nach § 158<sup>III</sup> sehen wir, daß dies nur bei Glas mit einem über 1,496 liegenden Brechungsindex eintreten kann. So gibt die Tabelle II für den Brechungsindex 1,46 in Kol. 5 als Maximumwert  $84^{\circ} 44'$  an. Die anderen drei Teile dieser Tabelle geben für die Brechungsindizes 1,5; 1,51 und 1,6 bzw. in Kol. 5 die Maximumwerte  $90^{\circ} 28,8'$ ;  $91^{\circ} 53,2'$  und  $103^{\circ} 57,6'$  an. In allen diesen Fällen



sind übrigens zwei Inzidenzen vorhanden, bei denen die Phasendifferenz genau den Wert  $90^\circ$  erhält. Fresnel gibt an<sup>1)</sup>, daß die größere von ihnen den Vorzug vor der kleineren verdiene, weil bei der größeren Inzidenz die Unterschiede im Brechungsvermögen für die verschiedenen Komponenten des weißen Lichtes eine kleinere Abweichung von der gewünschten Phasendifferenz  $90^\circ$  verursachen. Die größere der beiden Inzidenzen ist ferner auch deswegen vorzuziehen, weil kleine Abweichungen von ihr eine geringere Abweichung von der Phasendifferenz  $90^\circ$  hervorbringen als gleich große Abweichungen von der anderen. Aus demselben Grunde ist es um so besser, je weniger der Brechungsindex den Betrag 1,496 übersteigt. Fresnels erster Rhombus war aus Glas mit dem Brechungsindex 1,51

aus der Fabrik zu Saint Gobin hergestellt. Unsere Tabellen zeigen, daß der Brechungsindex 1,5 die Phasenabweichungen für gleich große Irrtümer bei der Ermittlung der Richtung des Strahles auf etwa die Hälfte der für 1,51 eintretenden herabdrücken würde. Dies würde einen merklich besseren Apparat ergeben als Fresnels eigener war. Die nebenstehende Zeichnung Fig. 69 stellt einen zu den durchsetzten und den spiegelnden Flächen senkrechten Schnitt des Rhombus für den Brechungsindex 1,51 dar, wie er von Fresnel geschnitten ist; mit spitzen Winkeln von  $54^\circ 37'$ , so daß die Strahlen bei geeigneter Verwendung in die durchsetzten Flächen senkrecht eintreten und ebenso aus ihnen austreten können. Wenn mit  $p$  der senkrechte Abstand der beiden langen Seiten des Parallelogramms voneinander bezeichnet wird, ist die Länge dieser langen Seiten  $2p \operatorname{tg} i$  (oder  $p \cdot 2,816$  bei  $i = 54^\circ 37'$ ); die der kurzen Seiten  $p \operatorname{cosec} i$  (oder  $p \cdot 1,226$ ). Der senkrechte Abstand zwischen dem ein- und austretenden Strahl ist  $p \cdot 2 \sin i$  (oder  $p \cdot 1,6306$ ).

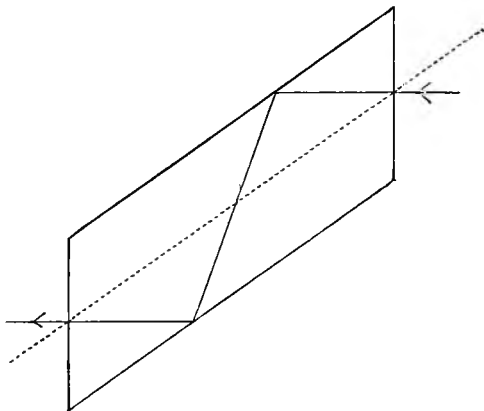


Fig. 69.

§ 158<sup>VII</sup>. Die Größe der langen Seite ist so gewählt, daß ein senkrecht in der Mitte einer Seitenfläche eintretender Strahl senkrecht durch die Mitte der gegenüberliegenden Fläche austritt.<sup>2)</sup> Fresnels Zeichnung ist weit davon entfernt, diese Bedingung zu erfüllen, und ebenso steht es mit vielen Zeichnungen in Handbüchern und wissenschaftlichen Abhandlungen über den Gegenstand. Die letzte Zeichnung, die ich gesehen habe, zeigt, daß nur etwa ein Viertel des eintretenden Lichtes zwei Reflexionen erfährt und daß mehr als die Hälfte des Lichtes überhaupt ohne jede Reflexionen gerade hindurch geht. Die Zeichnungen von Airy und Jamin sind korrekt und klar. Fresnel muß im Jahre 1823 seinem Mechaniker genaue Instruktionen (mit oder ohne Zeichnung) gegeben haben; und bis zum heutigen Tage stellen die Optiker Fresnelsche Rhomben in richtigen Maßen her, so daß sie die Bedingung für die ein- und austretenden Strahlen erfüllen. Aber 20 Jahre nach Fresnels

1) Collected Papers, Vol. I. S. 792; ursprüngliches Datum 1823.

2) Ich nenne einen solchen Strahl „Normalstrahl“.

Erfindung erfahren wir von Mac Cullagh<sup>1)</sup>, daß von Dollond (und wahrscheinlich auch von anderen Optikern?) Fresnelsche Rhomben mit dem von Fresnel angegebenen spitzen Winkel von  $54^{\circ} 37'$ , aber mit Brechungsindizes hergestellt wurden, die von 1,51 verschieden waren. Ich bin überzeugt, daß manche Optiker unserer Zeit den spitzen Winkel richtig entsprechend dem Brechungsindex des Glases herstellen, so daß sich genau die Phasendifferenz  $90^{\circ}$  zwischen den Komponenten des Normalstrahles ausbildet. Ich weiß aber nicht, ob sie von der Bedeutung der Tatsache Gebrauch machen, daß wir jetzt Glas besitzen, dessen Brechungsindex möglichst wenig über 1,496 liegt.

§ 158<sup>VIII</sup>. Mac Cullagh schätzte die Schönheit und den Wert des Fresnelschen Rhombus und fing schon 1837 an, ihn für seine Untersuchungen zu verwenden. Er war aber anfangs sehr wegen der unerwartet großen Fehler in Verlegenheit, bis er Mittel fand, sie in Rechnung zu ziehen „und den Rhombus selbst dazu zu verwenden, sie zu messen und auszuschalten“. Er fügt gutmütig hinzu: „Der Wert des Rhombus als eines Meßinstruments wird sehr durch den Umstand gesteigert, daß er so seine eigene Wirkung bestimmen kann und daß es nicht nötig ist, seinen Winkel genau dem Brechungsindex des Glases anzupassen.“ Dies zeugt von einem sehr nachsichtigen Sinn: Verlegenheit und Zeitverlust bei seinen Untersuchungen werden gern in Kauf genommen mit Rücksicht darauf, daß er zu einer erweiterten Anschauung über den Wert des Fresnelschen Rhombus als eines genauen Meßinstruments gelangt ist!

§ 158<sup>IX</sup>. Mac Cullagh besaß zwei Rhomben aus derselben Werkstatt, „die mit einem Winkel von  $54\frac{1}{2}^{\circ}$  nach der Vorschrift Fresnels geschnitten waren.“ Er fand bei dem einen einen Phasenfehler von  $3^{\circ}$ , bei dem andern einen solchen von  $8^{\circ}$ ! Er spricht sich nicht darüber aus, ob die Fehler in einem Zuviel oder Zuwenig bestanden; wir sehen aber, daß sie in einem Überschuß über  $90^{\circ}$  bestanden haben müssen, da kein Brechungsindex über 1,5 für  $i = 54^{\circ} 37'$  ein Zurückbleiben hinter  $90^{\circ}$  um  $3^{\circ}$  ergibt. Dies erkennen wir durch einen Blick auf die folgende Tabelle, die nach § 158<sup>V</sup> für  $i = 54^{\circ} 37'$  für vier von dem Fresnelschen 1,51 verschiedene Brechungsindizes berechnet ist. Wir sehen ferner, daß die Berechnungsindizes der von Dollond an Mac Cullagh gelieferten Rhomben zwischen 1,51 und 1,6 gelegen haben müssen.

$\mu$	$i$	$2\psi$	$2\chi$	$2(\psi + \chi)$	$360^{\circ} - 4(\psi + \chi)$	Überschuß über $90^{\circ}$
1,5	$54^{\circ} 37'$	$78^{\circ} 4'$	$57^{\circ} 28'$	$135^{\circ} 32'$	$88^{\circ} 56'$	$- 1^{\circ} 4'$
1,51	„	78 48	56 12	135 0	90 0	0 0
1,6	„	84 14	46 44	130 58	98 4	+ 8 4
1,7	„	88 32	39 4	127 36	104 48	14 48
1,8	„	91 44	33 20	125 4	109 52	19 52

158<sup>X</sup>. Trotz Mac Cullaghs gutmütiger Bemerkung ist es wichtig, daß der spitze Winkel eines Fresnelschen Rhombus so genau wie möglich in der Weise hergestellt wird, daß die Phasendifferenz für Licht von genau angegebener

1) „On the Laws of Metallic Reflection and the mode of making experiments upon Elliptic Polarization.“ Proc. Royal Irish Academy, May 8, 1843. Mac Cullaghs Collected Papers, S. 240.

Periode (beispielsweise Natriumlicht) gerade  $90^0$  beträgt, wenn der Strahl genau senkrecht zur Eintritts- und Austrittsfläche gerichtet ist. Wie zuverlässig aber auch die Arbeit des Mechanikers sein mag, so bleibt das Prinzip Mac Cullaghs, den Fehler bei der praktischen Verwendung des Apparats zu bestimmen und ihn, wenn er eine merkliche Größe hat, zu eliminieren, höchst wichtig und interessant. Dieses Prinzip kann durchgeführt werden entweder, wie er es selbst getan hat, durch Beobachtungen über metallische Reflexion, oder, wie er es vorgeschlagen hat, durch Beobachtungen über totale Reflexion an einer Grenzfläche zwischen Glas und Luft — ein weit einfacheres Verfahren als mit metallischer Reflexion. Oder wir können auch — und zwar ist dies das einfachste Verfahren, wenn man zwei Fresnelsche Rhomben zur Verfügung hat — sie mit der Austrittsfläche des einen und der Eintrittsfläche des andern parallel und dicht aneinander aufstellen und die beiden Rhomben so montieren, daß sie unabhängig voneinander um eine gemeinsame Achse drehbar sind, die zu diesen Flächen in ihren Mittelpunkten senkrecht ist. Die Anordnung wird dadurch vervollständigt, daß man zwei Nicols so montiert, daß sie unabhängig voneinander, der eine um den in den ersten Rhombus eintretenden Zentralstrahl, der andere um den aus dem zweiten Rhombus austretenden Zentralstrahl drehbar sind, und ferner drei geteilte Kreise vorsieht, durch die die Unterschiede in den Drehungen zwischen dem ersten Nicol und dem ersten Rhombus, zwischen den beiden Rhomben und zwischen dem zweiten Rhombus und dem zweiten Nicol gemessen werden können. Der Mechanismus zur Ausführung dieser Anordnung ist äußerst einfach und leicht. Der Versuch besteht darin, daß man Licht durch den ersten Nicol eintreten, die beiden Rhomben und den zweiten Nicol durchsetzen läßt und es mit dem Auge durch den zweiten Nicol anschaut. Man hat das beste erreichbare Auslöschen durch Änderung der drei zu messenden Winkel herzustellen. Der Einfachheit wegen können wir annehmen, daß die drei Nullpunkte für die drei Zeiger auf den drei Kreisen so angeordnet sind, daß, wenn wir als Flächenschnitte die Schnitte zwischen den vom Lichte durchgesetzten Querflächen und den reflektierenden Seitenflächen eines Fresnelschen Rhombus bezeichnen, folgende Fälle eintreten:

1. Wenn der erste Zeiger sich am Nullpunkte auf dem ersten Kreise befindet, sind die Schwingungslinien des aus dem ersten Nicol austretenden Lichtes zu den Flächenschnitten des ersten Rhombus senkrecht.

2. Wenn der zweite Zeiger sich an seinem Nullpunkte befindet, sind die Flächenschnitte des ersten Rhombus denen des zweiten parallel.

3. Wenn der dritte Zeiger sich am Nullpunkte des dritten Kreises befindet, sind die Flächenschnitte des zweiten Rhombus zu den Schwingungslinien des in den zweiten Nicol eintretenden Lichtes senkrecht.

Also wenn man mit  $n_1$ ,  $\alpha$ ,  $n_2$  die Ablesungen an den drei Kreisen bezeichnet, ist  $n_1$  die Neigung der Schwingungslinien des ersten Nicols gegen die Reflexionsebene<sup>1)</sup> des ersten Fresnelschen Rhombus,  $\alpha$  die Neigung der Flächenschnitte des ersten Rhombus gegen die des zweiten, und  $n_2$  die Neigung der Reflexionsebene des zweiten Rhombus gegen die Schwingungslinien

1) Der Kürze wegen bezeichne ich als „Reflexionsebene“ eines Fresnelschen Rhombus die Ebene der Reflexion eines Normalstrahles. Sie ist gegen die Flächenschnitte senkrecht.

des aus ihm austretenden Lichtes. Die Zeichnung Fig. 70 stellt alle diese Winkel auf einem Kreise dar, wie man sie sich von einem Auge gesehen zu

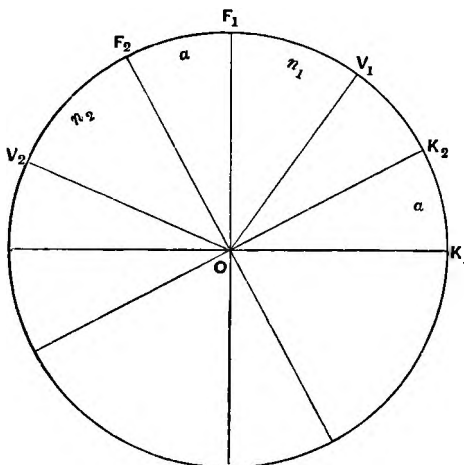


Fig. 70.

denken hat, das durch den zweiten Nicol schaut.  $OV_1$ ,  $OF_1$ ,  $OF_2$ ,  $OV_2$  sind die Spuren von Ebenen durch den zentralen austretenden Strahl, die den Schwingungslinien des ersten Nicols, der Reflexionsebene des ersten Fresnelschen Rhombus, der Reflexionsebene des zweiten Rhombus und den Schwingungslinien des zweiten Nicols parallel sind, wenn dieser letztere so aufgestellt ist, daß er alles aus dem zweiten Rhombus austretende Licht hindurchläßt.  $OK_1$ ,  $OK_2$  stellen Ebenen durch die gemeinsame Achse dar, die zu  $OF_1$  und  $OF_2$  senkrecht sind.

§ 158<sup>XI</sup>. Jetzt bezeichne  $\sin t$  die Verschiebung eines Ätherpunktes

in dem vom ersten Nicol in den ersten Rhombus übergehenden Lichte zur Zeit  $t$ . Diese Bezeichnung setzt eine besondere, für diese Gelegenheit passende Zeiteinheit voraus, bei welcher die Periode des Lichtes  $2\pi$  ist, und sie nimmt als Längeneinheit die größte Verschiebung des Äthers zwischen dem ersten Nicol und dem ersten Fresnelschen Rhombus an. Wir folgen dem Gange des Lichtes durch den Apparat: Zuerst zerlege man die Verschiebung in zwei Komponenten  $\cos n_1 \sin t$ ,  $\sin n_1 \sin t$ , parallel zu  $OF_1$  und  $OK_1$ . Die Phase der ersteren dieser Komponenten ist gegenüber der letzteren vermöge der beiden Reflexionen im ersten Fresnelschen Rhombus um  $90^\circ + e_1$  vorangeeilt, wenn man mit  $e_1$  seinen Fehler bezeichnet, der Null sein müßte. Hiernach ist an einem Punkte zwischen den beiden Rhomben die Verschiebung zur Zeit  $t$

$$\cos n_1 \cos(t + e_1) : \text{parallel zu } OF_1; \quad \sin n_1 \sin t : \text{parallel zu } OK_1.$$

Löst man jeden dieser Strahlen in zwei Komponenten auf, so erhält man für das in den zweiten Rhombus eintretende Licht

$$\cos \alpha \cos n_1 \cos(t + e_1) - \sin \alpha \sin n_1 \sin t : \text{parallel zu } OF_2; \quad (98^{\text{XI}})$$

$$\sin \alpha \cos n_1 \cos(t + e_1) + \cos \alpha \sin n_1 \sin t : \text{parallel zu } OK_2. \quad (98^{\text{XII}})$$

Die erste dieser Komponenten ist gegenüber der letzteren durch die beiden Reflexionen im zweiten Rhombus um  $90^\circ + e_2$  vorangeeilt, wenn  $e_2$  der Fehler dieses zweiten Rhombus ist, und so wird für einen Punkt zwischen dem zweiten Rhombus und dem zweiten Nicol im übergehenden Lichte die Verschiebung zur Zeit  $t$

$$- \cos \alpha \cos n_1 \sin(t + e_1 + e_2) - \sin \alpha \sin n_1 \cos(t + e_2) : \text{parallel zu } OF_2; \quad (98^{\text{XIII}})$$

$$\sin \alpha \cos n_1 \cos(t + e_1) + \cos \alpha \sin n_1 \sin t : \text{parallel zu } OK_2. \quad (98^{\text{XIV}})$$

Wir haben jetzt die Bedingung dafür zu finden, daß die Resultante dieser Komponenten geradlinig schwingendes Licht sei. Dies erfordert einfach, daß sich (98<sup>XIII</sup>) und (98<sup>XIV</sup>) in derselben Phase befinden; und wenn  $OV_2$  die Linie der resultierenden Schwingung ist, erhalten wir

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = -\operatorname{ctg} n_2, \quad (98^{\text{XV}})$$

indem mit  $A, B$  und  $A', B'$  die Koeffizienten bezeichnet werden, die man bekommt, falls man (98<sup>XIII</sup>) und (98<sup>XIV</sup>) auf die Formen  $A \cos t + B \sin t$ , und  $A' \cos t + B' \sin t$  bringt. So findet man, wenn man die Reduktionen ausführt und

$$\operatorname{tg} n_1 = h_1, \quad \operatorname{tg} n_2 = h_2, \quad \operatorname{tg} \alpha = j \quad (98^{\text{XVI}})$$

setzt,

$$\frac{-1}{h_2} = \frac{-\sin(e_1 + e_2) - h_1 j \cos e_2}{j \cos e_1} = \frac{-\cos(e_1 + e_2) + h_1 j \sin e_2}{-j \sin e_1 + h_1}. \quad (98^{\text{XVII}})$$

Damit haben wir zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten  $e_1, e_2$  gewonnen, falls die Größen  $h_1, h_2, j$  sämtlich bekannt sind. Dabei ist eine von den letzteren willkürlich zu wählen und sind die beiden andern durch Beobachtung bestimmt, die darin besteht, daß man ein Auslöschen des austretenden Lichtstrahles hervorruft (vgl. oben §§ 95, 95').  $OV_2$  ist in der Zeichnung (Fig. 70) senkrecht zur Lage der Schwingungslinie des zweiten Nicols, wenn dieses auf Auslöschen eingestellt ist.

§ 158<sup>XII</sup>. Der Experimentierende wird sich durch sein mathematisches Urteil oder durch Probieren und Auswählen leiten lassen, um die bestgeeigneten Werte von  $h_1, h_2, j$  für die Bestimmung von  $e_1, e_2$  zu erhalten. Wir dürfen nicht  $h_1 = 1$  wählen (d. h. wir dürfen den Eintritts-Nicol nicht mit seinen Schwingungslinien unter  $45^\circ$  gegen die Hauptebenen des ersten Fresnelschen Rhombus festhalten), da alsdann in dem Falle  $e_1 = 0$  (der erste Rhombus ist genau) das in den zweiten Rhombus eintretende Licht zirkularpolarisiert und demgemäß das Drehen des zweiten Rhombus ohne Wirkung auf die Eigenschaft des austretenden Lichtes wäre; dieses würde ebenpolarisiert sein, wenn, und nur wenn, dieser Rhombus ebenso wie der erste fehlerlos gerichtet wäre (vgl. § 98 oben). Wir dürfen auch nicht  $h_1 = 0$  feststellen, da dies den ersten Rhombus wirkungslos machen würde. Man gelangt durch solche Überlegungen also dazu,  $n_1 = 22\frac{1}{2}^\circ$  zu wählen, woraus sich ergibt

$$h_1^{-1} - h_1 = 2 \text{ und } h_1 = 0,4142. \quad (98^{\text{XVIII}})$$

Wahrscheinlich dürfte dies als eine gute Wahl befunden werden, wenn es aus irgendeinem Grunde angebracht erscheint,  $h_1$  festzulegen und  $j$  veränderlich zu lassen.

Wenn die Größen  $e_1, e_2$  so klein sind, daß man  $e_1^2, e_2^2, e_1 e_2$  vernachlässigen darf, geht (98<sup>XVII</sup>) über in

$$\frac{-1}{h_2} = -\frac{e_1 + e_2}{j} - h_1 = \frac{-1 + h_1 j e_2}{-j e_1 + h_1}. \quad (98^{\text{XIX}})$$

Hieraus ergeben sich die beiden einfachen Gleichungen für  $e_1, e_2$

$$e_1 + e_2 = j \left( \frac{1}{h_2} - h_1 \right); \quad \frac{e_1}{h_2} - h_1 e_2 = \frac{1}{j} \left( \frac{h_1}{h_2} - 1 \right). \quad (98^{\text{XX}})$$

Und aus diesen Gleichungen ersieht man, daß, wenn  $c_1$  und  $c_2$  klein sind, die Beobachtung die Größen  $h_1$  und  $h_2$  beide sehr nahe der Einheit gleichmachen muß; es sei denn, daß  $j$  entweder sehr klein oder sehr groß gewählt ist. Es dürfte vorteilhaft sein,  $j = 1$  ( $\alpha = 45^\circ$ ) festzulegen und  $n_1, n_2$  durch den Versuch zu ermitteln.

§ 158<sup>XIII</sup>. Wenn beide Fresnelsche Rhomben vollkommen richtig sind ( $e_1 = 0, e_2 = 0$ ), zeigt die Formel (98<sup>XX</sup>), daß  $h_2 = h_1$  ist, bei  $j = 0$  und  $h_2 = 1/h_1$ , bei  $j = \infty$ ; wenn aber  $j$  irgendeinen Zwischenwert zwischen 0 und  $\infty$  besitzt, muß sein  $n_1 = n_2 = 45^\circ$ , während  $\alpha$  irgendeinen Wert haben kann. Das heißt, der erste Fresnelsche Rhombus ruft genau kreisförmige Bahnen hervor, und der zweite macht sie gerade. Wenn  $n_1$  irgendein Winkel zwischen 0 und  $90^\circ$  ist, haben wir elliptisch oder zirkularpolarisiertes Licht vor uns, das durch (98<sup>XI</sup>) und (98<sup>XII</sup>) mit  $c_1 = 0$  dargestellt ist. Dieses ist Licht, das aus dem ersten Rhombus aus- und in den zweiten eintritt. Bei dem Durchgange durch den zweiten Rhombus wird es in geradlinig schwingendes Licht verwandelt, das durch (98<sup>XIII</sup>) und (98<sup>XIV</sup>) mit  $e_1 = 0$  und  $e_2 = 0$  dargestellt ist. So sehen wir, daß die §§ 158<sup>X</sup> — 158<sup>XII</sup> mit  $e_1 = 0$  und  $e_2 = 0$  nacheinander einfach und vollständig die Theorie der Umwandlung geradlinig schwingenden Lichtes in elliptisch oder zirkularpolarisiertes und umgekehrt, durch einen einzigen richtigen Fresnelschen Rhombus wiedergeben. Eine Zeichnung mit Regeln für die Richtungen beim Gebrauche eines Fresnelschen Rhombus ist weiter unten in § 158<sup>XVII</sup> wiedergegeben. Die §§ 90—98 oben enthalten die Anwendung der Theorie auf gewöhnliche Reflexion an den Oberflächen von durchsichtigen festen oder flüssigen Körpern oder von Metallen; dabei ist der erste Fresnelsche Rhombus des § 158<sup>X</sup> entfernt und die Reflexion an seine Stelle gesetzt zu denken. Die entsprechende Anwendung auf die totale innere Reflexion ist weit einfacher, weil die Intensitäten der auffallenden und der reflektierten Komponenten gleich groß sind. Dadurch wird es möglich, die durch die Reflexion hervorgerufene Phasendifferenz mit großer Genauigkeit zu messen, und eine so durchgeführte sorgfältige Experimentaluntersuchung würde ohne Zweifel zeigen, daß die durch Reflexion erzeugte Phasendifferenz zwischen den beiden Komponenten sehr genau mit den stumpfen Winkeln übereinstimmen, die für verschiedene Inzidenzen nach (98<sup>VI</sup>) und § 158<sup>III</sup> berechnet werden.

§ 158<sup>XIV</sup>. Als ich vor etwa einem Jahre einige vorläufige Versuche mittels des Fresnelschen Rhombus ausführte, um die Ergebnisse der §§ 90 bis 100, 152, 153 zu veranschaulichen, deutete ich die Phasendifferenz des Rhombus nach Airys Abhandlungen; ich fand aber ein Versehen oder eine Verwirrung bezüglich der Phasenänderung durch eine innere Reflexion in Glas und durch metallische Reflexion. Ich durchsuchte alle andern Nachschlagebücher und die mir zu jener Zeit zugänglichen wissenschaftlichen Abhandlungen, und ich habe dieses Suchen bis heute in den Bibliotheken der Royal Society in London und der Universität in Glasgow fortgesetzt; allein bisher habe ich mich ohne Erfolg bemüht, eine klare Feststellung darüber zu finden, welche der beiden Komponenten im Fresnelschen Rhombus der andern voraneilt. Ich war demgemäß gezwungen, die Aufgabe selbst mathematisch für den Fresnelschen Rhombus zu bearbeiten und mit der so erlangten Kenntnis durch Versuch zu ermitteln, welche von den beiden Komponenten

infolge metallischer Reflexion der andern voraneilt. Von allen Autoren, die zu studieren ich bisher die Gelegenheit bekam, hat allein Airy bezüglich des Fresnelschen Rhombus und haben Jamin und Stokes<sup>1)</sup> und Basset bezüglich der metallischen Reflexion explizite angegeben, welche Komponente des Lichts in der Phase voraneilt.

In Airys Abhandlungen, zweite Auflage (1831) S. 364 finde ich einen vollkommen klaren Ausspruch, der mit dem von Fresnel selbst aufgestellten Satze übereinstimmt, über den Fresnelschen Rhombus und totale innere Reflexion: „Wenn das Licht zweimal unter denselben Bedingungen und in derselben Reflexionsebene reflektiert ist, ist die Phase der Schwingungen in der Einfallsebene gegenüber den andern Schwingungen um  $90^\circ$  beschleunigt“. In Wirklichkeit sind Schwingungen in der Einfallsebene nicht um  $90^\circ$  vorangeeilt, sondern um  $270^\circ$  zurückgeblieben; sie sind demnach nur im Effekt vorangeeilt um  $90^\circ$  gegenüber den gegen die Einfallsebene senkrechten Schwingungen.

In den Physical Optics von Basset (Cambridge 1892) S. 339 finde ich als ein Gesetz über die metallische Reflexion, zu dem Jamin experimentell gelangt sei, das folgende ausgesprochen:

„(1) Die senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Welle wird mehr verzögert als die in der Einfallsebene polarisierte.“

Durch Versuch habe ich diesen Satz bestätigt gefunden, indem ich mit einem Fresnelschen Rhombus arbeitete und das Ergebnis nach Airy und dem obigen § 158<sup>VII</sup> deutete. Als ich die experimentelle Abhandlung von Jamin las, überkam mich einiger Zweifel über seine Anschauung, da sein Ausdruck „vibrations polarisées dans le plan de l'incidence“ (ich zitiere nach dem Gedächtnis) vielleicht nicht besagt, daß die Polarisationssebene<sup>2)</sup>, sondern die Schwingungslinie in die Einfallsebene fällt. Daß Bassets Deutung die richtige war, ist jedoch vollkommen zur Sicherheit geworden durch den klaren Satz in Jamins Cours de Physique, Bd. II, S. 690, in dem er das relative Voraneilen der Phase der zur Einfallsebene senkrechten Schwingungen von Licht beschreibt, das an poliertem Metall reflektiert wird. Dieses relative Voraneilen der Phase maß er mit dem Kompensator von Babinet und fand, daß es von Null bei normaler Inzidenz bis  $90^\circ$  bei der Hauptinzidenz  $J$  und dann weiter bis  $180^\circ$  bei streifender Inzidenz ansteigt. Er würde kein Voraneilen, sondern ein Zurückbleiben gefunden haben, wenn er den Fresnelschen Rhombus benutzt und die Messungen gemäß der (von ihm als von Fresnel herrührend bezeichneten) auf S. 783—787 desselben Ban-

1) Mathematical and Physical Papers, Bd. II, S. 360.

2) Mit Rücksicht auf die nicht zu vermeidende Zweideutigkeit dieser Art habe ich die Bezeichnung „Polarisationsebene“ fallen lassen und mich entschlossen, stets genauer zu präzisieren oder nach den Schwingungslinien zu beschreiben. Viele Beispiele lassen sich in den ersten Teilen des vorliegenden Buches finden, die die Ungeeignetheit der Bezeichnung „Polarisationsebene“ illustrieren. In der Tat waren „polar“ und „Polarisation“, wie heute allgemein zugegeben wird, von Anfang an ungeschickt gewählte Worte für Wirkungsunterschiede in verschiedenen Richtungen um einen Lichtstrahl herum. Diese Unterschiede sind ihrem Wesen nach nicht solche, wie sie dem entsprechen, was wir heute unter einer polaren Eigenschaft verstehen. (Wie muß der Elektriker mit diesem Worte sich plagen! Ich habe in meiner Thermodynamik einige Vorschläge zu deutlicheren Unterscheidungen gemacht. D. H.)

des gegebenen mathematischen Theorie mit den falsch aufgestellten Formeln (98<sup>xvii</sup>) gedeutet hätte.

§ 158<sup>xv</sup>. Der Ursprung des so lange bestehenden Mißverständnisses über den Fresnelschen Rhombus ist zu suchen in Fresnels Originalabhandlung „Mémoire sur la loi des modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée“, die im ersten Bande der gesammelten Abhandlungen, Paris 1876, S. 767—799 wieder abgedruckt ist. Auf S. 777 finden wir Fresnels eigene berühmten Formeln für die Amplitude reflektierter Schwingungen und ihr Verhältnis richtig wie folgt angegeben:

$$-\frac{\operatorname{tg}(i-i)}{\operatorname{tg}(i+i)}, \quad -\frac{\sin(i-i)}{\sin(i+i)}, \quad +\frac{\cos(i-i)}{\cos(i+i)}. \quad (98^{\text{xxi}})$$

Offenbar müssen die beiden ersten von diesen Ausdrücken dasselbe Zeichen besitzen, da bei sehr nahe normalen Inzidenzen die Tangenten annähernd gleich dem Sinus sind und bei normalen Inzidenzen die beiden Ausdrücke genau dasselbe bedeuten, da bei normaler Inzidenz etwas wie ein Unterschied zwischen Schwingungen in der und solchen senkrecht zu der Einfallsebene nicht bestehen kann. Dennoch finden wir ungeachtet des offenbaren Widersinnes entgegengesetzter Zeichen der „Tangentenformel“ und der „Sinusformel“ in einer Anmerkung zu S. 789 (von Verdet, einem der Herausgeber der Fresnelschen Werke) die Formeln umgeändert in

$$\frac{\operatorname{tg}(i-i)}{\operatorname{tg}(i+i)}, \quad -\frac{\sin(i-i)}{\sin(i+i)}, \quad (98^{\text{xxii}})$$

im Verfolg gewisser, von Fresnel auf S. 788, 789 weitergeführten „considérations“. Ich hoffe, noch auf diese „considérations“ zurückzukommen und eine Zeichnung zu geben, die die Verschiebungen des Äthers in einem Raume darstellt, der von nebeneinander bestehenden Strahlen einfallenden und reflektierten Lichtes durchsetzt ist und die Fresnels „petite difficulté“ der S. 787 erklärt und die irrtümliche Abweichung von seinen eigenen ursprünglich richtigen Formeln vermeidet. Die falschen Formeln unter (98<sup>xxii</sup>) wurden von vielen späteren Schriftstellern wiederholt, von andern vermieden. Soviel ich aber weiß, hat bisher kein Autor den aus jenem Fehler folgenden weiteren verbessert, aus dem sich ein spitzer Winkel statt eines stumpfen für die Phasendifferenz bei einer totalen inneren Reflexion und sich 90° anstatt 270° als Phasendifferenz bei den beiden Reflexionen des Fresnelschen Rhombus ergibt und ein Zurückbleiben um 90° anstatt, wie es richtig ist, eines effektiven Voraneilens um 90° der in der Einfallsebene verlaufenden Schwingungen gegenüber den senkrecht zur Einfallsebene verlaufenden, im Fresnelschen Rhombus folgt. Der praktisch bedeutsame Fehler bezüglich der Frage, welche von den beiden Komponenten im Fresnelschen Rhombus ein Voraneilen der Phase erfährt, kommt in keiner der Veröffentlichungen, die ich bisher gefunden habe, in Beachtung. Airy verbessert ihn gelegentlich durch einen andern Fehler. Alle andern Autoren beschränken sich darauf, zu sagen, daß eine Phasendifferenz von 90° zwischen den beiden Komponenten besteht, ohne zu sagen, welche Komponente der andern voraneilt.

§ 158<sup>xvi</sup>. Bei Fresnel (S. 782) und Airy (S. 362), wo zuerst  $\sqrt{-1}$  mit dem Faktor  $\sqrt{(\mu^2 \sin^2 i - 1)}$  eingeführt wird, ist zufällig das positive Zeichen ohne Rücksicht auf irgendeine andere Betrachtung gewählt. Eine Um-



kehrung des Zeichens überall, wo  $\sqrt{-1}$  in den folgenden Formeln vorkommt, würde ein Voraneilen der Phase anstatt des Zurückbleibens oder ein Zurückbleiben anstatt des Voraneilens bei jedem Schlusse ergeben. Hätten die Verfasser die gebrochene Welle (Airy, S. 358) bei ihrer neuen, so glänzend von Fresnel entdeckten Erforschung des Imaginären mitberücksichtigt, so hätten sie es für nötig befunden, entweder überall das Zeichen von  $\sqrt{-1}$  umzukehren oder die Deutung bezüglich der Phasendifferenz, die von Fresnel als reine Vermutung hingestellt und von Airy (S. 363) einfach von jenem übernommen wurde, umzukehren, da sie bei der Deutung und bei den Zeichen, wie sie dastehen, für die „gebrochene Welle“ eine Verschiebung des Äthers gefunden hätten, die exponentiell mit dem Abstände von der Zwischenfläche wächst, anstatt exponentiell abzunehmen (vgl. Anmerkung zu § 158<sup>II</sup> oben). Es ist jetzt äußerst interessant zu finden, wie eine zufällig irrite Wahl der Zeichen von  $\sqrt{-1}$  dazu gedient hat, den tatsächlichen Fehler eines spitzen, statt eines stumpfen Winkels für die von einer Reflexion hervorgerufene Phasendifferenz, der durch die wohlüberlegte Wahl eben des falschen Zeichens in den wirklichen Formeln von (98<sup>XXII</sup>) veranlaßt ist, im Ergebnis zweier Reflexionen zu verbessern; und daß Airy auf diesem Wege bisher, soviel ich weiß, allein sich richtig darüber geäußert hat, welche von den beiden Komponenten im Fresnelschen Rhombus ein Voraneilen der Phase erfährt.

§ 158<sup>XVII</sup>. Bemerkung über Zirkularpolarisation bei metallischer oder glasartiger oder diamantartiger Reflexion. Auf Bassets *Physical Optics*, S. 329, Ausgabe von 1892 verweisend, finde ich als Hauptazimut den Winkel zwischen der Polarisationssebene des reflektierten Lichtes und der Reflexionsebene definiert, wenn das einfallende Licht zirkularpolarisiertes Licht ist, das unter dem Haupteinfallswinkel einfällt. Dies stimmt tatsächlich mit der, auf den ersten Blick als eine andere erscheinenden, Definition des Hauptazimuts, wie sie oben in § 97<sup>II</sup> gegeben ist; da leicht bewiesen wird, daß, wenn geradlinig schwingendes Licht durch metallische oder andere Reflexion in zirkularpolarisiertes verwandelt wird, das Azimut der Schwingungsebene des einfallenden Lichtes dem Azimut der Polarisationssebene des reflektierten Lichtes gleich ist, falls umgekehrt zirkularpolarisiertes Licht in linear schwingendes durch Reflexion an demselben Spiegel übergeht. Die Tatsache, daß  $k$  für jeden Fall einer Hauptinzidenz (§ 97<sup>I</sup>) einen positiven Wert hat, ist in der folgenden Feststellung enthalten und wird durch sie erklärt.

Wir nehmen den Fall ebenpolarisierten Lichtes, das auf eine polierte metallische Fläche oder auf einen diamantartigen oder glasartigen Reflektor fällt. Um einfache Ausdrücke zu erhalten, stellen wir uns die Ebene des Reflektors horizontal vor. Um das auffallende Licht zu leiten, sei ein Nicol mit seiner Achse unter einem beliebigen Winkel  $i$  gegen die Vertikale geneigt montiert und trage einen Zeiger, der die Richtung der Schwingungslinien des aus ihm austretenden und auf den Spiegel fallenden Lichtes angibt. Zuerst stelle man den Zeiger nach oben in der durch die Achse gehenden Vertikalebene; dies ist die Einfallsebene des Lichtes für den Spiegel. Das reflektierte Licht besteht aus geradlinigen Schwingungen in derselben Ebene. Nunmehr drehe man den Zeiger entgegen dem Sinne der Uhrzeigerbewegung um irgendeinen Winkel, der kleiner als  $90^\circ$  ist; dann besteht das reflektierte

Licht aus elliptischen oder kreisförmigen, in Bahnen, die gegen den Sinn der Uhrzeigerdrehung gerichtet sind, verlaufenden Bewegungen.

Wenn  $i = J$  ist, haben wir es mit der Hauptinzidenz zu tun; von den beiden Achsen jeder elliptischen Bahn ist die eine horizontal und senkrecht zur Ebene der Inzidenz und Reflexion, die andere liegt in dieser Ebene.

Um jede Zweideutigkeit bezüglich der Ausdrücke „im Sinne des Uhrzeigeranges“ und „gegen den Sinn des Uhrzeigeranges“ zu beseitigen, bemerke ich: der Beobachter schaut auf den Nicol und auf den Kreis, in dem sich dessen Zeiger dreht, von der Seite, nach der hin das Licht nach Durchsetzung des Nicol austritt; dann sieht er ideell auf die Bahnbewegung des reflektierten Lichtes von der Seite, nach der hin sich das reflektierte Licht in sein Auge bewegt. Vgl. § 98 oben.

Bei der äußeren Reflexion geradlinig schwingenden Lichtes an allen gewöhnlichen durchsichtigen Reflektoren, einschließlich Diamant (aber ausschließlich Realgar), ist die Abweichung des reflektierten Lichtes von der Geradlinigkeit klein, ausgenommen für Inzidenzen, die um wenige Grade von der Brewsterschen Inzidenz  $\arctan(\mu)$  entfernt sind. Vgl. die Zeichnungen § 178 weiter unten, für Diamant.

§ 158<sup>XVIII</sup>. Die Regeln für die Richtungen in der durch einen Fresnel'schen Rhombus hervorgerufenen elliptischen und zirkularen Polarisation sind in der beistehenden Zeichnung (Fig. 71) dargestellt.  $O'$  und  $O$  sind die Mittelpunkte der Eintritts- und Austrittsfläche.  $OK$  ist eine zu den Flächenschnitten parallele Linie.  $OF$  stellt die Ebene der Reflexionen im Rhombus dar, und zwar ist diese Ebene zu den vier optisch wirksamen Flächen senkrecht.

Fälle  $a_1, a_2, a_3$ . Ebenpolarisiertes Licht tritt bei  $O'$  ein.  $OV_1, OV_2, OV_3$  sind durch  $O$  zu den Schwingungslinien des jeweils eintretenden Lichtes gelegte Parallelen; sie haben gleiche Längen, um anzuzeigen, daß die Verschiebungen in den drei Fällen gleich sein sollen. Die Bahnen des austretenden Lichtes werden in den drei Fällen wiedergegeben (1) durch eine Ellipse, (2) durch einen Kreis, (3) durch eine Ellipse, die nach der in dem Quadranten rechts oben in der Figur angedeuteten Konstruktion zu zeichnen sind.

Fälle  $b_1, b_2, b_3$ .<sup>1)</sup> Die Bahnen in drei Fällen gleich starken zirkular- und elliptischpolarisierten eintretenden Lichtes, deren Achsen die Richtungen  $OF$  und  $OK$  haben, wie sie mit ihren nach  $O$  übertragenen Mittelpunkten wiedergegeben sind, sind (1) durch eine Ellipse, (2) durch einen Kreis, (3) durch eine Ellipse dargestellt. Dann geben  $OV'_1, OV'_2, OV'_3$  die Verschiebungen im austretenden Lichte wieder, die in allen drei Fällen in geradlinigen Schwingungen bestehen.

Der Sinn der Bahnbewegung des austretenden Lichtes in den Fällen  $a$  und des eintretenden Lichtes in den Fällen  $b$  ist in allen sechs Fällen gegen den Uhrzeiger gerichtet, wie dies durch die Pfeilspitzen an den Ellipsen und dem Kreise angedeutet ist.

So erhalten wir die folgenden beiden Regeln für die Richtungen:

Regel ( $a$ ). Wenn die Schwingungsebene des eintretenden Lichtes entgegen dem Uhrzeiger gedreht werden muß, um sie zum Zusammenfallen mit  $OK$  zu bringen, sind die Bahnrichtungen des austretenden Lichtes der des Uhrzeigers entgegen gerichtet.

1) Gegenfälle zu  $a_1, a_2, a_3$ .

Regel (b). Wenn die Bahnbewegung von eintretendem zirkular- oder elliptischpolarisiertem Lichte ihre Achsen parallel  $OK$  und  $OF$  hat und der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt ist, wird die Schwingungsebene des austretenden Lichtes gegen den Uhrzeigergang von  $OK$  fortgedreht.

Diese Regeln sowie die Zeichnung behalten auch ihre Geltung für eine „Viertelwellenplatte“ an Stelle des Fresnelschen Rhombus, falls homogenes

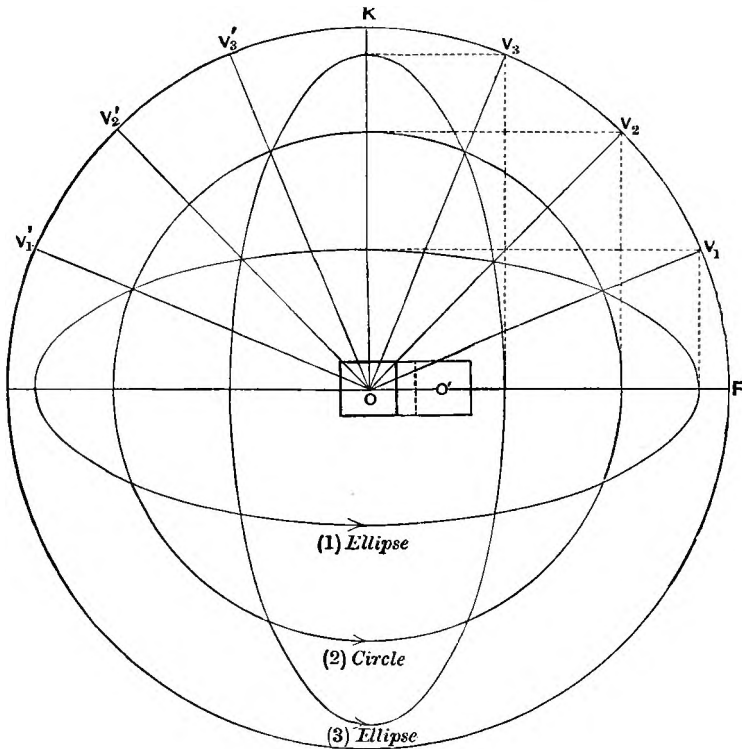


Fig. 71.

Licht der betreffenden Wellenlänge benutzt wird. Die Hauptebene der Viertelwellenplatte, in der die Schwingungen von Wellen größter Fortpflanzungsgeschwindigkeiten liegen, ist die durch  $OF$  in der Zeichnung angedeutete.

§ 159. Die schöne vor siebzig Jahren von MacCullagh und Cauchy gemachte Entdeckung, daß metallische Reflexion dadurch mathematisch wiedergegeben werden kann, daß man eine imaginäre Komplexe zur Darstellung des Brechungsindex  $\mu$  wählt, harret immer noch einer mechanischen Erklärung. Im Jahre 1884 (Zwölfte Vorlesung, S. 118ff.) haben wir gesehen, daß die Größe  $-\mu^2$  ihrem Wesen nach reell und positiv ist in einem bestimmten Gebiete von Perioden, die kleiner sind als jede der Fundamentalperioden, die sich bei der Annahme eines unwirklichen schematischen Mechanismus in Gestalt eines ununterbrochenen molekularen Vibrators als Repräsentant der ponderablen Materie ergeben, wenn dieser Vibrator in den Äther eingesenkt ist

und er nur vermöge des Widerstandes zwischen dem Äther und den Atomen gegen die gleichzeitige Ausfüllung desselben Raumes durch beide wirkt. Diese Annahme ergab uns eine vollkommen mechanische Begründung für die metallische Reflexion in dem angenommenen Falle, daß kein Lichtverlust eintritt, und für den Durchgang von Licht durch dünne Metallhäutchen mit einer Geschwindigkeit, die größer ist als die Lichtgeschwindigkeit im freien Äther (wie von Quincke gefunden ist S. 317). Sie gab uns aber keinen Hinweis auf eine mechanische Erklärung des offenbar großen Lichtverlustes, der bei der Reflexion an bestpolierten Metalloberflächen außer an Silber oder Quecksilber tatsächlich stattfindet (vgl. § 88 oben). Jetzt aber scheint die neue realistische elektroätherische Theorie, wie sie in den Anhängen *A* und *E* und in den §§ 162 bis 168 durchgeführt ist, während sie für elektrische Nichtleiter genau dieselben reellen negativen und positiven Werte für  $\mu^2$  liefert, wie wir sie auf Grund des alten versuchsweise eingeführten Mechanismus gefunden haben, auch zu einer Erklärung des Verlustes an Lichtenergie sowohl bei der Reflexion an einer Substanz, als auch bei dem Durchgange durch eine solche zu führen, sobald diese Substanz irgendeine, wenn auch noch so geringe, elektrische Leitfähigkeit besitzt. Im Anhang *E* § 30 wird die Theorie von J. J. Thomson der Leitung der Elektrizität durch Gase mittels Ausstoßen von Elektronen aus den Atomen dargelegt. Wenn dies nie einträte, würde die elektroätherische Theorie des Äthers für durchgehendes Licht einen Energieverlust nur in dem so außerordentlich geringen Maße ergeben, wie er von der Größe der Atome nach Rayleighs Theorie der Himmelsbläue herrührt (vgl. § 58 oben, ähnlich wie unser alter mechanischer Vibrator). Andererseits dürfte das Gewirr freier Elektronen, die zwischen den unterladenen Atomen in dem Raume des Metalles umherschwirren, und durch die dessen hohe Leitungsfähigkeit im Anhang *E* § 30 erklärt wird, wie sich leicht vorstellen läßt, Anlaß zu großen Energieverlusten durch reflektiertes Licht geben, zu Verlusten, die zur Erwärmung einer sehr dünnen Oberflächenschicht des Metalles durch unregelmäßige Bewegungen der Elektronen verwandt werden. Dies scheint mir die vermutlich wahre mechanische Erklärung für das imaginäre Glied in  $\nu^2$  des § 158 (98) zu ergeben. Vgl. auch oben § 84.

§ 159'. In jedem Falle praktisch vollständiger Undurchsichtigkeit (d. h. eines nicht merklichen Durchscheinens des hellsten Lichtes durch eine Platte beliebiger Dicke, die größer ist als drei oder vier Wellenlängen oder etwa  $2 \cdot 10^{-4}$  cm) liefert die Messung des Hauptazimuts, die mit großer Genauigkeit mittels zweier Nicols und eines Fresnelschen Rhombus ausgeführt werden kann, einen interessanten Beitrag zur Entscheidung über den Verlust an Lichtenergie bei der Reflexion von Licht. In der Bezeichnung des § 94' ergibt sich

$$J = S^2 \sin^2 \alpha + (T^2 + E^2) \cos^2 \alpha \quad (98^{XXI})$$

als Reflexionsmenge von Licht, das in einem Azimut  $\alpha$  gegen die Einfallsebene schwingt (§ 88, Anmerkung), so daß in jedem Falle praktischer Undurchsichtigkeit

$$1 - J = 1 - [S^2 \sin^2 \alpha + (T^2 + E^2) \cos^2 \alpha] \quad (98^{XXII})$$

den Verlust an Lichtenergie durch Umwandlung in Wärme in einer dünnen Oberflächenschicht von weniger als  $2 \cdot 10^{-4}$  cm Dicke darstellt.

§ 159''. Für vollständiges Reflexionsvermögen muß (98<sup>xxii</sup>) bei jedem Werte von  $\alpha$  und bei jeder Inzidenz  $1 - J$  Null sein. Da die Größen  $S$ ,  $T$ ,  $E$  von  $\alpha$  unabhängig sind, erhalten wir also in diesem Falle bei jeder Inzidenz

$$S^2 = T^2 + E^2 = 1. \quad (98^{\text{xxiii}})$$

Folglich ist für die Inzidenz, die  $T = 0$  macht (das heißt die Hauptinzidenz)  $S^2 = E^2 = 1$ , woraus sich ergibt  $E/S = \pm 1$  in jedem Falle vollkommenen Reflexionsvermögens, beispielsweise bei innerer totaler Reflexion. Demnach ist das Hauptazimut, da es bei der Hauptinzidenz den Wert  $\arctg(E/S)$  hat,  $\pm 45^\circ$ , wenn das Reflexionsvermögen ein vollkommenes ist. (Vgl. § 157 oben.)

§ 159'''. Beobachtung und mathematische Theorie stimmen darin überein, daß das Hauptazimut in jedem Falle positiv ist; zur Deutung dieser Tatsache vgl. § 158<sup>xvii</sup> oben. Sie stimmen ferner darin überein, daß in jedem Falle, der wenig vom vollkommenen Reflexionsvermögen abweicht, das Hauptazimut  $< 45^\circ$  und nicht  $> 45^\circ$  ist.

---

## Neunzehnte Vorlesung.

### Ausgleich zwischen Fresnels und Greens Theorie.

#### Äolotrope Trägheit.

(Neu geschrieben 1903.)

#### Versöhnung zwischen Fresnel und Green.

##### a) Molecular.

Diese Vorlesung oder Konferenz begann mit der Betrachtung eines sehr interessanten von Prof. E. W. Morley uns vorgelegten Berichtes, der eine von ihm ausgearbeitete vollständige Lösung der mechanischen Aufgabe über sieben aufeinander wirkende Partikel behandelt; diese Aufgabe hatte ich neun Tage vorher (Neunte Vorlesung, S. 83 ff. oben) als eine Illustration der molekularen Dispersionstheorie, mit der wir uns dort beschäftigten, vorgeschlagen. Seine Resultate sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben.

*Lösung für Fundamentalperioden, Verschiebungen und Energieverhältnisse für ein durch Federn verbundenes System von Partikeln. Von Edward W. Morley, Cleveland, Ohio.*

$$m = 1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096.$$

$$C = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Fundamentalperioden, wenn die Außenenden der Federn 1 und 8 festgehalten werden.

$\tau^2 =$	0,2889	0,9952	3,350	11,362	39,12	137,89	680,2
$\frac{1}{\tau^2} =$	3,4618	1,00483	0,29849	0,0880078	0,0255607	0,0072564	0,0014701
$\frac{1}{\tau} =$	1,860	1,002	0,546	0,296	0,159	0,0851	0,0383

Verschiebungsverhältnisse, oder Werte von  $\left(\frac{x_i}{x_1}\right)$

$x_1$	1	1	1	1	1	1	1
$x_2$	— 0,231	1,000	1,351	1,456	1,487	1,496	1,499
$x_3$	0,014	— 0,341	1,047	1,589	1,761	1,813	1,829
$x_4$	— 0,27	0,025	— 0,431	1,129	1,787	1,997	2,066
$x_5$	0,15	— 0,50	0,033	— 0,511	1,223	1,960	2,216
$x_6$	— 0,26	0,30	— 0,68	0,040	— 0,581	1,322	2,203
$x_7$	0,11 13	— 0,51	0,39	— 0,81	0,045	— 0,628	1,717

Energieverhältnisse, oder Werte von  $\frac{m_i x_i^2}{m_1 x_1^2}$ .

$m_1 x_1^2$	1	1	1	1	1	1	1
$m_1 x_1^2$	0,213	3,998	7,30	8,48	8,85	8,96	8,99
$m_2 x_2^2$	0,2 33	1,864	17,54	40,41	49,64	52,58	53,54
$m_3 x_3^2$	0,5 47	0,039	11,88	81,66	204,35	255,34	273,14
$m_4 x_4^2$	0,9 61	0,4 65	0,28	66,73	382,71	983,10	1157,52
$m_5 x_5^2$	0,14 7	0,18 9	0,3 47	1,62	345,60	1788,13	4968,41
$m_6 x_6^2$	0,20 7	0,12 1	0,7 63	0,2 2	8,42	1616,99	12080,04
Summ.	1,216	6,902	38,0004	199,90	1000,57	4706,10	18542,64

## b) Molar.

Gegenwärtig beschäftigen wir uns mit der theoretischen Versöhnung der Anschauungen von Fresnel und Green, und zwar nicht bloß hinsichtlich der Reflexion und Brechung an einer Zwischenfläche zwischen zwei isotropen durchsichtigen Körpern, wie in der achtzehnten Vorlesung §§ 133, 139 in Aussicht gestellt ist, sondern auch hinsichtlich der Fortpflanzung von Licht in einem durchsichtigen Kristall (Doppelbrechung), wie ich es in der fünfzehnten Vorlesung § 45 versprochen habe.

§ 160. In meiner Abhandlung über die Reflexion und Brechung von Licht (Phil. Mag. 1888, zweites Halbjahr), von der ein Auszug in den §§ 107—111 der achtzehnten Vorlesung angeführt ist, habe ich (§§ 109—111) gezeigt, daß ein homogener Teil eines elastischen Festkörpers, dessen Grenzfläche festgehalten wird, stabil ist, wenn seine Starrheit ( $n$ ) positiv ist, auch dann, wenn sein Raummodul ( $k$ ) negativ, aber nicht kleiner als  $-\frac{4}{3}n$ , sein sollte. Und in § 115 ist gezeigt worden, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ( $v$ ) von Verdichtungs-Verdünnungswellen in jedem beliebigen homogenen elastischen Festkörper (oder in einer Flüssigkeit, wenn  $n=0$  gesetzt wird) gegeben ist durch die Gleichung

$$v = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}n}{\rho}}. \quad (99)$$

Auf Grund dieser Gleichung ist stets geglaubt worden, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Verdichtungs-Verdünnungswellen in einem elastischen Festkörper ihrem Wesen nach größer ist als die der unter Festhalten des

Volumens fortschreitenden Wellen, die ja  $\sqrt{\frac{n}{\rho}}$  ist. Die Lehre von Navier-Poisson, die von vielen Schriftstellern noch lange, nachdem Stokes nachgewiesen hatte, daß sie unzureichend sei (vgl. elfte Vorlesung S. 98 ff. oben und Anhang I, weiter unten), beibehalten wurde, nahm  $k = \frac{5}{3}n$  (vgl. sechste Vorlesung S. 49 oben) und demgemäß die Geschwindigkeit der Verdichtungs-Verdünnungswellen  $= \sqrt{3}$  mal so groß an wie die der mit gleichbleibender Dichte fortschreitenden. Die Abweichungen der natürlichen Substanzen, wie Metall, Glas, Kautschuk, Gelatine, auf die Stokes die Aufmerksamkeit richtete, lagen alle in der Richtung, daß der Widerstand gegen Zusammendrücken größer erschien, als nach der Lehre von Navier-Poisson zu erwarten war. Es ist aber in Thomson und Tait (§ 685)

darauf hingewiesen, daß Kork in der entgegengesetzten Richtung abweicht und, im Vergleich zu seiner Starrheit, weit weniger Widerstand gegen Zusammendrücken leistet, als jener Lehre gemäß ist. In Wahrheit können wir, ohne gegen irgendeine richtige Molekulartheorie zu verstoßen, den Raummodul eines elastischen Festkörpers im Verhältnis zu seiner Starrheit so klein annehmen, wie wir wollen, wenn wir ihn nur, der Stabilität wegen, positiv annehmen. Ein Raummodul gleich Null ergibt die Geschwindigkeit von Verdichtungs-Verdünnungswellen gleich dem  $\sqrt[4]{3}$  fachen derjenigen der Wellen mit konstanter Dichte. Wenn wir aber jetzt Übereinstimmung zwischen Fresnel und Green herstellen wollen, brauchen wir nur für den Äther, wenn auch nicht für allen Äther, so doch für den in dem von ponderabler Materie eingenommenen Raume befindlichen, einen negativen Raummodul, der eben ein wenig kleiner ist als  $-\frac{4}{3}n$ , um die Geschwindigkeit ( $v$ ) sehr klein im Vergleich mit  $\sqrt{\frac{n}{\rho}}$ , zu machen. Und nun gibt uns glücklicherweise (§ 167 weiter unten) eine Theorie der Atome und der Elektronen im Äther, zu der ich durch andere Überlegungen geführt wurde, eine vollkommen klare und natürliche Erklärung für Äther, der im leeren Raume praktisch inkompressibel ist, wie ihn Green angenommen hat, während er im Innern eines beliebigen gewöhnlichen Festkörpers oder einer Flüssigkeit einen hinreichend großen negativen Raummodul besitzt, der die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Verdichtungs-Verdünnungswellen äußerst klein im Vergleich mit der von Wellen gleichen Volumens macht.

§ 161. In meinem Artikel von 1888 habe ich gezeigt, daß, wenn  $v$  im Vergleich mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen gleichbleibender Dichte in den beiden Medien zu beiden Seiten einer reflektierenden Zwischenfläche sehr klein oder unendlich klein oder vollkommen Null ist, Fresnels Gesetze der Reflexion und Brechung sehr angenähert oder vollkommen genau erfüllt sind. Etwa 14 Jahre später fand ich, wie in § 46 der fünfzehnten Vorlesung gesagt ist, daß es für die Befriedigung der Fresnelschen Gesetze ausreicht, wenn die Geschwindigkeit der Verdichtungs-Verdünnungswellen in einem der beiden Medien äußerst klein ist. Während dieser 14 Jahre empfand ich immer mehr die Schwierigkeit anzunehmen, daß der Kompressionsmodul von Äther im ganzen Raume negativ sein sollte, und zwar so weit negativ, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Verdichtungs-Verdünnungswellen äußerst klein oder Null wird. Ein Hauptgegenstand der langen mathematischen Untersuchung über kugelförmige Wellen in einem elastischen Festkörper, die der vierzehnten Vorlesung (S. 151—176 oben) angefügt ist, war der, zu finden, ob Kleinheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Verdichtungs-Verdünnungswellen in Äther, der keine ponderable Materie enthält, praktisch das Verschwinden der durch diese Wellenart fortgeführten Energie, die von einem eine Lichtquelle bildenden Vibrator herrührt, ergeben kann oder nicht. Ich fand den unausweichlichen Beweis dafür, daß dieses notwendige praktische Verschwinden nicht möglich ist; und ich fühlte mich demgemäß zu der in § 32, S. 171 ausgesprochenen Schlußfolgerung gezwungen: „Dies widerlegt, meines Erachtens, vollkommen meine frühere Hypothese einer sehr kleinen Geschwindigkeit für die Wellenbewegung ohne Drehung in der Wellentheorie des Lichtes“. Jetzt aber, da ich zu meiner größten Freude sehe, daß es für die theoretische Bestätigung der Fresnelschen Gesetze ausreicht, daß die Ge-



schwindigkeit der Verdichtungs-Verdünnungswelle für das eine oder das andere der Medien zu beiden Seiten der Zwischenfläche äußerst klein ist, kann ich zu meiner alten Hypothese mit einem Zutrauen zurückkehren, das ich früher ihr gegenüber nie empfunden hatte. Sie ist meiner Meinung nach jetzt annehmbar gemacht, wenn man mit Green voraussetzt, daß der im Raum, der nicht von ponderabler Materie ausgefüllt ist, befindliche freie Äther praktisch inkompressibel ist für solche Kräfte, die bei den von einer Lichtquelle irgendwelcher Art ausgehenden Wellen in Betracht kommen, einschließlich der strahlenden Wärme und den elektromagnetischen Wellen; während er in dem von Flüssigkeiten und Festkörpern besetzten Raume einen hinreichend großen negativen Raummodul besitzt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Verdichtungs-Verdünnungswellen äußerst klein im Vergleich mit der der Wellen gleichbleibender Dichte im reinen Äther zu machen. Jetzt haben wir keine Schwierigkeit, uns von den bei der Inzidenz von Licht auf eine durchsichtige Flüssigkeit oder einen solchen Festkörper hervorgerufenen Verdichtungs-Verdünnungswellen zu befreien. Sie mögen sich mit sehr schwacher Wirksamkeit in den Festkörpern oder Flüssigkeiten ausbreiten, innere Reflexionen, meist totale an den Grenzflächen zwischen dem Festkörper oder der Flüssigkeit und der Luft oder dem Äther im Vakuum erleiden; aber wahrscheinlicher (§ 172 weiter unten) werden sie absorbiert, das heißt in nicht wellenförmige Wärmebewegung der ponderablen Molekeln verwandelt, ohne sich als Wellen mehr als durch eine äußerst geringe Strecke der ponderablen Materie (Festkörper, Flüssigkeit oder Gas) auszubreiten. Sicher ist, daß weder Ätherwellen noch sonst eine mechanische Wirkung irgendwelcher Art innerhalb des Körpers Anlaß zu Verdichtungs-Verdünnungswellen im freien Äther geben können, wenn wir geradezu annehmen, daß der freie Äther inkompressibel ist.

§ 162. Bis jetzt sind wir in unserer Anschauung durch keinerlei physikalische Vorstellung darüber gestützt, wie der Äther praktisch inkompressibel sein kann, wenn er nicht durch ponderable Materie gestört ist, und zugleich leicht kompressibel sein soll, ja sogar einen negativen Raummodul besitzen soll, im Innern eines durchsichtigen ponderablen Körpers.

Verschieben Atome ponderabler Materie, wenn sie sich bewegen, den Äther; oder bewegen sie sich durch den vom Äther besetzten Raum, ohne ihn zu verschieben? Das ist die Frage, der man nicht aus dem Wege gehen kann, wenn man sich mit bestimmten physikalischen Betrachtungen über die Art der Wirkungen beschäftigt, die zwischen Atomen und Äther Platz greifen, und wenn man ernstlich zu verstehen versucht, wie es kommt, daß ein durchsichtiger Körper eine Wellenbewegung annimmt, gerade so, als ob der Äther dieses Körpers dichter wäre als der diesen außen umgebende Äther und er durch die Anwesenheit dieses Körpers nicht weiter gestört würde. Diese Frage ist im Anhang A und im Anhang B unter der Überschrift „Wolke I“ sorgfältig behandelt. Meine Antwort ist angedeutet in der langen Überschrift des Anhanges A „Über die Bewegung in einem unendlichen elastischen Festkörper, welche durch die Bewegung eines in seiner Substanz befindlichen Körpers verursacht wird, der auf den Äther allein mit Anziehung oder Abstoßung wirkt.“ Diese Überschrift steht in Widerspruch zum alten scholastischen Axiom: Zwei verschiedene

Mengen Materie können nicht gleichzeitig denselben Raum einnehmen. Ich fühle, es ist unmöglich, den Widerspruch zu bestreiten.

§ 163. Atome bewegen sich durch den vom Äther eingenommenen Raum. Sie müssen auf ihn in irgendeiner Weise so einwirken, daß Bewegungen ponderabler Materie Lichtwellen erzeugen können, und so, daß die Schwingungsbewegung der Wellen mit Zwang auf die ponderable Materie einwirken kann. Daß Äther Kraft auf ponderable Materie ausübt, wissen wir, indem er unsere Lichtempfindung hervorruft; ebenso bei der photographischen Wirkung; in der zwangsweisen Zersetzung von Kohlensäure und Wasser durch Sonnenlicht beim Wachsen der Pflanzen; ferner indem er die Ausdehnung von durch Licht oder strahlende Wärme erwärmten Körpern hervorruft usw. Die Überschrift des Anhangs A enthält meine Antwort auf die Frage: Worin besteht die Einwirkung von Atomen der Materie auf Äther? Sie soll nichts anderes sein als Anziehung oder Abstoßung.

§ 164. Wenn aber Äther absolut unzusammendrückbar und undehnbar wäre, sollte ein ihn anziehendes oder abstoßendes Atom vollkommen wirkungslos bleiben. Um es wirksam zu machen, nehme ich an, daß der Äther einer Änderung des Raumes fähig ist, und daß er sogar stark verdichtet und verdünnt werden kann durch große positive und negative Drucke, die von der Anziehung und Abstoßung herrühren eines Atoms und seines neutralisierend wirkenden Quantum Elektronen. Wie im Anhang A §§ 4, 5, nehme ich jetzt der Einfachheit wegen an, ein von Elektronen freies Atom stoße den in ihm und in seiner Umgebung befindlichen Äther mit einer Kraft ab, die für den innerhalb des Atoms befindlichen Äther dem Abstände vom Mittelpunkte direkt proportional und für außerhalb befindlichen Äther dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional ist. Ich nehme ferner an, daß ein einzelnes Elektron den Äther nach denselben Gesetzen anzieht, daß ferner der Radius eines Elektrons im Vergleich mit dem Radius irgendeines Atoms sehr klein ist. Ich nehme endlich an, daß alle Elektronen gleich und ähnlich sind und gleiche Kräfte auf den Äther ausüben.

§ 165. Indem ich die Möglichkeit, auf die in § 6 des Anhangs E hingewiesen ist, im Auge behalte, nehme ich für jetzt an, daß die Abstoßung eines leeren Atoms<sup>1)</sup> auf den außerhalb seiner befindlichen Äther eine ganze Anzahl Mal so groß ist wie die Anziehung eines einzelnen Elektrons auf den Äther, gleiche Abstände vorausgesetzt. Ein diese Annahme nicht erfüllendes Atom kann nicht unelektrisch sein. Ich mache weiter dieselben Annahmen wie im Anhang E bezüglich der gegenseitigen elektrischen Abstoßung zwischen leeren Atomen und leeren Atomen, bezüglich der Anziehung zwischen leeren Atomen und Elektronen und bezüglich der Abstoßung zwischen Elektronen und Elektronen. Und wie im Anhang A ist ein „unelektrisches Atom“ ein Atom, das sein gesättigtes Quantum Elektronen in sich enthält.

§ 166. Weiter sei das Gesetz der Zusammendrückbarkeit von Äther ein derartiges, daß es bewirkt, daß die mittlere Dichte des Äthers innerhalb irgendeines Raumes, der eine große Anzahl unelektrischer Atome enthält, genau gleich der Dichte eines Äthers ist, der nicht durch ponderable Materie gestört wird. Wenn in jedem Atom genau ein einziges Elektron vor-

1) Der Kürze wegen gebrauche ich den Ausdruck „leeres Atom“, um ein Atom zu bezeichnen, das kein (negatives) Elektron enthält.

handen wäre, würde diese Annahme eine Verschiebung des außerhalb eines Atoms befindlichen Äthers vermöge der Abstoßung des Atoms und der Anziehung des Äthers aufheben, und sie würde eine solche sehr nahe aufheben, wenn sich zwei oder mehrere Atome im Innern befinden. So wäre der Äther in jedem Atome von der Oberfläche nach innen hin bis zu einem gewissen Grade verdünnt und dann weiter innen in der Umgebung eines jeden Elektrons verdichtet. In einem einelektronigen Atom nenne ich die sphärische Fläche normaler Dichte zwischen dem nach außen gehenden Verdünnungs- und dem zentralen Verdichtungsgebiete der Kürze wegen die Verdichtungssphäre. In einem vielelektronigen Atom nimmt die Dichte des Äthers von der ungeheuren Verdichtung in der Umgebung des Mittelpunktes jedes einzelnen Elektrons zu dem genau normalen Betrage an einer einschließenden Fläche ab; den Raum innerhalb dieser Fläche will ich für jedes Elektron die Verdichtungssphäre dieses Elektrons nennen. Sie ist sehr angenähert eine Kugel, außer wenn im Verfolg irgendeiner heftigen Bewegung zwei Elektronen einander sehr nahe kommen.

§ 167. Ich nehme ferner an, daß das Gesetz der Zusammendrückbarkeit des Äthers ein derartiges ist, daß vermöge desselben das im § 166 beschriebene Gleichgewicht ein stabiles ist, aber so nahe unstabil, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Verdichtungs-Verdünnungswellen, die den in einem von ponderabler Materie erfüllten Raume befindlichen Äther durchziehen, sehr klein ist im Vergleich mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen gleichbleibender Dichte in dem nicht durch ponderable Materie gestörten Äther.

§ 168. Schließlich nehme ich noch an, daß die wirksame Starrheit des Äthers in einem von ponderabler Materie erfüllten Raume gleich der des reinen, nicht durch ponderable Materie gestörten Äthers ist. Diese Annahme ist keine willkürliche; wir müssen sie vielmehr für eine durch den Versuch bestätigte Tatsache ansehen, wie in der ersten Vorlesung und in §§ 81', 136 der siebzehnten und achtzehnten Vorlesung erläutert ist. Es wird uns aber, wie in der zwanzigsten Vorlesung § 237 weiter unten gezeigt werden wird, befriedigen zu erfahren, daß diese Annahme aus einer naturgemäßen Durchführung der Reihe der in den §§ 163—167 gemachten Annahmen folgt.

§ 169. Gehen wir jetzt auf § 132 zurück. Dieser enthält nur die Green'sche Wellentheorie, die dahin erweitert ist, daß sie nicht bloß die Wellen gleichbleibender Dichte umfaßt, sondern ebenso die Verdichtungs-Verdünnungswellen, welche herrühren von der Inzidenz ebensolcher Wellen auf die Zwischenfläche zweier, ohne die Möglichkeit des Gleitens miteinander verbundenen elastischen Festkörper gleicher Starrheit, von denen jeder verdichtet oder verdünnt werden kann. Wir wollen annehmen, daß in dem einen oder dem anderen von den beiden Medien die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Verdichtungs-Verdünnungswellen sehr klein ist. Daraus folgt, daß  $L$  sehr klein ist, wie wir sehen, wenn wir die Gleichungen (48) und (50) dazu verwenden, um  $a$ ,  $c$  und  $c$  aus (61) zu eliminieren; es ergibt sich dann

$$L = \frac{(\rho - \rho')^2 u^{-2} \sin^2 i}{\rho \gamma (v^{-2} - u^{-2} \sin^2 i) + \rho' \gamma (v^{-2} - u^{-2} \sin^2 i)}. \quad (100)$$

§ 170. Wenn entweder das obere oder das untere Medium das ist, was wir gewöhnlich als Vakuum bezeichnen (in Wirklichkeit von ponderabler

Materie freier Äther), beispielsweise das obere, wird  $v = \infty$ , und (100) geht über in

$$L = \frac{(e - e')^2 u^{-2} \sin^2 i}{e \sqrt{1 - u^{-1} \sin i} + e' \sqrt{(v^{-2} - u^{-2} \sin^2 i)}}, \quad (101)$$

hieraus folgt für ein sehr kleines  $v$

$$L \doteq \frac{(e - e')^2}{e} u^{-2} v \sin^2 i, \quad (102)$$

wo das Zeichen  $\doteq$  angenäherte Gleichheit bedeutet.<sup>1)</sup> Wenn beide Größen  $v$  und  $v$  sehr klein sind, geht (100) über in

$$L \doteq \frac{(e - e')^2 u^{-2} v \sin^2 i}{e, v + e' v}. \quad (103)$$

So sehen wir nach den Gleichungen (100), (102) und (103) nicht bloß, wie oben in § 133 gesagt ist, daß die Fresnelschen Gesetze genau erfüllt sind, wenn entweder  $v$  oder  $v$  Null ist; wir sehen weiter, wie nahe sie in Annäherung erfüllt sind, wenn  $v = \infty$  und  $v$  sehr klein ist und ferner, wenn die beiden Größen  $v$  und  $v$  sehr klein sind.

Wahrscheinlich werden Beträge von  $v$ , oder von  $v$  und  $v$  von der Größenordnung  $u/500$  oder  $u/1000$  hinreichend klein befunden werden; nicht aber wird  $u/100$  hinreichend klein sein, um eine nahe Erfüllung der Fresnelschen Gesetze zu liefern, wie sie durch die Beobachtung erwiesen ist. Vgl. § 182 weiter unten.

§ 171. So ist, soweit es die Reflexion und Brechung des Lichtes betrifft, die Übereinstimmung zwischen Fresnel und Green eine vollständige: Das heißt, wir besitzen jetzt eine durchaus wirkliche mechanische Begründung für die bewunderungswürdigen Gesetze, die Fresnels durchdringender Genius vor 80 Jahren auf Grund tatsächlich unvollkommener mechanischer Anschauungen vorausgesehen hat. (Vgl. §§ 106, 107 oben.)

§ 172. Die einzige bisher bekannt gewordene Abweichung von der absolut strengen Gültigkeit der Fresnelschen Gesetze für die Reflexion und Brechung von Licht an der Oberfläche eines durchsichtigen Körpers in Luft oder freiem Äther oder an der Zwischenfläche zwischen zwei durchsichtigen, festen oder flüssigen Körpern, ist die, welche Sir George Airy für Diamant in Luft vor mehr als 80 Jahren entdeckt hat und welche viele Jahre später von Sir George Stokes als Diamanteigenschaft bezeichnet wurde. (Vgl. § 158 oben.) Sie ist in der obigen Tabelle des § 105 zugleich mit entsprechenden später von Jamin an andern festen und flüssigen durchsichtigen Körpern ermittelten Abweichungen mitgeteilt. Jetzt scheint es auf Grund der Gleichungen (102) und (103), daß die Erklärung dieser Abweichungen von den Fresnelschen Gesetzen, die übrigens auch im Diamant äußerst klein sind, darin zu gewinnen ist, daß man der Größe  $v$  oder den Größen  $v$  und  $v$  sehr kleine imaginäre Werte beilegt. Um den Fall von Licht zu verfolgen, das sich durch ein Vakuum oder durch Luft bewegt und auf einen durchsichtigen

1) Ob diese Gleichung zulässig ist, halte ich für sehr zweifelhaft; es wird eine imaginäre Größe fortgelassen, weil eine reelle Größe bedeutend ist. Wie soll man das begrifflich fassen? Eine imaginäre Größe ist doch begrifflich weder groß noch klein. Diese Schwierigkeit besteht in allen folgenden und in früheren Auseinandersetzungen. Die Rechnung ist eben nur eine symbolische. D. H.

Festkörper oder eine solche Flüssigkeit fällt, sollten wir  $v = \infty$  setzen, wenn das einfallende Licht sich in einem Vakuum bewegt; oder, wenn in Luft, vielleicht auch  $v = \infty$  oder sicher sehr groß im Vergleich mit  $v$ . Sonach ist in beiden Fällen der geeignete angenäherte Betrag von  $L$  durch (102) gegeben.

§ 173. Aus den Gleichungen (59) und (67) des § 132 ersieht man, daß, wenn  $v$  einen kleinen reellen (und positiven) Wert hat, der reflektierte Strahl von Schwingungen in der Einfallsebene für einen Einfallswinkel, der ein wenig kleiner ist als der Brewstersche Winkel  $\arctg \mu$ , verschwinden muß. Wenn wir  $v$  einen komplexen Wert  $p + i, q$  beilegen mit positivem  $p$ , so finden wir die Diamanteigenschaft und eine Hauptinzidenz, die etwas kleiner ist als für  $p = 0$ . Wir besitzen bisher noch keine sehr eindringende Beobachtungen über die Exaktheit von  $\arctg \mu$ , weder für den Polarisationswinkel, wenn das Verlöschen scheinbar vollkommen ist, noch für die Hauptinzidenz in Fällen merklicher Diamanteigenschaft. Für jetzt haben wir demnach keinen Grund,  $v$  irgendeinen reellen Teil zu geben, und dürfen setzen

$$,v^2 = -,q^2; \quad ,v = i, q, \quad (104)$$

wo mit  $q$  eine reelle Geschwindigkeit bezeichnet ist. Benutzt man diesen Wert in der letzten Formel des § 128 und eliminiert  $\sin ,j/v$  durch (48) und  $\cos ,j/v$  und  $,c$  durch (49) und (50), so findet man für die Verschiebung in der gebrochenen Verdichtungs-Verdünnungswelle

$$,Hf[t - ax - i\sqrt{1 + a^2, q^2}y/q]. \quad (105)$$

Beachtet man jetzt (63) und (102), so sieht man, daß in  $,H/G$  ein imaginärer Teil vorkommt, der äußerst klein ist im Vergleich mit dem reellen Teile, da nach (102)  $L/v$  reell und nicht klein ist, während  $L$  imaginär und äußerst klein ist. Für unsere jetzige angenäherte Schätzung nehmen wir an, daß  $G$  reell und daß demgemäß auch  $,H$  reell ist. Setzen wir  $f(t) = e^{ti\omega}$  in (105) und nehmen die halbe Summe der beiden imaginären Ausdrücke, wie sie mit  $\pm i$  gegeben sind, so finden wir für die reelle gebrochene Verdichtungs-Verdünnungsverschiebung mit einer angenäherten Änderung, die davon herrührt, daß  $,qa$  ein sehr kleiner Bruch ist, den folgenden Ausdruck:

$$D = ,H \cos \omega (t - ax) e^{\omega \frac{y}{q} \sqrt{1 + a^2, q^2}} \cdot ,H \cos \omega (t - ax) e^{\omega \frac{y}{q}}. \quad (106)$$

Also ist  $q$  positiv. (Vergl. Anm. zu § 158<sup>II</sup>.) Die Richtung dieser reellen Verschiebung ist sehr nahe die von  $OY'$  (§ 117), d. h. die Richtung der negativen  $Y$ -Achse, weil der Winkel  $,j$  sich nur um eine sehr kleine imaginäre Größe von  $90^\circ$  unterscheidet. Der Winkel wäre genau  $90^\circ$ , wenn  $,v$  genau Null wäre. Und er wäre um eine sehr kleine reelle Größe weniger als  $90^\circ$ , wenn  $,v$  eine sehr kleine reelle Geschwindigkeit wäre.

§ 174. Die durch (106) dargestellte Bewegung ist keine Welle, die in das dichtere Medium eindringt, sie ist eine gleitende Bewegung, die entlang der Zwischenfläche mit der Geschwindigkeit  $a^{-1}$  fortschreitet. Die Richtung der Verschiebung ist annähernd senkrecht zur Zwischenfläche. Ihre Größe nimmt von der Zwischenfläche aus nach innen ab nach dem Gesetze des durch den reellen Faktor im Exponenten dargestellten Verhältnisses; dabei ist der Abstand von der Zwischenfläche  $-y$ . Die Periode der Welle ist  $2\pi/\omega$  und der in dieser Zeit mit der Geschwindigkeit  $q$  zurückgelegte Weg ist  $2\pi, q/\omega$ .

Demnach beträgt die Verschiebung in einem Abstände von der Zwischenfläche, der diesem Wege gleich ist, das  $1/e^{2\pi}$  fache oder  $1/535$  der Verschiebung an der Zwischenfläche.

§ 175. Die richtige Einschätzung der Größe eines Abstandes von der Ordnung  $2 \cdot 10^{-8}$  (§ 80 oben) zwischen den Mittelpunkten benachbarter Atome und der Kleinheit von  $v$ , wenn man diese Größe als vorhanden ansieht, würde wahrscheinlich eine gute Begründung für die Annahme abgeben, daß  $v$  rein imaginär ist. Dies aber ist eine sehr wichtige Annahme, insofern sie zur Folge hat, daß es keine nach innen sich bewegende Verdichtungs-Verdünnungswelle gibt, die Energie von reflektierten oder gebrochenen Strahlen gleichen Volumens mit sich führen könnte.

§ 176. Wir wollen jetzt den Wert von  $q/u$ , den Diamantinismus (§ 158) suchen, um irgendeinen beobachteten Betrag der Diamanteigenschaft zu erhalten, wie er durch die Tangente des Hauptazimuts dargestellt und von Jamin mit  $k$  bezeichnet ist. In der Gleichung (59) des § 132 nehmen wir für  $L$  den durch (102) gegebenen Wert und setzen

$$\frac{(e - e')^2}{e} = N; \quad v = i, q; \quad \frac{q}{u} = \sigma; \quad (107)$$

so finden wir

$$-\frac{G'}{G} = \frac{u(eb - e, b) - \sqrt{-1} N, \sigma \sin^2 i}{u(eb + e, b) + \sqrt{-1} N, \sigma \sin^2 i} = \frac{P - Q\sqrt{-1}}{u^2(eb + e, b)^2 + (N, \sigma \sin^2 i)^2}, \quad (108)^1$$

wo gesetzt ist

$$\begin{aligned} P &= u^2[(eb)^2 - (e, b)^2] - (N, \sigma \sin^2 i)^2 \\ Q &= 2u, eb N, \sigma \sin^2 i. \end{aligned} \quad (109)$$

Rechnen wir in § 128  $f(t) = e^{i\omega t}$  und machen den Wert reell, indem wir die Halbsumme der Lösungen für  $\pm i$  benutzen, so finden wir die Verschiebung

$$\text{in der einfallenden Welle} = G \cos \omega \left( t - \frac{s}{u} \right), \quad (110)$$

$$\text{in der reflektierten Welle} = -G \sqrt{(T^2 + E^2)} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{s}{u} \right) - \varphi \right] \quad (111)$$

$$= -G \sqrt{\frac{u^2(eb - e, b)^2 + (N, \sigma \sin^2 i)^2}{u^2(eb + e, b)^2 + (N, \sigma \sin^2 i)^2}} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{s}{u} \right) - \varphi \right]. \quad (111')^2$$

Hieraus folgt

1) Nach der Bezeichnung des § 94' ist  $Q/P = E/T$  und

$$T = \frac{P}{u^2(eb + e, b)^2 + (Nq/u \sin^2 i)^2} \quad \text{und} \quad E = \frac{Q}{u^2(eb + e, b)^2 + (Nq/u \sin^2 i)^2}.$$

2) Die zweite Form (111') ergibt sich aus (111), wenn man  $P^2 + Q^2$  in zwei Faktoren nach der algebraischen Identität zerlegt

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 + 4a^2c^2 = [(a + b)^2 + c^2][(a - b)^2 + c^2].$$

Sie wird aber auch direkt gefunden, wenn man (108) so behandelt, wie wir nach dem Vorgange Greens in (75) eine ähnliche Form behandelt haben, wodurch sich die Amplituden leichter, die Phasen freilich weniger leicht berechnen.

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arctg \frac{Q}{P} = \arctg \frac{E}{T} \\ &= \arctg \frac{2\mu^2(\mu^2 - 1)\sigma \cos i \sin^2 i}{\mu^2 \cos^2 i - \sin^2 i - (\mu^2 - 1)^3 \sigma^2 \sin^4 i} \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Die hier angegebene entwickelte Form für  $Q/P$  wird gefunden, wenn man beachtet, daß ist

$$e/e = \mu^2; \quad u b = \cos i; \quad u, b = \mu \cos i; \quad \cos^2 i = 1 - \frac{\sin^2 i}{\mu^2} \quad (113)$$

und Zähler und Nenner durch  $(\mu^2 - 1)/\mu^2$  dividiert.<sup>1)</sup>

§ 177. Nach (111') und der Bezeichnung des § 94' erhalten wir

$$\begin{aligned} T^2 + E^2 - \left( \frac{e b - e, b}{e b + e, b} \right)^2 &= T^2 + E^2 - \left[ \frac{\operatorname{tg}(i - i)}{\operatorname{tg}(i + i)} \right]^2 \\ &= \frac{4 e, e b, b (N, \sigma \sin^2 i)^2}{(e b + e, b)^2 [u^2 (e b + e, b)^2 + (N, \sigma \sin^2 i)^2]} \end{aligned} \quad (114)$$

oder angenähert

$$T^2 + E^2 - \left[ \frac{\operatorname{tg}(i - i)}{\operatorname{tg}(i + i)} \right]^2 = \frac{4 e, e b, b (N, \sigma \sin^2 i)^2}{u^2 (e b + e, b)^4}. \quad (115)$$

In (114) und (115) bezeichnet nun  $T^2 + E^2$  die ganze Intensität des reflektierten Lichtes, das vom einfallenden Lichte herrührt, dessen Intensität die Einheit ist und das in der Einfallsebene schwingt. Also zeigt die Kleinheit der Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichungen, wie wenig diese Größe den Wert des nach der Fresnelschen Formel berechneten Betrages

$$\left[ \frac{\operatorname{tg}(i - i)}{\operatorname{tg}(i + i)} \right]^2$$

übersteigt. Vergleiche §§ 103—105 oben.

§ 178. In (110) und (111) bedeutet  $s$  (Fig. 72) eine Strecke  $AEF$  in der Richtung des einfallenden Strahles, der über den Einfallspunkt  $E$  hinaus verlängert gedacht ist, oder eine gleiche Länge  $AEF'$  in dem Wege des einfallenden und des reflektierten Strahles. Wir sehen also aus (111), daß die Reflexion ein Zurückbleiben der Phase von der Größe  $\varphi$  verursacht, die von  $0^\circ$  durch  $90^\circ$  bis  $180^\circ$  ansteigt, wenn der Einfallswinkel von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  wächst, wie durch Gleichung (112) gezeigt ist; denn (112) lehrt, daß  $\operatorname{tg} \varphi$  über positive Werte von 0 bis  $+\infty$  wächst, wenn  $i$  von 0 bis zu einem Betrage ansteigt, der wenig kleiner ist als  $\arctg \mu$ ; und daß wenn  $i$  weiter bis  $90^\circ$  ansteigt  $\operatorname{tg} \varphi$  über negative Werte von  $-\infty$  bis 0 geht. Diese Änderungen werden durch die umstehenden Zeichnungen (Fig. 73, 74) versinnbildlicht, die nach der folgenden Tabelle der

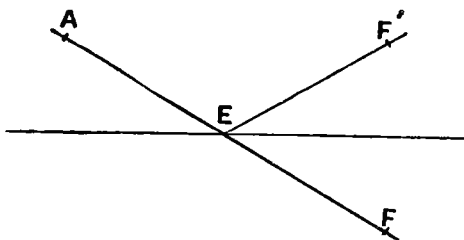


Fig. 72.

1) Man beachte noch weiter die Beziehung  $N = \frac{(e - e)^2}{e} = e(\mu^2 - 1)^2$ .

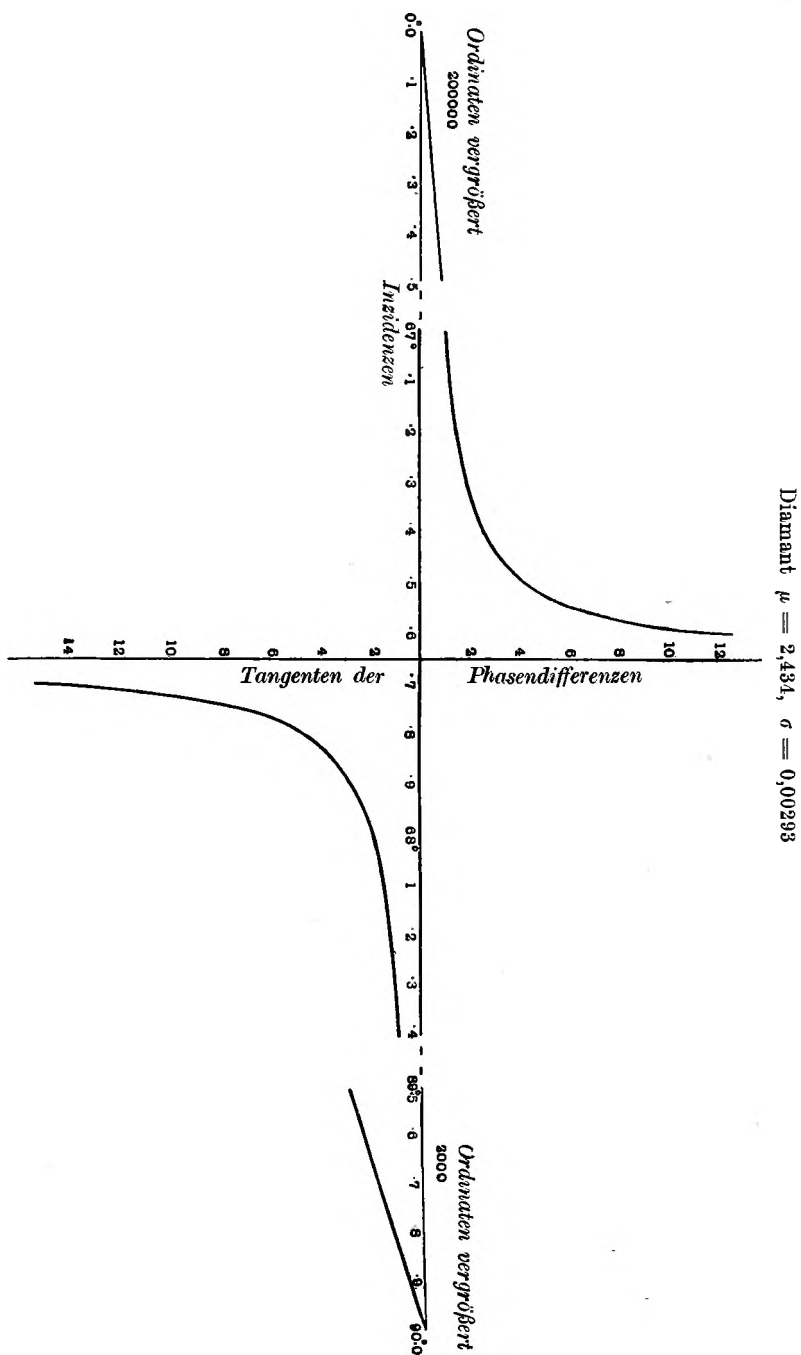


Fig. 73.



aus (112) mit  $\sigma = 0,00293$  (dem Wert dieser Größe für Diamant nach dem späteren § 181) berechneten Beträge von  $\operatorname{tg} \varphi$  und  $\varphi$  gezeichnet ist. Beachten wir, wie langsam  $\operatorname{tg} \varphi$  und  $\varphi$  für wachsende Inzidenzen ansteigen, ausgenommen für solche, die sehr wenig kleiner und sehr wenig größer sind als die Hauptinzidenz  $67,65^\circ$ . Man beachte ferner, wie plötzlich  $\operatorname{tg} \varphi$  von

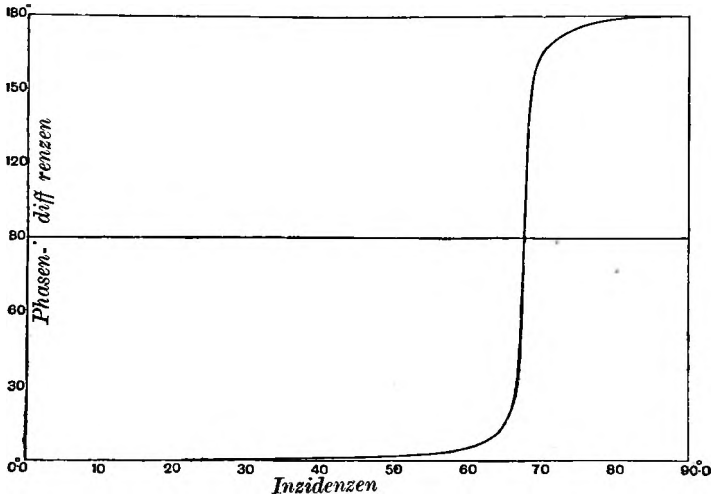


Fig. 74.

einem kleinen positiven Werte bis  $+\infty$  und von  $-\infty$  zu einem sehr kleinen negativen Werte steigt, wenn die Inzidenz durch die Hauptinzidenz hindurchgeht. Man beachte weiter, wie plötzlich demgemäß  $\varphi$ , die Phasenverzögerung, von einer kleinen positiven Größe bis  $90^\circ$  geht, wenn die Inzidenz  $67,65^\circ$  erreicht, und dann sofort bis  $180^\circ$  wächst, wenn die Inzidenz auch nur einen wenig über diesem Winkel liegenden Betrag erreicht. Man

$i$	$\operatorname{tg} \varphi$	$\varphi$	$i$	$\operatorname{tg} \varphi$	$\varphi$
$0^\circ$	0	0	$I$	$\pm \infty$	$90^\circ$
$1^\circ$	0,000008798	$0^\circ 0,03'$	$67,7^\circ$	$-14,87770$	$93^\circ 51'$
$10^\circ$	0,0008890	$0^\circ 0,3'$	$67,75^\circ$	$-6,95857$	$98^\circ 11'$
$20^\circ$	0,003678	$0^\circ 0,13'$	$67,8^\circ$	$-4,53967$	$102^\circ 25'$
$30^\circ$	0,008825	$0^\circ 30'$	$67,9^\circ$	$-2,67607$	$110^\circ 29'$
$40^\circ$	0,01772	$1^\circ 1'$	$68,0^\circ$	$-1,89599$	$117^\circ 49'$
$50^\circ$	0,03469	$1^\circ 59''$	$68,1^\circ$	$-1,46724$	$124^\circ 17'$
$60^\circ$	0,08784	$5^\circ 1''$	$68,2^\circ$	$-1,19615$	$129^\circ 54'$
$65^\circ$	0,25164	$14^\circ 7'$	$68,3^\circ$	$-1,00921$	$134^\circ 44'$
$67,0^\circ$	1,00386	$45^\circ 7'$	$68,4^\circ$	$-0,87251$	$138^\circ 54'$
$67,1^\circ$	1,18360	$49^\circ 48'$	$70^\circ$	$-0,27083$	$164^\circ 51'$
$67,2^\circ$	1,44216	$55^\circ 16'$	$75^\circ$	$-0,07694$	$175^\circ 36'$
$67,3^\circ$	1,85085	$61^\circ 37'$	$80^\circ$	$-0,01640$	$179^\circ 4'$
$67,4^\circ$	2,56306	$68^\circ 41'$	$89^\circ$	$-0,00299$	$179^\circ 50'$
$67,5^\circ$	4,20197	$76^\circ 37'$	$90^\circ$	0,00000	$180^\circ 0'$
$67,55^\circ$	6,18014	$80^\circ 49'$			
$67,6^\circ$	11,70150	$85^\circ 7'$			
$\operatorname{arctg} \mu - 0,00883^\circ = I$		$90^\circ 0'$			

hat aber sorgfältig zu behalten, daß die Größe  $\operatorname{tg} \varphi$  tatsächlich Null ist für  $i = 0^0$  und für  $i = 90^0$ , wie durch Gleichung (112) erwiesen ist.

§ 179. Das Zeichen Minus vor  $G$  in (111) bezeichnet ein Voraneilen oder Zurückbleiben der Phase um  $180^0$ . Für Einfall und Reflexion von Strahlen, die ihre Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene besitzen, haben wir ebenso tatsächlich das Zeichen Minus vor  $C$  in dem später folgenden Ausdruck (116), der den Gleichungen (20) und (23) des § 117 und (39) des § 123, den Ausdrücken (110) und (111) entsprechend, entnommen ist, anzusetzen. So finden wir für solche Schwingungen

$$\begin{aligned} \text{einfallende Welle:} & \quad C \cos \omega \left( t - \frac{s}{u} \right) \\ \text{reflektierte Welle:} & \quad - C \frac{b-b}{b+b} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{s}{u} \right) \right] \end{aligned} \quad (116)$$

Hier ist weder eine der Größe  $\varphi$  des Ausdruckes (111) entsprechende Verzögerung noch ein Voreilen vorhanden. Wir schließen daraus, daß, wenn ebenpolarisiertes Licht auf die reflektierende Fläche so fällt, daß seine Schwingungsebene gegen die Einfallsebene unter irgendeinem Winkel geneigt ist, und wenn wir es in Gedanken in zwei Komponenten zerlegen, von deren Schwingungsebenen die eine in dieser Ebene, die andere senkrecht zu ihr liegt, die Komponente des reflektierten Lichtes, die von der ersten Komponente herrührt, in ihrer Phase hinter der von der andern herrührenden um die durch die Gleichung (112) gegebene Verzögerung zurückbleibt. Demnach wird das reflektierte Licht für jede Inzidenz elliptisch polarisiert sein, oder zirkular polarisiert in dem Falle einer Phasendifferenz von  $90^0$  und gleicher Amplituden der beiden reflektierten Komponenten. Die Beträge von  $i$  und  $\alpha$ , die das reflektierte Licht zirkularpolarisiert machen, sind „Hauptinzidenz“ und „Hauptazimut“ genannt (vgl. § 97 oben).

§ 180. Die Hauptinzidenz  $I$  ist der Wert von  $i$ , der den Nenner von  $E/T$ , wie er in (112) angegeben ist, zur Null macht. Sie ist demnach bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}^2 I = \mu^2 - (\mu^2 - 1)^3, \sigma^2 \operatorname{tg}^2 I \sin^2 I \quad (117)$$

Unbeschadet der Größe des Faktors  $(\mu^2 - 1)^3$  für eine Substanz von hohem Brechungsvermögen (z. B. 126,7 für Schwefelarsen) ist das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung (117) sehr klein gegenüber dem ersten wegen der Kleinheit von  $(q/u)^2$  für alle durchsichtigen Substanzen, für die wir Beobachtungsmaterial von Jamin besitzen (vgl. § 182 weiter unten). Demgemäß dürfen wir in diesem Gliede  $\mu^2$  für  $\operatorname{tg}^2 I$  und  $\mu^2/(\mu^2 + 1)$  für  $\sin^2 I$  setzen. So erhalten wir anstatt des Ausdruckes (117) für die Hauptinzidenz

$$\operatorname{tg} I \cdot \mu \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\mu^2(\mu^2 - 1)^3}{\mu^2 + 1}, \sigma^2 \right]. \quad (118)$$

§ 181. Um das Hauptazimut zu finden, sei  $D$  die Schwingungsamplitude des ebenpolarisierten einfallenden Lichtes und seien  $D \cos \alpha$  und  $D \sin \alpha$  die Schwingungsamplituden der in der Einfallsebene und der senkrecht zu dieser Ebene liegenden Komponenten. So können wir mit der Bezeichnung der §§ 176, 179 setzen

$$G = D \cos \alpha, \quad C = D \sin \alpha. \quad (119)$$

Diese Werte müssen nun solche sein, daß sie die beiden Komponenten des reflektierten Lichtes gleichmachen, wenn der Einfallswinkel der durch (117) gegebene (die Hauptinzidenz) ist; das heißt, der Wert von  $i$  ist, durch den  $P=0$  wird, oder nach (109) annähernd,  $\varrho b = \varrho, b$ . Dadurch wird die Amplitude von (111) annähernd gleich  $-GE$ , oder

$$-G \frac{Q}{4(u, \varrho b)^2} \text{ d. h. } ^1) -G \frac{(\mu^2 - 1)^2}{2\sqrt{(\mu^2 + 1)}} \sigma. \quad (120)$$

Setzt man dies gleich der Amplitude nach dem Ausdruck in der zweiten Reihe von (116) und macht von (119) Gebrauch, so sieht man, daß die Bedingung für die zirkulare Polarisation ist

$$\frac{(\mu^2 - 1)^2}{2\sqrt{(\mu^2 + 1)}} \sigma \cos \alpha = \frac{b - b}{b + b} \sin \alpha. \quad (121)$$

Nun ist der Einfallswinkel annähernd  $\arctg \mu$ , und für diesen hat man

$$\frac{b - b}{b + b} = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}, \quad (124)$$

demnach erhalten wir für das Hauptazimut  $\alpha$

$$\tg \alpha = \frac{1}{2}(\mu^2 - 1)\sqrt{(\mu^2 + 1)} \frac{q}{u}. \quad (123)$$

§ 182. Die obige Tabelle des § 105 gibt Jamins Werte von  $\tg \alpha$  (sein „ $k$ “) für acht Substanzen und das Resultat einer sehr sorgfältigen Untersuchung Rayleighs für Wasser mit besonders gereinigter Oberfläche wieder, das an die Stelle desjenigen von Jamin gesetzt werden sollte, weil dieses wahrscheinlich durch eine natürliche Unreinheit an der Oberfläche verfälscht war. Lassen wir den Fluorit wegen seines ausnehmend großen negativen Wertes für  $\tg \alpha$  fort, der, wenn er wirklich besteht, anders (vgl. den früheren § 158) als durch meine Annahme  $v = i, q$  und  $v = \infty$  erklärt werden muß, und übergehen wir ferner Wasser, wegen des für diese Substanz von Rayleigh bewiesenen praktischen Nichtvorhandenseins der Diamant-eigenschaft, so haben wir positive Werte von  $\tg \alpha$  für sechs Substanzen; aus diesen ist für diese Substanzen die folgende Tabelle von Werten für  $q/u$  und für  $\arctg \mu - I$ , die Abweichungen der Hauptinzidenz von dem Brewsterschen Winkel für äußere Polarisation nach (123) und (118) berechnet.<sup>1)</sup> Die Kleinheit der letztgenannten Abweichungen ist sehr bemerkenswert.

Substanz	$\sigma = q/u$	$\arctg \mu - I$	$\arctg \mu$
Durchsichtiges „Schwefelarsen“ (Realgar) . . . . .	0,01277	0,08873°	67,83°
Durchsichtige „Blende“ (Zink- sulfid) . . . . .	0,00706	0,04289°	67,13°
Diamant . . . . .	0,00293	0,00883°	67,67°
Flintglas . . . . .	0,00936	0,00593°	59,89°
„Verre“ . . . . .	0,00553	0,000496°	56,08°
Absoluter Alkohol . . . . .	0,00284	0,0000465°	53,13°

<sup>1)</sup> Mit  $\tg I = \mu$  und mit (109), (113) und dem in der Anm. auf S. 351 angegebenen Wert von  $N$  gerechnet. D. H.

§ 183. Ein anderes grundlegendes Gebiet der Physik, nämlich Lichtwellen, die durchsichtige Kristalle durchziehen, wurde von Fresnel vor mehr als achtzig Jahren erforscht. Dies tat er mit vollkommen unvollständigen mechanischen Anschauungen; nichtsdestoweniger hat er das entdeckt, was, wie wir jetzt wissen, in allen Einzelheiten, außer seiner Bedingung für konstantes Volumen, die wahren Gesetze der Lichtwellen in einem Kristall bildet.

§ 184. Eine bemerkenswerte Einzelheit bei Fresnel, die ich in meiner einleitenden Vorlesung (1. Okt. 1884) beschrieben habe, bestand darin, daß er die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Licht in einem Kristall von der Richtung der Schwingung abhängig sein ließ und nicht von der Achse der Drillungsdeformation, wie es die Theorie eines elastischen Festkörpers zu fordern schien. In derselben Vorlesung (S. 11 ff.) sprach ich von einer Erklärung dieser Schwierigkeit, die zuerst von Stokes und später von Rankine und von Rayleigh gegeben ist, mit der Wirkung, daß die verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von Licht in verschiedenen Richtungen eines Kristalles nicht von einer Äolotropie der elastischen Wirkung sondern von einer Äolotropie der wirksamen Trägheit herrührt. Ich hatte aber auch zu berichten, daß Stokes bei der Ausarbeitung dieses Gedankens, der ihm unabhängig von Rankine gekommen war, sich veranlaßt sah, ihn zu verlassen aus Gründen, die in dem folgenden Wiederabdruck einer kurzen Abhandlung von einundzwanzig Zeilen, die im Philosophical Magazine vom Oktober 1872 erschienen ist, ausgesprochen sind; dies ist alles, was er über den Gegenstand veröffentlicht hat: —

„Es ist jetzt einige Jahre her, daß ich für den Fall des isländischen Spats das Verfahren zur Prüfung des Brechungsgesetzes ausführte, das ich in meiner im Report der British Association für das Jahr 1862, S. 272 veröffentlichten Abhandlung über Doppelbrechung beschrieben habe. Ein annähernd gleichschenkliges rechtwinkliges Prisma wurde in einer solchen Richtung durchschnitten, daß eine Untersuchung, durch die beiden spitzen Winkel, in Richtungen der Wellennormale innerhalb des Kristalles ermöglicht war, bei Neigungen dieser Normale von  $90^0$  und  $45^0$  gegen die Achse. Die Richtungen der Schnittflächen wurden durch Reflexion auf die Spaltungsflächen und demgemäß auf die Achse bezogen. Das untersuchte Licht war die helle *D*-Linie der Natriumflamme.

„Das gewonnene Ergebnis bestand darin, daß die Konstruktion von Huyghens das wahre Gesetz der Doppelbrechung innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler wiedergibt. Der Fehler, wenn ein solcher da ist, kann kaum eine Einheit in der vierten Dezimale des Index oder des Reziproken der Wellengeschwindigkeit übersteigen, dabei ist die Geschwindigkeit in der Luft als Einheit angenommen. Dieses Resultat ist hinreichend absolut (absolutely), um das Gesetz zu widerlegen, das sich aus der Theorie ergibt, welche die Doppelbrechung von einer Verschiedenheit der Trägheit in verschiedenen Richtungen abhängig macht.

„Ich beabsichtige, der Royal Society einen eingehenden Bericht über die Beobachtungen vorzulegen; inzwischen könnte aber die Veröffentlichung dieser vorläufigen Bemerkung über das erhaltene Ergebnis möglicherweise für diejenigen von Nutzen sein, die sich mit der Theorie der Doppelbrechung beschäftigen.“

Es ist erfreulich, daß dieses Wesentliche des Ergebnisses seiner sehr

wichtigen Experimentaluntersuchung veröffentlicht worden ist; es ist aber schade, daß wir die beabsichtigte Mitteilung des Verfassers an die Royal Society, die seine Arbeit beschreiben sollte, nicht besitzen.

Die entsprechende Experimentaluntersuchung für einen zweiachsigen Kristall, die ebenfalls auf eine bis ins kleinste genaue Bestätigung der Fresnelschen Wellenfläche hinauskommt, wurde einige Jahre später von Glazebrook<sup>1)</sup> ausgeführt. Müssen wir deswegen den Gedanken, die verschiedenen Lichtgeschwindigkeiten in verschiedenen Richtungen in einem Kristalle durch äolotrope Trägheit zu erklären, vollständig angeben? Sicher ja, wenn, wie von Green und Stokes angenommen wurde, Äther in einem Kristalle inkompressibel ist.

§ 185. Aber Glazebrook sprach es als Folgerung aus meiner Annahme einer annähernd verschwindenden Geschwindigkeit der Verdichtungs-Verdünnungswellen in einem durchsichtigen Festkörper oder in einer solchen Flüssigkeit aus, daß dann äolotrope Trägheit genau zu Fresnels Form der Wellenfläche und zu Fresnels Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Schwingungsrichtung führt ohne Rücksicht auf die Zerrungsachse. So haben wir zu guter Letzt eine mechanische Erklärung der Fresnelschen Lichtgesetze in einem Kristall, die wir als aller Wahrscheinlichkeit nach absolut richtig akzeptieren können. Zum Beweise dessen wollen wir zunächst die Bedingungen für eine ebene Welle in einem isotropen elastischen Festkörper untersuchen, dessen beide Elastizitätsmoduln irgendwelche zwei gegebene Werte haben mögen,  $k$  als Raummodul und  $n$  als Starrheitsmodul, und der mit einer äolotropen Trägheit gegenüber der Bewegung eines beliebigen kleinen Teiles seiner Substanz begabt ist.<sup>2)</sup> Diese Äolotropie der wirksamen Trägheit des Äthers in der Substanz eines durchsichtigen Kristalles folgt natürlich, wir dürfen wohl sagen unvermeidlich, aus der Molekulartheorie der §§ 162—168. In der zwanzigsten Vorlesung sollen Einzelheiten, auf die einzugehen jetzt nicht nötig ist, sorgfältig behandelt werden.

§ 196. Inzwischen dürfen wir einfach annehmen, daß  $B_{\varrho_x}$ ,  $B_{\varrho_y}$ ,  $B_{\varrho_z}$  virtuell die Massen oder Trägheitsäquivalente sind, die zu Bewegungen des Äthers in einem sehr kleinen Raume  $B$ , parallel zu  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , gehören, der eine große Anzahl der betrachteten ponderablen Atome enthält; dann geben

$$B_{\varrho_x} \frac{d\xi}{dt}, \quad B_{\varrho_y} \frac{d\eta}{dt}, \quad B_{\varrho_z} \frac{d\xi}{dt}, \quad (124)$$

die Kräfte, die auf den Äther einwirken, um die komponierenden Beschleunigungen  $d\xi/dt$  usw. hervorzurufen. Demgemäß werden die Gleichungen für die molaren Bewegungen des Äthers die Gleichungen (8) des § 113 sein, die dahin abgeändert sind, daß auf den linken Seiten bzw.  $\varrho_x$ ,  $\varrho_y$ ,  $\varrho_z$  für  $\varrho$  einzuführen sind.

1) „An experimental determination of the Values of the Velocities of Normal Propagation of Plane Waves in different direction in a Biaxial Crystal, and a Comparison of the Results with theory.“ Von H. T. Glazebrook, mitgeteilt von J. Clerk Maxwell. Phil. Trans. Roy. Soc., 1879, Bd. 170.

2) Gegenwärtig, wo wir durch die Elektronentheorie ganz neue Gesichtspunkte für die Trägheit der Substanz gewonnen haben, sind uns solche Annahmen fast vertraut und würden für die Theorie sprechen. D. H.

§ 187. Um einen regelmäßigen Zug ebener Wellen darzustellen, setzen wir

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \alpha f\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{u}\right); \\ \eta &= \beta f\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{u}\right); \\ \zeta &= \gamma f\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{u}\right); \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

wo  $\lambda, \mu, \nu$  die Richtungskosinus einer Normalen zu den Wellenebenen und  $\alpha, \beta, \gamma$  die Richtungskosinus der Schwingungslinien angeben. Führt man diese Werte in die Gleichungen (7) des § 113 ein, so ergibt sich

$$\delta = \frac{-\cos \vartheta}{u} \frac{d}{dt} f\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{u}\right), \quad (126)$$

wobei ist

$$\cos \vartheta = \alpha \lambda + \beta \mu + \gamma \nu. \quad (127)$$

Es bedeutet so  $\vartheta$  die Neigung der Richtung der Verschiebung gegen die Wellennormale.

Benutzt man (124), (125), (126) in den Bewegungsgleichungen und entfernt von beiden Seiten einer jeden den Faktor

$$\frac{d^2}{dt^2} f\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{u}\right), \quad (128)$$

so folgt

$$\left. \begin{aligned} q_x \alpha &= \left(k + \frac{1}{3}n\right) \frac{\lambda \cos \vartheta}{u^2} + n \frac{\alpha}{u^2}; \\ q_y \beta &= \left(k + \frac{1}{3}n\right) \frac{\mu \cos \vartheta}{u^2} + n \frac{\beta}{u^2}; \\ q_z \gamma &= \left(k + \frac{1}{3}n\right) \frac{\nu \cos \vartheta}{u^2} + n \frac{\gamma}{u^2}. \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

§ 187'. Aus diesen Gleichungen bestimmen wir die Richtungskosinus ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) der Schwingung und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $u$  der ebenen Welle ( $\lambda, \mu, \nu$ ) in folgender Weise: Erst lösen wir die Gleichungen für  $\alpha, \beta, \gamma$  auf und setzen

$$q_x = n/a^2, \quad q_y = n/b^2, \quad q_z = n/c^2; \quad (129')$$

so finden wir

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{k + \frac{1}{3}n}{n} \frac{\lambda a^2 \cos \vartheta}{u^2 - a^2}; \\ \beta &= \frac{k + \frac{1}{3}n}{n} \frac{\mu b^2 \cos \vartheta}{u^2 - b^2}; \\ \gamma &= \frac{k + \frac{1}{3}n}{n} \frac{\nu c^2 \cos \vartheta}{u^2 - c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Hieraus folgt vermöge

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, \\ \sec^2 \vartheta &= \left(\frac{k + \frac{1}{3}n}{n}\right)^2 \left[ \left(\frac{\lambda a^2}{u^2 - a^2}\right)^2 + \left(\frac{\mu b^2}{u^2 - b^2}\right)^2 + \left(\frac{\nu c^2}{u^2 - c^2}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (131)$$

Multipliziert man ferner die erste der Gleichungen (130) mit  $\lambda$ , die zweite mit  $\mu$ , die dritte mit  $\nu$ , addiert und entfernt nach (127) den gemeinschaftlichen Faktor  $\cos \vartheta$ , so ergibt sich weiter

$$1 = \left(k + \frac{1}{3}n\right) \left(\frac{\lambda^2 a^2}{u^2 - a^2} + \frac{\mu^2 b^2}{u^2 - b^2} + \frac{\nu^2 c^2}{u^2 - c^2}\right). \quad (132)$$

Dies ist eine kubische Gleichung zur Bestimmung von  $u^2$ , dem Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Die drei Wurzeln sind offenbar reell; die eine davon ist größer als die größte von den Größen  $a^2, b^2, c^2$ , und die andern beiden liegen zwischen den Werten dieser Größen. Für jeden Wert von  $n^2$  ist die entsprechende Schwingungsrichtung gegeben durch (130).

§ 187''. Bezeichnet man mit  $u_1^2, u_2^2$  zwei von den drei Wurzeln der Gleichung (132), so findet man, indem man die Gleichung für jeden von diesen Werten hinschreibt und die eine Gleichung von der andern subtrahiert,

$$0 = \frac{k + \frac{1}{3}n}{n} \left[ \frac{\lambda^2 a^2}{(u_1^2 - a^2)(u_2^2 - a^2)} + \frac{\mu^2 b^2}{(u_1^2 - b^2)(u_2^2 - b^2)} + \frac{\nu^2 c^2}{(u_1^2 - c^2)(u_2^2 - c^2)} \right] (u_1^2 - u_2^2). \quad (132')$$

Bei entsprechender Bezeichnung in (130) ergibt sich ferner

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = \frac{k + \frac{1}{3}n}{n} \left[ \frac{\lambda^2 a^4}{(u_1^2 - a^2)(u_2^2 - a^2)} + \frac{\mu^2 b^4}{(u_1^2 - b^2)(u_2^2 - b^2)} + \frac{\nu^2 c^4}{(u_1^2 - c^2)(u_2^2 - c^2)} \right] \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2. \quad (132'')$$

Vergleicht man diese beiden Gleichungen, so sieht man, daß  $\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2$  nicht allgemein Null sein kann; d. h. die Schwingungslinien, die parallelen mit verschiedenen Geschwindigkeiten sich ausbreitenden Wellenebenen entsprechen, können nicht zueinander senkrecht sein. Dieses Resultat für die neue Theorie, nach der die Verschiedenheiten der Geschwindigkeit von der Trägheitsäolotropie herrühren, liefert einen interessanten Gegensatz zu dem Satze der zwölften Vorlesung S. 108f, nach dem die Schwingungslinien in zwei beliebigen von den drei Wellen gegeneinander senkrecht sind, wenn keine Trägheitsäolotropie besteht und die Verschiedenheiten der Geschwindigkeit von der Elastizitätsäolotropie herrührt

§ 188. In jedem der beiden Grenzfälle von  $k = \infty$  und  $k = -\frac{1}{3}n$  geht die kubische Gleichung für  $u^2$  in eine quadratische über, wie wir äußerst leicht<sup>1)</sup> erkennen, wenn wir (vermöge  $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ ) (132) folgendermaßen schreiben

$$\frac{\lambda^2 u^2}{u^2 - a^2} + \frac{\mu^2 u^2}{u^2 - b^2} + \frac{\nu^2 u^2}{u^2 - c^2} = \frac{k + \frac{1}{3}n}{n} \left( \frac{a^2 \lambda^2}{u^2 - a^2} + \frac{b^2 \mu^2}{u^2 - b^2} + \frac{c^2 \nu^2}{u^2 - c^2} \right). \quad (133)$$

§ 189. Hieraus sehen wir, daß, wenn  $k + \frac{1}{3}n$  sehr groß ist, auch eine Wurzel der kubischen Gleichung für  $u^2$  sehr groß ausfällt, da sie angenähert gegeben ist durch

$$u^2 \approx \frac{k + \frac{1}{3}n}{n} (\lambda^2 a^2 + \mu^2 b^2 + \nu^2 c^2), \quad (134)$$

während die andern beiden Wurzeln angenähert die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind

1) Ein anderer Weg, diese Einzelheit durchzuführen, ergibt sich bei der Untersuchung von Wellen der in § 206 der zwanzigsten Vorlesung behandelten Art (Chiralwellen).

$$\frac{a^2 \lambda^2}{u^2 - a^2} + \frac{b^2 \mu^2}{u^2 - b^2} + \frac{c^2 v^2}{u^2 - c^2} = 0. \quad (135)$$

Dies stimmt mit den von Stokes und von Rayleigh, auf Grund der Rankine'schen Hypothese einer äolotropen Trägheit und der Annahme Greens eines virtuell unendlich großen Widerstandes gegen Zusammendrückung, für gegebene Wellenebenen ( $\lambda, \mu, \nu$ ) gefundenen Geschwindigkeiten überein. Es führt aber zu einer Wellenfläche, welche nach den Beobachtungen von Stokes am isländischen Spat (einachsig) und von Glazebrook am Arragonit (zweiachsig) viel weiter von der wahren Wellenfläche abweicht, als auf Rechnung von Beobachtungsfehlern gesetzt werden könnte.

§ 190. Wenn aber  $k + \frac{1}{3}n$  sehr klein ist, ist einer der drei durch (133) gegebenen Werte von  $u^2$  sehr klein und positiv, und er entspricht annähernd der Beziehung

$$\left( \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2} \right) u^2 = \frac{k + \frac{1}{3}n}{n}, \quad (136)$$

während die andern beiden angenähert die Wurzeln sind der quadratischen Gleichung

$$\frac{\lambda^2}{u^2 - a^2} + \frac{\mu^2}{u^2 - b^2} + \frac{\nu^2}{u^2 - c^2} = 0. \quad (137)$$

Dies ist die Gleichung von Fresnel [vgl. (94) aus der fünfzehnten Vorlesung] für die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten für eine bestimmte Richtung einer Wellenebene ( $\lambda, \mu, \nu$ ). Sie hat genau die berühmte Fresnel'sche Wellenfläche zur Folge

$$\frac{a^2 x^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2 y^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2 z^2}{r^2 - c^2} = 0, \quad (138)$$

oder

$$\begin{aligned} r^2(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) - a^2(b^2 + c^2)x^2 - b^2(c^2 + a^2)y^2 \\ - c^2(a^2 + b^2)z^2 + a^2 b^2 c^2 = 0. \end{aligned} \quad (138')$$

Diese Gleichung wird jetzt nicht, wie im Jahre 1831 von Airy<sup>1)</sup> gesagt wurde, „nach einem sehr schwierigen algebraischen Verfahren“, sondern durch eine sehr kurze und leichte von Archibald Smith im Jahre 1835<sup>2)</sup> angegebene symmetrische Methode erhalten; das Verfahren besteht darin, eine Umhüllungsfläche für alle die Ebenen zu finden, die gegeben sind durch die Gleichung

$$\lambda x + \mu y + \nu z = n$$

mit

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

und

Gleichung (137) für  $u$ .

(138'')

§ 191. Die Sätze von Glazebrook und Basset, die weiter unten in § 195 ausgesprochen sind, werden leicht bewiesen, wenn man (139) in Verbindung mit der jetzt allgemein bekannten Untersuchung der Fresnel'schen Wellenfläche durch Archibald Smith benutzt. Aber die Theorie, auf die

1) Airys Mathematical Tracts, S. 353.

2) Trans. Cambridge Phil. Soc., Bd VI, S. 85; ferner Phil. Mag. Bd. XII, 1838 (Erstes Halkjahr), S. 335.



sie sich gründen, setzt ihrem Wesen nach Verdichtung und Verdünnung, und demgemäß eine Schwingungsrichtung voraus, die nicht in der Wellenebene liegt und nicht mit der von Fresnel zusammenfällt, die genau in der Wellenebene liegt (entsprechend dem, was bei Wellen genau invariabler Dichte eintritt). Für den vorliegenden Fall  $k + \frac{1}{3}n = 0$  ist die Schwingungsrichtung  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , wie sie durch (130) gegeben ist,

$$\alpha = -\frac{a^2 \lambda \cos \vartheta}{u^2 - a^2}, \quad \beta = -\frac{b^2 \mu \cos \vartheta}{u^2 - b^2}, \quad \gamma = -\frac{c^2 \nu \cos \vartheta}{u^2 - c^2}, \quad (139)$$

und die Gleichung (131) für  $\vartheta$ , den Winkel zwischen der Schwingungsrichtung und der Wellennormale, folgt aus

$$\sec^2 \vartheta = \left( \frac{a^2 \lambda}{u^2 - a^2} \right)^2 + \left( \frac{b^2 \mu}{u^2 - b^2} \right)^2 + \left( \frac{c^2 \nu}{u^2 - c^2} \right)^2. \quad (140)$$

§ 192. Als Beispiel greifen wir den Arragonit heraus mit den in der fünfzehnten Vorlesung § 37 angegebenen Werten (und der Einfachheit wegen mit  $n = 1$ ). Es ist also

$$\left. \begin{aligned} 1/a &= 1,5301; & a &= 0,65355; & a^2 &= 0,42713; \\ 1/b &= 1,6816; & b &= 0,59467; & b^2 &= 0,35363; \\ 1/c &= 1,6859; & c &= 0,59315; & c^2 &= 0,35183. \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

Wir suchen die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und die Neigungen der Schwingungslinien gegen die Wellennormale ( $\vartheta_1, \vartheta_2$ ) für den Fall, daß die Wellennormale gegen die drei Hauptachsen gleich geneigt ist ( $\lambda = \mu = \nu = 1/\sqrt{3}$ ). Wenn wir die quadratische Gleichung (137) auflösen und die Wurzeln in (139) einsetzen, finden wir

$$\left. \begin{aligned} u_1^2 &= 0,40234; & u_1^{-1} &= 1,57653; & \vartheta_1 &= 81^\circ 37,68' \\ u_2^2 &= 0,35272; & u_2^{-1} &= 1,68377; & \vartheta_2 &= 89^\circ 49,24'. \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

Beachtet man, daß  $u_1^{-1}$  und  $u_2^{-1}$  die Brechungskoeffizienten für die beiden Wellen sind, deren Normalen gegen die drei Hauptachsen ( $x, y, z$ ) gleich geneigt sind, so ist es interessant zu bemerken, wie nahe der größere von ihnen gleich  $\frac{1}{2}(1,6816 + 1,6859)$ , dem Mittel aus den beiden größten von den drei Hauptkoeffizienten der Brechung, ist. Diese Tatsache und die Nähe von  $\vartheta_2$  an  $90^\circ$  rühren von der Kleinheit des Unterschieds zwischen Arragonit und einem einachsigen Kristalle her. In der Tat entspricht  $u_2^2$ , die zweite von unsern Lösungen der quadratischen Gleichung, dem, was dem ordinären Strahl entspräche, wenn die beiden größeren Hauptkoeffizienten gleich wären.

§ 193. Um zu einem vollständigen Verständnis der Verdichtungen und Verdünnungen zu gelangen, die uns die Theorie in einer beliebigen durch einen zweiachsigen Kristall fortschreitenden ebenen Welle liefert, wählen wir als Wellenebene eine beliebige zu einer der drei Hauptachsen, beispielsweise  $OY$ , parallele Ebene. Es ist ohne Rechnung klar, daß die Schwingungsrichtungen in den beiden Wellen für jede solche Richtung der Wellenebene parallel und senkrecht zu  $OY$  sind. Die erste entspricht dem ordinären Strahl, ihre Schwingungsrichtung ist  $OY$  parallel; sie hat die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $V(n/\rho_y)$  oder nach (129') die  $b$ ; sie ist streng eine Welle gleichbleibender Dichte. All dies beweisen wir in

unserer Rechnung leicht, wenn wir  $\mu = 0$  setzen; dies ergibt für eine Wurzel der quadratischen Gleichung (137)  $u^2 = b^2$  und nach (139)  $\sec^2 \vartheta = \infty$  und demgemäß  $\vartheta = 90^\circ$ .

§ 194. Für die andere Wurzel der quadratischen Gleichung (137)<sup>1)</sup> erhalten wir

$$\frac{\lambda^2}{u^2 - a^2} + \frac{v^2}{u^2 - c^2} = 0,$$

und hieraus

$$\left. \begin{aligned} u^2 &= c^2 \lambda^2 + a^2 v^2; \\ u^2 - a^2 &= (c^2 - a^2) \lambda^2; \\ u^2 - c^2 &= (a^2 - c^2) v^2. \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

Setzt man dies in (139) ein, so folgt

$$\frac{\gamma}{-\alpha} = \frac{c^2 \lambda}{a^2 v}. \quad (144)$$

Andererseits ergibt (138'), die Gleichung der Fresnelschen Wellenfläche für  $y = 0$ , als Schnitt dieser Fläche mit der  $XOZ$ -Ebene

$$(r^2 - b^2)(a^2 x^2 + c^2 z^2 - a^2 c^2) = 0. \quad (145)$$

Diese Gleichung stellt für den ordinären Strahl einen Kreis  $r = b$  dar und für den extraordinären Strahl eine Ellipse

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1. \quad (146)$$

Die Wellenebene berührt diese Ellipse im Punkte  $(x, z)$ , demnach ist

$$\frac{\lambda}{v} = \frac{a^2 x}{c^2 z}. \quad (147)$$

Setzt man diesen Wert  $\lambda/v$  in (144) ein, so wird:

$$\frac{\gamma}{-\alpha} = \frac{x}{z}; \quad (144')$$

also sieht man, daß die Schwingungslinie zur Strahlrichtung, die ein durch den Punkt  $(x, z)$  gehender Radiusvektor der Ellipse ist, senkrecht verläuft. Dies ist nur ein besonderer Fall des von Glazebrook, Phil. Mag., Dez. 1888, S. 528 angegebenen Satzes, daß nämlich nach der neuen, auf einer äolotropen Trägheit begründeten Theorie der Doppelbrechung überhaupt die Schwingungsrichtung zum Strahle senkrecht verläuft.

§ 195. Weiter hat auf Grund dieser Theorie Basset<sup>2)</sup> einen äußerst interessanten Satz<sup>3)</sup> aufgestellt, demzufolge die Schwingungsrichtung eine Gerade ist, die senkrecht zu dem Radiusvektor vom Fußpunkte der Normalen zu einer beliebigen, die Wellenfläche berührenden Ebene gezogen ist (dabei sind die Normale zur Berührungsebene und der Radiusvektor zum Be-

1) Im Text steht verdruckt hier und oben (135), eine Gleichung die zum Gegenfall,  $k + \frac{1}{2}n$  sehr groß, gehört. D. H.

2) Basset's Physical Optics (Cambridge, 1892), § 265.

3) Auch auf Grund einer ganz andern mechanischen Theorie, die die Geschwindigkeit Null einer Verdichtungs-Verdünnungswelle zur Konsequenz hat, von Sarrau in seiner zweiten Abhandlung über Fortpflanzung und Polarisation von Licht in Kristallen angegeben; Liouville Journal, Bd. XIII, 1868, S. 86.

rührungspunkt vom Mittelpunkt der Wellenfläche zu ziehen<sup>1)</sup>). Dieser Satz schließt den Glazebrookschen ein und fügt ihm eine Ergänzung der Aufgabe, die Schwingungslinie zu konstruieren, hinzu, die einfacher ist als die von Glazebrook auf S. 529 und 530 des bereits zitierten Bandes der *Philosophical Magazine* angegebene. Die Konstruktion wird durch Figur 75 erläutert, die genau nach dem Maßstabe für den Hauptschnitt durch den größten und kleinsten Hauptdurchmesser der Wellenfläche für Arragonit gezeichnet ist.  $P$  ist der Berührungspunkt der Tangentialebene  $KM$ .  $OP$  ist der Radiusvektor (optisch der Strahl).  $F$  ist der Fußpunkt der Senkrechten vom Mittelpunkte der Wellenfläche.  $FN$ , in der Zeichnung nicht angegeben, senkrecht zu  $OP$ , die Richtung der Schwingung. Es wäre interessant, einen Teil der Fig. 75 in der Umgebung von  $OF$  nach einem zehnfachen Maßstabe zu konstruieren; aber noch interessanter vielleicht ist es, den Winkel  $NFP$  (der gleich  $FOP$  ist) und den Krümmungsradius der Ellipse bei  $P$  zu konstruieren. Figur 75 erläutert die Konstruktion für eine beliebige Wellenebene, die die Wellenfläche im Punkte  $P$  berührt; doch ist sie genau nach

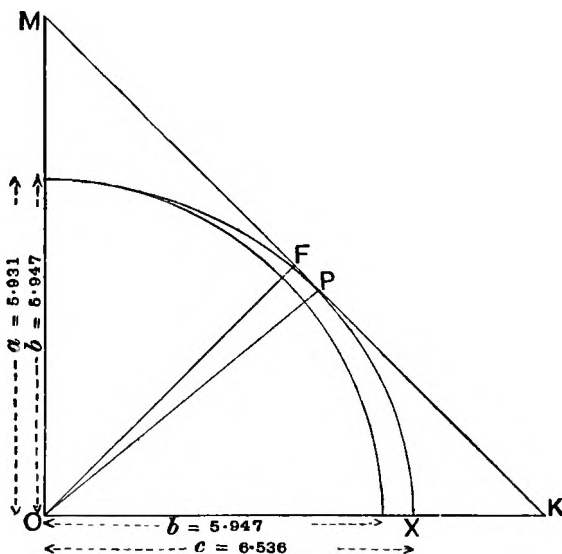


Fig. 75.

dem Maßstabe nur für den extraordinären Strahl im Hauptschnitte von Arragonit durch den größten und kleinsten Durchmesser gezeichnet.

§ 196. Gehen wir nochmals auf § 194 zurück, so finden wir, daß die Schnitte der Fresnelschen Wellenfläche mit den drei Ebenen  $YOZ$ ,  $ZOX$ ,  $XOY$  durch die folgenden Gleichungen wiedergegeben werden

$$\left. \begin{aligned} (r^2 - a^2)(b^2y^2 + c^2z^2 - b^2c^2) &= 0; \\ (r^2 - b^2)(c^2z^2 + a^2x^2 - c^2a^2) &= 0; \\ (r^2 - c^2)(a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

die zeigen, daß jeder Schnitt aus einer Ellipse und einem Kreise besteht. Dabei entspricht die Ellipse dem extraordinären, und der Kreis dem ordinären Strahle.

§ 197. Schließlich fassen wir Wellenebenen ins Auge, die senkrecht zu der einen oder andern von den Achsen  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  sind. Nehmen wir als Beispiel  $OX$ , so sehen wir, daß die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten

1) Hier scheint im Original Verwirrung zu herrschen. Der Klammerausdruck lautet: „the perpendicular to the radius vector being drawn from the centre of the surf.“ Das *to* steht wahrscheinlich für *and*. D. H.

$l$  und  $c$  sind, deren Schwingungslinien parallel zu  $OY$  und  $OZ$  verlaufen. Die physikalische Erklärung wird weit leichter verstanden als alles das, was wir in der ersten Vorlesung auf S. 11 bis 13 behandelt haben, als wir der Meinung waren, daß Geschwindigkeitsunterschiede von einer Elastizitätsäolotropie herrühren. Wir sehen jetzt, daß die beiden längs der  $x$ -Achse fortschreitenden Wellen verschiedene Geschwindigkeiten besitzen, wegen der größeren oder kleineren wirksamen Trägheit des bei seinen Schwingungen parallel bzw. zu  $OY$  und  $OZ$  sich bewegenden Äthers.

§ 198. Der von Fresnel für die Bestimmung seiner Wellenfläche festgelegte fundamentale Gesichtspunkt, nämlich die Untersuchung einer unendlichen Anzahl Wellenebenen, die in allen Richtungen durch einen Punkt gehen, und der von ihnen allen gleichzeitig sich ausbreitenden Wellen, ist äußerst wichtig und interessant; wahrlich eine wunderbare Leistung des Genies! Seine Beobachtung läßt freilich noch etwas Bestimmtes zu wünschen über die Geometrie und die Mechanik einer wirklichen Quelle Licht, das sich von einem kleinen Raumteil aus, in dem die Quelle ihre Arbeit leistet, nach allen Richtungen hin ausbreitet. Demgemäß bietet sich als naturgemäße Aufgabe die, zu untersuchen, welches das einfachste ideale Element einer Lichtquelle sein mag.

§ 199. Vorbereitungen hierfür sind in den „molaren“ Abschnitten der Vorlesungen III und VI und VIII und XIV und insbesondere auf den Seiten 151 bis 176 des Zusatzes in der vierzehnten Vorlesung getroffen. Was wir jetzt brauchen, ist eine Untersuchung der Bewegung des Äthers in einem Kristall, die von einem gedachten molekularen Schwingungskörper herrührt, der in irgendeiner Richtung in einer geraden Linie hin- und hergeht. Die Aufgabe wird dadurch vereinfacht, daß man annimmt, die Richtung sei eine der drei ausgezeichneten Linien Minimum, Durchschnitt, Maximum der wirksamen Trägheit des Äthers in dem Kristalle. Es scheint mir, daß diese Bewegung durch eine lösbare Aufgabe gefunden werden kann. Dabei haben wir die Fresnelsche Wellenfläche als die Fläche gleicher Phase der nach außen sich bewegenden Störung oder Wellenbewegung; und wir kennen die Richtung der Schwingung in jedem Teile der Fläche nach den Sätzen von Glazebrook und Basset (§ 195 oben). Was wir in unserer vorliegenden Aufgabe noch zu finden haben, ist die Amplitude der Schwingung in einem beliebigen Punkte der Wellenfläche. Eines sehen wir ohne Rechnung, daß nämlich in Abständen vom Ursprunge, die groß sind im Vergleich mit dem größten Durchmesser der Quelle, die Schwingungsamplitude Null ist an den vier Punkten, in denen die Wellenfläche von der nach beiden Seiten verlängert gedachten Schwingungslinie des Vibrators geschnitten wird, wenn diese Linie mit einer der drei Symmetrieachsen  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  zusammenfällt. Die allgemeine Lösung der Aufgabe wird sich an sich finden lassen, indem man wesentlich Bewegungen, die man aus den Lösungen für in den drei Hauptrichtungen verlaufende Schwingungen der Quelle erhält, zusammensetzt. Für jetzt muß ich zu meinem Bedauern die Aufgabe fallen lassen, hoffe aber umstände zu sein, später auf sie zurückzukommen.<sup>1)</sup>

1) Dem deutschen Leser muß es auffallen, daß in allen diesen Entwicklungen die so wichtigen unseres Franz Neumann ganz übergangen sind. Ich habe dafür keine Erklärung. Wir wissen ja aber, was wir diesem großen Manne schuldig sind.

## Zwanzigste Vorlesung.

### Chiralmolekeln und Wellentheorie, Chiralität in Kristallen, optische Rotation, elektrische Theorie der Brechung.

(Neu geschrieben 1903.)

§ 200. Wenn wir sehen, wie gute Dienste uns die alte Anschauung Rankines über eine äolotrope Trägheit für die Theorie der Doppelbrechung geleistet hat, erscheint es uns natürlich, zu versuchen, ob wir auf ihrer Grundlage eine vollständige mechanische Erklärung der Drehung der Polarisations-ebene des Lichtes in einer durchsichtigen Flüssigkeit oder in einem Kristall, die die chirale<sup>1)</sup> Eigenschaft besitzen, zu finden imstande sind. Ich habe den Weg, diesen Gedanken durchzuarbeiten, in einer kurzen, der Royal Society von Edinburgh in der Session von 1870/71 vorgelegten Abhandlung mit der Überschrift „On the Motion of Free Solids through a Liquid“ vorbereitet, die im Philosophical Magazine für den November 1871 als ein Teil einer Abhandlung mit dem Titel „Hydrokinetic Solutions and Observations“ wieder- veröffentlicht ist. Diese Abhandlung bildet den größeren Teil des Anhanges G im vorliegenden Bande. Die sehr große Schwierigkeit, einzusehen, wie Atome oder Molekeln, die in einen elastischen Festkörper eingesenkt sind (Äther), einen Widerstand gegen Änderung der Bewegung erfahren können, analog dem, der einer Quasiträgheit entspricht, die sich einem in einer inkompressiblen Flüssigkeit bewegenden Festkörper aufdrückt, hat mich bis vor einigen Wochen von dem Versuche zurückgehalten, die chirale Polarisation des Lichtes durch äolotrope Trägheit zu erklären.<sup>2)</sup> Jetzt ist die Erklärung durch die in den früheren §§ 162—164 und in den folgenden §§ 204, 205 und im Anhang A erläuterte Hypothese leicht und natürlich geworden.

§ 201. Um die äolotrope Trägheit, gleichviel ob sie chiral ist oder nicht, von Molekeln in Äther nach den rudimentären Angaben im Anhang A auf- fassen, greifen wir zuerst den allereinfachsten Fall an: eine zweiatomige Molekel ( $A_1, A_2$ ), bestehend aus zwei gleichen und ähnlichen Atomen, die durch eine kräftige Anziehung zusammengehalten werden, so daß sie, wenn sich in jedem ein Elektron befindet, ein starres System bilden, falls die Kräfte und Bewegungen, die wir in Betracht ziehen, so klein sind, daß die Elektronen relativ zu den Atomen nur eine Bewegung erhalten, die zu vernachlässigen ist. Diese Annahme wird endgültig abgeändert werden, wenn wir in den §§ 232—242 dazu übergehen, die chromatische Dispersion auf Grund der neuen Theorie zu erklären.

§ 202. In Fig. 76 stellen die Kreise die sphärischen Grenzflächen der beiden Atome dar. Nach den im Interesse der Bestimmtheit im Anhang A

1) Die Erklärung dieses Wortes ist gegeben Anhang H, § 22, Anm.

2) Im Original müssen Druckversehen vorhanden sein. D. H.

angeführten und durch die dort gegebene Zeichnung (Fig. 86) erläuterten Einzelheiten müssen die beiden Atome, wie in unserer vorliegenden Zeichnung Fig. 76 angedeutet ist, übereinandergreifen, wenn die Stromlinien des Äthers in jedem Atome durch die Gegenwart des andern gestört werden. Ohne

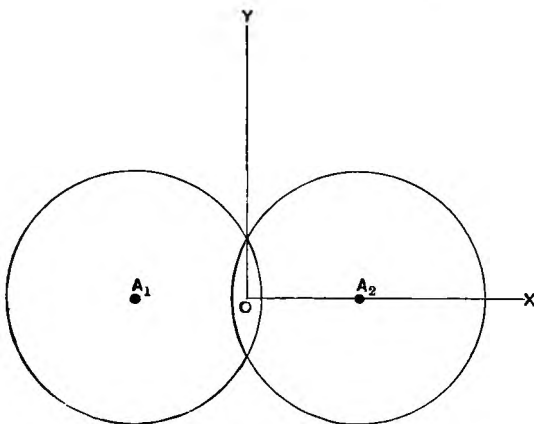


Fig. 76.

irgendeine bestimmte Lösung der äußerst schwierigen Aufgabe zu versuchen, Stromlinien des Äthers in unserem Doppelatom zu bestimmen, wollen wir für jetzt damit zufrieden sein, zu wissen, daß die Quasiträgheit der gestörten Ätherbewegung innerhalb der Molekel in dem Falle, daß die Bewegung des außerhalb befindlichen Äthers parallel  $A_1 A_2$  ist, verschieden sein muß von der in dem Falle, daß diese Bewegung senkrecht gegen

$A_1 A_2$  erfolgt. Es scheint mir wahrscheinlich, daß die erstere kleiner sein wird als die letztere: Ich will jedoch bloß annehmen, daß sie verschieden sind, was sicher zutrifft, und ich bezeichne die erstere mit  $\alpha$ , die letztere mit  $\beta$ . Damit ist gesagt, daß, wenn die Molekel sich in Ruhe befindet und der außerhalb befindliche Äther sich gleichförmig mit den Geschwindigkeitskomponenten  $(\dot{\xi}, \dot{\eta})$  parallel zu  $A_1 A_2$  und senkrecht zu dieser Linie in der Ebene der Zeichnung bewegt, die kinetische Energie der gesamten Ätherbewegung um  $\frac{1}{2}(\alpha \dot{\xi}^2 + \beta \dot{\eta}^2)$  größer sein muß, als wenn der Äther überall die gleichförmige Bewegung  $(\dot{\xi}, \dot{\eta})$  besäße. Bezeichnet man mit  $B$  irgendeinen Raumteil, der eine Molekel umgibt, aber keine anderen Molekeln einschließt, und nennt  $\rho$  die ungestörte Ätherdichte, so ergibt sich hiernach als kinetische Energie der Ätherbewegung innerhalb  $B$

$$\frac{1}{2} [B\rho(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \alpha \dot{\xi}^2 + \beta \dot{\eta}^2]. \quad (149)$$

In den §§ 202–205 setzen wir noch überall voraus, daß die verschiedenen, eine Ansammlung bildenden Molekeln getrennte Räume innehaben. Im § 225 werden wir uns aber gezwungen sehen, übereinandergreifende komplexe Molekeln in einem Quarzkristall anzunehmen.

§ 203. Dies gibt uns eine klare und bestimmte Erklärung für die Trägheitsäolotropie, wie sie von Rankine zur Erklärung der Doppelbrechung ersonnen ist. Zunächst fassen wir für einen einachsigen Kristall eine beliebige homogene Ansammlung (Anhang H, §§ 3, 6, 15, 16, 17, 18, 19) unserer zweiatomigen Molekeln ins Auge, und es sei  $B$  der jeder von ihnen zugewiesene Raum. Die Homogenität der Ansammlung schließt ein, daß die Linien  $A_1 A_2$  in allen Molekeln parallel sind. Wir wählen ihre Richtung als  $OX$  und zwei beliebige zu ihr und zu einander senkrechte Geraden als  $OY, OZ$ . Soweit die Doppelbrechung in Betracht kommt, ist es gleichgültig,

welches der Charakter der Ansammlung ist; immerhin darf erwartet werden, daß sie in bezug auf die Richtung  $A_1 A_2$  symmetrisch ist, da das Gleichgewicht der Ansammlung und der durch eine Deformation in Tätigkeit gesetzten Kräfte von den gegenseitigen Kräften zwischen den Molekeln abhängen, die nicht mit der Elastizität und den in den Lichtwellen ins Leben gerufenen Bewegungen des Äthers in direktem Zusammenhang stehen. Kurz gesagt, das Wesen unserer Annahme besteht darin, daß die Molekeln unbewegt bleiben, wenn der Äther durch Lichtwellen in Bewegung gesetzt ist. Wir schreiben (149) wie folgt

$$B \left[ \frac{1}{2} \left( \varrho + \frac{\alpha}{B} \right) \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} \left( \varrho + \frac{\beta}{B} \right) \dot{\eta}^2 \right] = B \cdot \frac{1}{2} (\varrho_x \dot{\xi}^2 + \varrho_y \dot{\eta}^2), \quad (150)$$

wo gesetzt ist

$$\varrho_x = \varrho + \frac{\alpha}{B}; \quad \varrho_y = \varrho + \frac{\beta}{B}. \quad (151)$$

Dies zeigt deutlich den Sinn und die physikalische Bedeutung der in § 186 als virtuelle Dichten des Äthers gegenüber Bewegungen in den drei zueinander senkrechten Richtungen eingeführten Größen  $\varrho_x$ ,  $\varrho_y$ ,  $\varrho_z$ . Bei zweiatomigen Molekeln, deren Achsen  $OZ$  parallel sind, ist wesentlich  $\varrho_y = \varrho_x$ . Dies gibt die optischen Eigenschaften in einem einachsigen Kristalle wieder, der tatsächlich keine Verschiedenheit in verschiedenen zur Achse senkrechten Richtungen zeigt; obwohl die homogene Ansammlung von Molekeln, die den Kristall bilden, essentiell solche Verschiedenheiten in verschiedenen Richtungen aufweisen, welche Anordnungen in Quadraten oder in gleichseitigen Dreiecken entsprechen.

§ 204. Wenn man anstatt der bloß zweiatomigen Molekeln des § 201 in jeder Molekel eine molekulare Struktur hat, die isotrop symmetrisch (quadratische oder gleichseitig-dreieckige Anordnung) in Ebenen ist, die zur Richtung  $OZ$  senkrecht stehen, dann bleibt immer noch  $\varrho_y = \varrho_x$ , woraus sich die axial isotropen Eigenschaften eines einachsigen Kristalles ergeben. Und dies vollkommen unabhängig von jeder Symmetrie der homogenen Ansammlung von Molekeln, die den Kristall bilden, sobald nur die von jeder Molekel dem Äther mitgeteilte virtuelle Trägheit von der von den benachbarten Molekeln mitgeteilten unabhängig ist. Wenn die Struktur jeder einzelnen Molekel keine Chiralität (Anhang H, § 22, Anmerkung) besitzt, hat auch die homogene Ansammlung keine solche. Wenn jede Molekel geometrisch und mechanisch in bezug auf drei rechtwinklige Achsen ( $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ ) symmetrisch, aber nicht isotrop in bezug auf diese Achsen ist, gibt es im allgemeinen drei verschiedene Werte für  $\varrho_x$ ,  $\varrho_y$ ,  $\varrho_z$ , und es folgt (§§ 187, 190 oben) genau die Fresnelsche Wellenfläche. Dieses ist also vollkommen unabhängig von jeder Symmetrie der den Kristall bildenden homogenen Ansammlung; es rührt nur daher, daß die Symmetrieachsen aller Molekeln, weil die Ansammlung homogen ist, einander parallel laufen. Der Kürze wegen will ich jetzt eine Molekel, die Chiralität besitzt, ein Chiroid nennen.

§ 205. Wenn jede Molekel ein Chiroid ist, kann es (Anhang G, Teil I) der Trägheit des hin- und herschwingenden Äthers eine chirale Eigenschaft mitteilen. Um zu verstehen, was diese chirale Trägheit bedeutet, wollen wir ein Äthervolumen  $B$  ins Auge fassen, das im Vergleich mit einer Wellenlänge des Lichtes in allen seinen Durchmessern sehr klein ist und in seinem Inhalte

dem jeder Molekel zugeschriebenen Volumen (§ 201) genau gleichkommt. Es seien  $(\xi, \eta, \zeta)$  und  $(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})$  die Komponenten der Verschiebungen und der Geschwindigkeiten des innerhalb  $B$  befindlichen Äthers, jedoch nicht desjenigen Teiles oder derjenigen Teile von  $B$ , die von den Atomen der Molekeln ausgefüllt werden. Die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit (die man gewöhnlich, aber wohl weniger passend, Winkelgeschwindigkeit nennt) des Äthers in der Umgebung  $x, y, z$  in einem Raum in der Nähe von  $B$ , aber nicht innerhalb eines Atoms, sind alsdann

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial z} \right); \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial x} \right); \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial y} \right). \quad (152)$$

Es seien  $\chi_x, \chi_y, \chi_z$  Koeffizienten, die wir als Trägheitschiralitäten der Molekeln in bezug auf  $x, y, z$  bezeichnen. Die chirale Trägheit, mit der wir uns beschäftigen, kann durch die Tatsache definiert werden, daß eine Beschleunigung jeder der drei Komponenten (152) der Rotationsgeschwindigkeit des Äthers eine zwischen der Molekel und dem Äther wirkende Kraft in Richtung der Achse der Rotationsbeschleunigung zur Voraussetzung hat, die durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt werden kann<sup>1)</sup>:

$$P = -\chi_x \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right); \quad Q = -\chi_y \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right); \quad R = -\chi_z \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right), \quad (153)$$

wo also mit  $P, Q, R$  die Komponenten der Kraft für die Volumeneinheit bezeichnet sind, die von den Molekeln auf den bewegten Äther ausgeübt wird. Demnach haben wir als  $x, y, z$ -Komponenten der elastischen, auf den Äther ausgeübten Kraft, die für die Einheit seines Volumens gegen die Trägheitsreaktion wirkt, die Beträge

$$\varrho_x \frac{d^2 \xi}{dt^2} - P; \quad \varrho_y \frac{d^2 \eta}{dt^2} - Q; \quad \varrho_z \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - R. \quad (154)$$

Die Bewegungsgleichungen für den Äther, der denselben Raum ausfüllt wie unsere homogene Molekelansammlung, wird nun gefunden, indem man die Ausdrücke (154) in die linken Seiten der Gleichungen (8) des § 113 einsetzt. So ergibt sich mit Hilfe von (153)

$$\left. \begin{aligned} \varrho_x \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \chi_x \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) &= (k + \frac{1}{3}n) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + n \nabla^2 \xi, \\ \varrho_y \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \chi_y \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) &= (k + \frac{1}{3}n) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + n \nabla^2 \eta, \\ \varrho_z \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \chi_z \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) &= (k + \frac{1}{3}n) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + n \nabla^2 \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

Drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten  $\xi, \eta, \zeta$ .

1) Das negative Zeichen ist in diesen Gleichungen der Größe  $\chi$  vorgesetzt, um  $\chi$  in einem Medium positiv zu machen, in dem rechtshändig zirkularpolarisiertes Licht sich schneller fortbewegt als linkshändiges (vgl. § 215). Ein solches Medium wird von allen Schriftstellern, die sich mit dem Gegenstande beschäftigen, ein rechtsdrehendes Medium genannt, da sich eine hindurchgehende Schwingungslinie planpolarisierten Lichtes wie der Uhrzeiger dreht, wenn es von jemandem, der es mit einem an seinem Auge befindlichen Nicolschen Prisma untersucht, angeschaut wird. Die Molekel, die nach unserer Trägheitstheorie dieses Resultat bewirkt, ist einem linksgewundenen Schraubenpropeller im Wasser analog und müßte demgemäß eigentlich linksgedreht heißen. So stellen linksgedrehte Molekeln ein optisch rechtsdrehendes Medium her. (In (155) Druckfehler. D. H.)



§ 206. Die Behandlung mit einer willkürlichen Funktion wie in den §§ 115, 120, 121, 127, 130 wäre interessant; sie ist aber wegen der dreifachen Differentiationen in den die Chiralität darstellenden Gliedern nicht geeignet. Alles, was diese Behandlung ergeben kann, ist in Wirklichkeit, vermöge des Fourierschen Satzes, in dem geeigneteren Verfahren periodischer Funktionen enthalten. Die für unsere vorliegende Aufgabe geeignetste Form des Verfahrens ergibt sich unter Benutzung des Imaginären, wenn man annimmt, daß die Größen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  Konstanten sind, multipliziert mit

$$e^{i\omega\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{u}\right)}, \quad (156)$$

wo mit  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  die Richtungskosinus einer Normalen zur Wellenebene und mit  $u$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet werden. Es folgt hieraus in verständlicher Symbolisierung

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{i\omega\lambda}{u}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{i\omega\mu}{u}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{i\omega\nu}{u}; \quad \nabla^2 = -\frac{\omega^2}{u^2}; \quad \frac{d^2}{dt^2} = -\omega^2. \quad (157)$$

Hierdurch gehen die Gleichungen (155) über in

$$\left. \begin{aligned} \varrho_x \omega^2 \xi + i\chi_x \frac{\omega^3}{u} (\nu\eta - \mu\xi) &= (k + \tfrac{1}{3}n) \frac{\omega^2 \lambda}{u^2} (\lambda\xi + \mu\eta + \nu\xi) + n \frac{\omega^2}{u^2} \xi, \\ \varrho_y \omega^2 \eta + i\chi_y \frac{\omega^3}{u} (\lambda\xi - \nu\xi) &= (k + \tfrac{1}{3}n) \frac{\omega^2 \mu}{u^2} (\lambda\xi + \mu\eta + \nu\xi) + n \frac{\omega^2}{u^2} \eta, \\ \varrho_z \omega^2 \xi + i\chi_z \frac{\omega^3}{u} (\mu\xi - \lambda\eta) &= (k + \tfrac{1}{3}n) \frac{\omega^2 \nu}{u^2} (\lambda\xi + \mu\eta + \nu\xi) + n \frac{\omega^2}{u^2} \xi. \end{aligned} \right\}^1 \quad (158)$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichungen mit  $u^2\omega^{-2}$  und ordnet nach  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ , so findet sich

$$\left. \begin{aligned} (A - k'\lambda^2)\xi + (i\chi_x u\omega\nu - k'\lambda\mu)\eta + (-i\chi_x u\omega\mu - k'\nu\lambda)\xi &= 0, \\ (-i\chi_y u\omega\nu - k'\lambda\mu)\xi + (B - k'\mu^2)\eta + (+i\chi_y u\omega\lambda - k'\mu\nu)\xi &= 0, \\ (+i\chi_z u\omega\mu - k'\nu\lambda)\xi + (-i\chi_z u\omega\lambda - k'\mu\nu)\eta + (C - k'\nu^2)\xi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

wo gesetzt ist

$$A = \varrho_x u^2 - n; \quad B = \varrho_y u^2 - n; \quad C = \varrho_z u^2 - n; \quad k' = (k + \tfrac{1}{3}n). \quad (160)$$

Bildet man die Determinante zur Elimination der Verhältnisse  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ , vereinfacht möglichst durch Reduktionen, die

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 \quad (161)$$

berücksichtigen, und setzt:

$$\begin{aligned} E &= (\chi_x - \chi_y)A + (\chi_x - \chi_z)B + (\chi_y - \chi_z)C \\ &= u^2[(\chi_z - \chi_y)\varrho_x + (\chi_x - \chi_z)\varrho_y + (\chi_y - \chi_x)\varrho_z] \\ &= u^2[\chi_x(\varrho_y - \varrho_z) + \chi_y(\varrho_z - \varrho_x) + \chi_z(\varrho_x - \varrho_y)], \end{aligned} \quad (162)$$

1) Diese Formeln, die, wie sie es tun, voraussetzen, daß die durch sie ausgedrückte Chiralität nicht von einer Chiralität der Elastizität, sondern von einer Chiralität der virtuellen Trägheit herrührt, sind von Boussinesq S. 456 in Bd. II (1903) seiner *Théorie Analytique de la Chaleur* gegeben.

so findet man

$$\begin{aligned}
 ABC \left[ 1 - k' \left( \frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \frac{\nu^2}{C} \right) \right] \\
 - u^2 \omega^2 [\chi_y \chi_z \lambda^2 (A - k') + \chi_z \chi_x \mu^2 (B - k') + \chi_x \chi_y \nu^2 (C - k')] \\
 + i u k' E \omega \lambda \mu \nu = 0.
 \end{aligned} \quad (163)$$

In (163) haben wir eine Gleichung sechsten Grades zur Bestimmung der Größe  $u$ , der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen, deren Wellen-normale die Richtungskosinus  $\lambda, \mu, \nu$  besitzt.

Diese Gleichung wird durch unsere Annahme, daß die Fortpflanzungs-geschwindigkeit der Verdichtungs-Verdünnungswellen praktisch Null ist, be-deutend vereinfacht; es wird dann  $k + \frac{4}{3}n = 0$ , also  $k' = -n$  und dem-gemäß nach (160) und (129')

$$-k' \frac{\lambda^2}{A} = \frac{a^2 \lambda^2}{u^2 - a^2} = \frac{u^2 \lambda^2}{u^2 - a^2} - \lambda^2.$$

Dies nebst den entsprechenden Formeln für  $\mu^2/B$  und  $\nu^2/C$  ergibt

$$1 - k' \left( \frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \frac{\nu^2}{C} \right) = u^2 \left( \frac{\lambda^2}{u^2 - a^2} + \frac{\mu^2}{u^2 - b^2} + \frac{\nu^2}{u^2 - c^2} \right).$$

Vermöge  $k' = -n$  ist ferner

$$A - k' = q_x u^2; \quad B - k' = q_y u^2; \quad C - k' = q_z u^2.$$

So geht (163)<sup>1)</sup> über in

$$\begin{aligned}
 u^2 \left[ q_x q_y q_z (u^2 - a^2) (u^2 - b^2) (u^2 - c^2) \left( \frac{\lambda^2}{u^2 - a^2} + \frac{\mu^2}{u^2 - b^2} + \frac{\nu^2}{u^2 - c^2} \right) \right. \\
 \left. - \omega^2 u^2 (\chi_y \chi_z q_x \lambda^2 + \chi_z \chi_x q_y \mu^2 + \chi_x \chi_y q_z \nu^2) \right] - i u n E \omega \lambda \mu \nu = 0. \quad (163')
 \end{aligned}$$

§ 207. Das imaginäre Glied in (163) macht, außer wenn es verschwin-det, jeden der sechs Werte von  $u$  imaginär. Die Ausführung des entsprechen- den Resultates nach den Prinzipien der früheren §§ 150, 151 wird sehr inter- essant sein. Im wesentlichen erfordert sie eine Ausdehnung der mechanischen Theorie dahin, daß sie die Umwandlung der Energie der Wellenbewegung in Wärmeenergie — in Energie unregelmäßiger intermolekularer Bewegungen — mit zu umfassen hat; das heißt, die Theorie der Absorption von Lichtwellen, die eine Ansammlung von Atomen oder von Gruppen von Atomen durchziehen.

§ 208. Man beachte zunächst, daß, falls  $E$  von Null verschieden ist, das imaginäre Glied in (163) immer dann und nur dann verschwindet, wenn einer der drei Richtungskosinus  $\lambda, \mu, \nu$  verschwindet, d. h. wenn die Wellen-ebene einer der drei Hauptachsen parallel ist. Es ist sicher ein auffallendes Resultat, daß ebene Wellen sich ohne Absorption sollen ausbreiten können,

1) Unter nochmaliger Benutzung von (129'). Es ist nämlich

$$ABC = - \frac{a^2 b^2 c^2}{k'^3} (u^2 - a^2) (u^2 - b^2) (u^2 - c^2),$$

und darin  $-\frac{k'^3}{a^2 b^2 c^2}$  nach (129') und wegen  $k' = -n$  gleich  $q_x q_y q_z$ .

wenn ihre Ebene irgendeiner der Hauptachsen parallel ist, während für alle Wellen, die diese Bedingung nicht erfüllen, Absorption besteht, in andern Worten, daß der Kristall vollkommen durchsichtig sein soll für alle zu einer Hauptachse senkrechten Strahlen und in einem gewissen Maße absorbierend für alle Strahlen, die nicht zu einer Hauptachse senkrecht sind. Kein solcher Kristall ist bekannt, weder ein natürlicher noch ein künstlich chemisch hergestellter. Mangel an Zeit gestattet mir nicht, weiter in diesen äußerst interessanten Gegenstand einzudringen.

§ 209. Betrachten wir jetzt die Fälle, in denen  $E$  verschwindet und demgemäß (163) nur reelle Glieder enthält, so sehen wir, daß in all diesen Fällen die Gleichung in eine solche dritten Grades nach  $u^2$  übergeht. Auf einen ersten und einfachsten Fall dieser Bedingung wird durch das dritte Glied der Gleichungen (162) hingewiesen; dieses zeigt, daß  $E$  verschwindet, wenn  $\varrho_x = \varrho_y = \varrho_z$  ist. Für diesen Fall wird (161)

$$\left. \begin{aligned} (\varrho u^2 - n - k')[(\varrho u^2 - n)^2 - u^2 \omega^2 (\chi_y \chi_z \lambda^2 + \chi_z \chi_x \mu^2 + \chi_x \chi_y \nu^2)] &= 0, \\ \text{wo gesetzt ist} \quad \varrho &= \varrho_x = \varrho_y = \varrho_z. \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

Von den drei Wurzeln dieser kubischen Gleichung erhält man die eine, wenn man den ersten Faktor gleich Null setzt, und die andern beiden aus der quadratischen Gleichung nach  $u^2$ , die resultiert, wenn man den zweiten Faktor gleich Null setzt. Es sind freilich keine Kristalle bekannt, die die so ange deuteten optischen Eigenschaften für ungleiche Beträge von  $\chi_x$ ,  $\chi_y$ ,  $\chi_z$  besitzen. Man kann sich aber wohl vorstellen, daß diese Eigenschaften bei manchen Kristallen des kubischen Systems gefunden werden möchten, die sich, was wohl verständlich wäre, bezüglich der gewöhnlichen Brechung isotrop verhalten und dabei verschiedene Grade der Drehung der Polarisations ebene von polarisiertem Lichte ergeben, das in verschiedenen Richtungen gegen die drei zueinander rechtwinkligen Linien geometrischer Symmetrie hindurchzieht.

§ 210. Für den Fall  $\chi_x = \chi_y = \chi_z$  geht die quadratische Gleichung aus (164) über in  $(\varrho u^2 - n)^2 = \omega^2 \chi^2 u^2$ ; hieraus folgt

$$\varrho u^2 - n = \pm \omega \chi u. \quad (165)$$

In allen bekannten Fällen, ich darf wohl ruhig sagen, in allen denkbaren Fällen, sowohl chiraler Kristalle als auch chiraler Flüssigkeiten, ist  $\omega \chi u$  im Vergleich mit  $n$  sehr klein; in andern Worten (§ 213 weiter unten): die Differenz zwischen den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten rechts- und linkszirkular-polarisierten Lichtes ist äußerst klein im Vergleich zu dem Mittel aus den beiden Geschwindigkeiten. Demnach verlieren wir nichts an Genauigkeit, wenn wir auf der rechten Seite von (165) setzen  $u = \sqrt{(n/\varrho)}$ . Wenn wir dann mit  $u_1$ ,  $u_2$  die beiden positiven durch (165) gegebenen Werte und mit  $u$  das Mittel aus diesen Werten bezeichnen, finden wir so aus (165)

$$\frac{u_1^2 - u_2^2}{u^2} = 2 \frac{\omega \chi u}{n}; \text{ und } \frac{u_1 - u_2}{u} = \frac{\omega \chi}{\varrho u}. \quad (166)$$

Führen wir in Übereinstimmung mit (182) die Abkürzung ein

$$\frac{\omega \chi}{\varrho} = g, \quad (166')$$

so folgt

$$u_1 - u_2 = g. \quad (166'')$$

§ 211. Um dieses Resultat zu deuten, gehen wir auf (158) zurück, nachdem wir diese Gleichungen durch  $\varrho_x = \varrho_y = \varrho_z$  und  $\chi_x = \chi_y = \chi_z$  vereinfacht haben. Da das Medium in bezug auf alle Richtungen der Wellenebene isotrop ist, verlieren wir nichts an Allgemeinheit, wenn wir setzen  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 0$ ,  $\nu = 0$ . Mit diesen Vereinfachungen ergibt die erste der drei Gleichungen (158)  $\xi = 0^1$ ; und gehen die zweite und die dritte mit  $u^2/\omega^2$  multipliziert über in

$$(\varrho u^2 - n)\eta = -i\chi\omega u\xi; \quad (\varrho u^2 - n)\xi = +i\chi\omega u\eta. \quad (167)$$

Setzt man das Produkt der linken Seiten dieser Gleichungen dem Produkte der rechten Seiten gleich, so findet sich  $(\varrho u^2 - n)^2 = \chi^2 \omega^2 u^2$ , was zunächst die zu Beginn des § 210 angegebene bestimmende quadratische Gleichung bestätigt.

Wir benutzen nun (165) um  $(\varrho u^2 - n)$  aus (167) zu eliminieren und bekommen

$$\xi = \pm i\eta. \quad (168)$$

Demgemäß finden wir als imaginäre Lösung nach (156) aus § 206 bzw. für  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi$

$$\xi = 0; \quad \eta = C e^{i\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)}; \quad \xi = \pm i C e^{i\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)}. \quad (169)$$

Die Änderung des Zeichens von  $i$  ergibt eine andere imaginäre Lösung; nimmt man die halbe Summe der beiden imaginären Lösungen, so findet sich als eine reelle Lösung:

$$\xi = 0; \quad \eta = C \cos \omega\left(t - \frac{x}{u}\right); \quad \xi = \pm C \sin \omega\left(t - \frac{x}{u}\right), \quad (170)$$

hieraus folgt

$$u = \sqrt{\frac{n}{\varrho} \pm \frac{\chi\omega}{2\varrho}} = \sqrt{\frac{n}{\varrho} \left(1 \pm \frac{\chi\omega u}{2n}\right)}. \quad (171)$$

§ 212. Die Deutung hiervon gibt: Sinusartige Schwingungen gleicher Amplitude, parallel zu  $OY$  bzw.  $OZ$ ; dabei ist die erste um eine Viertelperiode hinter der letzteren zurückgeblieben oder ihr vorangeeilt, je nachdem wir in jeder Formel das obere oder das untere Zeichen wählen. Die resultierende  $(y, z)$ -Bewegung des Äthers<sup>2)</sup> in dem durch die unteren Zeichen wiedergegebenen Falle verläuft in kreisförmigen Bahnen in der durch die beigegebene Zeichnung Fig. 77 als gegen den Uhrzeigergang angedeuteten Richtung.

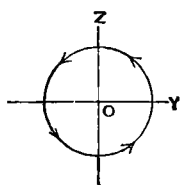


Fig. 77.

Diese Bewegung ist in der Phase für alle Punkte des Äthers in jeder gegen  $OX$  senkrechten Ebene, also in jeder Wellenebene, die nämliche; und

1) Nur wenn nicht gleichzeitig auch  $A - k'$  Null, also  $\varrho u^2 - n - k' = 0$  ist, also keine Longitudinalwelle vorhanden ist. D. H.

2) Diese  $(y, z)$  Komponente ist ohne Rotation. Die  $(x, y)$  Komponente der Ätherbewegung ist eine rotierende mit  $OZ$  als Achse, und die  $(x, y)$  Komponente gleichfalls eine rotierende mit  $OY$  als Achse. Wir beschäftigen uns im Augenblicke nicht mit diesem Gegenstande. Wir finden dies aber notwendig, wenn wir die Geometrie des § 205 (152) weiter verfolgen; und das liefert uns eine sehr einfache synthetische Untersuchung der Geschwindigkeit zirkular polarisierten Lichtes in einer chiralen Flüssigkeit oder in einem chiralen isotropen Festkörper.

sie ändert sich von Wellenebene zu Wellenebene so, daß sie eine Welle zirkularpolarisierten Lichtes bildet, die sich längs  $x$  mit der Geschwindigkeit  $u$  ausbreitet. Die dem oberen Zeichen entsprechende Bewegung ist eine andere zirkularpolarisierte Welle mit entgegengesetzter Bahnbewegung, also in Richtung des Uhrzeigers. Der Radius der Bahn ist in beiden Fällen derselbe,  $C$ . Wenn<sup>1)</sup> wir beim Anschauen der Fig. 77 die positive  $OX$ -Richtung nach dem Auge hin annehmen, wird eine Reihe von Partikeln des Äthers, die im ungestörten Zustande parallel  $OX$  liegt, in der Welle der gegen den Uhrzeigerang verlaufenden Bahnen eine linksgewundene Spirale und in derjenigen mit dem Uhrzeigerang verlaufenden eine rechtsgewundene. So besitzen die beiden Wellen entgegengesetzte Chiralitäten; die ersteren sollen als rechtsgedrehte, die letzteren als linksgedrehte bezeichnet werden. Die Ganghöhen der beiden Spiralen (Schrauben) sind etwas voneinander verschieden; sie sind die von den beiden Wellen in ihrer gemeinsamen Periode zurückgelegten Wege, also die Längen der beiden Wellen. Um dies zu verstehen, braucht man nur Fig. 78 anzuschauen, die eine in vergrößertem Maßstab rechtsgewundene Spirale  $RRR$  von 6 cm Ganghöhe und eine linksgewundene Spirale  $LLL$  von 5 cm darstellt, die eine gemeinsame Achse  $OX$  besitzen und beide um einen Zylinder von  $1\frac{1}{2}$  cm Radius, der die Größe  $C$  aus Gleichung (170) darstellt, gewunden sind. Wenn der Radius dieses auf ein Tausendstel oder ein Milliontel der Ganghöhe jeder Spirale herabgedrückt und wenn die Ganghöhe auf etwa  $4 \cdot 10^{-5}$  cm reduziert würde, würde jede Spirale die Linie darstellen, in der die im ungestörten Zustande in  $OX$  liegenden Ätherpartikel durch homogenes gelbes oder gelbgrünes zirkularpolarisiertes Licht verschoben werden, das in der positiven  $OX$ -Richtung sich durch eine durchsichtige Flüssigkeit oder einen solchen Festkörper mit dem Brechungsindex etwa 1,5 fortbewegt.

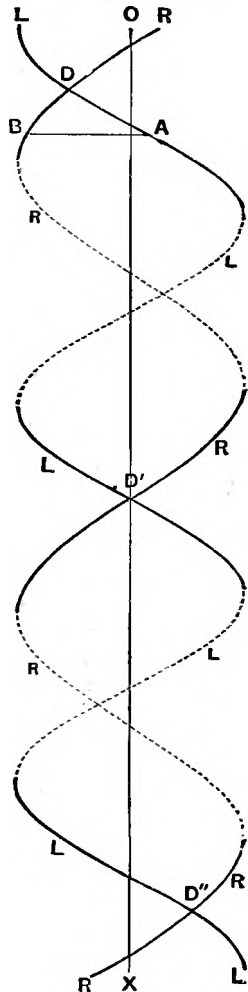


Fig. 78.

Bei dieser Deutung

1) Dies ist eine Festsetzung, der ich konsequent seit 60 Jahren bezüglich der positiven und negativen Richtungen bei drei zueinander senkrechten Strecken  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  gefolgt bin. Aus ihr ergibt sich als positive Richtung für Winkelgeschwindigkeiten die von  $OX$  nach  $OY$ , von  $OY$  nach  $OZ$  und von  $OZ$  nach  $OX$ . Dies stimmt mit den in englischen und anderen Lehrbüchern der Trigonometrie und der Geometrie zweier Dimensionen gewöhnlich getroffenen Festsetzungen, die als positive Drehung die gegen den Uhrzeigerang gerichtete annehmen. Sie ist auch für die Bewohner der nördlichen Erdhälfte passend, da sie die gegen den Uhrzeigerang gerichtete Kreisbewegung der Sonne und der Planeten, wenn sie von einem in dem Raume über unseren Nordpol, den wir als die Nordseite der Mittelebene der Planetenbewegung bezeichnen wollen, befindlichen Punkt angesehen wird, positiv sein läßt.

des Maßstabes der Zeichnung fassen wir die Resultante der beiden gleichen koexistierenden Verschiebungen von Wellenebenen, wie sie in einem beliebigen Augenblick durch die beiden Spiralen dargestellt sind, ins Auge. An Schnittpunkten der beiden Spiralen  $D, D', D''$  ist die resultierende Verschiebung einer jeden der entsprechenden Wellenebenen  $2C$ , die Summe der beiden gleichen Komponenten. Die resultierende Verschiebung der durch  $AB$  gehenden Wellenebene ist der doppelte Abstand des mittleren Punktes von  $AB$  von  $OX$ , also  $2\sqrt{C^2 - \frac{1}{4}AB^2}$ .

§ 213. Setzen wir jetzt voraus, daß die beiden Spiralen in entgegengesetzten Richtungen mit gleicher Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die Achse  $OX$  rotieren, die rechtsgewundene in Richtung des Uhrzeigers und die linksgewundene gegen den Uhrzeiger, wenn man von  $X$  nach  $O$  schaut. Dies kann in einem lehrreichen Modell mit einer um einen Messing- oder Holzzylinder gewundenen Spirale und einer zweiten auf einen jenen Zylinder leicht umschließenden Glasröhre realisiert werden. Die beiden sich drehenden Spiralen stellen dann die Bewegungen des Äthers in zwei zirkulärpolarisierten Wellen dar, die sich längs  $x$  mit Geschwindigkeiten

$$u_1 = \frac{\omega\lambda_1}{2\pi}, \quad u_2 = \frac{\omega\lambda_2}{2\pi} \quad (172)$$

fortpflanzen, wenn mit  $\lambda_1, \lambda_2$  die Ganghöhen der beiden Schrauben bezeichnet werden. Die Bewegung des Äthers in einer beliebig festgelegten, zu  $OX$  senkrechten Ebene, beispielsweise in der in der Zeichnung durch  $AB$  angedeuteten, wird dann durch die geometrische Konstruktion des § 212 gefunden. So finden wir, daß sehr kurze Zeit nach der in der Abbildung angedeuteten Konfiguration der Punkt  $D$  in die durch  $AB$  gehende Ebene gelangen wird und die Punkte  $A, B$  mit  $D$  zusammenfallen werden: unmittelbar hernach werden die letzteren wieder auseinandergehen,  $A$  in der Zeichnung wird nach links,  $B$  nach rechts wandern. Fassen wir die gesamte Bewegung ins Auge, so sehen wir, daß in jeder beliebigen durch  $OX$  gehenden festgehaltenen Ebene sich eine Wellenebene des Äthers in einer geraden Linie hin- und herbewegt. Der Punkt  $D$  verschiebt sich längs  $x$  mit einer Geschwindigkeit gleich

$$\frac{\omega/2\pi}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}\right)}, \quad (173)$$

die das harmonische Mittel aus den Geschwindigkeiten der beiden zusammengesetzten zirkulären Wellen bildet, und dreht sich langsam in Richtung des Uhrzeigers um den Zylinder mit dem Radius  $r$  in einem Verhältnisse, das in Radianten für die Einheit des längs  $x$  durchlaufenen Abstandes gleich ist

$$\pi \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \frac{\omega}{2} \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right). \quad (174)$$

Das ist mit den sofort abzuleitenden Gleichungen (179) und (180) zusammenzuhalten.

§ 214. Der kurze algebraische Ausdruck und der Beweis für all dies wird nämlich gefunden, wenn man die beiden durch (170), (171) dargestellten Lösungen nimmt und ihre Summe mit einigen Änderungen folgendermaßen niederschreibt:

$$\begin{aligned}\frac{\eta}{C} &= \cos \omega \left( t - \frac{x}{u_1} \right) + \cos \omega \left( t - \frac{x}{u_2} \right) \\ &= 2 \cos \omega \left( t - \frac{x}{2u_2} - \frac{x}{2u_1} \right) \cos \frac{\omega}{2} \left( \frac{x}{u_2} - \frac{x}{u_1} \right),\end{aligned}\quad (175)$$

$$\begin{aligned}\frac{\xi}{C} &= -\sin \omega \left( t - \frac{x}{u_1} \right) + \sin \omega \left( t - \frac{x}{u_2} \right) \\ &= -2 \cos \omega \left( t - \frac{x}{2u_2} - \frac{x}{2u_1} \right) \sin \frac{\omega}{2} \left( \frac{x}{u_2} - \frac{x}{u_1} \right).\end{aligned}\quad (176)$$

Für Größe und Richtung der Resultante dieser Verschiebungen finden wir hiernach

$$\sqrt{(\eta^2 + \xi^2)} = 2C \cos \omega \left( t - \frac{x}{2u_2} - \frac{x}{2u_1} \right), \quad (177)$$

und

$$\frac{\xi}{\eta} = -\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \left( \frac{x}{u_2} - \frac{x}{u_1} \right). \quad (178)$$

Diese Gleichungen stellen eine geradlinige Schwingung in einem Gesamtgebiete  $4C$  mit der Periode  $\frac{2\pi}{\omega}$  in einer Linie dar, deren Azimut ist

$$-\frac{\omega}{2} \left( \frac{x}{u_2} - \frac{x}{u_1} \right). \quad (179)$$

Letzteres aber zeigt, daß die Schwingungslinie sich in planpolarisiertem Licht in Richtung des Uhrzeigerganges in der Wellenebene im Verhältnis  $r$  dreht, wo  $r$  in Drehungen für eine Einheit des durchlaufenen Raumes ausgedrückt ist durch

$$r = \frac{\omega}{4\pi} \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) = \frac{\omega}{4\pi} \frac{u_1 - u_2}{u_2 u_1} = \frac{1}{2} \frac{u_1 - u_2}{\tau a^2}. \quad (180)$$

In der letzten Darstellung bezeichnet  $\tau$  die Periode der Schwingungen und  $a$  die Größe  $\sqrt{u_1 u_2}$  oder das „geometrische Mittel“ der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden Wellen.

§ 215. Kehren wir jetzt zur Fig. 78 zurück, so sehen wir, wie eigentlich in den §§ 212, 213 gesagt ist:

I. Die Bahnbewegung in rechtsgewundenem zirkularpolarisiertem Lichte, das zum Auge gelangt, ist mit der Uhrzeigerdrehung gerichtet und im linksgewundenen gegen die Uhrzeigerdrehung.

II. Die Schwingungslinie ebenpolarisierten Lichtes, das sich durch ein chirales Medium nach dem Auge hin bewegt, dreht sich in Richtung der Uhrzeigerbewegung, wenn die Geschwindigkeit des rechtsgewundenen zirkularpolarisierten Lichtes größer, und gegen die Richtung der Uhrzeigerbewegung, wenn sie kleiner ist als die des linksgewundenen zirkularpolarisierten Lichtes.

III. Ein chirales Medium heißt optisch rechtsdrehend oder linksdrehend, je nachdem die Geschwindigkeit des rechtsgewundenen oder die des linksgewundenen dasselbe durchsetzenden zirkularpolarisierten Lichtes größer ist.

All dies ist Fresnelsche Lehre, rein und einfach. Es ist seine Kinetik der von Arago und Biot am Quarz und von Biot am Terpentin

und an einer sehr großen Zahl anderer Flüssigkeiten entdeckten rechts- und linksdrehenden Chiralität.

§ 216. Zur mechanischen Erläuterung nehmen wir die letzte Darstellung der Gleichung (180) auf und schauen auf (152) und (153) zurück. Diese letzteren Gleichungen zeigen, daß nach unserer Erklärung die doppelte Beschleunigung einer Winkelgeschwindigkeit bewegten Äthers, mit  $\chi$  multipliziert, wenn  $\chi$  negativ ist, eine Kraft für die Größeneinheit des Äthers in der positiven Richtung in der Achse der Winkelgeschwindigkeit darstellt, die auf den Äther durch festgehaltene chirale Molekeln ausgeübt wird. Wenn  $\chi$  positiv ist, ist die chirale Molekel, wie in der Anmerkung zu § 205 gesagt ist, analog einer linksgewundenen Schraube, und ihre Chiralität ist eigentlich eine linksgewundene; denn (§ 205 oben), wenn der betrachtete Äther in der Richtung der Achse der Winkelgeschwindigkeit angeschaut wird, ist die von einer linksgewundenen Molekel auf den Äther wirkende Kraft nach dem Auge gerichtet (oder positiv), sobald die Beschleunigung der Winkelgeschwindigkeit des Äthers mit dem Gang des Uhrzeigers gerichtet ist (oder negativ nach meiner Festsetzung bezüglich der Richtung einer Rotation, wie sie in der Anmerkung zu § 212 angegeben ist). Mit dieser Feststellung wird die einfache synthetische Untersuchung der Geschwindigkeit zirkularpolarisierten Lichtes in einem chiralen Medium, wie sie in der ersten Anmerkung zu § 212 angedeutet ist, zu einer fast vollständigen; und wenn wir sie noch weiter vervollständigen, gelangen wir leicht durch einen kurzen Schritt zu der in der letzten Darstellung der Gleichung (180) für ein isotropes Medium ausgedrückten Lösung — ohne die umfassendere analytische Untersuchung der § 205 bis 214.

Aus Gleichung (166) ersehen wir, daß die linksgewundene Molekel ( $\chi$  positiv) für rechtsgewundenes zirkularpolarisiertes Licht die größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergibt, und demnach ist (§ 215, III) das Medium ein optisch rechtsdrehendes. So führen unsere Festsetzungen mit Notwendigkeit dazu, linksgewundene Molekeln als ein rechtsdrehendes und rechtsgewundene Molekeln als ein linksdrehendes Medium herstellend anzusprechen.

§ 217. Wir wollen jetzt auf die §§ 206, 207, 208 für Licht, das ein chirales Medium mit drei zueinander senkrechten, einer Maximum-, einer Minimimum- und einer Minimum-Geschwindigkeit der Welle entsprechenden Achsen durchsetzt, zurückgehen und die Lösung für eine ebene, zu einer der Hauptachsen, beispielsweise  $OZ$ , senkrechte Welle durchführen. Dabei wird  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\nu = 1$ , und die determinierende Gleichung (162) geht nach (160) über in

$$(C - k') [(e_x u^2 - n) (e_y u^2 - n) - u^2 \omega^2 \chi_x \chi_y] = 0. \quad (181)$$

Läßt man den ersten Faktor (der für  $k' = -n$  für die Verdichtungs-Verdünnungswelle  $u = 0$  ergibt) fort und setzt

$$\frac{n}{e_x} = a^2; \quad \frac{n}{e_y} = b^2; \quad \frac{\omega^2 \chi_x \chi_y}{e_x e_y} = g^2, \quad (182)$$

so findet man demnach

$$(u^2 - a^2) (u^2 - b^2) = g^2 u^2, \quad (183)$$

eine quadratische Gleichung, deren beide Wurzeln die Quadrate der Geschwindig-



keiten der längs der  $z$ -Achse gerichteten Wellen sind. Die dritte von den Gleichungen (158) macht  $\xi = 0$  für jede von diesen Wellen; und demnach sind sie beide solche genau gleichbleibender Dichte. Wenn  $\chi_x \chi_y$  positiv ist, sind beide Wurzeln der quadratischen Gleichung positiv, die eine von ihnen  $> a^2$ , die andere  $< b^2$ , falls  $a^2 > b^2$  ist.

§ 218. In diesen Formeln bezeichnen die Größen  $a$  und  $b$  die Geschwindigkeiten von Licht, dessen Schwingungslinien bzw. parallel  $OX$  und  $OY$  sind, und  $g$  ist eine Geschwindigkeit, die die chirale Eigenschaft des Kristalls mißt. Wenn wir nach dem urteilen, was bisher durch Beobachtungen über chirooptische Eigenschaften von Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern entdeckt ist, halten wir es für sicher, daß  $g$  in jedem Falle äußerst klein ist, im Vergleich sowohl mit  $a$  als mit  $b$ ; diese Größe ist im Quarz etwa ein Zwanzigtausendstel, und im Zinnober, der Substanz, die die größte optische Chiralität besitzt, die meines Wissens bisher an irgendeiner Flüssigkeit oder einem Festkörper verzeichnet ist, scheint  $g$  etwa fünfzehn mal so groß zu sein wie im Quarz. Nehmen wir jetzt an, daß  $g^2$  selbst sehr klein ist im Vergleich mit dem Unterschiede zwischen  $a^2$  und  $b^2$ , so ersehen wir aus der Form der Gleichung (183), daß die beiden durch die quadratische Gleichung gelieferten Werte von  $u^2$  in erster Annäherung gleich  $a^2$  bzw.  $b^2$  sein müssen; demgemäß erhalten wir als eine zweite Annäherung (wenn wir Formen wählen, die sich für den Fall  $a^2 > b^2$  eignen)

$$u_1^2 - a^2 = \frac{g^2 a^2}{a^2 - b^2}; \quad b^2 - u_2^2 = \frac{g^2 b^2}{a^2 - b^2}. \quad (184)$$

§ 219. Um den Charakter der beiden Wellen zu finden, die den beiden Wurzeln der Gleichung (183) entsprechen, setzen wir in der ersten und der zweiten der Gleichungen (158), jede mit  $u^2 \omega^{-2}$  multipliziert,  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\nu = 1$ ; dadurch gehen diese wegen (182) über in

$$(u^2 - a^2) \xi = \frac{-i \chi_x \omega u}{q_x} \eta; \quad (u^2 - b^2) \eta = \frac{i \chi_y \omega u}{q_y} \xi. \quad (185)$$

Setzt man das Produkt der linken Seiten dieser Gleichungen dem Produkte der rechten Seiten gleich, so finden wir wieder die bestimmende quadratische Gleichung (183). Mit jedem der durch (183) gelieferten Werte von  $u^2$  kann die eine oder die andere von den Gleichungen (185) zur Vervollständigung der Lösung verwendet werden. Die erste von den Gleichungen (185) ist für die nahezu  $b^2$  gleiche Wurzel die geeignetere, und die zweite für die nahezu  $a^2$  gleiche. Wählt man sie dementsprechend und setzt in der üblichen Weise die reellen Teile einander gleich, so findet man für die beiden vervollständigten unabhängigen Lösungen mit den willkürlichen Konstanten  $C_1, C_2$

$$\left. \begin{aligned} u_1 > a; \quad \xi &= C_1 \cos \omega \left( t - \frac{x}{u_1} \right); \\ \eta &= - \frac{C_1 u_1 \chi_y \omega / q_y}{u_1^2 - b^2} \sin \omega \left( t - \frac{x}{u_1} \right); \\ u_2 < b; \quad \xi &= - \frac{C_2 u_2 \chi_x \omega / q_x}{a^2 - u_2^2} \sin \omega \left( t - \frac{z}{u_2} \right); \\ \eta &= C_2 \cos \omega \left( t - \frac{z}{u_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

§ 220. Die ungemeine Kleinheit der Größe  $g/a^1$ ) hat alle bisher meines Wissens zur Entdeckung einer optischen Chiralität in einem „zweiachsigen“ Kristalle, das heißt in einem Kristall mit drei zueinander senkrechten Hauptachsen, mit einer Minimum-, einer Minimaximum- und Maximumgeschwindigkeit von Wellen, unternommenen Versuche erfolglos gemacht. Wenn sie überhaupt entdeckbar sein sollte, kann sie sicher nur bei Licht merklich sein, das längs einer der drei Hauptachsen fortschreitet.

(19. Dez. 1903. Ich habe erst heute im Phil. Mag. vom Okt. 1901 gesehen, daß Dr. H. C. Pocklington Rotationen der Schwingungslinien in polarisiertem Lichte, das sich durch kristallisierten Zucker längs zweier „Achsen“ bewegte, von denen die erste nahezu senkrecht zur Spaltungsebene ist, gefunden hat, die in Richtung des Uhrzeigers 22° für das Zentimeter und gegen dieselbe 64° betragen: eine äußerst interessante und wichtige Entdeckung.)

§ 221. Für Licht, das längs der Achse,  $OZ$ , eines einachsigen Kristalles fortschreitet, nehmen wir in den Gleichungen (183)–(186)  $a = b$  und erhalten nach (183)

$$u^2 - a^2 = \pm g u. \quad (187)$$

Dazu ist, wenn wir  $e_y = e_x$  und  $\chi_y = \chi_x$  setzen, nach (182)

$$g = \frac{\omega \chi_x}{e_x}. \quad (188)$$

Hiernach und nach (187) geht (186) über in

$$\left. \begin{aligned} u_1 > a; \quad \xi &= + C_1 \cos \omega \left( t - \frac{x}{u_1} \right); \quad \eta = - C_1 \sin \omega \left( t - \frac{x}{u_1} \right); \\ u_2 < a; \quad \xi &= - C_2 \sin \omega \left( t - \frac{z}{u_2} \right); \quad \eta = + C_2 \cos \omega \left( t - \frac{z}{u_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (188)$$

So sehen wir, daß für Licht, das längs der Achse eines einachsigen Kristalles fortschreitet, die Geschwindigkeiten von rechtsgewundenem und linksgewundenem zirkulärpolarisiertem Lichte und die Drehung der Schwingungslinie ebenpolarisierten Lichtes in jeder Einzelheit die nämlichen sind, wie wir sie in §§ 211, 212 für ein vollkommen isotropes Medium gefunden haben. Wir werden jedoch jetzt (§ 226 weiter unten) sehen, daß zwei oder drei Grade Abweichung von der Achse eine große Änderung gegenüber den Erscheinungen in einem chiral isotropen Medium hervorbringen; und daß für Strahlen, die um 30° oder mehr, bis zu 90° geneigt sind, die Chiralität fast vollständig durch Äolotropie überflutet wird, selbst wenn die Äolotropie so klein ist wie beim Quarz (§ 223 später). Wie in § 220 bemerkt ist, gibt es in einem Kristall, der drei ungleiche Werte für  $a, b, c$  besitzt, keine Richtung für Licht, in der diese Überflutung nicht erfolgt; und deshalb ist es nicht so interessant, für einen zweiachsigen Kristall die durchgeführten Einzelheiten der Lösungen (159), (162), (163) auszuarbeiten. Es ist aber äußerst interessant, sie für einen einachsigen Kristall auszuarbeiten, wegen der Überschwenglichkeit der chiralen Erscheinungen, sobald der Strahl nahezu in der Richtung der Achse verläuft, und wegen der schönen Erscheinungen der Airyschen

1) Für Natriumlicht in Quarz ist die Größe  $0,4605 \cdot 10^{-4}$ ; und es ist zu erwarten, daß sie in zweiachsigen Kristallen entsprechend klein ist.

Spiralen, die von dieser Überschwenglichkeit herrührt, und endlich wegen der bewunderungswürdigen Untersuchung der Wellenfläche in einem Quarzkristall durch Mc Connel, über die im § 228 berichtet werden wird.

§ 222. Für Wellen, die in einer beliebigen Richtung durch einen einachsigen Kristall ziehen, wählen wir die Achse als  $OZ$ ; dann wird in den Gleichungen (158)–(163) des § 206  $e_x = e_y$  und  $\chi_x = \chi_y$ . Dadurch geht (163) in  $E = 0$  über, und die Wellen werden in allen Richtungen reell, also ohne Änderung der Anordnung der Bewegungen transmissibel. Entsprechend (182) dürfen wir jetzt setzen

$$\frac{n}{e_x} = \frac{n}{e_y} = a^2 = b^2; \quad \frac{n}{e_z} = c^2; \quad \frac{\omega \chi_x}{e_x} = g; \quad \frac{\omega \chi_z}{e_z} = h. \quad (189)$$

Ohne der Allgemeinheit Eintrag zu tun, dürfen wir weiter die Gleichungen (158)–(162) vereinfachen durch die Annahme

$$\mu^2 = 0; \quad \lambda^2 = \sin^2 \vartheta; \quad \nu^2 = \cos^2 \vartheta. \quad (190)$$

Bei dieser Annahme ergibt die Gleichung (163') des § 206

$$(u^2 - a^2)[u^2 - a^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 \vartheta] = g[g - (g - h) \sin^2 \vartheta]u^2. \quad (191)$$

Dies ist eine quadratische Gleichung zur Bestimmung der Quadrate der Geschwindigkeiten der beiden ebenen Wellen, deren Wellennormalen gegen  $OZ$  unter demselben Winkel  $\vartheta$  geneigt sind. Für  $\vartheta = 90^\circ$  kommen wir wieder zu dem Falle der §§ 217, 218, 219, jedoch mit  $c$  an Stelle von  $b$ , und für  $\vartheta = 0^\circ$  kommen wir wieder direkt auf § 221 zurück. Der äußerst interessante Übergang vom Gegenstand des § 221 zu unserm vorliegenden Gegenstande wird vollständig durch die Lösung der quadratischen Gleichung nach  $u^2$  und wird am besten durch Tabellen von Werten der beiden Wurzeln zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  für einen besondern Fall oder für besondere Fälle erläutert, oder auch durch eine graphische Darstellung durch Kurven wie in den Figuren 79, 80, 81. Ich habe den Fall eines Quarzkristalles gewählt, der von Natriumlicht durchzogen wird; für dieses zeigt die Beobachtung, daß die Drehung der Schwingungslinie  $217^\circ$  für das längs der Achse durchgesetzte Zentimeter beträgt. Dies ergibt  $g = 4,605 \cdot 10^5 \cdot a$ , wie man findet, wenn man auf der linken Seite der Gleichung (180)  $r = 217/360$  und im letzten Gliede  $u_1 - u_2 = g$  und  $a = 0,647593$ , den reziproken Wert von 1,54418, nach Rudberg den kleinsten Brechungskoeffizienten des Quarzes bei  $18^\circ$ , nimmt und  $\tau = 0,58932$  setzt, der Periode des Mittels der Natriumstrahlen  $D_1 D_2$  in Dezimalen des Michrons; dabei ist das Michron die Zeiteinheit, nach der die Lichtgeschwindigkeit zur Einheit wird, wenn die Raumeinheit das Mikron (oder ein milliontel Meter) ist (vgl. die Anm. zu S. 119).

Als zwei besondere Fälle habe ich  $h = 0$  und  $h = -g$  gewählt, da nach allem, was uns die Theorie sagt (§ 223),  $h/g$  negativ sein kann; diese Größe kann aber auch Null sein oder auch einen beliebigen positiven Wert haben, der kleiner als eins, gleich eins oder größer als eins ist. Mc Connells Experimentaluntersuchung läßt (§ 228 weiter unten) es sicher erscheinen, daß  $h/g$  für Quarz kleiner als eins ist, wahrscheinlich ist  $h/g$  negativ, und zwar  $-1$  oder vielleicht noch kleiner. Da (189) für  $g^2$  zeigt, daß der Wert dieser Größe umgekehrt proportional der Periode des Lichtes ist, wenn  $\chi_x$  für Licht

aller Perioden denselben Wert hat, wird  $g$  positiv oder negativ sein, je nachdem der Kristall ein rechts- oder linksdrehender ist.

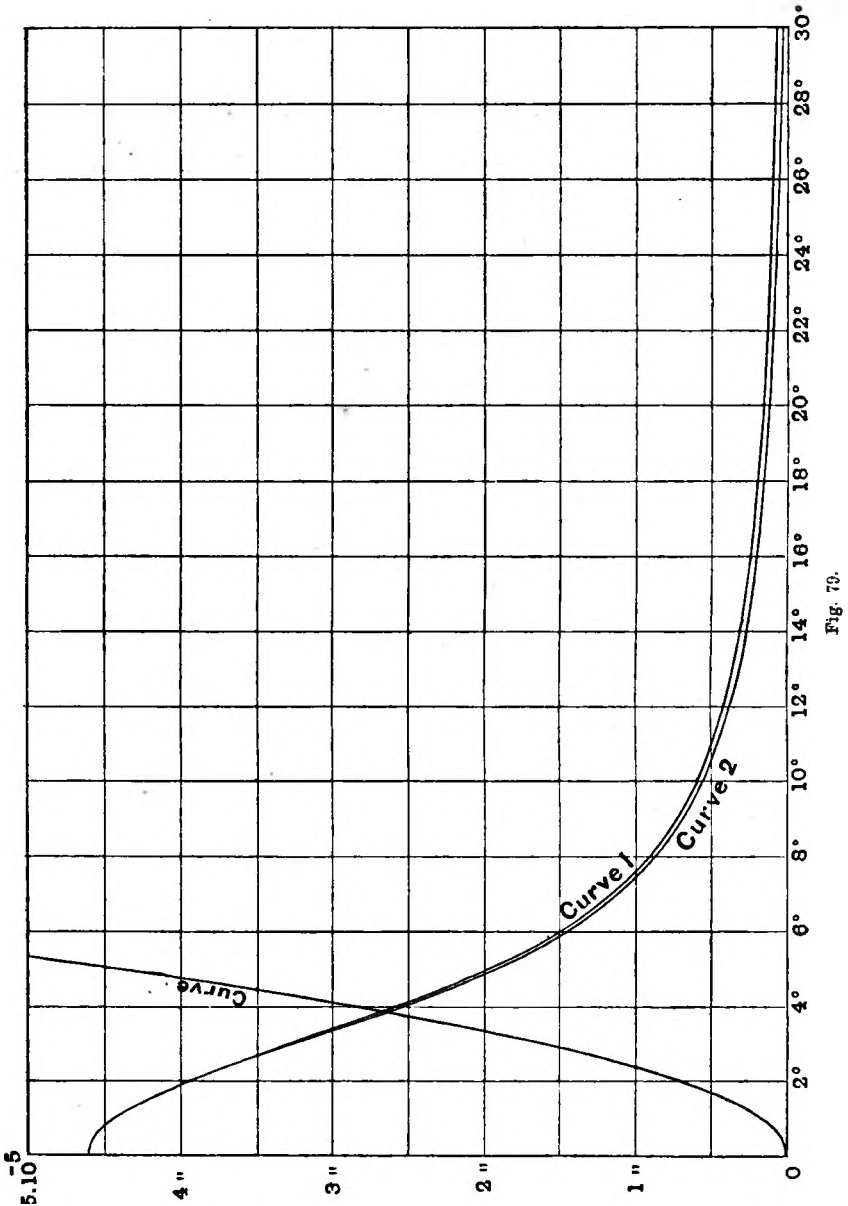


Fig. 70.

§ 223.  $c/a$  ist das Verhältnis des kleinsten zum größten Brechungskoeffizienten des Quarzes, also  $1,54418/1,55328$  nach den von Mc Connel benutzten Zahlen, die (wie ich aus den Landolt-Börnsteinschen Tabellen ersehe) die Resultate Rudbergs für eine Temperatur von  $18^{\circ}$  und Natrium-

licht sind. Hieraus findet man  $(c/a)^2 = 0,98832$ . Gleichung (191) geht über in

$$\left. \begin{aligned} & \left( \frac{u^2}{a^2} - 1 \right) \left( \frac{u^2}{a^2} - w^2 \right) = q \frac{u^2}{a^2}, \\ & \frac{u^4}{a^4} - (1 + w^2 + q) \frac{u^2}{a^2} = -w^2 \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

wo gesetzt ist

$$\begin{aligned} 1 - w^2 &= 0,01168 \sin^2 \vartheta \\ &= \frac{0,01168}{2} (1 - \cos 2\vartheta) \end{aligned} \quad (193)$$

und

$$q = a^{-2} g [g - (g - h) \sin^2 \vartheta]. \quad (194)$$

Wenn mit  $u_1^2, u_2^2$  die größere bzw. die kleinere Wurzel der Gleichung (191) bezeichnet wird, ist

$$a^{-2}(u_1^2 + u_2^2) = 1 + w^2 + q; \quad (195)$$

$$\begin{aligned} a^{-2}(u_1^2 - u_2^2) \\ = \sqrt{[(1 - w^2)^2 + 2(1 + w^2)q + q^2]}. \end{aligned} \quad (196)$$

Man beachte, daß, bei  $\vartheta = 90^\circ$ ,  $1 - w^2 = 0,01168$  und  $q = a^{-2}gh$  ist. Demgemäß kann  $-a^{-2}gh$  positiv und gleich  $\frac{1}{4} \cdot 10^{-4}(1,168)^2$  oder auch etwas größer sein, ohne daß die Wurzel imaginär wird.

§ 224. In der Figur 79 stellen die Kurven 1 und 2 von  $\vartheta = 0$  bis  $\vartheta = 30^\circ$  die Größe  $\frac{1}{2}[a^{-2}(u_1^2 - u_2^2) - (1 - w^2)]$  für die besonderen Fälle  $h = g$  und  $h = -g$  dar, und Kurve 3 versinnbildlicht die Größe  $\frac{1}{2}(1 - w^2)$  in demselben Maßstabe von  $\vartheta = 0^\circ$  bis  $\vartheta = 5,3^\circ$ . In Fig. 80 geben die Kurven 1 u. 2 von  $\vartheta = 30^\circ$  bis  $\vartheta = 90^\circ$  die Größe  $\frac{1}{2}[a^{-2}(u_1^2 - u_2^2) - (1 - w^2)]$  für die besonderen Fälle  $h = g$  und  $h = -g$  in einem Maßstabe wieder, in dem die Ordinaten zehnmal und die Abszissen halb so groß sind wie in dem Maßstabe der Fig. 79.

In dem ganzen Gebiete der Figuren 79 u. 80 geben die Kurven 1 u. 2 die chiralen Abweichungen von den Quadraten der äolotropen Wellengeschwindigkeiten wieder, wie sie für die nicht-chirale Komponente der Äolotropie eines Quarzkristalles berechnet sind; die Kurve 3 der Fig. 79 und die Gleichungen (193)–(196) zeigen, daß in dem Gebiete von  $\vartheta = 0$  bis  $\vartheta = 5,3^\circ$

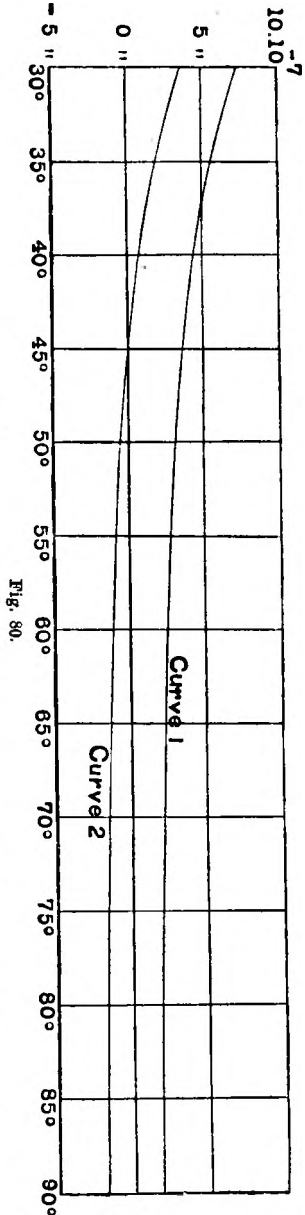


Fig. 80.

1) Im Original fehlt durch Druckversehen bei  $(1 - w^2)$  der Exponent 2. Es sind auch noch andere Druckfehler zu verbessern. D. H.

die Werte von  $a^{-1}u_1$ ,  $a^{-1}u_2$  von der Einheit um weniger als  $5,1 \cdot 10^{-5}$  verschieden sind.

Demnach ist in diesem Gebiete sehr angenähert

$$\frac{1}{2}[a^{-2}(u_1^2 - u_2^2) - (1 - w^2)] \approx \frac{u_1 - u_2}{a} - (1 - w). \quad (197)$$

§ 225. Fig. 81 beleuchtet die entscheidenden Eigenheiten des Kristalleinflusses und den zusammenwirkenden Kristall- und Chiralitätseinfluß eines Quarzkristalles auf Licht, das diesen so durchsetzt, daß die Wellennormale

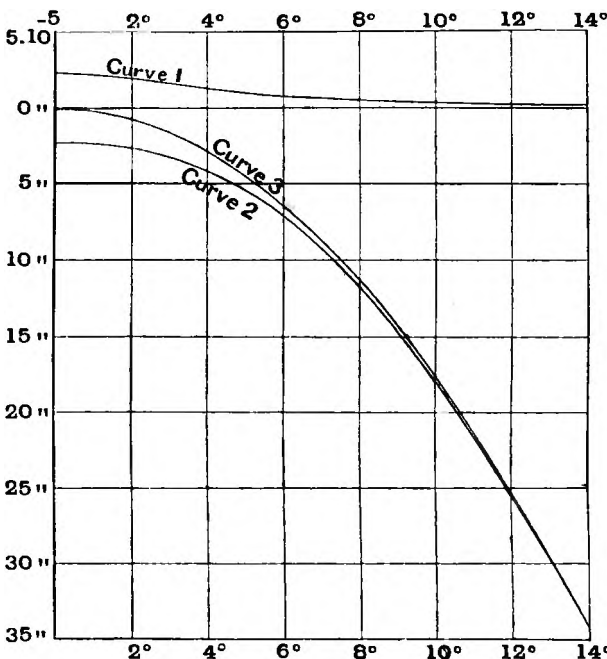


Fig. 81.

gegen seine Achse unter irgendeinem Winkel bis hinauf zu  $14^\circ$  geneigt ist.

Der Kristalleinfluß allein wird in der Kurve 3 durch die nach unten gerichteten Ordinaten dargestellt, die gleich dem Überschuße der Geschwindigkeit des ordinären Strahles über die Geschwindigkeit des extraordinären Strahles, dividiert durch die

erste, sind, in einem gedachten Kristalle, der dem Mittel aus einem rechtsdrehenden und einem linksdrehenden Quarzkristalle entspricht.

Kurve 1 stellt den Überschuß der größten

Wellengeschwindigkeiten in einem wirklichen Quarzkristall über die Geschwindigkeit des ordinären Strahles in dem gedachten mittlern Kristalle, dividiert durch die letztere, dar.

Kurve 2 versinnbildlicht den (negativen) Überschuß der kleinern der beiden Wellengeschwindigkeiten in einem wirklichen Quarzkristall über die Geschwindigkeit des extraordinären Strahles in dem gedachten mittlern Kristall, dividiert durch die letztere Geschwindigkeit.

Nach unserer Bezeichnung in § 223 sind die Ordinaten der Kurven 3, 1, 2 bezüglich gleich<sup>1)</sup>

$$w - 1; \quad \frac{u_1}{a} - 1; \quad \frac{u_2}{a} - w. \quad (198)$$

1) Unter der Annahme im vorletzten Absatz in § 224.

§ 226. Aus den Gleichungen (198) ersehen wir, daß die über das ganze Gebiet von  $\vartheta = 0^\circ$  bis  $\vartheta = 90^\circ$  fortgeführte Kurve 3 den Abstand darstellt zwischen einer Tangentialebene an einem länglichen Rotationsellipsoid, dessen halbe Rotationsachse der Einheit gleich ist, und einer parallelen Tangentialebene an der umhüllenden Kugel, deren Radius also die Einheit ist (das Ellipsoid und die Kugel bilden nämlich die Wellenfläche für den gedachten einachsigen Kristall, der dem Mittel aus dem rechts- und linksdrehenden Quarz entspricht). Die Kurven 1 u. 2 stellen in ähnlicher Weise die Projektionen, auswärts von der Kugel, innenwärts vom Ellipsoid, der beiden Schalen der Wellenfläche in einem wirklichen Quarzkristall dar, sowohl eines rechtsdrehenden wie eines linksdrehenden. In jedem Falle ist  $\vartheta$  die Neigung der beiden Tangentialebenen, deren Abstand durch die Ordinaten der Zeichnung wiedergegeben ist, gegen die Äquatorialebene. Es ist interessant, zu sehen und nach der Kurve 1 zu verfolgen, wie nahe bei  $\vartheta = 14^\circ$  und demnach bis hinauf zu  $\vartheta = 90^\circ$  eine der Schalen der Wellenfläche im Quarz mit der Kugelfläche zusammenfällt, und an den Kurven 2 u. 3 weiter zu sehen, wie nahe bei und über  $14^\circ$  das Gleiche für die andere Schale in bezug auf das eingeschriebene Ellipsoid stattfindet. Andererseits ist es interessant, aus den drei Kurven doch auch zu ersehen, wie von  $\vartheta = 0^\circ$  bis  $\vartheta = 2^\circ$  die Chiralität die Äolotropie überwiegt und wie dieses Überwiegen allmählich von der Chiralität auf die Äolotropie übergeht, wenn  $\vartheta$  von  $2^\circ$  bis  $14^\circ$  ansteigt.

§ 227. Die Eigenschaften der beiden Wellenebenen, deren Wellennormalen gegen die Achse eines Quarzkristalls unter einem Winkel  $\vartheta$  geneigt sind, werden ermittelt werden, wenn man es wie in § 222 anfängt und für den dort bestimmten Fall eine reale Lösung der Gleichung (159) des § 206 ausarbeitet. Wir finden so, daß für  $\vartheta = 0$  jede Welle zirkularpolarisiert ist, und daß für alle Werte von  $\vartheta$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  jede Welle elliptisch polarisiert ist; von den Achsen der elliptischen Bahn ist die eine senkrecht, die andere parallel zu der durch die Wellennormale und die Achse des Kristalls bestimmten Ebene. Die erstere Achse ist die größere für die Welle, die die größere Geschwindigkeit ( $u_1$ ) besitzt, die letztere ist die größere für die Welle kleinerer Geschwindigkeit ( $u_2$ ). Für alle Werte von  $\vartheta$ , die größer sind als sechs bis sieben Grad, ist die kleinere Achse der elliptischen Bahn sehr klein im Vergleich mit der großen, in andern Worten, jede Welle besteht aus sehr angenähert geradlinigen Schwingungen oder ist sehr nahe „ebenpolarisiert“; und die eine der beiden Wellen kommt dem „ordinären Strahle“ sehr nahe, die andere dem „extraordinären Strahle“ in dem gedachten nicht-chiralen Kristall, der dem Mittel aus dem rechts- und dem linksdrehenden Quarze entspricht.

§ 228. Schaut man auf die beiden besonderen, durch die Kurven 1 u. 2 der Figuren 79 u. 80 wiedergegebenen Fälle, so bemerkt man, daß der Unterschied zwischen ihnen sehr klein, wahrscheinlich für die feinste ausführbare Beobachtung vollkommen unbemerkbar bleibt, wenn  $\vartheta < 6^\circ$  ist. Bei  $10^\circ$  ist die Differenz der Ordinaten für die beiden Kurven etwa  $\frac{1}{17}$  der einzelnen Ordinaten und dürfte für die Beobachtung wahrnehmbar sein, obwohl sie nur einen äußerst kleinen Bruchteil, etwa  $\frac{1}{500}$  des gesamten Unterschiedes der Geschwindigkeiten der beiden Strahlen, bedeutet. Dieser Unterschied, wie er in Fig. 81 sich dargestellt findet, ist selbst sehr klein, denn er beträgt nur etwa

$18 \cdot 10^{-5}$  von  $a$ , dem Mittel aus den Geschwindigkeiten des rechts- und des linksgedrehten axialen Strahles. Wie außerordentlich scharf die Experimentaluntersuchung von Mc Connell gewesen ist, kann man aus der in seiner Fig. 3, S. 321<sup>1)</sup> wiedergegebenen Tatsache beurteilen, daß er von  $\vartheta = 14^0$  bis  $\vartheta = 30^0$  bestimmte systematische Differenzen zwischen der „Theorie von Mc Cullagh“ und der „Theorie von Sarrau“ gefunden hat. Die Resultate der Theorie von Mc Cullagh sind in unserer Kurve 1 wiedergegeben; und unsere Kurve 2 stellt Resultate dar, die von denjenigen Mc Cullaghs in demselben Sinne wie diejenigen Sarraus, aber etwas stärker abweichen. So war die Untersuchung Mc Connells mehr als ausreichend empfindlich, um zwischen unsern beiden durch die Kurven 1 u. 2 der Figuren 79 u. 80 dargestellten besondern Fällen zu unterscheiden. Schauen wir auf Mc Connells Fig. 3 und beachten, daß 0,003794 der Wert von  $a - b$  (unser  $a - c$ ) ist, den er nach seiner Feststellung der Beobachtungsergebnisse Rudbergs als richtig annimmt, so sehen wir, daß das, was er als Theorie Sarraus betrachtet, den Fehler Mc Cullaghs unterkorrigiert, und daß unser besonderer Fall 2, den ich zu diesem Zwecke wähle, die Korrektur zu einer sehr nahe vollkommenen machen muß. Ich bemerke aber, wenn ich die Abhandlung von Sarrau<sup>2)</sup> untersuche, daß seine Theorie sich nicht, wie von Mc Connell angenommen wird, auf relativ kleine Abweichungen von  $q = \frac{g^2}{a^2} \cos^4 \vartheta$  (Mc Connells Bezeichnung auf S. 314 seiner Arbeit in unsere aus § 226 übertragen) beschränkt, und daß besondere Werte seiner Konstanten (ohne die Einschränkung, daß  $f_1$  und  $g_1$ , wie es von Mc Connell festgesetzt ist, relativ klein sein sollen) gefunden werden können, die eine vollständige Übereinstimmung mit den Beobachtungen Mc Connells ergeben. Dasselbe kann von der Theorie Voigts gesagt werden, wie von Mc Connell (S. 314) ausgesprochen ist. So können wir es als Tatsache hinnehmen, daß die Theorie von Sarrau und Voigt zu Resultaten führt, die vollkommen zu den Beobachtungen von Mc Connell passen. Es werden auch Theorien von Mc Cullagh, Clebsch, Lang und Boussinesq durch Mc Connell angezogen, nach denen sich eine Konstante für die Größe findet, die wir mit  $q$  bezeichnet haben, und die eine ganz gute Annäherung an die Resultate seiner Beobachtungen geben sollen; sie sind aber entschieden weniger gut als die nach Sarrau und Voigt, die zulassen, daß  $q$  sich mit  $\vartheta$  ändert. Alle diese Theorien stimmen darin überein, daß sie Kräfte zwischen verschiedenen Teilen des schwingenden Mediums als den Ursprung der chiralen Eigenschaft annehmen, und unterscheiden sich wesentlich von meiner Theorie (§§ 162—166, 200 bis 205), die ihn in einer virtuellen Trägheit des Äthers findet, die sich geltend macht, wenn er durch chirale Atomgruppen gestört wird.

§ 229. Die folgende Tabelle gibt in Graden für das Zentimeter die Drehung der Schwingungslinie polarisierten Lichtes an, das sich durch verschiedene Substanzen hindurch fortpflanzt, durch kristallische Festkörper und durch Flüssigkeiten; die Zahlen sind den Tafeln von Landolt und Börnstein, Ausgabe von 1894, neue Ausgabe 1905, S. 692 ff., entnommen.

1) Phil. Trans. Roy. Soc., Part. I, 1886.

2) Sarrau, Liouville, sér. 2, Bd. XIII (1868), S. 101.



Substanz	Farbe des Lichts	Drehungsrichtung <sup>1)</sup>	Drehung der Schwingungslinie in Graden pro Zentimeter	Beobachter
Feste Kristalle:				
Zinnober . . . . .	Rot		2700 bis 3000	Descloizeaux
Quarz . . . . .	$\left. \begin{matrix} D_1 \\ D \text{ (Mittel)} \\ D_2 \end{matrix} \right\}$		$\left. \begin{matrix} 217,27 \\ 217,05 \\ 216,84 \end{matrix} \right\}$	Soret u. Sarasin
Blei Hyposulfat + 4 aq	$D$		55,31	Pape
Kalium Hyposulfat	$D$		83,85	Pape
Kaliumsulfat—				
Lithiumchromat	$D$		19,3	H. Traube
$K_2SO_4 + Li_2CrO_4$ }				
Natriumbromat . . .	$D$		21,7	H. Traube
Natriumchlorat . . .	$D$		31,04	Guye
" " "	$D$		31,6	Sohncke
Natriumperjodat + 3 aq	$D$		233,0	Groth
Flüssigkeiten:				
Terpentin $C_{10}H_{16}$ . .	$D$	$r$	$1,4147 \times d^2$	Landolt
Nikotin $C_{10}H_{14}N_2$ . .	$D$	$l$	$16,155 \times d^2$	Landolt

§ 230. Bedeutenden und interessanten Aufschluß über chiro-optische Eigenschaften von Flüssigkeiten und Festkörpern findet man in *Traité d'Optique* von Mascart, Bd. II., Ausgabe von 1891, S. 247—369, und über die von Faraday entdeckte magneto-optische Drehung der Schwingungslinie S. 370—392. Der erste Abschnitt des Anhangs J im vorliegenden Bande enthält eine wichtige Tatsache, betreffend die Chiralität in Kristallen und in einer kristallischen Molekel, die mir von dem verstorbenen Sir George Stokes mitgeteilt ist. Anhang H (molekulare Anordnungen eines Kristalles, § 22, Anmerkung, §§ 47—52) enthält weiter Feststellungen grundlegender Prinzipien der reinen Geometrie einer Chiralität. Anhang G gibt eine vollständige mathematische Theorie der Quasiträgheit eines Festkörpers beliebiger Gestalt, der sich durch eine vollkommene Flüssigkeit bewegt, nebst besonderen Bemerkungen über eine Chiralität dieser Quasiträgheit.

§ 231. Die Zwanzigste Vorlesung, wie sie ursprünglich gehalten wurde und über die ein vollständiger Bericht in der autographierten Ausgabe mitgeteilt ist, und ein Anhang zu diesem, der überschrieben ist „Verbesserte gyrostatische Molekeln“ enthielt einen unbefriedigenden Versuch, Faradays magneto-optische Drehung mechanisch zu erläutern oder zu erklären. Dieser ist

1) In Richtung des Uhrzeigers, vom Beobachter gesehen, heißt sie rechtsgedreht ( $r$ ), gegen den Uhrzeiger, linksgedreht ( $l$ ).

2) Hier bedeutet  $d$  das spezifische Gewicht der Flüssigkeit. Vgl. Landolt und Börnstein, S. 450, neue Ausgabe 1905, S. 692 ff. Ich sehe keinen rechten Grund für die Notwendigkeit, in der in meiner Tabelle im Text angedeuteten Weise, wie es durch die in den Tafeln von Landolt und Börnstein benutzte Bezeichnung notwendig gemacht ist,  $d$  einzuführen. Einige weitere verwirrende Besonderheiten in ihrer Bezeichnungsweise halten mich ab, irgendeines von den zahlreichen Beispielen der Rotationswirkung „aktiver“ Substanzen, die in „nicht-aktiven“ Flüssigkeiten gelöst sind, anzuführen, die auf S. 450—458 jener Tafeln mitgeteilt sind.

im vorliegende Bande nicht wiederholt; dafür ist eine ältere mechanische Illustration der magnetischen und helikoidalen Rotationswirkungen durchsichtiger Körper auf polarisiertes Licht betreffende, Abhandlung als Anhang F wieder abgedruckt. Diese Abhandlung enthält eine Feststellung der mechanischen Prinzipien, die in den beiden Arten einer Drehung der Schwingungslinien polarisierten Lichtes, das durchsichtige Festkörper oder Flüssigkeiten durchdringt, wirksam sind, die meiner Meinung nach auch jetzt noch für im Grunde richtig angesehen werden darf. Wenn wir eine zutreffende physikalische Theorie der Störung besitzen werden, die durch einen Magnet einerseits in reinem Äther, andererseits in Äther hervorgerufen wird, der sich in einem von ponderabler Materie eingenommenen Raume befindet, wird es wahrscheinlich keine Schwierigkeit machen, eine vollkommen zufriedenstellende Erklärung der magneto-optischen Rotation zu geben, wie wir eine solche jetzt für die Chiro-Optik besitzen.

§ 232. Zum Schlusse wollen wir untersuchen, welche Änderung an der ursprünglich Maxwell-Sellmeierschen Mechanik der gewöhnlichen und der anomalen Dispersion vorzunehmen ist, wenn wir die Atomhypothese der Anhänge A und E und der Neunzehnten Vorlesung, §§ 162—168, anerkennen.

Im Anhang A ist zum Zwecke einer bestimmten Erläuterung vorübergehend die Annahme gemacht, daß die ungeheure Änderung der Ätherdichte in einem Atome von einer rein Boscovichschen Kraft herrührt, die auf den Äther in Richtungen wirkt, die durch den Mittelpunkt des Atoms gehen und die als eine Funktion des Abstandes variiert. Dies sieht keinen Vibrator und keine Vibratoren innerhalb des Atoms vor und läßt für die Erklärung molekularer Vibratoren nur solche molekulare Gruppen von Atomen zu, wie wir sie seit 50 Jahren in der kinetischen Theorie der Gase nach Clausius' unumstößlicher Theorie der spezifischen Wärmen mit Rücksicht auf die Energieverteilung zwischen fortschreitenden und andern als fortschreitenden Bewegungen der Molekeln besessen haben. Jetzt steht uns im Anhang E und in dessen Anwendungen, auf die in den §§ 162—168 der Neunzehnten Vorlesung hingewiesen ist, eine Grundlage für etwas zur Verfügung, was zu einer vollständigen Elektro-Äther-Theorie der Stokes-Kirchhoffschen Vibratoren<sup>1)</sup> in der Mechanik der Spektralanalyse und der Maxwell-Sellmeierschen Erklärung der Dispersion führt.

§ 233. Nach unserer neuen Theorie ist jedes einzelne Elektron<sup>2)</sup> in einem einelektronigen Atom und jede Gruppe von zwei, drei oder mehr Elektronen in einem mehrelektronigen Atom ein Vibrator, der in einer Lichtquelle von seinem Zusammenstoße mit andern Atomen Energie empfängt und in Wellen, die sich durch den umgebenden Äther bewegen, Energie ausstrahlt. Aber für jetzt beschäftigen wir uns nicht mit der Quelle, und indem ich diese letzte von unsern zwanzig Vorlesungen zu Ende führe, muß ich mich darauf beschränken, die Wirkung der Anwesenheit elektronischer Vibratoren im Äther auf die Geschwindigkeit des diesen durchsetzenden Lichtes zu ermitteln.

1) Vgl. Neunte Vorlesung S. 79 ff.

2) Ich hätte schon früher erwähnen sollen, daß der Verfasser unsere Elektronen Elektrionen nennt, was vielleicht zweckmäßiger und richtiger ist. D. H.

§ 234. Die „fundamentalen Arten“, deren Perioden wir in der Zehnten Vorlesung, S. 95, mit  $k, k_1, k_2 \dots$  bezeichnet haben, sind jetzt Schwingungsarten der Elektronen innerhalb eines festen Atoms, wenn der dieses Atom umgebende Äther und der in ihm befindliche Äther keine andre Bewegung besitzt, als die von den Schwingungen der Elektronen hervorgerufene. Es muß jedoch bemerkt werden, daß eine stationäre Bewegung des Atoms in dem von ihm eingenommenen Raume die Schwingungen der in dem Atom befindlichen Elektronen relativ zu diesem nicht beeinflussen würde.

§ 235. Zur Erläuterung wollen wir zunächst den einfachen Fall eines Atoms betrachten, in dem sich ein einziges Elektron befindet. Dann besteht nur gerade eine Schwingungsart, und ihre Periode ist

$$k = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{2\pi}{e} \sqrt{m \alpha^3}, \quad (199)$$

wenn mit  $\alpha$  der Radius des Atoms, mit  $e$  die Menge Harzelektrizität in einem Elektron und mit  $m$  ihre wirksame Masse bezeichnet wird, und  $c$  für  $e^2 \alpha^{-3}$  gesetzt ist. Dieses folgt, weil das Atom, da es ein Elektron besitzt, dieselbe Menge Glaselektrizität haben muß wie ein Elektron Harzelektrizität und demgemäß (Anhang E, § 4) die nach dem Mittelpunkte hin gerichtete Kraft, die ein im Abstände  $x$  vom Mittelpunkte festgehaltenes Elektron erleidet,  $e^2 \alpha^{-3} x$  ist; diese Größe wird in § 240 mit  $cx$  bezeichnet.

§ 236. Hierauf fassen wir eine Gruppe von  $i$  im Gleichgewichte befindlichen oder aus ihrer Gleichgewichtslage gestörten Elektronen in einem  $i$ -elektronigen Atom ins Auge. Die von dem Atom auf ein beliebiges von diesen Elektronen ausgeübte nach dem Mittelpunkte gerichtete Kraft ist  $ie^2 \alpha^{-3} D$ , wenn  $D$  seinen Abstand vom Mittelpunkte bezeichnet. Jetzt sei die Gruppe der Elektronen in gleichen parallelen Abständen,  $x$ , von ihren Gleichgewichtslagen verschoben. Parallele Kräfte, die sämtlich gleich  $ie^2 \alpha^{-3} x$  sind und auf die Elektronen wirken, halten sie im Gleichgewicht<sup>1)</sup>; und wenn man sie sich überläßt, werden sie in parallelen Linien hin- und herschwingen, sämtlich mit der nämlichen Periode

$$\frac{1}{\sqrt{i}} \frac{2\pi}{e} \sqrt{m \alpha^3}. \quad (200)$$

Dies ist demnach eine von den fundamentalen Schwingungsarten der Gruppe, und sie ist offenbar die Art längster Periode. So sehen wir, daß die Perioden der wichtigsten Schwingungsarten verschieden elektroniger Vibratoren den Quadratwurzeln aus den Kuben der Radien der Atome direkt und den Quadratwurzeln aus der Anzahl der Elektronen umgekehrt proportional sind, vorausgesetzt, daß in jedem Falle das Atom durch eine ganze Anzahl Elektronen elektrisch neutralisiert wird. Vgl. Anhang E, § 6.

§ 237. Ich schlage jetzt eine Annahme vor, die, da sie die Theorie der Quasiträgheitsbeladung von Äther, der sich durch einen von ponderabler Materie erfüllten Raum bewegt, wie sie im Anhang A weiter durchgeführt wird, bedeutend vereinfacht, die praktische Gleichheit der Starrheit des Äthers, gleichviel ob dieser Äther von ponderabler Materie erfüllt ist oder von solcher frei ist, vollkommen erklärt. Meine Annahme ist die, daß ein Elektron einen

1) Vgl. Anhang E, § 23.

so kleinen Radius hat, daß die Äthermenge in seiner Kondensations-sphäre (Neunzehnte Vorlesung, § 166) äußerst geringfügig ist im Vergleich mit der Menge ungestörten Äthers in einem dem Raume des kleinsten Atoms gleichen Raume.

Diese Annahme macht, in Verbindung mit den §§ 164, 166 der Neunzehnten Vorlesung, die Dichte des Äthers im ganzen Raume außerhalb der Verdichtungssphären der Elektronen äußerst nahe gleichförmig. Dies gilt sowohl für einen Raum, der von Atomen frei ist, als auch für einen solchen, der von dichtgedrängten, ja von übereinandergreifenden Atomen erfüllt ist; und die Kondensationssphären füllen nur einen sehr kleinen Teil des ganzen Raumes aus, auch dort, wo er von den dichtgedrängten Atomen mit vielen Elektronen sich besetzt zeigt. Der innerhalb der Verdichtungssphäre in der Umgebung eines jeden Elektrons stark verdichtete Äther kann größere oder geringere Starrheit als Äther von normaler Dichte besitzen, ohne darum die Übereinstimmung zwischen der normalen Starrheit des ungestörten Äthers und der wirksamen Starrheit des innerhalb des Atoms befindlichen Äthers merklich herabzumindern. Dies erscheint mir mit aller Wahrscheinlichkeit als die wahre Erklärung dessen, was jeder als eine der größten Schwierigkeiten in der mechanischen Theorie des Lichtes empfunden haben muß: die Gleichheit der Starrheit des Äthers innerhalb und außerhalb eines durchsichtigen Körpers.

§ 238. Die Kleinheit der Verdünnung des Äthers innerhalb eines Atoms und außerhalb der Verdichtungssphäre oder -sphären in der Umgebung seiner Elektronen setzt einen äußerst kleinen Beitrag zur wirksamen Trägheit schwingenden Äthers als Folge dieser Verdünnung voraus, einen so kleinen, daß ich vorschlage, ihn ganz außer acht zu lassen. So wird, wenn ein Atom vorübergehend seines Elektrons oder seiner Elektronen beraubt ist (wodurch es im höchstmöglichen Grade glaselektrisch geworden ist), Äther, der durch es hin- und herschwingt, denselben Trägheitswiderstand erleiden, wie wenn er nicht durch das Atom gestört würde. Das Vorhandensein des Atoms wird in keiner Weise durch den an derselben Stelle befindlichen Äther empfunden. Also soll die wirksame Trägheitsbeladung des Äthers, von der die Lichtbrechung herührt, praktisch durch die Elektronen herbeigeführt sein und nur wenig, wenn überhaupt bemerkbar, durch die Atome des durchsichtigen Körpers.

§ 239. Für den Augenblick mache ich die Annahme, daß ein Elektron keine Masse besitzt, das heißt, daß es frei von innerer Trägheit ist und nur wirksame Trägheit vermöge der kinetischen Energie aufweist, die seine stationäre Bewegung durch den unbewegten Äther begleitet. Dies ist in Wirklichkeit eine Energie relativer Bewegung und besteht nicht, wenn Elektron und Äther sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen. Vgl. Anhang A und Gleichung (203) des folgenden § 240.

§ 240. Wir kommen jetzt zu der Aufgabe über die Wellengeschwindigkeit und beginnen mit dem einfachsten Falle — nur ein Elektron in jedem Atom. Wir fassen Wellen einer  $x$ -Schwingung ins Auge, die längs  $y$  nach der folgenden Formel (203) fortschreitet. Wir nehmen ein Musteratom in der Wellenebene im Abstände  $y$  von der Ebene  $XOZ$  an. Das Atom wird durch die Ätherwellen nicht bewegt, während das Elektron in eine hin- und hergehende Schwingung durch den Mittelpunkt des Atoms versetzt wird.

Zur Zeit  $t$  sei  $x$  die Verschiebung des Elektrons, vom Mittelpunkte des

Atoms gerechnet, oder seine absolute Verschiebung, da wir für jetzt annehmen, daß das Atom vollkommen festliegt.

$\xi$  sei die Verschiebung des Äthers in der Umgebung des Atoms;

$\varrho$  die mittlere Dichte des Äthers innerhalb und in der Umgebung des Atoms, und zwar entsprechend unseren Annahmen, genau dieselbe wie die normale Dichte des ungestörten Äthers;

$n$  die Starrheit des Äthers innerhalb und in der Umgebung des Atoms, und zwar entsprechend unseren Annahmen sehr nahe dieselbe in jedem Punkte wie die Starrheit des ungestörten Äthers;

$N$  die Anzahl Atome in der Volumeneinheit;

$cx$  die elektrische Anziehung, die das Elektron vermöge seiner Verschiebung  $x$  nach dem Mittelpunkt des Atoms hin, dem es angehört, erfährt;  $m$  die wirksame Masse eines Elektrons;

$E$  ein Ätherwürfel, der gleich  $1/N$  der Volumeneinheit ist, und in sich den Mittelpunkt eines und nur eines Atoms enthält.

Dann ist die Bewegungsgleichung für  $E$ , multipliziert mit  $N^1$ )

$$\varrho \frac{d^2 \xi}{dt^2} = n \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - Ncx \quad (201)$$

und die Bewegungsgleichung für das in ihm befindliche Elektron

$$m \frac{d^2 (x - \xi)}{dt^2} = -cx. \quad (202)$$

§ 241. Die Lösung dieser beiden Gleichungen für den regelmäßigen Verlauf einer Wellenbewegung hat die Form

$$\xi = C \sin \omega \left( t - \frac{y}{v} \right); \quad x = C' \sin \omega \left( t - \frac{y}{v} \right), \quad (203)$$

wo  $\omega$  gegeben ist. Unsere vorliegende Aufgabe ist die, die beiden Unbekannten  $C/C'$  (oder  $\xi/x$ ) und  $v$  zu finden. Aus (203) ersehen wir, daß symbolisch ist

$$\frac{d^2}{dt^2} = -\omega^2; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}. \quad (204)$$

Hierdurch gehen (201) und (202) über in

$$\left( \varrho - \frac{n}{v^2} \right) \xi = \frac{Nc}{\omega^2} x = Nm (x - \xi). \quad (205)$$

woraus wir finden

$$\frac{x}{\xi} = \frac{m\omega^2}{m\omega^2 - c} = \frac{-k^2}{\tau^2 - k^2} \quad (206)$$

und

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\varrho}{n} + \frac{Nm}{n} \left( 1 - \frac{x}{\xi} \right) = \frac{\varrho}{n} + \frac{Nm}{n} \frac{\tau^2}{\tau^2 - k^2}. \quad (207)$$

1) Im nachfolgenden ist von allen elektromagnetischen Wirkungen abgesehen, lediglich die elektrostatischen sind berücksichtigt. Wem dieses gegenüber den modernen Theorien als ein großer Mangel erscheinen sollte, der kann die Gleichungen ja leicht ergänzen. Ich möchte aber für mich selbst hervorheben, daß mir die elektromagnetischen Wirkungen sich bewegender Elektronen, allein infolge der Bewegung, sehr problematisch erscheinen. D. H.

Die zweiten Darstellungen sind dabei eingeführt auf Grund der Bezeichnung

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}; \quad k = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}, \quad (208)$$

wo mit  $\tau$  die Periode der Wellen und mit  $k$  die Periode eines Elektrons bezeichnet ist, das vom Mittelpunkte seines Atomes verschoben ist, und innerhalb desselben in Schwingungen verharret, während der umgebende Äther vollkommen in Ruhe bleibt, außer für die nach außen fortschreitenden Wellen, durch die seine Energie in einem sehr kleinen verhältnismäßigen Betrage für jede Periode fortgeführt wird, vielleicht nicht mehr als im Betrage  $10^{-6}$ . Es ist klar, je größer die Wellenlänge der austretenden Wellen im Vergleich zu dem Radius der Verdichtungssphäre des schwingenden Elektrons ist, um so kleiner ist der verhältnismäßige Energieverlust in jeder Periode. (Vgl. die zusammengesetztere Aufgabe, bei der Wellen mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten austreten, wie sie in den Entwicklungen zur Vierzehnten Vorlesung S. 151 bis 176 bearbeitet ist. Vgl. besonders die Beispiele auf S. 173 ff.)

§ 242. Wir sehen uns jetzt wieder die Zeichnung der Zwölften Vorlesung S. 116 an, die unsern zusammengesetzten molekularen Vibrator der Ersten Vorlesung S. 17 darstellt, wenn er sich auf eine einzige freie Masse  $m$  beschränkt, die durch Federn mit einer starren Schale, der Grenzfläche einer gedachten sphärischen Höhlung im Äther, verbunden ist. Mit Rücksicht auf diese frühere Zeichnung werde jetzt  $x$  genannt, was auf S. 116 durch  $\xi - x$  dargestellt wurde, also die Verschiebung des Äthers gegen  $m$ . So gibt in dem damaligen zur Erläuterung erdachten Mechanismus  $cx$  eine resultierende Kraft der auf  $m$  wirkenden Federn: in der neuen Vorstellung einer elektro-ätherischen Wirklichkeit bezeichnet  $cx$  einfach die elektrische Anziehung des Atomes auf sein Elektron  $m$ , wenn dieses in einen Abstand  $x$  von seinem Mittelpunkte verschoben ist. Bei dem früheren Mechanismus sind es die Stöße, die die Federn auf den Äther ausüben,\* die ihren auf  $m$  wirkenden Kräften (vermöge deren  $m$  seinerseits auf den Äther einwirkt) gleich und entgegengesetzt gerichtet sind. Bei der neuen elektrischen Bezeichnungsweise wirkt  $m$  direkt auf den Äther im einfachen Verhältnisse zur Beschleunigung der relativen Bewegung ein. Es wirkt so, da vermöge der Trägheit des Äthers, wenn  $m$  eine relative Beschleunigung empfängt, der Äther vor  $m$  weniger dicht ist als hinter  $m$ , und demnach die Resultante der Anziehung von  $m$  auf ihn nach hinten gerichtet ist.

Es ist interessant zu sehen, daß alle Formeln der §§ 240, 241 (mit der neuen Bedeutung von  $x$  in dem früheren mechanischen Problem) ebenso auf den alten wie auf den neuen Gegenstand anwendbar sind, und zu erkennen, daß die Lösung der Aufgabe in Gliedern der Perioden in beiden Fällen die nämliche ist, ungeachtet der ungeheuren Verschiedenheit zwischen den künstlichen und nicht wirklichen Einzelheiten des im Jahre 1884ersonnenen und durch Modelle erläuterten Mechanismus und den wahrscheinlich wirklichen Einzelheiten über Äther, Elektrizität und ponderable Materie, wie sie in der Zeit von 1900 bis 1903 erdacht sind.

§ 243. Die interessante Frage über die Energie, auf die in der Zehnten Vorlesung in den Zeilen der S. 89 hingewiesen ist, wird immer interessanter, wenn wir ihren wirklichen vierfachen Charakter zu verstehen glauben, als

- I. kinetische Energie reinen Äthers,
- II. potentielle Elastizitätsenergie des Äthers,
- III. elektrische Potentialenergie gegenseitiger Abstoßungen von Elektronen und Anziehungen zwischen Elektronen und Atomen,
- IV. potentielle Energie einer Anziehung, die die Elektronen auf den Äther ausüben.<sup>1)</sup>

Der Gegenstand ist streifend und unvollständig im Anhang C behandelt. Er sollte, wenn voll ausgearbeitet, eine mechanische Theorie der Phosphoreszenz enthalten. Für jetzt muß ich ihn mit Bedauern verlassen, um die Vorbereitung zur Veröffentlichung dieses Buches zu ermöglichen.

---

<sup>1)</sup> Es würde also die rein elektromagnetische Energie fehlen, s. Anm. S. 389. D. H.

## Anhang A.

### Über die Bewegung in einem unendlichen elastischen Festkörper, welche durch die Bewegung eines in seiner Substanz befindlichen Körpers verursacht wird, der auf den Äther allein mit Anziehung und Abstoßung wirkt.<sup>1)</sup>

§ 1. Die Überschrift der vorliegenden Mitteilung bezeichnet eine bloße Aufgabe der abstrakten mathematischen Mechanik, ohne jede Andeutung der Idee einer physikalischen Anwendung. Für eine rein mathematische Zeitschrift mag dies angemessen sein, da der Gegenstand sicher interessant ist, sowohl seiner selbst wegen als in seiner Beziehung zu Wellen und Schwingungen. Für mich liegt der Grund, mich mit dem Gegenstand zu beschäftigen und ihn der Öffentlichkeit vorzulegen, darin, daß er zu einer annehmbaren Erklärung der größten bis jetzt auftretenden Schwierigkeit in der Wellentheorie des Lichtes führt — nämlich der Bewegung ponderabler Materie durch einen unendlichen, von einem elastischen Festkörper eingenommenen Raum.<sup>2)</sup>

§ 2. In Ansicht des darzulegenden Gegenstandes und der Kürze wegen will ich das Wort Atom gebrauchen zur Bezeichnung einer gedachten Substanz, die einen gegebenen Teil festen Raumes einnimmt und auf den in ihr und in ihrer Umgebung befindlichen Äther nach der alten im achtzehnten Jahrhundert gebildeten Vorstellung einer Anziehung und Abstoßung einwirkt. Damit soll gesagt sein, daß jedes unendlich kleine Volumen  $A$  des Atoms auf jedes unendlich kleine Volumen  $B$  des Äthers mit einer in der die Mitten dieser beiden Volumen verbindenden Geraden  $PQ$  verlaufenden Kraft einwirkt, die gleich ist

$$Af(P, PQ)qB, \quad (1)$$

wo mit  $q$  die Dichte des bei  $Q$  befindlichen Äthers und mit  $f(P, PQ)$  eine Größe bezeichnet wird, die von der Lage der Punktes  $P$  und von dem Abstände  $PQ$  abhängt. Die ganze von dem Atom auf die bei  $Q$  befindliche

---

1) Dem Phil. Mag. vom Verfasser mitgeteilt, nachdem er die Arbeit bereits am 16. Juli 1900 vor der Royal Society of Edinburgh und im August 1900 vor dem „Congrès“ der Pariser Ausstellung vorgetragen hatte.

2) Die so genannte „elektromagnetische Theorie des Lichtes“ schneidet diese Grundlage von der alten Wellentheorie des Lichtes nicht weg. Sie fügt zu der ursprünglichen Theorie ein ungeheures Gebiet von transzendentelem Interesse und von entsprechender Bedeutung hinzu; sie fordert von uns nicht so sehr eine Erklärung aller Erscheinungen von Licht und strahlender Wärme durch transversale Schwingungen eines als Äther bezeichneten elastischen Festkörpers, sondern ebenso das Einbegreifen elektrischer Ströme, des permanenten Magnetismus von Stahl und Magneteisen, von magnetischer Kraft und elektrostatischer Kraft in eine umfassende Theorie des Äthers.



Äthermenge  $\varrho B$  ausgeübte Kraft ist die Resultante aller der nach (1) für alle unendlich kleinen Teile  $A$ , in die wir uns das ganze Volumen des Atoms geteilt denken, berechneten Kräfte.

§ 3. Nach der Lehre vom Potential in der allgemein bekannten mathematischen Theorie der Anziehung finden wir die rechtwinkligen Komponenten dieser Resultante, wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} X &= \varrho B \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z); & Y &= \varrho B \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y, z); \\ Z &= \varrho B \frac{\partial}{\partial z} \varphi(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wo mit  $x, y, z$  Koordinaten von  $Q$  bezeichnet werden, die auf (in bezug auf das Atom feste) Geraden bezogen sind, und  $\varphi$  eine Funktion bedeutet — wir wollen sie das von dem Atom herrührende Potential bei  $Q$  nennen — die durch Summation nach der Regel gefunden wird:

$$\varphi = \iiint_A \int_{PQ}^{\infty} dr f(P, r); \quad (3)$$

hier bezeichnet  $\iiint_A$  eine Integration über das Volumen des Atoms.

§ 4. Die Bezeichnung (1) ist eingeführt, um anzudeuten, daß es dem Wesen nach keine Einschränkung bezüglich des zulässigen Kraftgesetzes gibt; es wird aber nichts an Allgemeinheit, soweit sie mir für jetzt praktisch wünschenswert erscheint, verloren, wenn wir fernerhin annehmen, daß es sich um das Newtonsche Gesetz des umgekehrten Quadrats der Entfernung handelt. Dann wird

$$f(P, PQ) = \frac{\alpha}{PQ^2}, \quad (4)$$

und demgemäß

$$\int_{PQ}^{\infty} dr f(P, r) = \frac{\alpha}{PQ}, \quad (5)$$

wo  $\alpha$  ein Koeffizient ist, der für den Punkt  $P$  des Atoms die Intensität seiner anziehenden Eigenschaft für Äther charakterisiert. Macht man von (5) in (3) Gebrauch, so findet man

$$\varphi = \iiint_A \frac{\alpha}{PQ}; \quad (6)$$

auch jetzt bleiben die Komponenten der resultierenden Kraft durch (2) ausgedrückt. Wir dürfen  $\alpha$  sowohl positiv wie negativ annehmen (positiv für Anziehung und negativ für Abstoßung); und in der Tat setzen wir in unserer ersten und einfachsten Erläuterung der Aufgabe voraus, daß diese Größe in manchen Teilen des Atoms positiv und in andern Teilen negativ ist, und zwar in solchen Beträgen, daß die Bedingung erfüllt wird

$$\iiint_A \alpha = 0. \quad (7)$$

§ 5. Als erste und einfachste Erläuterung nehmen wir an, das Atom sei kugelförmig, mit dem Radius eins, und habe in sich konzentrische sphärische

Flächen gleicher Dichte. Dies ergibt für die Richtung der resultierenden Kraft auf eine beliebige Partikel des Äthers, gleichviel ob sie sich innerhalb oder außerhalb der sphärischen Grenzfläche des Atoms befindet, eine durch den Mittelpunkt des Atoms gehende Gerade. Wir dürfen jetzt setzen  $A = 4\pi r^2 dr$ . Die weitere Annahme für (7) kann hiernach dargestellt werden durch

$$\int_0^1 r^2 \alpha dr = 0; \quad (8)$$

und dies hat, da wir jetzt voraussetzen, daß die Kräfte zwischen jeder Partikel des Atoms und jeder Partikel des Äthers dem Newtonschen Gesetze gehorchen, zur Folge, daß die Resultante der Anziehungen und Abstoßungen für jede außerhalb der Grenzfläche des Atoms befindliche Partikel des Äthers Null ist. Um den Fall möglichst zu vereinfachen, wollen wir weiter voraussetzen, daß die Verteilung positiver und negativer Dichte des Atoms und das Gesetz der Kompressibilität des Äthers derartig sind, daß die mittlere Dichte des Äthers innerhalb des Atoms gleich der ungestörten Dichte des außerhalb befindlichen Äthers ist. So rufen die Anziehungen und Abstoßungen des Atoms in Geraden, die durch dessen Mittelpunkt gehen, in verschiedenen Abständen von diesem Mittelpunkte Verdichtungen und Verdünnungen des Äthers hervor, ohne daß dadurch die Gesamtmenge des innerhalb der Grenzfläche befindlichen Äthers geändert wird; und demgemäß rufen sie auch keine Störung des außerhalb befindlichen Äthers hervor. Um etwas Bestimmtes im Auge zu haben und die Anwendung auf die vorgetragene Hypothese zur Erklärung des Brechungsvermögens gewöhnlicher isotroper durchsichtiger Körper, wie Wasser oder Glas, zu beleuchten, habe ich einen besonderen Fall gewählt, in dem die Verteilung des Äthers im Ruhezustande innerhalb des Atoms durch die folgende Formel ausgedrückt ist

$$r^3 = \frac{r'^3}{1 + K(1 - r')^2}, \quad (9)$$

und ihn teilweise in der Zeichnung (Fig. 82) S. 396 und in Tabellen berechneter Zahlen dargelegt. In dieser Formel bedeutet  $r'$  der ungestörte Abstand einer Partikel des Äthers vom Mittelpunkte des Atoms, deren Abstand unter dem Einflusse der anziehenden und abstoßenden Kräfte nach erfolgtem Gleichgewicht dann  $r$  ist. Nach dieser Bezeichnung ist  $\frac{4\pi}{3} \delta(r^3)$  das gestörte Volumen einer sphärischen Schale des Äthers, wenn im ungestörten Zustande ihr Radius  $r'$ , ihre Dicke  $\delta r'$  und ihr Volumen  $\frac{4\pi}{3} \delta(r'^3)$  ist. Wenn wir die gestörte bzw. ungestörte Dichte des Äthers mit  $\varrho$  und mit 1 bezeichnen, finden wir demgemäß

$$\varrho \delta(r^3) = \delta(r'^3) \quad (10)$$

und also nach (9)

$$\varrho = \frac{3[1 + K(1 - r')^2]^2}{3 + K(3 - r')(1 - r')}. \quad (11)$$

Hieraus folgt, daß  $1 + K$  die Dichte des Äthers im Mittelpunkte des Atoms gibt. Wenn die Störung für Brechungsvermögen von der Größenordnung desjenigen der Luft oder anderer Gase oder des Wassers oder des

Glasen oder anderer durchsichtigen Flüssigkeiten oder isotropen Festkörper ausreichen soll, finde ich nach der in § 16 erläuterten mechanischen Theorie, daß  $K$  für einzelne Fälle etwa gleich 100 und für andere beträchtlich größer sein muß. Ich habe dementsprechend  $K = 100$  gesetzt und danach die folgenden Tabellen berechnet und die Figur gezeichnet.

Tabelle I.

Kol. 1	Kol. 2	Kol. 3	Kol. 3'	Kol. 4	Kol. 5
$r'$	$\frac{r'^3}{r^3} = 1 + K(1 - r')^3$	$r$	$r' - r$	$\varrho$	$(\varrho - 1)r^2$
0,00	101,0	0,000	0,000	101,0	0,000
0,05	91,25	0,011	0,039	88,1	0,011
0,10	82,0	0,023	0,077	75,3	0,039
0,20	65,0	0,049	0,151	55,8	0,132
0,30	50,0	0,082	0,218	39,1	0,256
0,40	37,0	0,120	0,280	25,8	0,357
0,50	26,0	0,169	0,331	15,8	0,423
0,60	17,0	0,233	0,367	8,76	0,423
0,70	10,0	0,325	0,375	4,17	0,338
0,80	5,0	0,468	0,332	1,60	0,131
0,85	3,25	0,578	0,272	0,90	— 0,033
0,90	2,00	0,715	0,185	0,50	— 0,256
0,95	1,25	0,865	0,085	0,35	— 0,486
0,96	1,16	0,897	0,063	0,36	— 0,515
0,97	1,09	0,928	0,042	0,39	— 0,525
0,98	1,04	0,957	0,023	0,46	— 0,495
0,99	1,01	0,982	0,008	0,61	— 0,376
1,00	1,00	1,000	0,000	1,00	0,000

Tabelle II.

Kol. 1	Kol. 2	Kol. 3	Kol. 4	Kol. 5
$r$	$r'$	$r' - r$	$\varrho$	$(\varrho - 1)r^2$
0,00	0,000	0,000	101,0	0,000
0,02	0,091	0,071	78,5	0,030
0,04	0,169	0,129	64,4	0,191
0,06	0,235	0,175	49,6	0,175
0,08	0,297	0,217	39,5	0,246
0,10	0,351	0,251	31,8	0,308
0,20	0,551	0,351	11,8	0,432
0,30	0,677	0,377	5,00	0,360
0,40	0,758	0,358	2,46	0,234
0,50	0,816	0,316	1,34	0,085
0,60	0,858	0,258	0,82	— 0,065
0,70	0,895	0,195	0,53	— 0,231
0,80	0,929	0,129	0,38	— 0,397
0,90	0,961	0,061	0,36	— 0,518
1,00	1,000	0,000	1,00	0,000

§ 6. Die Zeichnung (Fig. 82) soll uns dazu verhelfen, die Ätherverschiebung und die aus ihr sich ergebende Dichtigkeitsverteilung innerhalb des Atoms zu verstehen. Der mit 1,00 bezeichnete Kreishogen deutet einen sphärischen Teil der Grenzfläche des Atoms an; die kürzeren mit 0,95; 0,90 ...

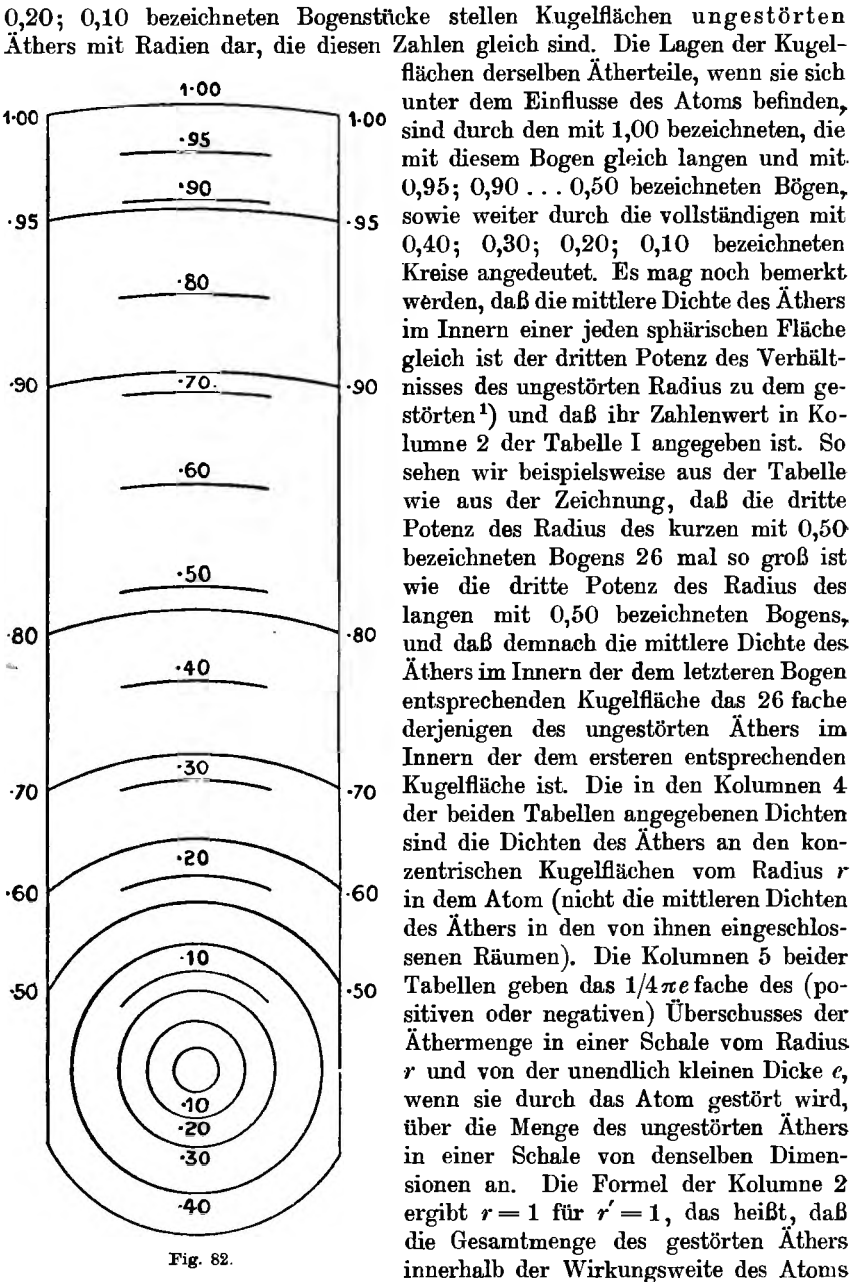


Fig. 82.

dieselbe ist wie die ungestörten Äthers in einer Kugel von demselben Radius. Demnach muß die Summe der nach Kolumne 5 für aufeinanderfolgende Werte

1) Nach Formel (10) und (9).

von  $r$ , mit unendlich kleinen Differenzen, zwischen  $r = 0$  und  $r = 1$  berechneten Äthermengen gleich Null sein. Ohne diese Größen für kleinere Differenzen zu berechnen, als die sind, die sich in den beiden Tabellen angeben finden, erhält man eine annähernde Bestätigung dieses Resultats, indem man, wie in Fig. 83, eine Kurve zur Darstellung der Größe  $(\rho - 1)r^2$  durch die Punkte legt, für die ihr Wert in einer der beiden Tabellen angegeben ist, und die Flächen auf der positiven und der negativen Seite der Abszissenachse mißt. Indem ich die Kurve auf Papier (im vierfachen Maßstabe der beigegebenen Zeichnung) auftrug, das Quadrate von 0,5 und 0,1 Zoll vorgedruckt enthielt, und die kleinsten Quadrate und Teile von Quadraten in den beiden

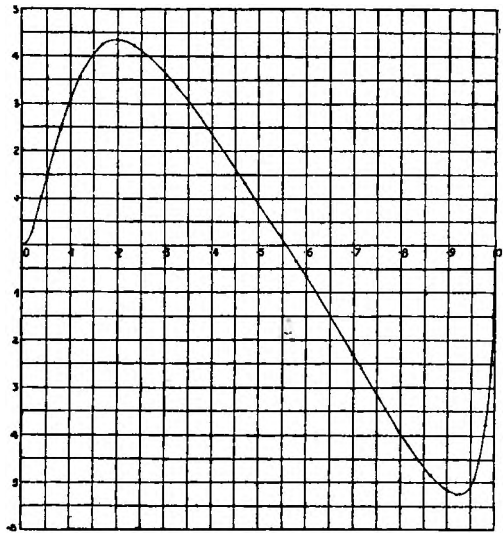


Fig. 83.

Flächen zählte, habe ich festgestellt, daß diese Flächen mit einem Fehler von weniger als 1 Prozent jeder Summe einander gleich waren; diese Annäherung ist so gut, wie sie von den in den Tabellen angegebenen numerischen Annäherungen und der in der Zeichnung erreichten Genauigkeit erwartet werden kann.

§ 7. In der Tabelle I (Argument  $r'$ ) sind alle Größen für gewählte Werte von  $r'$  und in Tabelle II für gewählte Werte von  $r$  angegeben. Die Rechnungen für Tabelle I sind rein algebraisch und erfordern außer elementar arithmetischen Operationen nur das Ausziehen von Kubikwurzeln. Um die in der Tabelle II angegebenen Resultate in ihrer Abhängigkeit von gegebenen Werten von  $r$  zu berechnen, braucht man die Lösung einer kubischen Gleichung. Sie wurden in Wirklichkeit mittels einer Kurve gefunden, die nach den Zahlen der Kolumne 3, Tabelle I, die  $r$  in Abhängigkeit von  $r'$  feststellt, gezeichnet war. Die Zahlen in Kolumne 2 der Tabelle II, die für gewählte Werte von  $r$  die entsprechenden Werte von  $r'$  angibt, wurden der Kurve entnommen; und wir können verifizieren, daß sie angenähert gleich den Wurzeln der am Kopfe der Kolumne 2 der Tabelle I angegebenen Gleichung sind, wenn diese als eine kubische Gleichung für  $r'$  mit irgendwelchen gegebenen Werten von  $r$  und  $K$  aufgefaßt wird.

Nimmt man beispielsweise  $r' = 0,929$  an, so findet man durch Rechnung  $r = 0,811$ ,

"	"	"	$r' = 0,816$	"	"	"	"	"	"	$r = 0,498$ ,
"	"	"	$r' = 0,677$	"	"	"	"	"	"	$r = 0,301$ ,
"	"	"	$r' = 0,091$	"	"	"	"	"	"	$r = 0,0208$ ,

während wir erhalten müßten bzw.  $r = 0,8; 0,5; 0,3; 0,02$ . Diese Annäherungen sind für unsern vorliegenden Zweck hinreichend gut.

§ 8. Die Zeichnung Fig. 83 ist interessant, indem sie uns zeigt, wie mit den soweit abweichenden Dichten von 0,35 bis 101 die ganze Äthermasse innerhalb des Atoms zwischen den Schalen gleicher Dichte verteilt ist. Wir sehen in Verbindung mit den Zahlen in Spalte 4 der Tabellen, daß vom Mittelpunkt des Atoms bis zum Radius 0,56 die Dichte fällt von 101 bis 1. Die Größe  $(\varrho - 1)r^2$  sinkt, von  $r = 0,56$  bis  $r = 1$ , bis zum negativen Betrage 0,525 bei  $r = 0,93$ , um dann bis 0 zu steigen bis  $r = 1$ . In der Tat liegt der Ort geringster Dichte innerhalb desjenigen Radius  $r$ , für den  $(\varrho - 1)r^2$  ein Minimum hat. Diese geringste Dichte ist, wie aus den Kolonnen 4 und 3 der Tabelle I und den Kolonnen 4 und 1 der Tabelle II zu ersehen, gleich etwa 0,35 und findet sich bei etwa  $r = 0,87$  vom Mittelpunkte des Atoms.

§ 9. Wir wollen jetzt voraussetzen, unser Atom werde in einem von Äther erfüllten Raume in Bewegung gesetzt und werde in Bewegung gehalten mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit  $v$ , die wir zuerst als unendlich klein im Vergleich mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen gleichbleibender Dichte<sup>1)</sup> in einem Äther voraussetzen, der durch keine andere Substanz gestört wird als durch die jenes Atoms. Die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn um die Sonne, die ja etwa 1/10000 der Lichtgeschwindigkeit beträgt, ist klein genug, um für die relative Bewegung von Äther und den die Erde bildenden Atomen kinematische und mechanische Resultate zu liefern, die nahe mit der gemachten Voraussetzung übereinstimmen. Hiernach ist die Lage einer jeden Partikel des Äthers in jedem Augenblicke dieselbe, wie wenn das Atom sich in Ruhe befände, und das Auffinden der im Äther durch die Bewegung des Atoms hervorgerufenen Bewegung ist eine rein kinematische Aufgabe, für die eine leichte graphische Lösung in der Weise gefunden wird, daß man in einer Zeichnung die so bestimmten sukzessiven Lagen für eine beliebige Partikel des Äthers, entsprechend den Lagen des Atoms zu den aufeinanderfolgenden Zeitpunkten, markiert, mit hinreichend kleinen Zwischenräumen zwischen diesen, so daß man deutlich den Weg und die sich ändernde Geschwindigkeit der Partikel klarlegt.<sup>2)</sup>

§ 10. Als Beispiel betrachten wir Fig. 84, in der ein halber Umfang des Atoms in dem mittleren Moment der Zeit, die wir in Betracht ziehen wollen, durch einen Halbkreis  $C_{20}AC_0$  mit dem Durchmesser  $C_0C_{20}$ , der zwei Längeneinheiten gleich ist, dargestellt wird. Wir nehmen an, der Mittelpunkt des Atoms bewege sich von rechts nach links auf der Geraden  $C_0C_{20}$  mit der Geschwindigkeit 0,1, indem wir als Zeiteinheit die Zeit wählen, in der 1/10 des Radius durchsetzt wird. Wenn wir die Zeit von dem Augenblicke ab zählen, in dem der Mittelpunkt sich in  $C_0$  befindet, dann sind so die Zeiten, in denen er sich in  $C_2, C_5, C_{10}, C_{18}, C_{20}$  aufhält, 2, 5, 10, 18, 20. Es sei  $Q'$

1) Das heißt Wellen transversaler Schwingung, da dies die einzige Wellenart in einem isotropen Festkörper ist, in der jeder Teil des Festkörpers während der Bewegung sein Volumen ungeändert behält. Vgl. Phil. Mag., Mai, August und Oktober 1899.

2) Indem nämlich die Ätherpartikel in die neue, entsprechend der Ätherverteilung, in ihre Lage, z. B. nach Formel (9), allmählich hineingezogen wird. Übrigens handelt es sich wohl um die wirkliche Bewegung der Äthertheilchen, nicht um die Ausbreitung der Bewegung. Aber auch die Ätheroszillationen gehen noch sehr rasch vor sich, wenn auch vielleicht nur  $\frac{1}{30}$  so schnell wie ihre Ausbreitung.  
D. H.

die ungestörte Lage einer Ätherpartikel vor dem Zeitpunkte 2, in dem das Atom an sie herankommt, und nach dem Zeitpunkte 18, in dem es sie verläßt. Dies schließt ein, daß  $Q'C_2 = Q'C_{18} = 1$  und  $C_2C_{10} = C_{10}C_{18} = 0,8$  und demgemäß  $C_{10}Q' = 0,6$  ist. Die Lage der Ätherpartikel, die sich im ungestörten Zustande bei  $Q'$  befindet, wird für einen beliebigen Zeitpunkt  $t$ , in dem der Mittelpunkt des Atoms sich in  $C$  aufhält, folgendermaßen gefunden:

Man mache  $C_0C = t/10$ , ziehe  $Q'C$ , und indem man diese Größe mit  $r'$  bezeichnet, suche man  $r' - r$  nach (9) oder entnehme diese Differenz der Tabelle I oder II; endlich nehme man auf  $Q'C$  das  $Q'Q = r' - r$ . Dann ist  $Q$  die Lage der Partikel, deren ungestörte Lage  $Q'$  ist, zur Zeit  $t$ . Die Zeichnung gibt die Konstruktion für  $t = 2, t = 5$  und  $t = 18$  an. Die Lagen zu den Zeiten 2, 3, 4, 5, . . . , 15, 16, 17, 18 sind auf der geschlossenen Kurve, die eine Spitze in  $Q'$  hat, durch Striche angedeutet, die mit 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bezeichnet sind; diese Kurve wurde gefunden, indem man eine stetig sich krümmende

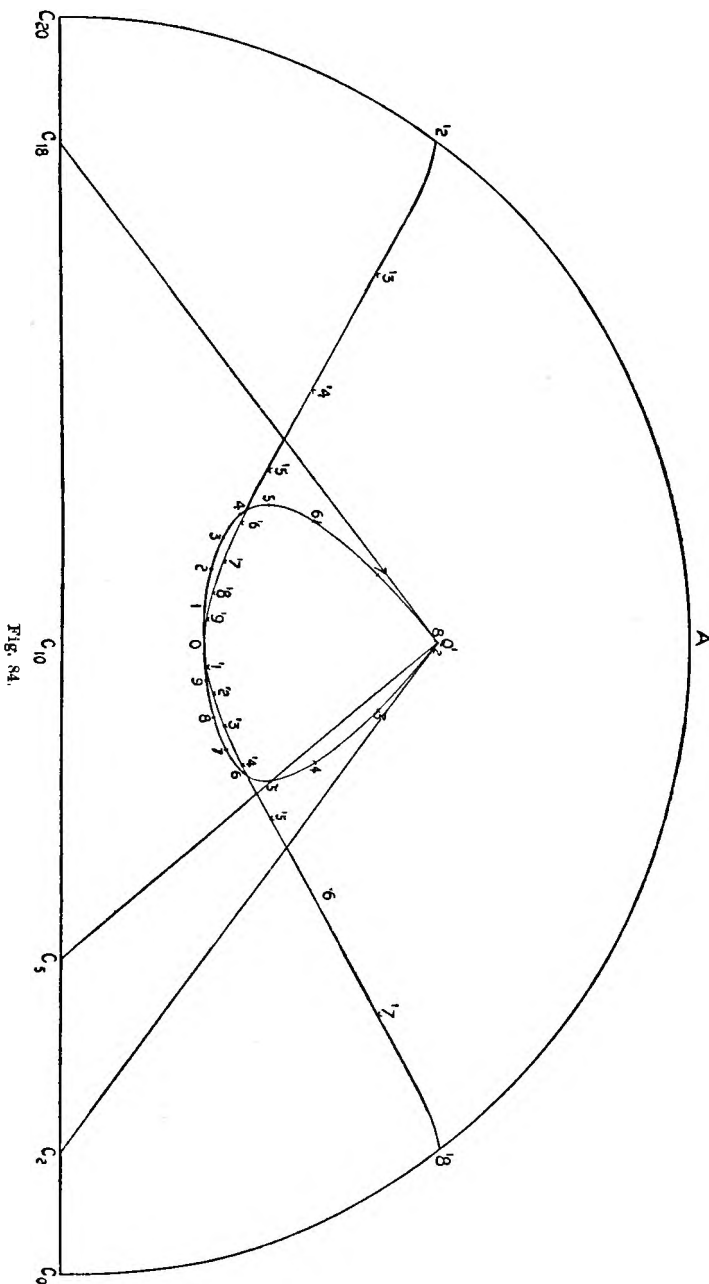


Fig. 84.

Linie durch jene Punkte leicht legte. Diese Kurve, die wir der Kürze wegen die Bahn der Partikel nennen werden, berührt offenbar die Geraden  $Q'C_2$  und  $Q'C_{18}$ . Beachtet man die Formel (9), so erkennt man, daß die Geschwindigkeit der Partikel in den Zeiten, in denen sie  $Q'$  verläßt und an diesen Punkt zurückgelangt, Null ist. Fig. 85 gibt die besondere Bahn der Fig. 84 und neun andere nach demselben Verfahren gezeichnete Bahnen wieder. In allen zehn Kurven sind die Bahnen von zehn Partikeln dargestellt, deren ungestörten Örter in einer geraden Linie, unter einem rechten Winkel gegen die Bewegungsrichtung des Mittelpunktes des Atoms in Abständen 0; 0,1; 0,2; . . . , 0,9 von ihr liegen. Alle diese Partikel liegen zur Zeit 10 wiederum in einer Geraden; diese Zeit wollen wir die Zeit der Bahnmitte jeder Partikel nennen. Die auf den rechten Hälften der Bahnen angegebenen Zahlen sind Zeiten, die vom Nullpunkte unserer Zählung an gerechnet sind; die Zahlen 1, 2, 3 . . . auf der linken Seite entsprechen den Zeiten 11, 12, 13 . . . unserer bisherigen Zählung, sind also die Zeiten 1, 2, 3 . . . nach dem Durchgange durch die Bahnmitte. Linien, die die Bahnen in den Punkten 1, 2, 3 auf der linken Seite schneiden, geben die gleichzeitigen Lagen der zehn Partikel zu den Zeiten 1, 2, 3 hinter den Bahnmitte an. Die von Punkt 4 durch sieben von den gekrümmten Bahnen gelegte Linie bezeichnet für die Zeit 4 hinter der Bahnmitte die gleichzeitige Lage von acht Partikeln, deren Lagen im ungestörten Zustand 0, 0,1; . . . ; 0,7 sind. Man beachte übrigens, daß die Bahn der ersten von diesen zehn Partikeln eine gerade Linie ist.

§ 11. Wir haben so in § 10 eine der beiden durch unsere Aufgabe gestellten kinematischen Fragen beantwortet: nämlich die, die Bahn einer Ätherpartikel gegenüber dem als nicht bewegt betrachteten umgebenden Äther zu ermitteln, wenn sie durch ein bewegtes Atom gestört wird. Die andere Aufgabe, den Weg in dem als fest vorausgesetzten Atom zu finden, wenn angenommen wird, daß der Äther sich im ganzen Raume außerhalb des Atoms gleichförmig in parallelen Linien bewegt, wird leicht in folgender Weise gelöst: Wir gehen auf die Figur 84 zurück und setzen jetzt voraus, daß nicht, wie in § 10, das Atom sich von rechts nach links mit der Geschwindigkeit 0,1 bewegt und der außerhalb desselben befindliche Äther in Ruhe verharret, sondern daß das Atom ruht und der außerhalb desselben befindliche Äther sich von links nach rechts mit der Geschwindigkeit 0,1 bewegt. Es sei '2, '3, '4, '5, '6, '7, '8, '9, 0, '1, '2, '3, '4, '5, '6, '7, '8 die Bahn einer Ätherpartikel durch das Atom hindurch, die durch siebzehn Punkte bezeichnet ist, die denselben nicht gestrichelten Ziffern entsprechen, die die Bahn der gleichen Partikel bei der ersten Annahme bezeichnen. Bei beiden Annahmen ist die Lage der Ätherpartikel zur Zeit 10, gerechnet von dem ursprünglichen Zeitanfang (§ 10), mit 0 bezeichnet. Für die Zeiten 11, 12, 13 usw. sind die Lagen der Partikel bei der ersten Annahme mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 auf der linken Hälfte der Bahn bezeichnet. Die Lagen derselben Partikel bei der jetzigen Annahme werden gefunden, wenn man von den Punkten 1, 2, 3, . . . , 7, 8 parallele Linien 1'1, 2'2, 3'3, . . . 7'7, 8'8 von der Länge 0,1; 0,2; 0,3; . . . ; 0,7; 0,8 des Radius des Atoms, nämlich unserer Längeneinheit, nach rechts zieht. So finden wir die zweite Hälfte des Weges der Partikel in dem Atom; die erste Hälfte ist ihr gleich und ähnlich und liegt in der linken Seite des Atoms. Wendet man dasselbe Verfahren auf jede von den 10 in Fig. 85 gezeichneten Bahnen und auf die 9 Bahnen von Partikeln an,



deren Abstände von der Mittelpunktslinie auf der andern Seite im ungestörten Zustande 0,1; 0,2 ... 0,9 sind, so finden wir die in Fig. 86 (S. 402) angegebene Reihe Stromlinien.<sup>1)</sup> Die Punkte auf diesen Linien geben die Lagen der Partikel zu den Zeiten 0, 1, 2, ... 19, 20 unserer ursprünglichen Zählung an (§ 10).

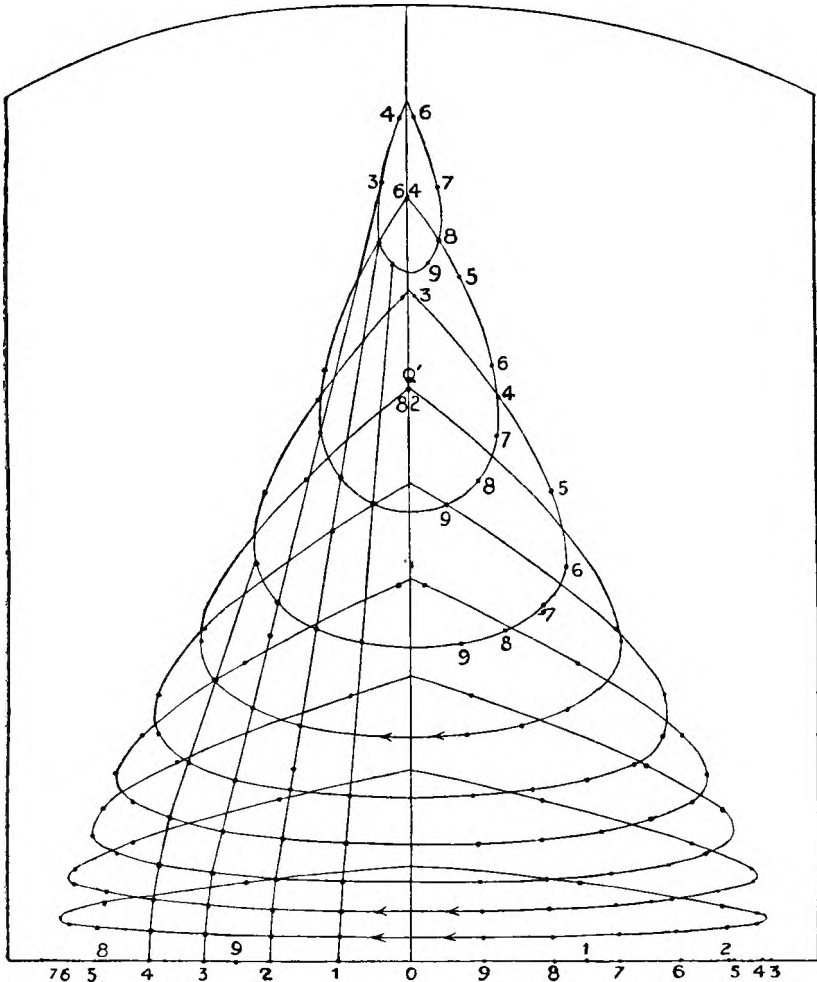
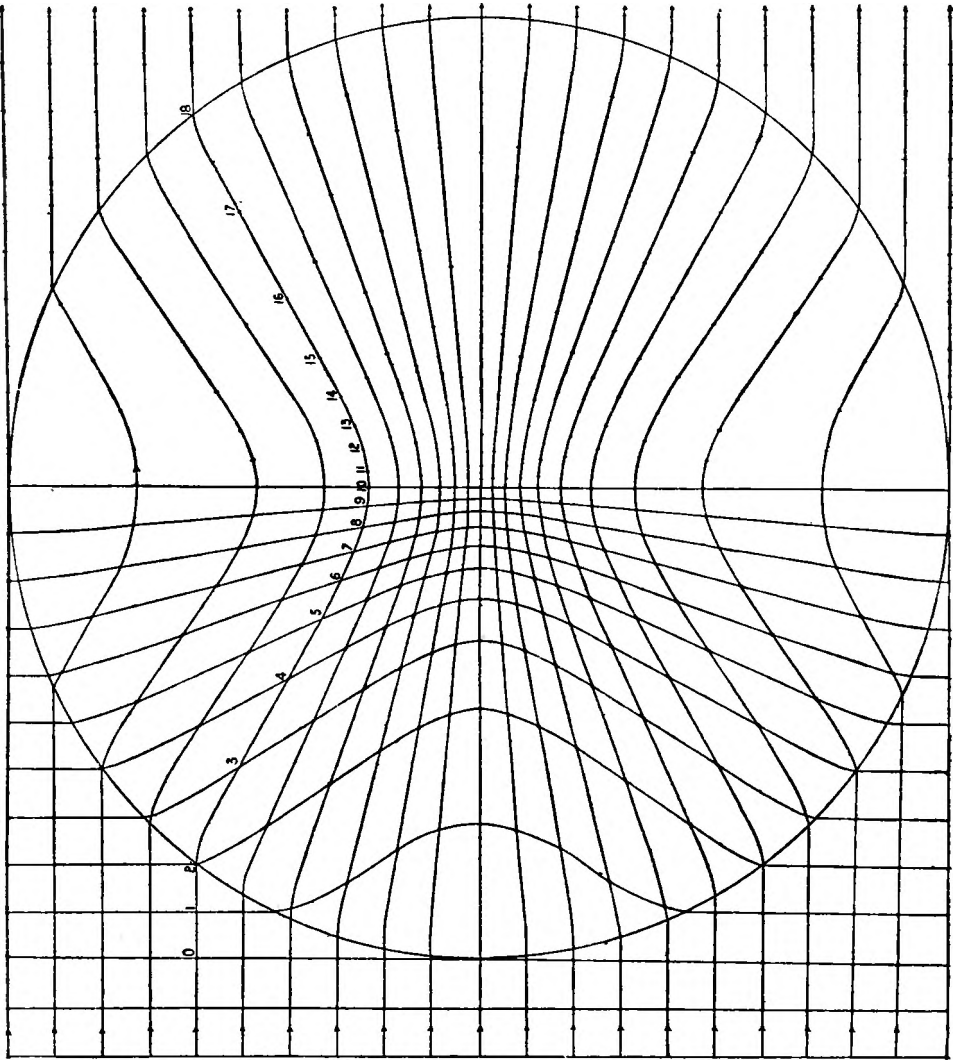


Fig. 85.

Die Zahlen auf der Stromlinie derjenigen Partikel, deren Abstand von der Zentrallinie im ungestörten Zustand 0,6 ist, sind zur Vergleichung mit Fig. 84 aufgeschrieben. Die auf der linken Seite der Fig. 84 durch die Stromlinien gelegten Linien geben die gleichzeitigen Lagen von Reihen von Ätherpartikeln an, die im ungestörten Zustande in geraden, zur Bewegungs-

<sup>1)</sup> Im Original muß man sich die Figur 86 um 90° von rechts nach links herumgedreht denken

richtung senkrechten Linien liegen. Die so innerhalb des linken Halbkreises gebildeten Vierecke geben die Formen wieder, in die die Ätherquadrate beim Durchgang durch das Atom übergehen, wenn man sie von der linken Seite



der Zeichnung in dasselbe eintreten sieht. So haben wir die Lösung unserer zweiten kinematischen Hauptaufgabe vervollständigt.

§ 12. Die erste mechanische Frage, die uns aufstößt, wenn wir auf den ersten Fall zurückgehn, bei dem sich ein Atom bewegt und der außerhalb desselben befindliche Äther in Ruhe verharret, ist die folgende: Welches ist die gesamte kinetische Energie ( $\Sigma$ ) der Menge Äther, die sich in irgendeinem

Augenblicke innerhalb des Atoms befindet? Um diese Frage zu beantworten, stellen wir uns einen unendlichen Kreiszylinder des Äthers vor, der den Raum umfaßt, den das Atom bei seiner Bewegung erfüllt. Das Zeitintegral der gesamten kinetischen Energie des Äthers in diesem Zylinder von irgendeinem Zeitpunkte  $t = 0$  an ist  $\kappa$ , da der außerhalb des Zylinders befindliche Äther nach unsern jetzigen Annahmen durch die Bewegung des Atoms nicht gestört wird. Wir nehmen eine kreisförmige Scheibe dieses Zylinders von unendlich kleiner Dicke  $e$ . Nachdem das Atom durch sie hindurchgegangen ist, hat sie zu  $\kappa$  einen Betrag beigefügt, der dem Zeitintegral der kinetischen Energien aller der Bahnen kleiner Teile, in die wir sie uns zerlegt denken können, gleich ist, und mehr fügt sie in der folgenden Zeit nicht bei. Wir denken uns die Scheibe in konzentrische Ringe mit rechtwinkligem Querschnitt  $edr'$  zerlegt. Die Masse eines solchen Ringes ist  $2\pi r' dr' c$ , da die Dichte eins ist; und alle seine Teile bewegen sich in gleichen und ähnlichen Bahnen. So finden wir, daß der gesamte Beitrag der Scheibe beträgt

$$2\pi e \int_0^1 dr' r' \int ds^2/dt, \quad (12)$$

wo mit  $\int ds^2/dt$  die Integration über eine Hälfte der Bahn einer Ätherpartikel bezeichnet wird, deren Abstand von der Mittelpunktslinie im ungestörten Zustande  $r'$  ist (denn  $\frac{1}{2} ds^2/dt^2$  ist die kinetische Energie einer gedachten Partikel von der Einheit der Masse, die sich in der betrachteten Bahn bewegt). Nun ist das Zeitintegral  $\kappa t$  vollständig aus Beiträgen von aufeinanderfolgenden Scheiben des Zylinders zusammengesetzt. Demnach gibt (12) den Beitrag in der Zeit  $e/q$  an, wenn  $q$  die Geschwindigkeit des Atoms ist; und wir finden (da  $\kappa$  der Beitrag in der Zeiteinheit ist) demgemäß

$$\kappa = 2\pi q \int_0^1 dr' r' \int ds^2/dt. \quad (13)$$

§ 13. Das in (13) enthaltene Doppelintegral wurde, mit für unsere vorliegende Aufgabe reichlich genügender Genauigkeit, durch scheinbar rohe Summationen ausgewertet; erstens durch Summationen  $\int ds^2/dt$  für die zehn in Fig. 85 angegebenen Bahnen und zweitens durch Addition dieser Summen, jede mit  $r' dr'$  multipliziert. Bei den Additionen für jede Halbbahn wurden für  $ds$  die Längen der Kurve zwischen den aufeinanderfolgenden Punkten angenommen, durch die die Kurve gezeichnet worden war. Diese Annahme setzt  $dt = 1$  in den drei Bahnen voraus, die Abständen von der Zentrallinie im ungestörten Zustande gleich 0; 0,6 und 0,8 entsprechen, und ebenso in den andern Halbbahnen mit Ausnahme der der Spitze nächsten Teile, wo Zeitintervalle in Frage kommen, die sämtlich  $< 1$  sind. Der eingeschlagene Gang ist durch die folgende Tabelle III hinreichend verdeutlicht; diese gibt das ganze Verfahren der Rechnung und Summierung der Teile für diejenige Bahn wieder, die einem Teilchen im Abstände 0,7 im ungestörten Zustande entspricht.

Tabelle IV enthält die Summen  $\int ds^2/dt$  für die zehn Bahnen und das Produkt aus jeder Summe mit dem Werte von  $r' dr'$  ( $dr' = 0,1$ ). Die Summe aller Zahlen ist, wie in der Tabelle angegeben 0,02114. In anderer Weise

ist die schließliche Integration noch so ausgeführt worden, daß in der im § 6 beschriebenen Weise der Flächeninhalt einer auf passend kariertem Papier gezeichneten Kurve bestimmt und dieser mit der betreffenden Zahl für  $\int ds^2/dt$  multipliziert wurde.<sup>1)</sup> Das durch dieses zweite Verfahren gefundene Resultat war 0,02115. Es ist sehr zufriedenstellend, zu sehn, das dies innerhalb 0,05 Prozent mit der einfachen Summe der weit voneinander verschiedenen, in der Kol. 3 der Tabelle V angegebenen Zahlen übereinstimmt.

Tabelle III

Bahn  $r' = 0,7$ .

$ds$	$ds^2$	$dt$	$ds^2/dt$
0,006	0,000036	0,14	0,000257
0,137	0,018769	1,00	0,018769
0,112	0,012544	1,00	0,012544
0,077	0,005929	1,00	0,005929
0,050	0,002500	1,00	0,002500
0,048	0,002304	1,00	0,002304
0,050	0,002500	1,00	0,002500
0,052	0,002704	1,00	0,002704
Summa			0,047507

Tabelle IV

$r'$	$\int ds^2/dt$	$0,1 \cdot r' \int ds^2/dt$
0,0	0,0818	0,00000
0,1	0,0804	0,00080
0,2	0,0781	0,00156
0,3	0,0769	0,00231
0,4	0,0722	0,00289
0,5	0,0670	0,00335
0,6	0,0567	0,00340
0,7	0,0475	0,00332
0,8	0,0310	0,00248
0,9	0,0114	0,00103
Summa		0,02114

§ 14. Verwendet man die in § 13 zuletzt angegebene Zahl 0,02115 in (13) und setzt  $q = 0,1^2$ ), so findet sich

$$\kappa = 2\pi \cdot 0,002115. \quad (14)$$

Um dieses Resultat zu deuten, wird man passend beachten, daß dieser Betrag 0,634 der kinetischen Energie  $\left(\frac{4\pi}{3} \frac{1}{2} (0,1)^2\right)$  einer gedachten Kugel aus starrer Materie ist, die bei gleicher Dichte wie der ungestörte Äther denselben Raum hat wie unser Atom und sich mit derselben Geschwindigkeit bewegt. Nehmen wir dazu die Definition der Größe  $\kappa$  zu Anfang des § 12, so können wir unsern Schluß folgendermaßen in Worte fassen: Die durch (11) mit  $K = 100$  dargestellte Verteilung der Ätherdichte in unserm gedachten Atom ruft in ihm, wenn es sich langsam in einem von Äther besetzten Raume bewegt, in jedem Augenblicke eine kinetische Energie hervor, die gleich 0,634 der kinetischen Energie der Bewegung einer gedachten starren Kugel in einem gedachten leeren Raume ist, wenn diese Kugel die nämliche Geschwindigkeit und Größe wie unser Atom und dieselbe Dichte wie der Äther im ungestörten Zustande besitzt. So wird, wenn das Atom, das nach unserer Annahme einen Teil wirklicher Materie bildet, eine eigene Trägheit besitzt, die

1) Der Sinn des Originals mußte mehr erraten werden.

D. H.

2) Im Text steht 1; es muß aber 0,1 heißen,  $q$  ist die Geschwindigkeit des Atoms, die zu 0,1 angesetzt ist, § 10. Auch die Schlußzahl 0,02113 in Tabelle IV stimmt nicht ganz, die genauere Rechnung ergibt etwas mehr als 0,02114 und damit einen noch genaueren Anschluß an die in zweiter Weise erhaltene Zahl 0,02115, als der Verfasser annahm. Das ist oben schon berücksichtigt. D. H.

für die Volumeneinheit gleich  $I$  ist, die wirksame Trägheit seiner Bewegung in einem von Äther erfüllten Raume  $\pi_6 s^3 (I + 0,634)$  sein, falls der Durchmesser des Atoms jetzt mit  $s$  bezeichnet (gegen bisher 2) und die Trägheit der Größeneinheit Äther (wie bisher) als Trägheitseinheit angenommen wird. In allem Folgenden wollen wir  $I$  sehr groß annehmen, weit größer als  $10^6$ , vielleicht auch größer als  $10^{12}$ .

§ 15. Wir stellen uns jetzt, wie früher in § 11, vor, unser Atom befinde sich in Ruhe und der Äther bewege sich in der Umgebung des Atoms und in dem von dem Atom erfüllten Raume längs der gekrümmten Stromlinien und mit den veränderlichen Geschwindigkeiten, wie sie in Fig. 86 verzeichnet sind. Die wirksame Trägheit eines Teiles des Äthers, der das Atom enthält, ist größer als die einfache Trägheit einer gleichen Raummenge des reinen Äthers um den Betrag  $\pi_6 s^3 \times 0,634$ . Dies folgt aus dem allgemein bekannten Satze der Mechanik, daß die gesamte kinetische Energie irgendeines bewegten Körpers oder eines Systems von Körpern gleich der von der Bewegung seines Trägheitsmittelpunktes herrührenden kinetischen Energie ist, vermehrt um die Summe der kinetischen Energien der Bewegungen aller seiner Teile relativ zum Trägheitsmittelpunkte.

§ 16. Nun bestehe ein durchsichtiger Körper — ein fester, flüssiger oder gasförmiger — aus einer Ansammlung von Atomen, die sämtlich dieselbe Größe und Eigenschaft besitzen wie unser in § 2 definiertes gedachtes Atom und, wie in § 14 beschrieben, mit ungeheuer großem  $I$ . Die Atome mögen sämtlich bewegungslos wie in einem absolut kalten Festkörper sein, oder sie mögen die Wärmebewegungen der Molekeln eines Festkörpers, einer Flüssigkeit oder eines Gases bei einer beliebigen nicht allzu hohen Temperatur besitzen, jedoch sollen die Geschwindigkeiten der Wärmebewegung stets klein sein im Vergleich mit der Lichtgeschwindigkeit. Die wirksame Trägheit des Äthers in der Volumeneinheit der Ansammlung ist dann äußerst nahe dieselbe, wie wenn alle Atome vollkommen festgehalten würden, der Äther aber die oben beschriebene Bewegung hinzu bekäme, und ist demgemäß, nach § 15, gleich

$$1 + N \pi_6 s^3 \cdot 0,634, \quad (15)$$

wenn man mit  $N$  die Atomzahl im Kubikzentimeter der Ansammlung bezeichnet; ein Zentimeter soll jetzt unsere Längeneinheit sein. Wenn wir mit  $V$  die Geschwindigkeit von Licht in nicht gestörtem Äther bezeichnen, wird demgemäß seine Geschwindigkeit in einem von der vorausgesetzten Ansammlung von Atomen erfüllten Raume sein

$$V / \left( 1 + N \pi_6 s^3 \cdot 0,634 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

§ 17. Als Beispiel wollen wir  $N = 4 \times 10^{20}$  annehmen, und, wie ich es in den Fällen von Sauerstoff und Argon bewährt finde,  $s = 1,42$

1) Ich muß diese sehr große Zahl an Stelle von Maxwells  $19 \times 10^{16}$  annehmen, da ich es sonst unmöglich gefunden habe, die bekannten Viskositäten

$\times 10^{-8}$ ; dies ergibt  $N \frac{\pi}{6} s^3 = 0,60 \times 10^{-3}$ . Die so eingeführte Ansammlung würde also, wenn tausendfach zusammengedrückt, 0,6 ihres Raumes mit Atomen und 0,4 mit ungestörtem Äther ausfüllen; dies ist etwas dichter als die kubische Anordnung von Kugeln, woselbst wir haben

$$\left( \text{Nichtausgefüllter Raum} = 1 - \frac{\pi}{6} = 0,4764 \right),$$

und weniger dicht als die möglichst dichte Anordnung von Kugeln, nämlich:

$$\left( \text{Nichtausgefüllter Raum} = 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0,2595 \right).$$

Nimmt man  $N \frac{\pi}{6} s^3 = 0,60 \times 10^{-3}$  in (16) an, so findet man für den Brechungsindex unserer Ansammlung 1,00019, eine Zahl, die etwas kleiner ist als der Brechungsindex von Sauerstoff (1,000273). Indem wir für  $K$  in (11) einen größeren Wert als 100 wählen, können wir leicht die Formel so umgestalten, daß sie in einer Ansammlung, in der  $0,6 \cdot 10^{-3}$  des gesamten Raumes von Atomen ausgefüllt wird, genau den Brechungskoeffizienten von Sauerstoff, Stickstoff oder Argon oder irgendeinem andern Gase ergibt. Es ist bemerkenswert, daß nach den besondern im § 5 einzeln dargelegten Annahmen eine Ätherdichte im Mittelpunkte des Atoms, die beträchtlich größer ist als die hundertfache Dichte von Äther im ungestörten Zustande, erforderlich ist, um das Brechungsvermögen auf die Höhe desjenigen des Sauerstoffs zu bringen. Es besteht jedoch keine Schwierigkeit, eine so große Verdichtung von Äther durch das Atom zuzulassen, und so können wir die vorstehenden Betrachtungen wohl als eine berücksichtigenswerte Grundlage für eine physikalische Hypothese betrachten.<sup>1)</sup>

§ 18. Es besteht jedoch eine ernstliche, vielleicht unüberwindliche Schwierigkeit, auf die ich zum Schluß noch hinweisen muß. Wie nämlich unsere Hypothese mit dem Resultat vereinigt werden soll, daß der Äther in der Erdatmosphäre relativ zur Erde bewegungslos ist, was anscheinend durch einen bewunderungswerten, von Michelson ersonnenen und von ihm und Morley<sup>2)</sup> mit eingehendster Sorgfalt zur Sicherung eines zuverlässigen Ergebnisses ausgeführten Versuch bewiesen ist. Ich kann keinen Fehler weder in der Idee noch in der Ausführung des Versuchs erkennen. Aber eine Möglichkeit, den Schluß zu umgehen, den er zu beweisen scheint, mag in einer geistvollen, unabhängig von Fitzgerald<sup>3)</sup> und von Lorentz in

und die bekannten Verdichtungen von Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff mit Maxwells theoretischen Formeln in Einklang zu bringen. [In § 50 der siebenzehnten Vorlesung im vorliegenden Bande haben wir gesehen, daß der kleinere Wert  $10^{20}$  zulässig ist und wahrscheinlich nicht weit vom wahren Werte entfernt ist.] Es muß noch erwähnt werden, daß das Avogardosche Gesetz für alle Gase denselben Wert von  $N$  ergibt. (Dazu ist die Anmerkung S. 351 zu vergleichen. D. H.)

1) Ich weiß nicht recht, ob nicht die obige Ableitung voraussetzt, daß die Oszillationsgeschwindigkeit des Äthers sich in derselben Weise ändert wie die Ausbreitungsgeschwindigkeit, was ja nicht angängig wäre. D. H.

2) Phil. Mag. Dezember 1887.

3) Öffentliche Vorlesungen im Trinity College, Dublin.

Leyden<sup>1)</sup> gemachten Annahme gefunden werden, die darin besteht, daß die Wirkung der Bewegung von Äther durch Materie der letzteren lineare Dimensionen etwas ändern kann. Wenn gemäß dieser Annahme die Steinplatte, die in dem Apparat von Michelson und Morley die Grundplatte bildete, vermöge ihrer Bewegung in dem von Äther erfüllten Raume ihre linearen Dimensionen in Richtung der Bewegung um ein Hundertmilliontel<sup>2)</sup> verkürzt hat, würde das Resultat des Versuchs die freie Bewegung in Äther in dem von der Erde eingenommenen Raume nicht ausschließen.

---

1) Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leyden, 1895.

2) Dies ist nämlich das Quadrat des Verhältnisses der Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn um die Sonne (30 Kilometer in der Sek.) zur Lichtgeschwindigkeit (300 000 Kilometer in der Sek.).

---

## Anhang B.

### Wolken über der mechanischen Theorie der Wärme und der des Lichtes im neunzehnten Jahrhundert.

(Freitagsabend-Vorlesung, Royal Institution, 27. April 1900.)

[In der vorliegenden Abhandlung ist der Gegenstand der Vorlesung — mit umfangreichen Ergänzungen, in denen die zu Anfang des verflossenen Jahres begonnene und nach der Vorlesung dreizehn Monate hindurch bis zum heutigen Tage fortgeführte Arbeit sich ausspricht — nebst Resultaten, die die Schlüsse bestätigen und die in der Vorlesung gegebenen Erläuterungen bedeutend erweitern, wiederholt. Ich möchte diese Gelegenheit wahrnehmen, Herrn William Anderson, meinem Sekretär und Assistenten meinen Dank auszusprechen für den mathematischen Takt und Eifer, die Genauigkeit im geometrischen Zeichnen und die unermüdliche Ausdauer bei den lange fortgesetzten und immer wieder abgeänderten Reihen von Zeichnungen und algebraischen und arithmetischen Rechnungen, wie sie auf den folgenden Seiten dargestellt sind. Die gesamte Arbeit, die die Bestimmung von Resultaten enthält, die durch mehr als fünftausend Versuche gewonnen sind, ist von Herrn Anderson ausgeführt worden. — K. 2. Febr. 1901.]

§ 1. Die Schönheit und Klarheit der mechanischen Theorie, die behauptet, daß Wärme und Licht Arten von Bewegung sind, ist bis jetzt durch zwei Wolken verdunkelt worden. I. Die erste entstand zugleich mit der Wellentheorie des Lichtes und wurde von Fresnel und Dr. Thomas Young bemerkt; sie enthält die Frage: Wie kann sich die Erde durch einen elastischen Festkörper, wie es der Lichtäther seinem Wesen nach ist, hindurchbewegen? II. Die zweite geht aus der Maxwell-Boltzmannschen Lehre von der Energieverteilung hervor.

Wolke I. — Relative Bewegung von Äther und ponderablen Körpern (als da sind bewegliche Körper an der Erdoberfläche, Steine, Metalle, Flüssigkeiten, Gase; die die Erde umhüllende Atmosphäre; die Erde selbst als Ganzes; Meteoriten, der Mond, die Sonne und andere Himmelskörper).

§ 2. Wir können uns ja vorstellen, die Frage sei zufriedenstellend beantwortet, wenn wir annehmen, der Äther besitze praktisch vollkommene Elastizität für die äußerst schnellen Schwingungen mit der äußerst kleinen Verdrehung, die das Licht ausmachen, daß er sich aber andererseits fast ganz wie eine Flüssigkeit von sehr kleiner Viskosität verhält, und nur äußerst geringen Widerstand, praktisch gar keinen Widerstand Körpern bietet, die sich langsam oder selbst so schnell wie die schnellsten Himmelskörper durch ihn bewegen. Gegen diese Annahme bestehen jedoch viele sehr schwere Bedenken; unter ihnen eins, das zwar am meisten bemerkt worden ist, viel-



leicht aber tatsächlich nicht das schwerste ist, nämlich daß sie nicht mit den bekannten Erscheinungen der Aberration des Lichtes vereinbar erscheint. In bezug auf diesen Punkt schrieb Fresnel in seinem berühmten Briefe<sup>1)</sup> an Arago folgendes<sup>2)</sup>:

„Es erscheint aber unmöglich, bei dieser Hypothese die Aberration der Sterne zu erklären; ich wenigstens habe bis jetzt diese Erscheinung nur so ausreichend auffassen können, daß ich annahm, der Äther gehe frei durch die Erde hindurch, und die ihm durch die Bewegung der Erde mitgeteilte Geschwindigkeit sei nur ein kleiner Teil derjenigen der Erde; übersteige etwa nicht ein Hundertstel jener Bewegung.“

Wie außergewöhnlich diese Hypothese auf den ersten Blick auch erscheinen mag, so ist sie meines Erachtens nicht in Widerspruch mit der Vorstellung, die sich die größten Physiker von der äußersten Porosität der Körper gebildet haben.“

Dieselbe Hypothese wurde von Thomas Young in seinem berühmten Satze aufgestellt, nach dem der Äther zwischen den Molekeln oder Atomen materieller Körper hindurchgeht, wie der Wind durch eine Baumgruppe bläst. Es ist klar, daß weder Fresnel noch Young die Idee hatten, daß der Äther ihrer Wellentheorie des Lichtes mit seinen transversalen Schwingungen seinem Wesen nach ein elastischer Festkörper ist, also ein Körper, der einer Formänderung mit einer dauernden oder nahezu dauernden Kraft Widerstand leistet. Wenn sie diesen Gedanken gefaßt hätten, würden sie die ungeheure Schwierigkeit haben bemerken müssen, die das Zerreißen bietet, welches der Äther erleiden muß, wenn er sich durch Poren oder Zwischenräume zwischen den Atomen der Materie hindurchbewegt.

§ 3. Es fiel mir nun ein, daß wir, ohne mit irgend etwas von dem, was wir durch Naturbeobachtung wissen, in Widerspruch zu kommen, einfach das scholastische Axiom bestreiten müssen, nach dem zwei Materienmengen nicht gleichzeitig denselben Raum einnehmen können, und daß wir als eine zulässige Hypothese behaupten dürfen, daß Äther allerdings denselben Raum einnimmt wie ponderable Materie, und daß Äther durch ponderable Körper, die sich in dem von ihm ausgefüllten Raume bewegen, nicht verschoben wird. Aber wie kann dann Materie auf Äther und Äther auf Materie so fein einwirken, daß die bekannten Erscheinungen des Lichtes (oder der strahlenden Wärme) hervorgerufen werden, die sich bei Gegenwart ponderabler Materie zeigen, und daß Äther ponderable Materie derartig angreift, daß in dieser sichtbare, chemische, phosphoreszierende, thermische und photographische Wirkungen erzielt werden? Es besteht keine Schwierigkeit bei der Beantwortung dieser Frage, wenn, wie es wahrscheinlich stattfindet, Äther ein zusammenrückbarer und dehnbarer<sup>3)</sup> Körper ist. Wir haben nur anzunehmen, daß das Atom eine Kraft auf den Äther ausübt, durch die Verdichtung oder Verdünnung innerhalb des vom Atom eingenommenen Raumes

1) *Annales de Chimie*, 1813; im Wortlaut angeführt von Larmor in seinem jüngst erschienenen Buche *Äther and Matter*, S. 320—322.

2) Es schien zweckmäßig, auch diesen französischen Brief zu übersetzen. D.H.

3) Diese Eigenschaft leugnen, hieße dem Äther unendlich großen Widerstand gegen Kräfte zuschreiben, die ihn zu verdichten oder auszudehnen streben, was in Wahrheit eine unendlich schwierige Annahme zu sein scheint.

hervorgerufen wird. Für jetzt<sup>1)</sup> beschränke ich mich, der Einfachheit wegen, auf die Anschauung eines kugelförmigen Atoms, das Verdichtung und Verdünnung mit konzentrischen sphärischen Flächen gleicher Dichte erzeugt, jedoch so, daß die gesamte Äthermenge innerhalb seiner Grenzfläche die nämliche bleibt wie die Menge in einem gleichen Raume freien, ungestörten Äthers (Anhang A § 5).

§ 4. Wir fassen ein gegebenes, in Ruhe befindliches Atom ins Auge, das sich irgendwo in einem von Äther erfüllten Raume befindet. Es mag eine Kraft auf dasselbe ausgeübt werden, die bewirkt, daß es sich in irgendeiner Richtung bewegt, zunächst mit wachsender Geschwindigkeit und hierauf mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Wenn diese Geschwindigkeit irgendwie kleiner ist als die Geschwindigkeit des Lichtes, läßt es sich mathematisch beweisen, daß die Kraft kurze Zeit nach dem Augenblicke, in dem die Geschwindigkeit des Atoms gleichförmig geworden ist, Null wird und für alle Ewigkeit Null bleibt. Was eintritt, ist folgendes:

§ 5. Während der ganzen Zeit, in der die Geschwindigkeit des Atoms von Null aus anwächst, gehen zwei Reihen nicht-periodischer Wellen, die eine ohne Volumenänderung, die andere ohne Rotation (letztere also eine Reihe von Verdichtungs-Verdünnungswellen) im umgebenden Äther nach allen Richtungen. Die Rückseite der letzten dieser Wellen verläßt das Atom, einige Zeit nachdem die Beschleunigung dieses Atoms aufhörte. Diese Zeit ist, wenn die Bewegung des außerhalb des Atoms, aber dicht an ihm befindlichen Äthers unendlich klein ist, gleich der Zeit, die von der langsameren Welle (es ist dies die konstanten Volumens) gebraucht wird, um den Durchmesser des Atoms zu durchsetzen, und ist die kurze Zeit, auf die in § 4 hingewiesen ist. Wenn die Rückseiten beider Wellen das Atom verlassen haben, ist der in ihm und in seiner Umgebung befindliche Äther in einen Zustand stationärer Bewegung relativ zum Atom gelangt. Diese stationäre Bewegung geht mit wachsendem Abstand vom Atom in eine mehr und mehr gleichförmige Bewegung in parallelen Linien über. In einem Abstände von zwanzig Durchmessern weicht sie nur äußerst wenig von Gleichförmigkeit ab.

§ 6. Aber nur wenn die Geschwindigkeit des Atoms nur einen geringen Betrag hat im Vergleich mit der Geschwindigkeit des Lichtes, ist die Störung des Äthers in dem Raume in der unmittelbaren Umgebung des Atoms unendlich klein. Die in § 4 aufgestellten Behauptungen und der erste Satz des § 5 sind noch richtig, wie wenig auch die Endgeschwindigkeit des Atoms kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit. Sobald jedoch diese gleichförmige Endgeschwindigkeit des Atoms die Lichtgeschwindigkeit noch so wenig übersteigt, wird eine nichtperiodische konische Welle einer Bewegung bei konstantem Volumen hervorgerufen<sup>2)</sup>, nach demselben Prinzip, aus dem die durch Machs so schönen, mit elektrischem Funkenlicht aufgenommenen, Photogramme dargestellten Erscheinungen folgen, wenn eine Flintenkugel auf ihrem

1) Weitere Entwicklungen des vorgetragenen Gedankens wurden der Royal Society zu Edinburgh und dem Internationalen Physikerkongreß, der im August in Paris tagte, vorgeführt (Proc. R.S.E. Juli 1900; Bd. der Berichte des Congr. Intern., in französischer Sprache; und Phil. Mag., Aug./Sept. 1900).

2) Die Meinung des Verf. ist wohl die: Bei ungleichförmiger Bewegung des Atoms entstehen die genannten Wellen. Aber auch bei gleichförmiger können solche auftreten, nämlich sobald die Geschwindigkeit des Atoms eine der Wellengeschwindigkeiten übertrifft. Vgl. auch Anm. 1 S. 406.

Fluge durch die Luft in dieser Verdichtungs-Verdünnungsstörungen hervorbringt, die sich durch Änderung des Brechungsindex verraten. Der halbe Winkel des Kegels, sowohl in der Luft wie im Äther, ist dem Winkel gleich, dessen Sinus das Verhältnis der Wellengeschwindigkeit zur Geschwindigkeit des bewegten Körpers ist.<sup>1)</sup>

§ 7. Wenn wir den Fall setzen, daß die stationäre Bewegung des Atoms auch mit einer größeren Geschwindigkeit vor sich geht als die Wellengeschwindigkeit der Verdichtungs-Verdünnungswelle, dann werden zwei konische Wellen mit Winkeln hervorgerufen, die den Geschwindigkeiten der beiden möglichen Wellen entsprechen; wir brauchen uns jetzt aber mit dem Falle nicht zu beschäftigen, da die Geschwindigkeit der Verdichtungs-Verdünnungswelle in Äther — dieser Überzeugung zu sein, haben wir alle Veranlassung — ungeheuer groß im Vergleich selbst mit der Lichtgeschwindigkeit ist.<sup>2)</sup>

§ 8. Jetzt denken wir uns eine periodische Kraft auf das Atom so wirkend, daß sie es zu einer stetigen Hin- und Herbewegung in einfacher harmonischer Schwingung veranlaßt. Nach dem ersten Satze des § 5 erkennen wir, daß stetig zwei Reihen periodischer Wellen erzeugt werden, eine mit konstantem Volumen, die andere ohne Rotation. Ohne mathematische Untersuchung sehen

1) Nach demselben Prinzip sehen wir, daß ein Körper (und wir dürfen ohne besondern Fehler auch sagen, ein Fisch oder ein Wasservogel, mit Flossen oder Schwimmfüßen), der sich in ruhigem Wasser fortbewegt, gleichviel ob er an der Oberfläche schwimmt oder in einem mäßigen Abstände von der Oberfläche ganz untergetaucht ist, keine Wellenbewegung hervorruft, wenn seine Geschwindigkeit kleiner ist als die kleinste Wellengeschwindigkeit, die durch Schwerkraft und Oberflächenspannung erzeugt wird (nämlich etwa 23 cm in der Sekunde oder 0,44 Seemeilen in der Stunde, sowohl für Seewasser als für süßes Wasser); und daß er, wenn seine Geschwindigkeit größer ist als die kleinste Wellengeschwindigkeit, eine wellenförmige Störung hervorbringt, die von zwei Geraden begrenzt wird, die zu beiden Seiten der Mittellinie unter Winkeln geneigt sind, deren jeder dem Winkel gleich ist, dessen Sinus die kleinste Wellengeschwindigkeit dividiert durch die Geschwindigkeit des bewegten Körpers ist. Jeder kann diese Tatsache leicht beobachten, wenn er einen Stift oder eine Stricknadel in ruhiges Wasser in einem Teich (oder auch in eine hinreichend große Waschschiüssel) vertikal eintaucht und horizontal führt, zuerst mit äußerst kleiner Geschwindigkeit und dann immer schneller. Ich habe dies zuerst vor neunundzwanzig (Der Verfasser sagt „nineteen“, das stimmt aber nicht mit den Daten 1900 und 1871 D. H.) Jahren bemerkt und habe Beobachtungen zu einer experimentellen Bestimmung der kleinsten Wellengeschwindigkeit in einem Briefe an William Froude beschrieben, der in der Nature vom Oktober und im Phil. Mag. vom November 1871 und im folgenden Anhange *G* veröffentlicht worden ist. (Es wird auf die betreffende Stelle verwiesen.). Es handelt sich daselbst um Beobachtungen zusammen mit Helmholtz auf der Yacht Lalla Rookh. Der Verf. fährt fort. D. H.) Wenn die Geschwindigkeit der Yacht nur ein wenig größer war als die kritische Geschwindigkeit, zeigte sich die Vorderseite der Riefelungen im Wasser sehr nahe senkrecht zur Bewegungsrichtung, und wenn sie eben unter die kritische Geschwindigkeit herabsank, verschwanden diese Riefelungen, und es war keine Störung an der Oberfläche des Wassers bemerkbar. Die See war „spiegelglatt“; trotzdem war Wind genug vorhanden, den Schooner mit einer Geschwindigkeit zu treiben, die zwischen  $\frac{1}{2}$  und 1 Seemeile in der Stunde lag.

2) Die Grenzggeschwindigkeit, als welche gegenwärtig ohne Rücksicht auf Verdichtungs-Verdünnungswellen, die Lichtgeschwindigkeit angesetzt wird, spielt bekanntlich eine große Rolle in der modernen Elektronenlehre, die auch auf die anderen Gebiete der Physik, z. B. die Mechanik bestimmend sein will. Aber wie ist es, wenn auch die Verdichtungs-Verdünnungswellen berücksichtigt werden müssen, obwohl die elektromagnetische Lichttheorie sie nicht kennt? D. H.

wir, daß, wenn, wie es beim Äther der Fall ist, die Geschwindigkeit der Verdichtungs-Verdünnungswelle sehr groß ist im Vergleich mit der der Welle konstanten Volumens, die von der Verdichtungs-Verdünnungswelle fortgeführte Energie äußerst klein im Vergleich mit der von der Welle konstanten Volumens fortgeführt sein muß; wie klein sie ist, können wir leicht genug durch eine regelrechte mathematische Untersuchung finden. So erkennen wir, wie es kommt, daß die Hypothese des § 3 für die in diesem Abschnitte behandelte Antwort auf die Frage hinreicht: Wie kann Materie auf Äther so wirken, daß Licht entsteht?

§ 9. Aber dieser Punkt, von so grundlegender Bedeutung er auch ist, bildet nur einen kleinen Teil der sehr allgemeinen, in § 3 ausgesprochenen, eine Antwort heischenden Fragen. Eine dieser grundlegenden Fragen ist noch die folgende: Wie kommt es, daß die Lichtgeschwindigkeit in durchsichtiger ponderabler Materie kleiner ist als in reinem Äther? Auf diese besondere Frage wurde in meinem Vortrage vor der Royal Institution im verflossenen April die Aufmerksamkeit hingelenkt; und es wurde eine erste Erklärung für ihre von mir vorgeschlagene Beantwortung mitgeteilt und durch eine Zeichnung verdeutlicht. Die Richtigkeit dieses Vorschlags ist dann später durch mathematische Durcharbeitung erhärtet, Anhang A, insbesondere die Schlußergebnisse in § 16.

§ 10. Die andern Erscheinungen, auf die in § 3 hingewiesen ist, fallen naturgemäß unter die allgemeine Mechanik der Wellentheorie des Lichtes, und die volle Erklärung für sie alle wird weit näher gebracht, wenn wir eine befriedigende grundlegende Beziehung zwischen Äther und Materie an Stelle der frühern undurchführbaren Idee besitzen, nach der materielle Atome den Äther aus dem Raume einfach vor sich wegschieben, wenn sie sich relativ zu dem sie umgebenden Äther in Bewegung befinden. Dürfen wir nun annehmen, daß die von mir ausgesprochene Hypothese die erste von unsern beiden Wolken zerstreut? Sie würde sicherlich die „Aberration des Lichts“, die mit der Bewegung der Erde durch den Äther verknüpft ist, in einer durchaus befriedigenden Weise erklären. Nach ihr würde es möglich sein, daß die Erde sich mit vollkommener Freiheit in dem von Äther erfüllten Raume bewegt, ohne ihn zu verschieben. Bei dem Durchgange durch die Erde würde der Äther, ein elastischer Festkörper, nicht zerrissen werden, wie es nach der Anschauung Fresnels von einer Porosität und einer Bewegung des Äthers durch die Poren, so als ob er eine Flüssigkeit wäre, der Fall sein müßte. Äther würde sich danach relativ zu ponderablen Körpern mit der vollkommenen Freiheit bewegen, die wir zur Erklärung der Erscheinung brauchen, die wir als Aberration kennen, und nicht mit der unvollkommenen Freiheit der Luft, die sich durch eine Baumgruppe bewegt, wie es sich Thomas Young vorstellt. Nach meiner Hypothese würde, wenn wir der Einfachheit wegen die vergleichsweise sehr kleine, von der Erdumdrehung herrührende Komponente (nur 0,46 Kilometer in der Sekunde am Äquator, wo sie am größten ist) und die unvollkommen bekannte, von Herschel<sup>1)</sup> entdeckte Be-

1) Das glänzende, von Huggins vor dreiunddreißig Jahren zuerst angewandte spektroskopische Verfahren zur Messung der in der Gesichtslinie liegenden Komponente der gegenseitigen Bewegung der Erde und irgendeines sichtbaren Sterns, wurde seitdem mit bewunderungswürdiger Ausdauer und mit großem Fleiße von andern Forschern durchgeführt, die nach ihren Resultaten Schätzungen der Ge-

wegung des Sonnensystems im Raume nach dem Sternbilde des Herkules hin außer acht lassen, an allen Punkten der Erdoberfläche eine Ätherströmung mit der Geschwindigkeit von 30 Kilometer in der Sekunde in Richtungen bestehen, die sämtlich der Tangente der Bahn der Erde um die Sonne parallel sind. Es gibt nichts unter all dem, was wir von den gewöhnlichen Erscheinungen der terrestrischen Optik kennen, was mit dieser Anschauung unvereinbar ist; aber leider! es besteht eben Unvereinbarkeit mit gewissen Tatsachen.<sup>1)</sup>

§ 11. Ich fürchte also, wir müssen Wolke I immer noch für sehr dicht halten.

Wolke II. § 12. Waterston sprach (in einer jetzt berühmten Mitteilung an die Royal Society, die, nachdem sie 45 Jahre vergraben und fast vergessen in den Archiven gelegen hat, von Lord Rayleigh der Vergessenheit entrissen und mit einer einleitenden Bemerkung von großer Bedeutung und Wichtigkeit in den Transactions der Royal Society für 1892 veröffentlicht wurde) folgenden Satz aus: „In gemischten Medien ist das mittlere Quadrat der Molekargeschwindigkeit dem spezifischen Gewicht der Molekel umgekehrt proportional. Dies ist das Gesetz des Gleichgewichts lebendiger Kraft.“ Von diesem Satze sagt Lord Rayleigh in einer Anmerkung<sup>2)</sup>: „Dies ist der erste Ausdruck eines sehr wichtigen Satzes (vgl. auch Brit. Assoc. Rep., 1851). Der Beweis des § 10 kann jedoch kaum aufrechterhalten werden. Er hat einige Ähnlichkeit mit einem von Professor Tait angeführten und auseinandergesetzten Argument (Edinburgh Trans., Bd. 33, S. 79, 1886). Es besteht Grund zu dem Gedanken, daß dieses Gesetz eng mit dem Maxwell'schen Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung verknüpft ist, von dem Waterston keine Kenntnis hatte.“

§ 13. In dem Satze von Waterston bedeutet das „spezifische Gewicht der Molekel“ das, was wir jetzt einfach Masse der Molekeln nennen; und „Molekulargeschwindigkeit“ bedeutet die fortschreitende Geschwindigkeit einer Molekel. In einer Arbeit über die Theorie des Schalls in den Phil. Mag. für 1858, in der er auf die in seiner vergrabenen Abhandlung<sup>3)</sup> entwickelte Theorie

geschwindigkeit und Richtung der Bewegung des Trägheitsmittelpunktes des Sonnensystems im Raume vorgenommen haben. Mein Glasgower Kollege Prof. Bates hat mir über den Gegenstand dieser Untersuchungen in freundlicher Weise die folgenden Mitteilungen gemacht:

„Die frühern (1888) Potsdamer Photogramme der Spektren von 51 Sternen heller als 2 $\frac{1}{2}$ ter Größe wurden für die Bestimmung der Apex und der Geschwindigkeit des Sonnensystems verwendet. Kempf (Astronomische Nachrichten, Bd. 132) findet für den Apex: Rektaszension  $206^{\circ} \pm 12^{\circ}$ ; Deklination  $46^{\circ} \pm 90^{\circ}$ , für die Geschwindigkeit 19 Kilometer in der Sekunde; und Risteen (Astronomical Journal, 1893) findet praktisch dieselben Größen. Die Eigenbewegungen der Fixsterne weisen für den Apex auf eine Lage hin, die sich irgendwo in einer schmalen, der Milchstraße parallelen Zone befindet und sich auf  $20^{\circ}$  zu beiden Seiten eines Punktes von der Rektaszension  $275^{\circ}$  und der Deklination  $+30^{\circ}$  erstreckt. Das zuverlässige Mittel aus 13, nach den Methoden von Argelander oder Airy bestimmten Werten ergibt  $214^{\circ}$  und  $+35^{\circ}$  (André, Traité d'Astronomie Stellaire).“

1) Sie sind Anhang A § 18 mitgeteilt. Der Verfasser wiederholt sie hier naturgemäß. D. H.

2) Phil. Trans. A, 1892, S. 16.

3) „On the Physics of Media that are Composed of Free and Perfectly Elastic Molecules in a State of Motion“. Phil. Trans. A, 1892, S. 13.

verweist, sagt Waterston: „Die Theorie . . . nimmt an . . . , daß, wenn die Stöße eine rotierende Bewegung erzeugen, die so eingeführte lebendige Kraft in einem konstanten Verhältnisse zur lebendigen Kraft der geradlinigen Bewegung steht.“ Dies stimmt mit dem sehr wichtigen, etwa um dieselbe Zeit unabhängig von Clausius entwickelten Prinzip überein, nach dem die mittlere, kinetische und potentielle Energie, die von der relativen Bewegung aller Teile einer Gasmolekel herrührt, in einem konstanten Verhältnisse zur mittleren Energie der Bewegung ihres Trägheitsmittelpunktes steht, wenn die Dichte und der Druck konstant sind.

§ 14. Ferner. Ohne jede Kenntnis dessen, was in Waterstons vergrabener Abhandlung zu finden war, stellte Maxwell auf der Versammlung der British Association in Aberdeen im Jahre 1859<sup>1)</sup> folgende Proposition über die Bewegung und Zusammenstöße vollkommen elastischer Kugeln auf: „Zwei Systeme von Partikeln bewegen sich in demselben Gefäße; zu beweisen, daß die mittlere lebendige Kraft jeder einzelnen Partikel in den beiden Systemen schließlich die nämliche wird.“ Dies ist genau der in § 12 angeführte Satz von Waterston über das Gesetz der Energieverteilung; aber Maxwells Beweis aus dem Jahre 1860 war sicher nicht erfolgreicher als der von Waterston. Er erschien mir ganz unschlüssig, und oft drängte ich meinen Kollegen, Professor Tait, sich mit dem Gegenstande näher zu befassen. Er tat dies, und im Jahre 1886 legte er der Royal Society of Edinburgh eine Abhandlung<sup>2)</sup> über die Grundlage der kinetischen Gastheorie vor, die eine kritische Prüfung der Maxwellschen Arbeit aus dem Jahre 1860, die zwar ihre große Originalität und ihren glänzenden Wert für die kinetische Gastheorie und die in ihr durchgeführten Gedanken und Prinzipien hoch anerkennt, aber zeigt, daß der Beweis des Satzes über die Energieverteilung in einer gemischten Ansammlung von Partikeln verschiedener Masse in der Tat nicht ausreichend war, und die mit Erfolg an dessen Stelle einen bindenden Beweis lieferte.

§ 15. Waterston, Maxwell und Tait, sie alle nehmen an, daß die Partikel der beiden Systeme vollkommen durchmischt sind (Tait, § 18), und so ist der von ihnen gefundene Satz von grundlegender Wichtigkeit für die spezifischen Wärmen gemischter Gase. Sie geben aber in keiner von den bereits angeführten Abhandlungen irgendeine Andeutung eines Beweises des entsprechenden Satzes über die Energieverteilung zwischen zwei Gruppen gleicher Partikeln, die durch eine für die Molekeln undurchlässige Membrane voneinander getrennt sind, die aber Kräften gestattet, durch sie hindurch zwischen den zu beiden Seiten<sup>3)</sup> befindlichen Molekeln Wirkungen hervor-

1) „Illustrations of the Dynamical Theory of Gases“. Phil. Mag. Januar und Juli 1860, und Collected Papers, Bd. I, S. 378.

2) Phil. Trans. R. S. E. „On the Foundations of the Kinetic Theory of Gases“, 14. Mai und 6. Dezember 1886 und 7. Januar 1887.

3) Eine sehr interessante Tatsache über diesen Gegenstand ist von Maxwell in seiner letzten Abhandlung über die Boltzmann-Maxwellsche Theorie festgestellt worden. „On Boltzmanns Theorem on the Average Distribution of Energy in a System of Material Points“, Camb. Phil. Trans. Mai 6, 1878; Collected Papers Vol. II, S. 713—741. (Bekanntlich verdanken wir Boltzmann die durchdringendste Untersuchung über die Verteilung der Energien in Molekelnsystemen, Maxwell die allgemeinste Theorie, Clausius die wichtigsten Grundlagen. D. H.)

zurufen; dieser Satz bildet aber die einfachste Erläuterung der molekularen Theorie des Avogardoschen Gesetzes. Mir scheint nun, daß man möglicherweise zeigen kann, wie Taits Beweis des Waterston-Maxwellschen Gesetzes nicht bloß diesen vital bedeutungsvollen Gegenstand, sondern auch den sehr interessanten, wenn auch vergleichsweise wenig wichtigen Fall einer Ansammlung von Partikeln gleicher Masse mit einer einzigen Partikel verschiedener Masse, die sich zwischen ihnen bewegt, virtuell mitenthält.

§ 16. In den §§ 12, 14, 15 ist das Wort „Partikel“ gewählt zur Bezeichnung dessen, was gewöhnlich, nicht korrekt, eine elastische Kugel genannt wird, was aber in Wirklichkeit ein Boscovichsches Atom ist, das auf andre Atome in Geraden wirkt, die genau durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehen (so daß durch Zusammenstöße in keinem Falle Rotation hervorgerufen wird), mit dem Wirkungsgesetze zwischen zwei Atomen, daß keine Kraft in einem Abstände, der größer ist als die Summe ihrer beiden Radien, vorhanden ist, daß aber die Kraft in genau diesem Abstände unendlich groß ist. Keiner von den Beweisen, den erfolglosen wie den erfolgreichen, die ich angeführt habe, würde in seinem Wesen geändert werden, wenn man an Stelle der letzten Bedingung eine mit abnehmendem Abstände, nach einem beliebigen Gesetze, für unterhalb der Summe der Radien liegende Abstände zunehmende Abstoßung einführte, die nur der Maßgabe unterworfen wäre, daß sie unendlich groß würde, ehe der Abstand Null geworden ist. In der Tat hat der schräge oder gerade Stoß zwischen zwei so definierten Boscovichschen Atomen dieselbe Wirkung, nachdem der Zusammenstoß vollendet ist (nämlich, wenn ihre Wirkungssphären sich voneinander entfernen), wie ein Zusammenstoß zwischen zwei der konventionellen elastischen Kugeln, von denen man sich vorstellt, daß ihre Radien von den Richtungen und Geschwindigkeiten der Annäherung vor dem Zusammenstoße abhängen (je größer die relative Geschwindigkeit, desto kleiner die wirk-samen Radien); und die einzige in diesen Beweisen ihrem Wesen nach enthaltene Annahme ist die, daß der Radius jeder Kugel sehr klein ist im Vergleich mit der durchschnittlichen Länge der freien Bahn.

§ 17. Wenn aber die Partikel Boscovichsche Atome sind, deren Trägheitsmittelpunkt nicht mit dem Kräftemittelpunkt zusammenfällt, oder (was annehmbarer ist) wenn die Partikel Ansammlungen sind von zwei oder mehr Boscovichschen Atomen, würden Rotationen und Rotationsveränderungen aus den Zusammenstößen folgen. Dann muß Waterstons und Clausius' leitendes Prinzip Platz greifen, und Taits Beweis ist nicht mehr anwendbar. Wohlweislich haben sich Waterston und Clausius hinsichtlich der Rotation enthalten, mehr zu sagen, als daß die mittlere Rotationsenergie in konstantem Verhältnis steht zur Translationsenergie. Mit glänzender Kühnheit erklärten dann Maxwell und Boltzmann, daß diese beiden Energien überhaupt gleich sind; Boltzmann fand dabei etwas, das ihm ein Beweis für diese wichtige Behauptung schien und das Maxwell als solchen annahm.

§ 18. Boltzmann ging weiter<sup>1)</sup> und dehnte den Satz von der Gleichheit der mittleren kinetischen Energien auf ein beliebiges System einer be-  
grenzten Anzahl materieller Punkte (Boscovichscher Atome) aus, die auf-

1) Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten. Sitzb. K. Akad. Wien, 8. Oktober 1868.

einander nach irgendeinem Kraftgesetze wirken und sich frei untereinander bewegen; und schließlich gab Maxwell<sup>1)</sup> einen Beweis, der den Satz auf verallgemeinerte Lagrangesche Koordinaten eines beliebigen Systems mit einer endlichen oder unendlich großen Anzahl von Freiheitsgraden erweitert. Er sprach dieses folgendermaßen aus:

„Die einzige Annahme, die für den direkten Beweis nötig ist, besteht darin, daß das System, wenn es in seinem wirklichen Bewegungszustande sich selbst überlassen wird, früher oder später (unendlich nahe<sup>2)</sup>) durch jede Phase geht, die mit der Energiegleichung vereinbar ist“ (S. 709) und ferner (S. 716):

„Es scheint nach dem Satze, daß im schließlichen Zustande des Systems die mittleren<sup>3)</sup> kinetischen Energien zweier Teile des Systems im Verhältnisse der Freiheitsgrade dieser Teile stehen müssen.“

„Dies muß demnach die Bedingung für die Temperaturgleichheit der beiden Teile des Systems sein.“

Ich habe den Beweis<sup>4)</sup>, auf den Maxwell seinen Satz begründet, nie für stark gehalten, und es schien mir stets äußerst unwahrscheinlich, daß er richtig sein kann. Wenn er richtig wäre, würde er sehr wunderbar und in der reinen mathematischen Mechanik äußerst interessant sein. Da er von Boltzmann und Maxwell veröffentlicht ist, muß er unserer ernstesten Aufmerksamkeit wert sein, auch ohne Rücksicht auf seine Bedeutung für die Wärmedynamik. Wenn wir aber seine Bedeutung für diese Wissenschaft beachten und finden, daß er insbesondere in seiner ersten und am nächsten liegenden Anwendung, für die kinetische Gastheorie, zu deren Haupt-

1) „On Boltzmanns Theorem on the Average Distribution of Energy in a System of Material Points“, Maxwells Collected Papers, Bd. II, S. 713 bis 741 und Camb. Phil. Trans. May 6, 1876.

2) Ich habe diese beiden Worte als sicherlich in Maxwells Sinne eingeschoben.

3) Das hier gemeinte Mittel ist ein Zeitmittel in einer hinreichend großen Zeit.

4) Die von Maxwell durchgeführte Art des Beweises und dessen Verbindung mit seinen und Boltzmanns vorangegangenen Überlegungen setzen als eine Konsequenz des allgemeinen Satzes voraus, daß die durchschnittliche kinetische Energie einer jeden der drei rechtwinkligen Komponenten der Bewegung des Trägheitsmittelpunktes eines isolierten Systems, in welchem nur Kräfte zwischen seinen Teilen wirken, gleich der mittleren kinetischen Energie jeder verallgemeinerten Bewegungskomponente relativ zum Trägheitsmittelpunkte ist. Fassen wir beispielsweise als „Teile des Systems“ zwei Partikeln mit den Massen  $m$  und  $m'$  ins Auge, die sich frei nur in einer festen Geraden bewegen können und die durch eine massenlose Feder miteinander verbunden sind. Dann behauptet die Maxwell-Boltzmannsche Theorie, daß die mittlere kinetische Energie der Bewegung des Trägheitsmittelpunktes gleich der mittleren kinetischen Energie der Bewegung relativ zum Trägheitsmittelpunkte ist. Dies ist in dem Wortlaute von Maxwells Satze im Texte enthalten, wenn, jedoch nicht nur wenn,  $m = m'$ . Vgl. die Anmerkung in § 7 meiner Abhandlung „On some Teste-Cases for the Boltzmann-Maxwell Doctrine regarding Distribution of Energy“, Proc. Roy. Soc., 11. Juni, 1891. (Ich hoffe, daß ich den Verfasser hinsichtlich der obigen so auffallenden Behauptung nicht mißverstanden habe. Die richtige Meinung scheint in § 23, vierter Satz, enthalten zu sein. Doch möchte ich in bezug auf den Beweis für den bekannten Maxwellschen Satz von der Geschwindigkeitsverteilung auf meine Ableitung in der Thermodynamik Bd. I, S. 134 f. verweisen, weil aus ihm erhellt, daß eigentlich überhaupt nur Relativbewegungen in Frage kommen. D. H.)



begründen Maxwell gehörte, geradezu destruktiv wirkt, können wir in ihm nur eine Wolke für die mechanische Theorie der Wärme und des Lichtes sehen.

§ 19. Für die kinetische Gastheorie wollen wir uns jede Molekel als einen Haufen Boscovichscher Atome vorstellen. Damit bleibt jede Möglichkeit („mechanische“ oder „elektrische“ oder „physikalische“ oder „chemische“) bezüglich der Natur und Eigenschaften einer Molekel und aller ihrer Teile offen. Die zwischen den Atomen wirkenden Kräfte müssen solche sein, daß der Haufen sich in stabilem Gleichgewichte befindet, solange er ruht. Wenn also der Haufen vom Gleichgewicht aus in Bewegung gesetzt wird, wobei die ihn bildenden Teile in irgendeinen Zustand relativer Bewegung gelangen, darf keiner dieser Teile von ihm fortfliegen, falls nicht etwa die gesamte kinetische Energie der gegebenen anfänglichen Bewegung eine gewisse bestimmte Grenze überschreitet. Ein Gas ist eine ungeheure Anhäufung so definierter Molekeln, von denen jede sich frei im Raume bewegt, außer wenn sie mit einem andern Haufen zusammenstößt, und wo jeder Haufen alle ihn zusammensetzenden Teile unverändert oder doch nur in der Weise verändert beibehält, daß die beiden Haufen bei ihrem Zusammenstoße ähnliche Atome miteinander austauschen.<sup>1)</sup>

§ 20. Der Einfachheit wegen können wir annehmen, daß jedes Atom  $A$  einen bestimmten Wirkungsradius  $\alpha$  besitzt, und daß Atome verschiedener Art,  $A, A'$ , verschiedene Wirkungsradien  $\alpha, \alpha'$  besitzen, in der Weise, daß  $A$  keine Kraft auf irgendein andres Atom  $A', A'' \dots$  ausübt, sobald der Abstand zwischen ihren Mittelpunkten größer als  $\alpha + \alpha'$  bzw.  $\alpha + \alpha''$  usf. ist. Wir brauchen unsere Anschauung nicht mit dem unfaßbaren Begriff eines „Vermögens“ zu verwirren, weder für die Kraft noch für die Trägheit, das in einem mathematischen Punkte<sup>2)</sup>, dem Mittelpunkte des Atoms, seinen Sitz haben soll, und wir dürfen, ohne unserem Denken Zwang anzutun, uns die klare Vorstellung bilden, daß die Substanz (das „Substrat“ von Eigenschaften) nicht einen Punkt bildet und auch nicht unbestimmt im ganzen Raume verbreitet ist, vielmehr bestimmt in dem Raumteile, der von einer sphärischen Fläche begrenzt ist, und dessen Radius der Radius der Wirkung des Atoms und dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt des Atoms ist. In unseren so definierten zwischen den Molekeln wirkenden Kräften liegt kein Widerspruch gegen das alte scholastische „Materie kann nicht wirken, wo sie nicht ist“, aber wir verletzen ausdrücklich das andre scholastische Gesetz „Zwei Materienmengen können nicht gleichzeitig denselben Raum erfüllen“. Wir lassen der Gravitation und möglicherweise der Elektrizität (wahrscheinlich aber nicht dem Magnetismus) die jetzt sehr unpopuläre Idee einer Wirkung in die Ferne.

§ 21. Wir brauchen jetzt nicht (wie in § 16, wo wir so nahe wie möglich bei der alten Idee von zusammenstoßenden elastischen Kügelchen bleiben wollten) anzunehmen, daß die gegenseitigen Kräfte in eine unendlich große Abstoßung übergehen, ehe die sich einander nähernden Mittelpunkte der

1) Der Verfasser braucht Atom und Molekel durcheinander, ich habe ihm folgen müssen. Später bezeichnet er mit „Haufen (cluster)“ Atomkomplexe, also auch Molekeln. D. H.

2) Vgl. Math. and Phys. Papers, Bd. III. Art. XCVII. „Molecular Constitution of Matter“, § 14.

beiden Atome zusammenstoßen. In Übereinstimmung mit Boscovich können wir vielmehr voraussetzen, die Kraft variere nach irgendeinem Gesetze wechselseitiger Anziehung und Abstoßung, ohne daß irgendeine unendlich große Kraft, weder einer Abstoßung noch einer Anziehung, in irgendeinem Abstände besteht; wir müssen jedoch annehmen, daß die Kraft Null wird, wenn die Mittelpunkte zusammenfallen. Wir dürfen sogar die Anschauung zulassen, daß die Mittelpunkte vollkommen zusammenfallen, jedenfalls in einigen besonderen Fällen chemischer Verbindung von zwei oder mehr Atomen; wenn auch wir es für wahrscheinlicher erachten, daß in den meisten Fällen die chemische Verbindung in einer Anhäufung besteht, bei der die Räume der sie zusammensetzenden Atome ineinander übergreifen, ohne daß irgendwelche zwei Mittelpunkte vollkommen zusammenfallen.

§ 22. Das Wort „Zusammenstoß“, das in § 19 ohne Definition benutzt wurde, soll jetzt auf Grund der §§ 20, 21 folgendermaßen unzweideutig definiert werden: Zwei Atome sollen als in Zusammenstoß befindlich während der ganzen Zeit bezeichnet werden, in der ihre Räume übereinander greifen, nachdem sie miteinander in Berührung gekommen sind. Sie gehen vermöge der Trägheit notwendig wieder auseinander, außer wenn etwas Drittes<sup>1)</sup> dazwischen kommt, das sie zwingt, im Übereinandergreifen zu verharren, das heißt, das veranlaßt, daß aus dem Zusammenstoß eine Verbindung entsteht. Entsprechend heißen zwei Atomhaufen im Zusammenstoß befindlich, wenn, nachdem sie vorher getrennt waren, ein Atom oder einige Atome des einen Haufens mit einem oder einigen Atomen des andern übergreifen. Vermöge der Trägheit muß auf einen Zusammenstoß eine Trennung der beiden Haufen, in der im letzten Satze des § 19 beschriebenen Weise, folgen, oder es muß irgendein Atom oder es müssen einige Atome eines Systems oder beider Systeme fortgetrieben werden. Diese letztere Voraussetzung ist eine Tatsachenfeststellung, die in das Gebiet der prächtigen, von Sainte-Clair Deville entdeckten und ohne jede Rücksicht auf die kinetische Gastheorie durchgeführten Dissoziationstheorie fällt. Bei Gasen, die annähernd den Gasgesetzen (von Boyle und Charles) folgen, müssen zwei Haufen im allgemeinen nach einem Zusammenstoße auseinander fliegen. Sie können nicht möglicherweise dauernd miteinander in Verbindung bleiben, ohne daß zuletzt wenigstens ein Atom nach ihrem Zusammenstoße fortgeschleudert wird<sup>2)</sup>, falls nicht ein Drittes dazwischen kommt.

§ 23. Nunmehr fassen wir behufs Anwendung der Boltzmann-Maxwellschen Lehre auf die kinetische Gastheorie zunächst ein einzelnes homogenes Gas ins Auge, also eine ungeheure Ansammlung ähnlicher Atomhaufen, die sich bewegen und in der im letzten Satze des § 19 beschriebenen Weise zusammenstoßen. Die Ansammlung sei so wenig dicht, daß die Zeit, während welcher jeder Haufen sich im Zusammenstoß befindet, im Vergleich mit der Zeit, während deren er durch andre Haufen unberührt bleibt und sein Trägheitsmittelpunkt sich gleichförmig in einer geraden Linie bewegt, sehr kurz

1) Der Verfasser sagt: some third body. Ich habe lieber den unbestimmteren Ausdruck gewählt. Warum übrigens die „Trägheit“ die Atome „notwendig“ wieder auseinanderbringen soll, sehe ich nicht recht ein. Der Verfasser schränkt auch diese Behauptung im folgenden anscheinend ein. D. H.

2) Vgl. Kelvins Math. and Phys. Papers, Bd. III. Art. XCVII. § 33. In dieser Beziehung ersetze man dort das Wort „scarcely“ durch „not“.

ist. Wenn in jedem Haufen  $i$  Atome vorhanden sind, gibt es  $3i$  Bewegungsfreiheiten, das heißt, Freiheiten in drei zueinander senkrechten Richtungen für jedes Atom. Die Boltzmann-Maxwellsche Theorie versichert nun, daß die mittleren kinetischen Energien dieser  $3i$  Bewegungen sämtlich einander gleich sind, welche Kräfte zwischen den Atomen auch wirken mögen. Hiernach ist es, wenn die Dauern der Zusammenstöße nicht in den Zeitmitteln enthalten sind, leicht rechnerisch zu beweisen, daß das Zeitmittel der kinetischen Energie der Komponente der fortschreitenden Geschwindigkeit des Trägheitsmittelpunktes<sup>1)</sup> in irgendeiner Richtung gleich ist irgendeiner der  $3i$  mittleren kinetischen Energien, von denen im vorigen Satze behauptet wird, daß sie ihrerseits einander gleich sind. Es gibt bei dem rechnerischen Beweise Ausnahmen, die der in der letzten Anmerkung zu § 18 angeführten Ausnahme entsprechen; immerhin enthält aber die allgemeine Boltzmann-Maxwellsche Theorie die Behauptung auch in den Fällen, in denen sie aus der Gleichheit der  $3i$  Energien nicht rechnerisch abgeleitet werden kann. So wäre also ohne Ausnahme die mittlere kinetische Energie irgendeiner Komponente des Trägheitsmittelpunktes nach der Boltzmann-Maxwellschen Theorie gleich  $\frac{1}{3i}$  der gesamten kinetischen Energie des Systems. Hieraus ergibt sich für die gesamte mittlere Energie, die potentielle und die kinetische, der Bewegung des Systems, der fortschreitenden und der relativen, das  $3i(1+P)$  fache der mittleren kinetischen Energie einer Komponente der Bewegung des Trägheitsmittelpunktes, wenn mit  $P$  das Verhältnis der mittleren potentiellen Energie der relativen Verschiebungen der Teile zur mittleren kinetischen Energie des ganzen Systems bezeichnet wird. Nun ist nach dem glänzenden und leicht zu beweisenden Satze von Clausius über die Verteilung von Energie in der kinetischen Gastheorie das Verhältnis der Differenz der beiden Wärmekapazitäten zur Wärmekapazität bei konstantem Volumen gleich dem Verhältnisse des Doppelten einer einzelnen Komponente der fortschreitenden Energie zur Gesamtenergie. Wenn wir nach unserer gebräuchlichen Bezeichnung das Verhältnis der Wärmekapazität bei konstantem Druck zur Wärmekapazität bei konstantem Volumen mit  $k$  bezeichnen, finden wir demnach

$$k - 1 = \frac{2}{3i(1+P)}.$$

§ 24. Beispiel 1. Als erstes und einfachstes Beispiel fassen wir ein einatomiges Gas ins Auge. Dann ist  $i = 1$ , und wir finden nach unserer Voraussetzung (der allgemein, vielleicht immer gemachten Voraussetzung) über Atome  $P = 0$ . Hiernach wird  $k - 1 = \frac{2}{3}$ .

Dies ist mehr ein grundlegender Satz in der kinetischen Gastheorie für den Fall einer Energie ohne Energie einer Rotation oder Schwingung der Molekel; aber er kann nicht zur Bestätigung weder des Clausiusschen Satzes noch auch der Boltzmann-Maxwellschen Theorie herangezogen werden. Dieser Satz wird schön am Quecksilberdampf, einem nach der Aussage der

1) Diesen Ausdruck brauche ich der Kürze wegen zur Bezeichnung der kinetischen Energie der gesamten, im Trägheitsmittelpunkte vereinigt gedachten Masse.

Chemiker einatomigen Gase, verdeutlicht, für den Kundt vor vielen Jahren durch einen wunderbar ersonnenen Versuch gefunden hat, daß  $k - 1$  sehr angenähert  $\frac{2}{3}$  ist; und ferner an den neu entdeckten Gasen Argon, Helium und Krypton, für die von Rayleigh und Ramsay gefunden wurde, daß  $k - 1$  nahezu denselben Wert hat. Aber jedes von diesen vier Gasen besitzt eine große Zahl Spektrallinien, und demnach eine große Zahl Schwingungsfreiheiten. Sonach müßte, wenn die Boltzmann-Maxwellsche Theorie richtig ist,  $k - 1$  eigentlich einen äußerst kleinen Wert haben, einen solchen, wie er in dem erdachten Beispiele des folgenden § 26 nachgewiesen ist. Andererseits bietet der Clausiussche Satz keine Schwierigkeit; er sagt nur aus, daß  $k - 1$  in jedem dieser vier Fälle kleiner als  $\frac{2}{3}$  ist, wie dies in jedem Falle sein muß, in dem auch irgendeine rotierende oder schwingende Energie besteht. Und was zu entnehmen ist, besteht nur darin, daß bei den vier Gasen, für die  $k - 1$  experimentell sich gleich  $\frac{2}{3}$  ergeben hat, die Gesamtenergie der rotierenden und schwingenden Energie im Vergleich mit der fortschreitenden Energie äußerst klein ist. Es rechtfertigt sich so in wundervoller Weise die chemische Anschauung, daß Quecksilberdampf praktisch ein atomiges Gas ist, und es zeigt sich ferner, daß Argon, Helium und Krypton ebenfalls praktisch einatomig sind, obwohl an keinem dieser Gase bisher irgendeine chemische Verwandtschaft oder eine Wirkung irgendwelcher Art bemerkt worden ist, aus der Chemiker einen derartigen Schluß hätten ziehen können.

Aber der Satz von Clausius, in Verbindung mit der Theorie der Spektralanalyse, wirft ein neues Licht auf das, was wir jetzt „praktisch einatomiges Gas“ nennen. Er zeigt, daß, wenn wir nicht zugeben wollen, daß Atome durch gegenseitige Zusammenstöße in Rotation oder Schwingungen versetzt werden können (eine äußerst wenig annehmbare Hypothese), jedes Atom mit ihm verbundene Begleiter (oder in ihm oder in seiner Umgebung verdichteten Äther) besitzen muß, die vermöge der Zusammenstöße in relativer Bewegung zu ihm gehalten werden mit einer im Vergleich zur fortschreitenden Energie des ganzen aus dem Atom und seinen Begleitern bestehenden Systems äußerst kleinen Gesamtenergie. Die Begleiter müssen aller Wahrscheinlichkeit nach von im Vergleich zu der des Hauptatoms äußerst kleiner Masse sein. Können sie die „Ionen“ sein, durch die J. J. Thomson die in Luft und andern Gasen durch ultraviolettes Licht, Röntgenstrahlen und Becquerelstrahlen hervorgerufene elektrische Leitfähigkeit erklärt?

Schließlich ist es interessant zu beachten, daß alle von Rayleigh und Ramsay gefundenen Werte von  $k - 1$  etwas kleiner als  $\frac{2}{3}$  sind; für Argon 0,64; 0,61; für Helium 0,652; für Krypton 0,666. Wäre die Abweichung von 0,667 eine zufällige, so würden wahrscheinlich einige Werte kleiner und einige größer ausfallen.

Beispiel 2. Als nächst einfaches Beispiel sei  $i = 2$ , und — ein besonders einfacher Fall — die beiden Atome mögen sich in stabilem Gleichgewichte befinden, wenn sie konzentrisch sind, und unendlich nahe konzentrisch sein, wenn die Haufen sich durcheinander bewegen, so daß sie ein homogenes Gas bilden. Bei dieser Voraussetzung wird  $P = \frac{1}{2}$ , da die mittlere potentielle Energie bei einfachen harmonischen Schwingungen der mittleren kinetischen Energie gleich ist; und in unserem Falle ist nach der Boltzmann-Maxwellschen Theorie die Hälfte der gesamten kinetischen Energie eine schwingende,

während die andere Hälfte eine fortschreitende ist. Man findet dann  $k - 1 = \frac{2}{9} = 0,2222$ .

Beispiel 3. Es sei abermals  $i = 2$ ; es bestehe jedoch stabiles Gleichgewicht, wenn die Mittelpunkte  $C, C'$  der beiden Atome einen bestimmten Abstand  $a$  voneinander haben, und die Atome mögen sich stets sehr nahe in diesem Abstände voneinander befinden, wenn die Haufen nicht gerade zusammenstoßen. Von den relativen Bewegungen der beiden Atome wird gemäß der drei Freiheiten eine schwingend sein und aus sehr kleinen Verkürzungen und Verlängerungen des Abstandes  $CC'$  bestehen, und zwei werden rotierend sein und aus Rotationen um die eine oder die andere von zwei zueinander und zu  $CC'$  senkrechten durch den Trägheitsmittelpunkt gehenden Geraden gebildet werden. Bei diesen Bedingungen und Einschränkungen und bei der Annahme, daß die Hälfte der mittleren kinetischen Energie der Rotation mit der mittleren kinetischen Energie der schwingenden Bewegung von gleicher Größenordnung oder ihr gar nach der Boltzmann-Maxwellschen Theorie genau gleich ist, läßt sich leicht beweisen, daß bei einer Rotation die von der Zentrifugalkraft herrührende Vergrößerung von  $CC'$  über den Betrag  $a$ , den dieser Abstand beim Gleichgewichte besitzt, im Vergleich mit dem größten von der Schwingung herrührenden Werte von  $CC' - a$  äußerst klein sein muß. Also darf man die mittlere potentielle Energie der Rotation gegenüber der potentiellen Energie der Schwingung vernachlässigen. Demnach liefert von den drei Freiheiten relativer Bewegung nur eine einen Beitrag zu  $P$ , und folglich wird  $P = \frac{1}{6}$ . So findet man

$$k - 1 = \frac{2}{7} = 0,2857.$$

Der beste Weg, das Verhältnis der beiden Wärmekapazitäten für ein beliebiges Gas experimentell zu bestimmen, ist der, die beobachtete Schallgeschwindigkeit mit der Newtonschen zu vergleichen. So ist festgestellt worden, daß bei gewöhnlichen Temperaturen und Drucken  $k - 1$  für die umgebende Luft, die ja ein Gemisch aus zwei Gasen, Stickstoff und Sauerstoff, ist, die beide nach der modernen chemischen Theorie zweiatomig sind, nur wenig von 0,406 abweicht. Der größte Wert, den die Boltzmann-Maxwellsche Theorie für zweiatomige Gase liefern kann, ist aber, wie im Beispiel 3 berechnet, 0,2857. Diese bemerkenswerte Abweichung von der Beobachtung reicht aus, die Boltzmann-Maxwellsche Theorie vollkommen zu widerlegen. Wirklich festgestellt bezüglich der Energieverteilung ist nur das, was uns der Clausiussche Satz (§ 23 oben) sagt. Wir finden als Resultat der Beobachtung und richtigen Theorie, daß die mittlere kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung der Molekeln gewöhnlicher Luft 0,609 der gesamten Energie, der potentiellen und der kinetischen, der relativen Bewegung der Teile der Molekeln ist.

§ 25. Die Art der Behandlung des obigen Beispiels 3, für einen aus einer beliebigen, zwei übersteigenden Anzahl, sagen wir  $j + 2$ , nicht in einer Geraden liegender Atome bestehenden Haufen durchgeführt, zeigt uns, daß drei Freiheiten für fortschreitende Bewegung vorhanden sind, ferner drei für Rotationen um Achsen, die durch den Trägheitsmittelpunkt gehen, und endlich  $3j$  Freiheiten für Schwingungen. Demnach wird  $P = \frac{j}{j+2}$ , und man findet  $k - 1 = \frac{1}{3(1+j)}$ . Die so für  $k - 1$  für ein drei- und ein vieratomiges Gas

berechneten Werte und der wie oben im Beispiel 3 für zweiatomige Gase ermittelte Betrag sind in der folgenden Tabelle aufgeführt und den Beobachtungsergebnissen für einige entsprechende Gase gegenübergestellt.

Gas	Werte von $k - 1$	
	Nach der B.-M.schen Theorie	Nach Beobachtung
Luft	$\frac{2}{3} = 0,2857$	0,406
H <sub>2</sub>	" "	0,40
O <sub>2</sub>	" "	0,41
Cl <sub>2</sub>	" "	0,32
CO	" "	0,39
NO	" "	0,39
CO <sub>2</sub>	$\frac{1}{6} = 0,1667$	0,30
N <sub>2</sub> O	" "	0,331
NH <sub>3</sub>	$\frac{1}{3} = 0,1111$	0,311

Es ist interessant zu sehen, wie die Theorie des Clausiusschen Satzes durch die in der Tabelle angeführten Beobachtungsergebnisse bestätigt wird. Die Werte von  $k - 1$  sind für alle Gase kleiner als  $\frac{2}{3}$ , wie sie es sein müssen, wenn eine beträchtliche Rotations- oder Schwingungsenergie in der Molekel vorhanden ist; sie sind für verschiedene zweiatomige Gase verschieden und liegen zwischen 0,42 für Sauerstoff und 0,32 für Chlor, was vollkommen der Erwartung entspricht, wenn man beachtet, daß die Kraftgesetze zwischen zwei Atomen für die verschiedenen Atomarten sehr verschieden sein dürften. Die Werte von  $k - 1$  sind im ganzen genommen für die vier- und dreiatomigen Gase kleiner als für die zweiatomigen Gase, wie nach einer Betrachtung des Clausiusschen Prinzips gleichfalls zu erwarten steht. Es ist wahrscheinlich, daß die Verschiedenheiten der Größe  $k - 1$  für die verschiedenen zweiatomigen Gase wirkliche sind, obwohl bezüglich der Beobachtungsergebnisse für alle oder wenigstens einige Gase außer Luft beträchtliche Unsicherheit besteht. Es ist ferner sicher, daß die Abweichungen von den nach der Boltzmann-Maxwellschen Theorie berechneten Werten wirkliche und große sind, und daß diese Theorie in allen Fällen für zwei-, drei- und vieratomige Gase einen weit kleineren Wert für  $k - 1$  ergibt, als der Wirklichkeit entspricht.

§ 26. Aber in Wirklichkeit irrt die Boltzmann-Maxwellsche Theorie noch ungeheuer weit mehr, als es nach der obigen Tabelle den Anschein hat. Da die Spektralanalyse bei jedem Gase eine große Linienzahl zeigt, erscheint es sicher, daß die Anzahl Freiheiten der jede Molekel zusammensetzenden Teile noch ungemein viel größer ist als die, die wir gezählt haben, und daß demnach, wenn wir nicht jedem einzelnen Atom Schwingungsmöglichkeiten zuschreiben, die Molekel jedes gewöhnlichen Gases in ihrer Konstitution eine weit größere Anzahl Atome besitzen muß, als bisher in der regelrechten chemischen Theorie gerechnet wird. Nehmen wir beispielsweise an, es seien in der Molekel irgendeines besonderen Gases einundvierzig Atome vorhanden; wenn die Theorie richtig wäre, müßte  $j = 39$  sein. Alsdann gäbe es 117 Schwingungsmöglichkeiten, so daß im Spektrum des Gases 117 sichtbare Linien vorhanden sein könnten. Wir hätten aber

$$k - 1 = \frac{1}{120} = 0,0083.$$

Es besteht also tatsächlich keine Möglichkeit, die Boltzmann-Maxwellsche Theorie mit den Tatsachen über die spezifischen Wärmen von Gasen in Einklang zu bringen.<sup>1)</sup>

§ 27. Indessen ist es vollkommen unmöglich, sich mit dem mathematischen Urteil: „Nicht bewiesen“ und mit dem experimentellen Urteil: „Nicht richtig“ in bezug auf die Boltzmann-Maxwellsche Theorie zufrieden zu geben. Ich habe immer die Empfindung gehabt, sie müßte durch Untersuchung eines besonderen Falles mathematisch geprüft werden. Selbst wenn der Satz richtig sein sollte, wäre es — bei der etwas vagen Art, in der er in so allgemeinen Ausdrücken ausgesprochen ist, daß man große Schwierigkeit hat, anzugeben, was er in Wirklichkeit meint — sehr wünschenswert, einen andern einfachen Fall außer dem ursprünglichen von Waterston aufgestellten und rein mathematisch untersuchten und genau geprüften näher anzusehen. Vor zehn Jahren<sup>2)</sup> ersann ich eine Anzahl solcher Kontrollfälle, von denen einige in freundlicher Weise von Boltzmann erklärt worden sind; bisher ist aber kein Beweis, weder für die Richtigkeit noch für die Unrichtigkeit der Theorie, wenn sie auf irgendeinen von diesen Fällen angewandt wird, geliefert worden. Ein Jahr später ersann ich einen Fall, der mir die Theorie endgültig zu widerlegen schien; doch wurde meine Behauptung vollständig und richtig von Boltzmann und Poincaré kritisiert, und erst jüngst hat Lord Rayleigh<sup>3)</sup> sehr deutlich nachgewiesen, daß mein einfacher Fall der Prüfung ganz und gar nicht entscheidend war. Diese letztere Arbeit von Rayleigh veranlaßte mich, die Betrachtung einiger verschiedenen Gruppen von mechanischen Aufgaben, die mich zu verschiedenen Zeiten während der letzten zwanzig Jahre mehr oder weniger beschäftigt hatten, wieder aufzunehmen; jede von diesen Aufgaben enthält äußerst interessante Tatsachen, die in Verbindung stehen mit der Frage: Ist dies ein Fall, der die Anwendung der Boltzmann-Maxwellschen Theorie zuläßt, und wenn ja, ist die Theorie für diesen Fall richtig?

§ 28. Indem wir vorausschicken, daß die mittleren kinetischen Energien, mit denen die Boltzmann-Maxwellsche Theorie sich befaßt, Zeitintegrale über Energien sind, dividiert durch die gesamten Zeiten, können wir passenderweise die ganze Gruppe von Aufgaben, für welche die Theorie in Frage kommt, in zwei Klassen teilen.

Klasse I. Solche, bei denen die in Betracht kommenden Geschwindigkeiten entweder konstant sind oder sich doch nur plötzlich — das heißt in unendlich kleinen Zeiten — ändern, oder in so kurzen Zeiten, daß diese in der Zeitintegration fortgelassen werden dürfen.

a) Der ursprüngliche Fall von Waterston-Maxwell und die Zusammenstöße ideal starrer Körper von beliebiger Form nach dem ange-

1) Ich gestatte mir, auch auf die Bemerkungen in meinem Buche „Thermodynamik und Kinetik der Körper“, Bd. 1, insbesondere S. 73 und S. 192 ff. hinzuweisen. D. H.

2) „On some Test-Cases for the Maxwell-Boltzmann Doctrine regarding Distribution of Energy“, Proc. Roy. Soc., June 11, 1891.

3) Phil. Mag., Bd. XXXIII, 1892, S. 356, „Remarks on Maxwells Investigation respecting Boltzmanns Theorem“.

nommenen Gesetze, daß die fortschreitenden und rotierenden Bewegungen keine Energie bei den Zusammenstößen verlieren.

b) Die reibungslose Bewegung einer oder mehrerer Partikel, die gezwungen sind, auf einer Fläche beliebiger Form zu bleiben; dabei kann diese Fläche entweder geschlossen (man nennt sie gewöhnlich endlich, obwohl sie in Wirklichkeit ohne Ende ist) oder ein begrenztes Gebiet einer ebenen oder gekrümmten, wie ein Billardtisch von einer Bande oder von Banden umgeben sein, an denen aufstoßende Partikel unter Winkeln reflektiert werden, die den Einfallswinkeln gleich sind.

c) Eine geschlossene Fläche, in deren Innenraum sich Partikel ohne Schwingungen frei bewegen, außer während der Stöße von Partikeln aneinander oder an der einschließenden Fläche.

d) Fälle wie a), b) oder c) mit Stößen gegen Grenzflächen oder gegeneinander, die jedoch durch die Annahme endlicher Kräfte während der Stöße gemildert werden, mit der einzigen Bedingung, daß die Dauer der einzelnen Stöße so kurz ist, daß sie praktisch gegenüber der Dauer der freien Bahnen vernachlässigt werden kann.

Klasse II. Fälle, in denen die Geschwindigkeiten wenigstens einzelner der in Betracht gezogenen Partikel manchmal sich allmählich ändern, so allmählich, daß die Zeiten, in denen sie sich ändern, in die Zeitintegration eingeschlossen werden müssen. Zu diesen Fällen gehören derartige Beispiele wie d) der Klasse I, wenn die Dauer der Stöße bei der Zeitintegration nicht vernachlässigt werden darf.

§ 29. Betrachten wir zunächst Klasse I (b) mit einer endlichen geschlossenen Fläche als Bewegungsfeld und einer einzigen auf ihr sich bewegenden Partikel. Bewegt sich die Partikel, so wird sie in aller Ewigkeit längs einer bestimmten geodätischen Linie laufen.<sup>1)</sup> Die Frage, die zuerst aufstößt, ist die: erfüllt die Bewegung die Maxwellsche Bedingung (vgl. § 18 oben), das heißt in diesem Falle, werden wir, wenn wir von einem Punkte  $I$  längs dieser geodätischen Linie lange genug fortwandern, eine unbeschränkt große Anzahl Mal unendlich nahe an einem beliebig gewählten Punkte  $Q$  der Fläche,  $I$  eingeschlossen, vorbeikommen und dabei aus allen möglichen Richtungen? Diese Frage kann nicht ohne Einschränkung in bejahendem Sinne beantwortet werden. Beispielsweise wenn die Fläche genau ein Ellipsoid ist, muß sie verneinend beantwortet werden, wie in den folgenden §§ 30, 31, 32 bewiesen wird.

§ 30. Es seien, Fig. 87,  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  die Endpunkte des größten, des mittleren und des kleinsten Durchmessers eines Ellipsoides. Es seien ferner  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $U_4$  die Nabelpunkte in den Bogen  $AC$ ,  $CA'$ ,  $A'C'$ ,  $C'A$ . Dann sagt uns ein bekannter Satz der Geometrie des Ellipsoides, daß jede durch  $U_1$  gehende geodätische Linie auch durch  $U_3$ , und jede durch  $U_2$  gehende geodätische Linie auch durch  $U_4$  geht. Dieser Satz über geodätische Linien auf einem Ellipsoid mit drei ungleichen Achsen wird also an Fig. 87 verdeutlicht, einer Zeichnung, die für den Grenzfall, in dem die kürzeste Achse Null ist, die genaue Konstruktion einer durch  $U_1$ , hier den Brennpunkt der in der Zeichnung dargestellten Ellipse, gehenden geodätischen

1) Die Folge lehrt, was hier besonders unter geodätischer Linie verstanden ist.  
D. H.



Linie wiedergibt. Die Punkte  $U_3$ ,  $C'$ ,  $U_4$ , die  $U_2$ ,  $C$ ,  $U_1$  unendlich nahe liegen, sind mit den letzteren durch je zwei Buchstaben an derselben Stelle angedeutet. Man gehe von  $U_1$  aus und ziehe die geodätische Linie  $U_1 Q U_3$ ,

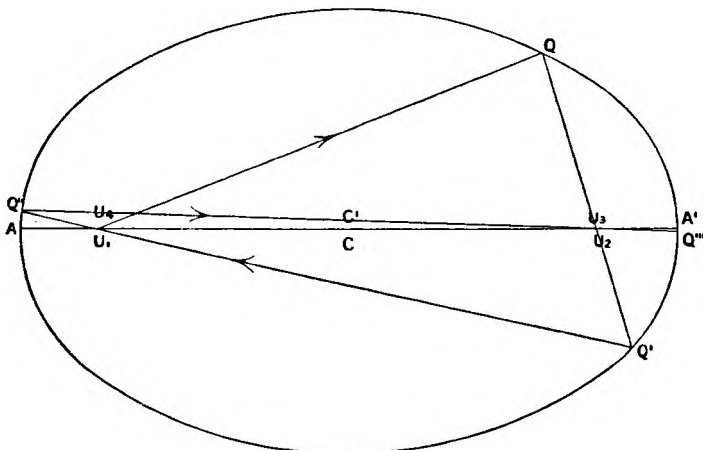


Fig. 87.

deren beide Teile  $U_1 Q$  und  $Q U_3$  gerade Linien sind. Es ist interessant zu sehen, in welcher Richtung man auch von  $U_1$  ausgehen möge, wenn man die geodätische Linie durch  $U_3$  und dann wieder durch  $U_1$  weiterführt und so

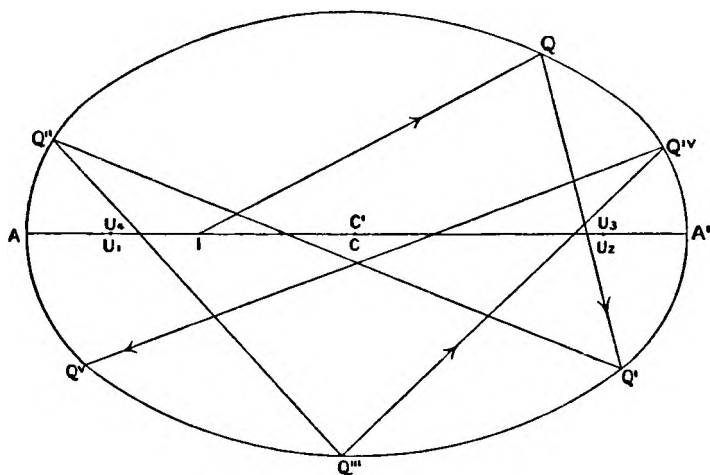


Fig. 88.

fort ohne Ende, wie es in der Zeichnung durch die geraden Linien  $U_1 Q$ ,  $U_3 Q'$ ,  $U_1 Q''$ ,  $U_3 Q'''$  und so fort angedeutet ist, man sehr rasch zu Geraden kommt, die immer dichter sich an die große Achse schmiegen. In jedem Punkte, in dem die Bahn die Ellipse berührt, wird sie so reflektiert, daß die Winkel mit der Tangente gleich sind. Die Konstruktion wird äußerst leicht ausgeführt, indem man den Winkel zwischen der reflektierten Bahn und einer

nach dem einen Brennpunkte gezogenen Geraden, dem Winkel zwischen der ankommenden Bahn und einer Geraden nach dem andern Brennpunkte gleichmacht.

§ 31. Wir gehen jetzt auf das Ellipsoid zurück und ziehen von einem Punkte  $J$  zwischen  $U_1$  und  $U_2$  die geodätische Linie  $JQ$  und führen sie durch  $Q$  auf der Ellipsoidfläche weiter. Sie muß den Bogen  $A'C'A$  in irgendeinem Punkte zwischen  $U_3$  und  $U_4$  schneiden, und wenn sie immer weiter fortgesetzt wird, muß sie die Ellipse  $ACA'C'A$  immer zwischen  $U_1$  und  $U_2$  oder zwischen  $U_3$  und  $U_4$ , wird sie aber niemals zwischen  $U_2$  und  $U_3$  oder  $U_4$  und  $U_1$  schneiden. Dies wird für den Grenzfall, wenn die kleinste Achse Null ist, durch die Bahn  $JQQ'Q''Q'''Q^{IV}Q^V$  in Fig. 88 verdeutlicht.

§ 32. Wenn wir jetzt andererseits eine geodätische Linie in irgendeinem zwischen  $U_1$  und  $U_4$  oder zwischen  $U_2$  und  $U_3$  liegenden Punkte  $J$  ihren

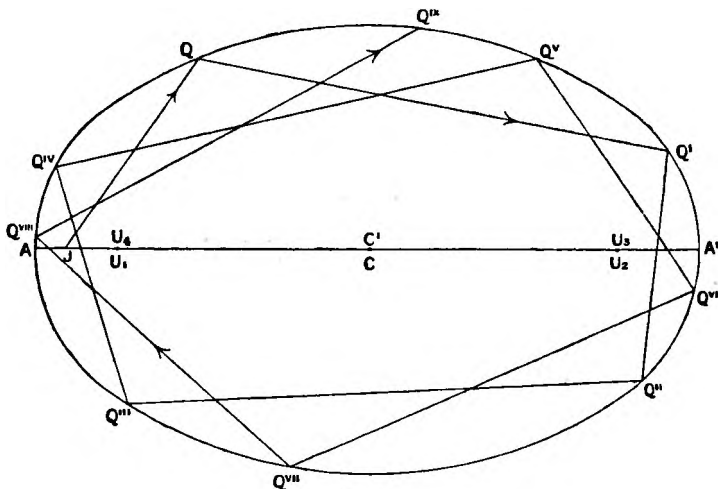


Fig. 89.

Anfang nehmen lassen, so wird sie den die Umbilikalpunkte enthaltenden Hauptschnitt nie, weder zwischen  $U_1$  und  $U_2$  noch zwischen  $U_3$  und  $U_4$  treffen. Dies wird für den Grenzfall  $CC' = 0$  durch Fig. 89 verdeutlicht.<sup>1)</sup>

§ 33. Es erscheint aber nicht unwahrscheinlich, daß, wenn die Form noch so wenig von der genau ellipsoidischen abweicht, die Bedingung von Maxwell doch erfüllt sein dürfte. Ja, man möchte es sogar für sehr wahrscheinlich halten, daß Maxwells Bedingung (vgl. §§ 13, 29 oben) durch eine geodätische Linie auf einer geschlossenen Fläche beliebiger Gestalt im allgemeinen erfüllt ist, und daß Ausnahmefälle, in denen die Frage des § 29 verneinend zu beantworten ist, nur besondere Flächen bestimmter Form sind, so daß bereits unendlich kleine Abweichungen von diesen Formen die Beantwortung der Frage in bejahendem Sinne ermöglichen.

§ 34. Was behauptet aber bei einer bejahenden Antwort auf die Frage — ist die Maxwellsche Bedingung erfüllt? — die Boltzmann-Maxwellsche

1) Also gibt es in diesem Falle in der Tat Punkte die nicht getroffen werden, wäre im Original zu ergänzen. D. H.

Theorie bezüglich einer geodätischen Linie an einer geschlossenen Fläche? Der bloße Wortlaut des Maxwellschen Satzes, wie er oben in § 13 sich angeführt findet, ist auf diesen Fall nicht anwendbar, aber der Sinn der Theorie, wie er in früheren Schriften von Boltzmann sowohl als von Maxwell und in späteren Schriften von Boltzmann und von Rayleigh<sup>1)</sup>, dem jüngsten Verfechter der Theorie, gedeutet wird, ist der, daß eine geodätische Linie, wenn sie nur weit genug fortgeführt wird, nicht bloß Maxwells Bedingung, unendlich nahe an jedem Punkte der Fläche in allen Richtungen vorüberzugehen, erfüllt, sondern daß sie in allen Richtungen gleich oft vorbeigeht, und daß sie ebensooft in einem bestimmten unendlich kleinen Abstände  $\pm \delta$  an irgendeinem Punkte  $P$  vorbeikommt, als sie es an jedem andern Punkte  $P'$  auf der ganzen Fläche tut. Dieser Satz, wenn richtig, wäre äußerst interessant.

§ 35. Ich habe viele Anstrengungen gemacht, ihn für den Fall zu prüfen, daß die geschlossene Fläche sich auf eine Ebene mit einer andern Grenzlinie als einer genauen Ellipse reduziert (für den, wie wir in den §§ 30, 31, 32 gesehen haben, die Untersuchung fehlschlägt, da die Maxwellsche Vorbedingung nicht erfüllt ist). Jeder solche Fall liefert, wie wir gesehen haben, gerade Linien, die innerhalb der eingeschlossenen Fläche ziehen und sich beim Verlassen der Grenzlinie nach dem Gesetze gleicher Einfalls- und Reflexionswinkel umwenden. Das entspricht also dem Falle einer gedachten vollkommen glatten, nicht rotierenden Billardkugel, die sich sonst in geraden Linien bewegt, außer, wenn sie die Bande des Tisches berührt; dabei kann die Bande eine beliebige Form statt der rechteckigen eines gewöhnlichen Billardtisches besitzen, sie muß aber vollkommen elastisch sein. Eine interessante Veranschaulichung, die leicht in einem großen Vorlesungssaale gezeigt werden kann, erhält man, wenn man ein dünnes Holzbrett in beliebiger Form so ausschneidet, daß die Ecken des Randes leicht abgerundet sind, und wenn man nun einen starken schwarzen Faden viele Male umwickelt, indem man mit einem in einem beliebigen Punkte des Brettes befestigten Ende beginnt. Wenn der Druck des Fadens gegen die Ränder vollkommen reibungslos wäre, würde sich bei jeder Windung um den Rand der Faden sich von selbst so einstellen, daß das Gesetz gleicher Einfalls- und Reflexionswinkel mit der vermöge der Dicke des Brettes eintretenden Modifikationen erfüllt wird. Der Haltbarkeit wegen wäre es nötig, Stellen des Fadens an dem Brette durch eine hinreichende Zahl eingetriebener Stifte festzuhalten; dabei ist jedoch darauf zu achten, daß der Faden an keiner Stelle durch einen solchen Stift aus seiner geraden Richtung abgelenkt wird.

§ 36.<sup>2)</sup>

1) Phil. Mag. Januar 1900.

2) Der § 36 enthält die Beschreibung einer Methode, aufeinander folgende durch vollständige Reflexion abgebeugte Wege innerhalb einer beliebigen Kurve durch Benutzung eines Spiegelbildes zu bestimmen, die ohne die vorausgesetzte Vorführung nach dem Text sehr schwer zu verstehen ist. Ich gebe hier nur die neben-

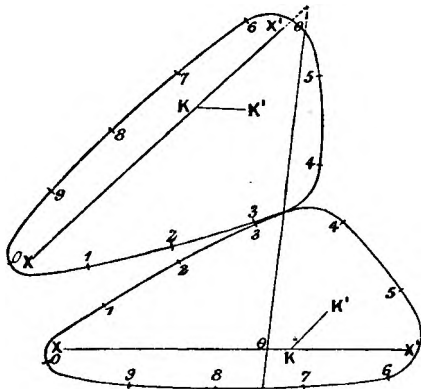


Fig. 90.

§ 37. In einem von Prof. Anderson ausgeführten Versuch legte ein Ball 600 Wege innerhalb eines Dreiecks zurück. Die reflektierten Wege konnten dadurch ermittelt werden, daß man das Dreieck und daran ein entgegen liegendes gleiches zeichnete. In diesem Dreieck, Fig. 91, ist  $BC$  20 cm und die Winkel bei  $A, B, C$  betragen  $97^\circ; 29,5^\circ; 53,5^\circ$ . Ging ein Weg im ersten Dreieck von  $P$  bis  $Q$ , Fig. 91, so verlängerte man ihn in das zweite Dreieck bis  $R$  und klappte dieses Dreieck an der Berührungslinie  $AB$  über das erste Dreieck; das umgelegte  $QR$  gab den reflektierten Weg im ersten Dreieck. Für jeden Weg wurde seine Länge  $l$ , auf Millimeter abgerundet, und seine Neigung  $\theta$  gegen eine bestimmte der Dreiecksseiten,  $BC$ , auf Grade abgerundet, gemessen. Mit jedem  $l$  und  $\theta$  würden noch  $l \cos 2\theta$  und  $l \sin 2\theta$  berechnet. Das Ganze wurde tabuliert. So fand sich für die 600 Wege in Zentimeter:

$$\sum l = 3298; \quad \sum l \cos 2\theta = + 128,8; \quad \sum l \sin 2\theta = - 201,9.$$

Man beachte nun: wenn die Masse der bewegten Partikel 2 Gramm und die Geschwindigkeit 1 cm in der Sekunde beträgt, so ist  $\sum l \cos 2\theta$  der Überschuß des Zeitintegrals kinetischer Energie der zu  $BC$  parallelen Bewegungskomponente über das entsprechende Zeitintegral der zu  $BC$  senkrechten Bewegungskomponente, und bedeutet  $\sum l \sin 2\theta$  den Überschuß des Zeitintegrals kinetischer Energie der zu  $KK'$  senkrechten über das der Energie der zu  $KK'$  parallelen Bewegungskomponente<sup>1)</sup>; dabei ist  $KK'$  gegen die Richtung von  $BC$  unter  $45^\circ$ , wie in der Figur angegeben, geneigt. Demgemäß weist der positive Wert von  $\sum l \cos 2\theta$  auf ein Überwiegen kinetischer Energie hin, die von einer zu  $BC$  parallelen Bewegungskomponente herrührt, über die Energie der zu  $BC$  senkrechten Bewegungskomponente, und das negative Zeichen von  $\sum l \sin 2\theta$  zeigt ein Überwiegen kinetischer Energie der zu  $KK'$

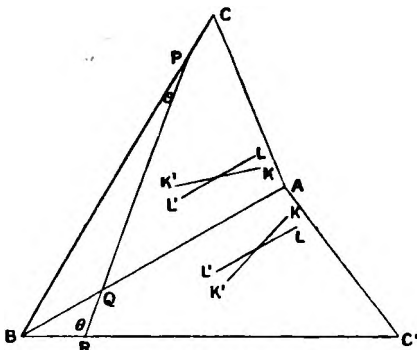


Fig. 91.

hin, die von einer zu  $BC$  parallelen Bewegungskomponente herrührt, über die Energie der zu  $BC$  senkrechten Bewegungskomponente, und das negative Zeichen von  $\sum l \sin 2\theta$  zeigt ein Überwiegen kinetischer Energie der zu  $KK'$

stehende Figur 90 wieder, die das Verhältnis von Kurve und Spiegelbild darstellt. Ein Punkt, der zwischen 7 und 8 auf der unteren Kurve (bei 7,46) ausgeht und zwischen 3 und 4 (bei 3,29) gegen diese Kurve stößt, würde, reflektiert, nach einer Stelle dieser Kurve fliegen, deren Nummer man findet, indem man im Spiegelbild der Kurve (so genommen, daß es am Auftreffpunkt der Kurve diese berührt) die erste Linie durch den Berührungspunkt weiter führt. Sie trifft das Spiegelbild zwischen 5 und 6 bei 5,47. Das ist also die Nummer des Punktes, in dem die reflektierte Linie die erste Kurve trifft. Ein entsprechender Fall wird übrigens in § 37 behandelt. D. H.

1) Die Energie für den wirklichen Weg ist

$$2 \frac{1}{2} \sum \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 dt = 2 \frac{1}{2} \sum \frac{dl}{dt} dl = 2 \frac{1}{2} \sum dl = l,$$

da  $\frac{dl}{dt}$  konstant gleich 1 ist. Entsprechendes gilt für die Komponenten, z. B.  $l \cos^2 \theta$  und  $l \sin^2 \theta$  parallel  $BC$  und senkrecht dazu, was als Differenz  $l \cos 2\theta$  ergibt. D. H.

parallelen Bewegungskomponente über die Energie der zu  $KK'$  senkrechten. Leitet man nun weiter die Lage zweier zueinander senkrechten Richtungen ab, die der größten und der kleinsten kinetischen Energie entsprechen, so findet man, daß  $LL'$ , die gegen  $KK'$  in der angedeuteten Richtung unter einem Winkel  $= \frac{1}{2} \arctg \frac{128,8}{201,9}$  geneigte Gerade, die ist, die wir als Achse größter Energie bezeichnen dürfen, und eine zu  $LL'$  senkrechte Gerade als Achse kleinster Energie; und der Überschuß des Zeitintegrals der Energie der zu  $LL'$  parallelen Komponente übersteigt den des Zeitintegrals der Energie der zu  $LL'$  senkrechten Komponente um

$$\sqrt{(128,8)^2 + (201,9)^2} = 239,4.$$

Dies ist nun 7,25 Prozent des Betrages von  $\Sigma l$ , des Zeitintegrals der gesamten Energie.<sup>1)</sup> So finden wir in unseren Resultaten eine sehr merkliche Abweichung von der Boltzmann-Maxwellschen Theorie, welche ja behauptet, daß die Zeitintegrale der Komponenten kinetischer Energien für alle Richtungen der Komponente die nämlichen sind. Der Prozentsatz, den wir so durch unmittelbaren Versuch festgestellt haben, ist nicht sehr groß, und sehr wahrscheinlich dürften die Additionen anderer Reihen von 600 Strecken beträchtliche Abweichungen von diesen Ergebnissen zeigen, sowohl hinsichtlich der Größe der Abweichung von der Gleichheit als auch hinsichtlich der Richtung der Achsen größter und kleinster Energie. Immerhin besteht meiner Meinung nach starke Wahrscheinlichkeit, daß die Widerlegung der Boltzmann-Maxwellschen Theorie hier eine tatsächliche ist, und daß die Abweichung ungefähr in der angedeuteten Größe und Richtung liegt. Ich werde in meiner Anschauung noch durch Untersuchung der 30 Summen für aufeinander folgende Reihen von 20 Windungen bestärkt; in dieser Weise finde ich  $\Sigma l \cos 2\theta$  für 18 von den 30 positiv und  $\Sigma l \sin 2\theta$  für 19 von den 30 negativ.

§ 38. Ein sehr interessanter Probefall ist der in der nebenstehenden Zeichnung Fig. 92 dargestellte — eine kreisförmige Grenzlinie mit halbkreisförmigen Einschnürungen. In diesem Falle muß wegen der Symmetrie das Zeitintegral kinetischer Energie einer zu irgendeiner Geraden parallelen Komponente auf die Dauer offenbar gleich dem der Energie der zu irgendeiner anderen Geraden parallelen sein. Allein die Boltzmann-Maxwellsche Theorie behauptet, daß die Zeitintegrale der beiden Komponenten, der radialen und der transversalen, nach Polarkoordinaten gleich sein werden. Um dies zu prüfen, habe ich den Fall einer unendlich großen Anzahl der halbkreisförmigen Einschnürungen gewählt, so daß es nicht nötig ist, in das Zeitintegral die Zeiten zwischen aufeinander folgenden Stößen der Partikel innerhalb irgendeines der Halbkreise einzubeziehen. In diesem Falle würde aber die geometrische Konstruktion die genaue Stelle  $Q$ , an der die freie Bahn den Durchmesser  $AB$  einer halbkreisförmigen Einschnürung schneidet, der sie sich nähert, nicht nachweisen; und ich bin der Schwierigkeit in einer nachfolgenden, für thermodynamische Anwendung, wozu die kinetische Gastheorie dient, durchaus geeigneten, Weise aus dem Wege gegangen. Ich teilte die

1) Auch  $\Sigma l \cos 2\theta$  und  $\Sigma l \sin 2\theta$  sollten Null sein, weichen aber davon um + 3,9 und — 6,1 Prozent ab. Die 7,25 Prozent sind die größte Abweichung von Null.  
D. H.

Hälfte von  $AB$  in 100 Teile und nahm 100 Karten<sup>1)</sup>, 0,1, . . . , 98,99 zur Darstellung der Abstände der Teilpunkte einer oder der anderen Seite vom Mittelpunkte von  $AB$ , und wählte eine Karte, deren Nummer dann den Punkt feststellte. Die Karten wurden jedesmal vorher ordentlich gemischt. Durch Werfen einer Münze, wobei Schrift und Wappen + und — entsprachen, wurde dann die Seite zur Mitte von  $AB$  bestimmt. Die Bedeutung der Münzzeichen wurde, um Ungleichheiten in der Münze zu neutralisieren, öfter gewechselt.

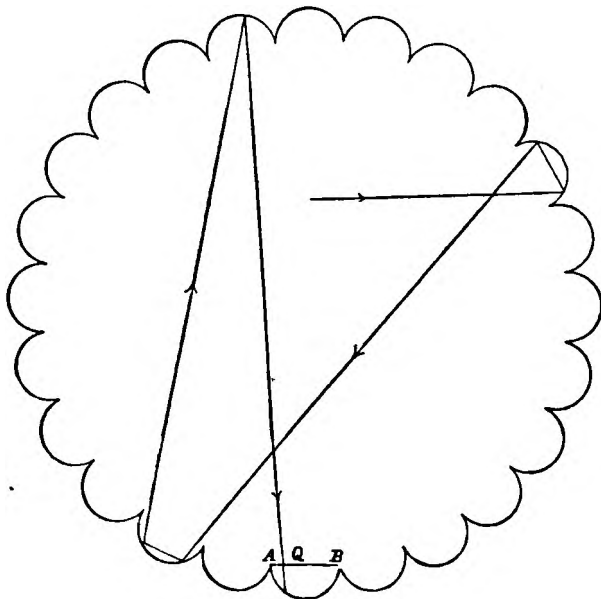


Fig. 92.

Nachdem so der Eintrittspunkt gefunden war, wurde eine geometrische Konstruktion in großem Maßstabe angefertigt zur Bestimmung der aufeinander folgenden Anstoßpunkte und des Winkels  $\vartheta$ , unter dem die rückkehrende Bahn den Durchmesser  $AB$  jeweilig schneidet. Die Neigung der Bahn gegen den Durchmesser  $AB$  der halbkreisförmigen Einschnürung eben vor dem Auftreffen hat denselben Wert  $\vartheta$ . Wenn wir den Durchmesser des großen Kreises mit 1 bezeichnen, ist die Länge jedes Fluges

$\sin \vartheta$ . Wenn ferner die Geschwindigkeit 1 und die Masse der Partikel 2 ist, wird demnach das Zeitintegral der gesamten kinetischen Energie für jede Bahn  $\sin \vartheta$ , und es läßt sich leicht beweisen, daß die Zeitintegrale der Quadrate der Komponenten der Geschwindigkeit, derjenigen senkrecht gegen die Verbindungslinie eines jeden Punktes der Bahn mit dem Mittelpunkte des großen Kreises und derjenigen längs dieser Verbindungslinie bzw.  $\vartheta \cos \vartheta$  und  $\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta$  sind. Durch Summation für 143 Bahnen haben wir gefunden

$$\Sigma \sin \vartheta = 121,3; \quad \Sigma \vartheta \cos \vartheta = 54,15;$$

1) Ich habe es mit numerierten Kärtchen (kleinen Papierquadraten) versucht, die man aus einem Gefäße zog, jedoch mit sehr unbefriedigendem Erfolge. Die beste Art der Mischung, die wir in dem Gefäße vornehmen konnten, war in keiner Weise ausreichend, gleiche Chancen für alle Kärtchen sicherzustellen. Dagegen schienen große Karten von der Form gewöhnlicher Spielkarten, wenn sie gut durchmischt wurden, für jede Karte nahe vollkommen gleiche Chancen zu bieten. Aber auch bei großen Karten kam manchmal elektrische Anziehung zur Wirkung, die ein Zusammenkleben zweier verursachte. Benutzt man die Finger zum Mischen trockener Karten- oder Papierblätter in einem Gefäße, so hat man von der Elektrisierung eine beträchtliche Störung zu erwarten.

hieraus folgt

$$\Sigma (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta) = \Sigma \vartheta \cos \vartheta + 13,0.$$

Dies ist eine merkliche Abweichung von der Boltzmann-Maxwellschen Theorie, nach der  $\Sigma (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta)$  gleich  $\Sigma \vartheta \cos \vartheta$  sein müßte. Wir haben also ermittelt, daß die erstere Summe die letztere um einen Betrag übersteigt, der 10,7 Prozent der ganzen Summe  $\Sigma \sin \vartheta$  ausmacht.

Aus 14 Reihen von je 10 Bahnen finde ich, daß das Zeitintegral der transversalen Energiekomponente bei 12 Reihen kleiner ist als die Hälfte des Zeitintegrals der ganzen Energie und nur bei zweien größer. Dies scheint mir auch hier außer Zweifel zu stellen, daß die Abweichung von der Boltzmann-Maxwellschen Theorie eine wirkliche ist, und daß das schließliche Zeitintegral der transversalen Energiekomponente sicherlich kleiner ist als das Zeitintegral der radialen Energiekomponente.

§ 39. Es ist interessant zu bemerken, daß unser vorliegendes Resultat nach dem Prinzip des Brewsterschen Kaleidoskops anwendbar ist auf die Bewegung einer in einem geschlossenen Raume von der pfriemartigen Form der Fig. 93 umherfliegenden Partikel (vgl. § 38 oben), wenn ihr Einfallswinkel ein rationaler aliquoter Teil von  $360^\circ$  ( $360^\circ/i$ )<sup>1)</sup> ist. Die Symmetrie zeigt, daß die Achsen der größten und kleinsten kinetischen Energie in Richtung der Mittellinie der Länge der Figur und senkrecht zu dieser liegen müssen. Wir schließen hiernach, daß das Zeitintegral der kinetischen Energie ein Maximum für die longitudinale und ein Minimum für die transversale Komponente ist. Gegen die Folge der 143 Wege nach Fig. 92, die wir untersucht haben, ist übrigens die Anzahl der Bahnen in Fig. 93 wegen der Reflexionen an den fast geraden Wandungen der oberen Teile viele Mal 143. Dabei ist zu beachten, daß wir nur Bewegung in einer durch die Achse der Pfriemfigur gehenden Ebene betrachten.

§ 40. Die schwierigste und ernstlich mühevollste statistische Untersuchung der Verteilung von Energie, die ich bisher unternommen habe, war die, die Verhältnisse zwischen fortschreitenden und rotierenden Energien in allen den mannigfachen Fällen zu finden, in denen ein rotierender Körper vielfache Reflexionen an zwei festen parallelen Ebenen, zwischen denen er sich bewegt, oder an einer Ebene erleidet, gegen die er durch eine durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehende konstante Kraft oder durch eine dem Abstände von der Ebene direkt proportionale veränderliche Kraft zurückgeführt wird. Zwei verschiedene Rotatoren wurden in Betracht gezogen. Der eine von ihnen besteht aus zwei gleichen Kugeln, die an den Enden eines gewichtlosen starren Stabes befestigt sind, und deren jede beim Auftreffen auf eine der beiden Ebenen reflektiert wird. Der andere besteht aus zwei Kugeln 1



Fig. 93.

1) Vgl. meine *Electrostatics and Magnetism*, § 208 für das ähnliche Prinzip in Anwendung auf elektrische Bilder.

und 100, die gleichfalls an den Enden eines gewichtlosen starren Stabes befestigt sind und von denen die kleinere Kugel frei durch die Ebene geht, ohne daß auf sie irgendeine Kraft wirkt, während die größere jedesmal, wenn sie auftrifft, reflektiert wird. Dieser zweite Rotator kann auch, in mancher Beziehung einfacher, als eine harte gewichtslose Kugel beschrieben werden, die irgendwo in ihr exzentrisch befestigt eine Masse = 1 enthält und eine zweite, in ihrem Mittelpunkt befestigte Masse = 100 besitzt. Sie soll der Kürze wegen als eine überhängende Kugel bezeichnet werden.

§ 41. In jedem Falle eines rotierenden Körpers, dessen Rotation durch einen Stoß geändert wird, haben wir es mit einer transzendentalen Aufgabe reiner Kinematik zu tun, die ihrem Wesen nach darin besteht, den Zeitpunkt und die Art des ersten Anstoßens zu finden, und mit einer zweiten ähnlichen Aufgabe, nämlich zu finden, ob ein zweites Aufstoßen stattfindet, und wenn dies der Fall ist, dieses zu bestimmen. Klappernde Zusammenstöße von zwei-, drei-, vier-, fünf- oder mehrmaligem Anstoßen können natürlich vorkommen, ja, bis auf den Grenzfall eines unendlich häufigen Anstoßens und eines Zusammenstoßens, das virtuell einem allmählich sich ändernden endlichen Drucke entspricht. Doch war drei die größte Anzahl von Stößen, die wir in irgendeiner unserer Berechnungen gefunden haben. Die erste dieser transzendentalen Aufgaben, die uns in jedem Falle entgegentritt, besteht darin, den kleinsten Wert von  $\vartheta$  zu finden, der der Gleichung genügt

$$\vartheta - i = \frac{\omega a}{v} (1 - \sin \vartheta).$$

Hier ist  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers vor dem Zusammenstoße,  $a$  ist die Länge eines gewissen Rotationsarms,  $i$  seine Neigung gegen die reflektierende Ebene in dem Augenblicke, in dem sein Trägheitsmittelpunkt eine zur reflektierenden Ebene parallele, um  $a$  von ihr entfernte Ebene  $F$  schneidet, und  $v$  die Geschwindigkeit des Trägheitsmittelpunktes des rotierenden Körpers. Diese Gleichung wird im allgemeinen leicht durch Rechnung (*regula falsi*) aufgelöst, aber bequemer durch ein naheliegendes kinematisches Verfahren, dessen einfachste Form ein rollender Kreis, der einen Arm von anpassungsfähiger Länge trägt, ist. Bei unserer ersten Bearbeitung führten wir die Lösung rechnerisch aus, später kinematisch. Wenn der Abstand zwischen den beiden parallelen Ebenen im Vergleich mit  $2a$  (dem wirksamen Durchmesser des rotierenden Körpers) mäßig ist, läßt sich  $i$  für den Anfang eines Zusammenstoßes mit einer Ebene aus dem Ende des vorhergehenden Zusammenstoßes mit der andern Ebene durch eine transzendente Gleichung nach demselben Prinzip berechnen, wie das ist, das wir soeben betrachtet haben. Ich nahm jedoch an, daß der Abstand zwischen den beiden Ebenen sehr groß, praktisch unendlich groß im Vergleich mit  $2a$  ist, und wir haben demgemäß  $i$  durch Lösen für jeden Zusammenstoß gefunden, indem wir 180 Karten, entsprechend den 180 Winkelgraden, benutzten. Im vorliegenden Falle waren verschiedene, gleich wahrscheinliche Werte im Gebiete von  $360^\circ$  erforderlich, und wir fanden sie, indem wir sie aus einem Paket von 180 Karten zogen und für plus und minus, zur Unterscheidung, ob unter oder über  $180$ , eine Münze schleuderten.

§ 42. Eine Summation für 110 Bahnen der rotierenden Einrichtung, wenn sie aus zwei gleichen Massen besteht, ergab als Zeitintegral der ganzen Energie



200,03, und einen Überschuß rotierender Energie über fortschreitende von 42,05. Das sind genau 21 Prozent der ganzen; eine große Abweichung von der Boltzmann-Maxwellschen Theorie, die die Zeitintegrale fortschreitender und rotierender Energie als gleich annimmt.

§ 43. Bei der Lösung für die zweite Einrichtung (Massen 1 und 100) fanden große Unregelmäßigkeiten statt, die von „gut Glück“ beim Werfen für plus und minus herrührten, insbesondere wenn fünf oder sechs Plus oder fünf oder sechs Minus hintereinander fielen. Wir haben deswegen, nachdem wir eine Folge von 200 Bahnen mit sämtlichen durch Losen bestimmten Winkeln berechnet hatten, eine zweite Folge von 200 Bahnen mit der gleichen Reihe von Winkeln berechnet, die durch dieselben Zahlen, jedoch mit geänderten Zeichen wiedergegeben waren. Die Addition für die gesamten 400 Bahnen ergab als Zeitintegral der ganzen Energie 555,55 und einen Überschuß von 82,5 des Zeitintegrals der fortschreitenden über das Zeitintegral der rotierenden Energie. Dies macht annähernd 15 Prozent aus. Doch kann ich zu diesem Resultat kein großes Zutrauen fassen, da die erste Reihe von 200 Bahnen die fortschreitende Energie nur um einen geringen Prozentsatz (2,3) kleiner ergab, die zweite Reihe von 200 dagegen um den Prozentsatz 35,9 größer als die rotatorische Energie ergab.

§ 44. Alle unsere bisher im einzelnen betrachteten oder durchgeführten Beispiele gehören dem Falle I des § 28 an. Zur ersten Untersuchung der Klasse II fassen wir einen Fall ins Auge, der in die Fälle der geodätischen Linie auf einer geschlossenen Oberfläche  $S$  taucht. Anstatt aber, daß der Punkt gezwungen wird, auf der Fläche zu bleiben, möge er unter dem Einflusse eines Kraftfeldes stehen, wodurch er mit einer endlichen Energie nach der Fläche hingezogen wird, wenn er sich irgendwo nahe der Fläche auf einer der beiden Seiten befindet, so daß, wenn die Partikel sich auf  $S$  selbst befindet und von ihr normal nach innen oder nach außen geschleudert wird, sie zurückgeführt wird, ehe sie sich weiter von der Fläche als um einen Abstand  $h$  entfernt, der klein ist im Vergleich mit dem kleinsten Krümmungsradius irgendeines Teiles der Fläche. Die Boltzmann-Maxwellsche Theorie behauptet nun, daß das Zeitintegral kinetischer Energie der zur Fläche normalen Bewegungskomponente gleich einem Drittel der kinetischen Energie der gegen die Normale rechtwinkligen Komponente ist; unter Normale wird hier eine Gerade verstanden, die von der wirklichen Lage des Punktes zu irgendeiner Zeit aus senkrecht gegen den nächstgelegenen Teil der Fläche  $S$  gezogen ist. Dies wäre, falls richtig, ein sehr bemerkenswerter Satz. Wenn  $h$  unendlich klein ist, haben wir einfach die mathematische Bedingung eines Zwanges für den Punkt, an der Oberfläche zu bleiben, und die Bahn der Partikel ist genau eine geodätische Linie. Wenn die nach  $S$  gerichtete Kraft Null ist, sobald der Abstand auf einer der beiden Seiten von  $S$  die Strecke  $\pm h$  erreicht, haben wir den Fall einer, zwischen zwei führenden Flächen mit sehr kleinem Abstände  $2h$  voneinander, fliegenden Partikel. Sind beide führenden Flächen in jedem Normalschnitte nach außen konvex, so wird die Partikel, wenn sie sich an der äußeren führenden Fläche befindet und in ihr in einer beliebigen Richtung mit irgendeiner großen oder kleinen Geschwindigkeit fortgeschleudert ist, für alle Zeit an dieser Führungsfläche bleiben und sich auf einer geodätischen Linie fortbewegen. Wird sie nun sehr wenig

von der Bewegung in dieser Fläche abgelenkt, so daß sie gegen die innere Führungsfläche stößt, so kann man sehr leicht erkennen, daß die Energie des Hinundherschleuderns zwischen den beiden Flächen, von einem beliebig kleinen Betrage zu Anfang, auf die Dauer ein Zeitintegral erhält bis zur Größenordnung des Zeitintegrals der doppelten Energie der tangentialen Bewegung in den beiden Flächen. Wird aber ihr schließlicher Betrag genau ein Drittel desjenigen der tangentialen Energie sein, wie es nach der Aussage der Theorie sein müßte? Wir sind jedoch so wieder auf die Klasse I zurückgekommen; wir sollten bei Klasse II bleiben, indem wir die auf die Partikel wirkende Normalkraft, wie groß auch, doch endlich annehmen.

§ 45. Sehr interessante Fälle der Klasse II des § 28 stoßen uns in Verbindung mit den in den §§ 38, 41, 42, 43 durchgeführten Fällen der Klasse I auf.

§ 46. Der Radius des großen Kreises in § 38 werde unendlich groß; dann haben wir eine Ebene  $F$  (eine Flur) mit halben kreiszyklindrischen Riefen oder, wie wir kurz sagen, mit halbkreisförmigen Riefen; dabei soll die Bewegung auf eine zu  $F$  und zu den Kanten der Riefen senkrechte Ebene beschränkt sein. Der besseren Bestimmtheit wegen wollen wir für  $F$  die durch die Kanten der Riefen bestimmte Ebene wählen. Jetzt würde eine Partikel nicht mehr wie in § 38 nach dem Anstoßen längs der Sehne des Kreises weiterfliegen, sondern sich für alle Zeit in einer geraden Linie bewegen. Um sie nach der Ebene  $F$  zurückzuführen, mag auf sie entweder ( $\alpha$ ) eine nach der Ebene hin gerichtete dem Abstände von ihr einfach proportionale Kraft oder ( $\beta$ ) eine konstante Kraft wirken. Diese letztere Annahme ( $\beta$ ) bietet uns den sehr interessanten Fall einer elastischen Kugel dar, die von einer gerieften Platte abspringt und eine Reihe parabolischer Bahnen beschreibt. Die Dauer dieser verschiedenen Bahnen ist der zur Ebene  $F$  senkrechten Geschwindigkeitskomponente einfach proportional. Die Annahme ( $\alpha$ ) ist eine rein ideale; sie ist aber interessant, da sie für jede Bahn eine halbe Sinuskurve liefert, und ergibt, daß die Dauer einer Bahn, die bei  $F$  nach einem Aufstoßen beginnt und dann wieder bei  $F$  endet, für alle Bahnen dieselbe ist, unter welchem Winkel sie auch die Platte verlassen oder zu ihr zurückkehren. Die Voraussetzung ( $\beta$ ) wird durch Fig. 94 veranschaulicht, jedoch mit der Änderung, daß die Riefen konvex statt konkav sind, und daß zwei Vertikalebenen angebracht sind, die die Partikel zurückwerfen und ihr nicht gestatten, weder nach rechts noch nach links sich ins Unendliche zu entfernen.

§ 47. Der rotierende Körper der §§ 41 bis 43 mag nun nicht zwischen zwei parallelen Ebenen hin- und herspringen, sondern nur auf eine Ebene aufstoßen und durch eine durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehende Kraft, die entweder ( $\alpha$ ) dem Abstände des Trägheitsmittelpunktes von  $F$  einfach proportional ist oder ( $\beta$ ) konstant ist, zurückgeführt werden. Hier ist dann, wie in § 46, die Dauer der Bahn im Falle ( $\alpha$ ) immer die nämliche und steht im Falle ( $\beta$ ) in einem einfachen Verhältnisse zur Geschwindigkeit des Trägheitsmittelpunktes in dem Augenblicke, in dem der Körper  $F$  verläßt oder nach  $F$  zurück gelangt.

§ 48. In den Fällen der §§ 46, 47 haben wir das Zeitintegral der kinetischen Energie der zu  $F$  senkrechten Geschwindigkeitskomponente der Partikel und das der gesamten Geschwindigkeit des Trägheitsmittelpunktes des Rotators,

die ihrerseits senkrecht zu  $F$  ist, für jede einzelne Bahn in Betracht zu ziehen. Wenn mit  $q$  die zu  $F$  senkrechte Geschwindigkeit der Partikel oder des Trägheitsmittelpunktes des Rotators in dem Augenblicke des Aufstoßens auf  $F$  zu Beginn und am Ende der Bahn und mit  $2$  die Masse der Partikel oder des Rotators bezeichnet wird, so daß die kinetische Energie mit dem Quadrate

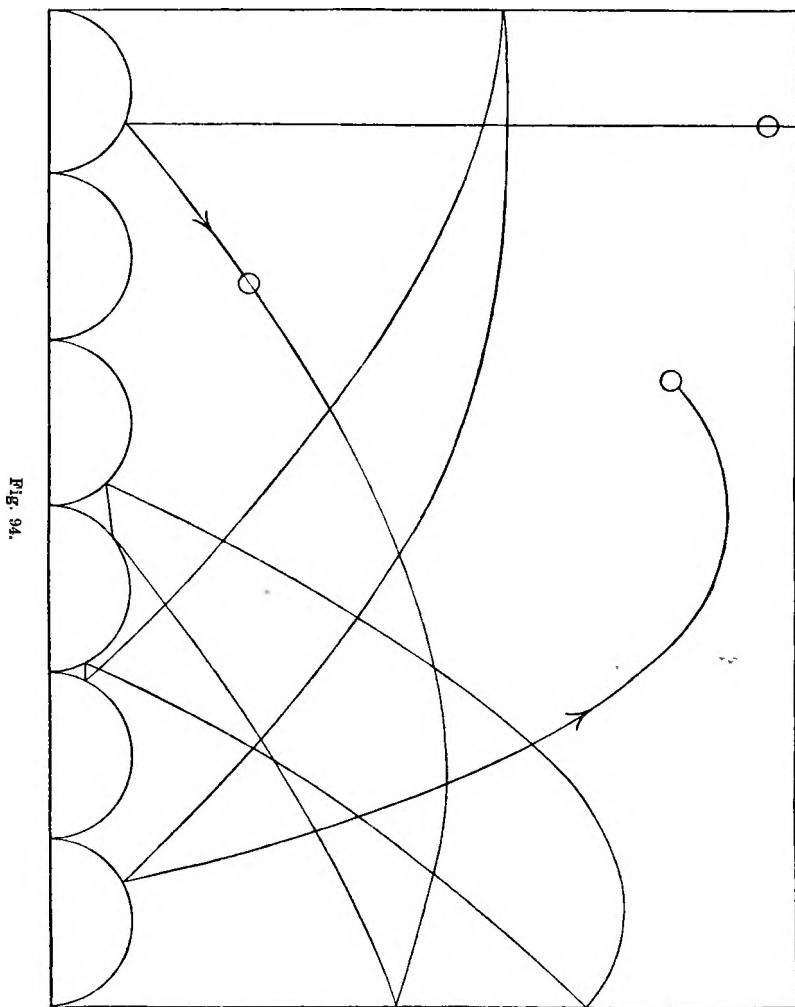


Fig. 94.

der Geschwindigkeit zusammenfällt, ist das Zeitintegral im Falle ( $\alpha$ )  $\frac{1}{2}q^2T$  und im Falle ( $\beta$ )  $\frac{1}{3}q^2T$ , wo in beiden Fällen mit  $T$  die Dauer der Bahn bezeichnet ist. Nehmen wir in beiden Fällen ( $\alpha$ ) und ( $\beta$ ) des § 46 die Geschwindigkeit der Partikel, die immer die gleiche ist, als 1 an, so wird  $q^2 = \sin^2\vartheta$ , und die andere Komponente der Energie ist  $\cos^2\vartheta$ . In § 47 ist es vorteilhaft, die Gesamtenergie mit 1 zu bezeichnen; und so ist  $1 - q^2$  die gesamte Rotationsenergie, die in der ganzen Bahn konstant ist. Wenn wir

weiter beachten, daß die Dauer aller Bahnen im Falle ( $\alpha$ ) die nämliche und im Falle ( $\beta$ ) proportional  $q$  ist, so bekommen wir als zu vergleichende Energien im Falle ( $\alpha$ ), sowohl des § 46 als des § 47, die Zeitintegrale  $\frac{1}{2}\Sigma q^2$  und  $\Sigma(1 - q^2)$ , im Falle ( $\beta$ )  $\frac{1}{3}\Sigma q^3$  und  $\Sigma q(1 - q^2)$ .

§ 49. Mit der folgenden Bezeichnung

$$\begin{array}{l} \text{in § 46 } \left\{ \begin{array}{l} \text{Zeitintegral der zu } F \text{ senkrechten kinetischen Energie} = V \\ \text{„ „ „ „ parallelen „ „} = U \end{array} \right. \\ \text{in § 47 } \left\{ \begin{array}{l} \text{„ „ translatorischen Energie} = V \\ \text{„ „ rotatorischen „ „} = R \end{array} \right. \end{array}$$

finden wir dementsprechend

$$\begin{array}{l} \text{§ 46, } \frac{V-U}{V+U} \left\{ \begin{array}{l} = \frac{\Sigma(\frac{1}{2}q^2 - 1)}{\Sigma(1 - \frac{1}{2}q^2)} \text{ im Falle } (\alpha) \\ = \frac{\Sigma(\frac{1}{3}q^3 - q)}{\Sigma(q - \frac{2}{3}q^3)} \text{ „ „ } (\beta) \end{array} \right. \\ \text{§ 47, } \frac{V-R}{V+R} \left\{ \begin{array}{l} = \frac{\Sigma(\frac{1}{2}q^2 - 1)}{\Sigma(1 - \frac{1}{2}q^2)} \text{ „ „ } (\alpha) \\ = \frac{\Sigma(\frac{1}{3}q^3 - q)}{\Sigma(q - \frac{2}{3}q^3)} \text{ „ „ } (\beta) \end{array} \right. \end{array}$$

§ 49'. Es wurde nun nach dem oben beschriebenen Verfahren  $q$  für die einzelne Partikel und eine geriefte Platte (§ 46) und für den rotierenden aus zwei gleichen Massen bestehenden Körper, der auf eine ebene Bahn aufstößt (§§ 41, 42), und endlich für die rotierenden Körper mit den beiden ungleichen Kugeln (eine zentrale Masse 100 und eine exzentrische 1 §§ 41, 43) berechnet. Nimmt man diese Werte von  $q$ , addiert nach  $q$ ,  $q^2$  und  $q^3$  für alle Bahnen und verwendet die so erhaltenen Resultate in § 48, so findet man die folgenden sechs Resultate:

Eine einzelne Partikel, die an einer geriefen Platte (halbkreisförmige Riefen) springt, 143 Bahnen: —

$$\frac{V-U}{V+U} \left\{ \begin{array}{l} = + 0,197 \text{ für isochrone Sinusbahnen} \\ = + 0,136 \text{ für Gravitationsparabeln.} \end{array} \right.$$

Rotierender, aus zwei gleichen Massen bestehender Körper, der an einer ebenen Platte springt, 110 Bahnen: —

$$\frac{V-R}{V+R} \left\{ \begin{array}{l} = - 0,179 \text{ für isochrone Sinusbahnen} \\ = - 0,150 \text{ für Gravitationsparabeln.} \end{array} \right.$$

Rotierender, aus zwei ungleichen Massen (1, 100) bestehender Körper, der an einer ebenen Platte springt, 400 Bahnen:

$$\frac{V-R}{V+R} \left\{ \begin{array}{l} = + 0,025 \text{ für isochrone Sinusbahnen} \\ = - 0,014 \text{ für Gravitationsparabeln.} \end{array} \right.$$

Die Kleinheit der Abweichung der letzten beiden Resultate von dem, was die Boltzmann-Maxwellsche Theorie ergibt, ist sehr bemerkenswert, wenn wir sie mit den 15 Prozent vergleichen, die wir (§ 43 oben) für den gleichen Fall gefunden haben, als keine Kraft auf die Partikel wirkte, da sie sich zwischen zwei parallelen Ebenen hin- und herbewegte.

§ 50. Der letzte Fall einer Energieverteilung, den wir statistisch untersucht haben, bezieht sich auf eine gemischte Aufgabe, die teils der Klasse I § 28 und teils der Klasse II zuzuzählen ist. Er wurde als ein Fall eronnen, der der praktischen Verwendung in der Thermodynamik näher kommt als jeder bisher behandelte. Er bildet tatsächlich eine eindimensionale Darstellung der kinetischen Gastheorie. Wir setzen voraus, eine Reihe einer sehr großen Anzahl Atome besitze nur die Möglichkeit, sich in einer geraden Linie zwischen festen Grenzebenen  $L$  und  $K$  zu bewegen. Das der Ebene  $K$  nächste Atom  $P$  sei zwischen dieser Ebene und einer ihr parallelen  $C$  eingeschlossen, deren Abstand von ihr sehr klein im Vergleich mit dem Durchschnitte der freien Bahnen der andern Partikel ist, und  $Q$ , das dem  $P$  benachbarte Atom, besitze vollkommene Freiheit, die Fangfläche  $C$  zu durchsetzen, ohne daß diese irgendeine Kraft auf dasselbe ausübe. So kann, während  $Q$  frei in das Gebiet einzutreten und auf  $P$  zu stoßen vermag,  $P$  ihm nicht aus seinem Gebiet heraus folgen. Da sämtliche Atome gleich groß sind, ruft jeder einfache Zusammenstoß nur eine Auswechslung der Geschwindigkeiten zwischen den zusammenstoßenden Atomen hervor, und es könnte keine neue Geschwindigkeit entstehen, wenn die Atome vollkommen hart (§ 16 oben) wären, da diese Voraussetzung zur Folge hat, daß sich nicht drei gleichzeitig im Zusammenstoß zu befinden vermögen. Ich will jedoch die vorliegende Untersuchung nicht auf absolut harte Atome beschränken. Nur um unsere Rechnungen zu vereinfachen, wollen wir  $P$  und  $Q$  als unbeschränkt hart voraussetzen. Von allen andern Atomen wollen wir annehmen, daß sie die in dem obigen § 21 festgestellte Eigenschaft besitzen. Sie mögen bei einem einfachen Zusammenstoße durcheinander hindurchgehen und auseinandergehen, ohne daß die vorherige Geschwindigkeit jedes einzelnen geändert wird, wenn die Differentialgeschwindigkeit hinreichend groß ist; sie müssen sich aber voneinander mit ausgetauschten Geschwindigkeiten entfernen, wenn die anfängliche Differentialgeschwindigkeit nicht so groß ist, daß sie vermöge derselben durcheinander hindurchgehen. Neue Geschwindigkeiten werden im allgemeinen zustande kommen, wenn drei oder mehr Atome sich gleichzeitig im Zusammenstoß befinden, so daß, wenn auch alle Geschwindigkeiten zu Anfang gleich waren, vermöge dieses besonderen Zusammenstoßens von drei oder mehr Atomen Ungleichheiten eintreten müssen, gleichviel ob die anfänglichen Differentialgeschwindigkeiten so klein waren, daß gegenseitiges Auseinandergehen erfolgt, oder ob eine oder beide Annäherungen zu einer Durchsetzung oder zu zwei Durchsetzungen führen. Ob die Geschwindigkeitsverteilung, die schließlich eintreten muß, dem Maxwellschen Exponentialgesetze entspricht oder nicht, brauchen wir nicht zu entscheiden; ich habe aber als einen ersten Fall vorausgesetzt, daß die ganze Menge mit Geschwindigkeiten gegeben ist, die allerdings diesem Gesetze entsprechen (die die Atome, wenn sie unendlich hart wären, für alle spätere Zeit beibehalten müßten); und wir wollen weiter voraussetzen, daß der mittlere Abstand in verschiedenen Teilen der Reihe gleich ist, so daß wir uns nicht durch das Inbetrachtziehen von Wellen stören zu lassen brauchen, etwa von Schallwellen, die wegen der Ungleichheit der Dichtigkeit längs der Reihe hin- und herlaufen.

§ 51. Für unsere vorliegende Aufgabe benötigen wir zweier Lotterien, um die beeinflussenden Umstände in jedem Augenblicke, wenn  $Q$  in das für  $P$  abgegrenzte Gebiet eintritt, zu finden — Lotterie I für die Geschwindigkeit

(v) des Atoms  $Q$  beim Zusammenstoße; Lotterie II für die Bewegungsphase des Atoms  $P$ . Für das erste Losen I nahmen wir (nachdem wir es mit 837 kleinen Papierquadraten mit aufgeschriebenen Geschwindigkeiten, die in einem Gefäße gemischt waren, versucht, und dieses Verfahren nicht zufriedenstellend gefunden hatten) neun mit 1, 2, . . . , 9 markierte steife Kartenblätter von der Form gewöhnlicher Spielkarten mit abgerundeten Ecken, auf deren jeder hundert Zahlen in zehn Reihen von je zehn verzeichnet waren. Die Geschwindigkeiten auf jeder Karte sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Tabelle mit Angabe der Zahl der verschiedenen Geschwindigkeiten auf den verschiedenen Kartenblättern.

Geschwindigkeit	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	
Karte 1	100																						
" 2	7	93																					
" 3		10	90																				
" 4			9	91																			
" 5				1	84	15																	
" 6						60	40																
" 7						26	57	17															
" 8								31	40	29													
" 9									3	26	19	15	11	9	6	4	3	2	1	1			
Summe der Geschwindigkeiten	107	103	99	92	84	75	66	57	48	40	32	26	19	15	11	9	6	4	3	2	1	1	900

Die Anzahl Male, die jede Geschwindigkeit vorkommt, wurde so gewählt, daß sie möglichst nahe dem Maxwellschen Gesetze entspricht, nämlich

$Cdv e^{-\frac{v^2}{2}} = k$  = die Anzahl Geschwindigkeiten zwischen  $v + \frac{1}{2}dv$  und  $v - \frac{1}{2}dv$  ergab. Wir wählten  $k = 1$ , woraus sich, wenn  $dv$  unendlich klein wäre, als Mittel der Quadrate der Geschwindigkeiten genau 0,5 ergäbe. Wir nahmen  $dv = 0,1$  und  $Cdv = 108$ , um so nahe, wie es die Umstände möglich machen, das Maxwellsche Gesetz und als Gesamtzahl der verschiedenen Geschwindigkeiten 900 zu erhalten. Die Summe der Quadrate aller dieser 900 Geschwindigkeiten ist 468,4, was durch 900 dividiert 0,52 ergibt, statt 0,5 bei unendlich kleinem  $dv$ . Bei der Ausführung dieses Losens wurden die mit Zahlen versehenen Karten gut gemischt, und eine Karte wurde herausgezogen. Die eine, von den hundert auf dieser Karte verzeichneten Geschwindigkeiten, zu wählende Geschwindigkeit wurde darauf gefunden, indem man aus einem Pack von 100 Karten, die je eine der 100 Zahlen 1, 2, 3, . . . , 99, 100 trugen, eine Karte zog. Bei dem Losen II wurde ein Paket von hundert Karten benutzt, um aus ihm eine mit einem der Dezimalbrüche 0,01 bis 1,00 beschriebene Karte zu ziehen. Der gezogene, mit  $\alpha$  bezeichnete, Dezimalbruch gibt für  $P$  den noch nicht vollendeten Teil der Bewegungsperiode von  $C$  nach  $K$  und von  $K$  nach  $C$  zurück, in dem Augenblicke, in dem  $Q$  durch die Ebene  $C$  geht. Nun beachte man, daß, wenn das Atom  $Q$  das Atom  $P$  in der ersten Hälfte seiner Periode überholt (während  $P$  von  $C$  nach  $K$  geht. D. H.), es seine Geschwindigkeit an  $P$  abgibt und ihm nach innen folgt, und daß demgemäß ein zweiter Zu-

sammenstoß erfolgen muß, sobald  $P$  nach der Reflexion an  $K$  auf  $Q$  trifft, wobei es an  $Q$  die Geschwindigkeit  $v$ , die dieses Atom beim Eintritt in das abgegrenzte Gebiet besessen hat, seinerseits wieder zurückgibt. Wenn  $P$  auf  $Q$  in der zweiten Hälfte seiner Periode trifft (während  $P$  von  $K$  nach  $C$  geht. D. H.), wird  $Q$  sogleich beim ersten Zusammenstoße die ursprüngliche Geschwindigkeit des Atoms  $P$  erhalten und sich mit dieser Geschwindigkeit aus dem abgegrenzten Gebiete entfernen. Es kann aber auch von  $P$  überholt werden, ehe es das Gebiet zwischen  $C$  und  $K$  verläßt; in diesem Falle wird es sich aus diesem Gebiet mit seiner eigenen ungeänderten ursprünglichen Geschwindigkeit  $v$  entfernen. Dies tritt immer dann und nur dann ein, wenn  $u$  kleiner als  $v$  ist; dabei bedeutet  $u$  die Geschwindigkeit des Atoms  $P$ , und  $v$  die des Atoms  $Q$ . Dieser Fall, daß  $Q$  von  $P$  überholt wird, kann nur vorkommen, wenn die Eintrittsgeschwindigkeit von  $Q$  größer ist als die Geschwindigkeit von  $P$  vor dem Zusammenstoße. Abgesehen von diesem Falle, bleibt die Geschwindigkeit von  $P$  bei dem Zusammenstoße ungeändert. Hiernach sehen wir, daß nur wenn die Geschwindigkeit des Atoms  $P$  vor dem Zusammenstoße größer ist als die des Atoms  $Q$  ein Austausch stattfinden kann, und daß nach diesem Austausche  $P$  mit kleinerer Geschwindigkeit zurückbleibt als  $Q$ . Wenn jeder Zusammenstoß einen Austausch zur Folge hätte, würde die durchschnittliche Geschwindigkeit von  $P$  durch die Zusammenstöße allmählich der durchschnittlichen Geschwindigkeit von  $Q$  gleichgemacht werden und die mittlere Verteilung verschiedener Geschwindigkeiten würde für  $Q$  und  $P$  identisch sein. Ein Nichtzustandekommen dieses ausgleichenden Austausches kann, wie wir gesehen haben, nur vorkommen, wenn die Geschwindigkeit des Atoms  $Q$  größer<sup>1)</sup> ist als die des Atoms  $P$ , und dann muß die durchschnittliche Geschwindigkeit und die durchschnittliche kinetische Energie von  $P$  kleiner sein als die durchschnittliche Geschwindigkeit und durchschnittliche kinetische Energie von  $Q$ .

§ 52. Wir könnten uns mit diesem, die Boltzmann-Maxwellsche Theorie für diesen Fall widerlegenden Resultate zufriedengeben. Indessen ist es interessant, nicht bloß zu wissen, daß die durchschnittliche kinetische Energie von  $Q$  größer ist als die des in das abgegrenzte Gebiet eingeschlossenen Atoms  $P$ , sondern weiter auch zu wissen, um wieviel sie größer ist. Wir haben deswegen Additionen für 300 Zusammenstöße zwischen  $P$  und  $Q$  durchgearbeitet, mit  $u^2 = 0,5$  ( $u = 0,71$ ) als dem annähernden Mittel der durch das Lösen gegebenen Größe  $v^2$  beginnend. Es hätte keinen bemerkenswerten Unterschied in dem Resultate gemacht, wenn wir mit irgendeinem andern, großen oder kleinen von Null verschiedenen Betrage von  $u$  angefangen hätten. Wären wir beispielsweise von 100 als erstem Wert von  $u$  ausgegangen, so hätte  $Q$  diese Geschwindigkeit beim ersten Zusammenstoße erhalten und sie in der praktisch unendlich langen Reihe weitergegeben, ohne daß man je wieder von ihr etwas erfahren hätte, und der nächste Wert von  $u$  wäre doch wieder der erste durch das Lösen für  $v$  gefundene Wert. Unmittelbar vor jedem der folgenden Zusammenstöße ist die Geschwindigkeit des Atoms  $P$  die, die es von  $Q$  beim vorhergegangenen Zusammenstoße empfangen hat. Bei unserer Durchführung waren die Geschwindigkeiten, die  $P$  tatsächlich bei den ersten sechzehn Durchgängen des Atoms  $Q$  durch die Grenzebene  $C$

1) Im Text steht „kleiner“.

besessen hat, 0,71; 0,5; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1; 0,2; 0,2; 0,5; 0,7; 0,2; 0,3; 0,6; 1,5; 0,5 — woraus wir erkennen, eine wie geringe Wirkung die Wahl von 0,71 für die erste Geschwindigkeit von  $P$  auf die folgenden Geschwindigkeiten ausübt. Die Additionen wurden in aufeinanderfolgenden Gruppen von je zehn ausgeführt; bei jeder von ihnen war  $\Sigma v^2$  größer als  $\Sigma u^2$ . Für die 300 fanden wir  $\Sigma v^2 = 148,53$  und  $\Sigma u^2 = 61,62$ , die erstere Summe als 2,41 mal so groß wie die letztere. Beide Summen sollten nach der Boltzmann-Maxwellschen Theorie einander gleich sein. Dividiert man  $\Sigma v^2$  durch 300, so findet man 0,495, was zufällig näher gleich dem geforderten Werte 0,5 ist als der Wert 0,52, der sich auf einer der Karten (§ 51 oben) befindet. Eine noch größere Abweichung von der Boltzmann-Maxwellschen Gleichheit (2,71 als Faktor) wurde gefunden, wenn man  $\Sigma v^3$  und  $\Sigma u^2 v$  berechnete, um der größeren Wahrscheinlichkeit des Zusammenstoßes für größere als für kleinere Werte von  $v$  Rechnung zu tragen, dabei ist  $u'$  die Geschwindigkeit des Atoms  $P$  nach dem Zusammenstoße mit  $Q$ .

§ 53. Wir haben in § 52 gesehen, daß und wie viel  $\Sigma u^2$  kleiner ist als  $\Sigma v^2$ , wenn das Maxwellsche Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten zugrunde gelegt wird. Es erschien aber interessant, zu finden, wieviel kleiner diese Summe bei irgendeinem andern als bei diesem Maxwellschen Verteilungsgesetze von Geschwindigkeiten sein würde. Wir ordneten deswegen Karten für ein Lösen nach einer willkürlich gewählten von der Maxwell'schen sehr verschiedenen Verteilung an. Elf Karten, jede mit einer von den elf Zahlen 1, 3, . . . 19, 21, die den elf verschiedenen Geschwindigkeiten 0,1; 0,3 . . . 1,9; 2,1 entsprechen sollten, wurden vorbereitet und an Stelle der neun Karten nach dem im obigen § 57 beschriebenen Verfahren verwendet. In allen außer einem von den elf Zusammenstößen war  $\Sigma v^2$  größer als  $\Sigma u^2$  und für alle 110 Zusammenstöße fand sich  $\Sigma v^2 = 179,90$  und  $\Sigma u^2 = 97,66$ ; die erstere dieser beiden Zahlen ist 1,84 mal so groß wie die letztere. In diesem Falle fanden wir für das Verhältnis  $\Sigma v^3$  zu  $\Sigma u^2 v$  den Betrag 1,87.

§ 54. Zum Schluß möchte ich in Verbindung mit Fall II, § 28 auf eine sehr interessante und wichtige, von Maxwell selbst gemachte Anwendung seiner Theorie auf das Gleichgewicht einer schmalen, unter dem Einfluß der Schwere befindlichen Gassäule hinweisen. Wir stellen uns zunächst unser eindimensionales Gas des § 50 vor, bestehend aus einer geraden Reihe einer ungeheuren Anzahl gleicher und ähnlicher Atome. Jetzt sei die Richtung der Reihe vertikal, und es mögen sich die Atome unter dem Einflusse der Erdanziehung befinden, und wir setzen zunächst voraus, daß die Atome einer gegenseitigen Annäherung so weit widerstehen, daß keines von ihnen durch ein anderes selbst bei der größten Annäherungsgeschwindigkeit, die die Gesamtenergie der Ansammlung zuzulassen vermag, sich hindurchbewegen kann. Wenn die Boltzmann-Maxwellsche Theorie (§ 18 oben), wie sie es tut, behauptet, daß das Zeitintegral der kinetischen Energie für alle Atome dasselbe ist, ergibt sich aus ihr, daß der Zeitdurchschnitt der kinetischen Energie für das höchste Atom in der Reihe dasselbe ist wie für das tiefste, was, wenn richtig, an sich schon sehr interessant wäre. Aber nun nehmen wir dagegen an, daß zwei sich einander nähernde Atome sich nicht bei jedem beliebigen Abstände ihrer Mittelpunkte mit unendlich großer Kraft abstoßen, und zudem sei der Menge eine Energie erteilt, die hinreicht, häufige Ge-



legenheit zu bieten, daß zwei Atome sich durcheinander hindurchbewegen. Auch jetzt kann die Theorie weiter nichts behaupten, als daß das Zeitintegral der kinetischen Energie irgendeines Atoms gleich dem der Energie irgendeines andern Atoms ist. Nunmehr aber ist das eine selbstverständliche Behauptung, da die Atome gleiche Massen besitzen und jedes von ihnen sich abwechselnd an jeder Stelle, oben oder unten, der Reihe befinden wird. (Wenn sich in der Reihe Atome von verschiedener Masse befinden, wäre übrigens die Waterston-Maxwellsche Theorie gleicher durchschnittlicher Energien wichtig und interessant.)

§ 55. Jetzt aber wollen wir an Stelle unseres vorgestellten eindimensionalen Gases ein wirkliches homogenes, in einer unendlich starren vertikalen Röhre mit unendlich starrem Boden und Deckel befindliches Gas ins Auge fassen, so daß das Gas unter keinem andern Einflusse steht als dem der Schwere. Zunächst mögen nur zwei oder drei Atome vorhanden sein, jedes mit einer gegebenen Geschwindigkeit, die so groß ist, daß es, auch entgegen der Schwere, vom Boden bis zum Deckel zu fliegen vermag. Sie werden nur gelegentlich aneinanderstoßen, und sie werden weit öfter an die Seitenwand, den Boden und den Deckel der Röhre stoßen als aneinander. Die Zeitmittel ihrer kinetischen Energien werden gleich sein. Das gleiche wird stattfinden, wenn zwanzig Atome oder tausend Atome oder eine Quintillion Atome vorhanden ist. Jetzt aber wird jedes Atom weit häufiger auf ein anderes Atom stoßen als auf die Seitenwand oder den Boden oder den Deckel der Röhre. Auf die Dauer wird jedes Atom in jedem Teile der Röhre ebensooft sein wie jedes andere Atom. Das Zeitintegral der kinetischen Energie irgendeines Atoms wird also dem Zeitintegrale der kinetischen Energie irgendeines andern Atomes gleich sein. Dieses Wahrliche (truism) ist einfach und allein alles, was die Boltzmann-Maxwellsche Theorie über eine vertikale Säule eines homogenen einatomigen Gases aussagt. Es ist, meiner Meinung nach, allgemeiner Eindruck, daß die Boltzmann-Maxwellsche Theorie, indem sie ein Verteilungsgesetz des kinetischen Teiles der Gesamtenergie aufstellt, offenbar einen Satz enthält, nach dem die durchschnittlichen kinetischen Energien der Atome in den oberen Teilen einer vertikalen Gassäule denen der im untern Teile der Säule befindlichen gleich sind. In der Tat dürfen wir, wenn wir den Wortlaut der Maxwellschen Behauptung, § 18, vor uns haben, annehmen, daß sie aussagt, daß zwei Teile unserer Gassäule, wenn sie dieselbe Anzahl Atome enthalten, dieselbe kinetische Energie besitzen, auch wenn der eine sich nahe dem Boden der Säule und der andere nahe der Decke befindet. Maxwell selbst hat in seiner Abhandlung aus dem Jahre 1866 („The Dynamical Theory of Gases“)<sup>1)</sup> einen unabhängigen synthetischen Beweis für diese Anschauung angegeben und hat sie meines Wissens auch später nicht als eine unmittelbare Folgerung aus der von Boltzmann und ihm selbst einige Jahre nach der Entstehungszeit jener Abhandlung verallgemeinerten Verteilungstheorie aufgefaßt.

§ 56. Sowohl Boltzmann wie Maxwell erkannten den experimentellen Widerspruch der kinetischen Gaslehre gegen ihre Theorie und empfanden, daß eine Aufklärung dieser Unvereinbarkeit gebieterisch gefordert war. Beispielsweise sagte Maxwell in einer Vorlesung über die mechanische Evidenz der

1) Zusatz vom 17. Dezember 1866. Collected Papers, Vol. II, S. 76.

molekularen Struktur der Körper, die er am 18. Febr. 1875 vor der Chemical Society gehalten hat: „Ich habe Ihnen das vorgeführt, was ich für die größte von der Molekulartheorie noch zu überwindende Schwierigkeit halte. Boltzmann hat vorgeschlagen, wir sollten die Erklärung in der gegenseitigen Einwirkung der Molekeln und des sie umgebenden Äthers suchen. Ich fürchte aber, wenn wir dieses Medium zu Hilfe rufen, daß wir die berechnete spezifische Wärme, die jetzt schon zu groß ist, nur noch vergrößern.“ Rayleigh, der in den letzten zwanzig Jahren eine unerschütterliche Stütze der Boltzmann-Maxwellschen Theorie gewesen ist, schließt eine Abhandlung „On the Law of Partition of Energy“, die vor einem Jahre, im Phil. Mag. Jan. 1900, veröffentlicht ist, mit den folgenden Worten: „Die mit der Anwendung des Gesetzes gleicher Energieverteilung auf wirkliche Gase verknüpften Schwierigkeiten sind lange empfunden worden. In dem Falle von Argon, Helium und Quecksilberdampf beschränkt das Verhältnis der spezifischen Wärmen (1,67) die Freiheitsgrade jeder Molekel auf die drei für die fortschreitende Bewegung erforderlichen. Der für die wichtigsten zweiatomigen Gase gültige Wert (1,4) gestattet drei Arten Fortschreiten und zwei Arten Drehung. Nichts bleibt für eine Drehung um die die Atome verbindende Gerade, und ebensowenig für eine relative Bewegung der Atome in dieser Geraden, übrig. Auch wenn wir die Atome als bloße Punkte auffassen, deren Rotation nichts bedeutet, muß doch noch Energie der letzten Art vorhanden sein, und ihr Betrag durfte (nach dem Gesetze) nicht kleiner sein als die der andern Energien.“

„Wir sind hier einer grundlegenden Schwierigkeit gegenübergestellt, die nicht bloß in das Gebiet der Gastheorie, sondern in das der allgemeinen Mechanik fällt. In den meisten Fragen der Mechanik darf eine Bedingung, deren Verletzung einen großen Betrag potentieller Energie erfordert, als eine Beschränkung behandelt werden. Gerade auf Grund dieses Prinzips werden Festkörper als starr, Fäden als unausdehnbar usf. behandelt. Und gerade auf der Erkenntnis solcher Beschränkungen ist das Verfahren von Lagrange begründet. Aber das Gesetz gleicher Verteilung läßt potentielle Energie außer acht. Wie groß auch die für die Änderung des Abstandes zwischen den beiden Atomen in einer zweiatomigen Molekel erforderliche Energie sein mag, praktische Starrheit ist nie gesichert, und die kinetische Energie der relativen Bewegung in der Verbindungslinie ist die nämliche, wie wenn die Verbindung noch so schwach wäre. Die beiden Atome bleiben, wenn auch miteinander verbunden, zwei Atome, und die Freiheitsgrade bleiben sechs an Zahl.“

„Was dem Anschein nach gefordert werden muß, ist irgendeine Flucht von der destruktiven Einfachheit des allgemeinen Schlusses.“

Der einfachste Weg, zu diesem gewünschten Resultate zu gelangen, ist, den Schluß zu leugnen, und so am Anfange des zwanzigsten Jahrhunderts eine Wolke aus dem Gesichtskreise zu verlieren, die den Glanz der molekularen Theorie der Wärme und des Lichts im letzten Viertel des neunzehnten Jahrhunderts verdunkelt hat.<sup>1)</sup>

1) Den Satz von der Angleichung der Energien zu leugnen, würde von außerordentlichen Folgen für viele Gebiete der modernen Physik sein. Die Einwände des Textes, auch abgesehen von den Versuchen, gegen die man ja immer die Beschränktheit der Zahl wird geltend machen können, sind freilich sehr stark. Es sei auf das Werk von Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie verwiesen. D. H.

## Anhang C.

### Über die durch zwei besondere Formen anfänglicher Verschiebung in einem unendlich langen materiellen System, für das die Geschwindigkeit periodischer Wellen von der Wellenlänge abhängt, hervorgerufene Störung.

§ 1. Die eine von den gewählten Formen anfänglicher Verschiebung ist

$$ce^{-x^2/a^2}, \quad (1)$$

wo  $x$  den Abstand von  $O$ , dem Mittelpunkte des Ursprunges der Störung,  $a$  ein Längenparameter und  $c$  eine im Vergleich mit  $a$  sehr kleine (in der Mathematik für unendlich klein angesehene) Länge bedeutet.

§ 2. Die Verschiebung bei  $x$  zur Zeit  $t$  in einem unendlichen Zuge periodischer Wellen werde dargestellt durch

$$D \cos q(x - \alpha - vt). \quad (2)$$

Hier gibt  $2\pi/q$  die Wellenlänge und  $v$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die wir als eine Funktion von  $q$  betrachten wollen, sodann  $\alpha$  den Abstand eines Punktes, dessen Verschiebung zur Zeit  $t = 0$  ein positives Maximum ist, von  $O$ . Jede Anzahl Lösungen von der Art wie (2), mit verschiedenen Werten von  $D$ ,  $q$  und  $\alpha$ , oder mit  $-v$  für  $v$ , stellt, zugleichgenommen, eine zusammengesetzte Lösung dar, die durch einfache Addition gefunden wird, da die Verschiebungen und ihre Summen unendlich klein sind. Demnach wird eine Lösung, die Lösung für stehende Schwingungen von der Periode  $2\pi/qv$  gefunden, wenn man die halbe Summe von (2) für  $\pm v$  bildet; diese ist

$$D \cos q(x - \alpha) \cos qvt. \quad (3)$$

Und eine Addition von (3) für unsern vorliegenden Zweck ergibt eine Lösung

$$\eta = \frac{c}{\pi} \int_0^\infty dq \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \epsilon^{-\alpha^2/a^2} \cos q(x - \alpha) \cos qvt. \quad (4)^1$$

Wenn  $t = 0$  ist, ergibt dies  $d\eta/dt = 0$  und wird nach dem „Fourierschen Satze“ die rechte Seite der Gleichung für  $\eta$  gleich  $ce^{-x^2/a^2}$ , was mit (1) übereinstimmt. Demnach stellt (4) die Lösung unserer Aufgabe dar.

§ 3. Wenn wir in (4)  $\cos q(x - \alpha)$  entwickeln, verschwindet der Faktor von  $\sin qx$  bei der Summation  $\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha$ , und der Faktor von  $\cos qx$ , der

---

1) Vgl. zehnte Vorlesung S. 93 oben. (Übrigens fehlt hier und in (3) durch Druckversehen im Original vor  $vt$  der Faktor  $q$ . D. H.)

$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-\alpha^2/a^2} \cos q\alpha$  ist, wird nach einer von Laplace im Jahre 1810<sup>1)</sup> angegebenen Ausmittlung  $ae^{-q^2 a^2/4} \sqrt{\pi}$ . So bringen wir (4) auf die folgende einfachere Form

$$\eta = \frac{ca}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dq e^{-q^2 a^2/4} \cos qx \cos qvt. \quad (5)$$

Die Feststellung, daß dieser Ausdruck für  $t = 0$  in  $ce^{-x^2/a^2}$  übergeht, ist äußerst interessant; sie wird durch eine nochmalige Anwendung derselben Laplaceschen Ausmittlung unter Anwendung einer umkehrenden Bezeichnungsweise geliefert.

§ 4. Welche Funktion der Wellenlänge  $2\pi/q$  die Geschwindigkeit  $v$  auch sein mag, so haben wir in (5) eine vollkommen geeignete Lösung unserer Aufgabe; sie läßt sich durch schnell konvergierende Reihen auswerten, gleichviel ob das bestimmte Integral auf geschlossene Ausdrücke zurückzuführen ist oder nicht. Für einen bestimmten Fall, einen unendlich langen elastischen Stab, den Fourier<sup>2)</sup> als Beispiel gewählt hat, läßt sich das bestimmte Integral auf geschlossene Ausdrücke zurückführen.

In diesem Falle ist die Geschwindigkeit periodischer Wellen der Wellenlänge umgekehrt proportional, und wir dürfen, wenn wir unsere Einheiten passend wählen, in (5)  $v = q$  setzen. Wenn man noch  $a = 1$  nimmt und beachtet, daß  $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots dq$  gleich  $\int_0^{\infty} \dots dq$  ist, findet man so

$$\eta = \frac{c}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-q^2/4} \cos q^2 t \cos qx. \quad (6)$$

Bezeichnet man mit  $R$  die halbe Summe für  $\pm i$ , so kann man diesen Ausdruck auch folgendermaßen schreiben:

$$\eta = \frac{c}{2\sqrt{\pi}} R \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-[(1/4 - i t)q^2 - i q x]}. \quad (7)$$

Wir setzen  $\frac{1}{4} - it = h^2$ , und bringen den Exponenten der Exponentialfunktion auf  $-(hq - ix/2h)^2 - (x/2h)^2$ , dann schreiben wir noch  $hq - ix/2h = z$  und erhalten das bestimmte Integral

$$\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2} \cdot e^{-(x/2h)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{h} e^{-(x/2h)^2}. \quad (8)$$

Demnach geht (7) über in

$$\eta = \frac{1}{2} c R h^{-1} e^{-(x/2h)^2} = \frac{1}{2} c R h^{-1} e^{-\frac{x^2(1+4it)}{1+16t^2}}. \quad (9)$$

1) Mémoires de l'Institut, 1810.

2) Théorie analytique de la Chaleur, Kap. XIX, Artikel 406. Deutsche Ausgabe von Weinstein S. 398 ff.

Nun ist

$$1. h = (1 + t^2)^{-\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{1}{2} \varphi + i \sin \frac{1}{2} \varphi \right),$$

wenn

$$\varphi = \operatorname{arctg} 4t \quad (10)$$

gemacht wird. Demnach finden wir, mit

$$\frac{x^2 4t}{1 + 16t^2} = \vartheta, \quad (11)$$

nach Gleichung (9)

$$\eta = c(1 + 16t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-x^2}{1 + 16t^2}} \cos \left( \frac{1}{2} \varphi - \vartheta \right). \quad (12)$$

§ 5. Dies ist eine sehr interessante Lösung in „geschlossenen Ausdrücken“. Um sie zu erläutern, sei zunächst  $x=0$ ; dann ist auch  $\vartheta=0$  und

$$\eta = c(1 + 16t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{1 + \tau}{2\tau^2}}, \text{ mit } \tau = \sqrt{1 + 16t^2}. \quad (13)$$

Alsdann strebt also der Mittelpunkt des ursprünglich verschobenen Teiles des Stabes in seine ungestörte Lage nicht vibrierend, sondern stetig, und schließlich, wenn  $t$  sehr groß ist, proportional zu  $t^{-1}$ . Ist  $t$  überhaupt hinlänglich groß, so dürfen wir  $\varphi$  in (12) vernachlässigen<sup>1)</sup> und außerdem setzen  $\vartheta \propto x^2/\tau$ , und wir finden

$$\eta \approx \frac{c}{\sqrt{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} e^{-(x/\tau)^2} \cos \frac{x^2}{\tau}. \quad (14)$$

Dies zeigt, daß, wenn man vom Ursprunge ausgeht, man zuerst einen Nullpunkt der Verschiebung bei  $x = \sqrt{\pi\tau}/2$  findet, und daß es jenseits dieses Punktes eine unendliche Anzahl weiterer Nullpunkte gibt und ein vibrierendes Streben zur Ruhe. Interessante graphische Darstellungen würden nur wenig Arbeit erfordern.

§ 6. Als einen zweiten noch bedeutungsvolleren Fall wählen wir den zweidimensionalen der alten Aufgabe von Poisson und Cauchy über Wellen in tiefem Wasser. In diesem Falle ist die Geschwindigkeit periodischer Wellen  $\sqrt{\lambda}$  proportional, und demgemäß dürfen wir vorteilhaft setzen  $v = q^{-\frac{1}{2}}$ . Dies ergibt, mit  $a = 1$  in (5) eingesetzt,

$$\eta = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dq e^{-q^2/4} \cos qx \cos \sqrt{q} t, \quad (15)$$

ein nicht reduzierbares bestimmtes Integral, das die Verschiebung des Wassers zur Zeit  $t$  und im Abstände  $x$  vom Ursprunge der Störung darstellt, das aber mittels einer konvergenten Reihe durch Quadraturen für alle großen und kleinen Werte der beiden Veränderlichen durchaus bequem zu berechnen ist. Zweifellos können analytische Hilfsmittel zur Verringerung der Arbeit ge-

1) Diese Behauptung vermag ich nicht zu verifizieren, da  $\operatorname{tg} \varphi = 4t$  ist, sollte für ein großes  $t$  das  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  sein, nicht Null. Ich habe daher der Gleichung unter (14) noch den Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  hinzugefügt. D. H.

funden werden; es genügt aber zu wissen, daß das Verfahren der Quadraturen mit mäßiger Arbeit schon sehr interessante Erläuterungen liefert, während für vollständige graphische Darstellungen durch Zeit- und Raumkurven viel Arbeit nötig wäre.

§ 7. Mein Assistent, Herr Witherington, hat nach Gleichung (15)  $\eta$  mit  $c/\sqrt{\pi} = 2$  für vier Fälle folgendermaßen ausgewertet:

Fall 1.  $x = 0, t = 0; \eta = 1,763; \sqrt{\pi} = 1,77245$

„ 2.  $x = 0, t = 1; \eta = 0,911;$

„ 3.  $x = 0, t = 2; \eta = 0,451;$

„ 4.  $x = 2, t = 2; \eta = 0,559.$

Der Fall 1 wurde als eine Probe für die Genauigkeit bei einem ersten Versuche einer Quadratur durchgearbeitet. Das Resultat ist etwa  $\frac{2}{8}$  Proz. zu klein; das richtige Resultat ist nämlich  $\sqrt{\pi}$ . Die Genauigkeit der Quadraturen für bloß erläuternde Zwecke ist also hinreichend.

§ 8. So interessant auch die Lösung durch Quadraturen für Wasserwellen ist, die von der ursprünglichen Störung nach dem Ausdruck unter (1) herrühren, so ist sie doch weniger wichtig als die folgende Lösung in geschlossenen Ausdrücken für eine andere Form ursprünglicher Störung, die in meiner kurzen Abhandlung „On the Front and Rear of a Procession of free Waves in Deep Water“<sup>(1)</sup> gegeben ist.

$$\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \eta = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \varphi = \frac{2c}{r} \left\{ (r+y)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{gt^2 x}{4r^2} + (r-y)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{gt^2 x}{4r^2} \right\} e^{\frac{-gt^2 y}{4r^2}} \quad (16)$$

Hier ist mit  $(\xi, \eta)$  die Verschiebung der Wasserpartikel, deren Gleichgewichtslage  $(x, y)$  ist, mit  $r$  die Länge  $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$  und mit  $g$  die Schwerkraft bezeichnet. Nach einer schönen Entdeckung von Cauchy und Poisson gibt es, für Wellen in unendlich tiefem Wasser, auf einer Fläche zusammenhängende Partikeln  $(x + \xi_0, y + \eta_0)$ , in denen der Druck einen überall gleichen Wert hat für ein bestimmtes  $y = y_0$ . Über jeder solchen Fläche darf dann das Wasser entfernt werden, ohne daß dadurch die Bewegung des unterhalb befindlichen Wassers gestört wird. Die Fläche wird so eine freie, und ist  $\eta_0$  die vertikale Verschiebung eines beliebigen Punktes in einer freien Oberfläche von Partikeln, in deren ungestörter Lage  $y = y_0$  ist. Der Wert von  $\eta_0$  findet sich nach (16), für  $t = 0$

$$\eta_0 = c(r_0^2 - r_0 y_0 - 2y_0^2)/r_0^3(r_0 + y_0)^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Dies ist mit einem beliebigen Werte, den wir  $y_0$  beilegen mögen, die ursprüngliche freie Oberfläche für (16);  $r_0$  bedeutet dabei  $(x^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Ich hoffe, für meine frühere Veröffentlichung mit Erweiterungen Kurven der durch (16) dargestellten Wellenbewegung anfertigen zu können, wie entsprechende in Sektion A der British Association im Sept. 1886 und in der Royal Society of Edinburg vom 20. Dez. 1886 vorgeführt sind.

## Anhang D.

### Über die Anhäufung schwerer Materie in einem beliebigen Teile des Universums.<sup>1)</sup>

Schwere Materie würde, nach unserer Anschauung von einer allgemeinen Gravitation, alle Materie sein. Gibt es nun irgendwelche Materie, die nicht dem Gesetze der Gravitation unterworfen ist? Ich glaube, ich darf mit absoluter Sicherheit sagen, daß es solche gibt. Wir alle sind überzeugt, daß Äther-Materie ist. Wir sind aber gezwungen zu sagen, daß wir nicht erwarten dürfen, im Äther die gewöhnlichen Eigenschaften molarer Materie zu finden, Eigenschaften, die wir im allgemeinen ableiten von der Wirkung einer Kraft zwischen Materie und Materie, Äther und Äther und Materie und Äther. Hier bin ich unlogisch, wenn ich sage, zwischen Materie und Äther, als ob Äther nicht auch Materie wäre. Nur um eine unlogische Ausdrucksweise zu vermeiden, benutzte ich die Überschrift „schwere Materie“. Vor vielen Jahren habe ich starke Gründe für die Anschauung angegeben, daß Äther außerhalb des Gravitationsgesetzes steht. Wir brauchen die Möglichkeit, daß ein Teil des Raumes von Äther erfüllt ist und daß außerhalb desselben ein absolutes Vakuum existiert — ohne Äther und ohne Materie — als eine Idee nicht absolut auszuschließen. Wir geben zu, daß dies ein Gedanke ist, den jemand fassen kann; aber ich glaube nicht, daß es irgendein lebender Gelehrter auch nur im geringsten Grade für wahrscheinlich hält, daß es eine Grenze um unser Universum gibt, außerhalb deren weder Äther noch Materie vorhanden ist. Wohlan denn, wenn sich Äther über den ganzen Raum erstreckt, dann ist es sicher, daß Äther nicht dem Gesetze gegenseitiger Anziehung zwischen seinen Teilen unterworfen sein kann; denn wenn er der gegenseitigen Anziehung zwischen seinen Teilen ausgesetzt wäre, könnte sein Gleichgewicht nur ein instabiles sein, außer wenn er unendlich inkompressibel sich verhielte. Aber hier werde ich wiederum an den kritischen Charakter der Grundlage gemahnt, auf der wir stehen, wenn wir von Eigenschaften der Materie außer denen sprechen, die wir durch Versuch sehen oder empfinden. Zu meinem Bedauern muß ich hier eine Anschauung aussprechen, die von der verschieden ist, der Professor Rücker in seiner Ansprache Ausdruck gegeben hat, wenn er behauptete, daß Kontinuität von Materie absoluten Widerstand gegen Verdichtung einbegreift. Wir haben kein Recht, Zusammendrückbarkeit als eine Eigenschaft des Äthers auszuschließen. Während wir zulassen, daß Äther keinerlei atomische Struktur besitzt, wird er als ein Material postuliert, das Funktionen erfüllt, von denen wir einiges wissen, und Eigenschaften be-

---

1) Vom Verfasser der Phil. Mag. mitgeteilt, nachdem die Abhandlung vor der British Association bei ihrer Versammlung in Glasgow vorgetragen war. (Man vergleiche zu diesem Anhang Vorlesung XVI. D. H.)

sitzen mag, die ihm gestatten, andere Funktionen zu erfüllen, von denen wir noch keine Kenntnis haben. Wenn wir Äther als eine Materie auffassen, postulieren wir zwar, daß er hinreichende Starrheit für die Lichtschwingungen aufweist; wir haben aber kein Recht zu sagen, daß er absolut inkompressibel ist. Wir müssen die Vorstellung anerkennen, daß ein hinreichend groß von allen Seiten wirkender Druck den Äther in einem gegebenen Raume verdichten kann, indem er zugleich zuläßt, daß der Äther aus dem umgebenden Raume der gedachten schrumpfenden Grenzfläche nachfolgt. Wenn ich sage, daß Äther außerhalb des Gravitationsgesetzes stehen muß, so nehme ich eben damit an, daß er nicht unendlich inkompressibel ist. Ich bin vielmehr der Anschauung, daß, wenn er unendlich inkompressibel wäre, er dem Gesetze gegenseitiger Gravitation zwischen seinen Teilen unterworfen sein könnte; meiner Meinung nach erscheint es aber äußerst unwahrscheinlich, daß Äther unendlich inkompressibel ist; ja es erscheint mehr mit den Analogien der bekannten Eigenschaften der molaren Materie, die doch unsere Führer bilden sollten, vereinbar anzunehmen, daß Äther nicht die Eigenschaft besitzt, eine unendlich große Kraft gegen zusammendrückende Gravitationswirkung auszuüben. Wenn wir nun unter diesen Umständen annehmen, daß der Äther sich über allen Raum erstreckt, muß er demnach außerhalb des Gravitationsgesetzes stehn — also wahrhaft imponderabel sein. Ich erinnere mich der Geringschätzung und des selbstgefälligen Bedauerns, mit dem vor sechzig Jahren — heute tut es mir leid — ich und die meisten Lehrer jener Zeit auf die Ideen unserer Vorgänger, die von „Imponderabilien“ sprachen, herablickten. Ich fürchte, wir müssen in dieser Hinsicht, wie in einer großen Zahl anderer wissenschaftlichen Anschauungen, auf die dunkeln Zeiten von vor fünfzig, sechzig oder hundert Jahren zurückkommen und anerkennen, daß es ein Etwas gibt, was wir Materie nennen müssen, was aber nicht dem Newtonschen Gravitationsgesetze unterworfen ist. Daß die Sonne, die Sterne, die Planeten und Meteore aus ponderabler Materie bestehen, ist richtig; die Überschrift meiner Abhandlung besagt aber, daß es noch etwas anderes gibt. Äther bildet keinen Teil des Gegenstandes dieser Abhandlung; nur mit schwerer Materie, mit ponderabler Materie wollen wir uns beschäftigen. Den Äther verbannen wir, nicht in die Vorhölle der Imponderabilien, sondern in eine abgesonderte Gattung von Materien, die wohl Trägheit, Starrheit, Elastizität, Kompressibilität, aber keine Schwere besitzen. In einer früher veröffentlichten Abhandlung habe ich starke Gründe dafür angegeben, daß die Menge Materie in dem den Astronomen bekannten Raume eine bestimmt begrenzte ist. Ich kann es schwer vermeiden, den Ausdruck „Universum“ zu gebrauchen, ich meine aber damit unser Universum, das schließlich nur eine Kleinigkeit bilden mag, indem es nur einen sehr kleinen Teil des ganzen Raumes einnimmt, in dem ponderable Materie sich befindet.

Stellen wir uns vor, in einer Kugel mit einem Radius von  $3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer (dies ist der Abstand, den ein Stern haben muß, um eine Parallaxe von 0,001'' zu besitzen) befinde sich gleichförmig verteilt eine Menge Materie, die tausend Millionen Mal so groß ist wie die Masse der Sonne, dann würde die von einem, ursprünglich an der Oberfläche in Ruhe befindlichen, Körper in fünf Millionen Jahren erlangte Geschwindigkeit etwa 20 Kilometer in der Sekunde und die in fünfundzwanzig Millionen Jahren erlangte 108 Kilometer



betragen (falls die Beschleunigung in so langer Zeit merklich konstant geblieben ist). Wenn die tausend Millionen Sonnen vor fünfundzwanzig Millionen Jahren auf der ganzen vorausgesetzten Kugel gleichförmig verteilt sich in Ruhe befunden haben, würden hiernach viele von ihnen jetzt Geschwindigkeiten von 20 oder 30 Kilometer in der Sekunde, manche kleinere, manche wahrscheinlich größere Geschwindigkeiten, selbst solche von 108 Kilometer in der Sekunde besitzen; oder wenn sie vor Tausenden Millionen Jahren so verteilt sich in Ruhe befunden haben, daß sie jetzt in der ganzen vorgestellten Kugel gleichmäßig verteilt vorhanden wären, würde ihre gegenwärtige mittlere Geschwindigkeit etwa 50 Kilometer in der Sekunde betragen.<sup>1)</sup> Diese Größe ist von den gemessenen Sternengeschwindigkeiten nicht allzusehr verschieden, und demgemäß erscheint es wohl wahrscheinlich, daß sich in der Tat etwa so viel Materie wie tausend Millionen Sonnen innerhalb des gedachten Raumes vom Radius  $3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer befinden. Dieselbe Überlegung zeigt, daß zehntausend Millionen Sonnen in derselben Kugel in fünfundzwanzig Millionen Jahren Geschwindigkeiten hervorrufen würden, die weit größer sind als die der bekannten Sterne; und demgemäß ist wahrscheinlich weit weniger als die zehntausendmillionenfache Masse der Sonne in der vorgestellten Kugel enthalten. Ein von Green vor dreundsiebzig Jahren entdeckter allgemeiner Satz über die von (schwerer, oder gedachter elektrischer oder gedachter magnetischer) Materie herrührende nach dem Newtonschen Gesetze des umgekehrten Quadrats des Abstandes an einer Fläche ganz beliebiger Form wirkende Kraft zeigt, daß eine nicht gleichförmige Verteilung derselben Gesamtmenge Materie größere Geschwindigkeiten als die gleichförmige Verteilung ergeben würde. Demgemäß können wir auch durch die Annahme irgendwelcher nicht gleichförmigen Verteilung von Materie in der angenommenen Kugel von  $3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer Radius der Schlußfolgerung nicht aus dem Wege gehn, nach der der Gesamtbetrag der in der Kugel befindlichen Materie auf etwa die Größenordnung von eintausend Millionen Sonnenmassen beschränkt ist.

Wenn wir das Sonnenlicht mit dem Lichte von den tausend Millionen Sternen vergleichen, von denen wir voraussetzen wollen, daß sie sämtlich dieselbe Größe und Helligkeit wie unsere Sonne besitzen, finden wir, daß das Verhältnis der scheinbaren Helligkeit des sternbeleuchteten Himmels  $3,87 \cdot 10^{-13}$  sein müßte. Dieses Verhältnis<sup>2)</sup> variiert direkt proportional dem Radius der einschließenden Kugel, wenn die Anzahl der gleichen Kugeln in gleichen Räumen als überall die gleiche vorausgesetzt wird. Soll demnach die Summe der scheinbaren Scheibenflächen 3,87 Prozent des gesamten Himmels ausmachen, so muß der Radius  $3,09 \cdot 10^{27}$  Kilometer betragen. Bei diesem Radius würde Licht  $3\frac{1}{4} \cdot 10^{14}$  Jahre brauchen, um von den fernsten Sternen in den Mittelpunkt zu gelangen. Unwiderlegliche Theorien beweisen, daß die Lebenszeit unserer Sonne als leuchtender Körper wahrscheinlich zwischen fünfundzwanzig und hundert Millionen Jahren liegt.<sup>3)</sup> Aber wenn wir liberal sind und voraussetzen, daß jeder unserer Sterne als ein selbstleuchtender

1) Phil. Mag. August 1901, S. 169, 170.

2) Phil. Mag., August 1901, S. 175.

3) Darüber denken viele Naturforscher anders, indem sie die Zahl viel größer annehmen, ich darf auf mein S. 226 zitiertes Buch auch hier verweisen.  
D. H.

Körper eine Lebensdauer von hundert Millionen Jahren besitzt, ist so immerhin gefunden, daß die Zeit, die das Licht brauchte, um sich von den an der Grenze befindlichen Sternen nach dem Mittelpunkte der Kugel zu bewegen dreieinviertel Millionen Mal so groß ist wie die Lebensdauer eines Sternes. Hieraus folgt, daß, wenn der ganze Himmel von dem Lichte aller Sterne zu gleicher Zeit erglücken soll, die zeitlichen Anfänge der Sterne um so früher angesetzt werden müssen, je weiter sie entfernt sind, damit die Zeit der Ankunft des Lichtes jedes einzelnen Sternes an der Erde innerhalb der Dauer der Sichtbarkeit aller anderen an der Erde fällt. Meine Annahme bezüglich der gleichförmigen Dichte ist vollkommen willkürlich; nichtsdestoweniger halte ich es aber für sehr unwahrscheinlich, daß so viel Sterne (helle oder dunkle) vorhanden sind, daß die Gesamtfläche der Sternscheiben mehr als  $10^{-12}$  oder  $10^{-11}$  des gesamten Himmels ausmacht.

Um eine Vorstellung von der Dichtigkeit der vorausgesetzten Verteilung von tausend Millionen Sonnen in einer Kugel von  $3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer Radius zu gewinnen, stellen wir uns vor, sie seien genau kubisch angeordnet. Da man gefunden hat, daß das Volumen der Sonne  $123,5 \cdot 10^{39}$  Kubikkilometer beträgt, so würde sich dabei als Abstand zwischen einem Stern und seinen sechs nächsten Nachbarn  $4,98 \cdot 10^{13}$  Kilometer ergeben. Die Sonne würde in diesem Abstände angeschaut wahrscheinlich als ein Stern zwischen der ersten und zweiten Größe erscheinen; wenn wir aber annehmen würden, daß unsere tausend Millionen Sonnen sämtlich solche Helligkeit besitzen, daß sie in einem Abstände, der einer Parallaxe mit  $1,0''$  entspricht, als Stern erster Größe erscheinen, dann würde ihre Helligkeit im Abstände  $3,09 \cdot 10^{16}$  ein Milliontel hiervon betragen; und die weitesten von unseren Sternen würden mit unseren mächtigen Teleskopen als Sterne 16. Größe gesehen werden. Newcomb schätzte die Zahl der durch unsere modernen Teleskope sichtbaren Sterne auf dreißig bis fünfzig Millionen. Young schätzte die Zahl der durch das Teleskop der Licksternwarte sichtbaren Sterne auf hundert Millionen. Diese höhere Schätzung beträgt nur ein Zehntel der von uns angenommenen tausend Millionen der Sonne gleichen Massen, von denen jedoch neunhundert Millionen entweder nicht leuchtend, oder doch, wenn leuchtend, zu weit entfernt sein mögen, als daß sie bei ihren wirklichen Abständen von der Erde von uns gesehen werden könnten. Man beachte ferner, daß wir nur der Leichtigkeit des Zählens wegen unser Universum als eintausend Millionen Sonnen gerechnet haben, und daß der Sinn unserer Rechnung der ist, daß der Gesamtbetrag Materie innerhalb einer Kugel von  $3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer Radius tausend Millionen Mal so viel Masse enthält wie die Masse der Sonne ist. Die Masse der Sonne ist aber  $1,99 \cdot 10^{27}$  Metertonnen oder  $1,99 \cdot 10^{33}$  Gramm. Demnach besagt unsere Berechnung unseres vorausgesetzten Universums, daß sein ponderabler Inhalt  $1,99 \cdot 10^{42}$  Gramm beträgt, oder daß die mittlere Dichte  $1,61 \cdot 10^{-28}$  der Dichte des Wassers ausmacht.

Gehen wir jetzt auf die Frage nach der Summe der scheinbaren Flächen zurück! Das Verhältnis dieser Summe zu  $4\pi$ , der gesamten scheinbaren Fläche des nach allen Richtungen angeschauten Himmels, wird gegeben durch die Formel

$$\alpha = \frac{3}{4} N \left( \frac{a}{r} \right)^2,$$

vorausgesetzt, daß sein Betrag ein so kleiner Bruch der Einheit ist, daß

seine Verkleinerung durch totale und partielle Finsternisse außer acht gelassen werden darf. In dieser Formel bedeutet  $N$  eine Anzahl Kugeln vom Radius  $a$ , die innerhalb einer Kugeloberfläche vom Radius  $r$  gleichmäßig verteilt sind. Ist die gleiche Masse bei ungeänderter Dichte auf  $N'$  Kugeln vom Radius  $a'$  gleichförmig in derselben Kugel verteilt, so haben

$$\frac{N'}{N} = \left(\frac{a}{a'}\right)^3$$

und demgemäß

$$\frac{a'}{a} = \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Mit  $N = 10^9$ ,  $r = 3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer und  $a$  (dem Sonnenradius)  $= 7 \cdot 10^5$  Kilometer erhielten wir  $\alpha = 3,87 \cdot 10^{-13}$ . Demnach ergibt  $a' = 7$  Kilometer  $\alpha' = 3,87 \cdot 10^{-8}$ , und  $a'' = 1$  Zentimeter ergibt  $\alpha'' = 1/36,9$ . Wäre also auch die gesamte Masse des von uns angenommenen Universums auf Kügelchen von der Dichte 1,4 (der mittleren Dichte der Sonne) und von 2 Zentimeter Durchmesser gleichmäßig in einer Kugel von  $3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer Radius verteilt, so würde einem im Mittelpunkte dieser Kugel befindlichen Auge durch die Kügelchen nur  $1/36,9$  von dem Lichte einer außerhalb der Weltsphäre befindlichen Lichthülle verdeckt werden. Man versteht die Kleinheit dieses Verlustes leicht, wenn man beachtet, daß nur ein einziges solches Kügelchen von 2 Zentimeter Durchmesser auf 364000000 Kubikkilometer Raum in dem von uns angenommenen auf Kügelchen von 2 Zentimeter Durchmesser reduzierten Universum kommt — im Gegensatz zu der Gesamtverdeckung der Sonne durch eine natürliche Wolke aus Wasserkügelchen oder durch die Rauchwolke einer Esse oder eines Dampfschiffes.

Jetzt sei alle Materie in dem von uns vorausgesetzten Universum auf Atome reduziert (also buchstäblich auf ihren wahrscheinlich ersten Zustand zurückgebracht). In einer Kugel vom Radius  $r$  seien die Atome nach Maßgabe ihrer Gravitationseigenschaft verteilt. Dabei wollen wir verstehen, daß die Bedingung dieser „Gleichförmigkeit“ erfüllt ist, wenn kugel- oder würfelförmige Teile von gleichem Rauminhalt, die im Vergleich mit der ganzen Kugel klein, aber hinreichend groß sind, um große Zahlen der Atome zu fassen, gleiche Gesamtmassen, nach ihrer Gravitation gerechnet, enthalten, gleichviel, ob die Atome selbst von gleicher oder ungleicher Masse oder von ähnlicher oder unähnlicher chemischer Eigenschaft sind. Solange diese Bedingung erfüllt ist, erleidet jedes Atom sehr angenähert dieselbe Kraft, als wenn die gesamte Materie unendlich fein gekörnt, das heißt, aufs äußerste homogen wäre.

Wir beginnen demnach mit einer gleichförmigen Kugel aus Materie von der Dichte  $\rho$ , nach der Gravitation gerechnet, ohne innere gegenseitige Kräfte außer der Gravitation zwischen ihren Teilen, die wir im ersten Augenblicke in Ruhe befindlich voraussetzen; es wird nun gefordert, die spätere Bewegung zu finden. Wenn wir uns das Ganze in unendlich dünne konzentrische sphärische Schalen geteilt denken, sehen wir, daß jede von ihnen so nach innen fällt, als wenn sie von der ganzen von ihr eingeschlossenen und im Mittelpunkte vereinigten Masse angezogen würde.<sup>1)</sup> Demnach ist unsere

1) Nach dem bekannten Newtonschen Satz.

Aufgabe auf die allgemein bekannte Schülerübung zurückgeführt, die geradlinige Bewegung einer Partikel zu finden, die umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes von einem festen Punkte angezogen wird. Es sei  $x_0$  der anfängliche Abstand,  $\rho_0$  die anfängliche Dichte,  $\frac{4\pi\rho_0}{3} x_0^3$ , die sich stets gleichbleibende, anziehende Masse,  $v$  und  $x$  Geschwindigkeit und Abstand vom Mittelpunkte zur Zeit  $t$ . Dann ist die Lösung der Aufgabe für die Zeit, während deren die Partikel nach dem Mittelpunkte hin fällt

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{4\pi\rho_0}{3} x_0^3 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)$$

und

$$t = \sqrt{\frac{3}{8\pi\rho_0}} \left( \frac{\pi}{2} - \vartheta + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \right) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{8\pi\rho_0}} \left[ 1 - \frac{2\vartheta}{\pi} \left( 1 - \frac{\sin 2\vartheta}{2\vartheta} \right) \right],$$

wo  $\vartheta$  den spitzen Winkel bezeichnet, dessen Sinus  $\sqrt{\frac{x}{x_0}}$  ist. Dies zeigt, daß die Dauer des Fallens um irgendeinen bestimmten Teil des anfänglichen Abstandes die nämliche ist, welches auch dieser anfängliche Abstand sein mag; und daß die Dauer des Fallens bis zum Mittelpunkte (die wir mit  $T$  bezeichnen wollen)  $T = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{3}{8\pi\rho_0}}$  beträgt. Hiernach bleibt in unserer Aufgabe über homogene, schwere Materie, die innerhalb einer Kugelfläche in Ruhe gegeben ist und dann sich überlassen wird nach innen zu fallen, die wachsende Dichte homogen, und die Dauer des Zusammenschrumpfens bis auf irgendeinen festgesetzten Teil des ursprünglichen Radius ist der Quadratwurzel aus der (ersten) Dichte umgekehrt proportional.

Wenn wir dieses Resultat auf das angenommene Universum vom Radius  $3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer und die der tausendmillionenfachen Masse unserer Sonne gleiche Masse anwenden, berechnen wir, daß die Gravitationsanziehung einem an seiner Oberfläche befindlichen Körper eine Beschleunigung von  $1,37 \cdot 10^{-13}$  Kilometer in der Sekunde erteilt. Dies ist demnach<sup>1)</sup> der Wert von  $\frac{4\pi\rho_0}{3} x_0$ . Mit einer Sekunde als Einheit der Zeit und einem Kilometer als Einheit der Entfernung, findet man also  $T = 52,8 \cdot 10^{13}$  Sekunden = 16,8 Millionen Jahre. So geht unsere Formel über in

$$\frac{1}{2} v^2 = 1,37 \cdot 10^{-13} x_0 \left( \frac{x_0}{x} - 1 \right),$$

woraus sich ergibt

$$v = 5,23 \cdot 10^{-7} \sqrt{x_0 \left( \frac{x_0}{x} - 1 \right)},$$

und

$$t = 52,8 \cdot 10^{13} \left[ 1 - \frac{2\vartheta}{\pi} \left( 1 - \frac{\sin 2\vartheta}{2\vartheta} \right) \right],$$

woraus, wenn  $\sin \vartheta$  sehr klein ist, folgt

$$t = 52,8 \cdot 10^{13} \left( 1 - \frac{4\vartheta^2}{3\pi} \right).$$

1) Ann. S 451.

Es sei nun beispielsweise  $x_0 = 3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer und  $\frac{x_0}{x} = 10^7$  und demgemäß  $\sin \vartheta = \vartheta = 3,16 \cdot 10^{-4}$ ; hieraus ergibt sich  $v = 291\,000$  Kilometer in der Sekunde und  $t = T' - 7080$  Sekunden = annähernd  $T' - 2$  Stunden. Nach diesen Resultaten ist es äußerst interessant zu erfahren, daß die von uns angenommene Kugel aus vollkommen kompressibeler Substanz, die sich ursprünglich bei einer Dichte, die  $1,61 \cdot 10^{-28}$  derjenigen des Wassers gleichkommt, in Ruhe befand und dann ungepreßt von Äther sich unter dem Einflusse der inneren Gravitation ihrer Teile zusammenziehen kann, nahezu siebzehn Millionen Jahre gebraucht, um 0,0161 der Wasserdichte zu erreichen, und etwa zwei Stunden mehr, um in ihrem Mittelpunkt zu unendlicher Dichte zusammenzuschrumpfen.<sup>1)</sup> Ferner ist es interessant zu erfahren, daß, wenn der anfängliche Radius  $3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer beträgt, die nach innen gerichtete Geschwindigkeit der Oberfläche 291 000 Kilometer in der Sekunde in dem Augenblicke beträgt, wenn ihr Radius auf  $3,09 \cdot 10^9$  zusammengezogen ist. Wenn wir nun, statt eine ideal kompressible Substanz anzunehmen, uns zu Atomen gewöhnlicher Materie aller Art zurückwenden, die ursprünglich den Raum unserer Kugel von  $3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer Radius ausfüllen, bleiben alle Schlüsse weiter bestehen (vorausgesetzt, daß alle Geschwindigkeiten kleiner als die des Lichtes sind),<sup>2)</sup> auch wenn der Äther den Raum erfüllt, in dem die Atome sich bewegen. Dieser würde meiner Meinung nach<sup>3)</sup> keinerlei Widerstand gegen eine gleichförmige Bewegung eines Atoms in ihm ausüben; er würde aber sicher jedem sich durch ihn bewegenden Atom eine Quasiträgheit zu der Newtonschen Eigenträgheit hinzufügen, welche letztere nach dem Newtonschen Gesetze genau im Verhältnisse zu jedem Betrage seiner Gravitationseigenschaft steht. Die hinzukommende Quasiträgheit muß im Vergleich mit der Newtonschen Trägheit äußerst klein sein, wie dies durch die Newtonschen Beweise, einschließlich der Keplerschen Gesetze für die die Planeten bildenden Atomgruppen begründet wird und durch die Erscheinungen an den Körpern, die sich auf der Erdoberfläche bewegen.

In tausend Zeitsekunden, nachdem die Dichte 0,0161 der Wasserdichte erreicht hat, würde die nach innen gerichtete Geschwindigkeit 305 000 Kilometer in der Sekunde betragen, also größer sein als die Lichtgeschwindigkeit, und die ganze Oberfläche unserer sich zusammenziehenden Kugel aus Gas oder Dampf oder Atomhüllen würde zu glühen anfangen und nach innen und außen Licht aussenden. All dies ist vollkommen real, außer der Voraussetzung gleichmäßiger Verteilung in einer Kugel mit dem ungeheuren Radius von  $3,09 \cdot 10^{16}$  Kilometer, die wir für den Zweck der Erläuterung angenommen haben. Die enorm große Geschwindigkeit (291 000 Kilometer in der Sekunde) und das Maß der nach innen gerichteten Beschleunigung (13,7 Kilometer) der Grenzfläche rühren von der Größe des ursprünglichen Radius und der Gleichförmigkeit der Dichte bei der ursprünglichen Verteilung her.

Um zur Wirklichkeit nach dem wahrscheinlichsten Urteil, das die bis-

1) Die Kontraktionswärme ist nicht berücksichtigt, diese erhöht die Zahlen sehr erheblich, vgl. Anm. 3, S. 449, und die Arbeiten A. Ritters in Wiedem. Ann. f. Phys., auch mein S. 226 zitiertes Buch, S. 120 ff. D. H.

2) Wegen der sonst entstehenden Wellen, Anhang A. D. H.

3) Vgl. Anhang A.

herige Kenntnis uns zu bilden gestattet, zu gelangen, wollen wir annehmen, daß vor vielen Millionen, oder tausend Millionen, oder Billionen Jahren, alle Materie im Universum Atome war, die sich sehr nahezu in Ruhe<sup>1)</sup> oder vollkommen in Ruhe befunden haben; an manchen Stellen dichter verteilt als in anderen; in der Gesamtheit des unendlichen Raumes von unendlich kleiner durchschnittlicher Dichte. An Stellen, an denen die Dichte damals größer war als in benachbarten Gegenden, würde die Dichte noch größer werden; an Stellen kleinerer Dichte würde sie kleiner werden; und große Gebiete würden vollständig leer oder nahezu leer von Atomen werden. Diese großen leeren Gebiete würden sich so ausdehnen, daß sie Gegenden größerer Dichte vollkommen umgeben. In manchem Teile oder in manchen Teilen eines jeden so isolierten Atomhaufens würde die Verdichtung durch Bewegungen aus allen Richtungen, die im allgemeinen nicht nach einem Punkte konvergieren, und ohne merklichen gegenseitigen Einfluß zwischen den Atomen fortschreiten, bis die Dichte etwa die Größenordnung  $10^{-6}$  der Dichte unserer gewöhnlichen Atmosphäre erreicht hat. Dann würde eine gegenseitige Beeinflussung der Atome durch Zusammenstöße praktisch wirksam zu werden beginnen. Jeder Zusammenstoß würde zu einem Wellenzuge im Äther Anlaß geben. Diese Wellen würden Energie fortführen und sie in dem leeren Äther des unendlichen Raumes ausbreiten. Der Verlust der so den Atomen entzogenen Energie würde große Kondensationshaufen auf den Zustand von Gas reduzieren, das sich unter dem Einflusse nur seiner eigenen Schwere im Gleichgewichte<sup>2)</sup> befindet, oder wie unsere Sonne rotiert oder sich mit mäßiger Geschwindigkeit wie in spiraligen Nebeln bewegt usf. Kondensation durch Gravitation würde zuerst eine Temperaturerhöhung hervorrufen, der später Abkühlung und schließlich Gefrieren folgt, so daß feste Körper entstehen; Zusammenstöße zwischen diesen würden Meteorsteine liefern von der Art, wie wir sie sehen. Wir können es nicht als wahrscheinlich betrachten, daß diese brockenartigen Klumpen fester Materie (die dem bei unseren Chausseen benutzten Steinschlag einigermaßen ähnlich sind) ursprüngliche Formen sind, in denen Materie geschaffen wurde. So werden wir in diesem zwanzigsten Jahrhundert zu Anschauungen über den atomistischen Ursprung aller Dinge geführt, die denen sehr ähnlich sind, die von Demokrit, Epikur und von deren hohem römischem poetischen Verkünder, Lucrez, vorgebracht sind.<sup>3)</sup>

1) „On Mechanical Antecedents of Motion, Heat, and Light“. Brit. Assoc. Rep. Part 2, 1854; Edin. New, Phil. Journ. Vol. I, 1855; Comptes Rendus Vol. XL, 1855; Kelvins Collected Math. and Phys. Papers. Vol. II, Art. LXIX.

2) Homer Lane, American of Science, 1870, S. 57; Sir W. Thomson, Phil. Mag. März 1897, S. 287.

3) Daß die obige Darstellung ganz der von Kant entspricht, braucht wohl kaum hervorgehoben werden. D. H.

## Anhang E.

### Äpinus' Theorie der Elektrizität, Atomtheorie der Elektrizität, Elektrionen.<sup>1)</sup>

§ 1. Nach der allgemein bekannten Theorie Äpinus', die gemeinhin als Fluidumtheorie der Elektrizität bezeichnet wird, bestehen positive und negative elektrische Ladungen in einem Überschusse über und einem Zurückbleiben hinter einer natürlichen Menge einer Flüssigkeit, die als elektrisches Fluidum bezeichnet wird und sich zwischen den Atomen der ponderablen Materie hindurchbewegt. Materienteile, die von elektrischem Fluidum frei sind, stoßen einander ab; Teile des elektrischen Fluidums stoßen einander ab; Teile des elektrischen Fluidums und der von ihr freien Materie ziehen einander an.

§ 2. Meine Vorstellung ist nun die, daß das Äpinussche Fluidum aus äußerst kleinen gleichen und ähnlichen Atomen besteht, die ich als Elektrionen<sup>2)</sup>

---

1) Aus dem Prof. Boscha im November 1901 gewidmeten Jubiläumsbande.

2) Ich habe diese Bezeichnung in einem am 27. Mai in der Nature veröffentlichten Aufsatz vorzuschlagen gewagt, in dem nach einem kurzen Hinweise auf eine alte Anschauung einer Einflüssigkeitstheorie der Elektrizität mit Harzelektrizität als dem elektrischen Fluidum der folgende Ausdruck meiner damaligen Anschauung vorkommt: „Ich ziehe es vor, eine atomistische Elektrizitätstheorie in Betracht zu ziehen, die als der Überlegung wert von Faraday und Clerk Maxwell vorausgesehen, sehr bestimmt von Helmholtz in seinem letzten Vortrage vor der Royal Institution vorgeschlagen, heutigestags bei Forschern und Lehrern weite Anerkennung gefunden hat. In der Tat scheint das Faradaysche Gesetz der elektro-chemischen Äquivalenz notwendig zu etwas Atomistischem in der Elektrizität zu führen, und die sehr moderne Bezeichnung Elektron (die meines Wissens zuerst von Johnstone Stoney eingeführt wurde und jetzt zur Bezeichnung eines Atoms von entweder Glas- oder Harzelektrizität weit verbreitet ist) zu rechtfertigen. Die ältere und augenblicklich mehr verbreitete, vor 60 Jahren von Faraday gewählte Bezeichnung Jon führt zu einer geeigneten Abänderung Elektrion zur Bezeichnung eines Atoms der Harzelektrizität. Und wenn wir jetzt das Wesentliche der Äpinusschen Theorie anerkennen und sie gemäß der Theorie von Vater Boscovich behandeln, ist jedes Atom ponderabler Materie ein Elektron von Glaselektrizität, das mit einem dicht an ihm befindlichen neutralisierenden Elektron von Harzelektrizität eine resultierende Kraft auf jedes entfernte Elektron und Elektrion ausübt, die umgekehrt proportional der dritten Potenz des Abstandes ist und in der durch die wohlbekannte erforderliche Anwendung des Parallelogrammes der Kräfte bestimmten Richtung liegt.“ Man sieht, daß ich damals nicht an die in der vorliegenden Mitteilung aufgestellte Hypothese gedacht habe, nach der Elektrionen jeden Raum frei durchsetzen, gleichviel ob er nur von Äther oder auch von den Räumen endlicher Kugeln, die die Atome ponderabler Materie bilden, erfüllt ist, nach der aber auf jedes Elektrion im Innern eines Atomes ponderabler Materie eine nach dem Mittelpunkte des Atomes gerichtete Kraft wirkt, so als ob das Atom in seinem Innern eine gegen dasselbe feste gleichförmige Verteilung einer gedachten elektrischen Materie enthielte.

(Ich habe in diesem Anhang die Kelvinsche Bezeichnung Elektrionen statt Elektronen beibehalten, Elektrionen mögen auch aus Elektronen zusammen-

bezeichnen will, die weit kleiner sind als die Atome ponderabler Materie, und daß sie frei<sup>1)</sup> die von jenen größeren Atomen erfüllten Räume und ebenso frei den nicht von ihnen erfüllten Raum durchdringen. Wie in der Theorie von Äpinus brauchen wir Abstoßungen zwischen den Elektrionen; und Abstoßungen zwischen den Atomen unabhängig von Elektrionen; und Anziehungen zwischen Elektrionen und solchen Atomen, die keine Elektrionen besitzen. Der Kürze wegen will ich in Zukunft unter Atom ein Atom ponderabler Materie verstehen, gleichviel ob es in sich irgendein Elektrion enthält oder nicht.

§ 3. Nach der Entdeckung und dem von Cavendish und von Coulomb durchgeführten experimentellen Beweise des Gesetzes des umgekehrten Quadrates der Entfernung für elektrische Anziehungen und Abstoßungen können wir jetzt annehmen, daß die Atome, die ich sämtlich als kugelförmig voraussetze, andere, außerhalb ihrer befindliche Atome mit Kräften abstoßen, die den Quadraten der Abstände zwischen ihren Mittelpunkten umgekehrt proportional sind, und daß dasselbe für Elektrionen gilt, die zweifellos begrenzte Räume ausfüllen, obwohl wir sie für jetzt so behandeln, als ob sie bloße mathematische Punkte wären, die die Eigenschaft elektrischer Anziehung und Abstoßung besitzen. Wir müssen jetzt ferner annehmen, daß jedes Atom jedes außerhalb seiner befindliche Elektrion mit einer Kraft anzieht, die dem Quadrate der Entfernung der Mittelpunkte umgekehrt proportional ist.

§ 4. Meine Voraussetzung, daß die Elektrionen frei durch den von Atomen erfüllten Raum hindurchgehen, erfordert die Kenntnis des Gesetzes der Kraft, die ein innerhalb des Atoms befindliches Elektrion erleidet. Als eine versuchsweise aufzustellende Hypothese nehme ich der Einfachheit wegen an, daß die auf ein sich einem Atome näherndes Elektrion wirkende Kraft dem Quadrate seines Abstandes vom Mittelpunkte genau umgekehrt proportional ist, solange das Elektrion sich außerhalb befindet, daß keine plötzliche Änderung eintritt, wenn das Elektrion in das Atom gelangt, daß aber die Kraft allmählich einfach proportional dem Abstände vom Mittelpunkte bis zur Null abnimmt, wenn das Elektrion bei seiner Annäherung an den Mittelpunkt sich innerhalb der sphärischen Grenzfläche des Atoms befindet. Dies ist geradeso, wie wir es fänden, wenn das elektrische Vermögen des Atoms von einer gleichförmigen Verteilung einer idealen elektrischen Substanz in dem ganzen Atome herrührte, von der jedes unendlich kleine Teilchen unendlich kleine Mengen der Substanz, die sich in andern Atomen befinden, genau umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung abstößt und Elektrionen nach demselben Gesetze anzieht. Wir können aber nicht dieselbe Voraussetzung für die gegenseitige Kraft zwischen zwei übergreifenden Atomen machen; denn wir müssen uns die Freiheit bewahren, eine Abstoßung oder Anziehung nach irgendeinem Kraftgesetze hinzuzufügen, das wir zur Erklärung elektrischer, elastischer und chemischer Eigenschaften der Materie geeignet finden sollten.

§ 5. Die neutralisierende Menge Elektrionen für irgendein Atom oder eine Gruppe von Atomen besitzt genau dieselbe Menge Elektrizität einer Art

---

gesetzt sein, da wir ja jetzt gewissen Atomen Tausende von negativen Elektronen zuschreiben, was freilich auch der Verf. tut. Übrigens lautet die Überschrift beim Verfasser „Äpinus atomisiert“.

1) Das Wort „frei (freely)“ bedeutet hier, daß keine anderen Kräfte wirken sollen als die nachfolgend angegebenen der Anziehung und Abstoßung in die Ferne.

D. H.)

D. H.



wie das Atom oder die Atomgruppe Elektrizität der entgegengesetzten Art aufweist. Die Menge für irgendein Atom mag eins oder zwei oder drei oder irgendeine ganze Zahl sein und braucht nicht für alle Atome dieselbe zu sein. Demgemäß dürften die Bezeichnungen monoelektronisch, dielektronisch, trielektronisch, tetraelektronisch, polyelektronisch usw. sich eignen. Es ist möglich, daß die Qualitätsverschiedenheiten der Atome verschiedener Substanzen teilweise davon herrühren, daß ihre Elektronenzahlen verschieden sind; es ist aber auch möglich, daß die Qualitätsverschiedenheiten vollständig mehr nach der Art von Boscovich durch Verschiedenheiten in den Kraftgesetzen zwischen den Atomen zu erklären sind und gar keine Verschiedenheiten in den Elektronenzahlen, die ihre Quanten bilden, erfordern.

§ 6. Eine andere noch im Auge zu behaltende Möglichkeit ist die, daß das neutralisierende Quantum für ein Atom vielleicht nicht durch eine ganze Anzahl von Elektronen gebildet wird. So kann man sich beispielsweise vorstellen, daß ein zweiatomiges Gas, Sauerstoff  $O_2$  oder Stickstoff  $N_2$  oder Wasserstoff  $H_2$ , oder Chlor  $Cl_2$ , als Quantum drei oder eine andere ungerade Zahl Elektronen besitzt, so daß die Einzelatome, wenn sie existieren könnten, entweder mit Glas- oder Harzelektrizität geladen sein müßten und nicht neutral sein könnten.<sup>1)</sup>

§ 7. Die jetzt gebräuchlichen Bezeichnungen, positiv und negativ, für die beiden Arten Elektrizität haben zweifellos ihren Ursprung in dem Gebrauche von Glasplatten oder Glaszylindern bei den gewöhnlichen Elektrisiermaschinen, die dem isolierten ersten Konduktor Glaselektrizität und dem nicht immer isolierten Reibzeug Harzelektrizität mitteilen. So betrachteten Äpinus und seine Nachfolger die ersten Hauptkonduktoren ihrer Maschinen als das wahre elektrische Fluidum liefernd und in den Reibzeugen einen Mangel daran hinterlassend, der seine Ergänzung von der Erde her erhalten mußte. Es ist interessant, in Beccarias Bericht über seine Beobachtungen, die er 1760 zu Garzegna in Piemont über atmosphärische Elektrizität angestellt hat, zu lesen: „Die milde überschießende Elektrizität der Luft bei schönem Wetter“. Nach dem moderneren Gebrauch würde dies schwache positive Elektrizität heißen. Der Sinn beider Ausdrucksweisen, in einer hypothesenfreien Sprache wiedergegeben, ist die schwache Glaselektrizität der Luft bei schönem Wetter.

§ 8. In der mathematischen Theorie der im Gleichgewichte befindlichen Elektrizität ist es vollkommen gleichgültig, welche von den einander entgegengesetzten Erscheinungen wir positiv nennen und welche negativ. Aber die großen Verschiedenheiten bei den Disruptions- und Lichtwirkungen (die auftreten, wenn die Kräfte für elektrisches Gleichgewicht zu stark sind), wie sie sich für die beiden Elektrisierungsarten zeigen und seit den ersten Zeiten elektrischer Wissenschaft bekannt sind, geben physikalische Eigenschaften wieder, die von der mathematischen Theorie nicht getroffen werden. Und die vergleichsweise junge Varleysche Entdeckung<sup>2)</sup> des molekularen Stromes harzelektrisch geladener Partikel von der „Kathode“ der harzelektrischen

1) Die Dissoziation ohne Ladung, z. B. die thermische, spricht nicht dafür.  
D. H.

2) Proc. Roy. Soc., Bd. XIX, 1871, S. 239, 240. (Über die vom Verf. angenommenen Prioritäten Bemerkungen zu machen, habe ich grundsätzlich vermieden. D. H.)

Elektrode her, in Apparaten für die Übertragung von Elektrizität im Vakuum oder in sehr verdünnter Luft, gibt starken Grund für die Anschauung, daß die bewegliche Elektrizität der Äpinusschen Theorie Harzelektrizität ist und nicht Glaselektrizität, die er zufällig als solche angenommen hat. Ich will demgemäß die Annahme machen, daß unsere Elektrionen wie äußerst kleine Partikel harzelektrisch geladener Materie wirken, daß ein leeres Atom einfach wie eine Kugel aus der Substanz des Atoms wirkt, die als wesentlichen Besitz Glaselektrizität in sich oder in einer kleineren konzentrischen Kugel in ihr gleichförmig verteilt enthält, und daß gewöhnliche, nicht elektrisch wirkende ponderable Materie aus einer ungeheuer großen Ansammlung von Atomen besteht, die nicht leer sind, sondern innerhalb der Raumteile, die sie ausfüllen, genau so viele Elektrionen enthalten, daß die elektrische Kraft für alle Stellen, deren Abstand vom nächsten Atom im Vergleich mit dem Durchmesser eines Atoms oder molekularen Atomhaufens klein ist, aufgehoben wird.

§ 9. Die letzte den Abstand betreffende Bedingung wäre, wegen des für Kräfte geltenden Gesetzes vom umgekehrten Quadrate der Entfernung, un-

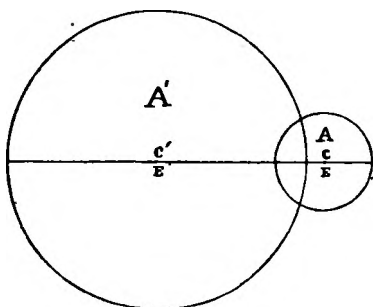


Fig. 95.

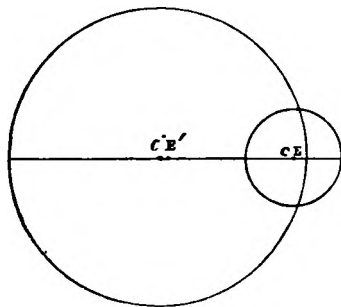


Fig. 96.

nötig, und die elektrische Kraft wäre in dem ganzen Raume außerhalb der Atome Null, wenn jedes Atom nur ein einziges Elektrion in seinem Mittelpunkte besäße, vorausgesetzt, daß die elektrischen Mengen der entgegengesetzten Elektrizitäten (nach der alten Definition der mathematischen Elektrostatik gerechnet) in dem Atom und in dem Elektrion gleich sind. Aber auch wenn jedes neutralisierte einzelne Atom gerade nur ein einziges im stabilen Gleichgewicht in seinem Mittelpunkte befindliches Elektrion enthält, wird offenbar — wenn zwei Atome so weit übereinandergreifen, daß der Mittelpunkt des einen Atoms innerhalb der sphärischen Grenzfläche des andern liegt — das frühere Gleichgewicht der beiden Elektrionen aufgehoben, und diese müssen anderswo als in den Mittelpunkten neue Gleichgewichtslagen suchen. So befindet sich in der Darstellung nach Fig. 95 jedes Elektrion im Mittelpunkte seines Atoms und wird von dem benachbarten Atom und dem in dessen Mittelpunkte befindlichen Elektrion mit gleichen Kräften angezogen und abgestoßen. In der Darstellung nach Fig. 96 aber würde, wenn sich  $E$  und  $E'$  in den Mittelpunkten  $C$ ,  $C'$  der beiden Atome befinden,  $E$  von  $E'$  mehr abgestoßen, als es von dem Atom  $A'$  angezogen wird. Da beide Elektrionen als frei vorausgesetzt sind, wird sich  $E$  nach rechts bewegen, und indem dadurch die von ihm auf  $E'$  ausgeübte Abstoßung geringer wird,

wird  $E'^1)$  in derselben Richtung folgen.<sup>2)</sup> Die Gleichgewichtsgleichungen der beiden Elektrionen sind leicht hingeschrieben, jedoch nicht so leicht ohne einen kleinen rechnerischen Kunstgriff aufgelöst. Die Lösung ist in Fig. 96 für den Fall richtig wiedergegeben, daß der eine Radius dreimal so groß ist wie der andere, und der Abstand zwischen den Mittelpunkten 2,7 mal so groß ist wie der kleinere Radius.<sup>3)</sup> Die Untersuchung in der Anmerkung zeigt, daß, wenn die beiden Atome einander etwas näher gebracht werden, das Gleichgewicht instabil wird, und wir können schließen, daß beide Elektrionen nach rechts springen,  $E'$ , um in einem Punkte innerhalb des Atoms  $A$  und links von seinem Mittelpunkt, und  $E$  um außerhalb  $A'$ , an einer noch innerhalb  $A$  gelegenen Stelle haltzumachen. Wenn wir schließlich die Mittelpunkte immer näher aneinander bringen, bis sie zusammenfallen, kommt  $E$  wieder in  $A'$  hinein, und die beiden Elektrionen finden, wie in Fig. 97 gezeigt ist, in Abständen zu beiden Seiten des gemeinsamen

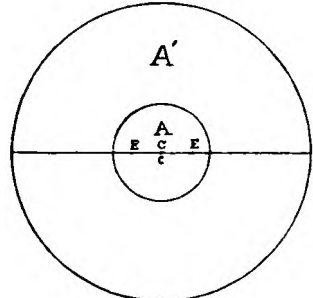


Fig. 97.

- 1) Der Anziehung von  $A$  nachgebend. D. H.
- 2) Hierzu ist zu beachten, daß, wie wir jetzt wissen, allerdings auch die positiven Elektronen bis zu einem gewissen Grade beweglich sind. D. H.
- 3) Bezeichnet man mit  $e$  die Menge Glas- oder Harzelektrizität in jedem Atom bzw. Elektrion; mit  $\zeta$  den Abstand zwischen den Mittelpunkten der Atome; mit  $\alpha, \alpha'$  die Radien der beiden Atome; mit  $x, x'$  die Verschiebungen der Elektrionen aus den Mittelpunkten; mit  $X, X'$  die auf die Elektrionen wirkenden Kräfte, so wird

$$X = e^2 \left[ -\frac{x}{\alpha^3} + \frac{1}{(\zeta + x - x')^2} - \frac{\zeta + x}{\alpha'^3} \right];$$

$$X' = e^2 \left[ -\frac{x'}{\alpha'^3} + \frac{1}{(\zeta - x')^2} - \frac{1}{(\zeta + x - x')^2} \right].$$

Setzt man jeden dieser Ausdrücke für den Gleichgewichtszustand gleich Null, so ergeben sich zwei Gleichungen, die nicht leicht durch ein direktes Verfahren zur Bestimmung der beiden unbekannten Größen  $x, x'$  behandelt werden, die aber nach einem Verfahren aufeinanderfolgender Annäherungen in folgender Weise aufgelöst werden können: Es seien  $x_0, x_1, \dots, x_i; x'_0, x'_1, \dots, x'_i$  aufeinanderfolgende Annäherungen für die Werte von  $x$  und  $x'$ , dann setze man

$$x_{i+1} = \frac{1}{\alpha^2 + \frac{1}{\alpha'^2}} \left( \frac{1}{D_i^2} - \frac{\zeta}{\alpha'^3} \right); \quad x'_{i+1} = \alpha'^2 \left\{ \frac{1}{(\zeta - x'_i)^2} - \frac{1}{(\zeta + x_{i+1} - x'_i)^2} \right\},$$

wo  $D_i^2 = (\zeta + x_i - x'_i)^2$  ist. Als Beispiel wählen wir  $\alpha = 1, \alpha' = 3$ . Um Lösungen für eine allmähliche Annäherung der Mittelpunkte zu finden, nehmen wir nacheinander  $\zeta = 2,9; 2,8; 2,7; 2,6$ . Wir fangen mit  $\zeta = 2,9$  an und nehmen  $x_0 = 0; x'_0 = 0$  an, so finden wir  $x_1 = 0,01243; x'_1 = 0,0297$  und dieselben Werte für  $x_2$  und  $x'_2$ . Hierauf nehmen wir  $\zeta = 2,8; x_0 = 0,01243; x'_0 = 0,0297$ , und finden  $x_1 = x_2 = 0,0269; x'_1 = x'_2 = 0,0702$ . So erhalten wir die Lösung für den zweiten Abstand zwischen den Mittelpunkten. Dann nehmen wir  $\zeta = 2,7; x_0 = 0,0269; x'_0 = 0,0702$  und finden  $x_1 = x_2 = 0,0462; x'_1 = x'_2 = 0,1458$ . Wenn wir in ähnlicher Weise für  $\zeta = 2,6$  verfahren, finden wir keine Konvergenz, und wir schließen, daß die Elektrionen für irgendeinen Wert von  $\zeta$  zwischen 2,7 und 2,6 eine Lage unstabilen Gleichgewichtes erreichen. Dieser Fall ist in Fig. 96 dargestellt, wo also  $C'C = 2,7; C'E' = 0,1458; CE = 0,0462$  ist.

Mittelpunktes Ruhe. Jeder der Abstände ist gleich

$$\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{2}{\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha'^3}}},$$

was für den Fall  $\alpha' = 3\alpha$  ergibt

$$\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{2 \times 27}{28}} = 0,622\alpha.$$

§ 10. Gegenseitige Einwirkungen dieser Art dürften wahrscheinlich in solchen binären Verbindungen wie  $O_2$ ,  $N_2$ <sup>1)</sup>,  $H_2$ ,  $Cl_2$ ,  $CO$ ,  $SO$ ,  $NaCl$  vorhanden sein, wenn jeder einzelne Teil  $O$ ,  $N$ ,  $H$ ,  $Cl$ ,  $C$ <sup>2)</sup>,  $S$ ,  $Na$ <sup>3)</sup> gerade ein Elektron als neutralisierendes Quantum besitzt. Wenn die Verbindung so dicht ist, daß die Mittelpunkte zusammenfallen, bleiben die beiden Elektronen zu beiden Seiten des gemeinsamen Mittelpunktes, wie am Ende des § 9 beschrieben. Ich sehe für jetzt keinen Grund dafür, es für äußerst unwahrscheinlich zu halten, daß dies der Fall sein mag für  $SO$  oder sonst für eine andere binäre Verbindung von zwei Atomen verschiedener Eigenschaft, wenn man keinen Anlaß hat, für eines von ihnen anzunehmen, daß das neutralisierende Quantum nicht genau ein Elektron ist. Hingegen muß für binäre Verbindungen aus zwei Atomen identischer Eigenschaft, die die Chemiker in zweiatomigen Gasen ( $O_2$ ,  $N_2$  usw.) entdeckt haben, außer und neben der elektrischen Abstoßung der beiden ähnlich elektrisch geladenen Kugeln, noch eine starke atomische Abstoßung vorhanden sein, die stabiles Gleichgewicht bei zusammenfallenden Mittelpunkten verhindert, wie stark auch die Atome durch die Anziehungen eines Paares (selbst einander abstoßender) in ihnen befindlicher Elektronen aneinander gezogen werden mögen; denn ohne eine solche Abstoßung würden die beiden ähnlichen Atome zu einem Atom verwachsen, das keine mögliche Kraft in der Natur wieder in zwei Atome zu spalten vermöchte.

§ 11. Wir gehen auf § 9 zurück und treiben die beiden Atome allmählich aus ihrer konzentrischen Lage, in die wir sie gebracht haben, auseinander. Man sieht leicht, daß die beiden Elektronen innerhalb des kleineren Atoms  $A$  bleiben, dabei wenig durch Anziehungen nach dem Mittelpunkte von  $A'$  hin aus der Gleichheit des Abstandes zu beiden Seiten des Mittelpunktes von  $A$  gestört, und daß sie, wenn  $A'$  unendlich weit ist, in Abständen, die gleich  $\frac{1}{2}\alpha\sqrt[3]{2} = 0,62996\alpha$  sind, zu beiden Seiten von  $C$ , dem Mittelpunkte von  $A$ , sich festsetzen. Wenn wir nicht wie in § 9 zwei monoelektronische Atome, sondern zwei polyelektronische Atome in dieser Weise behandeln, finden wir,

1) Ich bin abweichend von der üblichen Schreibweise  $O$ ,  $N$  auch für den zweiatomigen Sauerstoff und Stickstoff der Klarheit wegen der Schreibweise des Verf. gefolgt, da ja Mißverständnisse nicht zu befürchten sind. D. H.

2) Die Komplexität der Kohlenwasserstoffe und die Van't Hoff'sche und Le Belsche Theorie der durch die Vierwertigkeit des Kohlenstoffes hervorgerufenen asymmetrischen Folgen (Chiralität) machen es wahrscheinlich, daß das Kohlenstoffatom wenigstens vier Elektronen braucht, um elektrisch neutralisiert zu werden.

3) Die Tatsache, daß Natrium in festem und flüssigem Zustande ein metallischer Elektrizitätsleiter ist, macht es wahrscheinlich, daß das Natriumatom, wie alle andern metallischen Elemente, eine große Anzahl Elektronen braucht, um neutralisiert zu werden (aber wohl nicht als Dampf. D. H.). (Vgl. § 30 weiter unten.)

daß nach der Trennung die Anzahl Elektrionen in dem kleineren Atom gewachsen ist und in dem größeren abgenommen hat, und zwar mit einem weit kleineren Verhältnis als in dem Maße drei zu eins der Durchmesser, die wir für unsere monoelektrionischen Atome des § 9 angesetzt hatten. Dies ist ein sehr bemerkenswerter Schluß, der auf das hinweist, was wahrscheinlich die wahre Erklärung für die zuerst bekannt gewordene elektrische Eigenschaft der Materie bildet, nämlich die bei geriebenem Bernstein auftretenden Anziehungen und Abstoßungen. Zwei Festkörper, die aus Ansammlungen von monoelektrionischen Atomen von weit verschiedener Größe bestehen, würden sicher, wenn sie gegeneinander gedrückt und aneinander gerieben und dann voneinander getrennt werden, die Eigenschaften entgegengesetzt elektrisch geladener Körper zeigen; und das Überwiegen der elektrionischen Eigenschaft würde in derjenigen Ansammlung auftreten, in der die Atome kleiner sind. Wenn wir, wie wir es tun, annehmen, daß die Elektrizität der Elektrionen von der Art derjenigen des Harzes ist, sehen wir, daß nach Aneinanderdrücken und Reiben und der darauffolgenden Trennung die Ansammlung der kleineren Atome harzelektrisch und die Ansammlung der größeren Atome glaselektrisch geladen ist. Darin findet sich wahrscheinlich die wahre Erklärung für die altbekannte Tatsache, das Rohglas gegenüber poliertem Glase sich wie Harz verhält. Das Verfahren des Polierens dürfte die kleineren Atome wegschleifen und die größeren Atome, als die derberen, an der Oberfläche zurücklassen.

§ 12. Die gleiche Überlegung bietet ferner wahrscheinlich das Prinzip der Erklärung der experimentellen Entdeckung von Erskine Murray<sup>1)</sup>, nach der die Oberfläche von Metallen, die sorgfältig mit Glaspapier oder Schmirgelpapier gereinigt sind, mehr positiv oder weniger negativ in der Voltaschen Reihe wird, wenn sie mit glattem, rundem, hartem Polierstahl geglättet werden. So stieg an einer durch Reiben mit Glaspapier glänzend gemachten Zinkplatte die Spannung um 0,23 Volt, als sie darauf mit einem harten Polierstahl geglättet wurde, und fiel dann wieder um dieselbe Differenz, als sie von neuem mit Glaspapier abgerieben wurde. Kupferplatten zeigten, wenn sie ähnlich behandelt wurden, Differenzen von ungefähr demselben Betrage in derselben Richtung. Zwischen hochpoliertem Zink und mit Schmirgel gereinigtem Kupfer fand Murray eine Voltadifferenz von 1,13 Volt, die meines Wissens beträchtlich größer ist als die größte vorher gefundene Voltadifferenz zwischen reinen metallischen Flächen von Zink und Kupfer.

§ 13. Um die Tendenz (§ 9) des kleineren Atoms, Elektrionen vom größeren aufzunehmen, noch weiter zu beleuchten, fassen wir zwei Atome ins Auge,  $A'$  mit dem Radius  $\alpha'$ , als größeres, das zu Anfang ein Elektrion in sich birgt, und  $A$  mit dem Radius  $\alpha$ , leer.

Durch vorgestellte Kräfte, die auf die Atome wirken, während das Elektrion frei ist, mögen sich jene aus einem sehr großen Abstände allmählich einander nähern. Die Anziehung des Atoms  $A$  zieht das Elektrion von dem Mittelpunkte von  $A'$  fort, zuerst sehr langsam, dann immer mehr und

1) „On Contact Electricity of Metals“, Proc. Roy. Soc., Bd. LXIII, 1898, S. 113. Vgl. auch Lord Kelvin, „Contact Electricity of Metals“, Phil. Mag., Bd. XLVI, 1898, S. 96—98.

mehr, je kleiner der Abstand zwischen den Atomen wird. Welches wird nun die Lage des Elektrions sein, wenn der Abstand zwischen den beiden Mittelpunkten, wie in Fig. 98 angenommen,  $2\alpha'$  ist? Ohne Rechnung sehen wir, daß das Elektrion sich im Gleichgewichte befinden wird, wenn es an den Punkt versetzt ist, in dem die Oberfläche von  $A'$  durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte geschnitten wird. Aber das Gleichgewicht würde offenbar ein unstabiles sein, und eine einfache Rechnung zeigt,<sup>1)</sup> daß die stabile, wirklich von dem Elektrion von selbst eingenommene Lage die im Abstände  $0,38\alpha'$  von  $C'$  ist, sobald der Abstand zwischen den Mittelpunkten die Größe  $2\alpha'$  (Fig. 98) erreicht hat. Wenn die Entfernung zwischen den Mittelpunkten jetzt von  $2\alpha'$  auf  $1,89\alpha'$  herabgesetzt wird ( $\alpha$  mag jetzt irgend kleiner als  $0,89\alpha'$  angenommen werden), gelangt das Elektrion allmählich in den Abstand  $0,63\alpha'$  von  $C'$  (Fig. 99). Hier aber ist sein Gleichgewicht

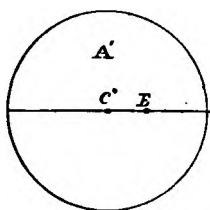


Fig. 98.

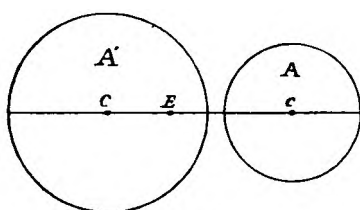


Fig. 99.

unstabil, und es springt von  $A'$  fort nach  $A$  hin (wie ein aus einer Flasche springender Kork). Es wird durch  $A$  hindurchschießen (wenn  $A'$  und  $A$  festgehalten werden) und nach einigen hin- und hergehenden Schwingungen, vielleicht<sup>2)</sup> nach zehn oder zwanzig (oder vielleicht nach einer Million

1) Bezeichnet man mit  $\xi$  die Entfernung zwischen den Mittelpunkten und mit  $X$  die auf  $E$  wirkende Kraft, wenn sein Abstand von  $C'$  ist  $x'$ , so hat man

$$X = e^2 \left[ \frac{1}{(\xi - x')^2} - \frac{x'}{\alpha'^3} \right].$$

Demnach ist für den Gleichgewichtszustand  $\frac{1}{(\xi - x')^2} = \frac{x'}{\alpha'^3}$ . Dies bedeutet eine kubische Gleichung für  $x'$ , deren brauchbare Wurzel (die kleinste Wurzel) für den Fall  $\xi = 2\alpha'$  ist  $0,38\alpha'$ . Der Ausdruck für  $X$  hat einen Minimumwert, wenn  $\xi - x' = \alpha' \sqrt[3]{2}$  wird; und dann ist

$$X = \frac{e^2}{\alpha'^3} \left[ \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} - \frac{\xi}{\alpha'} \right].$$

Demnach fällt der Wert von  $x'$  für das Gleichgewicht mit dem Werte von  $X$ , als Minimum, zusammen, und das Gleichgewicht wird unstabil, wenn  $\xi$  auf

$\frac{3}{2} \sqrt[3]{2} \alpha' = 1,890 \alpha'$  herabgedrückt wird. Für diesen Betrag ist der Wert von  $x'$

gleich  $\frac{3}{2} \sqrt[3]{2} \alpha' = 0,63 \alpha'$ .

2) „On the Production of Wave Motion in an Elastic Solid“. Phil. Mag., Okt. 1899, § 44.

[K. 9. August 1903]), wenn es nur eine von Verdichtung oder Verdünnung<sup>1)</sup>, die es im Äther hervorruft, herrührende Quasiträgheit besitzt, oder vielleicht viele Male mehr, wenn es aus sich heraus eigene Trägheit besitzt. Zuletzt wird es mit abnehmender Ausschlagsweite endlich merklich zur Ruhe innerhalb  $A$  kommen, etwas durch  $A'$  vom Mittelpunkt von  $A$  fortgezogen. Wenn nunmehr schließlich  $A'$  und  $A$  zu ihrem ursprünglichen großen Abstand auseinandergezogen werden, wird das Elektrion seine ursprüngliche Lage in  $A'$  nicht wiedererlangen, sondern ganz in den Mittelpunkt von  $A$  gelangen und dort in Ruhe verharren. Hier haben wir eine fernere Illustration des in § 9 gefundenen Bestrebens des kleineren Atoms, Elektrionen vom größeren aufzunehmen.

§ 14. Indem wir die beiden Atome, dadurch, daß wir sie gegen die anziehende Kraft des Elektrions festhalten, hindern ineinander zu stürzen, haben wir während der Annäherung mehr Arbeit gewonnen, als wir später bei der Trennung verwenden; und so haben wir jetzt das System des weiteren Energiebetrages beraubt zurückgelassen, der durch Ätherwellen in den Raum fortgeführt wurde.

§ 15. Das System enthält in seinem Endzustande, in dem das Elektrion sich im Mittelpunkte des kleinern Atoms befindet, weniger potentielle Energie, als es zu Beginn besessen hat (als sich das Elektrion im Mittelpunkte von  $A'$  befand), weniger um eine Differenz, die gleich dem Überschusse der während der Annäherung gewonnenen über die bei der schließlichen Trennung von  $A'$  und  $A$  verbrauchte Arbeit ist, die sich noch vermehrt um den durch die Ätherwellen fortgeführten Betrag. Alle diese Ergänzungen außer der letzten<sup>2)</sup> lassen sich leicht nach dem in der Anmerkung zu § 13 angegebenen Kalkül berechnen; und so fänden wir, wie groß unser Energieverlust durch die Ätherwellen ist.

§ 16. Wir stoßen auf sehr interessante statische Probleme, wenn wir das Gleichgewicht zweier oder mehrerer innerhalb eines Atoms befindlichen Elektrionen betrachten, und zwar einerseits ein polyelektrionisches Atom mit der es sättigenden Anzahl, andererseits ein Atom von beliebiger elektrischer Stärke mit einer beliebigen Anzahl Elektrionen, bis hinauf zur größten Zahl, die es fassen kann. Um unsere Vorstellungen zu klären, beachten wir zunächst, daß, wenn die Anzahl Elektrionen unendlich ist, wenn wir also zum elektrischen Fluidum von Äpinus zurückkehren, jedoch annehmen, daß es frei durch jedes Atom, beliebiger Form und mit einer beliebigen fixen Verteilung von Elektrizität entgegengesetzter Art, hindurchgeht, die größte Menge Fluidum, die das Atom aufnehmen kann, genau seiner eigenen gleich ist und sich in ihm so einlagert, daß die Dichte in jedem Teile der Dichte der Eigenladung des Atoms gleich ist. Ist das Atom kugelförmig und besitzt seine Eigenladung, wie wir vorausgesetzt haben, überall gleiche elektrische Dichte, kommt ferner eine beträchtliche Zahl von neutralisierenden Elektrionen in Frage, dann wird demnach ihre Anordnung in der Gleichgewichtslage eine Ansammlung von um so mehr nahezu gleichförmiger Dichte von der Oberfläche bis zum Mittelpunkte sein, je größer die Zahl ist. Jede beliebige

1) „On the Motion of Ponderable Matter through Space occupied by Ether“. Phil. Mag., Aug. 1900, §§ 15, 17. (Im vorliegenden Bande im Anhang A wiederabgedruckt.)

2) In bezug auf diese ist der bekannte Poyntingsche Satz zu vergleichen.  
D. H.

Bravaissche homogene Ansammlung würde sich sehr nahe im Gleichgewicht befinden, wenn alle Elektrionen in einer Oberflächenschicht, deren Dicke etwa hundertmal den kleinsten Abstand von Elektrion zu Elektrion ausmacht, festgehalten würden; das Gleichgewicht würde jedoch, gewisse Fälle ausgenommen, unstabil sein. Doch möchte es wahrscheinlich sein, daß es stabil wird, wenn die homogene Anordnung von der Art ist, die ich als gleichseitig bezeichnet<sup>1)</sup> habe, nämlich die, bei der jedes Elektrion mit je zweien von seinen zwölf benachbarten Elektrionen ein gleichseitiges Dreieck bildet. Wenn jetzt sämtliche Elektrionen in der Oberflächenschicht vollkommen frei gelassen werden, würde eine geringe Umstellung bei ihnen und eine noch geringere bei den benachbarten Elektrionen im Innern die ganze Menge (von Tausend oder Millionen) in den Gleichgewichtszustand versetzen. Der Gegenstand ist von äußerstem geometrischen, mechanischen und physikalischen Interesse, kann jedoch nicht weiter verfolgt werden.

§ 17. Um die Vorstellungen über das stabile Gleichgewicht einer mäßigen Anzahl Elektrionen zu leiten, beachte man zuerst, daß Gleichgewicht für eine beliebige Anzahl Elektrionen bestehen kann, wenn alle Elektrionen sich auf einer mit dem Atom konzentrischen Kugelfläche befinden. Zum Beweise dessen denken wir uns für einen Augenblick das Atom entfernt und die Elektrionen, welches auch ihre Anzahl sein mag, an je ein Ende gleich langer und dehnbarer Fäden geheftet, deren andere Enden in einem Punkte *C* befestigt sind. Jeder Faden wird infolge der gegenseitigen Abstoßungen der Elektrionen gespannt sein, und es wird sich eine Zusammenstellung, oder es werden sich Zusammenstellungen für Gleichgewicht ausbilden, bei denen sich die Elektrionen auf einer Kugelfläche befinden. Welches auch ihre Anzahl sein mag, so wird dem Wesen nach wenigstens eine Zusammenstellung stabilen Gleichgewichts existieren. Man beachte ferner, daß stets eine Gleichgewichtsordnung vorhanden ist, bei der alle Fäden in einer Ebene liegen und demnach die Elektrionen sich in gleichen Abständen voneinander in der Peripherie eines größten Kreises der Kugel befinden. Dies ist die einzige Anordnung für zwei oder drei Elektrionen; allein für jede drei übersteigende Anzahl ist sie, wie sich leicht beweisen läßt, unstabil und demnach nicht die einzige Gleichgewichtsordnung. Für vier Elektrionen gibt es, wie man leicht sieht, außer dem unstabilen Gleichgewicht in einer Ebene, nur eine stabile Anordnung, und zwar bilden bei dieser die vier Elektrionen die vier Ecken eines regulären Tetraeders.

§ 18. Für fünf Elektrionen erhalten wir offenbar stabiles Gleichgewicht, wenn drei von ihnen in einer durch *C* gehenden Ebene und die beiden andern in gleichen Abständen in der zu dieser Ebene senkrechten, durch *C* gehenden Geraden liegen. Es gibt aber wenigstens noch eine Gleichgewichtsordnung. Diese finden wir, wenn wir uns vorstellen, daß vier von den Elektrionen gezwungen sind, in einer frei beweglichen Ebene zu bleiben, was stabiles Gleichgewicht ergibt, wenn diese Ebene in einem gewissen Abstände vom Mittelpunkt liegt, und das fünfte Elektrion sich auf dem zu ihr senkrechten Durchmesser aufhält. Und ähnlich finden wir für eine größere Zahl Elektrionen

1) Molecular Tactics of a Crystal, § 4, die zweite, vor dem Oxford University Junior Scientific Club vom 16. Mai 1893 gehaltene Robert Boyle-Vorlesung (Clarendon Press, Oxford). [Im vorliegenden Werke als Anhang H wieder abgedruckt.]



eine Gleichgewichtsarrangement, wenn wir uns vorstellen, daß alle bis auf eines gezwungen sind, in einer frei beweglichen Ebene zu bleiben. Es ist aber nicht leicht, ohne Rechnung, wenigstens für den Fall von nur fünf Elektronen, zu sehen, ob das Gleichgewicht stabil ist, wenn der Zwang, daß sich alle bis auf eines in einer Ebene befinden, aufgehoben wird. Für Zahlen über fünf scheint es sicher, daß das Gleichgewicht instabil ist.

§ 19. Für sechs haben wir eine Arrangement stabilen Gleichgewichts, wenn die Elektronen in den sechs Ecken eines Oktaeders liegen, für acht, wenn an den Ecken eines Würfels. Für zehn, wie für jede gerade Zahl, müßten wir zwei Gleichgewichtsarrangements (die beide für große Zahlen sicher instabil sind) erhalten, bei denen die beiden Hälften der Zahl in zwei Ebenen in gleichen Abständen zu beiden Seiten des Mittelpunktes liegen. Für zwölf finden wir eine Arrangement stabilen Gleichgewichts, wenn die Elektronen sich in den Lagen der zwölf nächsten Nachbarn von  $C$  in einer gleichseitigen homogenen Arrangement von Punkten befinden<sup>1)</sup>; für zwanzig, wenn in den zwanzig Ecken eines regulären Pentagondodekaeders. Alle die Arrangements dieses § 19, außer der für zehn Elektronen, sind stabil, wenn, wie wir jetzt annehmen wollen, die Elektronen gezwungen sind, auf einer sphärischen Fläche zu bleiben, auf der sie sich frei bewegen können.

§ 20. Ausgenommen die Fälle des § 18, sind die Kräfte, mit denen die Fäden gespannt werden, in jedem einzelnen Falle für alle Elektronen die nämlichen. Wenn wir uns jetzt die Fäden entfernt und die Elektronen in einem Atom auf einer mit diesem konzentrischen Kugelfläche angeordnet denken, dann wird demnach seine, nach dem Mittelpunkte hin gerichtete Anziehung an die Stelle der Spannung des Fadens treten, falls sie die geeignete Größe besitzt. Doch gibt diese Anziehung keine Sicherheit, wie es die Fäden tun, gegen eine Unstabilität gegenüber radialen Verschiebungen, die für verschiedene Elektronen verschieden sind. Die Bedingung dafür, daß die geeignete Größe der radialen Kraft gesichert bleibt, ist  $\frac{ie^2r}{\alpha^3} = T$ , wo  $i$  die Anzahl der Elektronen,  $e$  die elektrische Ladungsmenge eines jeden (und also nach § 8  $ie$  die elektrische Menge an Glaselektrizität im Atom) ist,  $r$  den Radius der Kugelfläche, auf der die Elektronen liegen,  $\alpha$  den Radius des Atoms und  $T$  die Spannung der Fäden in der Arrangement des § 17 bezeichnet. Es ist nun allgemein  $T = q \frac{e^2}{r^2}$ , wo  $q$  eine von der Anzahl und der Arrangement der Elektronen abhängige Zahl bedeutet, die in jedem besonderen Falle durch geometrische Betrachtungen gefunden wird. Folglich ergibt sich  $\frac{r}{\alpha} = \sqrt[3]{\frac{q}{i}}$  für das Verhältnis des Radius der kleinern Kugel, auf der die Elektronen liegen, zu dem Radius des Atoms.

Wir wählen als Beispiel den Fall von acht Elektronen an den acht Ecken eines Würfels.  $T$  ist für jedes Elektron die Resultierende von sieben Abstoßungen, und man findet leicht  $q = \frac{3}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3})$  und schließlich  $\frac{r}{\alpha} = 0,6756$ . Wenn wir ähnlich die Fälle von zwei, drei, vier und sechs Elektronen behandeln, erhalten wir die folgende Tabelle von Werten

1) Anhang H § 4

2) Wegen des Coulomb-Gaßschen Satzes.

von  $\left(\frac{r}{\alpha}\right)^3$  und  $\frac{r}{\alpha}$ , der noch eine letzte Reihe angefügt ist, die Werte von  $i^2 \frac{3\alpha^2 - r^2}{2\alpha^3} - \sum \frac{\alpha}{D}$ , nämlich das  $\frac{\alpha}{e^2}$  fache der zur Entfernung der Elektronen in einen unendlich großen Abstand notwendigen Arbeit, angibt;  $D$  ist dabei der Abstand zwischen zwei beliebigen von den Elektronen.

Elektronenzahl	Anordnung	$\left(\frac{r}{\alpha}\right)^3$	$\frac{r}{\alpha}$	$\frac{\alpha}{e^2} \times$ die Arbeit, die erforderlich ist, die Elektronen in einen unendlichen Abstand zu entfernen
1	Im Mittelpunkte	0	0	1,500
2	In den Viertelpunkten von den Enden eines Durchmessers entfernt	$\frac{1}{8}$	0,5000	4,500
3	An den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	0,5774	9,000
4	An den Ecken eines Quadrats	$\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{16}$	0,6208	14,750
4	An den Ecken eines regulären Tetraeders	$\frac{3}{16}\sqrt{\frac{3}{2}}$	0,6124	15,000
6	An den Ecken eines regulären Oktaeders	$\frac{1 + 4\sqrt{2}}{24}$	0,6522	33,335
8	An den Ecken eines Würfels	$\frac{3}{32}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\right)$	0,6756	52,180

§ 21. Bei den so angegebenen Anordnungen ist das Gleichgewicht sicher stabil für die Fälle von zwei Elektronen, drei Elektronen und vier Elektronen, diese an den Ecken eines Tetraeders. Es scheint mir, ohne Rechnung, ferner stabil zu sein für den Fall von sechs und möglicherweise auch für den von acht. Für den Fall von zwanzig an den Ecken eines Pentagondodekaeders ist das Gleichgewicht wahrscheinlich nicht stabil; und auch für die Fälle von zwölf und von zehn Elektronen dürfte es bei den in den §§ 18, 19 beschriebenen Anordnungen wahrscheinlich unstabil sein, wenn wir es, wie jetzt, mit der Anziehung des Atoms nach dem Mittelpunkte hin und nicht mit den undehnbaren Fäden zu tun haben.

§ 22. In der Tat müssen wir, wenn die Elektronenzahl vier übersteigt, an das Bestreben denken, aus einer einzigen Kugelfläche herausgedrängt zu werden, das bei einer sehr großen Zahl die Tendenz zu einer gleichförmigen Verteilung im Raume des Atoms zur Folge hat, wie sie im § 16 oben beschrieben ist. So zeigt in dem Falle von fünf Elektronen § 18 eine Gleichgewichtsordnung an, bei der die beiden in einem Durchmesser liegenden Elektronen durch die gegenseitigen Abstoßungen etwas weiter vom Mittelpunkte fortgetrieben werden als die drei in der Äquatorialebene liegenden. In diesem Falle ist das Gleichgewicht offenbar stabil. Eine andere, offenbar ebenfalls stabile Anordnung von fünf Elektronen in einem Atom besteht darin, daß eines sich im Mittelpunkte befindet und vier auf einer konzentrischen Kugel-

fläche in den Ecken eines Tetraeders liegen. Von einer beliebigen Anzahl Elektrionen, die sich alle auf einer Kugelfläche befinden, gelangen wir zu einer andern Konfiguration, mit einem Elektrion mehr, das sich im Mittelpunkte aufhält und die elektrische Ladung des Atoms entsprechend vergrößert. So kommen wir also von den in § 19 beschriebenen Fällen zu Gleichgewichts-anordnungen für sieben, neun, elf, dreizehn und einundzwanzig Elektrionen. Alle diese Fälle nebst Fragen nach der Stabilität oder Nichtstabilität und den verschiedenen Beträgen Arbeit, die erforderlich sind, alle Elektrionen aus dem Atom herauszuziehen und sie in unendliche Entfernungen zu bringen, bieten sehr interessante Gegenstände nicht schwieriger mathematischer Arbeit; und ich bedaure, nicht in der Lage zu sein, sie gegenwärtig weiter zu verfolgen.

§ 23. Wir fassen jetzt die elektrischen Eigenschaften eines wirklichen Körpers, eines gasförmigen, flüssigen oder festen, ins Auge, der aus einer Ansammlung von Atomen mit ihren Elektrionen besteht. Aus unserer Hypothese folgt unmittelbar, daß in einem einatomigen Gase oder sonst in einer hinreichend dünnen Ansammlung von einzelnen Atomen, die ruhen oder sich bewegen, Faradays „Leitfähigkeit für elektrische Kraftlinien“ oder was jetzt gemeinhin spezifische elektro-induktive Kapazität oder elektro-induktive Permeabilität genannt wird, die Eins um das dreifache Verhältnis der Summe der Volumina der Atome zu dem Gesamtvolumen des von der Ansammlung erfüllten Raumes übersteigt, gleichviel ob die Atome monoelektrionisch oder polyelektrionisch sind, und wie auch das Elektrion oder die Elektrionengruppe innerhalb eines Atoms bei jedem Zusammenstoße gemäß der kinetischen Gastheorie zum Schwingen oder Rotieren veranlaßt werden möge. Um dies zu beweisen, nehmen wir in einem elektrostatischen Kraftfelde von der Intensität  $F$  ein einzelnes Atom vom Radius  $\alpha$  und innerhalb desselben, in Ruhe befindlich, eine Gruppe von  $i$  Elektrionen in stabilem Gleichgewicht. Die Wirkung von  $F$  ruft einfach Verschiebungen der Elektrionen gegen das betreffende Atom hervor, die einander gleich sind und in parallelen Linien erfolgen und die demnach ohne Änderung der Gestalt und ohne Rotation geschehen; und wenn man mit  $x$  den Betrag dieser Verschiebung bezeichnet, ist die Gleichung für das Gleichgewicht jedes Elektrions  $\frac{ie x}{\alpha^2} = F$ . Dies ergibt  $ie x = \alpha^3 F$  für das elektrische Moment der von  $F$  in dem Atom induzierten elektrostatischen Polarisierung. Im Vorübergehen bemerke ich noch, daß  $\alpha^3 F$  auch gleich dem elektrischen Moment ist der in einer isolierten nicht geladenen Metallkugel vom Radius  $\alpha$  hervorgerufenen Polarisierung, wenn diese Kugel in ein elektrostatisches Feld von der Intensität  $F$  gebracht wird; und wir schließen, daß die elektrische induktive Kapazität einer gleichförmig dichten Ansammlung von festgehaltenen Metallkugeln, die so zerstreut verteilt sind, daß ihre Influenz aufeinander außer acht gelassen werden kann, die nämliche ist wie die einer gleichen und ähnlichen Ansammlung unserer hypothetischen Atome, welches auch die Anzahl Elektrionen in jedem Atom sein mag, wobei diese Zahl auch nicht in allen Atomen dieselbe zu sein braucht. Also verwirklicht unser hypothetisches Atom bei dünnen Verteilungen vollständig Faradays Anschauung von

„kleinen kugeligen Leitern wie Schrot“ zur Erklärung der Elektro-Polarisierung, die er bei festen und flüssigen Isolatoren entdeckt hat. (Experimental Researches, § 1679.)

§ 24. Bezeichnet man jetzt mit  $N$  die Anzahl Atome in der Volumeneinheit, so findet man  $N V \alpha^3 F$  für das elektrische Moment jeder hinreichend dünnen Ansammlung von gleichförmiger Dichte, die ein Volumen  $V$  in einem elektrischen Felde von der Intensität  $F$  ausfüllt. Demgemäß ist  $N \alpha^3$  das, was man (der Analogie der elektromagnetischen Nomenklatur folgend) als die elektro-induktive Aufnahmefähigkeit (Suszeptibilität)<sup>1)</sup> der Ansammlung bezeichnen kann; nämlich das elektrische Moment für die Raumeinheit, die durch ein elektrisches Feld von der Einheit der Intensität induziert wird. Bezeichnet man diese mit  $\mu$  und die elektro-induktive Durchlässigkeit (Permeabilität) mit  $\omega$ , so erhält man [Electrostatics and Magnetism, § 629, (14)],

$$\omega = 1 + 4\pi\mu = 1 + 3 \left( N \frac{4\pi\alpha^3}{3} \right),$$

wodurch die am Anfange des § 23 aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

§ 25. Um auch schwingende und rotierende Elektrionengruppen in den Beweis einzuführen, braucht man nur zu beachten, daß der Zeitdurchschnitt jeder Komponente der Verschiebung des Trägheitsmittelpunktes der Gruppe gegen den Mittelpunkt des Atoms unter dem Einflusse von  $F$  eben so groß ist, wie wenn die Ansammlung sich im stabilen Gleichgewichte in Ruhe befindet.

§ 26. Für Flüssigkeiten, die aus dicht aneinander gelagerten beweglichen Ansammlungen von Atomen oder Gruppen von Atomen mit ihren Elektrionen bestehen und so Gruppen von Molekeln bilden, wie bei flüssigem Argon oder Helium (einatmig), Stickstoff oder Sauerstoff usw. (zweiatmig) oder bei reinem Wasser oder bei Wasser, das Salze oder andere Chemikalien aufgelöst enthält, oder bei Flüssigkeiten mannigfacher zusammengesetzter Konstitution, kann in der vorliegenden Mitteilung nur bemerkt werden, daß die Annahmen, die wir über Kräfte, elektrische und andere, zwischen Elektrionen und Atomen gemacht haben, den Weg zu einer sehr bestimmten, ins einzelne gehenden Mechanik der Elektrolyse, der chemischen Affinität und der Wärmetönung chemischer Verbindung zu eröffnen scheint. Schätzungen der wirklichen in Betracht kommenden Größen (der Molekelzahl im Kubikzentimeter eines Gases, der Masse eines Atoms irgendeiner Substanz in Gramm, des absoluten Wertes der Elektrizitätsmenge in einem Elektrion, der wirksamen Masse oder Trägheit eines Elektrions) scheinen zu zeigen, daß die intermolekularen elektrischen Kräfte mehr als groß genug sind, die Wärme chemischer Verbindung und jeder mechanischen bei chemischen Zwischenwirkungen aller Art auftretenden Wirkung zu erklären. Wir möchten versucht sein, anzunehmen, daß alle chemische Tätigkeit elektrischer Natur ist<sup>2)</sup> und daß alle Veränderungen chemischer Substanz durch die Zahl der Elektrionen erklärt werden können, die erforderlich sind, ein Atom oder eine Gruppe von Atomen (§ 6 oben) zu neutralisieren. Doch können wir bei diesem Gedanken keine Befriedigung finden, wenn wir die ungeheure Mannigfaltigkeit der Art und

1) In meiner *Electrostatics and Magnetism*, §§ 628, 629 eingeführt.

2) Bekanntlich die Ansicht von Helmholtz. Übrigens ist die moderne Affinitäts- und Leitungslehre zu vergleichen. D. H.

Affinität beachten, die an den verschiedenen Substanzen oder den verschiedenen „chemischen Elementen“ zu beobachten sind; und da wir annehmen, daß die Elektrionen alle einander gleich sind, müssen wir wieder auf unsern Vater Boscovich zurückkommen und von ihm fordern, die Wertverschiedenheit verschiedener chemischer Substanzen durch verschiedene Kraftgesetze zwischen den verschiedenen Atomen zu erklären.

§ 27. Schließlich betrachten wir einen Festkörper, nämlich eine Ansammlung, in der die Atome keine Bewegungen gegeneinander besitzen außer solchen, deren Wege im Vergleich mit den kleinsten Abständen zwischen ihren Mittelpunkten klein sind.<sup>1)</sup> Das erste, was wir bemerken, ist, daß jeder Festkörper beim absoluten Nullpunkte der Temperatur (nämlich wenn alle seine Atome und Elektrionen sich in Ruhe befinden) ein vollkommener Isolator für Elektrizität unter dem Einflusse von elektrischen Kräften sein wird, die hinreichend mäßig sind, die Elektrionen nicht aus den Atomen herauszuziehen, in denen sie sich ohne störende Kraft stabil in Ruhe befinden. Den hier für vollkommene Isolierung angedeuteten Grenzwert von  $F'$  will ich der Kürze wegen als die Disruptionskraft oder Disruptionsintensität bezeichnen. Es ist klar, daß diese Disruptionskraft um so kleiner zu sein braucht, je größer die Elektrionenzahl in einem Atome ist.

§ 28. Die elektro-induktive Permeabilität eines Festkörpers bei der Temperatur Null läßt sich nach der statischen Theorie des § 24 berechnen, wenn diese dahin abgeändert wird, daß man die auf die Elektrionen eines Atoms wirkenden, von den Anziehungen benachbarter Atome und den Abstoßungen ihrer Elektrionen herrührenden Kräfte in Rechnung setzt. Ohne viel Kalkül ist leicht zu sehen, daß allgemein der Überschuß der elektro-induktiven Permeabilität über die Einheit hier weit größer als die dreifache Summe der Volumina der elektrischen Atome in der Volumeneinheit des Raumes ist, die Größe, die wir in § 24 als die elektro-induktive Permeabilität einer Ansammlung einzelner Atome gefunden haben, die so weit voneinander abstehen, daß Störungen durch gegenseitige Einwirkungen nicht auftreten. Ebenso ist leicht zu erkennen, daß jetzt das induzierte elektrische Moment nicht einfach  $F$ , der Intensität des elektrischen Feldes, proportional sein wird, was für ein einzelnes Atom in dem ganzen Gebiet bis hinauf zur Disruptionsintensität streng richtig war, daß sie vielmehr die Tendenz haben wird, schneller als im einfachen Verhältnis zum Werte von  $F'$  anzuwachsen; doch ist für kleine praktisch vorkommende Werte von  $F'$  das Gesetz einfachen Verhältnisses noch sehr nahe erfüllt.

§ 29. Jetzt erhöhe man die Temperatur bis nahe an die, bei der Festkörper schmelzen würden. Dadurch werden die Elektrionen veranlaßt, ganz unregelmäßige Schwingungen auszuführen, so daß einige von ihnen gelegentlich aus ihren Atomen herausgestoßen werden. Jedes so herausgestoßene Elektrion wird bald entweder in das Atom zurückfallen, aus dem es herausgestoßen worden ist, oder wird seinen Weg in irgendein anderes Atom

1) Ich brauche es wohl nicht besonders auszusprechen, daß ich nur der Einfachheit im Text wegen bequemlich die bewunderungswerte Entdeckung Robert Austens übergehe, nach der festes Gold und festes Blei, wenn ein Stück des einen Metalls auf einem Stück des andern einige Wochen, Monate oder Jahre in Ruhe verharret, ineinander diffundieren.

nehmen. Wenn der Körper sich in einem elektrischen Felde  $F$  befindet, wird ein beträchtlicher Teil der Elektrionen, die aus den Atomen herausgestoßen sind, seinen Weg in andere Atome in der Richtung finden, in der sie durch  $F$  getrieben werden; das heißt, der Körper, der beim absoluten Nullpunkte der Temperatur ein unendlich vollkommener Isolator gewesen ist, hat jetzt einen bestimmten Grad elektrischer Leitfähigkeit, der sich um so größer zeigt, je höher die Temperatur ist. Es kann nicht bezweifelt werden, daß dies eine Erklärung für die tatsächlich vorhandene elektrische Leitfähigkeit abgibt, die ein bei Lufttemperaturen so vollkommener Isolator wie das Flintglas meines Quadrantenelektrometers, zeigt, wenn es zu einer Temperatur erhitzt wird, die noch weit unter seinem Schmelzpunkte liegt (nach Professor T. Gray<sup>1)</sup>  $0,98 \cdot 10^{-24}$  bei  $60^\circ \text{C}$ ;  $4,9 \cdot 10^{-24}$  bei  $100^\circ$ ,  $8,300 \cdot 10^{-24}$  bei  $200^\circ \text{C}$ ). Dies erklärt auch die ungeheure Erhöhung der elektrischen Leitfähigkeit der seltenen Erden bei einer Erhöhung der Temperatur über  $800^\circ$ , von der Professor Nernst in seiner gefeierten elektrischen Lampe in so bewunderungswürdiger Weise Nutzen gezogen hat.

§ 30. Wenn die in der vorliegenden Mitteilung aufgestellten Hypothesen richtig sind, muß die elektrische Leitfähigkeit von Metallen in derselben Weise wie die von Glas, Guttapercha, Kautschuk, Nernstfaden usw. erklärt werden, nur mit dem Unterschiede, daß die Metallatome so von Elektrionen vollgefüllt sind, daß immer einige von ihnen durch die intermolekularen und elektrionischen thermischen Bewegungen nicht bloß bei gewöhnlichen Lufttemperaturen und bei höheren, sondern noch bei Temperaturen, die weniger als  $16^\circ$  Zentigrad über dem absoluten Nullpunkte liegen, aus jedem Atom herausgestoßen werden. Ich sage  $16^\circ$ , da wir in der am 13. Juni 1901 von Dewar vor der Royal Society in London gehaltenen Baker-Vorlesung „The Nadir of Temperature“ finden, daß Platin, Gold, Silber, Kupfer und Eisen außerordentlich hohe elektrische Leitfähigkeit haben bei der Temperatur des bei 30 mm Quecksilberdruck siedenden, flüssigen Wasserstoffs, die etwa zwischen  $20,5^\circ$ , dem Siedepunkt des Wasserstoffs bei 760 mm Druck, und  $16^\circ$ , der Schmelztemperatur des festen Wasserstoffs, liegen muß; beide Grenzen sind von Dewar mittels seines Heliumthermometers bestimmt worden. Es besteht keine Schwierigkeit für die Annahme, daß die Elektrionen in jedem der Metallatome so zahlreich sind, daß, auch wenn sie innerhalb der so dicht angeordneten Atome, daß sie das feste Metall bei  $0^\circ$  abs. bilden, im stabilen Gleichgewichte verharren, sie doch schon bei  $1^\circ$  absoluter Temperatur innerhalb des Atoms mit ihren ganz unregelmäßigen Wärmebewegungen umherfliegen, zwischen  $1^\circ$  und  $2^\circ$  von Atom zu Atom überspringen mögen. So mag, wie Glas oder ein Nernstscher Glühkörper unterhalb  $300^\circ$  abs., ein Metall ein fast vollkommener Isolator unterhalb  $1^\circ$  sein, und mag, wie Glas bei  $473^\circ$  abs. mit Glas bei  $333^\circ$  abs. verglichen, 8000 mal so viel elektrisches Leitvermögen bei  $2,8^\circ$  als bei  $2^\circ$  zeigen. Und, wie der Nernstfaden bei  $1800^\circ$  oder  $2000^\circ$  abs., mag unser hypothetisches Metall bei  $6^\circ$  abs. ein hohes, mit der des Bleis oder des Kupfers bei gewöhnlichen Temperaturen vergleichbares Leitvermögen aufweisen. Die elektrische Leitfähigkeit im Nernstfaden steigt mit steigender Temperatur immer mehr, bis der Faden schmilzt oder verdampft. Nichts-

1) Proc. Roy. Soc. Bd. XXXIV, Jan. 12, 1882. Die Zahlen im Text sind in Einheiten cm. g. s. ausgedrückt.

destoweniger wäre es vollkommen verständlich, wenn in dem Metall unserer Hypothese die elektrische Leitfähigkeit bei einem Ansteigen der Temperatur von  $2^0$  bis  $16^0$  abs. zu einem Maximum gelangt und dann bei weiterem Ansteigen der Temperatur bis zu dem Gebiete der gewöhnlichen Lufttemperaturen wieder abnimmt. In der Tat müssen, während für die elektrische Leitfähigkeit eine gewisse Ausdehnung der Wärmebewegungen notwendig ist (da etwas der „Labilität“ Ähnliches beim elektro-statischen Gleichgewicht nicht existieren kann), zu viele von diesen Bewegungen die Freiheit beeinträchtigen, mit der ein Elektrion sich seinen Weg durch das Atomgedränge bahnen kann, um die Aufgabe elektrischer Leitung zu erfüllen. Es scheint sicher, daß dies eine Erklärung für die letzterwähnte tatsächliche Verringerung elektrischer Leitfähigkeit in Metallen mit dem Steigen der Temperatur bildet.<sup>1)</sup>

§ 31. Mit großem Bedauern, daß ich (aus Mangel an Zeit) nicht in der Lage bin, der vorliegenden Mitteilung auch Schätzungen der absoluten Größen anzufügen, schließe ich mit Anwendungen unserer Hypothese auf die Pyroelektrizität und die Piezoelektrizität von Kristallen. Ein Kristall ist eine homogene Ansammlung von Körpern. Umgekehrt ist aber eine homogene Ansammlung von Körpern kein Kristall, wenn der Abstand zwischen den Mittelpunkten der nächstbenachbarten ein Zentimeter oder mehr beträgt; sie ist aber ein Kristall, wenn der Abstand zwischen den nächstbenachbarten  $10^{-8}$  Zentimeter oder weniger beträgt. Pyroelektrizität und Piezoelektrizität sind Entfaltungen von Kräften, wie sie sich aus einer glas- und harzelektrischen Ladung an verschiedenen Teilen der Oberfläche des Kristalles ergeben würden und bzw. durch Temperaturänderung und durch Druck erzeugt werden, der von sich balancierenden Kräften herrührt, die auf die Flächen wirken.

§ 32. Um zu erkennen, wie solche Eigenschaften in Kristallen, die aus unseren hypothetischen Atomen mit ihren Elektronen zusammengesetzt sind, existieren können oder müssen, fassen wir zunächst nur eine Reihe in einer geraden Linie angeordneter tetraelektronischer Atome ins Auge, von denen jedes sein Quantum von vier Elektrionen in sich birgt. Fig. 100 stellt eine

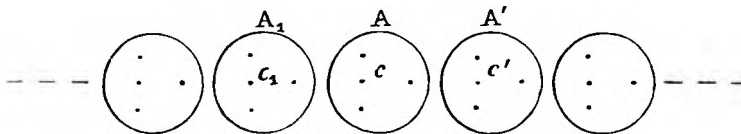


Fig. 100.

Anordnung stabilen Gleichgewichts dar, jedoch nicht im richtigen Maßstabe. Die Reihen von je drei Punkten deuten Gruppen von je drei Elektrionen in drei Ecken gleichseitiger Dreiecke an, der mittelste Punkt in jeder Reihe liegt abwechselnd auf der abgekehrten und der zugekehrten Seite der Zeichen-

1) Die hier und im folgenden niedergelegten Ansichten sind neuerdings von mehreren Seiten verfolgt worden. Es ist auch bei einigen Metallen nachgewiesen, daß in der Tat ihre Leitfähigkeit mit fallender Temperatur nicht stetig zunimmt, sondern bei gewisser sehr tiefer Temperatur einen Umkehrpunkt hat und von da also abnimmt, wenn die Temperatur noch weiter sinkt. Übrigens bin ich zweifelhaft, ob der Verfasser bei festen Körpern wie Glas, Nernstfaden n. a. elektrolytische Leitung berücksichtigt, wo Bewegung von Ionen statt von Elektronen in Frage kommt.  
D. H.

ebene, die die Mittelpunkte der Atome und das Restierende von den je vier Elektrionen enthält. Es seien  $C_1, C, C'$  die Mittelpunkte der Atome  $A_1, A, A'$ . Eine leichte Rechnung zeigt, daß die Gruppe von vier Elektrionen in  $A$ , wenn man sie für einen Augenblick als eine Gruppe von vier miteinander starr verbundenen materiellen Punkten auffaßt, mit einer kleineren Kraft von  $A_1$  nach links gezogen wird als nach rechts von  $A'$ . (Bei der Ausführung der Rechnung beachte man, daß  $A_1$  alle innerhalb  $A$  befindlichen Elektrionen so anzieht, als ob dieses Atom eine in  $C_1$  vereinigte Glaselektrizitätsmenge  $e$  wäre, und ähnliches bezüglich  $A'$ .) Entsprechende, kleinere, Differenzen bestehen zwischen den einander entgegengesetzten Anziehungen der weiter und weiter entfernten Atome zu beiden Seiten von  $A$ . Bezeichnet man mit  $\delta$  den Überschuß der Summe der nach rechts gerichteten Anziehungen über die nach links gerichteten, so wird der geometrische Mittelpunkt der Elektrionen innerhalb  $A$  von  $C$  aus nach rechts um einen Abstand  $l$  verschoben, der gleich  $\frac{\alpha^2 \delta}{16e}$  ist.

§ 33. Jetzt stellen wir uns einen Kristall oder einen Festkörper beliebiger Form vor, der aus parallelen Reihen solcher Atome aufgebaut ist, wie wir sie in § 32 betrachtet haben. Die Größe der auf jede Elektrionengruppe wirkenden verschiebenden Kraft wird etwas durch die Wirkung zwischen den Reihen verändert; aber der allgemeine Charakter des Resultats wird derselbe bleiben. Wir sehen so, daß in dem ganzen Festkörper, außer einer dünnen Oberflächenschicht von vielleicht fünf oder zehn Atomen Tiefe, der ganze innere Raum sich in einem Zustande homogener elektrischer Polarisation befindet, deren elektrisches Moment für die Raumeinheit  $4eNl$  ist, wo mit  $N$  die Anzahl Atome in der Volumeneinheit und mit  $l$  die Verschiebung des geometrischen Mittelpunktes jeder Elektrionengruppe vom Mittelpunkte ihres Atoms bezeichnet wird. Dies ist der innere molekulare Zustand eines dipolaren pyroelektrischen Kristalls, den ich im Jahre 1860<sup>1)</sup> als wahrscheinlich dessen bekannte pyroelektrische Eigenschaft erklärend und als in Übereinstimmung mit den von Canton<sup>2)</sup> entdeckten freien elektrischen Polaritäten der Bruchflächen von Turmalin beschrieben habe. Wenn ein Kristall, den wir uns in einem Zustande gegeben denken, in dem die Elektrionen in keiner Weise aus ihren dem § 32 entsprechenden Lagen gestört sind, in Wasser getaucht und darauf trocken gelassen wird, dann werden durch dieses Verfahren Elektrionen von einem Teile seiner Oberfläche entfernt und so über dem Reste verteilt, daß die Äußerung elektrischer Eigenschaft nach außen vollständig vernichtet wird. Wenn man nun entweder durch Änderung der Temperatur oder durch mechanischen Druck die Abstände zwischen den Atomen ändert, wird notwendig auch die innere elektrische Polarisation ge-

1) Collected Mathematical and Physical Papers, Bd. I, S. 315.

2) Wiedemann (Die Lehre von der Elektrizität, Zweite Auflage 1894, Bd. II, § 378) erwähnt einen Versuch, ohne ihn zu beschreiben, nach dem ein negatives Resultat, scheinbar im Gegensatz zu Cantons experimenteller Entdeckung und in Widerspruch mit der von mir aufgestellten Theorie, gefunden würde. Interessante Versuche könnten ausgeführt werden, indem man gebrochene Turmalinflächen gegeneinander drückt und sie dann voneinander trennt. Es wäre jedoch sehr schwierig, zuverlässige Resultate durch Brechen zu gewinnen, da es fast unmöglich ist, unregelmäßige Ladungen zu vermeiden, die bei der Ausführung des Bruches auftreten können. Die bei dem von Wiedemann angeführten Versuche befolgte Art der elektrischen Messung ist nicht beschrieben.



ändert, und die verdeckende Oberflächenladung, die vorher durch Eintauchen in Wasser und Trocknenlassen erhalten war, wird jetzt die elektrostatische Kraft der Luft in der Umgebung des Festkörpers nicht genau aufheben. Taucht man den Festkörper bei der geänderten Temperatur und unter Wirkung des vorausgesetzten Druckes wieder in Wasser und läßt ihn darauf trocknen, so wird die äußere elektrische Kraft abermals aufgehoben. So ist die von Äpinus am Turmalin entdeckte Pyroelektrizität erklärt.

§ 34. Allein ein dipolarer elektrischer Kristall mit seiner einzigen Achse bildet für uns nur einen kleinen und den bei weitem einfachsten Teil des ganzen Gegenstandes einer Elektro-Kristallographie. Im Borazit, einem Kristall des kubischen Systems, fand Haüy in den vier Diagonalen des Würfels oder in den Normalen zu den vier Flächenpaaren des regulären Oktaeder vier elektrische dipolare Achsen: wenn der Kristall unregelmäßig erwärmt oder abgekühlt wurde, hatte es den Anschein, als ob auf den Grenzflächen in der Nähe der einander gegenüberliegenden Eckenpaare des Würfels oder um die Mitten der gegenüberliegenden dreieckigen Seitenflächen des Oktaeders entgegengesetzte Elektrizitäten vorhanden wären. Seine Entdeckungen gestatten uns den Schluß, daß im allgemeinen die elektrische Äolotropie der Kristalle oktopolar mit vier Achsen ist und nicht dipolar, wie bei der altbekannten Elektrizität des Turmalins. Die Intensitäten des elektrischen Vermögens sind im allgemeinen für die vier Achsen verschieden, und die Richtungen der Achsen sind im allgemeinen für Kristalle der unsymmetrischen Systeme unsymmetrisch orientiert. Für Kristalle der optisch einachsigen Klasse wird im allgemeinen eine von den elektropolaren Achsen mit der optischen Achse zusammenfallen, und die anderen drei Achsen werden zu ihr senkrecht sein. Die Intensität des elektropolaren Vermögens ist für diese drei Achsen wesentlich gleich; sie kann für jede von ihnen Null sein; sie kann für die sogenannte optische Achse Null sein oder einen beliebigen Wert besitzen. Haüy fand hinsichtlich der Kristallflächen an den beiden Enden eines Turmalinkristalles geometrische Verschiedenheiten; ebenso zwischen den gegenüberliegenden Ecken eines Würfels wie Leuzit, der Elektropolarität besitzt. Zwischen den beiden Enden eines Quarzkristalles (hexagonales Prisma mit hexagonalen Pyramiden auf den beiden Endflächen) bestehen solche Verschiedenheiten nicht; es bestehen aber Strukturverschiedenheiten (sichtbare oder unsichtbare) zwischen den gegenüberliegenden Kanten des hexagonalen Prismas. Das elektropolare Vermögen ist für die Achse des Prismas Null und findet sich zwischen den gegenüberstehenden Kanten, wie durch die schöne piezoelektrische Entdeckung des Ehepaars Curie bewiesen ist, nach der eine dünne Platte, die mit ihren Flächen und ihrer Länge senkrecht zu zwei parallelen Seitenflächen des hexagonalen Prismas und mit ihrer Dicke parallel zu dessen Kanten geschnitten ist, auf ihren Flachseiten entgegengesetzte Elektrizitäten zeigt, wenn sie an den Enden durch Kräfte gezogen wird. Dadurch sind drei elektropolare Achsen nachgewiesen, die die Kantenwinkel von  $120^0$  bisecieren.

§ 35. Für den Augenblick wollen wir nun an die oktopolare elektrische Äolotropie denken, wie sie von Haüy im kubischen Kristallsystem entdeckt worden ist. Für das Elektrionenquadrupel an den vier Ecken eines Tetraeders bietet sich leicht, daß sie in sich die symmetrische oktopolare Qualität besitzen, wie sie in den natürlichen Kristallen verwirklicht ist. Wenn wir uns eine Ansammlung von Atomen in einfacher kubischer Anordnung vorstellen,

wobei jedes Atom eine gleichseitige Gruppe von vier Elektronen enthält, alle in gleicher Weise senkrecht zu den vier Diagonalen eines jeden Struktur-Würfels orientiert, erhalten wir genau die erforderliche Äolotropie; jedoch würde das Gleichgewicht der Elektronen, wenn sie nach der Angabe alle gleiche Orientierung haben, wahrscheinlich unstabil sein, und wir müssen eine weniger einfache Ansammlung suchen, um bei ähnlicher Orientierung aller Gruppen von je vier Elektronen Stabilität zu bekommen.

§ 36. Diese erhalten wir, wie ich meine, in der verdoppelten gleichseitigen Ansammlung von Punkten, die ich in § 69 meiner *Molecular Constitution of Matter* beschrieben und nach den *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* für 1889 im dritten Bande meiner *Collected Mathematical and Physical Papers* (S. 426) neu veröffentlicht habe; sie mag wie folgt für eine Ansammlung von gleichen und ähnlichen Kugeln beschrieben werden. Indem wir mit einer gleichseitigen homogenen Ansammlung von Punkten,  $A$ , beginnen, bilden wir eine zweite ähnliche Ansammlung von Punkten,  $B$ , indem wir ein  $B$  in den Mittelpunkt jeder der ähnlich orientierten Gruppen zu je vier der Ansammlung der  $A$  bringen. Man findet dann, daß jedes  $A$  im Mittelpunkte einer entgegengesetzt orientierten Gruppe von je vier  $B$  sich befindet. Um dies zu verstehen, seien  $A_1, A_2, A_3, A_4$  eine gleichseitige Gruppe von vier  $A$ , und wir stellen uns vor,  $A_2, A_3, A_4$  befinden sich auf einer horizontalen Glasplatte<sup>1)</sup>, während  $A_1$  über derselben schwebt.  $B_1$  liege im Mittelpunkte der Gruppe  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , und es sei  $B_1, B_2, B_3, B_4$  eine ähnliche wie  $A_1, A_2, A_3, A_4$  orientierte Gruppe von vier Punkten. Wir sehen, daß dann  $B_2, B_3, B_4$  unterhalb der Glasplatte liegen und daß die Gruppe  $B_1, B_2, B_3, B_4$  keinen von den Punkten  $A$  in ihrem Mittelpunkte enthält. Allein die vertikal entgegengesetzte Gruppe  $B_1, B_2, B_3, B_4$  enthält  $A_1$  in sich, und diese ist der Gruppe  $A_1, A_2, A_3, A_4$  entgegengesetzt orientiert. So finden wir, daß zwar die Hälfte aller Gruppen der  $A$ , die entgegengesetzt der hervorgehobenen Gruppe  $A_1, A_2, A_3, A_4$  orientiert sind, kein  $B$  enthalten, daß aber die Hälfte der Gruppen der  $B$ , die entgegengesetzt dieser Gruppe  $A_1, A_2, A_3, A_4$  orientiert sind, je ein  $A$  enthalten, während die andere Hälfte der Gruppen der  $B$  keine  $A$  enthalten.

§ 37. Nun seien alle die Punkte  $A$  und alle die Punkte  $B$  des § 36 Mittelpunkte gleicher und ähnlicher kugelförmiger Atome, deren jedes eine Gruppe von vier Elektronen enthalte. Die Elektronen werden sich unter dem Einflusse ihrer eigenen gegenseitigen Abstoßungen und der Anziehungen durch die Atome in stabilem Gleichgewichte befinden, wenn sie als gleichseitige Gruppen von passender Größe mit den Atomen konzentrisch und sämtlich wie irgendeine Gruppe der  $A$  oder der  $B$  angeordnet sind. Um zu erkennen, daß dies richtig ist, beschränken wir unser Augenmerk zunächst auf die fünf Atome  $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1$ . Wenn die Elektronen innerhalb  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sämtlich in gleicher Weise zu den Mittelpunkten dieses Atomquadrupels orientiert gehalten werden, muß die Elektronengruppe in  $B_1$  offenbar den andern Elektronenquadrupeln ähnlich orientiert sein. Wenn andererseits diese entgegengesetzt der hervorgehobenen Gruppe der Atome orientiert gehalten werden, wird die stabile Anordnung der Elektronen in  $B_1$  der Orien-

1) Parallele Glasplatten mit kleinen weißen, schwarzen oder farbigen Papierkreisen bilden nützliche Hilfsmittel für eine graphische Konstruktion und für erläuternde Modelle in der Molekulartheorie der Kristalle.

tierung der in  $A_1, A_2, A_3, A_4$  enthaltenen Quadrupeln immer noch ähnlich, aber der Orientierung der Mittelpunkte der zugehörigen Atome entgegengesetzt sein.<sup>1)</sup> Also wenn nun, während die Elektrionengruppen sämtlich auf eine der beiden Arten ähnlich orientiert sind, die Gruppe innerhalb  $B_1$  zur entgegengesetzten Orientierung umgedreht wird, so verursacht dies, daß sich alle andern Gruppen ebenfalls umkehren und sich gemäß dieser umgekehrten Orientierung von neuem in stabiles Gleichgewicht setzen. Führt man dieselbe Überlegung für jedes Atom der Ansammlung und seine vier nächstenbenachbarten durch, so haben wir damit einen Beweis für die zu Anfang des vorliegenden Abschnittes aufgestellte Behauptung. Es ist äußerst interessant zu bemerken, daß, sobald in einer sehr großen homogenen Ansammlung der Art, wie wir sie betrachten, die Orientierung irgendeiner Elektrionengruppe umgekehrt und in dieser Lage festgehalten wird, alle anderen Gruppen folgen und sich in der umgekehrten Orientierung in stabiles Gleichgewicht setzen werden.

§ 38. Diese homogene Doppel-Ansammlung tetraelektrionischer Atome scheint absolut die einfachste<sup>2)</sup> molekulare Struktur zu sein, in der Haüy's oktopolare elektrische Qualität bestehen kann. Um zu erkennen, daß sie in der Tat oktopolare elektrische Qualität besitzt, betrachten wir ein in dieser Weise aufgebautes Oktaeder. Die Seitenflächen dieses Oktaeders werden in geeigneter Ordnung in ihrer Nähe abwechselnd Ecken und Dreiecke der in den Atomen befindlichen Elektrionengruppen haben. Dies schon ist die Art elektrischer Äolotropie, die eine oktopolare elektrische Qualität bildet.

§ 39. (Zusatz vom 23. Okt. 1901.) Seitdem das Obige niedergeschrieben war, habe ich die Erklärung für eine Schwierigkeit gefunden, die mich gehindert hatte, eine oktopolare elektrische Äolotropie in einer homogenen Ansammlung einzelner Atome zu erkennen. Ich finde nämlich jetzt (§ 40 weiter unten), daß Gruppen von je vier Elektrionen unter dem Einflusse der gegenseitigen Abstoßung zwischen Elektrion und Elektrion und der Anziehung zwischen Atom und Elektrion in einer gleichseitigen homogenen Ansammlung in der in Fig. 101 angedeuteten Anordnung stabil im Gleichgewichte verharren. Es ist vorausgesetzt, daß die Elektrionenquadrupeln ihre Kanten parallel den sechs Symmetrielinien der Ansammlung haben. Die Zeichenebene ist als die der Mittelpunkte von sieben Atomen angenommen. Der in der Mitte in jedem Kreise befindliche Punkt deutet ein einzelnes Elektrion an, das sich gemäß der Bezeichnung des obigen § 20 im Abstände  $r$  von der Zeichenebene auf der dem Beschauer zugekehrten Seite befindet; und dem-

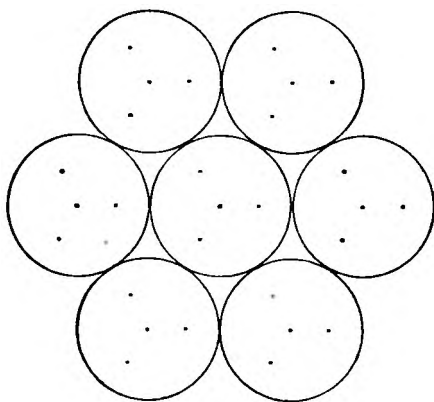


Fig. 101.

1) Ich habe den Sinn mehr erraten müssen.

2) Nicht die einfachste. Vgl. § 40 weiter unten.

gemäß befinden sich die andern drei Elektrionen in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks im Abstände  $\frac{1}{3}r$  auf der abgekehrten Seite, damit der elektrische Schwerpunkt der Gruppe mit dem Mittelpunkte seines Atoms zusammenfällt. Der Radius des Kreises, auf dem diese drei Punkte liegen, ist  $\frac{2\sqrt{2}}{3}r$  oder  $0,94r$ . Die Zeichnung ist nach dem Maßstabe des in der Tabelle des § 20 für  $r$  angenommenen Wertes  $0,612\alpha$  unter der Annahme, daß die in der Zeichnung dargestellten Kreise die elektrischen Wirkungssphären der einander berührenden Atome angeben, richtig durchgeführt.

§ 40. Wir stellen uns jetzt vor, die Elektrionen einer jeden Gruppe seien starr miteinander verbunden, und es sei ihnen nur die Freiheit gegeben, um eine zur Zeichenebene senkrechte Achse zu rotieren. Wir lassen drehende Kräfte wirken, indem wir die in der Mitte der Zeichnung angedeutete Gruppe drehen und alle andern Gruppen im Ruhezustande festhalten. Es ist klar, daß die ersten  $60^\circ$  der Drehung die mittelste Gruppe in eine Lage unstabilen Gleichgewichts bringt, und  $60^\circ$  mehr in eine Lage stabilen Gleichgewichts, die der ersten Lage entspricht, von der wir jetzt sehen, daß sie stabil ist, wenn die andern sämtlich festgehalten werden. Wir urteilen hier zwar einfach nach den gegenseitigen Wirkungen zwischen unserer mittelsten Gruppe und den sechs in der Zeichnung vorgeführten sie umgebenden Gruppen; es läßt sich aber leicht beweisen, daß unser Urteil durch die gegenseitige Wirkung zwischen der mittelsten Gruppe und allen sie umgebenden, einschließlich den sechs in der Zeichnung angedeuteten Gruppen, nicht verunrichtigt wird. Ähnlich sehen wir, daß überhaupt jede Gruppe der Ansammlung, die sich frei um eine zur Zeichenebene senkrechte Achse drehen kann, während alle andern Gruppen festgehalten werden, sich in stabilem Gleichgewichte befindet, wenn sie so, wie es die Zeichnung andeutet, orientiert ist. Und ähnlich finden wir wiederum denselben Schluß für die drei andern Zeichnungen in den drei andern den Seitenflächen des Tetraeders oder der entsprechenden Oktaeder der Ansammlung parallelen Ebenen. So schließen wir, daß, wenn die axialen Beschränkungen sämtlich aufgehoben und die Gruppen vollkommen frei sich selbst überlassen werden, jede von ihnen in stabilem Gleichgewicht verharret, falls sie wie die eine oder wie die andere Reihe der regelmäßig tetraedischen Gruppen der Ansammlung orientiert ist. Es ist interessant, zu bemerken, daß, wenn wir nach der Drehung der mittelsten Gruppe um  $60^\circ$  sie in dieser Lage festgehalten und den andern die Freiheit zu rotieren gegeben haben, sich unter ihnen vom Mittelpunkte aus rotierende Schwingungen verbreiten, und daß, nachdem die Energie, die wir zur Tordierung der mittelsten Gruppe aufgewandt haben, in Wellen verbraucht ist, die sich in dem außerhalb der Ansammlung befindlichen Äther ausbreiten, sie in eine stabile Gleichgewichtslage gelangen, in der jede von ihnen um  $60^\circ$  in der einen oder der andern Richtung von der ursprünglichen Lage aus gedreht und wie die mittelste Gruppe in der Lage orientiert ist, in der wir die letztere festgehalten haben.

§ 41. Wir haben so gefunden, daß eine gleichseitige homogene Anordnung von Atomen, deren jedes vier Elektrionen einschließt, diese Elektrionen in gleichseitige Gruppen ordnet, die sämtlich auf die eine oder die andere von zwei möglichen Arten orientiert sind. Die so entstandene Ansammlung von Atomen und Elektrionen ist ihrem Wesen nach oktopolar. Von den beiden die Struktur bildenden elementaren Tetraedern, der beiden Orientierungen,

hat das eine jede ihrer Elektrionengruppen mit der Spitze nach den Seitenflächen der Struktur hin, das andere von diesen fortgerichtet. Das elementare, die Struktur bildende Oktaeder hat vier von seinen Seitenflächen an den Ecken, und vier an den Dreiecksflächen seiner Elektrionengruppen. Dies bedeutet in der Tat eine mechanisch oktopolare<sup>1)</sup> Ansammlung, und sie liefert uns eine vollständige Erklärung der piezoelektrischen Eigenschaft, auf die man nach der experimentellen Entdeckung des Ehepaars Curie und der mathematischen Theorie von Voigt zu schließen hat.

§ 42. Wir schauen auf die Zeichnung des § 39 und erinnern uns, daß sie eine sehr große homogene Ansammlung andeutet, die aus einer ungeheuren Anzahl paralleler ebener Schichten von Atomen zu beiden Seiten der Zeichenebene besteht, in der sieben Atome angedeutet sind. Die Elektrionengruppen wurden alle als ähnlich orientiert und jede als gleichseitig und mit dem geometrischen Mittelpunkt im Mittelpunkt des Atoms beschrieben; Bedingungen, die sämtlich für das Gleichgewicht notwendig sind.

§ 43. Jetzt werde die Ansammlung Atome homogen zu der Ebene zu beiden Seiten gestreckt, um einen kleinen oder großen Betrag, jedoch so, daß keine Bewegungskomponente der Mittelpunkte dieser Atome der Ebene der Schichten parallel ist. Zunächst mag der Zug sehr groß sein, groß genug, daß die Atomschicht, für die die Mittelpunkte der Atome in der Zeichenebene sind, und die geometrischen Mittelpunkte ihrer Elektrionengruppen vor Beginn des Zuges in der Zeichenebene waren, von den andern Schichten ungestört bleibt. Die geometrischen Mittelpunkte der Elektrionengruppen sind dann nicht mehr in der Zeichenebene. Die in der Zeichnung über den Mittelpunkten der Kreise angedeuteten einzelnen Elektrionen auf der dem Beschauer zugekehrten Seite werden nach der Zeichenebene gezogen; die gleichseitigen Dreiecke an der abgekehrten Seite werden ebenfalls näher an die Zeichenebene gezogen, und die gleichseitigen Dreiecke werden in jedem Atome infolge der Anziehung der umgebenden Atome vergrößert. Die entgegengesetzten einwärts, nach der Ebene gerichteten Bewegungen des einzelnen Elektrions auf der einen Seite der Ebene und der Gruppe von drei Elektrionen auf der andern können im allgemeinen nicht im Verhältnisse von drei zu eins vor sich gehen. Folglich sind die geometrischen Schwerpunkte der Vierergruppen jetzt senkrecht zur Zeichenebene nach der abgekehrten oder zugekehrten Seite hin verschoben; ich kann nicht ohne Rechnung feststellen, nach welcher. Die Rechnung ist leicht, sie erfordert aber naturgemäß viel Arbeit, da sie die Bestimmung dreier Unbekannten nötig macht, nämlich der Seitenlängen des in der Zeichnung angedeuteten gleichseitigen Dreiecks, des Abstandes jeder seiner Ecken von dem auf der Vorderseite der Zeichenebene befindlichen Elektrion und der Verschiebung des geometrischen Schwer-

1) Die oktopolare Pyroelektrizität, von der wir angenommen haben, daß sie durch den Versuch von Häüy bewiesen ist, muß von einer Art Äolotropie in der Erwärmung bei dem Versuch herrühren. Gleichförmige Erwärmung in einem regulären Würfel oder Oktaeder könnte zu keinen entgegengesetzten elektrischen Äußerungen in den vier Paaren abwechselnder Ecken des Würfels oder abwechselnder Flächen des Oktaeders führen. Immerhin bleibt auch diese durch Unregelmäßigkeit gefundene elektrische Oktopolarität durch Häüy eine glänzende Entdeckung, deren wahre und vollständige Bedeutung wir erst jetzt auf Grund der experimentellen und mathematischen Arbeiten des Ehepaars Curie, von Friedel und von Voigt verstehen.

punktes des Quadrupels nach der einen oder der andern Seite der Zeichenebene. Eine Annäherungsmethode nach demselben allgemeinen Plane wie der der Anmerkung zu § 9 würde einen gangbaren Weg für die Rechnung ergeben.

§ 44. Wir wenden uns wieder dem § 42 zu und fassen die Zeichnung ins Auge, die einen Kristall in seinem natürlichen ungezwungenen Zustande darstellen soll, der aus einer ungeheuren Folge von Ansammlungen von Atomen besteht, deren Mittelpunkte in der Zeichenebene und in parallelen Ebenen zu beiden Seiten derselben liegen. Wir sehen jetzt, daß die auf die Elektrionen eines Quadrupels wirkenden und von den sie umgebenden, nur in der Zeichenebene liegenden, Atomen ausgehenden Kräfte, wenn sie nicht kompensiert würden, den geometrischen Schwerpunkt der Gruppe nach der einen oder der anderen Seite der Zeichenebene verschieben würden, und wir dürfen demnach schließen, daß die von allen Atomen zu beiden Seiten jener Ebene ausgehenden Kräfte die Kompensation liefern, die erforderlich ist, den Schwerpunkt der Gruppe in der Zeichenebene zu erhalten. Jetzt denken wir uns die Ansammlung in irgendeinem Maße nach allen Richtungen in gleicher Weise gestreckt. Die Gruppen bleiben dann gleichseitig, mit ihren Schwerpunkten in der Zeichenebene und in parallelen Ebenen. Schließlich übe man ferner eine Streckung gleichmäßig in allen zur Zeichenebene parallelen Richtungen aus, jedoch ohne Bewegungskomponente, die gegen diese Ebene senkrecht ist. Diese letztere Streckung vermindert den Einfluß aller der Atome, deren Mittelpunkte sich in der Zeichenebene befinden, und die das Bestreben haben, die Schwerpunkte ihrer Elektrionen in einer Richtung von dieser Ebene fortzubewegen; und demgemäß lassen sie es zu, daß alle außerhalb dieser Ebene befindlichen Atome in ihrer Wirkung vorherrschen und eine bestimmte, berechenbare, Verschiebung der Schwerpunkte aller Gruppen in der der ersten Richtung entgegengesetzten verursachen.

§ 45. Um die Operationen des § 44 zu realisieren, schneide man eine dünne sechsflächige Platte aus der Mitte zwischen zwei gegenüberliegenden Ecken eines kubischen Kristalls oder zwischen zwei parallelen Seiten eines Oktaeders, befestige Klammern an den sechs Kanten dieser Platte und lasse Kräfte wirken, die je die Einzelkanten eines Paares gleichmäßig in entgegengesetzten Richtungen ziehen. Dann wird das ganze Material der Platte elektropolar mit einem elektrischen Moment für die Raumeinheit, das gleich  $4Nex$  ist. Das meßbare Resultat dieses Moments besteht in gleichförmigen elektrostatischen Potentialen<sup>1)</sup> dicht an beiden Seiten der Platte, die außen im Äther voneinander um  $4\pi \cdot 4Next$  abweichen; hier ist  $t$  die Dicke der Platte,  $x$  die berechnete, den beiden Breitseiten der Platte parallele Verschiebung des Schwerpunktes jedes Quadrupels von den Mittelpunkten der Atome,  $e$  die elektrische Masse jedes Elektrions und  $N$  die Anzahl Atome im Kubikzentimeter der Substanz. Dieser Kristall des kubischen Systems bietet in der mathematischen Theorie von Voigt das Analogon zu dem von dem Ehepaar Curie im Quarz entdeckten elektrischen Effekt, der mittels dünner Metallblättchen gemessen wurde, die an die beiden Stirnseiten der Platte angelegt und mit den beiden Hauptelektroden eines Elektrometers verbunden wurden.

1) Vgl. meine *Electrostatics and Magnetism*. § 512, Cor. 3.

## Anhang F.

(War bereits mehr als zwölf Jahre als Artikel XCIII—XCVII für den beabsichtigten vierten Band der Mathematical and Physical Papers in Satz.)

### Art. XCIII. Mechanische Erläuterungen der magnetischen und helikoidalen Rotationswirkungen durchsichtiger Körper auf polarisiertes Licht.

(Aus den Proc. Roy. Soc., Bd. VIII, Juni 1856; Phil. Mag., März 1857.)

Die elastische Reaktion eines einem homogenen Zwange unterworfenen Festkörpers hat einen Charakter, der seinem Wesen nach jeder helikoidalen und dipolaren Asymmetrie bar ist. Demnach muß die Drehung der Polarisationssebene des Lichtes, das durch Körper hindurehgeht, die entweder in sich die helikoidale Eigenschaft besitzen (Zuckerlösung, Terpentinöl, Quarzkristalle usw.) oder sie durch die in ihnen induzierte magnetische Eigenschaft erhalten, von elastischen Reaktionen herrühren, die von Heterogenität der Deformation in dem Raume einer Welle oder von einer gewissen Heterogenität der Lichtbewegungen<sup>1)</sup> abhängen, die ihrerseits aus einer Heterogenität von Teilen der Materie fließt, deren lineare Dimensionen im Vergleich mit der Wellenlänge nicht unendlich klein sind. Ein unendlich homogener Festkörper könnte keine von diesen beiden Eigenschaften besitzen, wenn der Zwang an einem beliebigen Punkte in ihm nur durch ihn berührenden Teile eines Körpers beeinflußt würde: wenn aber der Zwang an einem Punkte durch eine Deformation an anderen Punkten direkt beeinflußt wird, deren Abstand von ihm im Vergleich mit der Wellenlänge endlich ist, kann die helikoidale Eigenschaft vorhanden sein, und kann die Drehung der Polarisationssebene, wie sie in vielen Flüssigkeiten und im Quarz beobachtet worden ist, als eine direkte mechanische Folge der durch eine Deformation, wie sie in einer Welle polarisierten Lichtes besteht, ins Lehen gerufenen statischen elastischen Reaktion erklärt werden. Es dürfte jedoch als wahrscheinlicher erachtet werden, daß die Materie durchsichtiger Körper von Teil zu Teil in linearen Dimensionen, die im Vergleich mit der Wellenlänge nicht unendlich klein sind, tatsächlich heterogen ist, als anzunehmen, daß sie unendlich homogen ist und die Eigenschaft besitzt, mit einer bestimmten direkten „molekularen“ Kraft in Abständen von der Größenordnung der Wellenlänge zu wirken; und es ist sicher, daß jede spiralige Heterogenität eines schwingenden Mediums, wenn entweder rechtsgedrehte oder linksgedrehte Spiralen vorherrschen, eine

---

1) Wie es der Fall wäre, wenn verschiedene Reihen schwingender Partikel vorhanden wären, oder wenn die wichtige Hypothese von Rankine zuträfe, daß die Schwingungen der lichtführenden Partikel direkt durch den Druck eines umgebenden Mediums vermöge seiner Trägheit beeinflußt würden. (In der neunzehnten und zwanzigsten Vorlesung haben wir gesehen, daß Grund vorhanden ist, zu glauben, daß das richtig ist.)

endliche Drehung der Polarisationssebene aller Wellen verursachen muß, deren Längen nicht unendlich große Vielfache der Ganghöhen der Strukturspiralen sind. So kann man sicher erwarten, daß eine homogene, mit spiralförmigen Fäden angefüllte Flüssigkeit oder ein Festkörper mit spiralförmigen Kanälen in ihm, deren Ganghöhe nicht kleiner als ein vierzigmilliontel Zoll ist, oder ein Kristall mit einer rechts- oder linksgewundenen geometrischen Anordnung von Teilen, deren lineare Dimensionen die Größenordnung von ein vierzigmilliontel Zoll besitzen, rechts- oder linksgewundene Drehung des gewöhnlichen Lichtes verursacht (die Wellenlänge des homogenen Gelb beträgt  $\frac{1}{40000}$  Zoll).

Aber der von Faraday entdeckte magnetische Einfluß auf Licht hängt von der Bewegungsrichtung der bewegten Partikel ab. Beispielsweise werden in einem Medium, das jene Eigenschaft besitzt, Partikel in gerader Linie, die den Linien einer magnetischen Kraft parallel ist, wenn sie zu einer Schraubenlinie verschoben werden, deren Achse jene Gerade bildet, und dann tangential mit solchen Geschwindigkeiten geschleudert werden, daß sie Kreise beschreiben, verschiedene Geschwindigkeiten bekommen, je nachdem ihre Bewegungen in der einen Richtung erfolgen (in der als Richtung des galvanischen Stromes in der magnetisierenden Spule bezeichneten) oder in der entgegengesetzten Richtung. Aber die elastische Reaktion des Mediums muß die nämliche für die nämlichen Verschiebungen sein, welches auch die Geschwindigkeit und Richtung der Teilchen sein mögen; das heißt, die Kräfte, denen durch die Zentrifugalkraft der Kreisbewegungen das Gleichgewicht gehalten wird, sind gleich, während die Lichtbewegungen ungleich sind. Da demnach die absoluten Kreisbewegungen entweder gleich oder so beschaffen sind, daß sie auf die ursprünglich ins Auge gefaßten Partikel gleiche Zentrifugalkräfte übertragen, so folgt, daß die Lichtbewegungen nur Komponenten der Gesamtbewegung sind, und daß eine kleinere Lichtkomponente in einer Richtung, zusammengesetzt mit einer Bewegung im Medium, die kein Licht überträgt, eine Resultante ergibt, die ebenso groß ist wie die einer größeren Lichtbewegung in der entgegengesetzten Richtung, zusammengesetzt mit derselben nicht Licht bedeutenden Bewegung. Ich meine, es ist nicht nur unmöglich, eine andere als diese mechanische Erklärung der Tatsache zu finden, daß zirkularpolarisiertes Licht, welches parallel den Linien der magnetisierenden Kraft durch ein, einer solchen Kraft ausgesetztes, Glasstück gesandt ist, das immer rechtsgewunden oder immer linksgewunden wirkt, in verschiedenem Maße fortgepflanzt wird, je nachdem sein Weg in der Richtung oder der Richtung entgegen ist, in der ein nordmagnetischer Pol angezogen wird; ich meine sogar, es kann bewiesen werden, daß eine andere Erklärung dieser Tatsache überhaupt nicht möglich ist. Hiernach scheint es, daß Faradays optische Entdeckung einen Beweis für die Richtigkeit der Erklärung liefert, die Ampère für die eigentliche Natur des Magnetismus gegeben hat, und ferner eine Definition für die Magnetisierung im Sinne der kinetischen Wärmetheorie. Die Einführung des Prinzips des Moments der (Drehungs-) Momente („die Erhaltung der Flächen“) in die mechanische Behandlung der Rankineschen Hypothese von den „molekularen Wirbeln“ scheint auf eine Linie hinzudeuten, die zu der Ebene des resultierenden Rotationsmoments („die invariable Ebene“) der Wärmebewegungen senkrecht ist, als auf die magnetische Achse eines magnetisierten Körpers, und führt zu der Anschauung, daß das resultierende Moment der Momente dieser Bewegung ein be-



stimmtes Maß des „magnetischen Moments“ bildet. Die Erklärung aller Erscheinungen elektromagnetischer Anziehungen oder Abstoßungen und elektromagnetischer Induktion ist einfach in der Trägheit und im Drucke derjenigen Materie zu suchen, deren Bewegungen Wärme bilden. Ob diese Materie Elektrizität ist oder nicht, ob sie ein kontinuierliches Fluidum ist, das die Räume zwischen molekularen Kernen durchdringt, oder ob sie selbst molekular gruppiert ist; überhaupt ob alle Materie kontinuierlich ist und molekulare Heterogenitäten in bestimmten wirbelartigen oder andern relativen Bewegungen einander berührender Teile eines Körpers bestehen, das zu entscheiden, ist unmöglich, und vielleicht ist es bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft eine vergebliche Mühe, darüber nachzusinnen.

Ich füge die Lösung einer mechanischen Aufgabe hinzu, weil sie eine Veranschaulichung für die beiden oben erwähnten Arten der Wirkung auf die Polarisationssebene bietet.

Die beiden Enden eines Fadens von beliebiger Länge seien an den Enden eines horizontalen Armes befestigt, der in Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine vertikale, durch seinen Mittelpunkt gehende Achse versetzt ist, und es sei ein zweiter, ein Gewicht tragender Faden an die Mitte des ersten Fadens angeheftet. Die beiden Fäden seien beide vollkommen leicht und biegsam und das Gewicht sei ein materieller Punkt, es wird nun verlangt, seine Bewegung zu ermitteln, wenn er unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtslage gestört ist.<sup>1)</sup>

Es sei  $l$  die Länge des zweitens Fadens und  $m$  der Abstand des Gewichts vom mittelsten Punkte des den ersten Faden tragenden Armes.  $x$  und  $y$  seien zur Zeit  $t$  die rechtwinkligen Koordinaten der Lage des Gewichts, bezogen auf die Gleichgewichtslage  $O$ , und  $OX$ ,  $OY$  zwei zueinander rechtwinklige Geraden, die sich in einer Horizontalebene gleichförmig in derselben Richtung und mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie der horizontale Arm drehen. Wenn wir dann  $OX$  parallel diesem Arm wählen und wenn die Drehung in der Richtung erfolgt, daß  $OY$  vor  $OX$  voranläuft, erhalten wir als Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x - 2\omega \frac{dy}{dt} &= -\frac{g}{l} x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - \omega^2 y + 2\omega \frac{dx}{dt} &= -\frac{g}{m} y.\end{aligned}$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$\frac{1}{2}\left(\frac{g}{l} + \frac{g}{m}\right) = n^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{g}{l} - \frac{g}{m}\right) = \lambda^2,$$

und finden nach den gebräuchlichen Methoden die folgende Lösung

1) Mittels dieser Anordnung, aber ohne die Drehung des tragenden Armes, kann ein schöner, von Professor Blackburn herrührender Versuch ausgeführt werden, indem man an das Gewicht einen Sandbeutel hängt, der seinen Inhalt durch eine feine Öffnung entleert. (Mehr ist im Text nicht angegeben. Ich weiß nicht, worauf dieser Versuch sich bezieht, wenn der Arm doch nicht rotieren soll. D. H.)

$$\begin{aligned}
 x &= A \cos \{ [\omega^2 + n^2 + (\lambda^4 + 4n^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} t + \alpha \} \\
 &+ B \cos \{ [\omega^2 + n^2 - (\lambda^4 + 4n^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} t + \beta \}, \\
 y &= - \frac{2\omega^2 - \lambda^2 + (\lambda^4 + 4n^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}{2\omega[\omega^2 + n^2 + (\lambda^4 + 4n^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}} A \sin \varphi \\
 &- \frac{2\omega^2 - \lambda^2 - (\lambda^4 + 4n^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}{2\omega[\omega^2 + n^2 - (\lambda^4 + 4n^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}} B \sin \psi,
 \end{aligned}$$

wo  $A$ ,  $\alpha$ ,  $B$ ,  $\beta$  willkürliche Konstanten sind und die Bezeichnungen  $\varphi$  und  $\psi$  für die Argumente der in den Ausdrücken für  $x$  vorkommenden Kosinus benutzt sind.

Die Deutung dieser Lösung ergibt, wenn  $\omega$  gleich der Komponente der Winkelgeschwindigkeit der Erde um eine durch den Ort der Beobachtung gehende Vertikale ist, eine vollständige Erklärung für die eigentümlichen Erscheinungen, die von vielen beim Mißlingen der Wiederholung des bewunderungswürdigen Foucaultschen Pendelversuches beobachtet worden sind. Ist nämlich die Art der Aufhängung eine vollkommene, so sollte man dabei haben  $\lambda = 0$ . Aber bei vielen Versuchen, das Foucaultsche Resultat zu erhalten, bestand ein Mangel an Symmetrie in der Art der Anheftung des obern Endpunktes des benutzten Drahtes oder des Fadens, oder es bestand eine kleine seitliche Unstabilität in den Trägern des Aufhängungspunktes, die bewirkte, daß die beobachtete Bewegung dieselbe war wie die in der obigen Lösung dargestellte, bei der  $\lambda$  einen gewissen kleinen Wert besitzt, der entweder größer oder kleiner als  $\omega$  ist, und  $n$  den Wert  $\sqrt{\frac{g}{l}}$ . Der einzige Fall jedoch, der näher ins Auge gefaßt werden muß, da er den Gegenstand der vorliegenden Mitteilung beleuchtet, ist der, in dem  $\omega$  im Vergleich mit  $n$  sehr groß ist. Um eine in diesem Falle leicht zu deutende Lösung zu erhalten, sei

$$\begin{aligned}
 [\omega^2 + n^2 + (\lambda^4 + 4n^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} &= \omega + \varrho, \quad [\omega^2 + n^2 - (\lambda^4 + 4n^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} = \omega - \sigma, \\
 \frac{2\omega^2 - \lambda^2 + (\lambda^4 + 4n^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}{2\omega[\omega^2 + n^2 + (\lambda^4 + 4n^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}} &= 1 + e, \\
 \frac{2\omega^2 - \lambda^2 - (\lambda^4 + 4n^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}{2\omega[\omega^2 + n^2 - (\lambda^4 + 4n^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}} &= 1 - f.
 \end{aligned}$$

Dann geht die obige Lösung über in

$$\begin{aligned}
 x &= A \cos \{ (\omega + \varrho) t + \alpha \} + B \cos \{ (\omega - \sigma) t + \beta \}, \\
 y &= - A \sin \{ (\omega + \varrho) t + \alpha \} - B \sin \{ (\omega - \sigma) t + \beta \} \\
 &- eA \sin \{ (\omega + \varrho) t + \alpha \} + fB \sin \{ (\omega - \sigma) t + \beta \}.
 \end{aligned}$$

Um das Resultat in Abhängigkeit von Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$  nach festen Achsen anstatt der sich drehenden Achsen  $OX$ ,  $OY$  auszudrücken, dürfen wir setzen

$$\begin{aligned}
 \xi &= x \cos \omega t - y \sin \omega t, \\
 \eta &= x \sin \omega t + y \cos \omega t.
 \end{aligned}$$

Dann bekommen wir

$$\begin{aligned}\xi &= A \cos (\varrho t + \alpha) + B \cos (\sigma t - \beta) \\ &\quad + [eA \sin \{(\omega + \varrho)t + \alpha\} - fB \sin \{(\omega - \sigma)t + \beta\}] \sin \omega t, \\ \eta &= -A \sin (\varrho t + \alpha) + B \sin (\sigma t - \beta) \\ &\quad + [-eA \sin \{(\omega + \varrho)t + \alpha\} + fB \sin \{(\omega - \sigma)t + \beta\}] \cos \omega t.\end{aligned}$$

Wenn  $\omega$  sehr groß ist, sind  $e$  und  $f$  zugleich sehr klein und werden die letzten beiden Glieder jeder dieser Gleichungen sehr kleine periodische Ausdrücke von sehr schnell wiederkehrenden Perioden, und weisen so auf ein leichtes Zittern in der resultierenden Bewegung hin. Läßt man dies außer acht und wählt  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ , was wir, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu tun, machen dürfen, wenn wir die Beziehungsachsen und den Zeitpunkt, von dem aus wir die Zeit zählen, in geeigneter Weise wählen, so erhalten wir schließlich als angenäherte Lösung in bequemer Form

$$\begin{aligned}\xi &= A \cos \varrho t + B \cos \sigma t, \\ \eta &= -A \sin \varrho t + B \sin \sigma t.\end{aligned}$$

Die Glieder mit dem Faktor  $B$  in diesen Ausdrücken stellen eine Kreisbewegung mit der Periode  $\frac{2\pi}{\sigma}$  in der positiven Richtung (nämlich von der positiven Achse der  $\xi$  nach der positiven Achse der  $\eta$  hin) oder in der nämlichen Richtung wie die der Drehung  $\omega$  dar. Die Glieder mit dem Faktor  $A$  geben eine ähnliche Kreisbewegung in der entgegengesetzten Richtung. Wenn nun  $\omega$  sehr bedeutend ist, sind die Größen  $\varrho$  und  $\sigma$  einander sehr nahe gleich; jedoch ist  $\varrho$  immerhin kleiner als  $\sigma$ , wie die folgenden aus ihren oben angegebenen genauen Werten abgeleiteten angenäherten Ausdrücke zeigen:

$$\varrho = n + \frac{1}{8} \frac{\lambda^4}{\omega^2 n} - \frac{1}{8} \frac{\lambda^4}{\omega^3}, \quad \sigma = n + \frac{1}{8} \frac{\lambda^4}{\omega^2 n} + \frac{1}{8} \frac{\lambda^4}{\omega^3}.$$

Demnach besagt die Form der Lösung einfach, daß Kreisbewegungen des Pendels in entgegengesetzten Richtungen etwas verschiedene Perioden besitzen, eine kürzere,  $\frac{2\pi}{\sigma}$ , wenn die Bewegung des Pendels derjenigen des dasselbe tragenden Armes folgt, und eine längere,  $\frac{2\pi}{\varrho}$ , wenn sie in der entgegengesetzten Richtung geschieht. Der äquivalente Satz, daß, wenn das Pendel einfach seitlich aus seiner Gleichgewichtslage herausgezogen und ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen wird, die Vertikalebene seiner Bewegung langsam mit der Winkelgeschwindigkeit  $\frac{1}{2}(\sigma - \varrho)$  rotieren wird, läßt sich am kürzesten darstellen, wenn man  $A = B$  setzt und so die obige Lösung in die Form überführt

$$\begin{aligned}\xi &= 2A \cos \bar{\omega} t \cos n't, \\ \eta &= 2A \sin \bar{\omega} t \cos n't\end{aligned}$$

Hierin hat man

$$\begin{aligned}n' &= \frac{1}{2}(\sigma + \varrho) \text{ oder angenähert } n' = n + \frac{1}{8} \frac{\lambda^4}{\omega^2 n}, \\ \bar{\omega} &= \frac{1}{2}(\sigma - \varrho) \text{ oder angenähert } \bar{\omega} = \frac{1}{8} \frac{\lambda^4}{\omega^3}.\end{aligned}$$

Es ist ein auffallender Teil des so dargestellten Schlusses, daß, je schneller der tragende Arm herumgeführt wird, um so langsamer ihm die Ebene einer einfachen Schwingung des Pendels folgt. Wenn der tragende Arm unendlich schnell herumgetrieben wird, bleibt die Ebene einer Schwingung des Pendels konstant, und die Periode wird  $n$ ; in andern Worten, die Bewegung des Pendels ist dieselbe wie die eines einfachen Pendels, dessen Länge  $\frac{2}{\frac{1}{l} + \frac{1}{m}}$

oder ein harmonisches Mittel aus den wirksamen Längen in den beiden Hauptebenen des wirklichen Pendels ist.

Hieraus ist leicht zu beweisen, daß, wenn ein langer gerader Stab oder ein gespannter Faden, der bei gewisser Starrheit ungleichmäßig elastisch ist oder nach verschiedenen transversalen Richtungen ungleiche Dimensionen hat, in eine schnelle Rotation um seine Achse versetzt wird, und wenn an einer Stelle des Stabes oder Fadens senkrecht zu ihm geradlinige Schwingungen erhalten werden, daß dann sich den Stab oder den Faden entlang laufende Wellen ergeben von merklich geradlinigen transversalen Schwingungen und in einer Ebene, die sich im Fortschreiten der Welle gleichmäßig in derselben Richtung wie die Substanz dreht. Ist  $\frac{2\pi}{\omega}$  die Rotationsperiode der Substanz, und geben  $l$  und  $m$  die Längen einfacher Pendel, die isochron sind mit denjenigen Schwingungen der beiden ebenen Wellen (von derselben Länge  $a$ ), in den Ebenen größter und kleinster Elastizität der Substanz, die stattfinden, wenn Stab oder Faden keine Rotation besitzen, so wird die Schwingungsperiode einer Welle derselben Länge in der Substanz, wenn diese in Drehung versetzt ist, sein

$$n \left( 1 + \frac{1}{8} \frac{\lambda^4}{\omega^2 n^2} \right);$$

und der Winkel, um den sich die Schwingungsebene während des Fortschreitens um eine Wellenlänge dreht, wird sein

$$\frac{\pi}{4} \frac{\lambda^4}{n \omega^2};$$

oder die Anzahl Wellenlängen, um die die Welle fortgeschritten ist, ehe ihre Ebene sich einmal herumgedreht hat, wird sein

$$\frac{8 n \omega^2}{\lambda^4},$$

wenn, wie oben, gesetzt ist

$$n = \sqrt{g \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{m} \right)}, \quad \lambda = \sqrt{g \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{m} \right)},$$

und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, mit der die Substanz sich dreht.

Wir setzen jetzt voraus, daß der Stab oder der Faden leicht um seine Achse gedreht wird, so daß seine Richtungen größter und kleinster Elastizität auf zwei zueinander rechtwinkligen Schraubenflächen (helicoïdes gauches) liegen. Sodann unterhalten wir in einem Punkte von ihm regelmäßige gerad-

linige Schwingungen mit einer Periode, für die die entsprechende Wellenlänge ein sehr großes Vielfaches der Ganghöhe der Schraube ist. Nun setzen wir noch die Substanz um ihre Achse in eine so schnelle Rotation, daß die zur Achse parallele Geschwindigkeit eines längs einer der Schraubenflächen freilaufenden Punktes gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle ist, dann wird klar, daß eine Reihe merklich ebener Wellen ohne Drehung der Schwingungsebene den Stab oder Faden entlang laufen. Die Schwingungsperiode einer Partikel wird angenähert dieselbe wie vorhin sein, also annäherungsweise gleich  $\frac{2\pi}{n}$ . Seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird demnach  $\frac{na}{2\pi}$  sein, und wenn  $s$  die Ganghöhe der Schraube ist, muß die Rotationsperiode der Substanz, um die festgestellte Bedingung zu erfüllen,  $\frac{2\pi s}{na}$  oder ihre Winkelgeschwindigkeit  $\frac{na}{s}$  sein. Nun erkennt man leicht, daß die Wirkungen der schnellen Rotation und die Wirkungen der schwachen Drillung als unabhängig einander superponiert aufgefaßt werden können; und demgemäß muß die Wirkung der Drillung ohne Rotation der Substanz darin bestehen, daß sie der Schwingungsebene eine Rotation verleiht, die gleich und entgegengesetzt derjenigen ist, die die Rotation der Substanz erteilen würde, wenn keine Drillung vorhanden wäre. Aber die von einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  herrührende Wirkung der Drehung der Substanz auf die Schwingungsebene ist, wie wir gesehen haben, eine volle Drehung auf  $\frac{8n\omega^3}{\lambda^4}$  Wellenlängen; und demnach beträgt sie eine volle Umdrehung auf  $8 \frac{n^4 a^3}{\lambda^4 s^3}$  Wellenlängen, wenn die Winkelgeschwindigkeit  $\frac{na}{s}$  ist. Demgemäß besteht die Wirkung einer Drillung, die eine Umdrehung auf die Länge  $s$ , einen kleinen Bruchteil der Wellenlänge, beträgt, darin, daß sie bewirkt, daß die Schwingungsebene einer Welle sich bei dem Vorschreiten der Welle in dem Maße einer Umdrehung auf  $8 \frac{n^4 a^3}{\lambda^4 s^3}$  Wellenlängen in derselben Richtung dreht, in der ein Punkt auf einer der Schraubenflächen laufen würde, wenn er dazu die Freiheit hätte.

Nach diesen Erläuterungen ist auf eine unendliche Mannigfaltigkeit von Arten leicht zu sehn, wie man sich Strukturen vorstellen kann, die homogen sind, wenn man sie in einem hinreichend großen Maßstabe betrachtet, die aber (1) in Mengen, die groß genug sind, um noch merklich homogen zu sein, bei gewissen Rotationsbewegungen der zusammensetzenden Teile, mit resultierenden Momentenachsen, die wie magnetische Kraftlinien angeordnet sind, die mechanische Eigenschaft besitzen können, durch die die optischen Erscheinungen durchsichtiger Körper im magnetischen Felde erklärt werden, (2) Strukturen mit spiralgigen Anordnungen der zusammensetzenden Teile mit Achsen, die sämtlich einer festen Geraden parallel sind, das axiale Rotationsvermögen besitzen können, das der eines Quarzkristalles entspricht, und (3) Strukturen mit spiralgigen Anordnungen der zusammensetzenden Gruppen mit gänzlich ungeordneten Achsen das isotrope Rotationsvermögen haben können, das Zucker- und Weinsäurelösungen, Terpentinöl und viele andere Flüssigkeiten besitzen.

**Art. XCIV. Über die Erscheinungen der Magnetokristallkraft.  
(Sui fenomeni magnetocristalline.)**

[Nuovo Cimento, IV, 1856.]

[Electrostatics and Magnetism, Art. XXX.]

**Art. XCV. Über die die Druckänderungen in Flüssigkeiten begleitende Temperaturänderung. (On the alteration of temperature accompanying changes of pressure in fluids.)**

[Proc. Roy. Soc., Juni 1857; Phil. Mag., Juni, Suppl., 1858.]

Der Gegenstand dieser Abhandlung ist in den Mathematical and Physical Papers, Art. XLVIII (Bd. I) bearbeitet.

**Art. XCVI. Bemerkungen über das innere Schmelzen von Eis.**

[Teil eines Briefes an Prof. Stokes; Proc. Roy. Soc. IX, Febr. 1858.]

In der eben ausgegebenen Nummer der Proceedings, die ich gestern erhalten habe, finde ich einige sehr interessante, in einer Mitteilung von Dr. Tyndall „On some Physical Properties of Ice“ veröffentlichte, Versuche. Ich schreibe Ihnen, um darauf hinzuweisen, daß sie einen direkten, sichtbaren Beweis für die Theorie meines Bruders von der Plastizität des Eises ergeben, die in den Proceedings vom 7. Mai des letzten Jahres veröffentlicht ist, und um meinerseits eine physikalische Erklärung der blauen Adern in Gletschern und der lamellaren Struktur hinzuzufügen, von der Dr. Tyndall gezeigt hat, daß sie im Eise durch Druck hervorgerufen wird, was sich im sechsten Abschnitte seiner Abhandlung beschrieben findet.

So sagt mein Bruder in seiner Abhandlung vom verfloßenen Mai: „Wenn wir mit der Betrachtung einer Eismasse beginnen, die vollkommen frei von Porosität und frei von in seiner Substanz verbreiteten flüssigen Theilen ist, und wenn wir voraussetzen, daß sie in einer Atmosphäre von genau oder von über 0° C gehalten wird, dann müssen sich, sobald sie einem Drucke ausgesetzt wird, sofort von flüssigem Wasser erfüllte Poren bilden, in Übereinstimmung mit dem Fundamentalprinzip der Erklärung, die ich vorgeschlagen habe — nämlich daß der Gefrierpunkt oder Schmelzpunkt des Eises sinkt durch Druck, und in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß Eis nicht bei 0° C unter einem den der Atmosphäre übersteigenden Drucke bestehen kann.“ Dr. Tyndall findet, daß wenn ein Eiszyylinder zwischen zwei Buchsbaumplatten gebracht und einem allmählich wachsenden Drucke ausgesetzt wird, ein trübes, wolkenartiges Aussehn beobachtet wird, das er als vom Schmelzen kleiner Theile des Eises im Innern der Masse herrührend ermittelt. Das Eindringen in Eismengen, die eine Zeitlang klar sind, „von gegen sie gepreßtem Wasser von solchen Theilen aus, die direkt dem Drucke ausgesetzt sind“, ist theoretisch von meinem Bruder nachgewiesen. Dr. Tyndalls Feststellung hat dieses schön erläutert, wonach „die nebelartigen, durch Druck der Masse hervorgerufenen Flächen sich in einem Zustande starker Störung zeigten, die

dicht auf die Drucklinie der Oberfläche in der Bewegung durch den Festkörper folgte.<sup>1)</sup> Es ist schließlich gezeigt worden, daß diese Flächen von der Verflüssigung des Eises in Ebenen herrührten, die gegen den Druck senkrecht waren.“

Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß die „Oszillationen“ im Schmelzpunkte von Eis und die Unterscheidung in dieser Hinsicht zwischen starken und schwachen Stücken, wie sie von Dr. Tyndall im zweiten Abschnitte seiner Abhandlung beschrieben ist, Folgen der sich ändernden Drucke sind, die verschiedene Teile einer Eismasse erleiden müssen, wenn Teile in ihnen flüssig werden.

Die Erhöhung der Schmelztemperatur, die, wie die Theorie meines Bruders nachweist, durch Herabsinken des Eisdruckes unter den Atmosphärendruck hervorgerufen worden sein muß, und auf die ich als auf einen Gegenstand einer experimentellen Darstellung in meinem Artikel, der den experimentellen Beweis für die den Schmelzpunkt erniedrigende Wirkung des Druckes (Proceedings, Roy. Soc. Edinb., Febr. 1850) beschreibt, hingewiesen habe, tut dar, daß sich ein Wasserbläschen im Innern eines Festkörpers aus Eis nur bei einer über 0° C liegenden Temperatur ausbilden kann. Dies ist ein Schluß, den Dr. Tyndall als Resultat einer mechanischen Überlegung folgendermaßen ausdrückt: „Betrachtet man Wärme als eine Art Bewegung, so wird die Freiheit des Flüssigseins von den Molekeln an der Oberfläche einer Eismasse erreicht, bevor die Molekeln im Mittelpunkte der Masse diese Freiheit erlangen können.“

Die physikalische Theorie zeigt, daß ein Entfernen des Atmosphärendruckes den Schmelzpunkt des Eises um  $\frac{3}{400}$  eines Zentrigrades erhöhen würde. Demgemäß ist es sicher, daß das Innere eines Festkörpers aus Eis, wenn es durch Sammlung von Sonnenstrahlen mittels einer Linse erwärmt wird, um mindestens diesen Überschuß an Temperatur über die der Teile an der Oberfläche ansteigen wird. Es erscheint sehr nahe sicher<sup>2)</sup>, daß Kohäsion der Bildung einer Blase aus Wasserdampf in einem durch dieses Verfahren im Innern einer Eismasse entstandenen Wasserbeutelchen zuvorkommen wird, bis ein hoher „negativer Druck“ erreicht ist, d. h. bis Kohäsion bedeutend in Wirkung gerufen ist, insbesondere wenn das Wasser und das Eis wenig oder gar keine Luft durch Absorption enthält (gerade wie luftfreies Wasser unter beliebigem, nicht verschwindendem hydrostatischen Druck beträchtlich über den Siedepunkt erwärmt werden kann). Demgemäß erscheint es nahezu sicher, daß das Innere eines ursprünglich klaren Eisblocks, in dem durch Konzentrierung von Wärmestrahlen Wasserbläschen in der Weise, wie es von Dr. Tyndall in den am Anfange seiner Abhandlung beschriebenen schönen Versuchen geschehen ist, erzeugt worden sind, in seiner Temperatur sehr beträchtlich erhöht wird, während die Bläschen sich erweitern unter der fortgesetzten Einwirkung der Strahlung, die ihnen durch die kältere Eishülle und durch das diese von allen Seiten begrenzende flüssige Mittel (Luft und eine feuchte Haut oder Wasser, das

1) Der Text ist hier und im folgenden kaum zu verstehen. D. H.

2) Diese eigenartige Ausdrucksweise ist hier und an vielen anderen vorausgegangenen und folgenden Stellen lediglich Übersetzung des Originals. Namentlich die Zitate nach Tyndall klingen zum Teil auffallend geschräut. D. H.

dort, wo es den Festkörper berührt, notwendig die Temperatur von  $0^{\circ}\text{C}$  besitzt) hindurch zukommt.

Ich sehe, daß ich nicht die Zeit habe, meine Absicht durchzuführen, Ihnen heute eine physikalische Erklärung der blauen Adern von Gletschern zu senden, die mir im verflossenen Mai eingefallen ist; doch hoffe ich in der Lage zu sein, das in kurzer Zeit nachzuholen.

## Art. XCVII. Über die Schichtung von Bläschen in Eis durch Druck.

[Teil eines Briefes an Prof. Stokes; Proc. Roy. Soc. IX., April 1858.]

In meinem letzten an Sie gerichteten Briefe hob ich hervor, daß die Theorie meines Bruders über die Wirkung des Druckes in Richtung einer Erniedrigung des Gefrierpunktes von Wasser eine vollständige Erklärung mannigfacher bemerkenswerter Erscheinungen abgibt, die mit dem inneren Schmelzen von Eis in Zusammenhang stehen, wie es von Professor Tyndall in der eben veröffentlichten Nummer der Proceedings beschrieben ist. Ich möchte jetzt zeigen, daß die Schichtung des mit Eisbläschen durchsetzten Eises, wie sie in großem Maßstabe an Gletschern beobachtet wird, und das Blättrigwerden klaren Eises, wie es nach der Beschreibung des Dr. Tyndall in handlichen Stücken durch die hydraulische Presse hervorgerufen wird, sich als Folgerungen aus derselben Theorie ergeben.

Stellen wir uns eine kontinuierliche Eismasse mit, Luft oder Wasser enthaltenden, Bläschen in ihr verteilt vor, und diese Masse werde an zwei ihrer gegenüberliegenden Seiten von entgegengerichteten Kräften gedrückt. Dann werden die Bläschen sich allmählich in Schichten ordnen, die gegen die Drucklinien senkrecht sind, wegen des Schmelzens an den Stellen des höchsten Druckes und des Wiedergefrierens von Wasser an den Stellen geringsten Druckes in der Umgebung von Gruppen dieser Höhlungen. Denn je zwei nahezu in der Richtung der Verdichtung liegende Bläschen werden in dem zwischen ihnen befindlichen Eise eine Abschwächung des Druckes bewirken, dagegen eine Verstärkung in dem jedes von ihnen umgebenden, von der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte an weitesten entfernten Eise. Dabei ist der Druck in dem Eise an den abgewandten Seiten der beiden Bläschen etwas unter den Betrag herabgesetzt, der bestände, wenn die Höhlungen mit fester Masse angefüllt wären, wenn auch nicht annähernd so weit wie in dem zwischen den beiden Bläschen befindlichen Eise. Demgemäß wird, wie durch die Theorie meines Bruders und durch meine eigenen Versuche bewiesen wird, die Schmelztemperatur des Eises in der Umgebung eines jeden Bläschens am höchsten sein an seiner dem andern Bläschen nächsten Seite und am niedrigsten an den Orten, die im ganzen am entferntesten von der die Mittelpunkte verbindenden Geraden sich befinden. Folglich wird von diesen letztgenannten Stellen Eis abschmelzen und, wenn jedes Bläschen Wasser enthält, wird zugleich die Trennungswand zwischen ihnen durch Gefrieren nach jeder Seite hin dicker werden. Andererseits werden je zwei Bläschen, die nahezu in einer zur Druckrichtung senkrechten Geraden liegen, darin übereinstimmen, daß sie dem zwischen ihnen befindlichen Träger aus fester Masse einen verstärkten Druck verleihen, und sie werden beide etwas von dem Drucke von denjenigen Teilen ablenken, die zu beiden Seiten einer zur Druckrichtung senkrechten und die Mitten der hervorgehobenen



Bläschen enthaltenden Ebene am weitesten von ihnen entfernt sind. Dies gibt zu einer Druckerhöhung im ganzen in dem die beiden Höhlungen umgebenden Festkörper und nahezu in der zur Druckrichtung senkrechten Ebene Anlaß, obwohl nirgends zu einer so großen wie in dem zwischen den Bläschen liegenden Teile. Demgemäß werden diese beiden Bläschen sich allmählich infolge des Schmelzens des zwischen ihnen befindlichen Eises nach einander hin ausdehnen, und beide werden sich in der durch ihre Mittelpunkte gehenden, zur Druckrichtung senkrechten Ebene durch das Gefrieren der Teile an den von dieser Ebene entferntesten Grenzen abplatteln. In ähnlicher Weise kann gezeigt werden, daß zwei in einer gegen die Richtung der Verdichtung schrägen Geraden liegende Bläschen zu solchen Druckveränderungen in dem sie umgebenden Festkörper Veranlassung geben, daß sie sich durch Schmelzen und Gefrieren schräg gegen einander und von den Teilen ihrer Grenzfläche fort vergrößern, die am weitesten von einer zwischen ihnen befindlichen, zur Druckrichtung senkrechten Ebene entfernt sind.

Also besteht offenbar die allgemeine Tendenz für die Bläschen, sich abzuplatten und in Schichten zu ordnen, die zur Richtung des äußern Druckes senkrecht sind.

Es ist klar, daß die nämliche allgemeine Tendenz auch dann bestehen muß, wenn sich in den Bläschen Luft befindet, wenn auch die resultierende Wirkung in gewissem Maße durch das Herabrinnen von Wasser nach den untersten Teilen jeder Höhlung beeinflusst wird.

Ich meine, man wird finden, daß diese Prinzipien eine hinreichende physikalische Erklärung für den Ursprung der schönen geaderten Struktur abgeben werden, von der Professor Forbes gezeigt hat, daß sie eine wesentliche organische Eigenschaft der Gletscher ist. So sollte die erste Wirkung eines nicht gleichmäßig nach allen Richtungen auf eine Schneemasse wirkenden Druckes nach der Theorie die sein, sie in eine geschichtete Masse von abwechselnd durchsichtigen und Bläschen enthaltenden Eislagen zu verwandeln, die zur Richtung des größten Druckes senkrecht sind. In seinen Bemerkungen „On the Conversion of the Névé into Ice“<sup>1)</sup> sagt Professor Forbes, „daß die Umwandlung in Eis gleichzeitig (und in einem besonders erwähnten Falle identisch) mit der Bildung der blauen Bänder erfolgt, und daß diese Bänder sich dort bilden, wo der Druck am stärksten und wo die differentielle Bewegung der Teile am größten ist, das heißt nahe den Wänden eines Gletschers“. Weiter stellt er fest, daß er sich nach langem Zweifel durch die Anschauung befriedigt fühle, daß die Umwandlung von Schnee in Eis von den Wirkungen des Druckes auf die lose und poröse Struktur des ersteren herrühre, und er verläßt förmlich die Anschauung, daß die blaue Äderung von dem Gefrieren eingesickerten Wassers oder von irgendeiner andern als der knetenden Wirkung des Druckes herrühre. Alle von ihm beschriebenen Beobachtungen scheinen in vollkommener Übereinstimmung mit der oben angezeigten Theorie zu stehen. So sagt er im dreizehnten Briefe: „die blauen Adern bilden sich dort, wo der Druck am intensivsten und die Differentialbewegung der Teile am größten ist“.

Nun fordert die Theorie nicht bloß Druck, sondern sie fordert eine Druckdifferenz in verschiedenen Richtungen zur Erklärung der Schichtung

1) Dreizehnter Brief über Gletscher, Abschnitt (2), datiert vom Dezember 1846.

der Bläschen. Eine Druckdifferenz in verschiedenen Richtungen ruft die von Professor Forbes angeführte „Differentialbewegung“ hervor. Ferner muß die Druckdifferenz in verschiedenen Richtungen so lange bestehen, bis ein sehr beträchtlicher Betrag dieser Differentialbewegung oder Zerrung so weit Platz gegriffen hat, daß er einen merklichen Grad von Schichtung in den Bläschen verursacht. Der absolute Betrag an Zerrung, die irgendein Teil der viskosen Masse erleidet, ist demnach ein Anzeiger für das Fortbestehen des Differentialdruckes, durch dessen fortgesetztes Wirken die blauen Adern entstanden sind. Demgemäß sehen wir ferner, warum sich blaue Adern nicht in einer noch so tiefen Schneemasse ausbilden, die in einer Höhle oder in einer Schlucht in Ruhe verharret.

Was die Richtung betrifft, in der die blauen Adern zu liegen scheinen, so muß diese nach der Theorie ungefähr in der Mitte zwischen den gegen den größten Druck senkrechten Flächen und den Gleitflächen verlaufen, da sie sich genau senkrecht zur Richtung des größten Druckes auszubilden anfangen und da sie vermöge der ihre Bildung begleitenden Differentialbewegung allmählich immer mehr den Seitenflächen des Kanals parallel gestreckt werden, in den der Gletscher eingezwängt ist. Dieser Umstand muß zusammen mit dem vergleichsweise schwachen mechanischen Zustande der weißen Schichten (Bläschen führende Schichten zwischen blauen) meiner Meinung nach bewirken, daß diese weißen Schichten schließlich in Wirklichkeit in „Gleit-“ oder „Reiß“flächen oder Flächen einer Hauptdifferentialbewegung übergehen, was sie nach den Beobachtungen des Professor Forbes zu sein scheinen. Sein erster Ausspruch über den Gegenstand, den er 1842 getan hat, daß nämlich „die blauen Adern gegen die Linien höchsten Druckes senkrecht zu sein scheinen,“ steht jedoch in besserer Übereinstimmung mit ihrem mechanischen Ursprunge nach der von mir jetzt aufgestellten Theorie als die Annahme, sie seien durch die zerreißende Wirkung verursacht, die, wie man gefunden hat, ihnen entlang Platz greift, wenn sie sich gebildet haben. Mir scheint demnach, daß der Schluß Dr. Tyndalls, nach dem die Schichtung der Bläschen durch den Druck in Flächen, die zu den Richtungen größten Druckes senkrecht sind, hinsichtlich des mechanischen Ursprunges der geäderten Struktur richtig ist; andererseits scheinen alle Gründe, sowohl nach der Beobachtung wie nach der mechanischen Theorie, dafür zu sprechen, sich der von Professor Forbes aufgestellten Ansicht über ihre Bedeutung für die Bewegung der Gletscher anzuschließen.

Die mechanische Theorie, die ich als Erklärung der geäderten Struktur des Gletschereises angegeben habe, ist besonders für die Erklärung der in ursprünglich klaren und dann einem differentiellen Drucke ausgesetzten von Dr. Tyndall beobachteten Schichtung der Bläschen verwendbar; dabei war die Bildung der Bläschen selbst, wie ich in meinem letzten Briefe<sup>1)</sup> bemerkt habe, schon vorher durch die von meinem Bruder in den Proceedings für Mai 1857 veröffentlichte Theorie erklärt worden.

Ich meine, die Theorie, die ich oben aufgestellt habe, enthält die richtige Erklärung für eine von Dr. Tyndall, in Verbindung mit der schönen Reihe von Erscheinungen, deren Entstehen durch strahlende Wärme, die

1) Vgl. Proceedings für den 25. Februar 1858.

mittels einer Linse in einem inneren Teile einer klaren Eismasse konzentriert wird, beobachtete bemerkenswerte Tatsache, daß nämlich die Ebenen, in denen sich die Bläschen ausbreiten, allgemein parallel den Seiten sind, wenn die Eismasse, an der man operiert, eine flache Platte ist; denn der Festkörper weicht dann dem „negativen“ inneren Druck, der von der Zusammenziehung des schmelzenden Eises herrührt, am leichtesten in der zu den Seiten senkrechten Richtung. Der sogenannte negative Druck ist demnach am kleinsten, oder, was dasselbe ist, der positive Druck ist am größten in dieser Richtung. Demnach müssen die Bläschen geschmolzenen Eises oder des durch die Zusammenziehung geschmolzenen Eises entstandenen Dampfes, wie ich gezeigt habe, die Tendenz erhalten, sich parallel den Seiten der Platte zu richten.

Die Teilung der Bläsenschichten in den sechsblättrigen Blumen ähnlichen Figuren ist ein Vorgang, der mir noch nicht leicht zu erklären scheint; jedoch kann ich nicht sehen, daß irgendeine der von Dr. Tyndall beschriebenen Erscheinungen als Beweis dafür aufgefaßt werden kann, daß das Eis die mechanischen Eigenschaften eines einachsigen Kristalles besitzt.

[Es scheint mir jetzt äußerst wahrscheinlich, daß Tyndall im Rechte gewesen ist, als er die sechsstrahlige Struktur der molekularen Mechanik eines einachsigen Kristalles zuschrieb. K., 13. Dez. 1903.]

---

## Anhang G.

### Hydrokinetische Lösungen und Beobachtungen, gewöhnliche und Kapillarwellen.

#### Teil I. Über die Bewegung freier Festkörper in einer Flüssigkeit.

Diese Abhandlung beginnt mit dem folgenden Auszuge aus des Verfassers Privatjournal vom 6. Januar 1858.

„Es seien  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  rechtwinklige Komponenten einer Stoßkraft und eines momentanen Kräftepaares, die auf einen Festkörper unveränderlicher Form mit oder ohne eigene Trägheit in einer vollkommenen Flüssigkeit wirken, und es seien  $u, v, w, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$  die Komponenten der hervorgerufenen linearen und angularen Geschwindigkeit. Wenn dann die lebendige Kraft<sup>1)</sup> (das Doppelte der mechanischen Arbeit) der ganzen Bewegung, wie es nicht anders sein kann, gegeben ist durch

$$Q = [u, u] u^2 + [v, v] v^2 + \dots + 2 [v, u] v u + 2 [w, u] w u + \dots \\ + 2 [\tilde{w}, u] \tilde{w} u + \dots,$$

wo die Größen  $[u, u], [v, v]$ , usw. 21 konstante, durch transzendente Analysis aus der Form der Oberfläche des Festkörpers bestimmbare Koeffizienten bezeichnen, die wahrscheinlich nur elliptische Transzendenten enthalten, wenn die Oberfläche eine ellipsoidische ist, und die ferner die Trägheitsmomente des Festkörpers selbst enthalten, so muß sein

$$[u, u] u + [v, u] v + [w, u] w + [\tilde{w}, u] \tilde{w} + [q, u] q + [\sigma, u] \sigma = \mathfrak{X} \text{ usw.} \\ [u, \tilde{w}] u + [v, \tilde{w}] v + [w, \tilde{w}] w + [\tilde{w}, \tilde{w}] \tilde{w} + [q, \tilde{w}] q + [\sigma, \tilde{w}] \sigma = \mathfrak{Q} \text{ usw.}$$

Wenn jetzt eine stetige Kraft  $X, Y, Z$  und ein stetiges Kräftepaar  $L, M, N$ , auf in dem Körper feste Achsen bezogen, angewendet werden, und wenn  $\mathfrak{X} \dots$  usw. die momentane Kraft und das momentane Kräftepaar bezeichnen, die imstande sind, die Bewegung  $u, v, w, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ , die in Wirklichkeit zu irgendeiner Zeit  $t$  besteht, aus dem Ruhezustande hervorzurufen, oder mathematisch ausgedrückt, wenn mit  $\mathfrak{X}$  usw. der Kürze wegen die obigen linearen Funktionen der Bewegungskomponenten bezeichnet werden, so sind die Bewegungsgleichungen die folgenden

---

1) Die Teile I und II stammen aus den Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1870—71, die Teile III und IV aus Briefen an Professor Tait vom August 1871, Teil V stammt aus dem Phil. Mag., November 1871.

Im Teil II ist  $T$ , anstatt  $\frac{1}{2} Q$ , zur Bezeichnung der „mechanischen Arbeit“ oder, wie sie jetzt genannt wird, der „kinetischen Energie“ der Bewegung benutzt.

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\mathfrak{X}}{dt} - \mathfrak{Y}\sigma + \mathfrak{Z}\varrho &= X, \\
 \frac{d\mathfrak{Y}}{dt} - \mathfrak{Z}\tilde{\omega} + \mathfrak{X}\sigma &= Y, \\
 \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} - \mathfrak{X}\varrho + \mathfrak{Y}\tilde{\omega} &= Z; \\
 \frac{d\mathfrak{L}}{dt} - \mathfrak{Y}w + \mathfrak{Z}v - \mathfrak{M}\sigma + \mathfrak{N}\varrho &= L, \\
 \frac{d\mathfrak{M}}{dt} - \mathfrak{Z}u + \mathfrak{X}w - \mathfrak{N}\tilde{\omega} + \mathfrak{L}\sigma &= M, \\
 \frac{d\mathfrak{N}}{dt} - \mathfrak{X}v + \mathfrak{Y}u - \mathfrak{L}\varrho + \mathfrak{M}\tilde{\omega} &= N.
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Drei erste Integrale, wenn

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0 \quad (2)$$

ist, müssen sein und sind offenbar

$$\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = \text{konst.}, \quad (3)$$

das resultierende Moment ist konstant;

$$\mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z} = \text{konst.}, \quad (4)$$

die Resultante des Moments der Momente ist konstant; und

$$u\mathfrak{X} + v\mathfrak{Y} + w\mathfrak{Z} + \tilde{\omega}\mathfrak{L} + \varrho\mathfrak{M} + \sigma\mathfrak{N} = Q = \text{konst.} \quad (5)$$

Diese Gleichungen wurden in einem Briefe an Professor Stokes vom (wahrscheinlich) Januar 1858 mitgeteilt und wurden von Professor Rankine in seiner ersten Abhandlung über Stromlinien, die er der Royal Society of London<sup>1)</sup> im Juli 1863 mitteilte, zitiert.

Sie werden jetzt der Royal Society of Edinburgh mitgeteilt, und der folgende Beweis wird angefügt.

Es sei  $P$  irgendein gegen den Körper fester Punkt, und es seien zu irgendeiner Zeit  $t$  seine Koordinaten in bezug auf im Raume fixierte Achsen  $OX, OY, OZ$ ;  $x, y, z$ . Es seien  $PA, PB, PC$  drei zueinander rechtwinklige, gegen den Körper fixierte Achsen und  $(A, X), (A, Y), \dots$  die Kosinus der neun Winkeln zwischen diesen Achsen und den festen Achsen  $OX, OY, OZ$ .

Es seien ferner die, im Raume festen Achsen parallelen, Komponenten des (fortschreitenden) Impulses<sup>2)</sup> oder, verallgemeinert, des Bewegungsmoments  $\xi, \eta, \zeta$ , und ihre Momente (des drehenden Impulses) um dieselben Achsen  $\lambda, \mu, \nu$ ,

1) Diese Gleichungen werden sehr passend als die Eulerschen Gleichungen der Bewegung bezeichnet. Sie entsprechen genau den Eulerschen Gleichungen für die Rotation eines starren Körpers und schließen sie als besonderen Fall ein. Da Euler der erste gewesen zu sein scheint, der Bewegungsgleichungen in ihrer Abhängigkeit von Komponenten der Geschwindigkeit und Kraft, bezogen auf gegen den bewegten Körper feste Achsen, angegeben hat, erscheint es nicht bloß passend, sondern gerecht, als „Eulersche Gleichungen“ alle Bewegungsgleichungen zu nennen, in denen die Beziehungslinien, gleichviel ob für Lage, oder Geschwindigkeit, oder Moment der Momente, oder Kraft- oder Kräftepaar, sich mit dem Körper oder den Körpern, deren Bewegung behandelt wird, bewegen.

2) Vgl. „Vortex Motion“, § 6, Trans. Roy. Soc. Edinb. (1868).

so daß, wenn  $X, Y, Z$  die Komponenten einer auf den Festkörper in einer durch  $P$  gehenden Geraden wirkenden Kraft und  $L, M, N$  die Komponenten eines Kräftepaares sind, wir erhalten

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= X, \quad \frac{d\eta}{dt} = Y, \quad \frac{d\xi}{dt} = Z; \\ \frac{d\lambda}{dt} &= L + Zy - Yz, \quad \frac{d\mu}{dt} = M + Xz - Zx, \quad \frac{d\nu}{dt} = N + Yx - Xy. \end{aligned} \right\} (6)$$

Es seien  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  die Komponenten und Momente des Impulses in bezug auf die Achsen  $PA, PB, PC$ , die sich mit dem Körper bewegen. Dann ist

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \mathfrak{X}(A, X) + \mathfrak{Y}(B, X) + \mathfrak{Z}(C, X), \\ \eta &= \mathfrak{X}(A, Y) + \mathfrak{Y}(B, Y) + \mathfrak{Z}(C, Y), \\ \xi &= \mathfrak{X}(A, Z) + \mathfrak{Y}(B, Z) + \mathfrak{Z}(C, Z); \\ \lambda &= \mathfrak{L}(A, X) + \mathfrak{M}(B, X) + \mathfrak{N}(C, X) + \mathfrak{Z}y - \mathfrak{Y}z, \\ \mu &= \mathfrak{L}(A, Y) + \mathfrak{M}(B, Y) + \mathfrak{N}(C, Y) + \mathfrak{X}z - \mathfrak{Z}x, \\ \nu &= \mathfrak{L}(A, Z) + \mathfrak{M}(B, Z) + \mathfrak{N}(C, Z) + \mathfrak{Y}x - \mathfrak{X}y. \end{aligned} \right\} (7)$$

Nun mögen die festen Achsen  $OX, OY, OZ$  mit der Lage der beweglichen Achsen  $PA, PB, PC$  zur Zeit  $t$  zusammenfallend gewählt werden, dann haben wir demgemäß

$$\left. \begin{aligned} x &= 0, \quad y = 0, \quad z = 0; \\ \frac{dx}{dt} &= u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w; \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{aligned} (A, X) &= (B, Y) = (C, Z) = 1, \\ (A, Y) &= (A, Z) = (B, X) = (B, Z) = (C, X) = (C, Y) = 0; \\ \frac{d(A, Y)}{dt} &= \sigma, \quad \frac{d(B, X)}{dt} = -\sigma, \quad \frac{d(C, X)}{dt} = \varrho; \\ \frac{d(A, Z)}{dt} &= -\varrho, \quad \frac{d(B, Z)}{dt} = \tilde{\omega}, \quad \frac{d(C, Y)}{dt} = -\tilde{\omega}. \end{aligned} \right\} (9)$$

Benutzt man (7), (8) und (9) in (6), so findet man (1).

Den einen Hauptgegenstand dieser Untersuchung bildete die Klarlegung der mechanischen Wirkungen der helikoidalen Eigenschaften (nämlich der rechts- oder linksgewundenen Asymmetrie). Der Fall vollkommener Isotropie mit helikoidaler Eigenschaft ist der, in dem die Koeffizienten in dem quadratischen Ausdrücke  $Q$  die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} [u, u] &= [v, v] = [w, w]; \text{ (der gemeinsame Betrag mag } m \text{ sein),} \\ [\tilde{\omega}, \tilde{\omega}] &= [\varrho, \varrho] = [\sigma, \sigma]; \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \\ [u, \tilde{\omega}] &= [v, \varrho] = [w, \sigma]; \quad " \quad " \quad " \quad " \quad h \quad " \\ [v, w] &= [w, u] = [u, v] = 0; \quad [\varrho, \sigma] = [\sigma, \tilde{\omega}] = [\tilde{\omega}, \varrho] = 0 \\ \text{und} \\ [u, \varrho] &= [u, \sigma] = [v, \sigma] = [v, \tilde{\omega}] = [w, \tilde{\omega}] = [w, \varrho] = 0; \end{aligned} \right\} (10)$$

so daß die Formel für  $Q$  ist

$$Q = m(u^2 + v^2 + w^2) + n(\tilde{\omega}^2 + \varrho^2 + \sigma^2) + 2h(u\tilde{\omega} + v\varrho + w\sigma). \quad (11)$$

Für diesen Fall gehen demnach die Eulerschen Gleichungen (1) über in

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d(mu + h\tilde{\omega})}{dt} - m(v\sigma - w\varrho) = X, \text{ usw.} \\ \text{und} & \frac{d(n\tilde{\omega} + hu)}{dt} = L, \text{ usw.} \\ & [\text{Zu beachten: Die Beziehungssachsen sind} \\ & \text{gegen den Körper fest.}] \end{aligned} \right\} \quad (11')$$

Insofern aber die Gleichungen (11') ungeändert bleiben, wenn die Beziehungssachsen in drei beliebige andere zueinander rechtwinklige durch  $P$  gehende Geraden umgewandelt werden, läßt sich leicht direkt aus (6), (7) und (9) zeigen, daß, wenn wir unter Abänderung der Bezeichnung nunmehr  $u, v, w$ , die zu drei festen gegeneinander rechtwinkligen Geraden parallelen Komponenten der Geschwindigkeit von  $P$  und  $\tilde{\omega}, \varrho, \sigma$  die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Körpers um dieselben Geraden nennen, wir erhalten

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d(mu + h\tilde{\omega})}{dt} = X \text{ usw.,} \\ \text{und} & \frac{d(n\tilde{\omega} + hu)}{dt} + h(\sigma v - \varrho w) = L \text{ usw.} \\ & [\text{Zu beachten: Die Beziehungssachsen sind} \\ & \text{im Raume fest},] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

die geeigneter sind als die Eulerschen Gleichungen.

Die Integration dieser Gleichungen bietet, wenn weder eine Kraft noch ein Kräftepaar auf den Körper wirkt ( $X=0$  usw.,  $L=0$  usw.), keine Schwierigkeit; man sieht aber leicht (nach § 21 „Vortex Motion“), daß das Resultat der Integration darin besteht, daß, wenn der Impuls sowohl fortschreitend als drehend ist, der Punkt  $P$ , um den herum der Körper isotrop ist, sich gleichförmig in einem Kreise oder in einer Spirale so bewegt, daß er in einem konstanten Abstände von der „Achse des Impulses“ bleibt, und daß die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit um die drei festen zueinander rechtwinkligen Achsen konstant sind.

Ein isotropes Helikoid (ein Chiroid, wie ich es nenne; Zwanzigste Vorlesung, § 204) kann hergestellt werden, indem man an die Oberfläche einer Kugel an geeigneten Stellen vorstehende Flügel anheftet, beispielsweise indem man jeden dieser Flügel unter  $45^\circ$  gegen die Mitten von 12 Quadranten anbringt, die zu drei beliebigen größten Kreisen gehören, die die Kugelfläche in acht Quadrantendreiecke teilen. Fertigt man die Kugel und die Flügel aus leichtem Papier, so kann ein Körper erhalten werden, der starr und leicht genug ist, bei seinen Bewegungen durch die Luft die Bewegungen eines isotropen Helikoids in einer inkompressiblen Flüssigkeit zu veranschaulichen. Allerdings werden zweifellos vermöge der Viskosität Erscheinungen gefunden werden, die nicht aus der vorliegenden Untersuchung abzuleiten sind.

Teil II.<sup>1)</sup>

Teil III. Der Einfluß reibungslosen Windes auf Wellen in Wasser, das als reibungslos vorausgesetzt wird (Brief an Professor Tait, vom 16. August 1871).<sup>2)</sup>

Wenn man  $OX$  vertikal abwärts gerichtet und  $OY$  horizontal annimmt, sei

$$x = h \sin n(y - \alpha t) \quad (1)$$

die Gleichung eines Schnittes des Wassers zur Zeit  $t$  durch eine zu den Wellenrücken senkrechte Ebene.  $h$ , die halbe Wellenhöhe, sei sehr klein im Vergleich mit  $\frac{2\pi}{n}$  (der Wellenlänge). Dann ist die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche

$$\frac{dx}{dt} = -n\alpha h \cos n(y - \alpha t). \quad (2)$$

Dies muß (da  $h$  sehr klein ist) der Betrag von  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  im Punkte  $(0, y)$  sein, wenn mit  $\varphi$  das Geschwindigkeitspotential in irgendeinem Punkte  $(x, y)$  des Wassers bezeichnet wird. Nun hat man

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

und da  $\varphi$  eine periodische Funktion von  $y$  und eine solche Funktion von  $x$  sein muß, die (da wir das Wasser als unendlich tief voraussetzen) Null wird, wenn  $x = \infty$  ist, kann  $\varphi$  nur die Form haben

$$\varphi = P \cos(ny - \epsilon) e^{-nx},$$

wo  $P$  und  $\epsilon$  von  $x$  und  $y$  unabhängig sind. Bildet man nun  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , setzt darauf  $x = 0$  und vergleicht diese Größe mit (2), so erhält man

$$-Pn \cos(ny - \epsilon) = -n\alpha h \cos(ny - \alpha t)$$

und demgemäß  $P = \alpha h$  und  $\epsilon = \alpha t$ , so daß man findet

$$\varphi = \alpha h e^{-nx} \cos n(y - \alpha t). \quad (3)$$

Dies folgt — das ist zu beachten — einfach aus den Annahmen, daß das Wasser keine Reibung besitzt, daß es sich ursprünglich in Ruhe befunden hat und daß sich seine Oberfläche in der in Gleichung (1) beschriebenen Weise bewegt.

Wenn die Luft eine reibungslose Flüssigkeit wäre, die sich ohne Rotation mit einer konstanten Geschwindigkeit  $V$  in Höhen über dem Wasser (also Beträgen  $-x$ ), die die Wellenlänge beträchtlich übersteigen, bewegt, würde ihr Geschwindigkeitspotential, das sich auf dieselbe Weise finden läßt, sein

$$\psi = (V - \alpha) h e^{nx} \cos n(y - \alpha t) + Vy. \quad (4)$$

1) Teil II habe ich fortgelassen; er ist ohne die Abhandlung „Vortex Motion“ völlig unverständlich und kommt übrigens auch nicht für die Untersuchungen des vorliegenden Werkes in Betracht. D. H.

2) Hierzu sei auf die bekannten Arbeiten von Helmholtz verwiesen. D. H.



Bezeichnet man jetzt mit  $q$  die resultierende Geschwindigkeit in irgendeinem Punkte  $(x, y)$  der Luft und läßt unendlich kleine Größen von der Ordnung  $(nh)^2$  außer acht, so ergibt sich

$$\frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}V^2 - V(V - \alpha)nh e^{nx} \sin n(y - \alpha t). \quad (5)$$

Nun finden wir, wenn mit  $p$  der Druck an irgendeinem Punkte  $(x, y)$  in der Luft und mit  $\sigma$  die Dichte der Luft bezeichnet wird, auf Grund der allgemeinen Gleichung für den Druck in einer ohne Rotation sich bewegenden Flüssigkeit

$$C - p = \sigma \left( \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{2}q^2 - gx \right). \quad (6)$$

Benutzt man in dieser Gleichung (4) und (5) und setzt  $C = \frac{1}{2}\sigma V^2$ , so folgt

$$p = \sigma \{ nh(V - \alpha)^2 e^{nx} \sin n(y - \alpha t) + gx \}. \quad (7)$$

Ähnlich erhält man, wenn mit  $p'$  der Druck in irgendeinem Punkte  $(x, y)$  des Wassers bezeichnet wird, da in diesem Falle  $\frac{1}{2}q^2$  sehr klein ist,

$$-p' = \frac{d\varphi}{dt} - gx = nh\alpha^2 e^{-nx} \sin n(y - \alpha t) - gx; \quad (8)$$

die Dichte des Wassers ist hier als Einheit gewählt.

Jetzt sei  $T$  die Oberflächenspannung der Grenzfläche zwischen Luft und Wasser. Die Krümmung dieser Fläche, die  $\frac{d^2x}{dy^2}$  ist, ergibt sich aus (1) abgeleitet zu

$$-n^2h \sin n(y - \alpha t). \quad (9)$$

Demgemäß ist in jedem Punkte der Wasseroberfläche<sup>1)</sup>

$$p - p' = Tn^2h \sin n(y - \alpha t). \quad (10)$$

Die Gleichungen (7) und (8) ergeben aber, wenn wir in ihnen für  $x$  den durch (1) bestimmten Wert einsetzen (der, da  $h$  unendlich klein ist, außer in den letzten Gliedern, gleich Null angenommen werden darf),

$$p - p' = h \{ n[\sigma(V - \alpha)^2 + \alpha^2] - g(1 - \sigma) \} \sin n(y - \alpha t). \quad (11)$$

Also folgt aus der Vergleichung mit (10)

$$n[\sigma(V - \alpha)^2 + \alpha^2] - g(1 - \sigma) = Tn^2 \quad (12)$$

Setzt man

$$w = \sqrt{\frac{g(1 - \sigma) + Tn^2}{(1 + \sigma)n}}, \quad (13)$$

welche Größe (da sie der Wert von  $\alpha$  für  $V = 0$  ist) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen ohne Wind bedeutet, wenn die Wellenlänge  $\frac{2\pi}{n}$  ist, dann geht (12) über in

$$\frac{\alpha^2 + \sigma(V - \alpha)^2}{1 + \sigma} = w^2.$$

1) Nach den bekannten Lehren der Kapillaritätstheorie. Übrigens steht im Original durch Druckversehen in (9), (10), (11) statt  $y$  das  $x$ . D. H.

Hieraus folgt

$$\alpha^2 = (1 + \sigma) w^2 - \sigma (V - \alpha)^2. \quad (14)$$

So ist  $\alpha$ , die Geschwindigkeit der Wellen, bestimmt, wenn Wind von der Geschwindigkeit  $V$  in der Richtung ihres Fortschreitens herrscht. Der Ausdruck zeigt, daß für eine gegebene Wellenlänge  $2\pi/n$  die größte Wellengeschwindigkeit

$$w \sqrt{1 + \sigma}$$

ist<sup>1)</sup>, die erreicht wird, wenn dies zugleich die Geschwindigkeit des Windes ist. Es ist interessant zu sehen, daß bei einem Winde, der mit irgendeiner andern Geschwindigkeit als der der Wellen in Richtung der Wellen weht, deren Geschwindigkeit kleiner ist. Beispielsweise ist die Wellengeschwindigkeit ohne Wind, nämlich  $w$ , um annähernd  $\frac{1}{2}\sigma$  von  $w$  (oder etwa  $1/1650$ ) kleiner als die Geschwindigkeit bei einem Winde, der in Richtung der Wellen mit ihrer Geschwindigkeit weht. Die Erklärung hierfür liegt offenbar darin, daß wenn die Luft ohne Bewegung gegen die Wellenberge und -Täler ist, ihre Trägheit nicht ins Spiel gerufen wird. Löst man (14) als quadratische Gleichung nach  $\alpha$  auf, so erhält man

$$\alpha = \frac{\sigma V}{1 + \sigma} \pm \left( w^2 - \frac{\sigma V^2}{(1 + \sigma)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma V}{1 + \sigma} \pm w \left( 1 - \sigma \frac{\left( \frac{V}{w} \right)^2}{(1 + \sigma)^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Dieses Resultat führt zu den folgenden Schlüssen:

$$1. \text{ Wenn } V/w = \sqrt{\frac{1 + \sigma}{\sigma}} : 28,7 \times \left( 1 + \frac{1}{1650} \right),$$

ist einer von den Werten von  $\alpha$  Null, das heißt, stehenden Riefelungen im Wasser von der Wellenlänge  $2\pi/n$  wird das Gleichgewicht gehalten durch Wind von der Geschwindigkeit

$$w \sqrt{[(1 + \sigma)/\sigma]}.$$

Allein das Gleichgewicht ist unstabil.<sup>2)</sup>

$$2. \text{ Wenn } V/w = \frac{1 + \sigma}{\sqrt{\sigma}} : 28,7 \times \left( 1 + \frac{1}{825} \right),$$

sind die beiden Werte von  $\alpha$  einander gleich.

$$3. \text{ Wenn } V/w > \frac{1 + \sigma}{\sqrt{\sigma}},$$

sind beide Werte von  $\alpha$  imaginär, und demnach bläst der Wind in eine tote Drift Wellen von der Länge  $2\pi/n$  oder kürzere.

Schauen wir auf (13) zurück, so sehen wir, daß der Ausdruck nach  $n$  einen Minimumwert für  $w$  liefert, der gleich ist

1) Folgt sofort aus (12), wobei zugleich erhellt, daß alsdann  $V = \alpha$  ist, wie im Text behauptet wird. D. H.

2) Der andere Wert von  $\alpha$  ist  $2w \sqrt{\frac{\sigma}{1 + \sigma}}$  oder  $2V \frac{\sigma}{1 + \sigma}$ , also etwa  $\frac{1}{400} V$ , also ebenfalls sehr unbedeutend. D. H.

$$\sqrt[2]{\frac{g T (1 - \sigma)}{1 + \sigma}}, \text{ bei } n = \sqrt{\frac{g (1 - \sigma)}{T}}. \quad (16)$$

Demgemäß würde Wasser mit einer ebenen Niveaufläche, auch wenn die Luft ohne Reibung wäre, instabil sein, wenn die Geschwindigkeit des Windes größer ist als

$$\sqrt[2]{\frac{g T (1 - \sigma^2)}{\sigma}}. 1) \quad (16')$$

W. T.

Teil IV. (Brief an Professor Tait vom 23. August 1871.)

Als Kräuselung definieren wir Wellen auf dem Wasser, deren Länge  $< 2\pi \sqrt[2]{\frac{T'^2}{g'}}$  ist, wo

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} g' &= g \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \\ T' &= \frac{T}{1 + \sigma} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

( $\sigma = 0,00121$ ) ist. Von solchen Kräuselungen sieht man stets ein vortreffliches Muster an der Vorderfläche irgendeines Festkörpers, der die Wasseroberfläche durchschneidet und sich horizontal mit beliebiger Geschwindigkeit, schnell oder langsam, bewegt (wenn die Geschwindigkeit nicht kleiner als etwa 23 cm in der Sekunde ist). Die Kräuselungslänge ist die kleinere Wurzel der Gleichung

$$\frac{2\pi}{\lambda} T' + \frac{\lambda}{2\pi} g' = w^2, \quad (18)$$

in der  $w$  die Geschwindigkeit des Festkörpers bedeutet. Der letztere mag ein Segelschiff oder ein Ruderboot, eine vertikal gehaltene und horizontal fortbewegte Stange, ein elfenbeinerner Federhalter oder eine Federmesserklinge mit der Kante oder der Flachseite voran oder (am besten) eine Angelschnur sein, die durch ein unter Wasser herabhängendes Bleigewicht annähernd vertikal gehalten und dabei etwa eine halbe Meile (engl.) in der Stunde mit einem sanftgehenden Schiffe fortgeführt wird. Die Angelschnur zeigt beide Wurzeln in bewunderungswürdiger Weise; vorn Kräuselungen (Rippungen), hinten Wellen derselben Geschwindigkeit ( $\lambda$  ist die größere Wurzel derselben Gleichung). Sollte ich das Glück haben, daß wieder Windstille eintritt, so werde ich versuchen, eine Zeichnung des ganzen Musters zu gewinnen, die den Übergang von den Rippungen in Wellen an den Seiten zeigt. Wenn die Geschwindigkeit, mit der die Angelschnur fortgezogen wird, kritischer Geschwindigkeit

$$\sqrt[2]{2 g' T'}$$

sich nähert, die die kleinste Geschwindigkeit einer Welle ist, nämlich (vgl. Teil V weiter unten) für reines Wasser 23 Zentimeter in der Sekunde (oder  $\frac{1}{2,29}$  See-

1) Es muß wohl heißen  $\sqrt[2]{\frac{g T (1 - \sigma^2)}{1 + \sigma}}$ . D. H.

2) Diese beträgt für reines Wasser 1,7 cm. (Vgl. Teil V.)

meile in der Stunde), dann werden die Kräuselwellen an der Vorderfläche länger und werden weniger krumm, und die Wellen hinter dem Schwimmkörper werden kürzer, bis bei der kritischen Geschwindigkeit Wellen und Kräuselungen nahezu gleich erscheinen und ihre Grate nahezu in Geraden verlaufen, die gegen die Bewegungsrichtung senkrecht sind. (Dies ist Beobachtung.) Es scheint mir, daß die kritische Geschwindigkeit mit einiger Genauigkeit durch Versuch sich in folgender Weise bestimmen läßt (vgl. Teil V weiter unten): —

Man beachte, daß je kürzer die Wellenlänge der Kräuselungen ist, desto größer ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und daß die bewegende Kraft ihrer Bewegung teilweise Schwerkraft, hauptsächlich aber Kohäsion ist; und bei sehr kurzen Längen ist sie fast ausschließlich Kohäsion, also dieselbe Kraft, die das Zittern eines Tautropfens erzeugt. Die geringste Geschwindigkeit reibungsloser Luft, die ein Kräuseln in reibungslosem Wasser erzeugen kann, ist (16') oben

660 Zentimeter in der Sekunde

(nämlich  $\frac{1 + \sigma}{\sqrt{\sigma}} \times \text{kleinste Wellengeschwindigkeit}$ )

= 12,8 Seemeilen in der Stunde.

Die Beobachtung zeigt, daß die See bereits durch Wind von einer weit kleineren Geschwindigkeit gekräuselt wird. Ein derartiges Kräuseln rührt demnach von der Viskosität der Luft her.

W. T.

#### Nachschrift zu Teil IV. (17. Oktober 1871.)

Der Einfluß einer Viskosität veranlaßt einen größeren Druck an der Vorderseite als an der Rückseite eines sich gegen eine Flüssigkeit gleichförmig bewegendes Festkörpers. Ein symmetrisch gebauter Festkörper, beispielsweise eine Kugel, die sich gleichförmig in einer reibungslosen Flüssigkeit bewegt, erfährt eine Druckzunahme an der Vorderfläche und gleicherweise eine solche im Rücken und eine Druckverminderung in einer Zwischenzone. Die Beobachtung (wie beispielsweise Herrn J. R. Napiers Versuche in seinem „pressure log“ zur Messung der Geschwindigkeit von Schiffen und Versuche von Joule und mir<sup>1)</sup> über den Druck an verschiedenen Punkten einer dem Winde ausgesetzten festen Kugel) zeigen, daß der Druck manchmal nicht verstärkt, sondern an der Hinterseite des Festkörpers eines in einer wirklichen Flüssigkeit, wie Luft oder Wasser, bewegten Festkörpers in Wirklichkeit abgeschwächt ist. Wind, der durch Grate und Höhlungen eines Festkörpers (etwa die Furchen eines Feldes) bläst, muß wegen der Viskosität der Luft mit größerer Kraft gegen die ihm zugewendeten Abdachungen als gegen die abgewendeten drücken. Demgemäß würde, wenn ein regelmäßiger Wellenzug auf See aus einem Festkörper bestände, der sich mit der tatsächlich vorhandenen Geschwindigkeit der Wellen bewegt, der Wind auf ihn Arbeit leisten, oder er würde auf den Wind Arbeit leisten, je nachdem die Geschwindigkeit des Windes größer oder kleiner ist als die der Wellen. Dieser Fall liefert keine genaue Analogie zum Einflusse des Windes auf Wellen, da die Oberflächenteil-

1) „Thermal Effects of Fluids in Motion“, Trans. Roy. Soc. 1860; Phil. Mag. 1860, Bd. XX, S. 552.

chen des Wassers sich nicht mit der Geschwindigkeit der Wellen vorwärts bewegen, wie es die des gefurchten Festkörpers tun sollen. Immerhin darf erwartet werden, daß, wenn die Geschwindigkeit des Windes die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der (mit ihm gehenden) Wellen übersteigt, ein größerer Druck an der hinteren Abdachung als an der vorderen bestehen wird, und umgekehrt, daß, wenn die Geschwindigkeit der Wellen die des Windes übersteigt oder in der dem Winde entgegengesetzten Richtung liegt, ein größerer Druck an den vorderen als an den hinteren Abdachungen der Wellen herrschen wird. Im ersten Falle wird das Bestreben bestehen, die Welle zu verstärken, im zweiten sie abzuschwächen. Die Frage, ob eine Wellenreihe von einer bestimmten Höhe sich allmählich bei einer gewissen Windstärke verstärkt, oder sich allmählich abschwächt, wenn der Wind nicht stark genug ist, sie zu unterhalten, kann nicht ohne weiteres entschieden werden.<sup>1)</sup> Die Untersuchung der Arbeit, die erforderlich ist, eine Welle<sup>2)</sup> entgegen der Viskosität des Wassers zu unterhalten, durch Stokes führt auf den Weg zu einer wichtigen und gedankenreichen Behandlung jener Frage. Aber keine theoretische Lösung und nur sehr wenig experimentelle Untersuchungen können für die Überwindungen der durch die Spitzen der Wellen wehenden Luft herangezogen werden, von denen, da sie einen größeren Druck an den hinteren als an den vorderen Abdachungen veranlassen, der Einfluß des Windes auf das die Unterstützung und Unterhaltung von Wellen hauptsächlich, wenn nicht vollständig bestimmt wird.

Vor drei Tagen wurde durch Herrn Froude meine Aufmerksamkeit auf Scott Russells Bericht über Wellen (British Association, York, 1844) gelenkt, und ich finde in ihm eine bemerkenswerte Erläuterung oder einen Hinweis auf den leitenden Gedanken der Theorie des Windeinflusses auf Wellen, nach der die Geschwindigkeit des Windes die der Wellen übersteigen muß, in den folgenden Sätzen: „Ein Beobachter (der die Oberfläche eines Meeres oder eines großen Sees während der Folge von Zuständen eines von der Ruhe bis zum Sturme ansteigenden Windes verfolgt), beginne seine Beobachtungen bei vollkommener Stille, wenn die Oberfläche des Wassers glatt ist und wie ein Spiegel die Bilder der umgebenden Gegenstände wiederspiegelt. Diese Erscheinung wird auch nicht durch eine leichte Bewegung der Luft beeinflusst werden, und eine Geschwindigkeit, die kleiner ist als eine halbe (See-) Meile in der Stunde ( $8\frac{1}{2}$  Zoll in der Sekunde) stört die Glätte der spiegelnden Fläche nicht merklich. Man beobachtet wohl, daß ein leichter, längs der Oberfläche von Punkt zu Punkt flatternder Zephyr die Vollkommenheit des Spiegels für einen Augenblick zu stören scheint, aber nach seinem Vorüberziehen bleibt die Fläche so glatt zurück, wie sie vorher war. Wenn die Luft eine Geschwindigkeit von etwa einer (See-) Meile in der Stunde besitzt, verliert die Wasseroberfläche teilweise ihre Fähigkeit, deutlich zu spiegeln; die Beobachtung in diesem Zustande zeigt, daß die Verminderung der Spiegelungsfähigkeit von dem Vorhandensein jener kleinen Furchungen der Oberflächenhaut herrührt, die Wellen dritter Ordnung bilden. Diese Furchungen rufen auf der Oberfläche des Wassers eine Wirkung hervor, die derjenigen sehr ähnlich ist,

1) Vgl. die Arbeiten von Helmholtz über „Wind und Wellen“. Abhandlungen, Bd. 3, S. 309 ff. D. H.

2) Trans. Camb. Phil. Soc. 1851 („Effect of Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums“, § V).

die wir an Glasscheiben sehen, die zur Aufhebung ihrer Durchsichtigkeit gefurcht werden, zugleich hindern diese Furchungen das Auge daran, Formen in einer beträchtlichen Tiefe zu unterscheiden, und vermindern die Vollkommenheit von im Wasser gespiegelten Formen. Anglern ist diese Erscheinung wohlbekannt, indem sie die Leichtigkeit, mit der der Fisch seinen Nachsteller sieht, vermindert. Dieser erste Störungsgrad besitzt die unterscheidende Eigentümlichkeit, daß die Erscheinungen an der Oberfläche fast gleichzeitig mit dem Aufhören der störenden Ursache verschwinden, so daß eine Stelle, die gegen die direkte Einwirkung des Windes geschützt ist, glatt bleibt, da die Wellen dritter Ordnung nicht imstande sind, sich von selbst nach einer irgendwie beträchtlichen Entfernung hin zu bewegen, außer wenn sie unter der dauernden Wirkung der ursprünglichen störenden Kraft stehn. Dieser Zustand ist das Anzeichen einer gegenwärtig wirkenden Kraft, nicht einer solchen, die bereits vergangen ist. Solange sie besteht, gibt sie dem Wasser jene tiefe Schwärze, die der Segler gewohnt ist, als ein Anzeichen für das Vorhandensein von Wind und oft als einen Vorboten von mehr zu betrachten.

Der zweite Zustand einer Wellenbewegung kann beobachtet werden, wenn die Geschwindigkeit des auf den glatten Wasserspiegel wirkenden Windes auf zwei (See-)Meilen in der Stunde angewachsen ist. Dann beginnen kleine Wellen sich gleichförmig über der ganzen Fläche des Wassers zu erheben; es sind das Wellen der zweiten Ordnung, und sie bedecken das Wasser mit bedeutender Regelmäßigkeit. Kapillare Wellen sind von den Graten dieser Wellen verschwunden, man findet sie aber in den Hohlräumen zwischen den Wellen und an den vorderen Abdachungen der Wellen in ihrem Bestande erhalten. Die Regelmäßigkeit der Verteilung der sekundären Wellen auf der Fläche ist bemerkenswert; sie beginnen mit etwa einem Zoll Amplitude und ein paar Zoll Länge; sie vergrößern sich, wenn die Geschwindigkeit oder Dauer der Welle zunimmt; nach und nach vereinigen sich zusammenstoßende; die Grate wachsen, und wenn der Wind sich verstärkt, werden die Wellen gehöhnt und getieft und bilden regelmäßige Wellen zweiter Ordnung. Sie vergrößern ihre Dimensionen weiter; die Tiefe, bis zu der sie die Flut aufreithen, nimmt gleichzeitig mit ihrer Größe zu, und so bedeckt sich die Fläche weithin mit Wellen von nahezu gleicher Größe.“

Die „kapillaren Wellen“ oder „Wellen dritter Ordnung“, die von Russell erwähnt werden, sind das, was ich in Unkenntnis seiner Beobachtungen in diesem Zweige seines Gegenstandes als Riefelungen, Kräuselungen bezeichnet habe. Die Geschwindigkeit von  $8\frac{1}{2}$  Zoll ( $21\frac{1}{2}$  Zentimeter) in der Sekunde ist genau die Geschwindigkeit, die er (da auf sie durch seine Beobachtungen hingewiesen war) für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der geradgratigen Wellen gewählt hat, die schräg von den beiden Seiten der Bahn eines sich mit Geschwindigkeiten zwischen 12 und 36 Zoll in der Sekunde bewegenden kleinen Körpers abströmen, und sie stimmt merkwürdig mit einer theoretischen und experimentellen Bestimmung der absolut kleinsten Wellengeschwindigkeit (23 Zentimeter in der Sekunde; vgl. Teil V) überein. Russell hat nicht explizite hervorgehoben, daß seine kritische Geschwindigkeit von  $8\frac{1}{2}$  Zoll in der Sekunde eine absolut kleinste Fortpflanzungsgeschwindigkeit war. Allein die Anschauung von einer kleinsten Wellengeschwindigkeit kann seiner Meinung nicht ferngelegen haben, wenn er  $8\frac{1}{2}$  Zoll in der Sekunde als den schwächsten Wind hinstellt, der Kräuselungen zu unterhalten vermag. In einem Artikel,

der in der Nature vom 26. d. M. erscheinen soll, habe ich Auszüge aus dem Berichte Russells mitgeteilt (einschließlich eines Teils einer Anführung, die er aus den Veröffentlichungen von Poncelet und Lesbros in den Memoiren des Französischen Instituts für 1829 macht), die zeigen, wie weit meine Beobachtungen über Kräuseln von ihm bereits vorweggenommen waren. Ich brauche hier nichts weiter zu sagen, als daß diese Vorwegnahmen keinerlei Hinweise auf die mechanische Theorie enthalten, die ich aufgestellt habe, und daß mir der Gegenstand neu war, als die Teile III, IV und V der vorliegenden Mitteilung niedergeschrieben wurden.<sup>1)</sup>

#### Teil V. Wellen unter dem Einflusse zugleich der Schwerkraft und der Kohäsion, jedoch ohne Wind.

Wir lassen die Frage nach dem Wind beiseite, fassen (13) ins Auge und führen in diese Gleichung die Bezeichnung aus (16), (17) ein. Sie geht dann über in

$$w^2 = \frac{g'}{n} + T'n. \quad (19)$$

Dieses gibt einen kleinsten Wert

$$\begin{aligned} w^2 &= 2 \sqrt{g'T'}, \\ \text{für } n &= \sqrt{\frac{g'}{T'}} \end{aligned} \quad (20)$$

Bei der Anwendung dieser Formel auf den Fall von Luft und Wasser dürfen wir den Unterschied zwischen  $g$  und  $g'$ , da der Wert von  $\sigma$  etwa  $\frac{1}{20}$  ist, vernachlässigen, ebenso den zwischen  $T$  und  $T'$ , obwohl zu beachten ist, daß eigentlich  $T'$  und nicht  $T$  gemeinhin aus den Versuchen über kapillare Anziehung berechnet wird. Nach Ermittlung von Gay-Lussac scheint es, daß der Wert von  $T'$  etwa 0,074 Gramm Gewicht für das Zentimeter beträgt, das heißt in der kinetischen, auf das Gramm als Masseneinheit begründeten Krafteinheit ausgedrückt

$$T' = g \times 0,074.$$

Um für die Wasserdichte die Einheit zu erhalten (Wasser, das die untere Flüssigkeit sein soll), müssen wir ein Zentimeter als Längeneinheit wählen. Mit einer Sekunde als Zeiteinheit ist dann (durchschnittlich)  $g = 982$  und (18) ergibt

$$w = \sqrt{982 \left( \frac{1}{n} + 0,074 \times n \right)}$$

als Wellengeschwindigkeit in Zentimeter für die Sekunde, die einer Wellenlänge  $\frac{2\pi}{n}$  entspricht. Wenn  $\frac{1}{n} = \sqrt{0,073} = 0,27$  (also wenn die Wellenlänge 1,7 Zentimeter beträgt), hat die Geschwindigkeit zufolge (20) einen kleinsten Wert von 23 Zentimeter in der Sekunde.

Der Teil der obigen Theorie, der sich auf die Wirkung der Kohäsion auf Flüssigkeitswellen bezieht, fiel mir ein, als ich jüngst eine Reihe sehr

1) Man vergleiche auch das schöne Werk von W. Weber: „Wellenlehre“, 1825, namentlich § 130 ff. D. H.

kurzer Wellen beobachtet hatte, die direkt vor einem langsam sich im Wasser bewegendem Körper gleichmäßig fortschritten, und eine andere Reihe beträchtlich längerer, die gleichmäßig in seinem Kielwasser folgten. Die beiden Wellenreihen schritten beide in demselben Maße wie der bewegte Körper fort; und so erkannte ich, daß es zwei verschiedene Wellenlängen gab, die dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit lieferten. Wenn die Geschwindigkeit der Bewegung des Körpers im Wasser zunimmt, werden die ihm vorangehenden Wellen kürzer, und die in seinem Kielwasser werden länger. Dicht vor dem Vordersteven eines sich mit einer Geschwindigkeit von nicht mehr als zwei oder drei Knoten<sup>1)</sup> in recht glattem Wasser bewegendes Schiffes wird die Oberfläche des Wassers durch eine äußerst feine und regelmäßige Franse von Kräuseln markiert, in der in einem Raume von 20 oder 30 cm vor dem Festkörper einige Reihen von Erhöhungen und Vertiefungen unterschieden (und mit ein wenig Übung wahrscheinlich auch gezählt) werden können. Gerade hinter einem Dampfer oder einem Segler, der sich mit einer Geschwindigkeit von über vier oder fünf Knoten bewegt, können Wellen gesehen werden, die dem Schiffe allgemein mit genau der Geschwindigkeit folgen, die es selbst besitzt, und die solche Längen zu haben scheinen, daß die gewöhnliche Formel

$$l = \frac{2\pi w^2}{g}$$

für die Länge von Wellen, die mit der Geschwindigkeit  $w$  in tiefem Wasser fortschreiten, so nahe, wie man es beurteilen kann, bestätigt wird. In der allgemein bekannten Theorie solcher Wellen wird die Schwerkraft als der einzige Ursprung der bewegendenden Kräfte angenommen. Wenn überhaupt an Kohäsion gedacht wurde (wie beispielsweise von Herrn Froude bei seinen wichtigen nautischen Versuchen an Modellen, die durch Wasser gezogen oder in Schwingungen versetzt wurden, um Eigenschaften mit Rücksicht auf das Rollen von Schiffen auf See zu untersuchen), wurde geschlossen, daß sie keinen merklichen Einfluß auf Wellen übt, deren Länge 5 oder 10 Zentimeter übersteigt. Nun wird es offenbar, daß für Wellen beliebiger Länge unter 5 oder 10 Zentimeter die Kohäsion merklich zum bewegendem System beiträgt, und daß, wenn die Länge ein kleiner Bruchteil eines Zentimeters beträgt, die Kohäsion weit mehr Einfluß als „bewegende Kraft“ für die Schwingungen hat als die Schwerkraft.

Der folgende Auszug aus einem Briefe an Herrn Froude, der einen Teil einer Mitteilung an die Nature (die am 26. dieses Monats, Oktober 1871 erscheinen soll) bildet, beschreibt Beobachtungen für eine experimentelle Bestimmung der kleinsten Geschwindigkeit von Wellen in Seewasser:

„Etwa drei Wochen später, als ich im Meerbusen von Mull unter Windstille lag, hatte ich eine ausgezeichnete Gelegenheit, zugleich mit Professor Helmholtz und meinem Bruder aus Belfast, durch Beobachtung die kleinste Wellengeschwindigkeit mit einiger Annäherung an Genauigkeit zu bestimmen. Die Angelschnur wurde in einem Abstände von zwei oder drei Fuß von der Seitenwand des Schiffes hinausgehängt, so daß sie das Wasser in einem Punkte durchschnitt, der nicht merklich durch die Bewegung des Schiffes gestört

1) Die Geschwindigkeit „ein Knoten“ ist eine Geschwindigkeit von einer Seemeile in der Stunde oder 51,5 cm in der Sekunde.



wurde. Die Geschwindigkeit wurde durch Auswerfen von vorher angefeuchteten Papierstücken in die See bestimmt, indem man die Zeiten ihres (scheinbaren) Durchganges durch parallele in Abständen von 912 Zentimeter von einander entfernte Ebenen ermittelte, die auf Deck und Bord des Schiffes durch Marken festgelegt waren. Indem ich sorgfältig das Gesamtbild der Kräuseln und das der Wellen beobachtete, die die Kräusel vorn mit den Wellen hinten verbinden, hatte ich gesehen, daß sie eine Reihe paralleler Wellen enthielt, die auf jeder Seite schräg abbogen und ein Aussehen zeigten, das bewies, daß sie Wellen von der kritischen Länge waren, die dem Minimum der Fortpflanzungsgeschwindigkeit entsprachen. Demgemäß war die zu den Vorderflächen dieser Wellen senkrechte Geschwindigkeitskomponente der Angelschnur die wahre kleinste Geschwindigkeit. Um diese zu messen, war also weiter nichts erforderlich, als den Winkel zwischen den beiden Reihen paralleler Linien der Erhöhungen und Vertiefungen, die sich von beiden Seiten des Kielwassers fortzogen, zu messen und gleichzeitig die Geschwindigkeit zu messen, mit der die Angelschnur durch das Wasser gezogen wurde. Der Winkel wurde gemessen, indem man einen gegliederten Zweifußstab mit seinen beiden Schenkeln, so gut man es nach Augenmaß beurteilen konnte, parallel den Reihen der Wellenkämme hielt. Der Winkel, zu dem der Maßstab bei dieser Ausrichtung geöffnet werden mußte, war der gesuchte Winkel. Indem man ihn dann auf Papier legte und längs seiner Kanten zwei Geraden zog und eine einfache geometrische Konstruktion mit einer zur Darstellung der gemessenen Geschwindigkeit des bewegten Festkörpers geeignet eingeführten Länge ausführte, wurde die gesuchte kleinste Wellengeschwindigkeit leicht erhalten. Sechs Beobachtungen dieser Art wurden ausgeführt, von denen zwei als nicht befriedigend verworfen werden mußten. Folgendes sind die Resultate der andern vier:

Geschwindigkeit des bewegten Festkörpers				Abgeleitete kleinste Wellengeschwindigkeit			
51 Zentimeter in der Sekunde				23,0 Zentimeter in der Sekunde			
38	"	"	"	23,8	"	"	"
26	"	"	"	23,2	"	"	"
24	"	"	"	22,9	"	"	"
Mittel . . .				23,22			

Die äußerste Annäherung dieses Resultats an die theoretische Schätzung (23 Zentimeter in der Sekunde) war schließlich bloß ein Zufall; aber sie beweist, daß die Kohäsionskraft des Seewassers bei der (nicht notierten) Temperatur der Beobachtung nicht sehr verschieden sein kann von der, die ich nach den Beobachtungen von Gay-Lussac für reines Wasser geschätzt hatte.“

## Anhang H.

### Molekelanordnung in Kristallen.<sup>1)</sup>

§ 1. Den Gegenstand meines Vortrages am heutigen Abend bilden nicht die physikalischen Eigenschaften von Kristallen, auch nicht ihre Mechanik, sondern allein die Theorie ihrer Struktur — die Anordnung der Molekeln bei der Bildung eines Kristalles. Jeder Kristall ist eine Ansammlung von kleinen Körpern oder Molekeln. Der umgekehrte Satz ist kaum richtig, es sei denn in einem sehr erweiterten Sinne des Wortes „Kristall“ (vgl. § 20 weiter unten). Ich kann am besten eine homogene Ansammlung von Molekeln erklären, wenn ich Sie bitte, an eine homogene Ansammlung von Menschen zu denken. Damit sie homogen sei, muß jede Person der Ansammlung jeder andern gleich und ähnlich sein; sie müssen in Reihen in vollkommen ähnlicher Anordnung stehen oder sitzen. Jede Person, außer den Personen an den Rändern der Ansammlung, muß auf einer Seite einen Nachbar haben und auf der andern Seite einen gleich weit entfernten, einen Nachbar vorn rechts und in demselben Abstände einen solchen hinten links. Ihre beiden Nachbarn vorn und ihre Nachbarn hinten bilden Glieder zweier Reihen, die gleich und ähnlich der Reihe sind, die aus ihr selbst und ihren Nachbarn rechts und links und deren Nachbarn ohne Ende nach rechts und links besteht. In besonderen Fällen können die nächsten Nachbarn vorn und hinten geradeaus nach vorn und hinten angeordnet sein; wir dürfen aber unsere Aufmerksamkeit nicht auf so gebildete rechtwinklig gruppierte Anordnungen beschränken. Nun mögen sich gleiche und ähnliche Ansammlungen in Horizontalebene über und unter der betrachteten befinden, und es mag eine unendlich große Anzahl solcher Ebenen in gleichen Abständen von einander oben und unten vorhanden sein. Wir stellen uns irgendeine Person auf irgendeiner Innenebene und ihre nächsten Nachbarn auf der darüber und der darunter befindlichen Ebene vor. Diese drei Personen müssen sich genau auf einer Geraden befinden; die Homogenität der Ansammlungen in den drei Ebenen stellte es oben sicher, daß jede Person in der Zwischenebene sich mit ihren Nachbarn oben und unten genau in einer Geraden befindet. Die nämliche Bedingung der Geradlinigkeit muß für je drei aufeinander folgende Ebenen erfüllt sein, und so erhalten wir eine homogene Ansammlung von Menschen in drei Raumdimensionen. In einem besonderen Falle kann der obere nächste Nachbar jeder Person in der oberen Ebene senkrecht über ihr stehen; doch dürfen wir unsere Vorstellung auch nicht auf Ansammlungen beschränken, die in dieser Weise rechtwinklig in vertikalen Geraden gruppiert sind.

1) Robert Boyle-Vorlesung, gehalten vor dem Oxford University Junior Scientific Club am 16. Mai 1893. (Der Verfasser sagt sinnfälliger und hübscher „Molecular tactics“, was wohl mit „Molekelaufmarsch“ wiederzugeben wäre. D.H.)

§ 2. Wir fassen jetzt irgendeine besondere Person  $C$  (Fig. 102) in irgendeiner im Innern befindlichen Ebene ins Auge,  $D$  und  $D'$ , ihre nächsten Nachbarn,  $E$  und  $E'$ , ihre nächst nächsten Nachbarn in ihrer Ebene. Die hierauf nächsten Nachbarn in dieser Ebene werden sich an den Orten  $F$  und  $F'$  in der Zeichnung befinden. So sehen wir, daß jede Person  $C$  von sechs Personen  $DD'$ ,  $EE'$  und  $FF'$  als ihren nächsten, nächst nächsten und den darauf nächsten Nachbarn umgeben ist. Schließt man der Einfachheit wegen den besonderen Fall rechtwinkliger Anordnung aus, so sieht man, daß die Winkel der sechs gleichen und ähnlichen Dreiecke  $CDE$ ,  $CEF$  usw. sämtlich spitz sind; und da die sechs Dreiecke gleich und ähnlich sind, sieht man ferner, daß die drei Paare der einander gegenüberstehenden Seiten des Sechseckes  $DEFD'E'F'$  gleich und parallel sind.

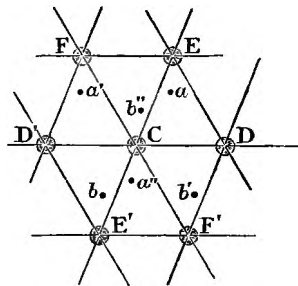


Fig. 102

§ 3. Nun mögen mit  $A, A', A''$  usw. die Orte von Personen der homogenen Ansammlung in der unmittelbar über, und mit  $B, B', B''$  usw. die in der unmittelbar unter der Ebene  $C$  belegenen Ebene bezeichnet werden. In der Darstellung seien  $a, a', a''$  Punkte, in denen die Ebene  $CDE$  von den auf sie aus  $A, A', A''$  aus der oberen Ebene gefällten Loten, und  $b, b', b''$  solche, in denen sie von den aus  $B, B', B''$  aus der unteren Ebene gefällten geschnitten wird. Von allen den Loten aus der unmittelbar darüber und aus der unmittelbar darunter befindlichen Ebene treffen genau zwei, aus jeder eins, die Fläche des Parallelogramms  $CDEF$ ; und sie treffen es in ähnlich zu den einander entgegengesetzt orientierten Dreiecken, in die das Parallelogramm durch eine seiner Diagonalen zerlegt wird, gelegenen Punkten. Wenn  $a$  in dem Dreiecke  $CDE$  liegt, müssen demnach die andern fünf Dreiecke des Sechsecks in den entsprechenden Punkten geschnitten werden, wie es in der Figur angedeutet ist. So erhalten wir, wenn wir nur die Ebene von  $C$  und die unmittelbar über ihr befindliche Ebene betrachten, Punkte  $A, A', A''$  vertikal über  $a, a', a''$ . Jetzt stellen wir uns eine dreiseitige Pyramide oder ein Tetraeder vor, das auf der Grundfläche  $CDE$  steht und  $A$  zur Spitze hat; wir finden, daß jede der Seitenflächen  $ACD, ADE, AEC$  ein spitzwinkliges Dreieck ist, da, wie wir bereits gesehen haben,  $CDE$  ein spitzwinkliges Dreieck darstellt, und da der kürzeste der drei Abstände  $CA, DE, EA$  (§ 2) größer als  $CE$  ist (obwohl er sowohl größer als auch kleiner als  $DE$  sein kann). Demgemäß sind alle Winkel des Tetraeders  $CDEA$  spitz, nicht bloß die Winkel seiner dreieckigen Seitenflächen, sondern auch die sechs Neigungswinkel zwischen seinen vier Seitenflächen. Dieser wichtige Satz über homogene Ansammlungen ist von Bravais angegeben worden, dem wir die ganze Lehre über homogene Ansammlungen in ihrer vollkommensten Einfachheit und vollständigsten Allgemeinheit verdanken. Ähnlich sehen wir, daß wir gleiche und ähnliche Tetraeder über den Grundflächen  $D'CF, E'F'C$  haben, und drei andere Tetraeder unter der Ebene von  $C$ , die entgegengesetzt orientierte Dreiecke  $CD'E'$  usw. als Grundflächen und  $B, B', B''$  als Scheitel besitzen. Diese drei Tetraeder sind gleich und heterochiral<sup>1)</sup>

1) Vgl. Anmerkung zu § 22, weiter unten.

ähnlich den ersten drei. Die Betrachtung dieser spitzwinkligen Tetraeder ist für den maschinellen Aufbau eines elastischen Festkörpers oder eines Kristalles nach Boscovich von fundamentaler Bedeutung. Ebenso ist es auch die Betrachtung des Haufens von dreizehn Punkten:  $C$  mit den sechs benachbarten  $D, E, F, D', E', F'$  in der Ebene der Zeichnung, den drei  $A, A', A''$  in der darüber liegenden, und den drei  $B, B', B''$  in der darunter liegenden Ebene.

§ 4. Der Fall, in dem jede der vier Seitenflächen jedes der Tetraeder des § 3 ein gleichseitiges Dreieck bildet, ist besonders interessant. Eine Ansammlung, die diese Bedingung erfüllt, kann passend eine „gleichseitige homogene Ansammlung“ oder kurz eine „gleichseitige Ansammlung“ genannt werden. In einer gleichseitigen Ansammlung sind die zwölf Nachbarn des Punktes  $C$  sämtlich von ihm gleich weit entfernt. Ich halte in meiner

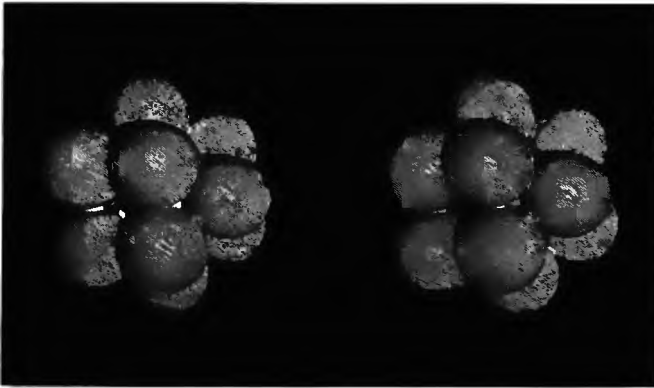


Fig. 103.

Hand einen Haufen von dreizehn kleinen Kugeln, die so angeordnet sind, daß eine hingestellt ist und die zwölf andern mit ihr in Berührung gebracht (und demgemäß in der möglichst engen Anordnung gepackt sind) und an einander mit Fischleim befestigt sind. Sie sehen, es sieht nach Form, Farbe und Größe ganz wie eine Maulbeere aus. Die nebenstehende Zeichnung Fig. 103 stellt ein stereoskopisches Bild eines ähnlichen Haufens dar.

§ 5. Indem man Kugel nach Kugel an einen solchen Haufen von dreizehn anfügt und dabei dafür Sorge trägt, daß man jede neu hinzukommende Kugel in eine Lage bringt, in der sie sich mit andern in passenden Geraden befindet, so daß die ganze Ansammlung homogen wird, kann man sich in einer sehr interessanten Weise im Aufbau jeder Form eines Kristalls, des von einigen Autoren als „kubisch“, von andern als „oktaedrisch“ bezeichneten Systems üben. Ich empfehle jedem, der Kristallographie studieren will, bei einem Holzdrechsler oder einem Hersteller von Möbelquasten oder Rosenkränzen etwa tausend Kugeln von je einem halben Zoll Durchmesser zu bestellen. Löcher in ihnen schaden nichts, sind vielleicht sogar von Nutzen; man hat sich aber zu versichern, daß die Kugeln einander nahe gleich sind, und daß jede auch möglichst rund ist.

§ 6. Sie sehen hier ein großes Modell vor sich, das ich zur Verdeutlichung einer homogenen Ansammlung von Punkten nach einem, ich glaube,

von Herrn William Barlow (Nature 20. und 27. Dezember 1883) herührenden Plane hergestellt habe. Der Halter des Modells, Fig. 104, bildet einen Gitterrahmen, der aus zwei Reihen von je acht einander kreuzenden parallelen Holzstäben besteht, die durch Stifte, die die Mitten der Kreuzungsstellen durchsetzen, zusammengehalten werden. Wie Sie sehen, kann ich den Rahmen so verschieben, daß ich Parallelogramme aller Schrägheitsgrade herstelle, bis die Stäbe einander berühren, und wiederum sehen Sie, wie ich sie alle zu Quadraten machen kann.

§ 7. Die verbindenden Stifte sind (um die Konstruktion wohlfeil zu gestalten) aus Kupferdraht hergestellt, und sie sind alle unter dem Gitter-

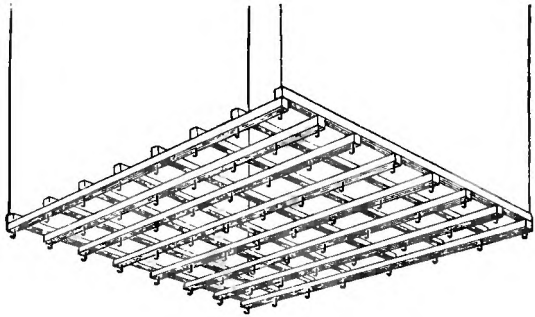


Fig. 104.

rahmen zu Haken ungebogen. An diesen 64 Haken hängen vierundsechzig feine, durch kleine Bleigewichte straffgestreckte Fäden. Jeder dieser Fäden (Fig. 105) trägt acht kurze durchbohrte Holzzyylinder, die sich in beliebige Lagen<sup>1)</sup> auf- und abwärts schieben lassen. Sie sind augenblicklich in gleichen Abständen angeordnet, und zwar in dem Abstände der Verbindungsstellen des Gitterrahmens.

§ 8. Der Halter des Modells hängt an vier nahezu vertikalen Fäden, deren Längen unabhängig voneinander verändert werden können und die über oben befestigte Haken gehen und durch Gewichte gestrafft werden, von denen jedes den vierten Teil des Halters und ihrer Anhängsel ausgleicht. Sie sehen jetzt, daß mir, durch Änderung der Winkel des Gitterwerks und dadurch, daß ich es horizontal und in jede geneigte Lage bringen kann, wie ich es leicht durch die Art der Aufhängung zu tun vermag, drei unabhängige Veränderliche zur Verfügung stehen, durch deren Änderung ich Ihnen alle Mannigfaltigkeiten homogener Ansammlungen vorzuführen imstande bin, bei denen drei Nachbarn eines jeden Punktes von ihm gleich weit entfernt sind.

Wenn ich ebenso die Abstände zwischen den kleinen Holzstücken auf den Fäden und die Abstände zwischen den Verbindungsstellen des Gitterwerks abändere (Änderungen, die man sich leicht vorstellen kann, obwohl sie an einem Modell ohne mechanische Konstruktionsschwierigkeiten, die zu beheben nicht lohnen würde, nicht leicht ausführbar sind), erhalte ich drei andere unabhängige Veränderliche. Durch geeignete Abänderung dieser

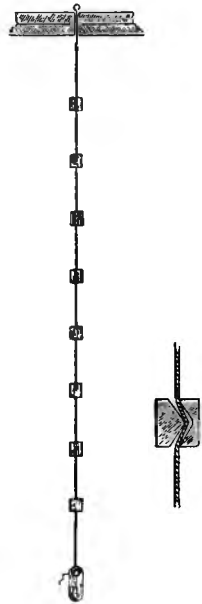


Fig. 105.

1) Die Löcher in den Zylindern sind in der in Fig. 105 rechts angegebenen Weise schräg gebohrt, so daß die Zylinder auf dem Faden in jeder gewünschten Lage verbleiben, andererseits aber, indem man für einen Augenblick den Faden schlaff macht, die Freiheit haben, sich auf- und abwärts zu bewegen.

unabhängigen sechs Veränderlichen, drei Winkel und drei Längen, können wir jeder Kante des Fundamentaltetraeders des § 3 jede beliebige vorgeschriebene Länge und Lage geben.

§ 9. Unsere Menschenansammlung ist nicht homogen, wenn nicht alle gleich und ähnlich sind und sich in derselben Stellung befinden und alle nach derselben Seite hinschauen. Sie verstehen, was darunter gemeint ist, daß eine Anzahl Menschen auf demselben Boden oder derselben Ebene sitzen oder stehen und in derselben Richtung hinschauen. Aber das Wort „schauen“

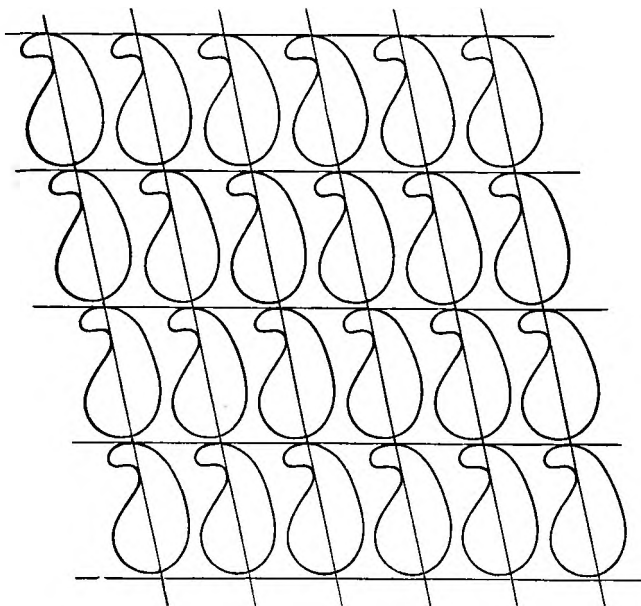


Fig. 106.

ist auf Dinge, die keine Augen haben, nicht gut anwendbar, und wir brauchen eine umfassendere Ausdrucksweise. Wir besitzen sie in den Worten „Orientierung“, „orientiert“ oder (als Infinitiv) „orientieren“, auf die man durch eine Erweiterung des Gedankens gelangt, der in dem zuerst zur Bezeichnung der nach Ost und West gerichteten Lagen der alten griechischen und ägyptischen Tempel und christlichen

Kirchen benutzten Worte „Orientierung“ liegt. Allein für die Orientierung eines Hauses oder Tempels haben wir nur einen Winkel und dieser Winkel wird als „Azimut“ bezeichnet (diese Bezeichnung wird für einen Winkel in einer Horizontalebene gebraucht). Für eine Orientierung in drei Dimensionen des Raumes müssen wir unsere Anschauung weiter dehnen und eine Lage in ihrer Beziehung zu Ost und West und Oben und Unten ins Auge fassen. Ein auf der Seite mit dem Kopfe nach Norden liegender und nach Osten schauender Mann wäre nicht ähnlich orientiert wie ein aufrecht stehender nach Osten schauender Mann. Um eine vollkommene Charakterisierung der Art, wie ein Körper im Raume orientiert ist, zu ermöglichen, brauchen wir in dem Körper eine Beziehungsebene und in dieser Ebene eine Beziehungslinie, die dem Körper angehört und sich mit ihm bewegt. Ferner müssen wir eine feste Beziehungsebene und in ihr eine feste Beziehungslinie haben, nach denen die Orientierung des beweglichen Körpers charakterisiert werden kann, beispielsweise eine Horizontalebene und die horizontale Ost-West-Linie in ihr. Die Lage eines Körpers ist vollständig bestimmt, wenn der Winkel zwischen der ihm angehörigen Beziehungsebene und der festen Ebene ge-

gegeben ist, und wenn ferner die Winkel zwischen der Schnitkante der beiden Ebenen und den Beziehungslinien in ihnen gegeben sind. So sehen wir, daß drei Winkel notwendig und hinreichend sind, die Orientierung eines beweglichen Körpers zu charakterisieren, und wie die Charakterisierung passend als von drei Winkeln abhängig geleistet wird.<sup>1)</sup>

§ 10. Um dies zu erläutern, stellen Sie sich ein auf dem Tische vor Ihnen mit der Titelseite oben und mit dem Rücken nach Norden liegendes Buch vor. Jetzt hebe ich die Ostkante (oben) des Buches, indem ich die untere (in der Nord-Süd-Richtung laufende) Westkante auf dem Tische belasse, bis das Buch gegen den

Tisch, sagen wir um  $20^\circ$ , geneigt ist. Hierauf drehe ich, ohne den Winkel von  $20^\circ$  zwischen dem Deckel des Buches und dem Tische zu ändern, das Buch um eine vertikale Achse um  $45^\circ$ , bis die vorbezeichnete untere Kante in die Richtung Nordost-Südwest gelangt. Schließlich drehe ich das Buch, indem ich es in der Ebene, in die es gebracht ist, festhalte, in dieser Ebene (um die Ecke

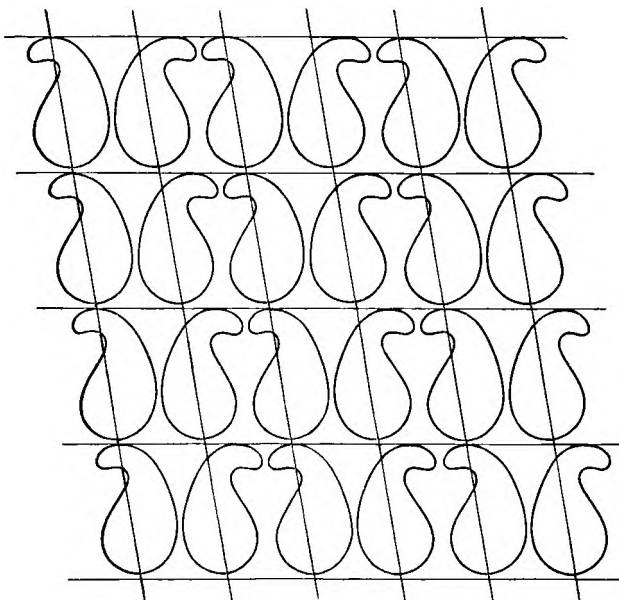


Fig. 107.

am Rücken oder an der Vorderseite) um  $35^\circ$ . Diese drei Winkel von  $20^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $35^\circ$  charakterisieren die Orientierung des Buches in der Lage, in die es nun gebracht ist, gegen die Horizontalebene des Tisches und die Ost-West-Linie darin.

§ 11. In den Fig. 106 und 107 sehen Sie je zwei Ansammlungen, jede aus vierundzwanzig gleichen und ähnlichen in einer Ebene liegenden Molekeln bestehend. Fig. 106, in der sämtliche Molekeln gleich orientiert sind, ist eine homogene Ansammlung von vierundzwanzig Molekeln. Fig. 107, in der immer eine Längsreihe der Molekeln entgegengesetzt der nächsten orientiert ist, kann entweder als Gruppe von zwei homogenen Ansammlungen von je zwölf einzelnen Molekeln oder als eine homogene Ansammlung von zwölf Paaren solcher einzelnen Molekeln aufgefaßt werden.

§ 12. Ich muß jetzt Ihre Aufmerksamkeit auf eine rein geometrische Frage<sup>2)</sup> von vitalem Interesse hinsichtlich homogener Ansammlungen im all-

1) Die bekannten in der Mechanik gebrauchten Winkel.

D. H.

2) „On the Homogeneous Division of Space“, by Lord Kelvin, Royal Society, Proceedings, Bd. LV, 18. Jan. 1894.

gemeinen und hinsichtlich homogener Ansammlungen, die einen Kristall bilden, im besonderen richten: — Was können wir als „die“ Grenzfläche oder „eine“ Grenzfläche ansprechen, die jede Molekel nebst irgendeinem sie umgebenden Raumteile, den wir nach Belieben für sie annehmen dürfen, einschließt, die sie von ihren Nachbarn und den diesen beigegebenen Raumteilen bei homogener Ehrlichkeit trennt?

§ 13. Wenn wir es nur mit mathematischen Punkten zu tun hätten, vermöchten wir die naheliegende einfache Teilung durch drei Reihen paralleler Ebenen zu wählen. Selbst dies kann auf eine unendliche Anzahl Arten geschehen; nämlich: Man beginnt mit irgendeinem Punkte  $F$  der Ansammlung, wählt irgend drei andere, ferne oder nahe Punkte  $A, B, C$ , nur daß sie nicht in einer Ebene mit  $F$  liegen dürfen und daß sich kein anderer Punkt der Ansammlung auf den Strecken  $PA, PB, PC$  oder innerhalb des Raumes des Parallelepipeds, dessen begrenzende Kanten jene Linien und die ihnen parallelen sind, noch innerhalb irgendeiner Seitenfläche dieses Parallelepipeds befindet. Dann liegen Punkte der Ansammlung in allen Ecken dieses Parallelepipeds und in allen Ecken der diesem gleichen und ähnlichen Parallelepipede, zu denen man gelangt, wenn man parallel zu seinen drei Seitenpaaren Reihen von äquidistanten Ebenen konstruiert. (Eine Zeichnung ist nicht nötig.) Jeder Punkt der Ansammlung befindet sich so in dem Schnittpunkte von drei Ebenen, der zugleich der Treffpunkt von acht einander benachbarten Parallelepipeden ist. Nun verschiebe man irgendeinen von den Punkten der Ansammlung an einen Ort innerhalb des Raumes eines der acht Parallelepipede und erteile allen anderen Punkten der Ansammlung gleichparallele Bewegungen. So haben wir jeden Punkt in einer ihm zugehörigen parallelepipedischen Zelle, und alle Punkte der Ansammlung sind in ihren Zellen, die ihrerseits einander gleich und ähnlich sind, ähnlich untergebracht.

§ 14. Wenn wir aber jetzt anstatt eines einzelnen Punktes für jedes Glied der Ansammlung eine Gruppe von Punkten oder eine Kugel oder einen Würfel oder einen Körper von anderer geometrischer Form haben, oder ein Individuum einer homogenen Ansammlung von gleichen, ähnlichen, ähnlich gekleideten und ähnlich orientierten in Reihen sitzenden Damen oder eine homogene Ansammlung von eng in geometrischer Anordnung in einer Ebene gepflanzten Bäumen mit gleichen und ähnlichen Verteilungen von Molekeln, und wir wollten wieder parallele Ebenen oben und unten und zur Seite ziehen, würden wir finden, daß selbst die bestangeordnete parallelepipedische, ebenflächige Einteilung, die wir wählen könnten, Teile, die eigentlich zu einem Individuum der Ansammlung gehören, abschneidet und in die den Nachbarn gehörigen Zellen bringt. Um eine Zelle zu finden, die alles das einschließt, was zu einem Individuum gehört, beispielsweise alle Teile der Kleidung jeder einzelnen Dame, wie vielfach sie auch mit Teilen der gleichen, ähnlichen Kleidungen der Nachbarinnen ineinander gefaltet sein mögen, oder jeden Zweig, jedes Blatt, jede Wurzel, jedes einzelnen der homogenen Ansammlung von Bäumen, müssen wir die Begrenzung durch Zugeben und Fortnehmen von den ebenen Seitenflächen der ursprünglich parallelepipedischen Zellen so ändern, daß jede Zelle alles eines Einzelnen vollständig einschließt, und demgemäß (wegen der Homogenität der Teilung) nichts, was irgendeinem andern Einzelnen zukommt. Die so gestellte geometrische Aufgabe, so wunder-



bar komplex sie manchmal sein mag, wird leicht für jeden möglichen Fall gelöst, wenn man mit irgendeiner besonderen parallelepipedischen Teilung, die für entsprechende Punkte der Ansammlung bestimmt ist, in der Weise beginnt, wie es in § 13 für eine beliebige homogene Ansammlung einzelner Punkte dargelegt ist. Wir dürfen uns noch die Vorschrift machen, daß die Ecken ungeändert bleiben sollen; wenn wir dies aber tun, müssen sie sich zu Anfang entweder auf den Flächen der Berührung zwischen den Individuen oder in einem freien Raume zwischen ihnen befinden. Ist diese Bedingung für eine Ecke erfüllt, so ist sie für alle Ecken erfüllt, da die Ecken ihrem Wesen nach einander entsprechende Punkte bezüglich der Ansammlung sind.

§ 15. Wir fangen jetzt mit irgendeiner der zwölf Kanten des Parallelepipeds an und ändern sie willkürlich zu irgendeiner krummen oder gebrochenen Linie zwischen demselben Eckenpaare um, mit den alleinigen Bedingungen: 1. daß sie nicht in die Substanz irgendeines Gliedes der Ansammlung eindringt, und 2. daß sie nicht gleiche und ähnliche parallele Kurven<sup>1)</sup> zwischen zwei andern Eckenpaaren schneidet.

Wir fassen die drei Gruppen von je vier parallelen Kanten des Parallelepipeds und lassen die geraden Linien einer Gruppe von vier sich in gleiche und ähnliche parallele Kurven in der eben beschriebenen Weise umwandeln, und verfahren nach derselben Regel mit den andern beiden Gruppen von je vier Kanten. So erhalten wir drei Gruppen von je vier parallelen gekrümmten Kanten an Stelle der drei Gruppen von vier parallelen geraden Kanten unseres ursprünglichen Parallelepipeds, ohne Änderung der Ecken (jede Ecke bildet einen Schnittpunkt dreier Kanten). Jetzt stellen wir uns das Vierseit aus den vier Kurven vor, die in die Rolle der vier geraden Kanten einer Seitenfläche des Parallelepipeds getreten sind; wir dürfen dieses ein krummliniges Parallelogramm nennen, da sein Umfang aus zwei Paaren gleicher paralleler Kurven besteht. Man konstruiere nunmehr eine krumme Fläche (ein unendlich dünnes Blatt aus unendlich dehnbarem Gummi, wenn Sie sich dies so vorstellen wollen), die durch die vier Kanten unseres krummlinigen Parallelogramms begrenzt und die so geformt ist, daß sie keine Substanz irgendeines Individuums der Ansammlung durchschneidet. Dasselbe mache man mit einem genau gleichen und ähnlichen Blatte an jedem der beiden andern Paare paralleler Seitenflächen. So erhalten wir krummflächige Parallelepipede, die die Gesamtheit eines Individuums und keinen Teil eines andern umschließen; und durch ein ähnliches Verfahren finden wir eine ähnliche Begrenzung für jedes andere Individuum der Ansammlung. Jede Grenzfläche jeder dieser Zellen gehört zwei benachbarten Zellen zugleich an, und es ist zwischen ihnen oder an den Ecken nirgends ein freier Raum vorhanden. Fig. 108 illustriert diese

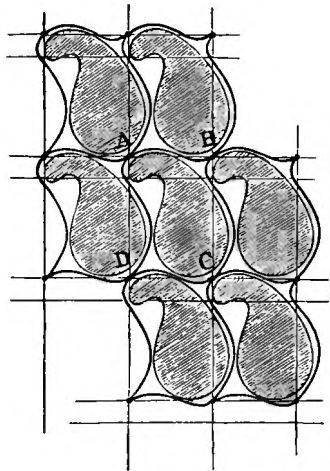


Fig. 108.

1) Ähnliche Kurven heißen parallel, wenn ihre Tangenten, in einander entsprechenden Punkten, parallel sind.

Art der Einteilung, indem sie einen zu einem Paare paralleler Seitenflächen des ursprünglichen Parallelepipeds parallelen Schnitt durch die Zellen für einen gedachten Fall darstellt. Die ebene Zeichnung bildet tatsächlich eine Verwirklichung der zweidimensionalen Aufgabe, ein Fischblasenmuster durch Parallelelogramme zu teilen, die so nahe geradlinig sind, wie man sie machen kann. In der Zeichnung sind feine gerade Linien gezogen, die die ursprüngliche parallelogrammatische Einteilung wiedergeben. Man erkennt, daß von allen (durch Punkte in der Zeichnung markierten) Kreuzungspunkten jeder zu jedem andern in bezug auf die homogen wiederholten Musterfiguren ähnlich liegt; *A, B, C, D* sind vier von ihnen an den vier Ecken einer und derselben Zelle.

§ 16. Wenn wir unsere Aufmerksamkeit für eine kurze Zeit auf die homogene Teilung einer Ebene beschränken, bemerken wir, daß die Teilung in Parallelelogramme durch zwei Reihen sich kreuzender Parallelen eine besondere ist, in der

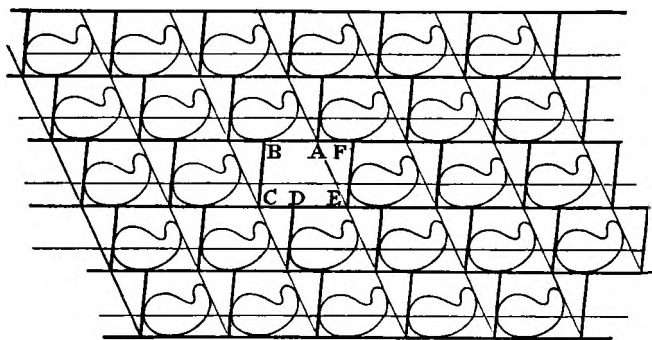


Fig. 109.

Hinsicht, daß jede Zelle mit drei benachbarten in jeder Ecke zusammenstößt. Jede große oder kleine Verschiebung einer Parallelelogrammreihe durch Gleiten an den andern Reihen in der einen oder andern Richtung verletzt diese Be-

dingung und führt zu einer Anordnung, die der ähnlich ist, die regelmäßige Bausteine in einem gewöhnlichen Mauerverbände besitzen, und liefert eine Einteilung, die die Bedingung erfüllt, daß jede Zelle an jeder Ecke nur zwei Nachbarn hat. Jede Zelle ist jetzt virtuell ein Sechseck, wie man aus den Buchstaben *A, B, C, D, E, F* der Zeichnung Fig. 109 erkennt. *A* und *D* sind dabei als Ecken gerechnet, an denen ein innerer Winkel von  $180^\circ$  liegt. In dieser Zeichnung geben die fortlaufenden starken Linien und die sie schneidenden feinen Linien eine ursprüngliche Einteilung in Parallelelogramme. Die unterbrochenen (starken) Querlinien geben für dieselbe homogene Verteilung der einzelnen Gegenstände die virtuelle Sechseckteilung wieder, die wir erhalten, wenn wir die Grenze eines jeden Teiles einer der schwachen Linien nach der ihr nächsten, zwischen denselben fortlaufenden Parallelen liegenden, starken Linie schieben.

Fig. 110 stellt eine weitere Abänderung der Grenzlinie dar, bei der die Winkel an *A, D*, die vorher  $180^\circ$  betragen haben, kleiner als  $180^\circ$  werden. Die fortlaufenden (schwachen) parallelen Linien und die kurzen, schwachen Teile der sie kreuzenden Linien geben die Anordnung nach Fig. 109 wieder, aus der diese Zeichnung abgeleitet ist.

§ 17. In diesen Zeichnungen (Figg. 109 und 110) ist der eingeschlossene Gegenstand hinreichend klein, um in eine ursprüngliche Parallelelogrammteilung durch zwei Reihen fortlaufender, sich kreuzende, parallele, gerade

Linien, und in die Teilung durch „Verbund“-Parallelogramme, wie sie in Fig. 109 dargestellt sind, und durch die in Fig. 110, deren feine Linien die ursprünglichen und die sekundären Parallelogramme andeuten, dargestellte Sechsecksteilung eingeschlossen werden zu können. In Fig. 108 waren

die eingeschlossenen Gegenstände zu groß, um in irgendwelche Parallelogramm oder Sechsecksteilung einschließbar zu sein. Die beiden Reihen paralleler feiner Linien in Fig. 108 deuten eine ursprüngliche Parallelogrammteilung an, und die ent-

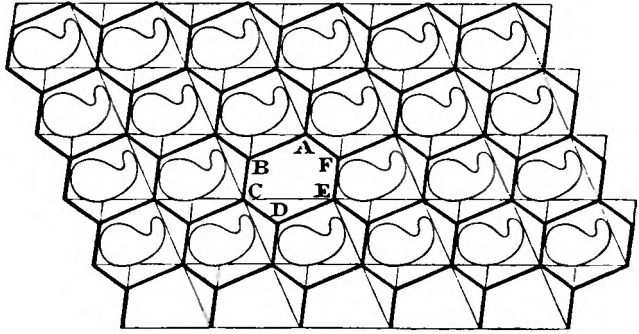


Fig. 110.

sprechenden Paare paralleler Kurven, die sich in den Ecken dieser Parallelogramme berühren, von denen  $ABCD$  ein Beispiel ist, geben eine entsprechende Teilung durch krummlinige Parallelogramme wieder. Fig. 111 deutet für dieselbe homogene Verteilung von Objekten eine besser passende Einschließung durch Sechsecke an, in deren jedem ein Paar paralleler Seiten gekrümmt ist. Die Reihen der sich schneidenden parallelen geraden Linien in dieser Figur 111 deuten dieselbe ursprüngliche Parallelogrammteilung an wie in Fig. 108, und auch diese Teilung leicht verschoben, um Punkte zu erreichen, die für eine guteingrichtete Sechsecksteilung gewählt sind.

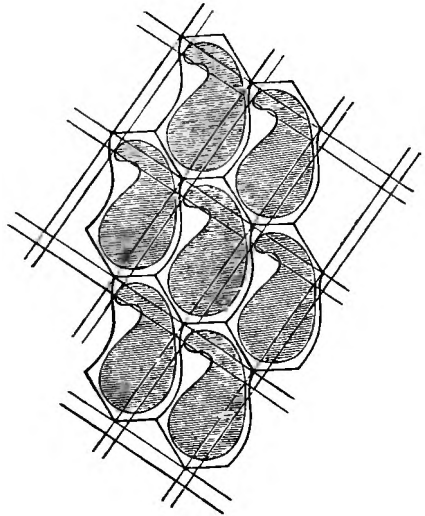


Fig. 111.

§ 18. Zur Einteilung eines stetigen dreidimensionalen Raumes<sup>1)</sup> in gleiche ähnliche und ähnlich orientierte Zellen kann eine vollkommen entsprechende Umbildung aus einer Einteilung durch drei Reihen stetiger, einander schneidender paralleler Ebenen in irgendeiner möglichen Art homogener Abgrenzung verfolgt werden, indem man die dreidimensionale Analogie zu den §§ 16 bis 17 durchführt. So finden wir, daß die allgemeinst mögliche homogene Raumteilung mit ebenen Zwischenflächen zwischen den Zellen uns vierzehn Wände für jede Fläche ergibt, von denen sechs drei Paare gleiche und parallele Parallelogramme und die andern acht vier Paare gleicher und paralleler Sechsecke bilden; dabei wird jedes Sechseck von drei Paaren gleicher und

1) Vgl. Anmerkung zu § 12 oben.

paralleler geraden Linien begrenzt. Dieser Körper, der von vierzehn ebenen

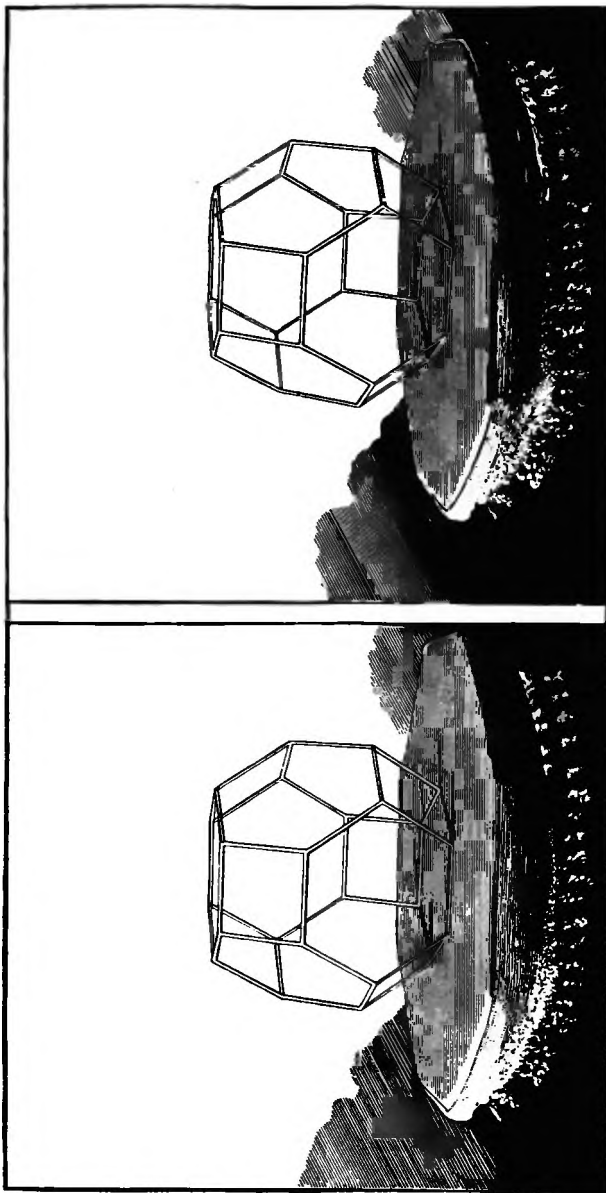


Fig. 112.

Seitenflächen begrenzt wird, heißt ein Tetrakaidekaeder.<sup>1)</sup> Er hat sechsunddreißig Kanten zwischen je zwei Seitenflächen und vierundzwanzig Ecken, in denen sich je drei Seitenflächen schneiden. Ein besonderer Fall hiervon, den ich als Orthotetrakaidekaeder bezeichne, nämlich ein solches, in dem die sechs Parallelogramme gleiche Quadrate und die acht sechsseitigen Flächen gleiche, gleichseitige und gleichwinklige Sechsecke, und die, entsprechende Punkte in den sieben Paaren paralleler Flächen verbindenden, Geraden gegen die Ebenen der Seitenflächen senkrecht sind, ist durch ein stereoskopisches Bild in Fig. 112 dargestellt. Die sechsunddreißig Kanten und die vierundzwanzig Ecken, die in dieser Zeichnung leicht

zu zählen sind, kommen in derselben gegenseitigen Anordnung auch in der

1) z. B. ein Oktaeder, dessen Ecken durch ein Hexaeder abgestumpft sind:  $O \cdot \infty O \infty$  (eine Fluoridform) im tesseralen System, oder  $P \cdot \infty P \infty \cdot OP$  im tetragonalen System. D. H.

allgemeinstmöglichen Teilung sowohl durch ebenflächige Tetrakaidekaeder als auch durch die in § 19 beschriebenen verallgemeinerten Tetrakaidekaeder vor.

§ 19. Die allgemeinste homogene Raumteilung ist nicht auf ebenflächige Zellen beschränkt; sie besteht aber immer noch aus vierzechnflächigen Zellen, von denen jede von drei Paaren gleichen und parallelen vierseitigen Flächen und von vier Paaren gleichen und parallelen sechsseitigen Flächen begrenzt ist; dabei brauchen weder die Vierseite noch die Sechseite eben zu sein. Jede von den sechsunddreißig Kanten kann gerade oder gebrochen oder krumm sein; die Paare gegenüberliegender Kanten, sowohl der Vierseite wie der Sechseite, brauchen nicht gleich und parallel zu sein; weder die vier Ecken jedes Vierseits noch die sechs Ecken jedes Sechsseits brauchen in einer Ebene zu liegen. Doch jedes Paar entsprechender Kanten jedes Paares entsprechender Flächen, sowohl der vierseitigen wie der sechsseitigen, muß aus gleichen und parallelen Stücken bestehen. Ich habe einen interessanten Fall einer Einteilung durch Tetrakaidekaeder mit gekrümmten Flächen und gekrümmten Kanten in einer vor sieben Jahren veröffentlichten Abhandlung<sup>1)</sup> beschrieben. In diesem Falle ist jede der vierseitigen Flächen eben. Jede sechsseitige Fläche ist eine schwach gekrümmte Fläche mit drei geradlinigen durch ihren Mittelpunkt gehenden in einer Ebene liegenden Diagonalen. Die sechs Sektoren der Fläche zwischen diesen Diagonalen liegen abwechselnd zu entgegengesetzten Seiten ihrer Ebene und sind von sechs Bogen ebener Kurven begrenzt, die zu drei Paaren paralleler Ebenen gehören. Diese Einteilung in Vierzechnflächner erfüllt die Bedingung, daß die Winkel zwischen drei in einer Ecke sich schneidenden Seitenflächen überall jeder  $120^0$  beträgt; eine Bedingung, der nicht in jedem ebenflächigen Tetrakaidekaeder entsprochen ist. Jede sechsseitige Grenzfläche ist eine antiklastische Fläche von gleichen entgegengesetzten Krümmungen in jedem Punkte, indem sie die von sechs krummen Kanten begrenzte Fläche kleinsten Inhalts ist. Sie kann leicht und schön und mit guter Annäherung an Genauigkeit vorgeführt werden, wenn man sechs kleine kreisförmige Drahtbogen auswählt, sie mit ihren Enden in geeigneten Ebenen als die sechs Seiten des Sechseckes aneinander lötet, und sie dann in Seifenlösung taucht und wieder herauszieht.

§ 20. Den Anordnungen homogener Ansammlungen uns wieder zuwendend, bemerken wir, daß die Eigenschaften solcher Ansammlungen als Ganzes sowohl von dem Charakter und der Orientierung jeder einzelnen Molekel, als auch von dem Charakter der durch entsprechende Punkte der Molekeln gebildeten Konfiguration abhängen. Nachdem wir die einfache mathematische Kristallographie mit ihrem Leitsystem<sup>2)</sup> zur Definition von Flächen und Kanten gemäß den Bravais'schen Reihen und Netzen und Tetraedern von Molekeln, bei denen wir immer nur an eine homogene Ansammlung von Punkten denken, kennen gelernt haben, vergessen wir leicht, daß die wirkliche Kristallmolekel, was auch sonst ihre Natur sein mag, Seiten hat, und daß man erwarten wird, möglicherweise erwarten muß, daß allgemein zwei entgegengesetzte Seiten jeder Molekel in ihrer Eigenschaft sehr verschieden

1) „On the Division of Space with Minimum Partitional Area“ Philosophical Magazine, Bd. XXIV., 1887, S. 502, und Acta mathematica aus demselben Jahre.

2) A. Levy, Edinburgh Philosophical Journal, April, 1822; Whewell, Phil. Trans. Royal Society, 1825; Miller, Treatise on Crystallography.

sein werden, und sind meist sehr überrascht, wenn die Mineralogen uns sagen, daß allerdings zwei parallele Flächen an zwei Seiten eines Kristalls in vielen natürlichen Kristallen sehr verschiedene Eigenschaften besitzen. Und dabei sollten wir ebenso sehr überrascht sein zu finden, daß eine Truppe in Schlachtordnung, die ja eine Art großkörnigen Kristall bildet, einen sehr verschiedenen Eindruck auf einen sie von außen anschauenden Beobachter macht, je nachdem jeder Mann in den Reihen mit Büchse und Bajonett nach vorn, nach hinten, nach der einen oder nach der andern Seite gerichtet ist.

§ 21. Wir fassen als Beispiel den gedachten Fall eines aus lauter harten, gleichen und ähnlichen tetraedrischen, in derselben Weise orientierten Festkörpern bestehenden Kristalls ins Auge. Eine dünne Platte, die parallel zu irgendeiner Reihe von Seitenflächen der sie zusammensetzenden Tetraeder geschnitten ist, wird an ihren beiden Seiten sehr verschiedene Eigenschaften besitzen, da die Molekeln sämtlich ihre nach außen gerichteten Spitzen nach der einen und die flachen Flächen nach der andern Seite hin gerichtet haben. So dürften wir erwarten, daß die beiden Seiten einer solchen Kristallplatte, mit ein und demselben Reibzeug gerieben, entgegengesetzt elektrisch werden. Erinnern wir uns gar, daß ein an einzelnen Teilen seiner Oberfläche fein grundiertes aber nicht poliertes, an andern Teilen dagegen poliertes Glasstück, wenn es mit weißer Seide gerieben wird, an den polierten Stellen positiv und an den nicht polierten Stellen negativ geladen wird (S. 461), so werden wir sogar bestimmt erwarten, daß diejenige Seite unserer vorausgesetzten Kristallplatte, nach der die flachen Flächen der sie zusammensetzenden Molekeln hin gerichtet sind, positiv und die gegenüberliegende, nach der die freien Spitzen der Molekeln weisen, negativ geladen wird, wenn man beide Seiten mit einem Reibzeuge von mittlerer elektrischer Qualität reibt. Wir dürfen ferner nach unserer elementaren Kenntnis der Piezoelektrizität, nämlich der Tatsache der Ausbildung von entgegengesetzten Elektrizitäten auf den beiden Seiten eines Kristalls unter dem Einfluß von Druck, erwarten, daß unsere vorausgesetzte Kristallplatte, wenn sie senkrecht zu ihren beiden Seiten zusammengedrückt wird, auf der einen positiv, auf der andern negativ elektrisch wird.

§ 22. Eng mit der Aufgabe über die einschließenden Zellen für Molekeln gegebener Form, die homogen angesammelt sind, verknüpft ist das des homogenen Zusammenpackens gleicher und ähnlicher Molekeln von gleichfalls gegebener Form. In jedem möglichen Falle irgendeiner unendlich großen Anzahl ähnlicher Körper ist die Lösung eine homogene Ansammlung. Je doch kann es eine homogene Ansammlung von einzelnen Festkörpern sein, die sämtlich in derselben Weise orientiert sind, aber es kann auch eine homogene Ansammlung von Gruppen von je zwei oder mehr solchen sein, die sich in verschiedenen Orientierungen zueinander befinden. Beispielsweise seien die gegebenen Körper (schräge oder nicht schräge) Hälften eines beliebigen Parallelepipeds, die zu beiden Seiten einer durch ein Paar paralleler Kanten gelegten Teilungsebene liegen. Die beiden Hälften sind homochiral<sup>1)</sup> ähnlich; und da sie gleich sind, stellen wir eine homogene Anordnung her, wenn wir

1) Ich nenne einen geometrischen Körper oder eine Gruppe von Punkten chiral und sage, daß er Chiralität besitzt, wenn sein Bild in einem ebenen Spiegel gespiegelt gedacht, nicht mit ihm zur Deckung gebracht werden

sie alle in gleicher Weise orientieren und sie passend in Reihen bringen. Aber auch die engste Packung dieser Ansammlung würde notwendig freie Räume zwischen den Körpern lassen; dagegen erhalten wir in Wirklichkeit die engste Packung der vorliegenden Körper, wenn man sie in Paaren von entgegengesetzt orientierten und so zusammengelegten Paaren verwendet, daß sie Parallelepipede bilden. Diese Gruppen können dann so zusammengepackt werden, daß sie keinen unausgefüllten Raum lassen.

Welches auch die Anzahl Stücke in einer Gruppe bei der dichtest möglichen Packung von Festkörpern für irgendeine Form sein mag, jedenfalls können wir jede Gruppe als einen vorliegenden Einzelkörper auffassen und so die Aufgabe auf die zurückführen, Ansammlungen von Individuen, die sämtlich in gleicher Weise orientiert sind, dicht aneinander zu packen; und auf diese Aufgabe wollen wir jetzt unsere Aufmerksamkeit richten.

§ 23. Um Komplizierungen zu vermeiden, wie wir sie etwa bei der gebräuchlichen Aufgabe, Gabeln oder Löffel oder Teetassen oder Nüpfе von irgendeiner der gewöhnlichen Formen homogen zu packen, finden, wollen wir annehmen, der vorliegende Körper besitze eine solche Gestalt, daß nicht zwei davon gleicher Art, bei ähnlicher Orientierung, sich in mehr als in einem Punkte berühren können. Vollkommen konvexe Körper erfüllen nach ihrem Wesen diese Bedingung; allein sie kann auch von nicht ganz konvexen Körpern befolgt werden, wie in Fig. 113 angedeutet ist.



Fig. 113.

§ 24. Um dichte und dichteste Packung einer beliebigen Anzahl unserer Festkörper  $S_1, S_2, S_3, \dots$  zu finden, die die Bedingung des § 23 erfüllen, verfähre man folgendermaßen:

1. Man bringe  $S_2$  in einem beliebigen Punkte seiner Oberfläche,  $p$  (Fig. 114, S. 520), in Berührung mit  $S_1$ .
2. Man bringe  $S_3$  mit  $S_1$  und  $S_2$  bzw. in  $r$  und  $q$  in Berührung.
3. Man bringe  $S_4$  (in der Zeichnung nicht angegeben) mit  $S_1, S_2$  und  $S_3$  in Berührung.

4. Man stelle eine beliebige Anzahl der Körper in drei die Linien von  $S_1 S_2, S_1 S_3, S_1 S_4$  fortsetzenden Reihen aneinander und in drei Folgen von gleich abstehenden Reihen, die jenen drei Reihen parallel sind. Dies ergibt eine homogene Ansammlung. Man findet, daß in der so hergestellten Ansammlung die Molekeln notwendig sich in drei Sätzen von Reihen befinden, die parallel den drei Paaren  $S_2 S_3, S_3 S_4, S_4 S_2$  sind. Der ganze von einer Ansammlung von  $n$  unserer so angeordneten Festkörper erfüllte Raum hat offenbar den  $6n$ -fachen Inhalt des den korrespondierenden Punkten von  $S_1, S_2, S_3, S_4$  entsprechenden Tetraeders. Demgemäß wird die dichteste unter den durch die Operationen 1 bis 4 herzustellenden dichten Packungen erhalten, wenn man die Operationen 1, 2 und 3 so ausführt, daß der Rauminhalt dieses Tetraeders möglichst klein wird.

kann. Zwei gleiche und ähnliche rechte Hände sind homochiral ähnlich. Gleiche und ähnliche rechte und linke Hände sind heterochiral oder „allochiral“ ähnlich (der Ausdruck heterochiral ist besser); diese werden auch „enantiomorph“ nach einem, wie ich glaube, von deutschen Schriftstellern eingeführten Sprachgebrauch genannt. Jeder chirale Gegenstand und sein Bild in einem ebenen Spiegel sind heterochiral ähnlich.

§ 25. Es ist zu beachten, daß die Operationen 1 und 2 für die Orientierung nach 3 für  $S_4$  keine weitere Freiheit der Wahl lassen als zwischen zwei bestimmten Lagen. Der Inhalt des Tetraeders wird im allgemeinen für diese beiden Lagen verschieden sein, und selbst wenn das Volumen zufällig in beiden gleich ist, erhalten wir verschieden gestaltete Ansammlungen, je nachdem wir den einen oder den andern von den beiden Orten für  $S_4$  gewählt haben.

Man sieht dies ein, wenn man auf Fig. 114 schaut, die den Körper  $S_1$  und seine Nachbarn auf jeder Seite in den Reihen von  $S_1S_2$ ,  $S_1S_3$  und in einer zu  $S_2S_3$  parallelen Reihe andeutet. Die Zeichenebene ist den Ebenen entsprechender Punkte dieser sieben Körper parallel, und die Zeichnung ist eine Projektion dieser Körper durch Linien, die den Schnittkanten der durch  $p$  und  $r$  gehenden Tangentialebenen parallel sind. Wenn sich die drei durch  $p$ ,

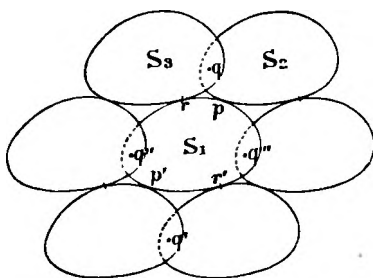


Fig. 114.

$q$  und  $r$  gehenden Tangentialebenen in parallelen Linien schneiden, wird  $q$  ebenso wie  $p$  und  $r$  als ein Berührungspunkt zwischen den projizierten Konturen zweier von den Körpern gesehen; dies ist jedoch nur ein Spezialfall, und im allgemeinen muß  $q$ , wie es in der Zeichnung angedeutet ist, von dem einen oder dem andern der beiden Körper, deren Berührungspunkt er bildet, verdeckt werden. Wenn wir uns jetzt, um etwas Bestimmteres im

Auge zu haben und Kürze des Ausdrucks zu erleichtern, vorstellen, daß die Ebenen entsprechender Punkte der sieben Körper horizontal sind, sehen wir deutlich, daß  $S_4$  sowohl von oben wie von unten in eine solche Lage gebracht werden kann, daß dieser Körper  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  berührt; und es ist für ihn nur ein bestimmter Platz vorhanden, wenn wir ihn von oben in seine Lage bringen, und nur ein anderer bestimmter Platz, wenn wir ihn von unten hinbringen.

§ 26. Wenn wir von oben auf die Festkörper schauen, deren Umrisse die Figur 114 wiedergibt, sehen wir wesentlich eine Vertiefung, die durch einen Hohlraum zwischen  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  hinabführt, und wenn wir von unten hinauf schauen, sehen wir eine zu demselben Hohlraum führende Vertiefung, wir wollen diesen Hohlraum der Kürze halber als Durchlöcherung  $pqr$  bezeichnen. Die Zeichnung gibt um  $S_1$  herum sechs Vertiefungen, die zu Hohlräumen hinabführen, von denen zwei  $pqr$  ähnlich sind und die andern drei, von denen  $p'q'r'$  eine andeutet, wiederum untereinander ähnlich, aber  $pqr$  unähnlich sich formen. Bringen wir  $S_4$  von oben in die Lage, in der dieser Körper  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  berührt, dann ist sein so gefundener Ort in der Vertiefung  $pqr$ , und die Orte aller der Körper in der Schicht über der Zeichnung müssen notwendig in den  $pqr$  ähnlichen Vertiefungen liegen. In diesem Falle müssen die Körper der Schicht unter der in der Zeichnung dargestellten in den Vertiefungen unter den  $pqr$  unähnlichen Hohlräumen liegen, wenn eine einzige homogene Ansammlung entstehen soll. Im andern Falle findet der von unten herangeführte Körper  $S_4$  seinen Platz an der untern Seite der Vertiefung  $pqr$ , und alle Körper der unteren Schicht finden ähnliche Plätze, während die Körper in der Schicht über der durch die Zeichnung



angedeuteten ihre Plätze in den der Vertiefung  $p'q'r'$  ähnlichen finden. Im ersten Falle gibt es keine Körper in der oberen Schicht in den Vertiefungen über den der Durchbohrung  $p'q'r'$  ähnlichen Durchbohrungen, und keine Körper in der unteren Schicht in den Vertiefungen unter den der Durchbohrung  $pqr$  ähnlichen Durchbohrungen. Das Entgegengesetzte gilt für den zweiten Fall, es gibt in der oberen Schicht keine Körper in den Vertiefungen über den  $pqr$  ähnlichen Durchbohrungen, und in der unteren Schicht keine unter den  $p'q'r'$  ähnlichen Durchbohrungen.

§ 27. Wenden wir uns wieder der Operation 1 des § 24 zu, so bemerken wir, daß wenn der Berührungspunkt  $p$  auf einem der beiden Körper,  $S_1$ , willkürlich gewählt ist, der Berührungspunkt auf dem andern Körper derjenige Punkt seiner Oberfläche sein muß, in dem die Tangentialebene der Tangentialebene in  $p$  parallel ist. Wenn  $S_1$  vollkommen konvex ist, hat dieser Körper nur zwei Punkte, in denen seine Tangentialebenen einer gegebenen Ebene parallel sind, und demnach ist die Operation eine bestimmte und unzweideutige. Wenn aber irgendeine Konkavität besteht, gibt es vier oder sogar eine größere Anzahl zu irgendeiner von einer Anzahl Ebenen parallele Tangentialebenen, während es andere Ebenen gibt, zu deren jeder nur ein Paar parallele Tangentialebenen vorhanden sind. Demgemäß wird die Operation 1, obwohl sie immer noch bestimmt ist, je nach der für  $p$  getroffenen Wahl eine Vielheit von Lösungen oder nur eine einzige Lösung finden. [Jede Änderung in der Anordnung der in stabilem Gleichgewichte befindlichen Ansammlung verursacht eine Ausdehnung! K., Holwood, 23. Mai 1896.]

Von jetzt ab wollen wir, um unnötige Komplikationen des Gedankenganges zu vermeiden, voraussetzen, daß unsere Körper vollkommen konvex sind und eine solche unsymmetrische Form besitzen, wie sie etwa in Fig. 114 des § 25 und in dem stereoskopischen Photogramm in Fig. 115 des § 36 angedeutet sind. Mit dieser und ohne diese bequeme Einschränkung besitzt Operation 1 zwei Freiheiten, da  $p$  auf der Oberfläche des Körpers  $S_1$  frei gewählt werden kann, und Operation 2 hat eine Freiheit, wenn Operation 1 bereits ausgeführt ist. So haben wir für einen Festkörper beliebiger Form drei disponible oder, wie sie gemeinhin in der Mathematik heißen, „unabhängige Veränderliche“, die sämtlich bei der Herstellung einer homogenen Ansammlung nach der Regel des § 22 frei sind.<sup>1)</sup>

§ 28. In der in § 24 definierten homogenen Ansammlung wird jeder Festkörper  $S_1$  in zwölf Punkten berührt, nämlich den drei Berührungspunkten mit  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  und den drei Gruppen von je drei Punkten auf  $S_1$ , die den Punkten auf  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  entsprechen, an denen diese Körper von den andern des Quadrupels berührt werden. Diesem Ausspruche zu folgen ist einigermaßen schwierig, und wir sehen die zwölf Berührungspunkte deutlicher, wenn wir unsere Aufmerksamkeit nicht auf die vier Körper  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  beschränken (so vorteilhaft dies auch für einzelne Zwecke ist), sondern die Ansammlung

1) Die Anmerkung enthält Angaben über die Packung verschiedener Materialien wie Kies, Sand, Geröll usw., die wesentlich nur den Techniker interessieren und in bekannten Nachschlagebüchern zu finden sind. Dem Physiker werden zwei Zahlen zur Veranschaulichung genügen, wonach grober Kies und Sand gegen 20 Prozent ihres Raumes leer lassen, und zwar Sand etwas mehr als Kies, und daß bei lose gehäuften Steinbrocken bis zu 50 Prozent des ganzen Raumes leer bleibt.  
D. H.

vervollständigen und sechs um  $S_1$  herum in einer ebenen Schicht der Festkörper, wie dies in Fig. 114 mit den sechs Berührungspunkten  $prq''p'r'q'''$  an  $S_1$  angedeutet ist, liegende Nachbarn und die je drei Nachbarn in den anliegenden Schichten, die  $S_1$  oben und unten (die Ebene horizontal gedacht) berühren, ins Auge fassen. Dieser Haufen von dreizehn,  $S_1$  und seine zwölf Nachbarn, ist für den Fall kugelförmiger Körper oben in dem stereoskopischen Photogramm des § 4 wiedergegeben. Wir hätten schließlich auch, wenn wir gewollt hätten, mit der ebenen Schicht anfangen können, zu der  $S_1, S_2, S_4$  als Glieder gehören, oder mit derjenigen zu der  $S_1, S_3, S_4$  oder endlich mit derjenigen der vierten Seitenfläche des Tetraeders  $S_2, S_3, S_4$  parallelen Ebene. Und so erhalten wir vier verschiedene Wege, die zwölf Berührungspunkte auf  $S_1$  in eine Reihe von sechs und in zwei Reihen von je drei zu ordnen.

§ 29. In dieser Ansammlung haben wir das, was ich eine „dichte Scharung“ oder „dichte Packung“ nenne. Für eine dichteste unter dichten Packungen muß der Rauminhalt des Tetraeders (§ 24) entsprechender Punkte von  $S_1, S_2, S_3, S_4$  ein Minimum sein, und das Kleinste unter den Minima, wenn, wie es im allgemeinen der Fall sein wird, es zwei oder mehr verschiedene Zusammenstellungen gibt, für die sämtlich das Volumen ein Minimum ist. In der Regel werden auch Anordnungen von einem Minimaximumvolumen und einem Maximumvolumen vorhanden sein, die gleichfalls der Bedingung gehorchen, daß jeder Körper von zwölf ähnlich orientierten Nachbarn berührt wird.

§ 30. Wir wollen einen Augenblick bei der Betrachtung der interessanten kinematischen und mechanischen Probleme verweilen, die eine dichte homogene Ansammlung glatter, fester Körper von gegebener konvexer Form bietet, die entweder vollkommen reibungslos sind, oder einen Widerstand gegen Gleiten aneinander nach dem gewöhnlichen festgestellten Reibungsgesetze zwischen harten festen Körpern ausüben. Zuerst stellen wir uns vor, daß sie alle ähnlich orientiert sind und daß sich jeder in Berührung mit zwölf Nachbarn befindet, außer den freiliegenden (wovon welche an der Grenzfläche vorhanden sein müssen, wenn die Ansammlung eine begrenzte ist, und von denen jeder von irgendeiner Anzahl Nachbarn berührt werden muß, die kleiner als zwölf ist). Die so bestimmte zusammenhängende Ansammlung bildet einen kinematischen Rahmen oder ein Skelett für einen elastischen Körper von sehr besonderen Eigenschaften. Anstatt der sechs freien oder disponibeln Deformationen, die ein natürlicher Körper sonst besitzt, hat diese nur drei. Eine Formänderung des ganzen kann nur vermöge einer Drehung der ihn zusammensetzenden Teile gegen eine beliebig gewählte Reihe von diesen Teilen und gegen die, durch diese Reihe und eine andere gewählte Reihe bestimmte, Ebene Platz greifen.

§ 31. Wir setzen voraus, daß die Festkörper nicht bloß vollkommen glatt, sondern vollkommen reibungslos sind; die Ansammlung sei an ihrer ganzen Grenzfläche einem gleichmäßigen positiven oder negativen, nach innen gerichteten Drucke ausgesetzt; jede Lage eines Minimum-, Minimaximum- oder Maximum-Volumens sei eine Gleichgewichtslage. Wenn der Druck positiv ist, ist dann das Gleichgewicht ein stabiles, sobald das Volumen ein Minimum ist, und ein unstabiles, wenn dies nicht zutrifft. Wenn der Druck

negativ ist, fällt das Gleichgewicht stabil aus, wenn das Volumen ein Maximum ist, und unstabil, wenn dieses nicht zutrifft. Anordnungen, bei denen das Volumen ein Minimaximum ist, sind ihrem Wesen nach unstabil.

§ 32. Wir stellen uns jetzt die Ansammlung des § 31 in einer Lage stabilen Gleichgewichts unter dem Einflusse eines gegebenen auf seine ganze Grenze nach innen wirkenden gleichförmigen Druckes vor. Sie besitzt dann eine Starrheit, einfach proportional diesem Drucke. Wird jetzt durch Anwendung eines nicht-gleichförmigen Druckes an der Grenzfläche, beispielsweise indem man an zwei Seiten der Ansammlung, einen gleichen und entgegengesetzt gerichteten Druck hinzufügt, eine bestimmte Formänderung bewirkt, so schwillt die ganze Ansammlung dabei an Raum an. Dies ist das „Ausdehnungsstreben“ („dilatancy“), das Osborn Reynolds in einer äußerst interessanten Weise für einen Sack Weizen oder Sand oder einen mit Sand oder selbst kleinem Schrot dicht gefüllten Kautschukbeutel beschrieben hat.<sup>1)</sup> Stellen wir uns beispielsweise einen Sack Weizen vor, der vollständig gefüllt und oben offen dasteht. Er ist weich und biegsam. Nunmehr schüttele man ihn tüchtig zusammen, fülle ihn wieder vollständig nach, schüttele wieder, so daß man soviel wie möglich hineinbekommt, und binde die obere Sackborde sehr dicht zu. Dann wird der Sack fast so steif wie ein Holzklotz von derselben Form. Jetzt öffne man den Sack teilweise, so wird er wieder weich, besonders an den oberen Teilen. Bei den Beobachtungen Reynolds an Kautschukbeuteln mit feinem Schrot hängt das „Ausdehnungsstreben“ dem Wesen nach und gänzlich von dem Abbrechen einzelner Berührungen ab, die zwischen den Molekeln bei ihrer Anordnung zu kleinstem Volumen bestehen; und es ist möglich, daß in allen seinen Fällen die Ausdehnungen, die er beobachtet hat, hauptsächlich, wenn nicht ganz, von solchen Kontaktbrüchen herühren.

Es ist aber wohl möglich, ja es erscheint fast wahrscheinlich, daß bei Säcken oder Kisten mit Sand oder Pulver, überhaupt manchen Arten glatter abgerundeter Körper von beliebiger, nicht sphärischer oder ellipsoidischer Form, die dauernd ungleichen Drucken in verschiedenen Richtungen ausgesetzt sind und gut geschüttelt werden, stabile Gleichgewichtslagen sich einstellen, in denen fast alle Partikel von zwölf anderen berührt werden.

Hier liegt ein sonderbarer Gegenstand vor, der die ganze Zeit bis 1885 der Naturbeschreibung angehört hat, dann aber von Reynolds durch die folgende hochinteressante Feststellung in das Gebiet der Naturwissenschaft übergeführt wurde: „Eine gut ausgeprägte Erscheinung erhält sofort ihre Erklärung durch das Vorhandensein eines Ausdehnungsstrebens in Sand. Wenn die Ebbe den Sand fest zurückläßt, wird dieser, wenn auf ihn mit dem Fuß getreten wird, weiß und erscheint augenblicklich um den Fuß herum trocken. Bei dieser Erscheinung ist der Sand voll Wasser, dessen Oberfläche durch kapillare Anziehungen zunächst in der Höhe derjenigen des Sandes gehalten wird; da der Druck des Fußes eine Ausdehnung des Sandes verursacht, wäre mehr Wasser zur Ausfüllung erforderlich; dies kann aber nur erhalten werden entweder durch Herabdrücken der Höhe der Wasseroberfläche entgegen

1) Philosophical Magazine, Bd. XX, 1885, Zweites Halbjahr, S. 469 und British Association Report, 1885, Aberdeen, S. 896.

den kapillaren Anziehungen oder durch Herausziehen von Wasser aus den Zwischenräumen des umgebenden Sandes. Dies letztere erfordert aber Zeit, zustande zu kommen, so daß für den Augenblick die kapillaren Kräfte überwunden werden; die Oberfläche des Wassers wird unter die des Sandes gesenkt und läßt ihn weiß oder trockner zurück, bis die Flüssigkeit wieder steigt und den Sand von neuem anfeuchtet. Beim Heben des Fußes bemerkt man allgemein, daß der Sand unter dem Fuße und um ihn herum augenblicklich feucht wird; dies geschieht, weil nach der Entfernung der deformierenden Kräfte der Sand sich wieder zusammenzieht und das überschießende Wasser an der Oberfläche Erleichterung findet.“

Dies beweist, daß der Sand unter dem Fuße ebenso wie der an der Oberfläche in seiner Umgebung für eine kurze Zeit, nachdem der Fuß darauf gedrückt wurde, trocken sein muß, obwohl wir unter dem Fuß nicht sehen können, daß der Sand weiß geworden ist, da der Fuß ja nicht durchsichtig ist. Daß dem aber so ist, wurde von Herrn Alex. Galt, Experimental-Instruktor am Physikalischen Laboratorium der Universität Glasgow dadurch festgestellt, daß er eine kleine quadratische Glasplatte auf feuchten Sand am Strande von Helensburgh legte und plötzlich mittels einen starken Steckens nahezu mit seinem ganzen Gewicht darauf drückte. Er fand sowohl den Sand unter dem Glase wie den in dessen Umgebung in Berührung mit der Luft befindlichen in demselben Augenblicke weiß geworden. Wie viele von den zweihunderttausend Millionen Männern, Frauen und Kindern, die seit Erschaffung der Welt je über feuchten Sand gegangen sind, hätten vor der Versammlung der British Association zu Aberdeen im Jahre 1885, wenn sie gefragt worden wären: „Wird der Sand unter Ihrem Fuße zusammengedrückt?“ anders als „Ja!“ geantwortet?<sup>1)</sup>

(Gegensatz gegen den Fall, daß man über eine Lage feuchten Sees geht!)

§ 33. In dem Falle in dichtester Anordnung aneinander gepackter Kugeln (und demnach ebenso in dem Falle von Ellipsoiden, wenn sie sämtlich ähnlich orientiert sind), schließt unsere Bedingung zusammenhängender Berührung zwischen jeder Molekel und ihren zwölf Nachbarn absolute Starrheit und Konstanz des erfüllten Raumes ein. Demgemäß darf unser konvexer Festkörper weder ellipsoidisch noch sphärisch sein, wenn die Raumänderungen sollen eintreten können, von denen wir uns klargemacht haben, daß sie von drei unabhängigen, die Orientierung jedes Festkörpers gegen Reihen der Ansammlung charakterisierenden, Veränderlichen abhängen. Eine interessante dynamische Aufgabe bietet sich, wenn man voraussetzt, daß zwischen den festen Molekeln beliebige Kräfte, wie sie etwa durch Federn erzeugt werden würden, wirken, und man unter Voraussetzung reibungsloser Berührungen Gleichgewichtsanordnungen untersucht. Die Lösung ist schließlich die, daß die potentielle Energie der Federn ein Minimum, ein Minimaximum oder ein Maximum für Gleichgewicht überhaupt, und ein Minimum für stabiles Gleichgewicht sein muß. Die Lösung gibt eine Anordnung von einem Minimum, einem Minimaximum oder einem Maximum des Volumens nur für den Fall eines in allen Richtungen gleichmäßigen Druckes.

1) Über die Anordnung von Sandhaufen vgl. eine Arbeit von F. Auerbach, *Drude's Annalen der Phys.*, Bd. 5 (1901), S. 170 ff. D. H.

§ 34. Eine geometrische Frage, ohne Wichtigkeit für die molekulare Anordnung eines Kristalls, aber von beträchtlichem Interesse in rein mathematischer Hinsicht, drängt sich unserer Beachtung in der Tatsache auf, die wir festgestellt haben (§ 27), daß eine homogene Ansammlung von Festkörpern beliebiger Form, von denen jeder von zwölf Nachbarn berührt wird, drei Freiheiten besitzt, als welche bequem die drei, die Orientierung jeder Molekel gegen Reihen der Ansammlung bestimmenden, Winkel gewählt werden können, wie es in § 30 auseinandergesetzt ist.

Wir fassen einen Festkörper  $S_1$  und die zwölf ihn berührenden Nachbarn ins Auge und versuchen, ob es möglich ist, es so einzurichten, daß er mehr als zwölf von den Körpern berührt. Wir befestigen an drei beliebigen Stellen der Oberfläche von  $S_1$  dicke, biegsame Drähte, führen sie durch die Hohlräume der Ansammlung und heften ihre andern Enden an drei beliebige Stellen der Körper  $A, B, C$ , die sonst willkürlich zu wählen sind, aber nicht zu dem Haufen  $S_1$  und seinen zwölf Nachbarn gehören. Jetzt durchschneiden wir die Fäden an beliebig gewählten Stellen, runden die abgeschnittenen Enden ab, lassen aber die abgerundeten Enden, die wir mit  $f', f; g', g; h', h$  bezeichnen, in Berührung. Ähnlich verfahren wir mit jedem andern Festkörper der Ansammlung. Nunmehr biegen wir die Drähte leicht so, daß ihre Berührungspunkte sich voneinander trennen; tragen dabei aber dafür Sorge, daß die Drähte keinen andern Körper, an dem sie auf ihren Wegen zwischen  $S_1$  und bzw.  $A, B, C$  nahe vorüberkommen, berühren. Nachdem dies ausgeführt ist, lassen wir alle so in ihrer Lage geänderten Drähte vollständig erstarren. Wir können nun, da uns drei unabhängige Veränderliche zur Verfügung stehen, die Orientierung der Molekeln gegen die Reihen der Ansammlung so ändern, daß die Punkte  $f', f; g', g; h', h$  wieder in Berührung miteinander kommen. So haben wir sechs neue Punkte von  $S_1$ ; drei von diesen sind  $f', g', h'$ ; die andern drei liegen auf den drei Anhängseln von  $S_1$ , die je einem der Anhängsel von  $A, B, C$ , die wir hergestellt haben, entsprechen. Das gibt eine tatsächliche Lösung der folgenden geometrischen Aufgabe: Es soll eine homogene Ansammlung von Festkörpern von beliebig gegebener Form so hergestellt werden, daß jeder Festkörper von achtzehn andern berührt wird. Diese Aufgabe ist eine bestimmte, da die Herstellung der drei Berührungen  $f'f, g'g, h'h$ , nachdem wir zuerst eine homogene Ansammlung mit zwölf Berührungspunkten auf jedem Festkörper besessen hatten, die drei noch verfügbar gebliebenen unabhängigen Veränderlichen verbraucht. Jedoch zeigt die Art, wie wir eine Form für jeden Festkörper gefunden haben, die eine Lösung der Aufgabe ermöglicht, daß die Lösung für jede vollkommen konvexe Form wesentlich nur in der Idee bestehen kann.<sup>1)</sup>

§ 35. Bleiben wir einen Augenblick länger bei der geometrischen Aufgabe, beliebig gegebene, einander ähnliche Festkörper so aneinander zu legen, daß sie eine homogene Ansammlung bilden, in der jedes Glied von achtzehn andern Gliedern berührt wird, so sehen wir, daß sie eine bestimmte ist (gleichviel ob sie irgendeine tatsächliche Lösung besitzt oder nicht), da wir, wenn die Form eines jeden Körpers gegeben ist, neun Veränderliche zur Verfügung haben, durch die wir die Ansammlung festlegen: sechs für den Charakter

1) Übrigens setzt die Lösung auch voraus, daß von jedem der Körper kontinuierliche Linienzüge durch Höhlungen zu jedem anderen der Körper führen können.

der Ansammlung der einander entsprechenden Punkte und drei für die Orientierung jeder Molekel gegen Reihen der Ansammlung entsprechender Punkte. Diese neun verfügbaren Veränderlichen sind durch die Bedingung bestimmt, daß jeder Körper neun Paare Berührungspunkte mit andern besitzen soll.

Jetzt setzen wir voraus, eine homogene Ansammlung der gegebenen Körper sei, in offener Anordnung ohne Berührungen, willkürlich hergestellt mit irgendwelchen neun willkürlich gewählten Werten, sechs für die Abstände zwischen einem Punkte des Körpers  $S_1$  und den entsprechenden Punkten seiner sechs Paare von nächsten und nächst nächsten Nachbarn (§ 1 oben), und drei für die drei Winkel (§ 9 oben), die die Orientierung jedes Körpers gegen Reihen der Ansammlung charakterisieren. Wir können in beliebigen neun durch  $S_1$  gehenden Reihen beliebige neun Körperpaare in gleichen Abständen zu beiden Seiten von  $S_1$ , weit oder nahe, für die achtzehn Körper auswählen, die mit  $S_1$  in Berührung sein sollen. Folglich gibt es eine unendliche Anzahl Lösungen der Aufgabe, von denen jedoch nur eine begrenzte Anzahl reell sein kann. Jede Lösung der Aufgabe der achtzehn Berührungen ist imaginär, wenn die Form ganz konvex ist.

§ 36. Sehen wir davon ab, daß die Molekeln der Materie harte Festkörper von konvexer Form zu sein vermöchten, so können wir wertvolle

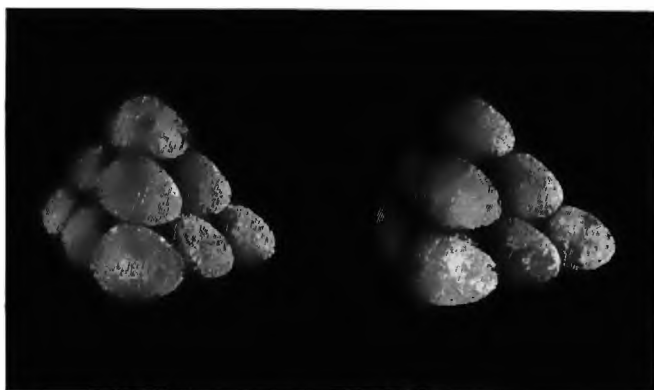


Fig. 115.

Auskünfte über die Anordnung in wirklichen Kristallen erhalten, wenn wir die in §§ 24 und 25 beschriebenen und in den Figg. 114 und 115 dargestellten Ansammlungen studieren. Ich muß aber für jetzt den sehr anziehenden Gegenstand der Anordnungen in Flächen, die nicht der einen oder andern der vier Seitenflächen des von uns in § 24 gefundenen Elementartetraeders parallel sind, verlassen und bitte Sie nur, sich die beiden Seiten einer Kristallplatte parallel einer jener Seitenflächen vorzustellen, also eine Ansammlung von solchen Schichten, wie sie in Fig. 114 schematisch dargestellt und in Fig. 115 in stereoskopischer Ansicht wiedergegeben ist. Wenn, wie in dem Falle der in der Fig. 115 fotografierten Festkörper<sup>1)</sup> die untere Seite jedes Körpers

1) Die Festkörper, nach der die Photographie ausgeführt ist, sind Güsse aus Gips in einer skalenodrischen Matrize aus Paraffin mit abgerundeten Ecken und Kanten.

nahezu eben, nur schwach konvex, und die Spitze einigermaßen stark gekrümmt ist, haben wir einen Unterschied der Art zwischen der oberen und der unteren der beiden parallelen Seiten des Kristalls vor uns, die ich Ihnen bereits früher in § 21 beschrieben habe. In diesem Falle wird die Ansammlung dadurch hergestellt, daß man die Körper von oben herabfallen und in den Vertiefungen liegen läßt, in die sie am leichtesten hineinkommen oder die ihnen die stabilste Lage gewähren. Es werden, das dürfen wir voraussetzen, die Höhlungen  $p'q'r'$  und nicht die  $pqr$  (Fig. 114, § 25) sein, die gewählt werden würden; und so werden wir von den beiden in § 25 beschriebenen Formationen die finden, in denen die Vertiefungen über  $p'q'r'$  von den vergleichsweise flachen Unterseiten der Molekeln der darüber befindlichen Schicht und die Höhlungen unter den Öffnungen  $pqr$  von den vergleichsweise scharfen Spitzen der Molekeln der darunter befindlichen Schicht eingenommen werden.

§ 37. Für viele Fälle natürlicher Kristalle des ganz unsymmetrischen Systems werden die wirklichen Kräfte zwischen den Kristallmolekeln dieselben Kristallisationsanordnungen bestimmen, wie sie der Einfluß der Schwere und der Flüssigkeitsviskosität beim Absetzen von Sand aus Wasser bestimmt, der aus gleichförmigen Molekeln der ganz unsymmetrischen in den Figg. 114 und 115 dargestellten Form besteht. So gelangen wir leicht zu der Anschauung, daß ein wirklicher Kristall, indem er an der in Fig. 114 sichtbaren Fläche anwächst, Schicht an Schicht in regulärer Weise liefert, wie ich es eben beschrieben habe. Wenn aber infolge irgendeiner Änderung der Umstände die Platte, die bereits in dieser Weise zu einer viele Schichten enthaltenden Dicke angewachsen ist, jetzt dazu kommt, die in der Zeichnung von uns abgewendete Seite der flüssigen oder gasförmigen Mutterlauge zuzuwenden und von dieser Seite zu wachsen anfängt, dann dürfte die Anordnung wahrscheinlich in der Weise erfolgen, daß jede Molekel ihre Ruhelage mit ihrer, einer Ebene am nächsten kommenden, Seitenfläche in den weiteren Vertiefungen unter  $p'q'r'$  statt mit ihrer schärfsten Ecke in den engeren und steileren Vertiefungen unter  $pqr$  finden wird, wie es bei der erstbeschriebenen Formation die Molekeln in der Schicht unter der in der Zeichnung dargestellten tun. Das Resultat würde ein zusammengesetzter Kristall sein, der aus zwei Teilen von verschieden orientierter Eigenschaft besteht, die an den beiden Seiten einer Zwischenebene vollkommen miteinander zusammenhängen. Es erscheint wahrscheinlich, daß diese Doppelstruktur in der Natur gefunden werden dürfte, und zwar bei Kristallen des ganz unsymmetrischen Systems, obwohl sie bisher noch nicht beobachtet oder in Lehrbüchern der Kristallographie beschrieben ist.

§ 38. Dieser unsymmetrische Doppelkristall geht einfach in den allgemein bekannten symmetrischen Zwillingskristall<sup>1)</sup> in dem besonderen Falle

1) „Ein Zwillingskristall ist aus zwei in solcher Weise miteinander verbundenen Kristallen zusammengesetzt, daß der eine in die Lage des andern dadurch gelangt, daß man ihn um zwei Rechte um eine Achse dreht, die zu einer Ebene senkrecht ist, die eine Seitenfläche eines Kristalles ist oder sein kann. Die Achse heißt die Zwillingsachse und die Ebene, gegen die sie senkrecht ist, die Zwillingsebene.“ Millers Treatise on Crystallography, S. 103 (vgl. insbesondere auch das Buch von Naumann, „Elemente der Mineralogie“, und die anderen so bekannten deutschen Lehrbücher. D. H.).

Im Text ist das den Arbeiten von Stokes und Rayleigh entlehnte Wort

über, daß jede der den Kristall zusammensetzenden Molekeln gegen die beiden Seiten einer sie durchquerenden, unserer Zeichenebene parallelen Ebene und ebenso gegen die beiden Seiten einer zu dieser senkrechten Ebene symmetrisch ist. Wir sehen in der Tat, daß, wenn wir in diesem Falle den Doppelkristall durch die Ebene der Fig. 116 in zwei Kristalle zerschneiden und einen Teil in Gedanken um  $180^\circ$ , um die Schnittkante dieser Ebenen drehen, wir ihn mit dem andern Teile zu vollständigem Zusammenfallen bringen. Dies verstehen wir leicht, wenn wir auf Fig. 116 schauen, in der der im Umriss dar-

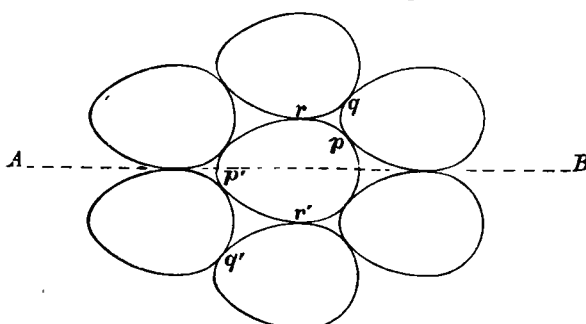


Fig. 116.

gestellte Festkörper ein eiförmiger Umdrehungskörper oder auch ein solcher durch einen gegen die Zeichenebene senkrechten Druck abgeplatteter Körper sein mag. Die am besten eingenommenen und stabilsten Ruhelagen der Glieder jeder nächsten Schicht dürften die weiteren

Höhlungen  $p'q'r'$  sein; und demnach dürfte die Ansammlung, wenn sie mit einer Schicht beginnend durch Hinzufügung immer je einer Schicht auf jeder Seite wächst, sich wahrscheinlich zu einem Zwillingkristall auswaschen. Es kann aber auch sein, daß das Vorhandensein einer Molekel in der weiteren Vertiefung  $p'q'r'$  auf der einen Seite, die Ausfüllung der entsprechenden Vertiefung auf der andern Seite durch eine andere Molekel weniger wahrscheinlich oder gar unmöglich macht. Demgemäß kann nach der Anordnung und den molekularen Kräften der besonderen Kristallmolekel bei der natürlichen Kristallbildung das Entstehen eines Zwillings notwendig oder fast notwendig sein, wenn das Wachsen auf beiden Seiten vor sich geht; oder die Zwillingbildung kann auch unmöglich sein, wenn die erste Ausfüllung der weiteren Vertiefung auf der einen Seite die Stetigkeit der Kristalleigenschaft im ganzen Gebilde erzwingt, indem sie für die Ausfüllung durch Molekeln, die sich an der andern Seite frei anlegen, nur die kleineren Vertiefungen frei läßt.

„Zwillingsebene“ (das Wort ist in Deutschland längst üblich, jedoch in dem zuerst gebrauchten Sinne; die den beiden Kristallen gemeinsame Ebene nennen wir die „Verwachsungsebene, d. H.) zur Bezeichnung der den beiden Kristallen in jedem der angeführten Fälle gemeinsamen Ebene verwendet; und nicht für die zu dieser Ebene senkrechte Ebene, in der der eine Teil des Kristalles gedreht werden muß, wenn er zum Zusammenfallen mit dem andern gebracht werden soll, die die Zwillingsebene nach der Definition von Miller bildet.

Ferner muß die Zwillingbildung, bei der jede Molekel gedreht ist (M. P. P. Bd. III, XC VII. §§ 60, 61) noch in Betracht gezogen werden. Hier brauchen nicht alle Molekeln dieselbe Orientierung zu besitzen. Vgl. Zeile 12 von unten in § 37. K., 12. Okt. 1896.

Eine Drehung in der Zeichenebene, wie sie von Miller behandelt ist, könnte die Molekeln nicht mit ihren dicken und schwachen Enden zum Zusammenfallen bringen; wohl aber bringt sie eine Drehung um die Achse AB zum Zusammenfallen. K., 12. Okt. 1896.



§ 39. Oder der Charakter der Kristallmolekeln kann auch ein solcher sein, daß, wenn die Ansammlung durch Anschließen von Schicht nach Schicht nur an einer Seite mit einer nicht sehr stark entschiedenen Bevorzugung der weiteren Vertiefungen  $p'q'r'$  wächst, irgendeine Änderung von Umständen die Molekeln einer Schicht veranlassen kann, weiterhin in einer Vertiefung  $pqr$  Platz zu suchen. Dann würden die Molekeln der auf diese folgenden Schicht die Vertiefungen  $p'q'r'$  auf der entfernteren Seite besetzt finden und so eine Vorliebe zugunsten der Vertiefungen  $pqr$  gewinnen. So könnte Schicht nach Schicht hinzukommen und ein Zwillingsteil des Wachstums sich bilden, der weiter wächst, jedoch mit einer geringeren Sicherheit für eine fortgehende Homogenität, als wenn der Kristall von Anfang an durch Ausfüllen der weiteren Vertiefungen  $p'q'r'$  gewachsen wäre. Es kann dann wieder eine leichte Störung eintreten, die die Molekeln einer neuen Schicht veranlaßt, nicht in den kleineren Vertiefungen  $pqr$ , sondern in den weiteren  $p'q'r'$ , trotz der Nähe der Molekeln in den weiteren Vertiefungen auf der andern Seite, anzuschließen. Derartige Störungen, die unregelmäßig während des Anwachsens eines Kristalls auftreten, können eine große Anzahl aufeinander folgender Zwillingbildungen in parallelen Ebenen mit unregelmäßigen Zwischenräumen zwischen ihnen hervorrufen, oder es kann auch durch eine regelmäßige periodische Störung, die eine gewisse Zahl Perioden auftritt und dann aufhört, eine Anzahl Zwillingbildungen in gleich weit voneinander abstehenden Ebenen hervorgerufen werden. Aber gleichviel, ob regelmäßig und periodisch, oder unregelmäßig, immer wird das Bestreben herrschen, daß die Anzahl der Zwillinge eine gerade ist, und daß, nachdem die Störungen aufgehört haben, der Kristall wegen der dauernden Verleitung zugunsten der weiteren Vertiefungen  $p'q'r'$  in der erstbeschriebenen Weise weiterwächst. Für diese Änderungen der molekularen Anordnungen, auf deren Existenz wir durch die Betrachtung der zufälligen Zusammenstellungen von Molekeln notwendig geführt werden, gibt es zweifellos Beispiele in einer großen Zahl bei natürlichen Kristallen gefundener Zwillinge und Gegenzwillinge. Bei der künstlichen Kristallbildung von Kaliumchlorat kommen sie häufig vor, wie sich nicht bloß an den in den Kristallformen leicht erkennbaren Zwillingen und Gegenzwillingen, sondern auch an der bei vielen Kristallen, die man unter einer sehr großen Menge findet, beobachteten glänzenden Irideszenz zeigt, die vor zehn Jahren von Sir George Stokes wissenschaftlich untersucht und in einer Mitteilung an die Royal Society „On a remarkable phenomenon of crystalline reflection“<sup>1)</sup> (Proc. R. S. Bd. XXXVIII, 1885, S. 174) beschrieben wurde.

§ 40. Eine sehr interessante Erscheinung an einem ursprünglich klar homogenen, dann aber durch Erhitzung auf etwa 245°—248° C geänderten Kristall von Kaliumchlorat, die ich Ihnen durch die Freundlichkeit von Lord Rayleigh und des Entdeckers, Herrn Madan, vorzuführen in der Lage bin, zeigt einen anderen, wundervollen, für die molekulare Konstitution elastischer Festkörper äußerst belehrenden Fall der Änderung der molekularen Anordnung. Wenn ich diese, der Haltbarkeit wegen zwischen Glasplatten gekittete Platte aus Kaliumchlorat mit der Normale gegen ihre Ebene unter 10°

1, Bergkristall ist ein sehr bekanntes Beispiel für die Mehrlingsbildung, oft sogar mit völliger Durchdringung der einzelnen Individuen, nicht bloß mit Aneinanderreihung.  
D. H.

oder mehr gegen ihre Gesichtslinie geneigt halte, bemerken Sie an der Fläche ein flittriges Aussehen, fast so hell, als ob es eine Platte von poliertem Silber wäre; und wenn ich ein Licht dahinter halte, sehen Sie, daß die kleine Platte fast vollkommen undurchsichtig wie ein Metallblech erscheint. Jetzt aber, wenn ich sie nahezu senkrecht gegen Ihre Gesichtslinie halte, ist das flittrige Aussehen verschwunden, und Sie können auch deutlich durch die Platte schauen, und Sie sehen ferner, daß sehr wenig Licht an ihr reflektiert wird. Als Resultat sowohl der Untersuchungen des Herrn Madan als auch weiterer eigener Beobachtungen gelangte Lord Rayleigh zu dem Schlusse, daß die fast vollkommene totale Reflexion weißen Lichtes, die Sie zuerst feststellten, von der Reflexion von Licht an vielen Zwischenebenen zwischen aufeinander folgenden Zwillings- und Gegenzwillingskristallen von kleiner unregelmäßiger Dicke, und nicht etwa von Spalten oder Höhlungen oder irgendeiner andern mechanischen Abweichung von der Homogenität hervorgerufen wird. Es handelt sich vielmehr lediglich um solche Zwillingsbildungen mit Schichten, die sich durchaus in molekularer Berührung an den Zwischenebenen befinden.

§ 41. Als der ursprünglich klare Kristall von Madan zuerst sehr allmählich bis nahe an seinen Schmelzpunkt ( $359^{\circ}$  nach Carnelly) erhitzt wurde, blieb er klar und erhielt sein flittriges Aussehen erst, als er sich auf etwa  $245^{\circ}$  oder  $248^{\circ}$  abkühlte.<sup>1)</sup> Rayleigh fand, daß ein so alterierter Kristall, wenn er wieder und wieder erhitzt wurde, sein flittriges Aussehen verlor und bei einer beträchtlich unter dem Schmelzpunkte liegenden Temperatur vollkommen klar wurde, jenes Aussehen aber wieder erlangte, sobald er bis zu der genannten Temperatur abgekühlt wurde. Es erscheint demnach sicher, daß die Molekeln bei Temperaturen über  $248^{\circ}$  und unter dem Schmelzpunkte so viel Wärmebewegungen besitzen, daß sie durch diese Bewegungen im Schwanken zwischen den Lagen  $pqr$  und  $p'q'r'$  unserer Zeichnungen gehalten werden, aber nicht so viel, um die Starrheit des Festkörpers

1) „Ein klarer, durchsichtiger Kristall von chloresurem Kalium, dessen unvermeidliche Zwillingsplatte fortgerieben war, so daß er auf eine einzelne Kristallhaut von etwa 1 mm Dicke sich reduziert fand, wurde zwischen zwei Glimmerstücken angebracht und auf eine dicke Eisenplatte gelegt. In einer Entfernung von etwa 3 cm wurde ein kleines Stückchen chloresures Kalium aufgelegt und hinter diesem Stückchen wurde mit einem Bunsenbrenner erhitzt, um ein Zeichen dafür zu haben, wenn die Temperatur der Platte sich dem Schmelzpunkt dieser Substanz ( $359^{\circ}$  C nach Prof. Carnelly) näherte. Die Kristallplatte wurde während des Erhitzens sorgfältig beobachtet, aber keine Verschlechterung des Aussehens griff Platz und keine sichtbare Veränderung wurde bemerkt, auch nicht, als der kleine Probekristall unmittelbar über dem Brenner zu schmelzen begann. Jetzt wurde die Lampe entfernt, und sobald die Temperatur einige Grad gesunken war, breitete sich eine auffallende Veränderung rasch und still über der Kristallplatte aus, vermöge deren sie Licht fast so hell reflektierte, als wenn eine Silberhaut auf ihr niedergeschlagen worden wäre. Eine weitere Änderung trat bei der Abkühlung nicht ein; dann wurde die Platte, nachdem sie auf beiden Seiten abgerieben und poliert war, mit Kanadabalsam für weitere Untersuchungen zwischen Glasplatten befestigt. Viele Kristalle wurden mit genau ähnlichem Erfolge ähnlich behandelt, und die Temperatur, bei der die Änderung eintrat, wurde bestimmt, indem man die Platten auf ein Bad geschmolzenen Zinns mit eingesenktem Thermometer legte, und es wurde gefunden, daß sie zwischen  $245^{\circ}$  und  $248^{\circ}$  lag. Bei Einzelkristallplatten ist eine Zerstörung nie beobachtet worden; dagegen trat eine solche bei den gewöhnlichen Mehrlingsplatten stets mehr oder weniger heftig auf; jedes Bruchstück zeigte das oben angeführte glänzende Reflexionsvermögen.“ Nature, 20. Mai 1886.

aufzuheben; und daß, wenn der Körper unterhalb  $248^0$  abgekühlt wird, den Molekeln die Möglichkeit bleibt, sich in der einen oder andern der beiden Anordnungen festzusetzen, jedoch mit einer kleinen Bevorzugung der einen vor der andern. Es ist sicher eine sehr bemerkenswerte, durch diese Beobachtungen entdeckte Tatsache in der Naturbeschreibung, daß, wenn die Molekeln aus einer wässrigen Lösung zur Bildung eines Kristalls sich aneinander schließen, sie eine so weit entschiedenere Vorliebe für eine stetige Homogenität der Ansammlung haben sollen, als wenn sie beim Abkühlen in die Lage kommen, sich nach ihren Bewegungen in einem starren aber beinahe schmelzenden Festkörper festzusetzen.

§ 42. Jedoch auch bei der Kristallisation von Kaliumchlorat aus wässriger Lösung ist der Antrieb für eine vollständige Homogenität nicht unter allen Umständen entscheidend. Zunächst geht der Antrieb zu Anfang, wenn die Kristallbildung mit einer einzelnen ebenen Molekelschicht, wie sie schematisch in Fig. 116 dargestellt ist, beginnt, nicht so weiter, daß sie zu beiden Seiten dieser Schicht einen homogenen Kristall bildet, sondern wahrscheinlich so, daß ein Zwillingskristall nach beiden Seiten entsteht, genau wie es in § 38 beschrieben ist; und wenn es so ist, sicher aus dem dort ausgesprochenen Grunde. Dies nennt Madan das „eingewurzelte Bestreben, Zwillinge zu erzeugen“, wie es sicher einen Malthus zur Verzweiflung bringen würde<sup>1)</sup>; und auf diese Tatsache spielt er in der in der Anmerkung zu § 41 aus seiner Abhandlung angeführten Stelle als auf „die unvermeidliche Zwillingsplatte“ an.

§ 43. Weiter muß ich Ihnen berichten, daß viele von den nach dem gewöhnlichen Verfahren langsamer Verdunstung und Kristallisation aus einer wässrigen Lösung entstandenen Kristallen in unregelmäßigen Abständen in dem sonst homogenem Kristall Verzwilligung und Gegenverzwilligung<sup>2)</sup> zeigen, auf einer Seite oder auf beiden Seiten der mittleren Zwillingsebene, die ich von nun ab der Kürze wegen (indem ich mich der bereits dargestellten Hypothese, die mir unzweifelhaft richtig zu sein scheint, anschließe) als die „Anfangsebene“ bezeichnen will. Jeder Verzwilligung folgt, wie ich glaube, in kurzem Abstände eine Gegenverzwilligung; jedenfalls zeigen die Beobachtungen von Lord Rayleigh<sup>3)</sup>, daß die Gesamtzahl von Zwillingen und Gegenzwillingen in einer dünnen gestörten Schicht des Kristalls auf einer Seite der mittleren Zwillingsebene im allgemeinen, vielleicht immer eine gerade ist, so daß, mit Ausnahme eines vergleichsweise sehr kleinen Teiles der ganzen Dicke oder mehrerer solchen Teile, der Kristall zu beiden Seiten der Mittel- oder Anfangsebene homogen ist. Dies ist genau das im allgemeinen regelmäßige Wachsen eines Kristalls, das ich Ihnen (§ 39), als zwar gelegentlich oder zufällig durch irgendeine unaufgeklärte Ursache unterbrochen, aber mit einer im Wesen begründeten Neigung für die homogene Weiterbildung der leichteren oder natürlicheren von den beiden möglichen Anordnungen beschrieben habe.

§ 44. Kristalle der behandelten Art sind auch besonders irisierend. Solche, aus chlorsaurem Kali, sandte im März 1854 Dr. W. Bird Herapath an Prof. Stokes, die glänzende und schöne Farben zeigten, und dreißig

1) Nature, 20. Mai 1886.

2) Ich weiß keine bessere Wiedergabe. Gegenverzwilligung ist gekennzeichnet durch alternierende Wiederkehr der gleichen Kristalle. D. H.

3) Philosophical Magazine, 1888, Zweites Halbjahr, S. 260.

Jahre später lenkte Prof. E. J. Mills des gleichen Forschers Aufmerksamkeit auf den Gegenstand, als er ihm „eine schöne Sammlung glänzend gefärbter Kristalle aus chloressaurem Kali von beträchtlicher Größe übermittelte, von denen einige Platten eine Fläche von einem Quadratzoll und mehr besaßen, und die alle hinreichend dick waren, um ohne Schwierigkeit gehandhabt zu werden.“ Die Folge war, daß Stokes eine eingehende Untersuchung über den Charakter der Erscheinung ausführte und eine kurze aber höchst interessante Mitteilung an die Royal Society lieferte, von der ich hier schon gesprochen habe. Die Existenz dieser schön gefärbten Kristalle war den chemischen Technikern lange wohlbekannt; aber es scheint, daß sie in keinem wissenschaftlichen Journal und in keiner Abhandlung vor der Arbeit von Stokes aus dem Jahre 1885 erwähnt sind. Dieser Gelehrte fand, daß die Farbe von alternierenden Zwillingbildungen in einer sehr dünnen gestörten Schicht des Kristalls herrührt, die sich durch eine höchst feine Linie kenntlich machte, die, je nach der Richtung des einfallenden Lichtes, bei der Untersuchung eines transversalen Schnittes der Platte eines Kristalles unter dem Mikroskop dunkel oder glänzend erschien. Auf Grund einer Vergleichung mit einem Lykopo-diumkorn schätzte er die Breite dieser Linie, also die Dicke der gestörten Schicht des Kristalls auf etwa ein tausendstel Zoll. Er fand, daß die Schicht dicker in solchen Kristallen zu sehen war, die eine rote, als in solchen, die eine blaue Farbe besaßen. Er schloß, daß „der Sitz der Färbung sicher eine verzwilligte Schicht ist“ (ein homogener Kristallteil mit einer Schicht zwischen zwei zu ihr verzwilligten Schichten) und fand, daß „eine einzelne Verzwilligungsebene nichts derartiges zeigt.“

§ 45. Ein oder zwei Jahre später ging Lord Rayleigh mit einer erschöpfenden mathematischen Untersuchung über die Reflexion des Lichtes an einer Verzwilligungsebene eines Kristalles (*Philosophical Magazine*, September 1888) auf den Gegenstand ein; durch Anwendung dieser Untersuchung in einer zweiten in derselben Nummer des *Philosophical Magazine* veröffentlichten Abhandlung „On the remarkable Phaenomenon of Crystalline Reflection described by Prof. Stokes“ lieferte er das, was die wahre Erklärung der Resultate der experimentellen Analyse dieser schönen Erscheinungen durch Sir George Stokes abzugeben scheint. Er kam ganz entschieden zu dem Schlusse, daß das Selektionsvermögen des irisierenden Teiles des Kristalles, vermöge dessen er Licht von nahezu einer besonderen Wellenlänge für eine besondere Einfallsrichtung fast total reflektiert (hiervon hängt der Glanz der Färbung ab), nicht von einer bloß einzelnen Verzwilligung herrühren kann, daß es vielmehr seinem Wesen nach einer beträchtlichen Anzahl paralleler in nahezu gleichen Abständen voneinander liegenden Schichten sein Entstehen verdankt. Das durch diese zusammengesetzte Schicht reflektierte Licht ist für jede besondere Richtung des einfallenden und des reflektierten Strahls hauptsächlich dasjenige, dessen Wellenlänge gleich dem Zweifachen der Länge der Periode der Verzwilligung und Gegenverzwilligung längs einer durch die Schicht in der Richtung entweder des einfallenden oder des reflektierten Strahles laufenden Linie ist.

§ 46. Wahrscheinlich dürften drei oder vier solche Zwillingsschichten hinreichen, die Farbe zu liefern; aber in einigen der glänzenden Proben dürften auch zwanzig oder dreißig oder noch mehr nötig sein, ein so nahe einfarbiges Licht hervorzubringen, wie es durch die spektrale Untersuchung

der Farben von Stokes in vielen seiner Proben nachgewiesen ist. Die von ihm unter dem Mikroskop gesehene gestörte Schicht von etwa ein tausendstel Zoll Dicke reicht für die, nach der Theorie von Rayleigh zur Erklärung einer merklichen oder glänzenden Färbung erforderlichen, 5, 10 oder 100 halben Wellenlängen vollkommen aus. Was kann aber die Ursache für eine Annäherung an eine regelmäßige Periodizität in der Struktur sein, die hinreichend wirksam ist, die wirklich beobachteten Farben zu liefern? Vielleicht darf man zur Erklärung eine periodische Bewegung der Mutterlauge gegen den wachsenden Kristall anführen. Allein Lord Rayleigh sagt uns, er habe es mit Schütteln der die Lösung enthaltenden Pfanne versucht, jedoch ohne Erfolg. Von einigen Forschern wurde an einen Einfluß des Lichtes gedacht und ein solcher wohl auch geprüft, aber ebenfalls ohne Erfolg. Wir wissen nach der schönen Entdeckung der auf einer präparierten Silberplatte durch das Sonnenspektrum photographierten prismatischen Farben durch Edmond Becquerel, daß „stehende Wellen“ (das sind Schwingungen mit feststehenden Knoten und feststehenden Örtren größten Schwingung), die von der Koexistenz einfallender und reflektierter Schwingungen herrühren, eine solche periodische Struktur erzeugen, wie die ist, die nach der Theorie von Rayleigh bei der Beleuchtung durch weißes Licht eine entsprechende Färbung zu verleihen imstande ist. Es ist hiernach schwer zu denken, daß Licht bei der Herstellung der periodischen Struktur bei der Kristallisation von Kaliumchlorat, von welcher das Irisieren ja herrührt, nicht wirksam sein sollte. Immerhin scheint der experimentelle Befund gegen diese ansprechende Theorie auszusagen, und wir müssen gezwungenermaßen uns beruhigen, daß die Frage nach dem Grund für diese so regelmäßige Verzwillingung, daß sie bestimmte Färbung hervorzubringen vermag, unbeantwortet bleibt. Ebenso warum das nur unter bestimmten Umständen geschieht, wie in den Madanschen Versuchen.

§ 47. Doch nun habe ich Ihre Geduld wohl überschätzt, und ich fürchte, sie erschöpft zu haben, aber nicht meinen Gegenstand. Ich habe das Empfinden, daß ich noch nicht die größere Hälfte von dem Wege zurückgelegt habe, den ich gehofft hatte, mit Ihnen diesen Abend bei der Untersuchung der molekularen Struktur von Kristallen durchmessen zu können. Insbesondere hätte ich gewünscht, vor Ihnen vom Quarzkristall mit seiner ternären Symmetrie und seiner Chiralität<sup>1)</sup> zu sprechen und Ihnen vom Ätzen<sup>2)</sup> durch Fluorwasserstoffsäure zu erzählen, die diesen Kristall dadurch abzubauen beginnt, daß sie Molekel nach Molekel entfernt, jedoch nicht in der umgekehrten Reihe, die dem Aufbau entgegengesetzt ist, und die so Verschiedenheiten im Aufbau der abwechselnden Seitenflächen der sechsseitigen Pyramide enthüllt, die auf die eine, manchmal auch auf beide Enden des im allgemeinen den Mittelkörper des Kristalls bildenden sechsseitigen Prismas aufgesetzt ist. Ich muß mich darauf beschränken, Ihnen ein geometrisches Schema für die ternäre Symmetrie des Prismas und seiner Endpyramide vorzuführen.

1) Vgl. Anmerkung zu § 22 oben.

2) Widmanstätten, 1807. Leydolt (1855), Wien. Akad. Ber. 15, 59. T. 9, 10. Baumhauer, Pogg. Ann. 138, 563 (1869); 140, 271; 142, 324; 145, 460; 150, 619. Bezüglich eines Berichtes über diese Untersuchungen vgl. Mallard, *Traité de Crystallographie* (Paris, 1884) Tome II, chapitre XVI.

§ 48. Man stelle gleichseitige, gleichwinklige sechsseitige Prismen her, deren Diagonale von Kante zu Kante fünfundneunzig Hundertstel<sup>1)</sup> der Länge der Prismen beträgt, lege eine Anzahl dieser so dicht aneinander, daß sie eine sechsseitige ebene Schicht bilden, deren Querschnitte gegen die Seitenflächen der sie zusammensetzenden sechsseitigen Prismen senkrecht sind (man vgl. Fig. 117, jedoch denke man sich die Halbkreise durch ihre Durchmesser ersetzt). Sie sehen in jeder Seitenfläche der sechsseitigen Ansammlung Kanten der Einzelpismen, Sie sehen ferner an jeder Ecke der Ansammlung eine Fläche (keine Kante) eines der Einzelpismen. Man baue nun eine sechsseitig-prismatische Ansammlung auf, indem man Schicht so auf Schicht stellt, daß die Einzelpismen jeder Schicht vertikal über denen der darunter befindlichen stehen, und endlich schließe man die Ansammlung mit einer sechsseitigen Pyramide ab, indem man auf der oberen Endfläche Schicht auf

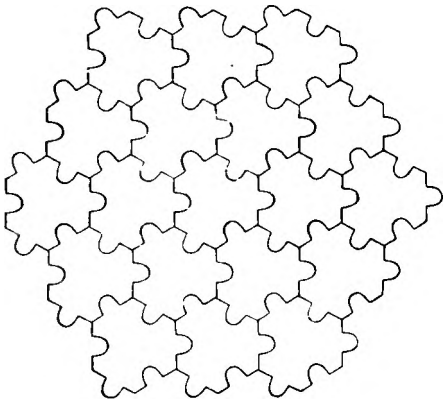


Fig. 117.

Schicht aus kleineren, aus Sechsecken bestehenden Gruppen so aufgesetzt, daß jede um eine Reihe am Umfange kleiner ist als die unter ihr befindliche Schicht. So erhalten Sie einen Kristall von genau der Form einer symmetrischen Gattung Bergkristall, bei der die Seitenflächen der Endpyramide gegen die Flächen des Prismas, aus denen sie hervortreten, unter  $38^{\circ} 13'$  geneigt sind. Allein die so gebildete Ansammlung besitzt eine „senäre“ (oder sechsstrahlige) Symmetrie. Um diese in eine ternäre Symmetrie umzuwandeln, schneide man

in der Mitte jeder zweiten Seitenfläche der prismatischen Molekel eine Rille ein, und zwar mache man diese Rille zunächst parallel den Kanten, und füge eine entsprechende Erhöhung oder Leiste den Mitten der andern drei alternierenden Seitenflächen an, so daß zwei ähnlich orientierte Zylinder ineinandergreifen, indem die vorstehende Leiste auf der einen Seite des einen Prismas sich in die Rille der gegenüberstehenden entsprechenden Seite des andern einlagert. Das prismatische Stück der so gebildeten Ansammlung zeigt (vgl. Fig. 117) an seinen Kanten abwechselnd Molekelseiten mit Erhöhungen und solche mit Vertiefungen und zeigt nur Orientierungsunterschiede zwischen den abwechselnden Seitenflächen sowohl der Pyramide als des Prismas. Wenn man sich nur so weit von der „senären“ Symmetrie entfernt, erhält man genau das Tripel oder die dreipaarige Antisymmetrie, die für die in so wunderbarer Weise von dem Ehepaar Curie<sup>2)</sup> untersuchte Piezoelektrizität des Quarzes erforderlich ist.<sup>3)</sup> Allein diese Ansammlung besitzt nicht das von Voigt<sup>4)</sup>

1) Genauer 0,9525, nämlich  $\frac{1}{2} \times \cotg 38^{\circ} 13'$ ; vgl. § 48, Zeile 17, 18.

2) J. und P. Curie und C. Friedel, Comptes Rendus, 1882, 1883, 1886, 1892.

3) Anhang E.

4) „Allgemeine Theorie der piezo- und pyroelektrischen Erscheinungen an Kristallen“, W. Voigt, Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 2. August 1890.

theoretisch und am Quarz und Turmalin von ihm und Riecke<sup>1)</sup> experimentell entdeckte chirale Piezoelektrizitätsvermögen und auch nicht die allbekannte optische Chiralität des Quarzes.

§ 49. Man ändere jetzt die Richtungen der Vertiefungen und Erhöhungen in eine schräge Anordnung, wie sie in Fig. 118, die ich als rechtsgewunden bezeichne, da die Richtungen der Projektionen gegen die drei Gänge einer rechtsgewunden dreigängigen Schraube tangential sind, dargestellt ist, und in eine entsprechende Anordnung nach Fig. 119, die das gleiche linksgewunden wiedergibt. Die Prismen mit ihren Vertiefungen und Erhöhungen werden auch jetzt noch, wenn sie sämtlich rechts- oder linksgewunden sind, sämtlich ineinandergreifen. Fig. 120 gibt die obere Grundfläche einer sechseckigen Schicht einer so zusammengesetzten Ansammlung der rechtsgewundenen Molekeln der Fig. 118 wieder. Ein aus solchen Schichten aufgebautes und an jeder Endfläche durch eine nach der Regel des § 48 hergestellte Pyramide ergänztes Prisma besitzt alle Eigenschaften chiraler ternärer Symmetrie, die erforderlich sind für die Piezoelektrizität des Quarzes, für die Orientierungsunterschiede der abwechselnden Paare prismatischer Flächen, für den absoluten Unterschied zwischen abwechselnden Flächenpaaren jeder Pyramide, der sich beim Ätzen durch Fluorwasserstoffsäure zeigt, für den bloßen Orientierungsunterschied zwischen den parallelen Flächen der beiden Pyramiden und für das allgemein bekannte chiroptische<sup>2)</sup> Vermögen des Quarzes. Schauen Sie auf die beiden benachbarten Seitenflächen *A*, *B* des geometrischen Schemas eines Quarzkristalls, wenn wir ihn mit vertikaler Achse vor uns haben. Sie erkennen einen Unterschied zwischen ihnen; dreht man die obere Seite nach unten, so wird *B* nicht von dem zu unterscheiden sein, was *A* war, und *A* nicht von dem zu unterscheiden sein, was *B* war. Schauen Sie auf die beiden Endpyramiden, so finden Sie, daß die Fläche über *A* und die Fläche unter *B* in ihrer Eigenschaft identisch sind, und daß sie von den Flächen über *B* und unter *A* verschieden sind. Dieses Schema ist aus den rechtsgewundenen, in Fig. 118 wiedergegebenen Elementarmolekeln zusammengesetzt. Umgekehrt würden die Verhältnisse sich gestalten, wenn Sie an Stelle dieses vor Ihnen befindlichen Modells ein aus linksgewundenen Molekeln, wie sie in Fig. 119 wiedergegeben sind, zusammengesetztes brächten.

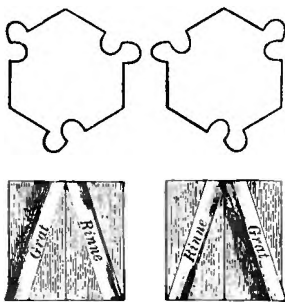


Fig. 118.

Fig. 119.

(§ 50. Um alle Eigenschaften der Symmetrie und Antisymmetrie des pyroelektrischen und des piezoelektrischen Vermögens des Turmalins zu erhalten, stelle man in einer Endfläche eines jeden unserer Elementarprismen eine Vertiefung und in der andern Endfläche eine entsprechende Erhöhung her.)

§ 51. Nun können wir beim Quarz vollständig die beiden Arten Fehlerhaftigkeiten verstehen, die sich, wie den Mineralogen wohlbekannt ist, an vielen natürlichen Proben des Kristalls finden, und die ich als Fehler der Orientierung und als Fehler der Chiralität bezeichnen will. Bei

1) Wiedemanns Annalen, 1892, XLV, S. 923.

2) Allgemein fälschlich als „Rotationsvermögen“ bezeichnet.

den Orientierungsfehlern sind alle Kristallmolekeln rechts- oder alle linksgewunden; aber bei allen ist in einem bestimmten Teile des Kristalls jedes von unseren elementaren sechseckigen Prismen um seine Achse um  $60^\circ$  von der Lage aus gedreht, die es einnehmen würde, wenn die Struktur vollkommen homogen wäre. In jedem von den beiden Teilen ist die Struktur homogen und besitzt sie alle die elektrischen und optischen Eigenschaften, die ein homogenes Stück eines Quarzkristalls zeigt, ebenso die Oberflächeneigenschaften eines natürlichen ungeschnittenen Kristalles, wie man sie beim Ätzen mit Fluorwasserstoffsäure findet; allein es besteht an der Zwischenfläche zwischen den beiden Teilen, die nicht allgemein eben ist, eine Diskontinuität, die sich in unserem Schema darin kundgeben würde, daß die Molekeln zu beiden Seiten der Zwischenfläche nicht ineinandergreifen, während alle Mole-

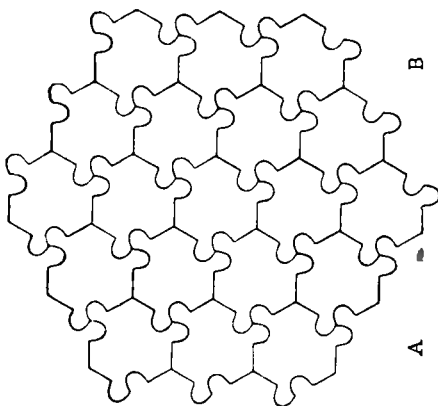


Fig. 120.

keln in dem einen Teile und ebenso alle Molekeln in dem andern Teile vollkommen ineinandergreifen. Bei dem Chiralitätsfehler, der beständig bei Amethystquarz und manchmal auch bei gewöhnlichem durchsichtigem Quarz gefunden wird, sind manche Teile aus rechtsgewundenen und andere aus linksgewundenen Molekeln zusammengesetzt. Es ist nicht bekannt, ob zugleich mit diesen Chiralitätsfehlern auch noch Orientierungsfehler zu beiden Seiten jeder Zwischenfläche vorkommen oder nicht; doch möchte ich sagen, wahrscheinlich nicht; denn wir wissen, daß die Orientierungsfehler in der

Natur ohne jeden Chiralitätsfehler vorkommen, und es besteht demnach kein Grund, zu erwarten, daß Chiralitätsfehler auch Orientierungsfehler zu beiden Seiten derselben Zwischenebene zur Folge haben. Ich hätte gern vor Ihnen mehr über diesen interessanten Gegenstand gesprochen und hervorgehoben, daß die einfachsten und natürlichsten Annahmen, die wir über die chemischen Kräfte (oder die elektrischen Kräfte, was wahrscheinlich dasselbe bedeutet) machen können, die in einer einzelnen Quarzmolekel  $\text{SiO}_2$  vereint und zwischen ihr und ähnlichen benachbarten Molekeln wirksam sind,



Fig. 121.

dem Wesen nach zu diesen Molekeln führen würden, die zu Tripeln so zusammentreten, daß jede notwendig entweder rechts- oder linksgewunden ist, jedoch mit ebensoviel Wahrscheinlichkeit für die eine wie für die andere Anordnung; ferner hätte ich Ihnen gern gezeigt, daß diese Tripeln von Siliziumsäure 3 ( $\text{SiO}_2$ ) eine Kristallmolekel mit all den Eigenschaften ternärer Symmetrie, wie sie in unsern mit Rillen und Riefen versehenen sechseckigen Prismen schematisch dargestellt sind, bilden und durch das rein zufällige Zusammenkommen von Atomen einen Quarzkristall aufbauen können. Weiter hätte ich Ihnen gern die Möglichkeit auseinandergesetzt und erklärt, daß eine so gebildete rechtsgewundene Kristallmolekel unter natürlichen Umständen hoher Temperatur oder sogar großen Druckes in einen linksgewundenen



Kristall umgeändert werden kann oder umgekehrt. Meine Uhr gemahnt mich jedoch, nicht auf diesen Gegenstand einzugehn.

§ 52. Wenn wir uns wieder dem bloß molekularen Bau von Kristallen zuwenden, bemerken wir, daß unsere Ansammlungen von abgerundeten durchaus ungleichseitigen Tetraedern, wie sie im stereoskopischen Bilde (§ 36, Fig. 115) wiedergegeben ist, Chiralität besitzt, da jedes Elementartetraeder, wenn es vollkommen ungleichseitig ist, Chiralität<sup>1)</sup> aufweist. Es läßt sich zeigen, daß eine einfache oder doppelte homogene Ansammlung von Punkten an sich keine Chiralität besitzt, und daß drei Ansammlungen von einzelnen Punkten oder eine einzelne Ansammlung von Punkttupeln Chiralität wohl zu besitzen vermag, obwohl eine einzelne Tripel von Punkten Chiralität nicht zeigen kann. Ebenso kann man die Bedingungen feststellen, unter denen vier Punkte, oder zwei Geraden, oder eine Gerade und zwei Punkte oder eine Verbindung von einem Punkte einer Geraden und einer Ebene Chiralität besitzen können, und wie eine homogene Ansammlung von nicht chiralen Gegenständen Chiralität zeigen möchte; allein ich breche ab und danke Ihnen für die ungeheure Geduld, mit der Sie mir zugehört haben.

---

1) Vgl. Anmerkung zu § 22 oben.

## Anhang I.

### Über die Elastizität eines Kristalles nach der Molekulartheorie von Boscovich.<sup>1)</sup>

§ 1. Ein Kristall in der Natur ist wesentlich eine homogene Ansammlung gleicher und ähnlicher Molekeln, die ich der Kürze wegen als kristallische Molekeln oder Kristallmolekeln bezeichnen will. Die Kristallmolekel soll das kleinste Stück sein, das von der Substanz ohne chemische Zersetzung fortgenommen werden kann, es soll also die Gruppe von Atomen sein, die durch chemische Verwandtschaft zusammengehalten wird, und die ich entsprechend als chemische Molekel bezeichnen will; oder sie kann auch eine Gruppe von zwei, drei oder mehr chemischen Molekeln sein, die durch Kohäsionskraft zusammengehalten werden. In einem Weinstein säurekristall dürfte die Kristallmolekel die chemische Molekel sein, und ist es, wie mir scheint, wahrscheinlich, da ein Weinstein säurekristall, der aufgelöst wird und aus der Lösung wieder heraus kristallisiert, stets rechtsdrehend bleibt. In einem Kristall von chlorsaurem Natrium besteht, wie mir Sir George Stokes gesagt hat, die Kristallmolekel wahrscheinlich aus zwei oder mehr chemischen das chlorsaure Natrium bildenden Molekeln, da, wie Marbach<sup>2)</sup> gefunden hat, die Kristalle aus dieser Substanz teils rechts- teils linkschiral sind, und wenn ein mit einer der beiden Chiralitäten behafteter Kristall aufgelöst wird, die Lösung in ihrer Einwirkung auf polarisiertes Licht keine Chiralität zeigt; wenn man die Substanz aber wieder auskristallisieren läßt, findet man die Kristalle teils rechts- teils linkschiral, wie sich sowohl in ihrer Kristallform als auch in ihrer Wirkung auf polarisiertes Licht zeigt. Doch ist es möglich, daß selbst im chlorsauren Natrium die Kristallmolekel zugleich die chemische Molekel ist, daß die Atome der chemischen Molekel in Lösung relativ so beweglich sein können, daß diese Molekel nicht dauernd in irgendeiner rechts- oder linkschiralen Gruppierung verbleiben können, und daß jede besondere chemische Molekel bei dem Akte der Kristallbildung entweder in einer rechts- oder linkschiralen Anordnung Platz findet. Vergleiche „Molekularer Bau“, Oxford-Vorlesung § 52, wiederabgedruckt als Anhang H im vorliegenden Buche.

§ 2. Sicher ist, daß die Kristallmolekel eine chirale Anordnung besitzt in jedem Kristalle, der in seiner Kristallform Chiralität zeigt oder der eine Rechts- oder Linksdrehung der Polarisationssebene von Licht hervorruft, das ihn durchsetzt. Die magnetische Drehung besitzt weder eine rechts- noch eine linksgewundene Eigenheit (das heißt, eine Chiralität). Das hat Faraday vollkommen erkannt und in seinen Schriften klargemacht; gleichwohl

1) Aus Proc. R. S. 8. Juni 1893.

2) Pogg. Ann. Bd. XCI, S. 482—487 (1854); oder Ann. de Chimie Bd. XLIII (LV). S. 252—255.

finden wir auch heutigestags noch häufig die chirale Drehung und die magnetische Drehung der ebenpolarisierten Wellen in einer Weise zusammen-  
geworfen, gegen die Faradays Originalbeschreibung seiner Entdeckung der  
magnetischen Polarisation reichliche Warnungen enthält.

§ 3. Diese Fragen der Chiralität und der magnetischen Drehung gehören jedoch nicht zu meinem vorliegenden Gegenstande; dieser betrifft vielmehr nur das Kräftesystem<sup>1)</sup>, das erforderlich ist, einen Kristall in einem unendlich kleinen Maße homogen aus dem Zustande deformiert zu erhalten, in dem er verhartet, wenn keine Kraft von außen auf ihn einwirkt. In den Elementen der mathematischen Theorie der Elastizität<sup>2)</sup> finden wir, daß das Kräftesystem das bildet, was man einen homogenen Zwang nennt, und daß dieser vollständig durch sechs allgemeine Kraftkomponenten  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_6$ , charakterisiert ist, die mit sechs entsprechenden allgemeinen Deformationskomponenten  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_6$  durch die folgenden Formeln

$$w = \frac{1}{2} (p_1 s_1 + p_2 s_2 + \dots + p_6 s_6) \quad (1)$$

verbunden ist, in der mit  $w$  die Arbeit bezeichnet ist, die für die Raumeinheit erforderlich ist, irgendeinen Teil des Kristalles aus seinem natürlichen undeformierten Zustande in irgendeinen Zustand unendlich kleiner Deformation zu versetzen. Ferner hat man

$$p_1 = \frac{\partial w}{\partial s_1}, \dots, p_6 = \frac{\partial w}{\partial s_6}, \quad (2)$$

wo  $\frac{\partial}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial s_6}$  Differentialquotienten unter der Annahme sein sollen, daß  $w$  als eine homogene quadratische Funktion von  $s_1, \dots, s_6$  ausgedrückt ist; endlich

$$s_1 = \frac{\partial w}{\partial p_1}, \dots, s_6 = \frac{\partial w}{\partial p_6}, \quad (3)$$

wo entsprechend  $\frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_6}$  Differentialquotienten unter der Annahme bedeuten, daß  $w$  als eine homogene quadratische Funktion von  $p_1, \dots, p_6$  dargestellt ist.<sup>3)</sup>

§ 4. Jede Kristallmolekel erleidet in Wirklichkeit sicher eine Zwangskraft von irgendwelchen ihrer nächsten Nachbarn zu beiden Seiten und wahrscheinlich auch von nächst nächsten Nachbarn und andern. Welches auch der Zwang zwischen zwei aufeinander wirkenden Kristallmolekeln in Wirklichkeit sein und wie immer er auch hervorgerufen werden mag,

1) Im Original steht, wie übrigens in diesem Buche noch an vielen Stellen „the force“ und dazu die Bemerkung: „Dieses Wort ist von meinem Bruder, dem verstorbenen Professor James Thomson, zur Bezeichnung irgendeines Systems von Kräften eingeführt worden.“ Wir haben keine entsprechende Bezeichnung, und um keine Ungewohntheiten zu bringen, habe ich lieber das obige farblose Wort gebraucht. Doch ist dadurch manchmal der Reiz des Originals verloren gegangen. D. H.

2) Phil. Trans. 24. April 1856, wiederabgedruckt im dritten Bande Math. and Phys. Papers (Sir W. Thomson), S. 84—112. (Vgl. zweite Vorlesung und an vielen anderen Orten. D. H.)

3) Derartige Festsetzungen sind bekanntlich von Lagrange eingeführt und spielen in vielen Gebieten der mathematischen Physik eine große Rolle. D. H.

ob durch stetigen sich in irgendeinem Mittel fortpflanzenden Druck oder durch eine Wirkung in die Ferne, in Gedanken können wir ihn immer nach den Elementarprinzipien der Statik in zwei Kräfte oder in eine einzelne Kraft und in ein in einer gegen diese Kraft senkrechten Ebene wirkendes Kräftepaar zerlegen. Die Theorie von Boscovich, eine rein mathematische Bildung, macht aus jeder Kristallmolekel einen einzelnen Punkt oder eine Gruppe von Punkten und nimmt an, daß zwischen jedem Punkte einer Kristallmolekel und jedem Punkte benachbarter Kristallmolekeln eine in der Verbindungslinie der beiden Punkte wirkende Kraft vorhanden ist. Die einfachste Vorstellung eines Kristalls nach Boscovich ist eine homogene Gruppe einzelner Punkte. Die nächst einfache Vorstellung ist eine Gruppe von Doppelpunkten.

§ 5. In der vorliegenden Mitteilung beweise ich, daß, wenn wir die einfachste Vorstellung von einem Kristall nach Boscovich, eine homogene Gruppe einzelner Atome zugrunde legen, wir wesentlich sechs Beziehungen zwischen den einundzwanzig Koeffizienten in der die Größe  $w$  darstellenden quadratischen Funktion finden, gleichviel ob diese in ihrer Abhängigkeit von  $s_1, \dots, s_6$ , oder von  $p_1, \dots, p_6$  ausgedrückt ist. Diese sechs Beziehungen sind derart, daß Inkompressibilität, also unendlicher Widerstand gegen Raumgehaltsänderung, einschließt unendliche Starrheit. In dem besonderen Falle einer gleichseitigen<sup>1)</sup> homogenen Ansammlung, für die ein solches Kraftgesetz gilt, daß sich für alle Schiebungsrichtungen gleiche Starrheiten ergeben, folgt aus diesen sechs Beziehungen  $3k = 5n$ , eine Relation, die von Navier und Poisson bei ihrer Behandlung der Theorie von Boscovich für isotrope Elastizität in einem Festkörper gefunden wurde. Von Stokes wurde nun gezeigt, daß für viele wirkliche homogene isotrope Substanzen, so für Gallerte und Kautschuk zum Beispiel, diese Beziehung nicht gilt; diese Substanzen leisten nämlich gegen Zusammendrückung einen so großen Widerstand, daß wir sie, mit einem praktisch nur kleinen Fehler, als inkompressible elastische Festkörper betrachten dürfen, und dagegen gegen Formänderung einen nur sehr geringen Widerstand.<sup>2)</sup>

§ 6. Hierauf beweise ich, daß, wenn wir die nächst einfache Vorstellung von einem Kristall nach Boscovich, eine homogene Gruppe von Doppelpunkten zugrunde legen, wir sehr einfache Gesetze für die Veränderung der zwischen den Punkten wirkenden Kräfte aufstellen können, die für jeden der einundzwanzig Koeffizienten in beiden quadratischen Ausdrücken für  $w$  jeden willkürlich vorgeschriebenen Wert ergeben.

§ 7. Ich behandle insbesondere die Aufgabe: den einundzwanzig Koeffizienten der beiden quadratischen Formeln solche Werte beizulegen, daß durch sie der Festkörper inkompressibel wird. Dies erreicht man äußerst leicht, wenn man  $w$  als eine quadratische Funktion von  $p_1, \dots, p_6$  annimmt und eine von diesen verallgemeinerten Zwangskomponenten, etwa  $p_6$  als einen

1) Nämlich eine Ansammlung, bei der die Geraden von irgendeinem Punkte nach drei ihm nächstbenachbarten und einander nächsten gegeneinander unter  $60^\circ$  geneigt sind, und diese Nachbarn gleich weit von ihm abstehen. Dies hat zur Folge, daß jeder Punkt zwölf gleich weit entfernte nächste Nachbarn um sich hat, und daß jedes aus vier nächsten Nachbarn gebildete Tetraeder vier gleichseitige Dreiecke zu Seitenflächen besitzt (Anhang H).

2) Elfte Vorlesung. D. H.

in allen Richtungen gleichförmigen positiven oder negativen Druck voraussetzt. Dies macht  $s_6$  zu einer in allen Richtungen gleichförmigen Zusammen-drückung oder Ausdehnung und macht aus  $s_1, \dots, s_5$  fünf Drillungskomponenten ohne Raumänderung. Die Bedingung, daß der Festkörper inkompressibel sein soll, ist dann einfach die, daß die Koeffizienten der sechs den Druck  $p_6$  enthaltenden Glieder einzeln Null sind. So wird der Ausdruck für  $w$  eine quadratische Funktion bloß der fünf Komponenten des Drillungszwanges,  $p_1, \dots, p_5$  mit fünfzehn unabhängigen Koeffizienten; und die Gleichungen (3) des obigen § 3 drücken die fünf Drillungskomponenten als lineare Funktionen der fünf Zwangskomponenten mit diesen fünfzehn unabhängigen Komponenten aus.

§ 8.<sup>1)</sup> Zum Beweise der Behauptungen des § 5 seien  $OX, OY, OZ$  drei zueinander senkrechte, durch irgendeinen Punkt  $O$  einer homogenen Ansammlung gehende Geraden, und es seien  $x, y, z$  die Koordinaten irgendeines andern Punktes  $P$  der Ansammlung in dem nicht durch einen äußeren Zwang veränderten Zustande. Da es eine homogene Ansammlung von einzelnen Punkten ist, mit der wir uns jetzt beschäftigen, muß es auch einen Punkt  $P'$  geben, dessen Koordinaten sind  $-x, -y, -z$ . Es seien nun  $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$  die Koordinaten der durch irgendeine unendlich kleine Deformation geänderten Lage von  $P$ ; die Deformation ist nach der Bezeichnung von Thomson und Tait in ihrer Theoretischen Physik, Bd. I, Teil II, § 669 durch die sechs Zeichen  $e, f, g, a, b, c$  charakterisiert. Bei dieser Bezeichnung geben  $e, f, g$  einfach unendlich kleine Verlängerungen parallel zu  $OX, OY, OZ$  an, und  $a, b, c$  unendlich kleine Abweichungen von den rechten Winkeln zwischen drei Paaren Ebenen in der Substanz, die im ungezwungenen Zustande bezüglich parallel zu  $(XOY, XOZ), (YOZ, YOX), (ZOX, ZOY)$  sind (alle Winkel sind dabei in Bogenmaß gemessen). Die Definition für  $a, b, c$  kann in andern Worten auch folgendermaßen gegeben werden; dabei ist  $a$  als Beispiel gewählt:  $a$  bezeichnet die Differenz zwischen den zu  $OY$  parallelen Bewegungskomponenten zweier im Abstände eins voneinander liegenden Ebenen der Substanz, die während der Verschiebung parallel zu  $YOX$  gehalten werden, oder, was dasselbe ist, die Differenz zwischen den zu  $OZ$  parallelen Bewegungskomponenten zweier im Abstände eins voneinander befindlichen Ebenen, die während der Verschiebung parallel zu  $ZOX$  gehalten werden. Um die unnötige Betrachtung einer Rotationsverschiebung zu vermeiden, wollen wir voraussetzen, daß die der Deformationskomponente  $a$  entsprechende Verschiebung in einer Elongation bestehe, die zu  $OX$  senkrecht ist und in der durch  $OX$  gehenden  $YOZ$  halbierenden Ebene verläuft, zugleich mit einer Schrumpfung abermals senkrecht zu  $OX$  aber in der durch  $OX$  gehenden zu jener winkelhalbierenden Ebene senkrechten Ebene. Diese Verschiebung trägt nichts zu  $\delta x$  bei, wohl aber verleiht sie  $\delta y$  und  $\delta z$  die Beiträge  $\frac{1}{2}az$  und  $\frac{1}{2}ay$ . Behandelt man ebenso  $b$  und  $c$  und zieht die Wirkungen von  $e, f, g$  in Rechnung, so findet man demnach

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= ex + \frac{1}{2}(bz + cy) \\ \delta y &= fy + \frac{1}{2}(cx + az) \\ \delta z &= gz + \frac{1}{2}(ay + bx). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

1) Von Juli 18, 1893.

§ 9. Bei unserer späteren theoretischen Behandlung werden die folgenden Formeln, in denen höhere Potenzen als Quadrate oder Produkte der unendlich kleinen Verhältnisse  $\delta x/r$ ,  $\delta y/r$ ,  $\delta z/r$  (mit  $r$  ist  $OP$  bezeichnet) fortgelassen sind, sich als nützlich erweisen.

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{x\delta x + y\delta y + z\delta z}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}{r^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{x\delta x + y\delta y + z\delta z}{r^2} \right)^2. \quad (5)$$

Nun ist nach (4)

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = ex^2 + fy^2 + gz^2 + ayz + bzx + cxy, \quad (6)$$

und

$$\begin{aligned} \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 &= e^2 x^2 + f^2 y^2 + g^2 z^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} [a^2 (y^2 + z^2) + b^2 (z^2 + x^2) + c^2 (x^2 + y^2)] \\ &\quad + [\frac{1}{2} bc + (f+g)a] yz + [\frac{1}{2} ca + (g+e)b] zx + [\frac{1}{2} ab + (e+f)c] xy. \end{aligned} \quad (7)$$

Setzt man (6) und (7) in (5) ein, so findet man

$$\frac{\delta r}{r} = r^{-2} (ex^2 + fy^2 + gz^2 + ayz + bzx + cxy) + q(e, f, g, a, b, c), \quad (8)$$

wo mit  $q$  eine quadratische Funktion von  $e, f$  usw. bezeichnet ist, deren Koeffizienten die folgenden sind:

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Koeffizient von } \frac{1}{2} e^2 \text{ ist} & \frac{x^2}{r^2} - \frac{x^4}{r^4} \\ \text{„ „ } \frac{1}{2} a^2 \text{ „} & \frac{1}{4} \frac{y^2 + z^2}{r^2} - \frac{y^2 z^2}{r^4} \\ \text{„ „ } fg \text{ „} & - \frac{y^2 z^2}{r^4} \\ \text{„ „ } bc \text{ „} & \frac{1}{4} \frac{yz}{r^2} - \frac{x^2 yz}{r^4} \\ \text{„ „ } ea \text{ „} & - \frac{x^2 yz}{r^4} \\ \text{„ „ } eb \text{ „} & \frac{1}{2} \frac{zx}{r^2} - \frac{x^3 z}{r^4} \end{array} \right\} \quad (9)$$

und entsprechende symmetrische Ausdrücke für die andern fünfzehn Koeffizienten.

§ 10. Wir wenden uns wieder § 3 zu und wollen  $w$  finden, die Arbeit für die Volumeneinheit, die erforderlich ist, unsere homogene Ansammlung aus ihrem undeformierten Zustande in den durch  $e, f, g, a, b, c$  charakterisierten unendlich wenig deformierten Zustand überzuführen. Es sei  $\varphi(r)$  die Arbeit, die erforderlich ist, zwei Punkte des Systems aus einem unendlich großen gegenseitigen Abstände in den Abstand  $r$  zu bringen. Das ist das, was ich als die gegenseitige potentielle Energie zweier Punkte im Abstände  $r$  bezeichnen will. Was ich jetzt die potentielle Energie des ganzen Systems nenne und mit  $W$  bezeichne, ist die gesamte Arbeit, die geleistet werden muß, um alle Punkte desselben aus unendlich großen gegenseitigen Abständen in ihre wirklichen Lagen im System zu bringen; so daß wir erhalten

$$W = \frac{1}{2} \sum \sum \varphi(r), \quad (10)$$

wo mit  $\Sigma \varphi(r)$  die Summe der Werte von  $\varphi(r)$  für die Abstände zwischen irgendeinem Punkte  $O$  und allen andern Punkten bezeichnet wird; und mit  $\Sigma \Sigma \varphi(r)$  die Summe aller dieser Summen, wenn der Punkt  $O$  der Reihe nach an jedem Punkte des Systems angenommen wird. Bei dieser doppelten Summation ist jedes  $\varphi(r)$  zweimal gerechnet, daher der Faktor  $\frac{1}{2}$  in der Formel (10).

§ 11. Nehmen wir jetzt an, das Kraftgesetz sei ein solches, daß  $\varphi(r)$  für jeden Wert von  $r$  über  $\nu\lambda$  verschwindet, wo  $\lambda$  den Abstand eines beliebigen Punktes von seinem nächstbenachbarten und  $\nu$  irgendeine kleine oder große, die Einheit übersteigende Zahl bezeichnet, die allein durch die Bedingung begrenzt ist, daß  $\nu\lambda$  im Vergleich mit den linearen Dimensionen der ganzen Ansammlung sehr klein ist. Dies und die Homogenität unserer Ansammlung haben zur Folge, daß, außer in einer sehr dünnen Oberflächenschicht, deren Dicke im Vergleich mit den Durchmessern der Ansammlung sehr klein ist, alle Punkte dieselbe Reihe sie im Gleichgewicht haltender Kräfte von ihren Nachbarn erfahren, gleichviel ob das System sich in dem Zustande befindet, den wir als nicht deformiert bezeichnet haben, oder in irgendeinem Zustande homogener Deformation. Diese Deformation braucht, soweit es den eben aufgestellten Satz betrifft, nicht notwendig unendlich klein zu sein, immerhin wollen wir uns bei unserer mathematischen Bearbeitung auf Deformationen beschränken, die unendlich klein sind.

§ 12. Man beachte ferner, daß wenn das ganze System als eine irgendwie charakterisierte homogene Ansammlung gegeben ist, und wenn alle Punkte in der Oberflächenschicht durch von außen wirkende Kräfte in ihren Lagen als Elemente einer endlichen homogenen Ansammlung festgehalten werden, die gesamte Ansammlung sich unter dem Einflusse von zwischen den Punkten wirkenden Kräften im Gleichgewichte befinden wird, da der auf irgendeinen Punkt  $O$  seitens irgendeines Punktes  $P$  ausgeübten Kraft durch die gleiche und entgegengesetzt gerichtete von dem in gleichem Abstände auf der entgegengesetzten Seite von  $O$  befindlichen Punkt  $P'$  ausgeübten das Gegengewicht gehalten wird.

§ 13. Indem man jetzt alle Punkte in der dünnen Oberflächenschicht außer acht läßt, bezeichne  $N$  die Gesamtzahl der innerhalb der homogenen Ansammlung befindlichen Punkte. Wir erhalten dann in § 10 wegen der Homogenität der Ansammlung

$$\Sigma \Sigma \varphi(r) = N \Sigma \varphi(r), \quad (11)$$

und die Gleichung (10) geht über in

$$W = \frac{1}{2} N \Sigma \varphi(r). \quad (12)$$

Folglich ist nach dem Taylorschen Satze

$$\delta W = \frac{1}{2} N \Sigma \left\{ \varphi'(r) \delta r + \frac{1}{2} \varphi''(r) \delta r^2 \right\}; \quad (13)$$

und wir finden, wenn wir darin (8) verwenden und beachten, daß wenn (wie in § 14 weiter unten) wir das Volumen unserer Ansammlung als Einheit wählen, so daß  $N$  die Anzahl von Punkten in der Volumeneinheit ist,  $\delta W$  in das  $w$  des § 3 übergeht

$$w = \frac{1}{2} N \Sigma \left\{ \frac{\varphi'(r)}{r} (ex^2 + fy^2 + gz^2 + ayz + bzx + cxy) + r \varphi'(r) q(e, f, g, a, b, c) + \frac{1}{2} \frac{\varphi''(r)}{r^2} (ex^2 + fy^2 + gz^2 + ayz + bzx + cxy)^2 \right\} \quad (14)$$

§ 14. Jetzt wollen wir der Einfachheit wegen annehmen, die ganze Ansammlung sei in ihrem undeformierten Zustande ein Würfel, Fig. 122, dessen Kante die Längeneinheit ist, und es sei  $P$  die Summe der normalen Komponenten der auf die Punkte einer Flächenschicht an einer Seitenflächen des Würfels

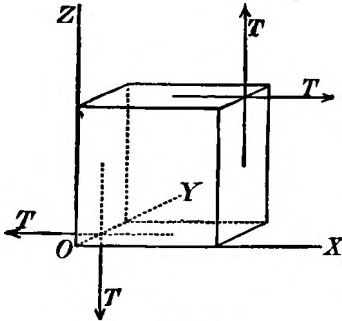


Fig. 122.

wirkenden äußeren Kräfte. Das Gleichgewicht des Würfels als Ganzes erfordert eine gleiche und entgegengesetzt gerichtete normale Komponente  $P$  an der gegenüberliegenden Seite des Würfels. Ähnlich mögen  $Q$  und  $R$  die Summen der normalen Komponenten der äußeren Kräfte an den beiden andern Flächenpaaren des Würfels bezeichnen. Es sei weiter  $T$  die Summe der tangentialen,  $OZ$  parallelen Komponenten der äußeren Kräfte an jeder der beiden  $YZ$ -Flächen. Das Gleichgewicht des Würfels als

Ganzes erfordert vier solche Kräfte an den vier  $OY$  parallelen Flächen, die zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräftepaare bilden, wie es in der Zeichnung dargestellt ist. Ähnlich müssen wir vier sich das Gleichgewicht haltende tangentielle Kräfte  $S$  in den vier  $OX$  parallelen Seitenflächen und vier tangentielle Kräfte  $U$  in den vier  $OZ$  parallelen Seitenflächen haben.<sup>1)</sup>

§ 15. Faßt man jetzt eine unendlich kleine Deformationsänderung in dem Würfel von

$$(e, f, g, a, b, c) \text{ in } (e + de, f + df, g + dg, a + da, b + db, c + dc)$$

ins Auge, so ist die zu ihrer Herstellung erforderliche Arbeit, wie wir auf Grund der oben § 8 erläuterten Definitionen der Verschiebungen  $e, f, g, a, b, c$  erkennen, die folgende

$$dw = Pde + Qdf + Rdg + Sda + Tdb + Udc. \quad (15)$$

Folglich erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} P &= \partial w / \partial e; & Q &= \partial w / \partial f; & R &= \partial w / \partial g; \\ S &= \partial w / \partial a; & T &= \partial w / \partial b; & U &= \partial w / \partial c. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Demnach finden wir nach (14), wenn wir  $L_e, L_a$  usf. zur Bezeichnung linearer Funktionen wählen

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{2} N \Sigma \left\{ \frac{\varphi'(r)}{r} x^2 + L_e(e, f, g, a, b, c) \right\}; \\ S &= \frac{1}{2} N \Sigma \left\{ \frac{\varphi'(r)}{r} yz + L_a(e, f, g, a, b, c) \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

und symmetrische Ausdrücke für  $Q, R, T, U$ .



§ 16. Jetzt sei der Zustand der Deformation Null ein solcher<sup>1)</sup>, bei dem keine äußere Kraft erforderlich ist, die Ansammlung zu verhindern, sich von ihm zu entfernen. Dann muß  $P = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $R = 0$ ,  $S = 0$ ,  $T = 0$ ,  $U = 0$  sein, wenn  $e = 0$ ,  $f = 0$ ,  $g = 0$ ,  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  ist. Daraus folgt nach (17) und den andern vier symmetrischen Formeln, daß ist

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \frac{\varphi'(r)}{r} x^2 &= 0, \quad \Sigma \frac{\varphi'(r)}{r} y^2 = 0, \quad \Sigma \frac{\varphi'(r)}{r} z^2 = 0; \\ \Sigma \frac{\varphi'(r)}{r} yz &= 0, \quad \Sigma \frac{\varphi'(r)}{r} zx = 0, \quad \Sigma \frac{\varphi'(r)}{r} xy = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Hieraus ersehen wir, daß bei der Summation für alle Punkte  $x, y, z$ , zwischen welchen und dem Punkte  $O$  eine Kraft wirkt, das erste Glied der summierten Koeffizienten in  $q$ , wie diese Funktion in den obigen Beziehungen (9) gegeben ist, in jedem Falle verschwindet, außer für die Koeffizienten von  $fg$  und  $ea$  usw., in denen nur ein Glied vorhanden ist; und so finden wir nach (9) und (14)

$$w = \frac{1}{2} N \left\{ \frac{1}{2} e^2 \Sigma \tilde{\omega} \frac{x^4}{r^4} + (fg + \frac{1}{2} a^2) \Sigma \tilde{\omega} \frac{y^2 z^2}{r^4} + (bc + ea) \Sigma \tilde{\omega} \frac{x^2 yz}{r^4} + eb \Sigma \tilde{\omega} \frac{x^3 z}{r^4} + \text{usw.} \right\} \quad (19)$$

wo gesetzt ist

$$-r\varphi'(r) + r^2\varphi''(r) = \tilde{\omega}. \quad (20)$$

Die in (19) entwickelt angegebenen Glieder reichen aus, die übrigen in usw. angedeuteten durch zyklische Vertauschung zu finden.

§ 17. Man sieht so, daß man, ohne jede Einschränkung über die Anzahl der Nachbarn, die mit merklicher Kraft auf jeden Punkt  $O$  einwirken, und ohne vereinfachende Annahme über das Kraftgesetz in dem quadratischen Ausdrucke für  $w$ , gleiche Werte der Koeffizienten von  $fg$  und  $\frac{1}{2}a^2$ , von  $ge$  und  $\frac{1}{2}b^2$ , von  $ef$  und  $\frac{1}{2}c^2$ , von  $bc$  und  $ea$ , von  $ca$  und  $eb$  und von  $ab$  und  $ec$  erhält. Diese Gleichheiten geben die sechs Beziehungen, deren Beweis in § 5 in Aussicht gestellt worden ist.

§ 18. In dem besonderen Falle einer gleichseitigen Ansammlung, bei der die Achsen  $OX, OY, OZ$  den drei Paaren gegenüberliegender Kanten eines aus vier einander nächsten Punkten gebildeten Tetraeders parallel sind, verschwinden offenbar die von uns gefundenen Koeffizienten für alle Produkte außer für  $fg, ge, ef$ ; denn in der vollständigen Summe für eine einzige gleichseitige Ansammlung kommen in den symmetrischen Gliedern  $\pm x, \pm y, \pm z$  vor. Demgemäß, und da in diesem Falle

$$\Sigma \tilde{\omega} \frac{x^4}{r^4} = \Sigma \tilde{\omega} \frac{y^4}{r^4} = \Sigma \tilde{\omega} \frac{z^4}{r^4} \quad \text{und} \quad \Sigma \tilde{\omega} \frac{y^2 z^2}{r^4} = \Sigma \tilde{\omega} \frac{z^2 x^2}{r^4} = \Sigma \tilde{\omega} \frac{x^2 y^2}{r^4} \quad (21)$$

1) Die Untersuchung des Gleichgewichts der dünnen Oberflächenschicht unter diesen Umständen, nämlich unter dem bloßen Einflusse der zwischen den Punkten wirkenden Kräfte, ist äußerst interessant sowohl im Zusammenhange mit der Laplaceschen Theorie der kapillaren Anziehung als auch mit dem physikalischen Zustande der Seitenflächen eines Kristalles und der unregelmäßigen Bruchflächen. Doch muß diese Untersuchung aufgeschoben werden. (Vgl. Anhang J §§ 29, 30).

ist, geht (19) über in

$$w = \frac{1}{2} \mathfrak{A} (e^2 + f^2 + g^2) + \mathfrak{B} (fg + ge + ef) + \frac{1}{2} n (a^2 + b^2 + c^2), \quad (22)$$

wenn gesetzt wird

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} N \Sigma \bar{\omega} \frac{x^4}{r^4} \text{ und } \mathfrak{B} = n = \frac{1}{2} N \Sigma \bar{\omega} \frac{y^2 z^2}{r^4}. \quad (23)$$

§ 19. Beachten wir § 695 (7)<sup>1)</sup> Theoretische Physik von Thomson und Tait, so ist nunmehr bewiesen, daß das  $\mathfrak{B}$  jener Formel bei der jetzigen einfachsten Form der Annahme von Boscovich gleich dem  $n$  unserer gegenwärtigen Formel (22) ist, welche Zahl den Starrheitsmodul gegen schiebende parallel den Ebenen  $YOZ$ ,  $ZOX$ ,  $XOY$  wirkende Kräfte bedeutet. Und wenn wir mit  $n_1$  den Starrheitsmodul gegen Schiebung parallel zu Ebenen bezeichnen, die durch  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  gehen und die Ebenen  $(OY, OZ)$ ,  $(OZ, OX)$ ,  $(OX, OY)$  unter Winkeln von  $45^\circ$  schneiden, so erhalten wir mit  $k$  als Kompressibilitätsmodul<sup>2)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} &= k + \frac{4}{3} n_1; & \mathfrak{B} &= k - \frac{2}{3} n_1; \\ n_1 &= \frac{1}{2} (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}); & k &= \frac{1}{3} (\mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}); \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

und der vorige Ausdruck für die elastische Energie des nicht deformierten Festkörpers geht, für den Fall kubischer Symmetrie, ohne jede Einschränkung über in

$$2w = (k + \frac{4}{3} n_1) (e^2 + f^2 + g^2) + 2(k - \frac{2}{3} n_1) (fg + ge + ef) + n (a^2 + b^2 + c^2). \quad (25)$$

§ 20. Vergleicht man dies mit der für unseren eingeschränkten Fall gültigen Formel (23), so finden wir

$$3k = 2n_1 + 3n. \quad (26)$$

Diese bemerkenswerte Beziehung zwischen den beiden Starrheiten und der Kompressibilität einer gleichseitigen homogenen Ansammlung Boscovich'scher Atome ist ohne Beweis in § 27 meiner Abhandlung über die molekulare Konstitution der Materie<sup>3)</sup> angezeigt worden. In dieser bezeichnet  $n$  das, was ich Seitenstarrheit genannt habe, nämlich Starrheit gegen Schiebung parallel den Seitenflächen des Hauptwürfels<sup>4)</sup>, und  $n_1$  die Diagonalstarrheit, nämlich die Starrheit gegen Schiebung parallel zu einer der sechs durch

1) Diese Formel ist für den Fall eines Körpers angegeben, der bezüglich der Elastizitätsmoduln vollkommen isotrop ist; aber nach der Untersuchung in §§ 681, 682 sehen wir, daß unsere jetzige Formel (22) oder (25) die elastische Energie für den Fall eines elastischen Festkörpers darstellt, der kubische Isotropie mit ungleichen Starrheiten,  $n_1$ ,  $n$  bezüglich dieser beiden Reihen Schiebungen besitzt.

2) Zweite Vorles. S. 17, 18.

D. H.

3) R. S. E. Proc. Juli 1889; Art. XCVII meiner Math. and Phys. Papers, Bd. III.

4) Das heißt ein Würfel, dessen Kanten den drei Paaren einander gegenüberliegender Kanten eines durch vier nächste Nachbarn gebildeten Tetraeders parallel sind.

Paare der am weitesten voneinander entfernten parallelen Kanten desselben Würfels gehende Diagonalebene. Nach (24) und (23) sehen wir, daß, wenn das Kraftgesetz ein solches ist, daß

$$\Sigma \tilde{\omega} \frac{x^4}{r^4} = 3 \Sigma \tilde{\omega} \frac{y^2 z^2}{r^4}. \quad (27)$$

wird,  $n = n_1$  ist, und daß der von der Ansammlung gebildete Körper in seiner elastischen Qualität vollkommen isotrop ist. In diesem Falle wird (26)  $3k = 5n$ , wie von Navier und Poisson gefunden ist; und so vervollständigen wir den Beweis der Behauptungen des obigen § 5.

§ 21. Ein Fall, der in Hinsicht auf die Theorie von Boscovich nicht uninteressant und der tatsächlich sehr interessant ist in Hinsicht auf ein mechanisches Modell (dessen Beziehung zur Theorie von Boscovich hervorgehoben und schön erläutert wurde von Brillouin<sup>1)</sup>), betrifft das Verhalten einer gleichseitigen homogenen Ansammlung mit Kräften, die nur zwischen jedem Punkte und seinen zwölf gleichweit entfernten nächsten Nachbarn wirken. Die folgende Zeichnung (Fig. 123) stellt den Punkt  $O$  und drei von seinen zwölf nächsten Nachbarn (ihre Abstände seien  $\lambda$ ) dar, die in den Mitten der nächsten Seitenflächen des in der Zeichnung wiedergegebenen Hauptwürfels liegen, sodann drei von seinen sechs nächst nächsten Nachbarn (ihre Abstände sind  $\lambda\sqrt{2}$ ), die sich an den ihm nächsten Ecken des Würfels in  $X, Y, Z$  befinden, und an den andern Ecken des Würfels, drei weitere Nachbarn,  $K, L, M$ , die die nächst-nächst-nächst-nächsten sind (ihre Abstände sind  $2\lambda$ ). Die in der Zeichnung nicht sichtbaren Punkte in den Mitten der drei entferntesten Seitenflächen des Würfels sind die nächst-nächst-nächsten Nachbarn von  $O$  (ihre Entfernungen sind  $\lambda\sqrt{3}$ ).

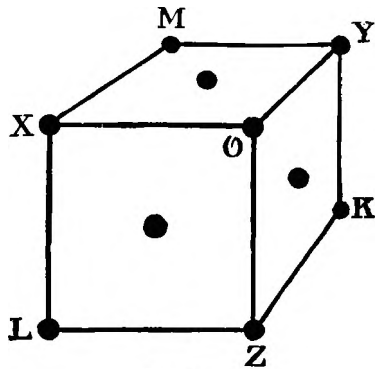


Fig. 123.

§ 22. Wenn wir unsere Aufmerksamkeit jetzt nur auf die nächsten Nachbarn des Punktes  $O$  richten, bemerken wir, daß die 9 in der Zeichnung nicht zu sehenden in den Mitten von Quadraten liegen, die man erhält, wenn man die Geraden  $YO, ZO, XO$  um ihre eigenen Längen über  $O$  hinaus verlängert und die Quadrate für alle so erhaltenen Linienpaare vervollständigt. Um dies deutlicher zu zeigen, stellen wir uns acht gleiche an einander gelegte Würfel vor. Jeder Würfel hat drei Punkte, die zu  $O$  wie die in der Figur gelegen sind. Insgesamt sind also 24 solche Punkte vorhanden und da immer zwei Würfel anliegen und somit immer zwei solche Punkte zusammenfallen, bekommen wir so die zwölf nächsten Nachbarn zu  $O$ . Wenn wir mit  $\lambda$  den Abstand aller dieser Punkte von  $O$  bezeichnen, sind die Koordinaten  $x, y, z$  dieser zwölf Punkte die folgenden

1) Conférences Scientifiques et Allocutions (Lord Kelvin), traduites et annotées; P. Lugol et M. Brillouin: Paris 1983, S. 320—325.

$$\left. \begin{aligned} & \left(0, \frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{\lambda}{\sqrt{2}}, -\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, -\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right), \\ & \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right), \\ & \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, -\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, -\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, 0\right). \end{aligned} \right\} \quad ($$

§ 23. Wir setzen jetzt voraus, daß auf  $O$  nur seitens dieser zwölf nächsten Nachbarn Kräfte einwirken; dann enthalten die Summationen  $\Sigma$  des § 18, (23) gerade diese zwölf Punkte mit gleichen Werten von  $\tilde{\omega}$ , die wir für alle mit  $\tilde{\omega}_0$  bezeichnen wollen. Diese liefern acht Glieder für  $\left(\Sigma \frac{x^4}{r^4}\right)$  und vier für  $\Sigma (y^2 z^2 / r^4)$ ; und der Wert jedes Gliedes in diesen Summen ist  $\frac{1}{4}$ . So finden wir

$$\mathfrak{A} = N\tilde{\omega}_0 \text{ und } \mathfrak{B} = n = \frac{1}{2} N\tilde{\omega}_0. \quad (29)$$

Hieraus und aus (24) ersehen wir, daß ist

$$n_1 = \frac{1}{2} n. \quad (30)$$

So haben wir das bemerkenswerte Resultat, daß für den Hauptwürfel die Diagonalstarrheit die Hälfte der Seitenstarrheit ist, wenn auf jeden Punkt nur von seinen nächsten zwölf Nachbarn ausgehende Kräfte wirken. Diese Behauptung ist ohne Beweis in § 28 meiner „Molecular Constitution of Matter“<sup>1)</sup> ausgesprochen worden.

§ 24. Jetzt nehmen wir an, die Punkte in den Mitten der Seitenflächen der Würfel, die bei der gleichseitigen Ansammlung die zwölf gleichweit entfernten nächsten Nachbarn des Punktes  $O$  bilden, seien fortgenommen, und die Ansammlung bestehe aus Punkten in einfachster kubischer Anordnung, das heißt aus Boscovichschen Punkten an den Schnittpunkten dreier Reihen gleich weit voneinander entfernter paralleler Ebenen, die den Raum in Würfel teilen. Fig. 123 deutet  $O$  an, und in  $X, Y, Z$  drei von den sechs gleichweit entfernten nächsten Nachbarn, die er bei der einfachen kubischen Anordnung besitzt. Behält  $\lambda$  die Bedeutung für die Fig. 123 bei, so sind jetzt die Koordinaten der sechs nächsten Nachbarn des Punktes  $O$ :

$$\begin{aligned} & (\lambda \sqrt{2}, 0, 0) \quad (0, \lambda \sqrt{2}, 0), \quad (0, 0, \lambda \sqrt{2}), \\ & (-\lambda \sqrt{2}, 0, 0), \quad (0, -\lambda \sqrt{2}, 0), \quad (0, 0, -\lambda \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Hieraus finden wir, wenn wir mit  $\tilde{\omega}_1$  den Wert von  $\tilde{\omega}$  für diesen Fall bezeichnen, nach § 18 (23)

$$\mathfrak{A} = N\tilde{\omega}_1 \text{ und } \mathfrak{B} = n = 0. \quad (31)$$

Die Erklärung dafür, daß  $n = 0$  (die Seitenstarrheit Null) wird, ist offenbar, wenn wir beachten, daß ein Würfel, der als Kanten zwölf gleiche, gerade Stäbe besitzt, deren Enden an den acht Ecken durch Gelenke verbunden sind, keinen Widerstand gegen eine Umwandlung der rechten Winkel seiner Seitenflächen in spitze und stumpfe bietet.

1) Math. and Phys. Papers, Bd. III, S. 403

§ 25. Bringen wir jetzt die Boscovichschen Punkte in den Mitten der Seitenflächen der Würfel, die wir zeitweilig in § 24 als vernichtet vorausgesetzt haben, wieder an ihre Stellen, setzen die Resultate des § 23 und des § 24 zusammen und benutzen (24) aus § 19, so finden wir die Elastizitätsmoduln für unsere gleichseitige homogene Anordnung wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} &= N(\tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1), \\ \mathfrak{B} &= n = \frac{1}{2}N\tilde{\omega}_0, \\ n_1 &= \frac{1}{2}N(\frac{1}{2}\tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1), \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

wo, wie wir nach § 16 (20) ansehen,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_0 &= \lambda F(\lambda) - \lambda^2 F''(\lambda), \\ \tilde{\omega}_1 &= \lambda \sqrt{2} F(\lambda \sqrt{2}) - 2\lambda^2 F''(\lambda \sqrt{2}) \end{aligned} \quad (33)$$

ist, wenn  $F(r)$  jetzt zur Bezeichnung der Abstoßung zwischen zwei beliebigen von den in irgendeinem Abstände  $r$  voneinander befindlichen Punkten gewählt wird, und so das bedeutet, was bei der Definition von  $\varphi(r)$  in § 10 der Sinn von  $-\varphi'(r)$  ist. Um den aus unserer homogenen Ansammlung bestehenden Festkörper elastisch isotrop zu machen, müssen wir nach § 19 (24) haben  $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = 2n$  und demgemäß nach (32)

$$\tilde{\omega}_0 = 2\tilde{\omega}_1. \quad (34)$$

Aus (33) sehen wir, daß die entfernten Kräfte wohl zu  $n_1$ , nicht aber zu  $n$  beitragen.

§ 26. Die letzten drei von den sechs Gleichgewichtsgleichungen, § 16, (18), sind vermöge der Symmetrie in dem Falle einer gleichseitigen Ansammlung einzelner Punkte erfüllt, welches auch das Kraftgesetz zwischen ihnen und welches auch der Abstand zwischen irgendeinem Punkte und seinen nächsten Nachbarn sein mag. Die ersten drei dieser Gleichungen erfordern in dem Falle des § 23, daß  $F(\lambda) = 0$ , und in dem Falle des § 24, daß  $F(\lambda \sqrt{2}) = 0$  ist, Resultate, deren Deutung klar liegt und wichtig ist.

§ 27. Die ersten drei von den sechs Gleichgewichtsgleichungen des § 16, (18) ergeben, auf den Fall des § 25 angewendet, die folgende Beziehung:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} F(\lambda \sqrt{2}) = -F(\lambda); \quad (35)$$

das heißt, wenn zwischen jedem Punkte und seinen zwölf nächsten Nachbarn eine Abstoßung oder Anziehung besteht, dann besteht eine Anziehung oder Abstoßung von  $\sqrt{2}$ -facher Größe zwischen jedem Punkte und seinen sechs nächst-nächsten Nachbarn, außer, wenn auch Kräfte zwischen noch weiter entfernten Punkten wirken. Dieses Resultat wird leicht auf Grund synthetischer und geometrischer Betrachtungen des Gleichgewichts zwischen einem Punkte und seinen zwölf nächsten und seinen sechs nächst-nächsten Nachbarn in einer gleichseitigen homogenen Ansammlung bestätigt. Diese Betrachtung ist äußerst interessant und wichtig für Verbände mit Stützen und Streben.

§ 28. Indem wir jetzt den Fall einer gleichseitigen homogenen Ansammlung verlassen, wollen wir das in Betracht ziehen, was ich eine ungleichseitige Ansammlung nenne, nämlich eine Ansammlung, in der drei Sätze

paralleler Punktreihen vorhanden sind, die wie folgt nach dem zuerst von Bravais<sup>1)</sup> ersonnenen System bestimmt sind:

I. Genau ein Satz von Punktreihen in den aufeinander folgenden kürzesten Abständen  $\lambda_1$ .

II. Genau ein Satz von Punktreihen in den aufeinander folgenden nächst-kürzesten Abständen  $\lambda_2$ .

III. Genau ein Satz von Punktreihen in den aufeinander folgenden Abständen  $\lambda_3$ , größer als  $\lambda_2$ , aber die kleiner sind als die aller andern Reihen, die nicht in der Ebene von I und II liegen.

Zu der Bedingung  $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1$  wollen wir noch die hinzufügen, daß keiner von den Winkeln zwischen den drei Sätzen Reihen ein rechter Winkel sein soll, damit unsere Ansammlung eine solche sei, die wir als vollkommen ungleichseitig bezeichnen dürfen.

§ 29. Es seien  $A'OA$ ,  $B'OB$ ,  $C'OC$  die so endgültig gefundenen primären Reihen, die irgendeinen gewählten Punkt  $O$  gemeinsam haben; dann ist

$$\left. \begin{aligned} A'O &= OA = \lambda_1, \\ B'O &= OB = \lambda_2, \\ C'O &= OC = \lambda_3. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

So bedeuten  $A'$  und  $A$  die nächsten Nachbarn des Punktes  $O$ ;  $B'$ ,  $B$  seine nächst-nächsten Nachbarn, und  $C'$  und  $C$  seine nicht in der Ebene  $AOB$  befindlichen nächsten Nachbarn. (Man beachte, daß in der Ebene  $AOB$  sich wohl Punkte befinden können, die zwar weiter von  $O$  entfernt sind als  $B$  und  $B'$ , aber näher an  $O$  sind als  $C$  und  $C'$ ).

§ 30. Wenn wir jetzt annehmen,  $BOC$ ,  $B'OC'$  usw. seien die spitzen Winkel zwischen den drei sich in  $O$  schneidenden Geraden, so erhalten wir zwei gleiche und dichiral<sup>2)</sup>-ähnliche Tetraeder, bei deren jedem die vier Seitenflächen ungleichseitige spitzwinklige Dreiecke sind. Daß jeder Winkel in und zwischen den Seitenflächen spitz ist, sehen wir leicht, wenn wir uns erinnern, daß  $OC$  und  $OC'$  kürzer sind als die Abstände zwischen  $O$  und irgendeinem andern von den Punkten zu beiden Seiten der Ebene  $AOB$ .<sup>3)</sup>

§ 31. Als Vorbereitung für den Mechanismus eines inkompressiblen elastischen Festkörpers nach Boscovich ist es vorteilhaft, jetzt den besondern Fall eines (schiefen) Tetraeders in Betracht zu ziehn, in dem die Lote aus den vier Ecken auf die gegenüberliegenden Seitenflächen sich in einem Punkte schneiden. Ich weiß nicht, ob die Tetraederart, die diese Bedingung erfüllt, in Lehrbüchern der Geometrie besonders behandelt wird, mir wurde aber

1) Journal de l'École Polytechnique, tome XIX, cahier XXXIII. pp. 1—128; Paris 1850.

2) Jedes von ihnen kann so gedreht werden, daß es mit dem in irgendeinem ebenen Spiegel entworfenen Bilde des andern zusammenfällt. Jedes kann als eine Umkehrung (pervert) des andern bezeichnet werden, wie nach dem Gebrauche mancher Schriftsteller ein Gegenstand eine Umkehrung eines andern genannt wird, wenn er mit dem in einem ebenen Spiegel entworfenen Bilde des andern zum Zusammenfallen gebracht werden kann, wie z. B. eine rechte und eine linke Hand (indem die linke Hand mit dem Bild der rechten Hand zum Zusammenfallen gebracht werden kann. D. H.)

3) Vgl. „Molecular Constitution of Matter“, § (45), (h), (i), Math. and Phys. Papers, Bd. III, S. 412—413.

von Dr. Forsyth mitgeteilt, daß sie in den Prüfungsarbeiten von Cambridge vorgekommen ist. Für meinen vorliegenden Zweck bin ich folgendermaßen auf dieses Tetraeder gekommen. Es seien  $QO, QA, QB, QC$  vier Linien von gegebener Länge, die von einem Punkte  $Q$  aus gezogen sind. Man ziehe sie in solchen Richtungen gegeneinander, daß das Tetraeder  $OABC$  ein Maximum werde. Welches auch die vier gegebenen Längen sein mögen, so hat diese Aufgabe eine und nur eine reelle Lösung; und diese ist so geartet, daß die vier Ebenen  $BOC, COA, AOB, ABC$  von den über  $Q$  hinaus verlängerten Geraden  $AQ, BQ, CQ, OQ$  senkrecht geschnitten werden. So sehen wir, daß das besondere Tetraeder durch vier Längen bestimmt ist, und schließen, daß zwei Gleichungen zwischen den sechs Kanten des Tetraeders im allgemeinen erforderlich sind, um es zu unserm besondern Tetraeder zu machen.

§ 32. Hiernach erkennen wir den folgenden einfachen Weg, ein solches besonderes Tetraeder zu konstruieren. Man wähle als Daten die drei Seiten einer Seitenfläche und die Länge des auf diese Seitenfläche aus der gegenüberliegenden Ecke des Tetraeders gefällten Lotes. Die Ebenen durch dieses Lot und die Ecken des Dreiecks enthalten die von diesen Ecken auf die gegenüberliegenden Seitenflächen des Tetraeders gefällten Lote und schneiden demgemäß die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks rechtwinklig. (Damit ist beiläufig ein Beweis für den bekannten Satz der Elementargeometrie geliefert, daß die Lote von den Ecken eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten einander in einem Punkte schneiden.) Es sei  $ABC$  das gewählte Dreieck, Fig. 124, und  $S$  der Punkt, in dem es von dem aus  $O$ , der gegenüberliegenden Ecke des Tetraeders, gezogenen Lot getroffen wird; dann schneiden also die über  $S$  hinaus verlängerten Geraden  $AS, BS, CS$  die gegenüberliegenden Seiten rechtwinklig, und wir finden folglich den Punkt  $S$ , indem wir zwei von diesen Loten konstruieren und ihren Schnittpunkt suchen. Dann wird das Tetraeder gefunden, indem man durch  $S$  eine zur Ebene  $ABC$  normale Gerade von der gegebenen Länge zieht. (Damit ist, wiederum beiläufig, ein interessanter geometrischer Satz gefunden: Die Lote aus  $A, B, C$  auf die Ebenen  $OBC, OCA, OAB$  schneiden  $OS$  in demselben Punkte, welche Länge man auch  $SO$  gibt.)

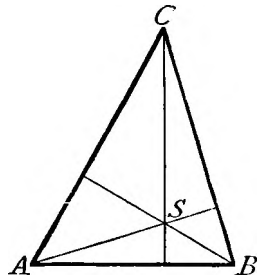


Fig. 124.

§ 33. Ich möchte nunmehr zeigen, wie ein inkompressibler homogener Festkörper von vollkommen schräger Kristallform konstruiert werden kann, ohne daß man materiell die Theorie von Boscovich verläßt. Man fasse in einer beliebigen ungleichseitigen Ansammlung die Ebene durch irgendeinen Punkt  $O$  und die Linie  $A'OA$  durch seine nächsten Nachbarn sowie die Linie  $B'OB$  durch seine nächst-nächsten Nachbarn ins Auge. Um etwas Bestimmtes im Sinne zu haben und Umschreibungen zu vermeiden, wollen wir diese Ebene horizontal voraussetzen. Wir stellen uns die beiden parallelen Ebenen vor durch die jener Ebene nächsten Punkte über und unter ihr. Die Ecke  $C$  des spitzwinkligen Tetraeders  $OABC$ , das wir betrachtet haben, ist einer von den Punkten in diesen beiden nächsten parallelen Ebenen; wir wollen die über  $AOB$  annehmen; dann ist die Ecke  $C'$  des gleichen

und dichiral-ähnlichen Tetraeders  $OA'B'C'$  einer von den Punkten in der nächsten unterhalb liegenden parallelen Ebene. Alle Punkte in der durch  $C$  gehenden Ebene sind Ecken von gleichen,  $OABC$  chiral-ähnlichen Tetraedern, die auf horizontalen, wie  $BOA$  orientierten Dreiecken stehen. Alle Punkte  $C'$  in der unteren nächsten Ebene sind Ecken von Tetraedern, die  $OA'B'C'$  chiral-ähnlich sind und unter Dreiecken liegen, die wie  $B'OA'$  orientiert sind. Das Volumen des Tetraeders  $OABC$  ist  $\frac{1}{6}$  des Volumens des Parallelepipedes, dessen zusammenstoßende Kanten  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  sind. Demgemäß ist die Summe der Rauminhalte aller aufwärts gerichteten Tetraeder, die ihre Grundflächen in einer Ebene haben,  $\frac{1}{6}$  des Inhalts des Raumes zwischen großen Flächen dieser Ebenen; und folglich ist die Summe aller solcher chiral-ähnlichen Tetraeder wie  $OABC$  gleich  $\frac{1}{6}$  des gesamten Inhaltes der Ansammlung in jedem größeren Raume. Demnach ändert irgendeine homogene Deformation der Ansammlung, die den Rauminhalt der Tetraeder nicht ändert, auch nicht den Rauminhalt des Festkörpers. Es seien nun Strebebänder  $OQ$ ,  $AQ$ ,  $BQ$ ,  $CQ$  zwischen irgendeinem Punkte  $Q$  innerhalb des Tetraeders und seinen vier Ecken angebracht, und diese Strebebänder seien bei  $Q$  mechanisch so miteinander verbunden, daß sie an diesem Punkt drücken oder ziehen. Dies ist nur ein mechanischer Weg, die Idee von Boscovich von einer zweiten homogenen Ansammlung festzustellen, die der ersten Ansammlung gleich und ihr ähnlich orientiert und mit einem ihrer Punkte in  $Q$  und mit den andern in den andern entsprechenden relativ zur ursprünglichen Ansammlung angebracht ist. Wenn dies für alle  $OABC$  chiral-ähnlicher Tetraeder geschehen ist, finden wir an jedem Punkte der ursprünglichen Anordnung, beispielsweise an  $O$  oder  $A$  oder  $B$  oder  $C$  vier Strebebandenden. Jeder Satz dieser vier Enden sei mechanisch miteinander so verbunden, daß Zug oder Druck möglich ist.<sup>1)</sup>

§ 34. Nachdem wir unser Modell so hergestellt haben, ändern wir seine Form, bis sein Volumen ein Maximum ist. Dies bringt das Tetraeder  $OABC$  auf die besondere in § 31 bestimmte Art. Nehmen wir für jetzt an, daß die Strebebänder gegen Zug und Druck absoluten Widerstand leisten, also sämtlich von konstanter Länge sind, so bleibt das Volumen der ganzen Ansammlung bei jeder für den Körper möglichen unendlich kleinen Formänderung ungeändert, so daß wir in der Tat das Skelett eines unzusammendrückbaren und undehnbaren Festkörpers<sup>2)</sup> vor uns haben. Nun mögen irgendwelche Kräfte, die in der Ansammlung dem Gesetze der Gleichförmigkeit unterworfen sind, zwischen den Punkten unserer ursprünglichen Ansammlung wirken (und ebenso, wenn wir wollen, zwischen den Punkten unserer zweiten Ansammlung, und auch zwischen andern als den nächsten Punktpaaren der beiden Ansammlungen). Diese Kräfte mögen die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, deren Prinzip in § 16 beschrieben und zur Auffindung der Gleichgewichtsgleichungen für den einfachen Fall einer einzelnen homogenen Ansammlung, wie sie dort in Betracht gezogen ist, geführt hat. So erhalten

1) Ein Modell der so hergestellten eigentümlichen Struktur wurde in der Sitzung der Royal Society am 7. Juni 1893 vorgeführt. Es bildet für drei Raumdimensionen, was ein sechsseitiges Netzwerk in einer Ebene bedeutet.

2) Dieses Resultat wurde für eine gleichseitige tetraedrische Anordnung in § 67 der „Molecular Constitution of Matter“, Math. and Phys. Papers, Bd. III, S. 425—426, mitgeteilt.



wir einen inkompressiblen elastischen Festkörper; und wir sehen wie früher in § 17, daß genau fünfzehn unabhängige Koeffizienten in der quadratischen Funktion der Deformationskomponenten, die die zur Herstellung einer unendlich kleinen Deformation erforderliche Arbeit darstellt, vorhanden sind.

§ 35. Jetzt setzen wir voraus, daß alle vier Streben nicht gegen eine Längenänderung unendlichen Widerstand leisten und einen bestimmten Modul longitudinaler Starrheit besitzen, den ich der Kürze wegen als ihre Steifheit bezeichnen will. Indem wir diesen vier Steifheiten geeignete Werte beilegen und annehmen, das Tetraeder sei von den beiden Bedingungen befreit, die es zu unserm besondern Tetraeder machen, erhalten wir sechs willkürlich bestimmbare Größen, durch die wir, indem wir sie zu den vorigen fünfzehn hinzunehmen, jedem der einundzwanzig Koeffizienten in der quadratischen Funktion der sechs Deformationskomponenten, mit denen wir es zu tun haben, wenn eine Raumänderung möglich ist, einen willkürlichen Wert beilegen können. So verfügen wir bei der strengsten Boscovichschen Theorie über einundzwanzig Koeffizienten in der Greenschen Energiefunktion. Die mechanischen Einzelheiten der Betrachtung des Gleichgewichts zweier homogenen Ansammlungen, zwischen denen eine Anziehung besteht, und die Ausdehnung der §§ 9—17 auf die jetzt vorliegende weitere Aufgabe sind voll rein wissenschaftlichen und technischen Interesses; sie müssen aber auf eine spätere Mitteilung, die ich zu geben hoffe, verschoben werden.

---

## Anhang J.

### Molekulare Mechanik eines Kristalles.<sup>1)</sup>

§ 1. Der Gegenstand dieser Mitteilung ist eine teilweise Erfüllung der Hoffnung, die ich am Ende meiner Abhandlung vom 1. und 15. Juli 1889 „Molecular Constitution of Matter“<sup>2)</sup> ausgesprochen habe: „Die mathematische Untersuchung muß auf eine spätere Mitteilung verschoben werden, die ich mit einigen weiteren Entwicklungen zu geben hoffe.“ Der hervorgehobene Druck ist heutigen Datums.<sup>3)</sup>

Indem wir die Gedanken und Prinzipien weiter verfolgen, die in den §§ 14—20 jener Abhandlung (die von jetzt ab der Kürze wegen als „M. C. M.“ zitiert werden soll) ausgesprochen sind, wollen wir zuerst die Arbeit finden, die erforderlich ist, alle Atome einer homogenen Ansammlung einer großen Zahl  $N$  von Molekeln bis auf unendliche Abstände voneinander zu trennen. Jede Molekel mag ein einzelnes Atom oder eine Gruppe von  $i$  Atomen sein (einander ähnlichen oder unähnlichen, wie es gerade fällt), so daß die gesamte Ansammlung aus  $N$  Ansammlungen, deren jede  $i$  Einzelatome enthält, gebildet wird.<sup>4)</sup>

§ 2. Man entferne eine Molekel aus ihrem Orte in der Ansammlung bis auf einen unendlichen Abstand, indem man die Anordnung der sie zusammensetzenden Atome ungeändert und ebenso jedes in der Ansammlung verbleibende Atom relativ unbewegt läßt. Es sei  $W$  die hierfür erforderliche Arbeit. Diese ist für alle Molekeln innerhalb der Ansammlung, ausgenommen die zu vernachlässigende Zahl derer (§ 30 weiter unten), die innerhalb des Wirkungsbereiches der Oberfläche liegen, die nämliche. Folglich ist  $\frac{1}{2}NW$  die gesamte für die Trennung der  $N$  Molekeln der Ansammlung bis auf unendlich große Abstände voneinander erforderliche Arbeit. Fügt man zu dieser noch das  $N$  fache der Arbeit hinzu, die erforderlich ist, die  $i$  Atome einer der Molekeln bis auf unendlich große Abstände voneinander zu trennen, so erhalten wir die Gesamtarbeit, die erforderlich ist, alle  $iN$  Atome der vorliegenden Ansammlung auseinander zu treiben.

Ein anderes, häufig geeignetes Verfahren ist das folgende: Man entferne irgendein Atom aus der Ansammlung, während man alle andern Atome unbewegt hält. Ist  $w$  der Betrag an Arbeit, der hierfür nötig ist, und bezeichnet  $\Sigma w$  die Summe der Arbeitsmengen, die nötig sind, dies für jedes Atom der ganzen Ansammlung einzeln auszuführen, so ist der Gesamtbetrag Arbeit,

1) Proc. Roy. Soc. Edin. Mai 1902.

2) Proc. Roy. Soc. Edin. und Vol. III der Mathematical and Physical Papers Art. XCVII.

3) Vgl. Anhang I. Schluß.

4) Im Original sind  $i$  und  $N$  zu vertauschen.

D. H.  
D. H.

die sich erforderlich zeigt, alle Atome bis auf unendlich große Abstände voneinander zu entfernen,  $\frac{1}{2} \Sigma w$ . Dies ist (ohne irgendeine Beschränkung, wie sie für das erste Verfahren festgestellt ist) streng richtig für jede beliebige Ansammlung jeder beliebigen, großen oder kleinen Anzahl Atome. In der Tat ist dies nur der allgemeinbekannte Satz über potentielle Energie in der Mechanik eines Systems einander anziehender oder abstoßender Partikeln; und hieraus beweisen wir weiter leicht die Richtigkeit auch des ersten Verfahrens.

§ 3. In der vorliegenden Mitteilung wollen wir nur Atome von identischer Eigenschaft und nur zwei Ansammlungsarten in Betracht ziehen.

I. Eine homogene Ansammlung von  $N$  einzelnen Atomen, in der die zwölf nächsten Nachbarn eines jeden Atoms von ihm gleich weit entfernt sind. Diese nenne ich der Kürze wegen eine gleichseitige Ansammlung. Sie ist vollständig beschrieben in „M. C. M.“ §§ 46, 50 . . . 57.<sup>1)</sup>

II. Zwei einfache homogene Ansammlungen von je  $\frac{1}{2} N$  Einzelatomen, die so ineinander gestellt sind, daß ein Atom jeder Ansammlung sich im Mittelpunkt einer Gruppe von vier nächsten Nachbarn der andern befindet.

Für die Ansammlung II sowohl wie für die Ansammlung I ist die Arbeit  $w$  für alle Atome, außer der zu vernachlässigenden Anzahl der innerhalb des Einflußbereiches der Grenzfläche belegenen, die nämliche. Läßt man die Grenzflächenatome außer acht, so ist demnach  $\Sigma w = Nw$ , und so die gesamte zur Trennung aller Atome bis auf unendliche Abstände erforderliche Arbeit

$$\frac{1}{2} Nw. \quad (1)$$

§ 4. Ist  $\varphi(D)$  die Arbeit, die erforderlich ist, den Abstand zweier Atome von  $D$  auf  $\infty$  zu erhöhen, und bedeutet  $f(D)$  die Anziehung zwischen ihnen im Abstände  $D$ , so hat man

$$f(D) = - \frac{d}{dD} \varphi(D). \quad (2)$$

Für beide Ansammlungen, sowohl für I als für II, erhalten wir

$$w = \varphi(D) + \varphi(D') + \varphi(D'') + \text{usw.}, \quad (3)$$

wenn mit  $D, D', D''$  usw. die Abstände zwischen je einem Atom und allen seinen Nachbarn, einschließlich der entferntesten der Ansammlung, die auf dasselbe noch mit irgendeiner Kraft einwirken, bezeichnet werden.

§ 5. Um so viel von diesen Abständen für die Ansammlung I zu finden, wie man will, betrachte man die Figuren 125 und 126. Fig. 125 gibt ein Atom  $A$  und ihm benachbarte wieder, die in einer Ebene auf Kreisen der nächsten, nächst-nächsten, nächst-nächst-nächsten usw. liegen. Fig. 126 gibt ein gleichseitiges Dreieck von drei Nachbarn und konzentrische Kreise von weiteren Nachbarn in derselben Ebene. Die Kreise, die dem  $r_4$  und  $r_8$  des folgenden § 7 entsprechen, sind in Fig. 126 nicht dargestellt. In allem Folgenden ist die Seite aller der gleichseitigen Dreiecke mit  $\lambda$  bezeichnet.

§ 6. Die sämtlichen Nachbarn in einer Ansammlung I werden mittels der Zeichnungen in folgender Weise gefunden:

a) Die Atome des in Fig. 125 wiedergegebenen Netzes. Die Ebene dieses Netzes wollen wir als unsere „Mittlebene“ bezeichnen. Man denke sich Geraden zu ihr senkrecht durch das Atom *A* und die mit *b*, *c* bezeichneten Punkte gezogen, um so für die Anordnung von Atomnetzen in parallelen Ebenen zu beiden Seiten der Mittlebene als Führung zu dienen.

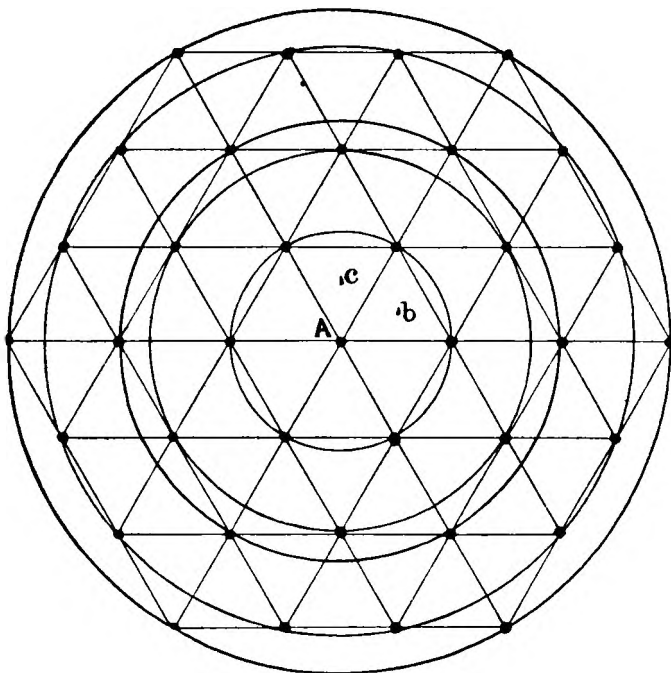


Fig. 125.

b) Zwei Atomnetze in gleichen Abständen  $\lambda \sqrt{\frac{2}{3}}$  zu beiden Seiten der „Mittlebene“. Diese Netze sind so geordnet, daß ein Atom in einem von ihnen, beispielsweise in dem uns zugewandten Netz, wenn wir die Zeichnung beschauen, auf der Führungslinie *b* und ein Atom in dem uns abgewandten auf der Führungslinie *c* liegt.

c) Zwei parallele Atomnetze in gleichen Abständen  $2\lambda \sqrt{\frac{2}{3}}$  zu beiden Seiten der „Mittlebene“ so angeordnet, daß ein Atom in dem zugewandten Netz in der Führungslinie *c* und ein Atom in dem abgewandten in der Führungslinie *b* liegt.

d) Ein drittes Paar parallele Ebenen in gleichen Abständen  $3\lambda \sqrt{\frac{2}{3}}$  von der „Mittlebene“, von denen jede ein Atom in der Führungslinie *A* hat.

e) Folgen von je drei parallelen Netzen mit ihren zyklisch angeordneten Atomen *Abc*, *Abc* ... in immer größeren Abständen von *A* auf der vom Papier aus uns zugewandten Seite, und ebenso *Ac b*, *Ac b* ... in immer größeren Abständen auf der abgekehrten Seite.

§ 7. Es seien  $q_1, q_2, q_3 \dots$  die Radien der in Fig. 125 wiedergegebenen Kreise, und  $r_1, r_2, r_3 \dots$  die Radien der in Fig. 126 gezeichneten, und wir wollen der Kürze wegen  $\lambda \sqrt{\frac{2}{3}}$  mit  $\kappa$  bezeichnen. Die Abstände zwischen  $A$  und allen es umgebenden Nachbarn sind:

A. In unserer „Mittlebene“: 6 gleich  $q_1$ ; 6 gleich  $q_2$ ; 6 gleich  $q_3$ ; 12 gleich  $q_4$ ; 6 gleich  $q_5$ ; . . .

B. In den beiden in den Abständen  $\kappa$  von der Mitte liegenden parallelen

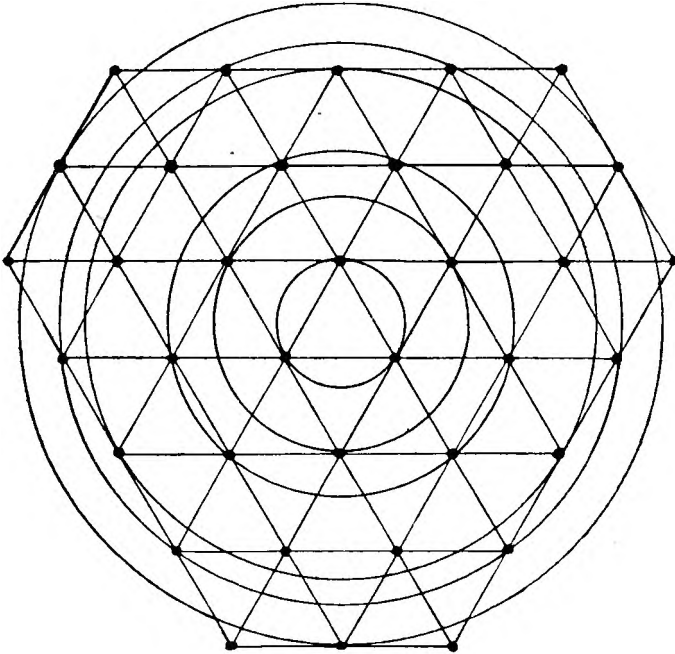


Fig. 126.

Ebenen: 6 gleich  $\sqrt{\kappa^2 + r_1^2}$ ; 6 gleich  $\sqrt{\kappa^2 + r_2^2}$ ; 12 gleich  $\sqrt{\kappa^2 + r_3^2}$ ; 12 gleich  $\sqrt{\kappa^2 + r_4^2}$ ; 6 gleich  $\sqrt{\kappa^2 + r_5^2}$ ; 12 gleich  $\sqrt{\kappa^2 + r_6^2}$ ; 6 gleich  $\sqrt{\kappa^2 + r_7^2}$ .

In den beiden parallelen Netzen im Abstände  $2\kappa$  von der Mitte sind die Abstände die nämlichen wie in (B), nur daß man überall  $2\kappa$  für  $\kappa$  zu setzen hat.

In den beiden parallelen Netzen im Abstände  $3\kappa$  von der Mitte sind die Abstände die nämlichen wie in (A), wenn man dort  $\sqrt{9\kappa^2 + q_1^2}$ ,  $\sqrt{9\kappa^2 + q_2^2}$  usw. für  $q_1, q_2$  usw. nimmt.

In Netzen, deren Entfernung größer als  $3\kappa$  ist, werden die Abstände von Atomen von  $A$  wie oben nach der in § 6, (e) beschriebenen zyklischen Anordnung ermittelt.

§ 8. Durch geometrische Überlegungen findet man

$$\left. \begin{aligned}
 q_1 &= \lambda; & q_2 &= \lambda \sqrt{3} = 1,732 \lambda; & q_3 &= 2 \lambda; \\
 q_4 &= \lambda \sqrt{7} = 2,646 \lambda; & q_5 &= 3 \lambda; \\
 r_1 &= \lambda \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577 \lambda; & r_2 &= 2 \lambda \sqrt{\frac{1}{3}} = 1,154 \lambda; \\
 r_3 &= \lambda \sqrt{\frac{7}{3}} = 1,527 \lambda; & r_4 &= \lambda \sqrt{\frac{13}{3}} = 2,082 \lambda; \\
 r_5 &= 4 \lambda \sqrt{\frac{1}{3}} = 2,308 \lambda; & r_6 &= \lambda \sqrt{\frac{19}{3}} = 2,517 \lambda; \\
 r_7 &= 5 \lambda \sqrt{\frac{1}{3}} = 2,887 \lambda.
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

§ 9. Bezeichnet man jetzt für eine Ansammlung I die Abstände des Atoms  $A$  von seinen nächsten Nachbarn, seinen nächst-nächsten, seinen nächst-nächst-nächsten usw. mit  $D_1, D_2, D_3$  usw. und die Anzahl dieser Nachbarn mit  $j_1, j_2, j_3$  usw., so findet man nach §§ 7, 8 für Abstände bis  $2 \lambda$ , zur Benutzung im folgenden § 12

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \lambda; & D_2 &= 1,414 \lambda; & D_3 &= 1,732 \lambda; & D_4 &= 2 \lambda. \\
 j_1 &= 12; & j_2 &= 6; & j_3 &= 18; & j_4 &= 6.
 \end{aligned}$$

§ 10. Wir wenden uns jetzt wieder dem § 5 zu und verfahren ähnlich hinsichtlich einer Ansammlung II, um die Entfernungen eines beliebigen Atoms  $A$  von einer begrenzten Anzahl seiner Nachbarn zu finden. Wir fassen zunächst nur die Nachbarn ins Auge, die mit  $A$  eine einzelne gleichseitige Ansammlung bilden; dann finden wir die nämliche Reihe von Abständen, wie wir sie in § 9 erhalten haben. Hierauf fassen wir die Nachbarn ins Auge, die der andern gleichseitigen Ansammlung angehören. Von diesen befinden sich die vier nächsten (die die Ecken des Tetraeders bilden, dessen Mittelpunkt  $A$  ist) sämtlich im Abstände  $\frac{3}{4} \lambda \sqrt{\frac{2}{3}}$ , und dies sind die nächsten Nachbarn von  $A$  der ganzen Doppelansammlung II. Drei von diesen vier liegen in einem Netze, dessen Ebene sich im Abstände  $\frac{1}{4} \lambda \sqrt{\frac{2}{3}}$  auf einer Seite von unserer durch  $A$  gehenden „Mittelebene“ befindet und eines ihrer Atome auf einer der Führungslinien  $b$  und  $c$  hat. Die Abstände aller anderen Atome in diesem Netze von  $A$  sind, wie sich aus Fig. 126 ergibt,

$$\sqrt{\left(\frac{1}{16} \kappa^2 + r_1^2\right)}, \sqrt{\left(\frac{1}{16} \kappa^2 + r_2^2\right)}, \text{ usw.} \quad (5)$$

Das letzte unserer vier nächsten Atome befindet sich auf einem Netze im Abstände  $\frac{3}{4} \lambda \sqrt{\frac{2}{3}}$  von unserer „Mittelebene“, und hat eines ihrer Atome auf der durch  $A$  gehenden Leitlinie. Die Entfernungen aller Atome dieses Netzes von  $A$  sind nach Fig. 125.

$$\frac{3}{4} \lambda \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\left(\frac{9}{16} \kappa^2 + q_1^2\right)}, \sqrt{\left(\frac{9}{16} \kappa^2 + q_2^2\right)} \text{ usw.} \quad (6)$$

Alle andern Atome der gleichseitigen Ansammlung, zu denen  $A$  nicht gehört, liegen in Netzen in den Abständen  $\kappa, 2\kappa, 3\kappa$  usw. jenseits der beiden Netze, die wir bereits zu beiden Seiten unserer „Mittelebene“ betrachtet haben; dabei sind schließlich die Atome jedes einzelnen Netzes nach dem in (e) § 6 beschriebenen zyklischen Gesetze angeordnet.

§ 12. Führt man die Untersuchung bei der Doppelansammlung II für die nächsten Nachbarn von  $A$  gemäß § 10 durch, so findet man 4 nächste Nachbarn in gleichen Abständen  $\frac{3}{4} \lambda \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,613 \lambda$ ; 12 nächst-nächste Nach-

barn in gleichen Abständen  $\lambda$  und 12 nächst-nächst-nächste in gleichen Abständen  $\lambda\sqrt[11]{8} = 1,173 \lambda$ . Diese reichen für den folgenden § 12 aus. Es ist leicht, aber langweilig und für jetzt ohne Nutzen,  $D_4, D_5, D_6$  usw. zu berechnen.

§ 12. Wir verwenden jetzt §§ 9, 11 in Gleichung (3) des § 4, so finden wir für eine Ansammlung I

$$\left. \begin{aligned} w &= 12 \varphi(\lambda) + 6 \varphi(1,414 \lambda) + 18 \varphi(1,732 \lambda) + 6 \varphi(2 \lambda) + \dots \\ \text{für eine Ansammlung II} \\ w &= 4 \varphi(0,613 \lambda) + 12 \varphi(\lambda) + 12 \varphi(1,173 \lambda) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Diese Formeln bereiten uns dafür vor, die praktische Mechanik jeder Ansammlung im einzelnen durchzuarbeiten, indem wir uns im folgenden durch die Feststellungen §§ 18, 16 der „M. C. M.“ leiten lassen.

§ 13. Jede unbegrenzte homogene Ansammlung von Atomen nach Boscovich befindet sich im Gleichgewichte. Hiernach ist jede begrenzte Ansammlung in demselben Zustande, falls man auf sie überall in dem Einflußgebiete der Grenze äußere Kräfte wirken läßt, die gleich den Kräften sind, mit denen eine homogene Fortsetzung der Ansammlung über das Einflußgebiet der Grenze hinaus auf sie wirken würde. Die Untersuchung dieser äußeren Kräfte für eine beliebig gegebene Ansammlung von einzelnen Atomen — oder Atomgruppen, wie sie oben (§ 1) erklärt sind — bildet die Gleichgewichtstheorie elastischer Körper nach Boscovich.

Es ist wunderbar, wie viele Beiträge zur Erklärung der Kristallographie und Elastizität von Festkörpern und der thermo-elastischen Eigenschaften von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen in dieser Theorie zu finden sind, ohne daß man bei dem Boscovichschen Kraftgesetze mehr als nur einen Übergang von Anziehung zu Abstoßung voraussetzen braucht. Nehmen wir beispielsweise an, die Kraft zwischen zwei Atomen verschwinde überhaupt für alle einen bestimmten Abstand  $I$ , den wir als Durchmesser der Wirkungssphäre bezeichnen wollen, übersteigende Entfernungen, sie sei eine abstoßende, wenn die Entfernung zwischen den Atomen  $<$  ist als  $\xi$ , sie sei Null, wenn der Abstand  $= \xi$  ist, sie sei endlich eine anziehende, wenn der Abstand  $> \xi$  und  $< I$  ist.

§ 14. Zwei verschiedene Beispiele finden sich in den beiden Kurven der Fig. 127 dargestellt, die willkürlich gezeichnet sind, um deutlich verschiedene Gleichgewichtszustände für die einatomige gleichseitige Ansammlung I und ebenso für die zweiatomige Ansammlung II zu erhalten. Die Abszisse ( $x$ ) jeder Zeichnung,

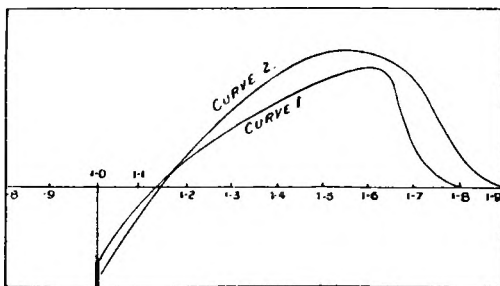


Fig. 127.

den Abstand zwischen den Mittelpunkten zweier Atome dar; die Ordinaten ( $y$ ) geben die Arbeit wieder, die erforderlich ist, sie aus diesem Abstände bis

Unendlich voneinander zu trennen. Demgemäß gibt  $-\frac{dy}{dx}$  die gegenseitige Anziehung im Abstände  $x$  an. Diese ist, wie wir sehen, bei beiden Kurven  $-\infty$  (eine unendliche Abstoßung) im Abstände 1,0; damit ist gesagt, daß das Atom eine ideale harte Kugel mit dem Durchmesser 1,0 sein soll. Für Abstände, die von 1,0 an steigen, ist die Kraft eine abstoßende bis 1,61 in Kurve 1 und bis 1,55<sup>1)</sup> in Kurve 2. Bei diesen Abständen ist die gegenseitige Kraft Null<sup>2)</sup>; und bei größeren Abständen, bis 1,8 bei Kurve 1, und 1,9 bei Kurve 2 ist die Kraft eine anziehende.<sup>3)</sup> Die Kraft ist Null für alle Abstände, die größer sind als die in den beiden Beispielen letztgenannten Zahlen. So erhalten wir nach unserer obigen Bezeichnung  $\xi = 1,61$ ,  $I = 1,8$  in Kurve 1 und  $\xi = 1,55$ ,  $I = 1,9$  in Kurve 2. Die Abstände für die größte Anziehungskraft (wie sie sich in den Inflexionspunkten der beiden Kurven zeigt) sind 1,68 für Kurve 1 und 1,76 für Kurve 2.

Nach unserer Definition des § 4 erhalten wir in jeder Kurve  $y = \varphi(D)$ , wenn  $x = D$  ist.

§ 15. Die beiden Formeln (7), § 12, werden in Fig. 128 für Kurve 1 und in Fig. 129 für Kurve 2, mit  $x = \lambda$  für Ansammlung I und  $x = 0,613 \lambda$  für Ansammlung II dargestellt.

In jeder Zeichnung ist die Abszisse,  $x$ , der Abstand zwischen den einander nächsten Atomen der Ansammlung. Die stark ausgezogenen Teile der Kurven geben die nach (7) berechneten Werte von  $w$  an. Die schwach

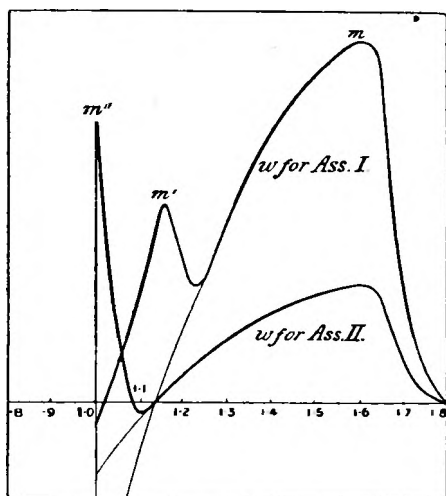


Fig. 128.

ausgezogenen Teile und ihre Fortsetzungen in den stark ausgezogenen stellen in den einzelnen Zeichnungen  $4\varphi(x)$ , und  $12\varphi(x)$  dar. Der Punkt, in dem die schwach ausgezogene Kurve in die stark ausgezogene übergeht, entspricht dem kleinsten Abstände zwischen Nachbarn, bei dem die nächstbenachbarten sich außerhalb des Bereiches der gegenseitigen Kraft befinden. Alle hier reproduzierten Zeichnungen wurden zuerst in großem Maßstabe auf kariertem Papier ausgeführt, um bei Berechnung nach Gleichung (7) Verwendung zu finden; dies erforderte genaue Bestimmungen der Maximum- und Minimumwerte von  $w$  und der entsprechenden Abstände zwischen den nächsten Nachbarn in jeder Ansammlung. Die entsprechenden Dichten, die in der letzten Kolonne der folgenden Tabelle (S. 561) der Resultate angegeben sind, wurden nach der Formel  $\sqrt{2}/\lambda^3$  für Ansammlung I und nach der  $2\sqrt{2}/\lambda^3$  für Ansammlung II berechnet; dabei bedeutet „Dichte“ in jedem

- 1) Tangenten spitz zur Achse.
- 2) Tangenten horizontal.
- 3) Tangenten stumpf zur Achse.

- D. H.
- D. H.
- D. H.



Falle die Anzahl Atome in einem Würfel, dessen Kante die der Zeichnung zugrunde gelegte Einheit der Abszisse ist. Diese Einheit ist (§ 14) gleich dem Durchmesser des Atoms. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, daß das Atom eine unendlich harte Kugel ist, die (§ 13) auf benachbarte Atome, die sie nicht berühren, in einem Abstände zwischen den Mittelpunkten, der kleiner ist als  $\xi$ , eine Abstoßung und in jedem Abstände zwischen  $\xi$  und  $I$  eine Anziehung ausübt.

§ 16. Um diese Resultate zu deuten, setzen wir fest, alle Atome der Ansammlung seien durch eine Führung gehalten, die sie entweder in die gleichseitige Homogenität der Ansammlung I oder in die zweiatomige Homogenität der Ansammlung II zwingt, bei der jedes Atom der einen Teilansammlung sich im Mittelpunkte einer gleichseitigen Gruppe von vier Atomen der andern befindet. Es ist leicht, Gedanken einen Mechanismus zu konstruieren, der dies leistet, und wir brauchen uns jetzt damit nicht zu befassen. Es genügt zu wissen, daß dies geschehen kann. Wenn das der vorgeschriebenen Zwangsführung unterworfenen System bei irgendeiner gegebenen Dichte sich selbst überlassen wird, besteht die Bedingung für ein Gleichgewicht ohne äußere Kraft darin, daß  $w$  ein Maximum oder ein Minimum sein muß; das Gleichgewicht ist stabil, wenn  $w$  ein Maxi-

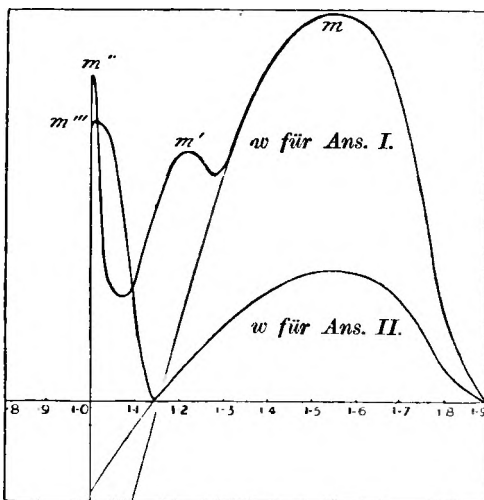


Fig. 129.

Ansammlung I			Ansammlung II		
Abstände zwischen den Mittelpunkten nächster Atome für Maximum- und Minimumwerte von $w$	Maximum- und Minimumwerte von $w$	Dichten	Abstände zwischen den Mittelpunkten nächster Atome für Maximum- und Minimumwerte von $w$	Maximum- und Minimumwerte von $w$	Dichten
Kraftgesetz gemäß Kurve 1					
1,16	8,28 (Max.)	0,904	1,00	11,52 (Max.)	0,652
1,23	5,22 (Min.)	0,759	1,10	0,76 (Min.)	0,490
1,61	14,76 (Max.)	0,338	1,61	4,92 (Max.)	0,158
Kraftgesetz gemäß Kurve 2					
1,00	11,58 (Max.)	1,414	1,00	12,36 (Max.)	0,652
1,07	3,78 (Min.)	1,146	1,15	0,16 (Min.)	0,433
1,22	10,44 (Max.)	0,774	1,53	5,20 (Max.)	0,184
1,28	9,36 (Min.)	0,671			
1,53	15,60 (Max.)	0,393			

imum, unstabil, wenn es ein Minimum bedeutet. Es ist interessant, zwei stabile Gleichgewichtslagen der Ansammlung I nach dem Kraftgesetze gemäß Kurve 1 und drei nach dem Kraftgesetze gemäß Kurve 2, und zwei stabile Gleichgewichtslagen der Ansammlung II bei jedem dieser beiden Kraftgesetze festzustellen.

§ 17. Wie dürfen aber nicht vergessen, daß wir nur bei der besonderen Zwangsführung (§ 16) sicher sind, daß diese Gleichgewichtszustände stabil ausfallen. Doch ist bestimmt auch ohne Führung die einatomige Ansammlung für die geringe, dem Punkte  $m$  jeder Zeichnung entsprechende Dichte stabil, da bei unendlich kleinen Abweichungen auf jedes Atom nur Kräfte seitens der zwölf nächsten Nachbarn einwirken, und da diese Kräfte in der Gleichgewichtslage sämtlich Null sind. Hiernach möchte man sich vorstellen, daß alle Maxima von  $w$ , sowohl für die einatomige als auch für die zweiatomige Ansammlung, auch ohne Führung Stabilität geben. Es erscheint aber wahrscheinlich, daß für die Ansammlung I und das Kraftgesetz 2 das Zwischenmaximum  $m'$  (das sich nahe einem Minimum befindet) unstabil ist. Wenn dem so ist, würde die Ansammlung, sobald sie bei dieser Anordnung sich selbst überlassen wird, auseinandergehen und (vermöge der durch Wellen im Äther, nämlich durch Wärmestrahlung verlorenen Energie) im stabilen Gleichgewicht, das entweder dem Maximum  $m$  (bei einfacher Ansammlung), oder den Maxima  $m''$  (gleichfalls bei einer einfachen Ansammlung) oder  $m'''$  (bei einer doppelten Ansammlung) entspricht, Ruhe finden. Auch für das Kraftgesetz 1 ist es möglich, daß das Maximum  $m'$  für die einfache Ansammlung unstabil sich zeigt. Auch wenn dieses sein sollte, würde das in dieser Anordnung sich selbst überlassene System gleichfalls auseinandergehen und entweder in der Anordnung  $m$  (bei einer einfachen Ansammlung) oder in der  $m''$  (bei einer doppelten Anordnung) Ruhe finden. Weiter ist es möglich, daß bei den beiden von uns willkürlich angenommenen Kraftgesetzen stabile Gleichgewichtsanordnungen vorhanden sein können, wenn die Atome sich in einfacher kubischer Stellung (§ 21 weiter unten) befinden, und ebenso wenn in doppelter kubischer Stellung; nämlich in einer solchen, bei der jedes Atom den Mittelpunkt eines Würfels bildet, dessen acht Ecken seine nächsten Nachbarn sind.

§ 18. Es ist wichtig, noch zu bemerken, daß sicher ein die Bedingungen des § 13 erfüllendes Kraftgesetz gefunden werden kann, bei dem in der Tat auch die einfache kubische Anordnung eine stabile ist, wenn auch vielleicht nicht die einzige stabile Anordnung. Die doppelte kubische Anordnung, der man bisher in der Molekulartheorie der Kristalle noch nicht die Beachtung geschenkt hat, die sie verdient, ist zweifellos für manche Kraftgesetze, die die einfache kubische Anordnung unstabil machen würden, eine stabile. Jedenfalls ist es äußerst wahrscheinlich, daß es in der Natur Kristalle aus Elementarsubstanzen, etwa Metalle oder gefrorener Sauerstoff oder Stickstoff oder Argon, gibt in einfach kubischen und doppelt kubischen oder einfach gleichseitigen und doppelt gleichseitigen Anordnungen. Ebenso ist es wahrscheinlich, daß die Kristallmolekeln in Kristallen aus chemisch zusammengesetzten Substanzen in vielen Fällen einfach die chemischen Molekeln und in vielen anderen Fällen aus Gruppen der chemischen Molekeln aufgebaut sind. Die Kristallmolekeln in Kristallen des kubischen Systems sind, welches sonst auch ihre Konstitution sein mag, wahrscheinlich entweder in einfach kubischer

oder doppelt kubischer oder in einfach gleichseitiger oder doppelt gleichseitiger Anordnung gelagert.

§ 19. Es wäre eine interessante Weiterentwicklung der Molekulartheorie, einige illustrierende Fälle chemisch zusammengesetzter Molekeln (das heißt Atomgruppen, die verschiedene Kraftgesetze entweder zwischen zwei Atomen derselben Art oder zwischen Atomen verschiedener Art besitzen) zu finden, die bei bestimmter Dichte oder bei bestimmten Dichten einer gleichseitigen Anordnung im stabilen Gleichgewichte sind, und andere, die es nicht sind. In dieser letzten Klasse von Fällen bilden die Molekeln Kristalle, die nicht dem kubischen Systeme angehören. Diese Anordnung kann sicher von zusammengesetzten Molekeln mit einem die Bedingung des § 13 erfüllenden Kraftgesetze zwischen je zwei Atomen erreicht werden; und es kann dies sehr leicht selbst für eine einatomige homogene Anordnung geschehen, wenn man in der Annahme über das Kraftgesetz die Einfachheit des § 13 fallen läßt.

§ 20. Die mathematische Theorie fordert hinsichtlich der Bedingungen der Stabilität eine weitere Entwicklung. Wenn bei der Zwangsführung  $w$  entweder ein Maximum oder ein Minimum ist, besteht mit oder ohne Führung Gleichgewicht. Bedeutet  $w$  ein Maximum, so ist das Gleichgewicht mit der Führung ein stabiles, kann aber ohne die Führung ein stabiles oder auch ein unstabiles sein. Ein Kriterium für die Stabilität, das die letzte Alternative auflösen würde, ist sehr erwünscht; und es scheint mir, obwohl die Anzahl Atome quasi-unendlich ist, daß das gesuchte Kriterium in jedem Falle ein bestimmtes sein wird, indem die Anzahl der Atome, die auf jedes Atom eine Kraft ausüben, endlich ist. Dieses Kriterium allgemein für das Gleichgewicht einer beliebigen homogenen Ansammlung homogener Gruppen, deren jede aus einer endlichen Anzahl Atome besteht, zu finden, ist ein wertvoller Gegenstand mathematischer Betrachtung. Seine Schwierigkeit und Kompliziertheit wird in den §§ 21, 22 für den besonders einfachen Fall ähnlicher in einfacher kubischer Anordnung angeordneter Atome und in den §§ 23—29 für einen noch einfacheren Fall klargelegt.

§ 21. Man fasse eine Gruppe von acht Partikeln an den acht Ecken eines Würfels (Kantenlänge  $\lambda$ ) ins Auge, die aufeinander mit Kräften einwirken, die sämtlich sich nach dem nämlichen Gesetze der Entfernung ändern. Die Größen der Kräfte seien so, daß das Gleichgewicht besteht; und in erster Linie sei das Änderungsgesetz der Kräfte ein solches, daß das Gleichgewicht ein stabiles ist. Man baue nun eine quasi-unendliche Anzahl solcher Kuben mit zusammenstoßenden Ecken so auf, daß sie einen großen Würfel oder einen Kristall irgendeiner andern Form bilden. Man verbinde dabei in Gedanken jede Gruppe von acht Partikeln, die wir bei dieser Struktur miteinander in Berührung finden, zu einem Atom. Das ganze System ist in stabilem Gleichgewicht. Die vier Kräfte in jeder Gruppe von vier zusammenfallenden Kanten der ursprünglichen Würfel geben eine Kraft, die gleich der zwischen zwei Atomen im Abstände  $\lambda$  wirkenden Kraft ist. Die beiden Kräfte in jeder Diagonale der zusammenfallenden quadratischen Flächen zweier sich berührender Würfel bilden eine Kraft, die der Kraft zwischen zwei Atomen im Abstände  $\lambda/\sqrt{2}$  gleich ist. Die Einzelkraft in jeder Körperdiagonale eines jeden Würfels ist die Kraft zwischen zwei Atomen im Abstände  $\lambda/\sqrt{3}$ . Die drei Elastizitätsmoduln (der Modul der Kompressibilität,

der Modul für die Winkeländerungen der quadratischen Flächen, und der Modul für die Winkeländerung zwischen ihren Diagonalen) werden leicht gefunden, wenn man die Mechanik eines einzelnen ursprünglichen Würfels untersucht, oder sie können auch nach der allgemeinen in der Abhandlung „On the Elasticity of a Crystal according to Boscovich<sup>1)</sup>“ mitgeteilten Methode ermittelt werden. (Im Vorübergehen sei bemerkt, daß weder in diesem Falle noch in anderen Fällen ohne Beweis angenommen werden darf, daß Stabilität durch positive Werte der Elastizitätsmoduln gesichert ist.)

§ 22. Nun ist freilich unser kubisches System offenbar in stabilem Gleichgewicht, wenn die acht, einen losgelösten ursprünglichen Würfel bildenden, Partikel sich in stabilem Gleichgewichte befinden. Es ist aber nicht ohne Beweis unmittelbar klar, daß diese Bedingung, wenn sie auch hinreichend, für die Stabilität der zusammengesetzten Ansammlung auch notwendig ist. Es könnte sogar sein, daß, wenn auch jeder ursprüngliche Würfel für sich unstabil ist, die zusammengesetzte Ansammlung vermöge der gegenseitigen Unterstützung, die die Verbindung von acht Partikeln in jeder Ecke der zusammengelegten Würfel bietet, doch stabil verharret.

§ 23. Die denkbar einfachste Klarlegung der Stabilitätsfrage des § 20 bietet das äußerst interessante Problem des Gleichgewichts einer unendlichen Reihe ähnlicher Partikel, die nur die Freiheit haben, sich in einer geraden Linie zu bewegen. Die Betrachtung dieses linearen Problems werden wir auch (§§ 28, 29, weiter unten) für eine Untersuchung der Störung aus der Homogenität in der Nachbarschaft der Grenzfläche, die eine im Gleichgewichte befindliche dreidimensionale homogene Ansammlung erleidet, von Nutzen finden. Zuerst wollen wir  $a$ , den Abstand oder einen von den Abständen zwischen den Atomen, finden, in dem Atome für das Gleichgewicht angebracht werden müssen; und hierauf wollen wir zu finden versuchen, ob das Gleichgewicht stabil oder unstabil ist.

§ 24. Bezeichnet man (wie in § 4) mit  $f(D)$  die Anziehung zwischen zwei im Abstände  $D$  voneinander befindlichen Atomen, so erhält man für die Summe,  $P$ , der Anziehungen zwischen allen Atomen auf einer Seite von einem beliebigen Punkte in ihrer Geraden aus und allen Atomen auf der andern Seite den folgenden endlichen Ausdruck, der naturgemäß eine begrenzte Anzahl Glieder enthält, die um so größer ist, je kleiner  $a$  sein soll:

$$f(a) + 2f(2a) + 3f(3a) + \dots = P. \quad (8)$$

Folglich ist  $a$  für ein Gleichgewicht ohne äußere Kräfte gegeben durch die Funktionalgleichung

$$f(a) + 2f(2a) + 3f(3a) + \dots = 0, \quad (9)$$

die je nach dem Kraftgesetze eine, zwei oder irgendeine Anzahl Werte für  $a$  liefern kann; oder auch keinen Wert ergeben mag (alle Wurzeln imaginär), wenn die Kraft in dem größten Abstände, in dem überhaupt noch eine Kraft besteht, eine abstoßende ist. Die Lösung oder alle Lösungen dieser Gleichung werden leicht gefunden, wenn man nach der  $f(D)$  darstellenden Boscovichkurve eine Tabelle der Werte von  $P$  berechnet und sie nach der Formel (8)

1) Proc. R. S. L. Bd. LIV. 8. Juni 1893. Anh. I.



folgenden ungleichen Abstände

$$\cdots a + u_{i-2}, a + u_{i-1}, a + u_i, a + u_{i+1}, a + u_{i+2}, \cdots \quad (10)$$

Dann ist das Gleichgewicht stabil oder unstabil, je nachdem die zu dieser Verschiebung erforderliche Arbeit für alle unendlich kleinen Werte von  $\cdots u_{i-1}, u_i, u_{i+1} \cdots$  positiv ist oder nicht. Ihr Betrag ist  $W_0 - W$ , falls mit  $W$  der gesamte Arbeitsbetrag bezeichnet wird, der erforderlich ist, alle Atome aus der Anordnung (10) bis auf unendlich große gegenseitige Abstände voneinander zu entfernen.

Nach dem obigen § 2 ist  $W$  gegeben durch

$$W = \frac{1}{2} (\cdots + w_{i-1} + w_i + w_{i+1} + \cdots). \quad (11)$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} w_i = & \varphi(a + u_i) + \varphi(2a + u_{i-1} + u_i) + \varphi(3a + u_{i-2} + u_{i-1} + u_i) + \cdots \\ & + \varphi(a + u_{i+1}) + \varphi(2a + u_{i+1} + u_{i+2}) + \varphi(3a + u_{i+1} + u_{i+2} + u_{i+3}) + \cdots \\ & + \cdots \end{aligned} \quad (12)$$

Entwickelt man jedes Glied nach der Taylorschen Reihe bis zu den Größen zweiter Ordnung und beachtet dabei, daß die Summe der Glieder erster Ordnung für Gleichgewicht<sup>1)</sup> bei gleichen Abständen,  $a$ , Null ist, und setzt  $\varphi''(D) = -f'(D)$ , so findet sich

$$\begin{aligned} W_0 - W = & \frac{1}{4} \Sigma \{ f'(a) [u_i^2 + u_{i+1}^2] \\ & + f'(2a) [(u_{i-1} + u_i)^2 + (u_{i+1} + u_{i+2})^2] \\ & + f'(3a) [(u_{i-2} + u_{i-1} + u_i)^2 + (u_{i+1} + u_{i+2} + u_{i+3})^2] \\ & + \quad \text{usw.} \quad \text{usw.} \quad \text{usw.} \quad \text{usw.} \quad \}, \end{aligned} \quad (13)$$

wo  $\Sigma$  die Summation für alle Werte von  $i$  bezeichnet, außer den, der kleinen Anzahl von Atomen (§§ 28, 29 weiter unten) innerhalb des Wirkungsbereiches der beiden Enden der Reihe, entsprechenden.

§ 26. Demnach ist das Gleichgewicht jedenfalls stabil, wenn  $f'(a)$ ,  $f'(2a)$ ,  $f'(3a)$  usw. sämtlich positiv sind; es kann aber auch stabil sein, wenn einige von ihnen negative Werte haben. So ist nach der Zeichnung von Boscovich eine die Stabilität sichernde Bedingung die, daß jedes Atom zu einem aufsteigenden Zweige der bei steigenden Abständen Anziehungen angehenden Kurve gehört. Wir sehen, daß jedes der Atome in jeder unserer drei Gleichgewichtslagen für Fig. 130 diese Bedingung erfüllt.

§ 27. Fig. 131 gibt eine einfache Kurve nach Boscovich wieder, die willkürlich so gezeichnet ist, daß die Bedingung des obigen § 13 erfüllt ist, und mit der weiteren Vereinfachung für unsern vorliegenden Zweck, daß der Einflußbereich so begrenzt wird, daß er sich nicht weiter als auf die nächst-nächsten Nachbarn in einer Reihe im Gleichgewicht befindlicher, gleich weit

1) Es ist interessant und instruktiv, dies analytisch zu beweisen, indem man alle Glieder in  $W$ , die  $u_i$  enthalten, zusammennimmt und so  $\frac{\partial W}{\partial u_i}$  findet. Dies gleich Null gesetzt, liefert für Nullwerte von  $\cdots u_{i-1}, u_i, u_{i+1} \cdots$  Gleichung (9) des Textes.

voneinander entfernter Partikeln erstreckt, und daß Abstoßungen zwischen den nächsten und Anziehungen zwischen den nächst-nächsten herrschen. Der Abstand,  $a$ , zwischen den nächsten ist bestimmt durch

$$f(a) + 2f(2a) = 0, \quad (14)$$

nämlich die Gleichung, in die (9) des § 24 übergeht, wenn keine weiteren Kräfte außer solchen zwischen den nächsten und den nächst-nächsten Teilchen vorhanden sind. Offenbar gibt es eine stabile Lösung dieser Gleichung, bei der ein Atom sich in dem (in der Zeichnung nicht angedeuteten) Nullpunkte der Abszissen und sein nächster Nachbar auf der rechten Seite in  $A$ , welches der Punkt der Kraft Null ist, von dem aus gerechnet für größere Abstände Anziehung und für kleinere Abstoßung herrscht, befindet. Die einzige andere Anordnung stabilen Gleichgewichts wird durch Auflösung der Gleichung (14) nachdem in § 24 beschriebenen Plane gefunden; diese ergibt  $a = 0,680$ ; sie ist in Fig. 131 durch  $A_i, A_{i+1}$  als in der Reihe aufeinander folgende Atome angedeutet.

§ 28. Wir fassen jetzt das Gleichgewicht in der Nähe der beiden Enden einer geradlinigen, eine sehr große Anzahl Atome enthaltenden Reihe ins Auge, die an allen Stellen, die nicht dem Einflusse der beiden Enden unterworfen sind, gleiche Abstände  $a$  voneinander haben, die § 27, (14) befriedigen. Wir wollen der Einfachheit wegen den Gleichgewichtsfall annehmen, bei dem auf kein Atom eine äußere Kraft wirkt und keine andere Kraft zwischen zwei beliebigen Atomen vorhanden ist als die positive oder negative Anziehung  $f(D)$ . Jedoch wollen wir zunächst voraussetzen, daß Bänder oder Anschläge zwischen je zwei in der Nähe jedes Endes der Reihe liegenden, aufeinander folgenden Atomen so angebracht sind, daß alle ihre aufeinander folgenden Abstände genau auf  $a$  erhalten werden. Der Kürze wegen wollen wir sie Bänder nennen, obwohl sie nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch Streben heißen sollten, wenn ihre Kraft auf die Atome, auf die sie wirken, ein Auseinandertreiben und kein Aneinanderhalten ist. Indem wir mit  $A_1, A_2, A_3$  die Atome an dem einen Ende der Reihe bezeichnen, setzen wir voraus, das Band zwischen  $A_1$  und  $A_2$  werde entfernt, und  $A_1$  sei die Möglichkeit gegeben, seine Gleichgewichtslage einzunehmen.

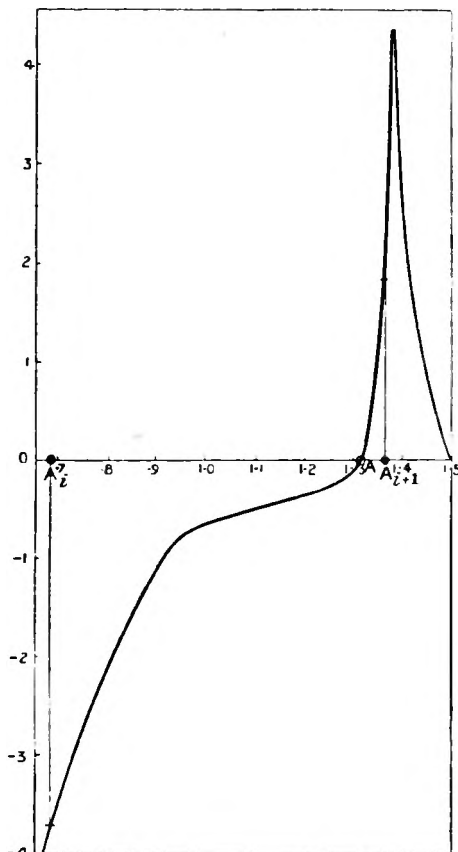


Fig. 131.

Eine einzige Gleichung gibt dann den abgeänderten Abstand  $A_1 A_2$  an; wir wollen ihn mit  $a + {}_1x_1$  bezeichnen. Ein anderes Band werde jetzt zwischen  $A_1$  und  $A_2$  gebracht, um den abgeänderten Abstand während der folgenden Operationen aufrechtzuerhalten. Hierauf entferne man das Band zwischen  $A_2$  und  $A_3$  und findet durch eine einzige Gleichung den abgeänderten Abstand  $a + {}_1x_2$  (den man wieder durch ein neues Band festhält. D. H.). Weiter entferne man das Band zwischen  $A_3 A_4$  und man findet, wiederum durch eine einzige Gleichung, den abgeänderten Abstand  $a + {}_1x_3$ , und so fort, bis man  ${}_1x_7$  oder  ${}_1x_8$  so klein erhalten hat, daß es vernachlässigt werden kann. Die so ermittelten Strecken  ${}_1x_1, {}_1x_2, {}_1x_3 \dots {}_1x_i$  liefern eine erste Annäherung für die Abweichung von der Gleichheit des Abstandes für ein vollkommenes Gleichgewicht. Man wiederhole das Verfahren der Entfernung der Bänder in derselben Folge und ersetze jedes durch die abgeänderte Länge, wie in der ersten Reihe der Annäherungen, und man findet eine zweite Reihe  ${}_2x_1, {}_2x_2, {}_2x_3 \dots$ . Ähnlich gelangt man zu einer dritten, vierten, fünften, sechsten Annäherung, bis eine Änderung bei der Wiederholung des Verfahrens nicht mehr eintritt. So ermitteln wir durch ein Verfahren, das seinem Wesen nach konvergent ist, wenn das Gleichgewicht, von dem wir ausgegangen sind, ein stabiles war, die Abweichungen von der Gleichheit der aufeinander folgenden Abstände, die für ein Gleichgewicht erforderlich sind, wenn das System in der Nähe beider Enden und überhaupt in der ganzen Reihe freigelassen wird (abgesehen immer von dem Zwange, in der geraden Linie zu bleiben). Indem dieses Verfahren auf die Kurve der Fig. 131 und den Fall des Gleichgewichts  $a = 0,680$  angewendet wurde, ergaben sich die folgenden Annäherungen:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
Erste Annäherung	+ 0,018	- 0,009	+ 0,004	- 0,002	+ 0,001	- 0,001	0,000
Zweite "	+ 0,026	- 0,014	+ 0,007	- 0,003	+ 0,002		
Dritte "	+ 0,031	- 0,018	+ 0,009	- 0,005	+ 0,003		
Vierte "	+ 0,034	- 0,020	+ 0,011	- 0,006			
Fünfte "	+ 0,036	- 0,022	+ 0,012	- 0,007			
Sechste "	+ 0,037	- 0,023	+ 0,013				
Siebente "	+ 0,038	- 0,024					
Achte "	+ 0,039						

So ist unsere schließliche Lösung für  $a = 0,680$

$$x_1 = + 0,039, \quad x_2 = - 0,024,$$

$$x_3 = + 0,013, \quad x_4 = - 0,007,$$

$$x_5 = + 0,003, \quad x_6 = - 0,001,$$

$$x_7 = 0,000.$$

§ 29. Es ist äußerst interessant zu bemerken, daß die aufeinander folgenden Abweichungen von dem Werte  $a$  abwechselnd positiv und negativ sind, und daß sie für den Abstand zwischen  $A_7$  und  $A_8$  einen geringeren Betrag haben als ein siebentel Prozent von  $a$ . So ist, wenn wir dahin übereinkommen, eine Größe unter ein siebentel Prozent in dem Abstände zwischen zwei Atomen zu vernachlässigen, der Wirkungsbereich des Endes



von jedem Ende aus  $7a$ , obwohl die Kraft zwischen zwei Atomen bereits in allen  $2,2a$  übersteigenden Abständen Null ist.

§ 30. Wenn  $f(D)$  nicht mehr die Kraft zwischen zwei Atomen in einer geradlinigen Reihe, sondern die Kraft zwischen parallelen ebenen Netzen in einer Bravais'schen homogenen Ansammlung einzelner Atome bezeichnet, bleibt die Auseinandersetzung der §§ 27, 28 noch gültig; und so gelangen wir zu dem sehr wichtigen und interessanten Schlusse, daß wenn Abstoßung zwischen den nächsten und Anziehung zwischen den nächst-nächsten Netzen und keine Kraft zwischen den nächst-nächst-nächsten und ferneren herrscht, die Störung aus der Homogenität in der Nähe der Grenzfläche in abwechselnden Verkleinerungen und Vergrößerungen der Netzaabstände besteht, die immer geringer und geringer werden, wenn wir nach innen vorgehen, aber immer in Abständen von der Grenzfläche, die den mehrfachen Abstand zweier benachbarter Netze betragen, merklich bleiben.

---

## Anhang K.

### Über veränderliche elektrische und magnetische Schirmwirkung.<sup>1)</sup>

§ 1. Ein Schirm aus unvollständig leitendem Material verhält sich, wenn hinreichend Zeit gelassen wird, ganz wie ein ähnlicher Schirm aus Metall. Wenn er aber gegen eine sich schnell ändernde elektrostatische Kraft verwendet wird, bleibt seine Wirkung zurück. Vermöge dieses Zurückbleibens ist, wie leicht zu sehen, die Schirmwirkung gegen periodische Änderungen einer elektrostatischen Kraft um so kleiner, je größer die Frequenz der Änderung ist. Dies wird leicht durch mannigfache Formen idiostatischer Elektrometer klargelegt. Wird zum Beispiel ein Blatt Papier von einem Metall getragen, das sich in metallischer Verbindung mit der beweglichen Scheibe eines Attraktions-Scheibenelektrometers befindet, so verschwindet die Anziehung (oder wird unmerklich) einige Zeitsekunden, nachdem eine Potentialdifferenz zwischen der angezogenen Scheibe und der gegenüberstehenden Metallscheibe hergestellt ist und konstant gehalten wurde, falls sich das Papier und die umgebende Luft in dem gewöhnlichen hygrometrischen Zustande unseres Klimas befinden. Wenn das Instrument aber zur Messung schnell alternierender Potentialdifferenzen mit gleichen Differenzen nach beiden Seiten vom Nullpunkte aus verwendet wird, gibt es nur eine wenig kleinere Kraft an als im Durchschnitt gefunden wird, wenn das Papier entfernt wird und alle andern Umstände die nämlichen bleiben. Wahrscheinlich würde bei gewöhnlichem reinem weißen Papier und gewöhnlichen hygrometrischen Bedingungen eine Wechselfrequenz von 50 bis 100 in der Sekunde mehr als hinreichend sein, die Schirmwirkung des Papiers unmerklich zu machen. Und eine weit geringere Frequenz würde genügen, wenn die das Papier umgebende Atmosphäre künstlich getrocknet wird. Geht man bis zu einer Frequenz von Millionen in der Sekunde hinauf, so dürfen wir sicher sagen, daß je größer die Frequenz ist, um so vollkommener die Vernichtung der Schirmwirkung durch das Papier ist; und diese Behauptung bleibt auch noch richtig, wenn das Papier auf beiden Seiten vollkommen mit Tinte geschwärzt ist, obwohl bei diesem Zustande möglicherweise eine größere Frequenz als 50 bis 100 in der Sekunde zur praktischen Vernichtung der Schirmwirkung erforderlich sein dürfte.

§ 2. Jetzt setzen wir als Prüfungsmittel der Elektrisierung anstatt einer Anziehungskraft zwischen zwei durch den Schirm voneinander getrennten Körpern, nach dem Verfahren von Hertz, einen feinen Funken voraus. Zwei kleine Metallkugeln *A*, *B* seien gut isoliert sehr nahe der Berührung einander gegenüber aufgestellt, und zwei weit größere, *E*, *F*, neben ihnen so, daß der

---

1) Proc. R. S. April 1891.

kürzeste Abstand zwischen  $E$  und  $F$  hinreicht, das Überspringen eines Funkens zu verhindern, und die die Mittelpunkte in den Paaren verbindenden Linien seien parallel. Wenn dann eine schnell wechselnde Potentialdifferenz zwischen  $E$  und  $F$  hergestellt wird, die nicht plötzlich, sondern, wie wir annehmen wollen, nach dem einfachen harmonischen Gesetze variiert, dann werden in jeder Periode zwei Funken zwischen  $A$  und  $B$  beobachtet. Das Zwischenschieben eines großen Papierschirmes zwischen  $E$  und  $F$  auf der einen und zwischen  $A$  und  $B$  auf der andern Seite würde unter gewöhnlichen hygrometrischen Bedingungen diese Funken absolut aufhalten, wenn die Frequenz kleiner als vielleicht 4 oder 5 in der Sekunde ist. Bei einer Frequenz von 50 oder mehr würde aber ein reiner weißer Papierschirm keinen merklichen Unterschied hervorrufen. Wenn das Papier auf beiden Seiten vollständig mit Tinte geschwärzt ist, dürften etwas mehr als 50 Wechsel in der Sekunde nötig sein; aber eine mäßige Frequenz von einigen Hundert in der Sekunde würde zweifellos hinreichen, die Wirkung dieses zwischengeschobenen Schirmes aufzuheben. Bei Frequenzen bis zu 1000 Millionen in der Sekunde, wie sie bei einigen Versuchen von Hertz angewendet wurden, sind Schirme von der Art wie unser geschwärztes Papier noch vollkommen durchlässig; wenn wir aber die Frequenz auf 500 Billionen steigern, handelt es sich bei der Erscheinung um Licht, und dann ist das geschwärzte Papier undurchlässig, ein fast vollkommener Schirm.

§ 3. Die Schirmwirkung gegen eine veränderliche magnetische Kraft folgt einem Gesetze, das dem der Schirmwirkung gegen eine veränderliche elektrostatische Kraft entgegengesetzt ist. Für jetzt übergehe ich den Fall von Eisen und anderen mit magnetischer Suszeptibilität behafteten Körpern und nehme nur Materialien, die keine magnetische Suszeptibilität, aber mehr oder weniger elektrische Leitfähigkeit besitzen. Wie vollkommen auch die elektrische Leitfähigkeit des Schirmes sein mag, er besitzt keine Schirmwirkung gegen eine stationäre magnetische Kraft. Wenn aber die magnetische Kraft variiert, werden in dem Material des Schirms Ströme induziert, die die magnetische Kraft in der Luft auf der dem veränderlichen Magnet abgekehrten Seite zu verkleinern streben. Der Bequemlichkeit wegen wollen wir annehmen, daß die Änderungen dem einfachen harmonischen Gesetze folgen. Je größer die elektrische Leitfähigkeit des Materials ist, desto größer ist die Schirmwirkung bei derselben Frequenz der Änderung; und je größer die Frequenz ist, desto größer ist die Schirmwirkung des gleichen Materials. Wenn der Schirm aus Kupfer besteht mit dem spezifischen Widerstande 1640 qcm per Sekunde (oder der elektrischen Diffusivität von 130 qcm per Sekunde) und die Frequenz 80 in der Sekunde beträgt, ist das, was ich „mhoic<sup>1)</sup> effective thickness“ genannt habe, 0,71 cm; und der Betrag der Stromintensität in der Tiefe  $n \times 0,71$  cm von der dem erregenden Magnet zugekehrten Oberfläche des Schirmes ist  $e^{-n}$  ihres Betrages an der Oberfläche.

So ist (da  $e^8 = 20,09$ ) die Stromintensität in einer Tiefe von 2,13 cm <sup>1)</sup><sub>20</sub> des Betrages an der Oberfläche. Demgemäß dürfen wir erwarten, daß eine hinreichend große, 2½ cm dicke Kupferplatte nur etwas weniger als vollkom-

1) Das Mho ist Umkehrung von Ohm buchstäblich und nach Bedeutung, aber ein Wortungetüm, das sich bei uns nicht eingebürgert hat. D. H.

men in ihrer Schirmwirkung gegen eine magnetische Kraft mit der Frequenz 80 in der Sekunde sein wird.

§ 4. Lord Rayleigh in seinen „Acustical Observations“ (Phil. Mag. 1882, erstes Halbjahr), nachdem er über den Maxwellschen Satz, daß ein vollkommen leitendes Blech als eine Barriere gegen eine magnetische Kraft wirkt (Electricity and Magnetism § 665<sup>1)</sup>) berichtet hat, beschreibt ein Experiment, bei dem das Zwischenschieben einer großen und starken Kupferplatte zwischen zwei Spulen einen Ton unhörbar macht, der ohne den Kupferschirm in einem Telephon gehört wird, wenn eine der Spulen durch eine elektromagnetische Induktion seitens der andern Spule erregt wird, in der ein intermittierender Strom mit plötzlichen, scharfen Stärkeänderungen durch ein in Tätigkeit befindliches Mikrophon mit Voltabatterie hervorgerufen ist. Larmor macht in seiner Abhandlung „Electromagnetic Induction in Conducting Sheets and Solid Bodies“ (Phil. Mag., 1884, erstes Halbjahr) folgende sehr interessante Feststellung: „Wenn wir ein Blech aus leitender Materie in der Nachbarschaft eines magnetischen Systems haben, besteht die Wirkung einer Störung des Systems darin, daß sie in dem Blech Ströme solcher Art induziert, die jede Änderung in der Anordnung der das Blech durchschneidenden Kraftlinien zu verhindern streben. Dies folgt aus dem Lenzschen Gesetze, von dem wiederum Helmholtz und Thomson nachgewiesen haben, daß es eine direkte Folgerung aus dem Gesetze der Erhaltung der Energie ist. Wenn aber die Anordnung der Kraftlinien in dem Leiter ungeändert bleibt, bleibt auch das Feld auf der andern Seite des Leiters, in das sie eintreten (vorausgesetzt, daß es durch den Leiter von den Außenräumen isoliert ist) ungeändert. Ist also die Störung von wechselnder Art, mit einer Periode, die so klein ist, daß sie einen Kreis von Änderungen durchläuft, ehe die Ströme merklich abfallen, so werden wir hiernach finden, daß der Leiter wie ein Schirm wirkt.“

Ferner werden wir nach demselben Prinzip finden, daß eine schnell rotierende leitende Schale den innerhalb ihrer liegenden Raum gegen jede magnetische Wirkung schützt, die nicht symmetrisch um ihre Rotationsachse ist.“

Die Versuche von Willoughby Smith über voltaelektrische Induktion, die er in seiner Eröffnungsrede vor der Society of Telegraph Engineers im November 1883 beschreibt, liefern gute Illustrationen für Wirkungen dieser Art bei Schirmen aus Kupfer, Zink, Zinn und Blei und für verschiedene Frequenzen der Änderung. Seine Resultate für Eisen sind ebenfalls sehr interessant; sie zeigen, wie erwartet werden durfte, eine vergleichsweise nur geringe Vergrößerung der Schirmwirkung mit Vergrößerung der Frequenz. Das ist gerade das, was auf Grund der Tatsache, daß eine hinreichend breite und hinreichend lange Eisenplatte einen großen magnetostatischen schirmenden Einfluß ausübt, zu erwarten steht, einen Einfluß, der bei einer hinreichend dicken Platte ein so nahe vollkommener sein wird, daß relativ wenig für einen schirmenden Einfluß durch Änderungen von immer größerer Frequenz übrigbleibt.

§ 5. Ein Kupferhohlkörper, der einen alternierenden Magnet vollständig umschließt, ruft eine Schirmwirkung hervor, die wir nach dem Prinzip des

§ 3 als wenig hinter der Vollkommenheit zurückbleibend rechnen dürfen, wenn die Dicke  $2\frac{1}{4}$  cm oder mehr und die Frequenz der Wechsel 80 in der Sekunde beträgt.

§ 6. Wir wollen jetzt voraussetzen, daß die Änderung der magnetischen Kraft durch die Drehung eines Magnets  $M$  um irgendeine Achse hervorgerufen wird. Zuerst stellen wir uns, um die Wirkung der Rotation zu finden, vor, der Magnet werde durch gedachte magnetische Materie dargestellt. Es sei (nach dem Vorgange von Gauß in seiner Behandlung der säkularen Störungen des Sonnensystems) die gedachte magnetische Materie über den von den verschiedenen Punkten des Magnets beschriebenen Kreisen gleichförmig verteilt. Der Kürze wegen nenne ich den gedachten, so um die Achse symmetrisch hergestellten Magnet  $I$ . Die magnetische Kraft in dem ganzen, den rotierenden Magnet umgebenden Raum ist dieselbe wie die von  $I$  herrührende, verbunden mit einer alternierenden Kraft, deren Komponente an einem beliebigen Punkte in der Richtung irgendeiner festen Linie in jeder Rotationsperiode von der Null aus nach den beiden einander entgegengesetzten Richtungen variiert. Wenn die Kupferhülle hinreichend dick und die Winkelgeschwindigkeit der Rotation hinreichend groß ist, wird die alternierende Komponente für den äußeren Raum fast vollkommen vernichtet, und nur die von  $I$  hervorgerufene stationäre Kraft kann in dem von dem Kupferbleche ausgeschlossenen Raume zur Wirkung gelangen.

§ 7. Wir fassen jetzt in dem Raume außerhalb der Kupferhülle einen Punkt  $P$  ins Auge, der genau wie der Magnet  $M$  rotieren kann. Auf diesen wirkt eine Kraft, die der gleich ist, die von  $M$  herrührt, solange eine Rotation nicht besteht. Wenn aber  $M$  und  $P$  zusammen rotieren, wirkt auf  $P$  eine Kraft, die sich allmählich ändert, wenn die Rotationsgeschwindigkeit wächst, bis sie, wenn die Geschwindigkeit hinreichend groß geworden ist, merklich der Kraft gleichkommt, wie sie der gedachte symmetrische Magnet  $I$  ausübt. Jetzt verleihen wir dem ganzen, aus dem Magnet, dem Punkte  $P$  und der Kupferhülle bestehenden System eine zweite, der Rotation von  $M$  und  $P$  gleiche und entgegengesetzte Rotation. Dann bleibt die eben für die in  $P$  wirkende magnetische Kraft ausgesprochene Feststellung ungeändert, und wir haben jetzt einen festen Magnet  $M$  und einen gegen ihn in Ruhe befindlichen Punkt  $P$  vor uns, während die Kupferschale um die Achse rotiert, um die nach unserer ersten Voraussetzung  $M$  rotiert hat.

§ 8. Ein kleiner, zur experimentellen Erläuterung des Resultats konstruierter Apparat wird der Royal Society vorgeführt und in Tätigkeit gezeigt. In der Kupferhülle befindet sich eine 1,25 cm starke Trommel, die an ihren beiden Enden durch 1 cm starke kreisförmige Scheiben geschlossen ist. Der Magnet wird von dem inneren Ende eines steifen Drahts getragen, der durch das Zentrum eines Schaftes geht, der durch eine zentrale Bohrung an einem Ende der Trommel läuft und als Träger dient, während am anderen Ende der Trommel ein an sie befestigter rotierender und ebenfalls als Träger dienender Stift wirkt. Die beistehenden Schnitte, Fig. 132, die im Maßstabe  $\frac{3}{4}$  der natürlichen Größe gezeichnet sind, erklären die Anordnung hinreichend. Eine außerhalb befindliche, durch den festen Magnet im Ruhezustande der Trommel abgelenkte Magnetnadel zeigt eine große Verminderung der Ablenkung, sobald die Trommel in Rotation versetzt wird. Wenn der (dreifach zusammengesetzte) Magnet im Innenraume mittels des zentralen

Drahtes und des außerhalb angebrachten, in der Zeichnung wiedergegeben Querstabes umgekehrt wird, wird das außerhalb befindliche Magnetometer

stark beeinflusst, solange die Kupferschale sich in Ruhe befindet, aber kaum merklich bewegt, wenn die Kupferschale schnell rotiert.

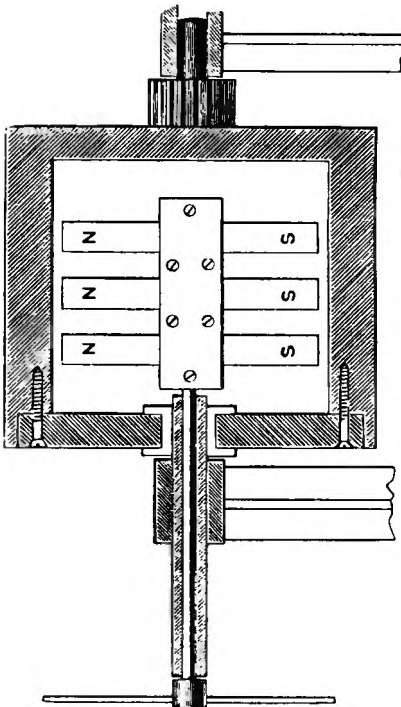
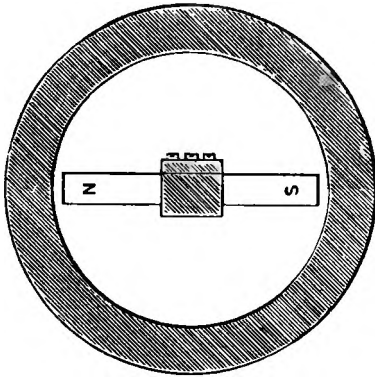


Fig. 132.

wird der Übergang zur Null von Wechseln begleitet, wie es in § 8 beschrieben ist.

§ 11. Wenn  $M$  nicht symmetrisch zu den beiden Seiten einer durch die Rotationsachse gehenden Ebene sich anordnet, ist  $I$  nicht Null, und der Zustand, der sich in dem ganzen äußeren Raume bei anwachsender Rotations-

§ 9. Ist die Kupferschale ein Umdrehungskörper, so bleibt die magnetische Kraft in einem beliebigen Punkte des inneren oder äußeren Raumes stationär, welches auch die Rotationsgeschwindigkeit sein mag; wenn die Schale aber kein Umdrehungskörper ist, wird die Kraft, die man im äußeren Raume beobachten kann, die Resultante einer von einem festen, gewissermaßen zwischen  $M$  und  $I$  befindlichen, Magnet herührenden Kraft und einer alternierenden Kraft sein, deren Alternierungsamplitude bis zu einem Maximum ansteigt und schließlich bis zur Null herabsinkt, falls die Winkelgeschwindigkeit ohne Grenze gesteigert wird.

§ 10. Ist  $M$  hinsichtlich seiner Nord- und Südpolarität symmetrisch zu beiden Seiten einer durch die Rotationsachse gehenden Ebene, so wird  $I$  ein Nullmagnet, da die gedachte magnetische Materie in jedem der Kreise, aus denen er besteht, durch gleiche Mengen positiver und negativer in ihn eingeführter magnetischer Materie aufgehoben wird. Alsdann also wird die magnetische Kraft, falls die Rotation hinreichend schnell ist, in dem ganzen Raume außerhalb der Kupferhülle ganz aufgehoben. Der Übergang von der stationären, von  $M$  ausgehenden Kraft zur schließlich Aufhebung der Kraft erfolgt bei symmetrisch zur Achse angeordneter Kupferhülle durch eine stetig abnehmende Kraft hindurch ohne Wechsel. Ist die Hülle nicht symmetrisch um ihre Rotationsachse, so

geschwindigkeit allmählich einstellt, ist die von  $I$  herrührende Kraft, nämlich eines gedachten, um die Rotationsachse symmetrischen Magnets.

§ 12. Eine sehr interessante einfache Erläuterung der Schirmwirkung gegen eine magnetische Kraft kann vorgeführt werden, indem man eine Scheibe rotieren läßt und einen festen Magnet nahe ihrer einen Seite hält. Ein Stabmagnet, der so gehalten wird, daß seine magnetische Achse von einer durch die Rotationsachse gehenden Ebene senkrecht halbiert wird, erfährt bei einer hinreichend schnellen Rotation eine fast vollkommene Aufhebung seiner magnetischen Kraft an Punkten in der Luft auf der andern Seite der rotierenden Scheibe, wie nahe sie ihm auch sein mögen, wenn der Durchmesser der Scheibe die Länge des Magnets beträchtlich übersteigt. Die magnetische Kraft in der Luft nahe der Scheibe auf der dem Magnet zugekehrten Seite ist überall der Fläche der Scheibe parallel.

---

## Anhang L.

### Über elektrische Wellen und Schwingungen in einem submarinen Telegraphenkabel.<sup>1)</sup>

§ 1. Um unsere Aufgabe zu vereinfachen, will ich den interessanten Gegenstand alternierender elektrischer Ströme in einem vollen Leiter, der in §§ 9, 19, 29—35 des Art. CII meiner Mathematical and Physical Papers, Bd. III behandelt ist, umgehen und setze für jetzt voraus, der zentrale Leiter und die ihn umgebende Hülle seien äußerst dünne Kupferröhren, so dünn, daß der von beiden geleitete elektrische Strom innerhalb ihrer Substanz auch bei der höchsten Wechselfrequenz, die wir ins Auge zu fassen haben, gleichförmig verteilt ist. Der ferneren Vereinfachung wegen lasse ich auch die äußerst komplizierte Frage nach den elektrischen Strömen im Wasser über dem Kabel und in dem feuchten Grunde unter demselben beiseite und setze vorläufig voraus, daß die äußere Hülle vollkommen isoliert ist. Diese Voraussetzung ändert die Lösung unserer Aufgabe für solche Wechselfrequenzen, wie sie bei der submarinen Übermittlung von Zeichen gebräuchlich sind, äußerst wenig, sie liefert aber eine ungeheure Differenz und eine sehr große Vereinfachung für die sehr hohen Frequenzen bis hinauf zu den das Licht bildenden Schwingungen, die wir in Betracht ziehen müssen.

Der Kürze wegen will ich das aus zwei Leitern mit Luft oder Gutta-percha oder einer andern isolierenden Substanz zwischen ihnen zusammengesetzte System ein Kabel nennen. Der Einfachheit wegen wollen wir sodann annehmen, das Kabel sei in gerader Linie verlegt, und ich will irgendeine Stelle im Kabel durch  $x$ , ihre Entfernung von einem beliebig gewählten Anfangspunkte  $O$  in der Achse des inneren Leiters, charakterisieren. Jedoch werden alle unsere Rechnungen anwendbar bleiben, auch wenn das Kabel nicht in gerader Linie verlegt ist, vorausgesetzt, daß der Krümmungsradius überall im Vergleich mit dem Radius des Querschnittes des Kabels sehr groß ist, und weiter daß  $x$ , der Abstand von  $O$ , der Länge des Kabels entlang gemessen wird.

§ 2. Es seien  $r$  und  $r'$  die Radien des inneren Leiters und der Hülle; (1)

$R$  bedeute die Summe der Widerstände der beiden Leiter  
für die Längeneinheit eines jeden; (2)

---

1) Dies ist der in der Anmerkung zur vierten Vorlesung S. 35 des vorliegenden Buches in Aussicht gestellte Anhang. Eine teilweise Feststellung der Resultate wurde in Nichols Cyclopaedia (1860) unter dem Titel „Electricity, Velocity of“ mitgeteilt und in Mathematical and Physical Papers, Bd. II, Artikel LXXXI neu veröffentlicht.



$c$  gebe die freie Elektrizitätsmenge auf der Längeneinheit eines jeden Leiters, wenn die Potentialdifferenz zwischen ihnen die Einheit ist; (3)

$II$  sei die elektromagnetische Quasiträgheit eines in Gedanken durch metallische Verbindung des inneren Leiters mit der Hülle an zwei Querschnitten hergestellten geschlossenen Leiters, wenn der Abstand  $l$  zwischen diesen Querschnitten im Vergleich mit  $r' - r$  groß ist; (4)

$\gamma$  bezeichne den Strom in den beiden Leitern zur Zeit  $t$  an der Stelle  $x$ ; (5)

$\varphi$  die Potentialdifferenz zwischen den beiden Leitern zur Zeit  $t$  und an der Stelle  $x$ ; (6)

$qdx$  die Elektrizitätsmenge auf einer Länge  $dx$  jedes der beiden Leiter zur Zeit  $t$  und an der Stelle  $x$ . (7)

Wir rechnen überall nach elektromagnetischem Maß. Es darf nicht vergessen werden, daß in jedem Teile des Kabels die elektrischen Ströme im inneren Leiter gleich und entgegengesetzt denen in der Hülle sind, daß ferner die gesamten Elektrizitätsmengen in jedem Augenblicke auf der kleineren konvexen Oberfläche des inneren Leiters und auf der größeren konkaven Fläche der Hülle gleich und entgegengesetzt sind, und daß keine Elektrizität auf der Innenfläche des inneren Leiters und ebenso keine auf der Außenfläche der Hülle vorhanden ist. Die obige Bezeichnung (3) nach meiner ursprünglichen Definition<sup>1)</sup> einer elektrostatischen Kapazität hat die Bedeutung, daß  $c$  die elektrostatische in elektromagnetischem Maße gerechnete Kapazität einer Längeneinheit des inneren Leiters ist, wenn man ihn so auffaßt, als ob er einen Teil einer Leydener Flasche bildete. Nach (3) und (7) ist

$$q = c\varphi. \quad (8)$$

§ 3. Änderungen der elektrischen Ladung der einander gegenüberliegenden Flächen der beiden Leiter können nur dadurch eintreten, daß mehr Elektrizität an irgendeiner Stelle einfließt, als aus ihr ausfließt. Dieses elektrokinematische Prinzip liefert uns die folgende Gleichung:

$$\frac{dq}{dt} = - \frac{d\gamma}{dx}. \quad (9)$$

Die dynamische Gleichung unserer Aufgabe lautet wie folgt:

$$R\gamma + I \frac{d\gamma}{dt} = - \frac{d\varphi}{dx}. \quad (10)$$

Hier gibt das erste Glied auf der linken Seite die Ohmsche elektromotorische Gegenkraft wieder, das zweite Glied die von der Trägheit herrührende Gegenkraft. Eliminiert man aus diesen drei Gleichungen  $q$  und  $\varphi$ , so resultiert

$$R \frac{d\gamma}{dt} + I \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{1}{c} \frac{d^2\gamma}{dx^2}. \quad (11)$$

1) „Über die elektrostatische Kapazität einer Leydener Flasche und eines in der Achse einer zylindrischen leitenden Schale isolierten Telegraphendrahts.“ Zuerst veröffentlicht in Phil. Mag. 1855, erstes Halbjahr; neu veröffentlicht in meinem Buche *Electrostatics and Magnetism* §§ 51–56. Übersetzt von Levy und Weinstein S. 38–41.

§ 4. Für kleine Frequenzen, wie sie bei der Zeichengebung in submarinen Kabeln auftreten, herrscht der Ohmwiderstand vor und ist der von der Trägheit herrührende Widerstand unmerklich; so findet man:

$$cR \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d^2\gamma}{dx^2} \quad (12)$$

§ 5. Für sehr hohe Frequenzen herrscht der von der Trägheit herrührende Widerstand vor, und der Ohmwiderstand ist fast unmerklich. In diesem Falle erhält man

$$cI \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{d^2\gamma}{dx^2} \quad (13)$$

§ 6. Nach den in Teil III der „Electricity in Motion<sup>1)</sup>“ weitergeführten Prinzipien einer ursprünglich in den Proceedings of the Glasgow Philosophical Society für Januar 1853 veröffentlichten Abhandlung „On the Mechanical Values of Distributions of Electricity, Magnetism, and Galvanism<sup>2)</sup>“ finden wir  $II$  äußerst leicht, wenn wir uns den zeitweilig geschlossenen in (4) des § 2 beschriebenen Kreis durch Meridianebenen, die durch die Achse der beiden zylindrischen Leiter gehen, in eine große Anzahl Teile zerlegt denken und uns vorstellen, irgendeiner dieser Teile werde an einen außerhalb befindlichen Ort entfernt, während die Ströme in allen andern Teilen konstant gehalten sind, und wenn wir die bei dieser Bewegung gegen die zwischen dem fortbewegten Teile des Kreises und dem Rest wirkende Anziehungskraft geleistete Arbeit berechnen. Die vollständige synthetische Durchführung dieses Planes liefert

$$l\gamma^2 \lg(r'/r) \quad (14)$$

für die gesamte Arbeit, die geleistet wird, wenn man den ganzen Stromkreis in solche Teile zerlegt und die einzelnen Teile bis auf unendliche Abstände voneinander trennt. Demgemäß erhält man als Quasiträgheit des Stromes für die Längeneinheit des Kabels in dem Kreise vor seiner Zerlegung

$$I = 2lg(r'/r). \quad (15)$$

§ 7. Nach Electrostatics and Magnetism, § 55<sup>3)</sup>, haben wir für  $c$  in elektrostatischem Maße zu setzen  $\frac{1}{2} k/lg(r'/r)$ , wo  $k$  das ist, was Faraday die spezifische induktive Kapazität des zwischen dem Kern und der Hülle befindlichen Materials genannt hat. Wenn wir jetzt mit  $N$  die Anzahl elektrostatischer Einheiten in der elektromagnetischen Einheit einer Elektrizitätsmenge bezeichnen, ist dies auch die Anzahl elektrostatischer Einheiten in der elektromagnetischen Einheit eines Potentials. Demgemäß gibt  $N^2$  die Anzahl elektrostatischer Einheiten in der elektromagnetischen Einheit einer Kapazität, und man erhält folglich

$$c = N^{-2} k/2 \lg(r'/r) = k/N^2 I. \quad (16)$$

Verwendet man dies in (11), so findet man

1) Mathematical and Physical Papers, Bd. I S. 530—533.

2) Mit diesem schlecht gewählten Worte (galvanism) habe ich damals elektrische Ströme in geschlossenen Kreisen gemeint.

3) Die vorstehenden Formeln sind ja Gemeingut der Elektrizitätslehre.

$$\frac{R}{I} \frac{d\gamma}{dt} + \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{N^2}{k} \frac{d^2\gamma}{dx^2}, \quad (17)$$

und (13) geht über in

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} \cdot \frac{N^2}{k} \frac{d^2\gamma}{dx^2}. \quad (13')$$

Diese letztere Gleichung zeigt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle immer mehr gleich  $N/\sqrt{k}$  wird, je höher die Frequenz ist — allerdings mit der Einschränkung des § 8. Zahlreiche und vielfach variierte Experimentaluntersuchungen haben ergeben, daß wahrscheinlich mit einem Fehler, der unter  $\frac{1}{3}$  Proz. liegt,  $N$  gleich  $3 \cdot 10^{10}$  ist.

§ 8. Unser Beweis [vgl. § 2 (4)] beruht auf der wesentlichen Voraussetzung, daß die Wellenlänge im Vergleich mit der Dicke  $r' - r$  des Dielektrikums zwischen dem inneren und dem äußern Leiter groß ist.

§ 9. Eine vollständige Lösung der Gleichung (17) ist

$$\gamma = \sin mx (Ae^{qt} + Be^{q't}), \quad (18)$$

wo mit  $m$  bezeichnet ist  $2\pi$  dividiert durch die Wellenlänge und

$$q = \frac{-R}{2I} + \sqrt{\left[\left(\frac{R}{2I}\right)^2 - \frac{N^2}{k} m^2\right]} \quad (19)$$

ist. Dieser Wert fällt reell aus, wenn man hat

$$mN/\sqrt{k} < R/2I. \quad (20)$$

Wenn jedoch die Bedingung (20) nicht erfüllt ist, wird der Wurzelausdruck in (19) Null oder imaginär, und wir dürfen an Stelle von (18) als eine geeignete Lösung für stehende Wellen annehmen

$$\gamma = e^{-\frac{Rt}{2I}} \sin mx \sin t \sqrt{\left[\frac{N^2}{k} m^2 - \left(\frac{R}{2I}\right)^2\right]}. \quad (21)$$

Dieser Ausdruck stellt eine gedämpfte Schwingung dar mit dem Dämpfungskoeffizienten  $e^{-\frac{1}{2} R/I}$ , der von der Wellenlänge unabhängig ist — ein sehr wichtiges und interessantes Resultat. Was wir die Periode<sup>1)</sup> der Schwingung nennen, ist

$$2\pi / \sqrt{\left[\frac{N^2}{k} m^2 - \left(\frac{R}{2I}\right)^2\right]}; \quad (22)$$

diese wird um so mehr nahe gleich  $(2\pi/m)/(N/\sqrt{k})$ , je größer  $m$  wird — allerdings mit der Einschränkung des § 8.

§ 10. Das komplizierte Dämpfungsgesetz, wie es durch (18) ausgedrückt ist, mit seinen zwei Dämpfungsexponenten, die beide von der Wellenlänge abhängen, und zwar der eine abnehmend, der andere zunehmend, wenn die Wellenlänge von Unendlich herabgemindert wird, ist ebenfalls sehr interessant. Es ist weiter interessant zu sehen, wie bei sehr kleinen Beträgen von  $m$  (sehr großen Wellenlängen) die Lösung mit der Lösung der früheren Gleichung (12) zusammenfällt, und wie bei den größten, die Bedingung (20) erfüllenden Beträgen von  $m$  die Lösung (18) in die (21) übergeht.

1) Diese Bezeichnung folgt dem gewöhnlichen Brauch; sie ist aber nicht streng korrekt, da eine gedämpfte schwingende Bewegung nicht periodisch ist.

§ 11. Als einziges Beispiel wähle ich das atlantische Kabel von 1865, für welches wir hatten

$$R \cdot 23000 \text{ cm. g. s. für das Zentimeter Länge, } r/r \cdot 3,3 \quad (23)$$

und demnach  $I = 1,76$ ;

$$k \cdot 3; \quad N/\sqrt{k} \cdot 1,732 \cdot 10^{10}; \quad c \cdot 1,894 \cdot 10^{-21}. \quad (24)$$

Nach (23) finden wir  $\frac{1}{2} R/I = 6534$ . Demnach ist, wenn die Bedingung (20) sich nicht erfüllt, das Extinktionsverhältnis für  $1/6534$  einer Sekunde  $e^{-1}$ , und für ein milliontel Sekunde  $e^{-0,006534}$  oder annähernd 0,99347. Und die Grenzbedingung zwischen Erfüllung und Nichterfüllung der Bedingung (20) ist nach (24)  $m \leq 3,772 \cdot 10^{-7}$ , oder wenn mit  $\lambda$  die Wellenlänge bezeichnet wird  $\lambda \geq 167$  Kilometer. Also wird, wenn wir eine Länge des Kabels annehmen, die etwas kleiner ist als 167 Kilometer, und es irgendwie so einrichten, ihr zu Anfang eine sinusartige Stromverteilung beizulegen, die über der Länge, von Null an einem Ende durch ein Maximum und ein Minimum zur Null am andern Ende, variiert, und das Kabel sich dann selbst überlassen, die elektrische Verteilung schwingend zur Null verklängen. Ein milliontel Sekunde nach dem Anfänge wird die Schwingungsamplitude 0,99347 ihres ursprünglichen Wertes betragen; und in  $1/6534$  Sekunde wird sie auf  $e^{-1}$  ihres anfänglichen Betrages herabgesunken sein. Anstatt der unbequemen Einrichtung, mit einer sinusartigen Stromverteilung zu beginnen, benutze man jetzt eine Voltabatterie, um für eine sehr kurze Zeit, sagen wir ein hunderttausendstel Sekunde, eine Potentialdifferenz zwischen der Hülle und dem inneren Leiter an einem Ende herzustellen, und überlasse das Kabel sich selbst. Dies liefert uns eine anfängliche Störung, die nach Fourier durch eine Summe von sinusartigen Strömen dargestellt wird, von denen jeder an beiden Enden des Kabels Null ist. Jede von diesen Komponenten wird vibrierend verklängen, jede mit demselben Dämpfungsverhältnis in derselben Zeit. Die Perioden der verschiedenen sinusartigen Komponenten werden die durch (22) ausgedrückten sein, wenn man dort für  $m$  nacheinander die Werte  $2\pi/\lambda$ ;  $2 \cdot 2\pi/\lambda$ ;  $3 \cdot 2\pi/\lambda$ ; ... setzt, wo mit  $\lambda$  die Länge des Kabels bezeichnet ist. Wenn diese Länge des Kabels 16,7 Kilometer beträgt, ist das zweite Glied in der Klammer des Ausdruckes (22) nur  $1/100$  des ersten und kann für diese oder für eine noch kürzere Länge vernachlässigt werden. So ist für die Länge eines Kilometers, wie wir nach (24) und (22) finden, die Periode der bedeutendsten sinusartigen Schwingung  $10^9/1,732 \cdot 10^{10}$  oder  $0,577 \cdot 10^{-5}$  Sekunde. Das Dämpfungsverhältnis in dieser Zeit ist  $e^{-0,0877}$ , so daß  $26\frac{1}{2}$  Schwingungsperioden vergehen, bevor die Schwingung auf  $e^{-1}$  des ursprünglichen Betrages gedämpft sein würde.

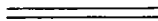
§ 12. Zum Schluß fragen wir uns, wie dünn das Kupfer sein muß, um die erste vereinfachende Bedingung des § 1 zu erfüllen, wenn die Schwingungsperiode nur  $0,577 \cdot 10^{-5}$  Sekunde beträgt. Dies ist  $1/2166$  von  $1/80$ , die Periode, für die ich 0,714 cm als die S. 571 definierte<sup>1)</sup> mhoische Dicke für Kupfer vom spezifischen Widerstande 1610 cm. g. s. gefunden habe. Demnach ist für eine Periode  $0,577 \cdot 10^{-5}$  die Dicke  $0,714/\sqrt{2166}$  oder 0,0153 cm. Nun dürfen wir, ohne weiter in die Theorie der Diffusion alternierender

1) Mathematical and Physical Papers, Bd. III, Art. CII, § 35 (Mai 1890).

elektrischer Ströme in einem Metall einzudringen, sicher vermuten, daß, wenn die Dicke des Bleches etwas kleiner als ein Drittel jener Dicke für irgendeine besondere Periode ist, der Strom in der ganzen Dicke gleiche Stärke haben wird. Um der ersten vereinfachenden Bedingung des § 1 zu genügen, braucht das Kupfer demnach nicht dünner als  $1/200$  cm zu sein. Indem wir diese Größe als Dicke annehmen, wollen wir suchen, was  $r$  und  $r'$ , bei  $r'/r = 3,3$ , für Werte erhalten müssen, um die Summe der Widerstände in einem Zentimeter des inneren und in einem Zentimeter des äußeren Rohres gleich 23000 cm. g. s. zu ergeben. Wenn wir für den spezifischen Widerstand von Kupfer 1610 Quadratcentimeter in der Sekunde annehmen, ist unsere Gleichung für die Bestimmung von  $r$  und also auch von  $r'$

$$\frac{1610 \cdot 200}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{3,3 r} \right) = 23000. \quad (25)$$

Und so finden wir  $r = 2,9$  und  $r' = 9,6$ . Es muß noch darauf hingewiesen werden, daß nur für die tiefste Grundschwingung  $\frac{1}{200}$  cm Dicke des Metalls gering genug ist, um das oben bestimmte Gesetz und Verhältnis der Dämpfung zu ergeben.



## Namen- und Sachverzeichnis.

---

- Aberration des Lichtes 409.  
 — ihre Erklärung durch das Verhalten des Äthers 410.  
 Abney, schwache Strahlen strahlender Wärme 6.  
 Absorption, Erklärung von Sellmeier und von Stokes 4.  
 —, atmosphärische 82.  
 Äolotropie 131.  
 — Definition 97.  
 — elektrische, ihre Erklärung 474.  
 — quadratisch gewebten Stoffes 134.  
 — der Trägheit 357.  
 Äolotropische elastische Festkörper 12.  
 — Elastizität ohne Schrägwirkung 137.  
 Äpinus, seine Theorie des Ein-Fluidums 455.  
 —, über die Pyroelektrizität des Turmalins 474.  
 Äther, Bahn und Verteilung in einem Atom 207, 394 ff.  
 — Dichte 212 ff.  
 — Eigenschaften des lichtführenden 3f.  
 — Gewicht des, wenn er Gravitation besitzt 218.  
 — Illustration durch die Flüssigkeitseigenschaft des Schusterpechs 5.  
 — Kinetische Energie 403.  
 — Kondensationsphäre 207.  
 — mit eingesenkten Molekeln, Bewegung des 149 f.  
 — negativer Raummodul des 343 f.  
 — nicht-gravitierend 445 f.  
 — relative Bewegung gegen ponderable Körper 408 f.  
 — Schwingungsamplituden 214.  
 — Starrheit 216.  
 — Stromlinien durch ein Atom 401 ff.  
 — Trägheit 404 f.  
 — Verteilung in einem Atom 207.  
 — willkürliche Verteilung in einem Atom 394.  
 — Wirkung seines Durchganges durch Materie 456.  
 Äthylen, Zähigkeit von 244.  
 Äthylenchlorid, Viskosität von 244.  
 Ätna, Beobachtungen vom 254.  
 Ätzung, molekulare 533.  
 „Äußere Kraft“ nach Green 182.  
 Airy, Diamantreflexion 322.  
 —, „Tracts“ 335, 364.  
 Aitken 254.  
 Akustische Darstellung mit schwingenden Platten 52.  
 Albedo, Definition von Lambert 261.  
 Algorithmus endlicher Differenzen 56.  
 Ampère, Elektrodynamik 480.  
 Amplituden nach einer Reflexion, Jamin über 290.  
 Analcim, seine Eigenschaft 133.  
 Andrews, Übergang von Gas in Flüssigkeit 232.  
 Anhäufung mit Gravitation behafteter Materie 447.  
 Aragonit 204.  
 — Wellenfläche für 360.  
 Arbeit gegen Viskosität zum Aufrechterhalten einer Welle 499 f.  
 —skurven für Ansammlungen von Molekeln 559 ff.  
 Argon, seine Viskosität 245.  
 Arsensulfat, Wellenfläche 355.  
 Aschkinaß, Versuche über Sylvin und Steinsalz 121, 125.  
 Asymmetrie, kubische 133.  
 Atmosphärische Elektrizität, Beccaria über 457.  
 Atome, Rayleigh über die Anzahl im ccm 251.  
 —, ihre Größe 26, 131, 231.  
 —, Tabelle ihrer Gewichte 265.  
 Auerbach, F., Sandhanfen 524.  
 Ausdehnung, kubische 27.  
 Babinet, sein Kompensator 335 f.  
 Bahnrichtung im reflektierten Licht 337 f.  
 Barlow, sein Kristallmodell 509.  
 Basset, Konstruktion einer Schwingungslinie 362.  
 — „Physical Optics“ 335.  
 Beccaria, über atmosphärische Elektrizität 457.  
 Becker, über atmosphärische Absorption 264.  
 —, Sterngeschwindigkeiten 221 f.  
 Becquerel, sein Phosphoroskop 75.  
 —, Photogramme prismatisch zerlegter Farben 636 f.  
 —Strahlen, Erklärung ihrer Wirkung auf die Leitung von Elektrizität 420.  
 Belopolsky, spektroskopische Beobachtungen 228.

Bernoulli, D., Gasttheorie 233.  
 Bewegungsgleichungen für einen elastischen Körper 16 ff.  
 — für einen heterogenen elastischen Körper 26 f.  
 — für einen inkompressiblen Festkörper 132 f.  
 Blackburn, sein Pendelversuch 481.  
 Blanchet, seine dreischalige Wellenfläche 109.  
 Bläue des Himmels, ihre Helligkeit 256.  
 —, Fall eines elastischen Festkörpers, bezogen auf Stokes und Rayleighs Theorie der 174 f.  
 —, Rayleigh über die 21, 72, 249 ff.  
 —, Spektrum der 263  
 —, Stokes über die 72.  
 —, Zettwuch über die 264.  
 Boltzmann, über Energieverteilung 415.  
 —, Maxwells Lehre, Fehler in ihr 420 ff.  
 —, —, Beweise für Fehler in ihr 420 ff.  
 Boltzmanns Lehrsatz, Rayleigh über 421.  
 Borazit, Haüy über 473.  
 Börstein, Landolt und, Tabelle für Chiralität 385.  
 Bosovich 100, 104 f.  
 —, Definition des Atoms nach 234.  
 —, fälschlich für veraltet gehalten 98.  
 —, seine Kurve 565.  
 —, seine Theorie des Gleichgewichtes elastischer Festkörper 559 ff.  
 —, seine Theorie, bezogen auf ein mechanisches Modell 546.  
 —, seine Vorstellung von einem Kristall 539 ff.  
 —, über verschiedene Gesetze der Atomkräfte 468.  
 Bottomley, über das thermische Diffusionsvermögen des Wassers 236.  
 Bouguer, veränderliche Helligkeit von Sternen 251, Lichtabsorption 264 f.  
 Boussinesq, „Théorie analytique de la chaleur“ 369.  
 —, Chiralität 384.  
 Bravais, homogene Ansammlungen 508.  
 —, skalene Ansammlung von Molekeln 550.  
 Brechungsindex, Ausdruck für 115 f.  
 —, imaginärer 316 ff.  
 —, Ketteler und Sellmeier über 86.  
 Brechungsvermögen des Steinsalzes in einem großen Wellenlängengebiet 96.  
 —, Abweichung von Fresnels Tangentengesetz 281.  
 —, Eigenschaft des Analcims 133.  
 Brewster, Doppelbrechung deformierten Glases 210.  
 Brillouin, Beziehung zwischen der Theorie von Bosovich und einem mechanischen Modell 546.

Campbell, Sternengeschwindigkeiten 220 f.  
 Cantor, über elektrische Polarität des Turmalins 472.  
 Catania, Beobachtungen bei 253.  
 Cauchy, molekulare Behandlung der Wellentheorie 1.  
 —, „Calcul des residus“ 110.  
 —, Doppelbrechung über 183.  
 —, Erklärung der Dispersion 2.  
 —, imaginärer Brechungsindex 317.  
 —, über Tiefseewellen 91.  
 Cavendish Kraftgesetz 456.  
 Chinin, Fluoreszenz des Sulfats 92.  
 Chiralität 365 ff.  
 —, Fresnel über 375.  
 —, von Kristallen, Stokes über 385 f.  
 —, eines Natriumchloratkristalls 537.  
 —, Nichtchiralität der magnetischen Polarisation von Faraday 538 f.  
 —, Quarz, von 381 f, 534 f.  
 —, Tafel der 385.  
 —, Weinsteinsäure, von 538.  
 —, Wirkung auf die Doppelbrechung 382 f.  
 —, Zinnobers, des 377 f.  
 —, zweiachsiger Kristalle, Pocklington über 378.  
 Chirales Medium, Geschwindigkeit zirkulärpolarisierten Lichtes in einem 371.  
 —, Eigenschaften des Quarzes, Kurven, die sie darstellen 381.  
 —, Resultate von Van't Hoff und Le Bel 460.  
 —, Theorien 471 ff.  
 Chiroid, Definition eines 367.  
 —, Modell eines 496.  
 Christiansen über anomale Dispersion im Fuchsin 119.  
 Clausius, über die Energie von Gasen 414.  
 —, Gasttheorie 233.  
 —, Viskosität 235, 237.  
 —, Wärmekapazitäten 419 ff.  
 Coeffizienten, nur 15 im einfachsten Bosovichschen Kristall 540 ff.  
 Conroy, „ideales Silber“ 269 f.  
 —, über reflektiertes Licht 283 f.  
 Continuität in der Wellenlehre des Lichts 125.  
 Coulomb, Kraftgesetz 456.  
 Curie, Ehepaar, über Piezoelektrizität 473.  
 D'Alemberts Bewegungsgleichungen 15 f.  
 Demokrit über den Ursprung der Atome 454.  
 Devilles Theorie der Dissoziation 418.  
 Dewars „Nadir of Temperature“ 470.  
 Diamant, Airy über Reflexion des 321 ff.  
 Diamanteneigenschaft 321, 349.  
 Diamantreflexion, ihre Erklärung 349.

- Diamantreflexion, ihre Phasenverzöge-  
 rung 351.  
 Diffraktion, Stokes über 151.  
 Diffusion, zwischen Festkörpern 469.  
 —, molekulare von Blei und Gold 235.  
 Diffusionsvermögen 240 ff.  
 —, materielles 238.  
 —, thermisches des Wassers, Bottomley  
 über 236.  
 Dilatanz von Sand 523.  
 Dilatation, kubische 20.  
 Diskontinuierliche Quelle, Wellen von  
 einer 87.  
 Dispersion, anomale, Helmholtz über 2 f.,  
 8 f.  
 — —, in Chromsalzkristallen, Joddampf,  
 Fuchsin 118.  
 — —, Lommel über 61.  
 — —, Rayleigh über 59.  
 — —, Sellmeiers Mechanik der 83 f.  
 —, Cauchys Erklärung der 2.  
 —, Dynamik der 116.  
 —, Maxwell über 279.  
 —, mechanische Erklärung der 7.  
 —, Sellmeiers Theorie der 118.  
 Dissoziation, Theorie der 418.  
 Doppelbrechung, Cauchy über 183.  
 —, Einfluß auf Chiralität 382 f.  
 —, gespannten Glases 210.  
 —, Glazebrook über 210.  
 —, Green über 183.  
 —, Huyghens' Gesetz für 13.  
 —, Lommel über 64.  
 —, mechanische Theorie der 8, 84, 291 f.  
 —, Rankine über 13.  
 —, Rayleigh über 13.  
 —, Stokes über 182 f., 356.  
 — —, Bestätigung des Huyghensschen  
 Gesetzes für 13.  
 Durchscheinen von Goldblatt usw. 311 f.  
 — von Metallhäutchen 268.  
 Drillungswellen 26 f.  
 —, Bedingung für reine 137.  
 —, fundamentale Lösung für 65 ff.  
 Drillung elastischer Festkörper, Energie  
 der 17.  
 — — —, Beziehung zwischen ihren Ko-  
 effizienten in isotropen Körpern 171.  
 — — —, einundzwanzig Koeffizienten  
 der 16.  
 — — —, Modell der mit einundzwanzig  
 Koeffizienten 25 f.  
 Ebene Welle definiert 106.  
 — — in einem äolotropen homogenen  
 elastischen Festkörper, allgemeinste  
 106.  
 Eis, seine physikalischen Eigenschaften  
 486 ff.  
 Eisenlohr, über metallisches Reflexions-  
 vermögen 321.  
 Elastizität, von Todhunter und Pearson  
 111.  
 Elektrische Äolotropie, Erklärung der  
 473.  
 Elektrische Kraft, Vorstellung bezüglich  
 ihrer Fortpflanzung 35.  
 Elektrische Wellen im Äther, Energie  
 der 463 f.  
 Elektrizität, Kontakt- von Metallen 461.  
 —, Reibungs-, atomistische Erklärung  
 der 460 f.  
 Elektrische Schirmwirkung durch unvoll-  
 kommene Leiter 570.  
 — Wellen 35.  
 — —, Geschwindigkeit der in submari-  
 nen Kabeln 579 f.  
 Elektrisierung, Probe nach Hertz 570 f.  
 Elektroinduktive Kapazität 467.  
 Elektromagnetische Störungen, Rowland  
 über 55.  
 — Induktion in leitenden Platten und  
 Festkörpern 577 f.  
 — Theorie des Lichtes 4, 35, 314.  
 Elektron 455.  
 Elektronen in einem Atom, Gleichgewicht  
 der 464.  
 —, Kondensationsosphäre der 414.  
 Elliptisch polarisiertes Licht, Energie des  
 214.  
 Elongationen, Haupt- 186 f.  
 Energie, elektrischer Ätherwellen 463 f.  
 —, Verteilung der 413 f.  
 — Potential eines gedrillten Festkör-  
 pers 187.  
 —, Maß der Fortpflanzungs- in einem  
 Festkörper 163 f.  
 Epikur, über atomistischen Ursprung 454.  
 Erwärmung von Eis durch Licht 456 f.  
 Faraday, Leitungsfähigkeit für Kraft-  
 linien 476 f.  
 —, magnetische Polarisation, Nicht-  
 chiralität der 538 ff.  
 —, magnetooptische Drehung einer  
 Schwingungslinie 480.  
 —, Wirkung magnetischer Kraft zirkulär-  
 polarisierten Lichtes 385.  
 Farbenphotographie, Becquerel über  
 prismatische 533.  
 Fehler im Quarz 536 f.  
 Fernwirkung 417.  
 Filme, Durchscheinen metallischer 268.  
 Fitzgerald, über vom Durchgang von  
 Äther verursachte Ausdehnung von  
 Materie 406 f.  
 Fizeau, Interferenz 79.  
 —, Lichtgeschwindigkeit 74.  
 Fluoreszenz, molekulare Erklärung der 46.  
 — des schwefelsauren Chinins 74.  
 —, Stokes über 248.  
 — des Uranglases 47, 74.



Fluorwasserstoffsäure, molekulare Ätzwirkung der 533.  
 Forbes, über blaue Adern in Gletschern 489 f.  
 Foucault, Pendelversuch 481 ff.  
 —, Lichtgeschwindigkeit 74.  
 Fouriersche Reihe, zu ihr führende Formel 90.  
 Fox-Talbot, anomale Dispersion in Chromsalzkristallen 119.  
 Fraunhofer, dunkle Doppellinie des Natriumdampfes 140.  
 Fresnel, Chiralität 375.  
 —, elektromagnetische Theorie 4.  
 —, Formel für die Intensität von Licht nach einer Reflexion 10 u. a. a. O.  
 —, relative Bewegung von Äther und Materie 408 f.  
 Fresnels Gesetze und die Theorie von Green verglichen 283.  
 — —, ihre theoretische Ableitung 302.  
 — Rhombus, Fehler 329 ff.  
 — —, Phasenänderungen in ihm 323.  
 — —, seine Theorie 321 ff.  
 — Wellenfläche, Glazebrook über 357.  
 Froude, nautische Versuche 504.  
 Fuchsin 63.  
 Galt, A., Versuche über Dehnungsbestreben von Sand 524.  
 —, über Verbindungswärme von Kupfer und Zink 224.  
 Gas, Gleichgewicht unter dem Einflusse der Schwerkraft 440 f.  
 Gase, kinetische Theorie der 1, 22.  
 Geschwindigkeit des Lichtes 74 f., 405.  
 — der Fortpflanzung von Wellen in Äther mit eingesenkten Molekeln 93.  
 Geschwindigkeitspotential erklärt 49.  
 — für eine radial pulsierende Kugel 40, 42.  
 — für eine schwingende Gabel 40, 42.  
 — für eine schwingende Kugel 40, 42.  
 Gezeiten, Problem der von Laplace 29.  
 Gitter von Prof. Rowland 79.  
 Glazebrook, über Doppelbrechung 210.  
 —, über Fresnels Wellenfläche 357.  
 —, Schwingungslinie 362.  
 —, Wellenfläche von Arragonit 360.  
 Gletscher, blaue Adern im 489.  
 Glocke, elliptische von Marloye 52.  
 —, schwingende 51.  
 Goldblatt usw., Durchscheinen des 311.  
 Graham, Transpiration von Gasen 243.  
 Granit, Schwingungen im 174 ff.  
 Green, über Doppelbrechung 183.  
 —, Fortpflanzung des Lichtes in Kristallen 111.  
 —, Fresnels Wellenfläche 139.  
 —, Resultate über Spiegelung und Brechung 9.

Greens „äußere Kraft“ 182.  
 — mechanische Theorie, Verbesserung an 292.  
 — Theorie, mit Fresnels Gesetzen verglichen 283 ff.  
 Groombridge, 1830, Newcomb über 223 f.  
 Gruppe von Wellen, Verbreitungsgeschwindigkeit 46, 47, 73.  
 Haüy, über Borazit 473.  
 Helligkeit von Sternen, Bouguer über veränderliche 251 f.  
 — von  $10^9$  Sternen innerhalb einer Kugel von bestimmtem Halbmesser 449 f.  
 Helmholtz, Dispersion, auch anomale 2, 8, 64, 314.  
 —, das Lenzsche Gesetz 572.  
 —, elektrische Atome 455.  
 —, Energieverbrauch durch Viskosität 79.  
 —, Wind und Wellen 496.  
 Herapaths Gastheorie 233.  
 — Kaliumchloratkristall 531.  
 Herkules, Bewegung des Sonnensystems auf ihn zu 412.  
 Herschels Entdeckung der Bewegung des Sonnensystems 412.  
 Himmelsblau, Helligkeit des 249 ff.  
 —, Fall elastischer Festkörper nach den Theorien von Stokes und Rayleigh 255 f.  
 —, Rayleigh über 249 f.  
 —, Spektrum des 263.  
 —, Stokes über 248.  
 —, Zettwuch über 264.  
 Huggins' Methode für die Bestimmung der relativen Bewegung eines Sterns und der Erde 412.  
 Huyghens' Gesetz der Doppelbrechung 12.  
 Hydrokinetische Rechnungen und Beobachtungen 492 ff.  
 Idealer Festkörper 195.  
 Ideales Silber 269 f.  
 Inkompressibler Festkörper, Bewegungsgleichungen eines 132 f.  
 — —, gebildet durch eine skalene Ansammlung von Molekeln 551.  
 Institution Lecture, Royal 26.  
 Intensität von Licht nach einer Spiegelung 10 f.  
 Interferenz, Fizeau und Rowland über 78 ff.  
 —, Vollkommenheit der, nach 100000 Perioden 79 f.  
 Ionen, zur Erklärung durch ultraviolette und andere Strahlen verursachter elektrischer Leitfähigkeit 419.  
 Irideszenz und Zwillingsbildung an Kaliumchloratkristallen 529.  
 Isländischer Spat 11.  
 —, Wellenfläche für 205.

- Jamin, über Amplituden nach einer Spiegelung 290 f.  
 —, metallische Reflexionsvermögen 321.  
 —, reflektiertes Licht 283.  
 Johnstone Stoney, Elektronenname 455.  
 Joule, Gastheorie 233.  
 —, mechanisches Wärmeäquivalent 213.  
 —, thermische Wirkungen bewegter Flüssigkeiten 500 f.  
 Jupiterstrabanten, Finsternisse der 6.  
 Kabel, atlantisches von 1865 580.  
 —, Dämpfungsgesetz 580.  
 —, submarines, Geschwindigkeit elektrischer Wellen in ihm 579.  
 Kaliumchloratkristalle, Herapaths 531.  
 —, optische Wirkung der Wärme auf 529.  
 —, Rayleigh und Stokes über 530 f.  
 —, Zwillinge- 529.  
 Kapillarität, Rayleighs Untersuchung über 233.  
 Kapillare Wellen nach Scott Russel 501.  
 Kelvin, Lord, „Thermische Wirkung einer bewegten Flüssigkeit“ 500.  
 —, „Hydrokinetische Rechnungen und Beobachtungen“ 365.  
 —, „Mathematische Elastizitätstheorie“ 186.  
 —, „Mechanische Werte von Elektrizität, Magnetismus und Galvanismus“ 365.  
 —, über das Lenzsche Gesetz 572.  
 Kempf, über die Geschwindigkeit der Sonne 222.  
 Kerr, über Doppelbrechung gespannten Glases 209.  
 Ketteler, über Brechungsindex 86.  
 Kies, leerer Raum in einem Haufen 521, 524.  
 Kinetische Energie, Theorie der, von Gasen 1, 24.  
 —, Verschwinden von 149 ff.  
 Koeffizienten, nur fünfzehn für den einfachsten Boscovichschen Kristall 539 f.  
 Koenig, Stimmgabel 42.  
 Kohäsionskraft 4, 229 f.  
 Kohlensäure, Viskosität der 245.  
 Kontinuität in der Wellentheorie 125.  
 Kork, genügt nicht der Navier-Poisson-schen Bedingung 101 f.  
 Kristalle, Barlows Modell für 509.  
 —, Green über die Fortpflanzung des Lichtes in 110 f.  
 — mit chiraler Symmetrie 535 f.  
 —, molekular definiert 471.  
 —, pyroelektrische 472.  
 —, ternäre Symmetrie 533 f.  
 —, Umgrenzung der Molekeln in 512 f.  
 —, zweiachsige 94 f.  
 Kritische Periode eines Mediums, drei Arten von 124.  
 Kugeln, Verteilung von Elektrizität auf zwei 41 f.  
 —, Widerstand einer Flüssigkeit gegen zwei schwingende 41 f.  
 Kundt, thermische Kapazität von Quecksilberdampf 420.  
 Kupfer und Zink, Verbindungswärme von 231.  
 Lagrange, Algorithmus endlicher Differenzen 58.  
 Lambert, Definition der Albedo 261.  
 Landolt, Chiralitätstabelle 385.  
 Lane 454.  
 Lang, Chiralität 384.  
 Langley, Messung von Wellenlängen 6, 96, 150.  
 Laplace, Gezeitenproblem 29.  
 —, Kapillarität 230.  
 „Laplacian“ gewählt für  $\nabla^2$  90.  
 Larmor, elektromagnetische Induktion in leitenden Schalen und Festkörpern 572.  
 Le Bel, Chiralitätsergebnisse 460.  
 Leitungsfähigkeit, elektrische, verursacht durch gewisse Lichtstrahlen 419 f.  
 Leitungsfähigkeiten von Metallen bei niederen Temperaturen 470 f.  
 Lenzsches Gesetz 572.  
 Leroux, über anomale Dispersion in Joddampf 150.  
 Lesliescher Würfel, strahlende Wärme eines 96.  
 —, Versuch über den Schall 27, 52.  
 Levy, L. 577.  
 Lockyer, Sir Norman, Geschwindigkeit der Sterne 220.  
 Lommel, Doppelbrechung 64.  
 —, normale Dispersion 64.  
 Lorentz, Ausdehnung von Materie, von Durchzug von Äther hervorgerufen 406.  
 Loschmidt, innere Diffusivität 242.  
 —, äußeres Diffusionsvermögen 242.  
 —, molekulare Dimensionen 233.  
 Lucrez über den Ursprung der Atome 454.  
 Mac Cullagh, über einen imaginären Brechungsindex 316.  
 —, Fehler im Fresnelschen Rhombus 330.  
 Mac Cullaghs Theorie der Chiralität 384.  
 Madan, optische Wirkungen der Wärme auf Kaliumchloratkristalle 529.  
 Magnetische Kraft, Wirkung auf zirkularpolarisiertes Licht 480.  
 — Polarisation, Faradaysche keine Chiralität 538.  
 Magnetischer Schirm in einem Telephonkreise 571.  
 —, ein rotierender Leiter ist ein solcher 572.  
 Magnetooptische Eigenschaften von Zucker und Quarz 23.

- Majorana, Beobachtungen in Catania und auf dem Ätna 254 f.
- Marbach, Chiralität des Natriumchlorats 538.
- Marloye, Stimmgabel 42.
- Mascart, „Traité d'Optique“ 385.
- Maxwell, über den Boltzmannschen Satz 416.
- , Dispersion 144.
- , innere Diffusion und äußere 241.
- , mechanische Theorie der Gase 441.
- , Molekelzahl 405.
- , Teilung von Energie 413 ff.
- , Theorie der Diffusion 241.
- , Theorie der Viskosität 243.
- , Viskosität 237.
- Maxwells elektromagnetische Lichttheorie 314.
- McConnel, Wellenfläche in einem Quarzkristall 384.
- Meyer, O. E., kinetische Theorie der Gase 237.
- Mhoische wirksame Dicke 571.
- Michelson, über relative Bewegung von Äther und Materie 406.
- , Geschwindigkeit einer Wellengruppe 47.
- , — des Lichts 74.
- Mikrom 119.
- Mikron 96, 406.
- Modell eines Festkörpers konstanten Volumens ohne Starrheit 91 f.
- Moduln eines elastischen Festkörpers 17 ff.
- , Modell eines elastischen Festkörpers mit achtzehn unabhängigen Veränderlichen 98.
- Mögliche Bewegung eines elastischen Festkörpers s. Wellen.
- Molekeln, dichteste Packung von 519.
- Molekulardimensionen 229 ff.
- , Modell, kinetisches 21.
- , Tafel der 265.
- Molekularwirbel 485.
- Morley, Fundamentalperioden 130 f.
- , Lösung für Molekelreihen 342.
- , relative Bewegung von Äther und Materie 406.
- Müller, über atmosphärische Absorption 264.
- Murray, über Kontaktelektrizität von Metallen 461 ff.
- „Nabla“ vorgeschlagene Bezeichnung für  $\nabla^2$  90.
- „Nadir der Temperatur“, Dewar 470.
- Napiers „Druckregistrator“ 496.
- Natriumchloratkristalle, Chiralität in ihnen 538.
- dampf, dunkle doppelte Fraunhofer'sche Linie des 140.
- licht, Rudberg über 380.
- Natriumchloratkristalle, Periode des Atoms 3.
- , wahrscheinliche molekulare Struktur 83.
- Natur des Elements einer Lichtquelle, wahrscheinliche 78 f.
- Navier, Beziehung zwischen Starrheit und Kompressibilität 49 f.
- Naviers Beziehung unnötig 99 f.
- Nebel, Grund für 253.
- Nernst über Leitungsfähigkeit 469.
- Neumann, F. 98, 364.
- Newcomb über Groombridge 1830 223.
- , Geschwindigkeit von Wellengruppen 46.
- , Konstanz der Lichtgeschwindigkeit selbstleuchtender Sterne 12.
- Newton über dunkle Flecke an Seifenblasen 232.
- Oberflächenkräfte, Rayleigh über 230.
- , Spannung 232.
- Obermayer über Diffusionsvermögen 240 f.
- , Viskosität der Kohlensäure usw. 245 f.
- Ölhäutchen, Dicke der 232 f.
- Opazität, magnetische 312.
- Pech, Burgunder oder Trinidad-, eine Eigenschaft des 4.
- Pendelversuch von Blackburn 481.
- von Foucault 482 ff.
- Phosphoreszenz, Energietheorie der 390 f.
- , mechanisch erläutert 148.
- Phosphoroskop von Becquerel 74.
- Piezo-Elektrizität, die Curie über 473 f.
- , Voigts Theorie der 477.
- Pocklington über Chiralität eines zweiachsigen Kristalls 378.
- Poissons Beziehung zwischen Starrheit und Kompressibilität 49.
- — — nicht im Wesen begründet 98 f.
- über Elektrizitätsverteilung auf zwei Kugeln 41.
- Lösung der Gleichung  $\frac{d^2 w}{dt^2} = c^2 \nabla^2 w$  153.
- über Tiefseewellen 91 f.
- Polarisationsanalyse reflektierten Lichtes 275 ff.
- Polarisationsebene, Definition der 8 f.
- Polarisiertes Licht, Richtung der Schwingungen in 8.
- , illustriert durch eine Holzkugel in Gallerte 67.
- Politur, Erkennen unvollkommener 271.
- Pouillet über Sonnenstrahlung 213.
- Pyroelektrischer Kristall 472.
- Quarzkristall, Chiralität des 534 f.
- , magnetooptische Eigenschaften eines 23.
- , Mängel in einem 536.

- Quarzkristall, Wellenfläche im 379.  
 Quelle des Lichtes, einfachster sie darstellender Vibrator 68.  
 — — —, wahrscheinliche Natur einer elementaren 78.  
 Quinke, Versuch über das Durchscheinen von Metallfilmen 268.
- Radian von James Thomson 16.  
 Ramsey, Dichten gewisser Substanzen im festen und im flüssigen Zustande 242.  
 —, Wärmekapazitäten von Argon, Helium und Krypton 420  
 Rankine, äolotrope Trägheit 357.  
 —, Doppelbrechung 12.  
 —, Molekularwirbel 480.  
 —, tasinomische, thlipsinomische Koeffizienten 134, 178 f.  
 —, über Stromlinien 493.  
 Raummodul, Medium mit unendlichem 112.  
 —, des Äthers negativ 343 ff.  
 Rayleigh, Lord, über anomale Dispersion 62.  
 —, Anzahl der Atome im Kubikzentimeter 251.  
 —, der Boltzmannsche Satz 423.  
 —, Dicke von Ölhäutchen 232.  
 —, Doppelbrechung 13.  
 —, Erklärung einer Wärmewirkung an Kaliumchloratkristallen 529.  
 —, die Farben von Kaliumchloratkristallen 531.  
 —, die Geschwindigkeit von Wellengruppen 47 f.  
 —, Himmelsbläue 21, 72, 249 ff.  
 —, Intensität nach einer Spiegelung 309.  
 —, Kapillarität 233.  
 —, magnetischer Schirm in einem Telephonkreise 572.  
 —, die Maxwellsche Theorie 314.  
 —, Prüfung der Schwingungsrichtung in polarisiertem Lichte 266.  
 —, Spektrum des blauen Himmels 263.  
 —, „Theorie von Oberflächenkräften“ 230.  
 —, Wärmekapazität von Argon, Helium und Krypton 420.  
 —, Viskosität von Argon 245.  
 Reflexion, Intensität nach 308 f.  
 —, mechanische Theorie der 8, 291 ff.  
 — nach direkter Inzidenz 307.  
 — nach streifender Inzidenz 310.  
 —, Verschiebung in der Einfallsebene 303 ff.  
 —, — senkrecht zur Einfallsebene 297 ff.  
 Reflexionsvermögen 272 ff, 321 ff.  
 Refraktion s. Brechung.  
 Reibungselektrizität 461 f.  
 Reinold, „Über die Dickengrenze von Flüssigkeitshäutchen“ 232.  
 Reynolds, Osborne, Ausdehnbarkeit von Sand 523.  
 Riefelwellen 498 ff.  
 Risteen über die Geschwindigkeit der Sonne 222.  
 Roberts-Austen, molekulare Diffusion von Blei und Gold 231.  
 —, Verbindungswärme von Kupfer und Zink 231.  
 —, Zwischendiffusion von Festkörpern 469.  
 Röntgen, Dicke von Ölhäutchen 232.  
 Röntgenstrahlen 124 f.  
 Rood, Intensität von Licht nach einer Spiegelung 11.  
 Rosa, Monte, Beobachtungen auf 254.  
 Rotationswellen 231 f.  
 Rotierender Stab, Schwingungen in einem schnell 485 f.  
 Rowland, elektromagnetische Störungen 55 f.  
 —, Modell eines Vibrators 130, 147.  
 —, über sein Gitter 80.  
 —, Wellenmaschine 130, 147.  
 Rubens, Versuche über Sylvín und Steinsalz 119 ff.  
 Rücker 232.  
 Rücker, „Über die Dickengrenze von Flüssigkeitshäutchen“ 232.  
 Rudberg, Chiralität 384.  
 —, über Natriumlicht 380.  
 Russel, Scott, kapillare Wellen 501.
- Sand, Ausdehnbarkeit von 523.  
 Sarrau, Chiralitätstheorie 384.  
 Schall, Geschwindigkeit des 20 f.  
 Schwingende Partikel, Erweiterung der Helmholtzschen Theorie 23.  
 — Molekelreihen 28 ff.  
 Schwingungslinie 362.  
 —, magneto-optische Drehung der 385 f.  
 Schwingung, Hin- und Her- zweier Kugeln 70 ff.  
 Schwingungen, Richtung der in polarisiertem Lichte 266 f.  
 —, entlang einem schnell rotierenden Stabe 483 f.  
 Seifenblasen, Newton über dunkle Punkte in 332.  
 Sella, Beobachtungen auf dem Monte Rosa 254.  
 Sellmeier, über den Brechungsindex 118 ff.  
 —, Erklärung der Absorption 80 ff.  
 —, Theorie der anomalen Dispersion 83 f.  
 Sellmeiers Formel auf ein Gas mit nur einer molekularen Periode angewendet 144 f.  
 Serienmolekeln, zahlenmäßige Werte für 82.  
 —, Determinante, Zahl der Glieder in der 56 ff.

- Serienmolekeln, Fundamentalperioden für 130.  
 —, Gewirr in schwingenden 73.  
 —, Kritische Werte einer Periode in 44.  
 —, Lösung für 341 f.  
 —, Schwingungen in 28 ff.  
 —, Wurzeln der Gleichung für 61 f.  
 Silber, „ideales“ 269 f.  
 Smith, Archibald, über Fresnels Wellenfläche 360.  
 —, Willoughby, über voltaelektrische Induktion 572.  
 Smiths Preisexamen 26.  
 Sonnenlicht, Energie von 213.  
 Sonnenstrahlung 213.  
 Stabilität molekularer Ansammlungen 560 ff.  
 — — — nicht durch positive Module gesichert 563.  
 Starrheit des Äthers 216 f.  
 Steinsalz, Kurve des Brechungsvermögens für 122.  
 Sterneschwindigkeiten, berechnete 219 f., 448.  
 Sternlicht, gesamtes 225, 449.  
 Stickoxyd, Viskosität von 249.  
 Stimmgabeln von Marloye und Koenig 41.  
 Stokes' Arbeit gegen die Viskosität zur Aufrechterhaltung einer Welle 501.  
 —, Bestätigung des Huyghensschen Gesetzes der Doppelbrechung 13.  
 —, Bläue des Himmels 71.  
 —, Chiralität in Kristallen 386.  
 —, — in Natriumchloratkristallen 538.  
 —, Diamanteigenschaft 321 f.  
 —, Doppelbrechung 181, 356.  
 —, Erklärung der Absorption 81 f.  
 —, Farben der Kaliumchloratkristalle 531.  
 —, Fluoreszenz 248.  
 —, gleichräumige und rotationslose Komponenten der Dispersion 153.  
 —, Irisdeszenz und Zwillingbildung in Kaliumchloratkristallen 530.  
 —, Leslies Versuch 27, 52.  
 —, mechanische Erklärung der dunkeln Linien im Sonnenspektrum 3.  
 —, Prüfung der Schwingungsrichtung in polarisiertem Licht 266 f.  
 —, Theorie der Diffraction 151.  
 —, Wellenfläche für isländischen Spat 359.  
 —, Widerstand einer Flüssigkeit gegen zwei schwingende Kugeln 41.  
 Stoncy, Johnstone, Molekulare Dimensionen 233.  
 —, Name „Elektron“ 455.  
 Stöße sind höchstwahrscheinlich eine Quelle des Lichtes 78 f.  
 Sylvén, Brechung, Brechungsformeln, Brechungskurven 120 ff.  
 Tait, Grundlagen der kinetischen Gas-theorie 414.  
 Tasinomische Koeffizienten erklärt 134, 178 ff.  
 Telephonkreis, magnetischer Schirm in einem 572.  
 Tetraekadekaeder 515 f.  
 Thlipsinomische Koeffizienten erklärt 134, 178 ff.  
 Thomson, James, Plastizität des Eises 486 ff.  
 — — Radian 16.  
 —, J. J., „Elektrische Leitung durch Gase“ 340.  
 —, Ionen zur Erklärung der durch gewisse Lichtstrahlen hervorgerufenen Leitung 419.  
 Tonlosigkeit, Kugel der, angezeigt durch ein Verschiebungspotential 51 f.  
 —, —, für eine Stimmgabel 40, 42.  
 Trägheit, äolotrope 357.  
 —, erklärt 366.  
 Turmalin, Elektropolarität des 472.  
 —, Pyroelektrizität des 473.  
 Tyndall über gewisse Eigenschaften des Eises 456 ff.  
 Ultraviolette Strahlen, Wirkung der auf elektrische Leitung erklärt 419.  
 Uranglas, Fluoreszenz des 75.  
 Van't Hoff, Resultate über Chiralität 460.  
 Varley's Kathodenwirbel 457.  
 Verdichtungswellen 26.  
 —, Energie der 33 ff.  
 —, hervorgerufen durch Reflexion und Brechung 33 ff., 51.  
 —, Lösung für von der Quelle ferne Punkte 51 f.  
 — oder Schallwellen, nicht symmetrische Lösung für 38 f.  
 —, Wahrscheinlichkeit der Existenz von 112.  
 Verschiebungspotential 49.  
 Vibratoren, Gegen- in einer geraden Linie 76.  
 Viskosität, Helmholtz über Energieverbrauch durch 243 f.  
 Voigt, Theorie der Chiralität 384.  
 —, Theorie der Piezoelektrizität 477.  
 Volta-elektrische Induktion 572.  
 Waitz über Diffusionsvermögen 240.  
 Wärmekapazität, Clausius über 419.  
 —, des Quecksilberdampfes 420.  
 Waterston, Gesetz der Energieverteilung 413 ff.  
 Weinstein 226, 240, 246, 577.  
 Weinsteinssäurekristalle, Chiralität der 538.  
 Wellenbewegung, Quasi- in einem Medium mit komplexer Dichte 316 ff.

- Wellenfläche in Quarz 379.  
 Wellenlängen, Messung der 6.  
 Wellenmaschine 130, 147.  
 Wellen-, Verdichtungs- s. Verdichtungs-  
 wellen.  
 — Bedingung für solche ohne Verdich-  
 tung 181 ff.  
 —, Drillungs- 26, 65 ff. •  
 —, Energie der 88 f.  
 — — elektrischen im Äther 463.  
 —, von einer un stetigen Quelle 88.  
 —, in einem inkompressibeln Festkörper  
 226.  
 —, in einem elastischen Festkörper, in  
 geschlossener Form 443 ff.  
 Wellen, kugelförmige in einem elastischen  
 Festkörper 151.  
 —, Schwierigkeiten in der Theorie 93, 94.  
 —, Spiegelung und Brechung ebener  
 Stoßwellen 151.  
 Wind, Wirkung des auf Wasserwellen  
 496 ff.  
 Wirbel, molekulare 485.
- Young, gleiche Dichten oder Starrheiten  
 von Medien 309.  
 —, über molekulare Dimensionen 230.  
 —, relative Bewegung von Äther und  
 Materie 458.
- Zeitbeziehung zwischen Perioden in  
 Äther und Materie 3.  
 Zettwuch über die Bläue des Himmels  
 264.  
 Zucker, magneto-optische Eigenschaften  
 des 23.  
 Zusammenstoß, Definition des 418.  
 Zweiachsige Kristalle 94 f.  
 Zwillings- oder Doppelkristall 527.  
 Zwillingsbildung in Kaliumchloratkri-  
 stallen 529.  
 Zwischendiffusionen von Festkörpern,  
 Roberts-Austen über 469.  
 — — — Loschmidt über 241 f.  
 — — — Maxwell über 241 f.  
 Zwischenwirkung zwischen Äther und  
 Materie 206 ff.

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

# Lehrbuch der Physik

Zum Gebrauch

beim Unterricht, bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium

Von E. Grimsehl

Direktor der Oberrealschule auf der Uhlenhorst in Hamburg

Mit 1091 Textfiguren, 2 farbigen Tafeln und einem Anhang, enthaltend Tabellen physikalischer Konstanten und Zählentabellen. [XII u. 1052 S.] gr. 8. 1909. Geh. n.  $\mathcal{M}$  15.—, geb. n.  $\mathcal{M}$  16.—

Der moderne physikalische Schulunterricht soll eine Übersicht über das ganze Gebiet der Physik geben. Er soll aber außerdem, besonders in den Oberklassen, einige begrenzte Gebiete ausführlich und wissenschaftlich streng behandeln, damit die Schüler schon auf der Schnelle in die Methoden wissenschaftlicher Forschung eingeführt werden. Das vorliegende Lehrbuch enthält den physikalischen Lehrstoff der meisten Gebiete in der Ausführlichkeit, wie sie der letzters Forderung entspricht. Das Buch ist in erster Linie für die Hand des Lehrers bestimmt, der nach freiem Ermessen auswählen kann, welche Teilgebiete ihm zur wissenschaftlichen Behandlung im Unterricht bei einer bestimmten Schülergeneration am geeignetsten erscheinen. Dem Schüler soll das Buch auch dann noch ein Führer sein, wenn er die Schule verlassen hat; es soll ihn befähigen, seine Kenntnisse auch auf denjenigen Gebieten zu vervollständigen, in denen der Schulunterricht nur die Grundlagen hat geben können. Ferner soll es dem jungen Studenten ein Begleiter in die akademischen allgemeinen Vorlesungen über die Experimentalphysik sein.

# Lehrbuch der praktischen Physik

Von Dr. Friedr. Kohlrausch in Marburg

Zugleich als zehnte, vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. Mit zahlr. Fig. im Text. [XXVIII u. 656 S.] gr. 8. 1905. Biegsam in Leinw. geb. n.  $\mathcal{M}$  9.—

„... Alles in allem hat man den Eindruck, daß sich das Buch nachgerade asymptotisch der Linie nähert, über die hinaus es nicht mehr vervollkommen werden kann. An der glanzvollen Entwicklung der deutschen Physikerschule hat das Kohlrauschsche Buch in allen seinen Auflagen einen schwerwiegenden Anteil gehabt. Mit der neuen Auflage und mit dem veränderten Namen wird es sicherlich dieser seiner schönen Mission treu bleiben und reichen Segen zu stiften fortfahren.“

(Physikalische Zeitschrift.)

„... Alles in allem können die Physiker dem Verfasser nicht genug Dank wissen für die außerordentliche Sorgfalt, die er immer von neuem bei der Bearbeitung dieses hervorragend nützlichen Werkes betätigt.“

(Beiblatt zu den Annalen der Chemie und Physik.)

# Kleiner Leitfaden der praktischen Physik

Von Dr. Friedr. Kohlrausch

in Marburg

2., vermehrte Auflage (6. bis 10. Tausend). Mit zahlreichen Figuren im Text

[XVIII u. 268 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n.  $\mathcal{M}$  4.—

„Man muß dem Verfasser aufrichtigen Dank für diese Arbeit wissen, um so mehr, als das Buch, wie es ja hier ohnedies selbstverständlich war, durch seine Beschränkung auf den engeren Zweck um nichts weniger wissenschaftlich geworden ist. In der Vorrede äußert sich der Verfasser in so beherzigenswerter Weise über diesen Gegenstand, daß ich die fraglichen Stellen ersetze. ... Dadurch, daß diese beherzigenswerten Worte einem Buche vorausgeschickt sind, welches in die Hand des Anfängers gelangt, werden sie ihren Segen in besonders weitem Umfange üben.“

(Zeitschrift für physikalische Chemie.)

Kelvin-Weinstein, Molekuldynamik.

# Wüllners Lehrbuch der Experimentalphysik.

In 4 Bänden. gr. 8. Geh. und in Halbfranz geb.

- I. Band: **Allgemeine Physik und Akustik.** 6. verbess. Auflage, bearbeitet von A. Wüllner und A. Hagenbach. Mit 333 Abbildungen und Figuren. [XIV u. 1058 S.] 1907. Geh. n.  $\mathcal{M}$  16.—, geb. n.  $\mathcal{M}$  18.—
- II. Band: **Die Lehre von der Wärme.** 5. Auflage. Mit 131 Abbildungen und Figuren. [XI u. 936 S.] 1896. Geh. n.  $\mathcal{M}$  12.—, geb. n.  $\mathcal{M}$  14.—
- III. Band: **Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektrizität** mit einer Einleitung: Grundzüge der Lehre vom Potential. 5. Auflage. Mit 341 Abbildungen und Figuren. [XV u. 1415 S.] 1897. Geh. n.  $\mathcal{M}$  18.—, geb. n.  $\mathcal{M}$  20.—
- IV. Band: **Die Lehre von der Strahlung.** 5. Auflage. Mit 299 Abbildungen und Figuren und 4 lithographierten Tafeln. [XII u. 1042 S.] 1899. Geh. n.  $\mathcal{M}$  14.—, geb. n.  $\mathcal{M}$  16.—

**Bei gleichzeitigem Bezuge aller 4 Bände ermäßigt sich der Gesamtpreis des Werkes geh. auf n. M. 44.—, in Halbfranz geb. auf n. M. 50.—**

Die wissenschaftlichen Vorzüge dieses reich ausgestatteten Lehrbuches sind von der Kritik einstimmig anerkannt worden. Das Werk hat sich die Aufgabe gestellt, einerseits die physikalischen Lehren in weiteren Kreisen bekannt zu machen, andererseits denen, die tiefer in das Gebiet des physikalischen Wissens eindringen wollen, als Vorschule zu dienen; es hat aber, ohne den ersten Zweck außer acht zu lassen, die zweite, wissenschaftliche Aufgabe mehr ins Auge gefaßt, als dies von den verbreitetsten Lehrbüchern der Physik bis jetzt geschehen ist. In der vorliegenden sechsten Auflage des ersten Bandes ist an dem Charakter des Werkes nichts geändert. Sie sucht den neueren Arbeiten gerecht zu werden, die bis zum Jahre 1906 berücksichtigt sind. Das Buch soll unter dem steten Hinweise auf die Originalarbeiten eine Übersicht geben über den augenblicklichen Stand der experimentellen Physik und über die theoretischen Auffassungen, zu denen die Physik zurzeit gelangt ist. Nur auf eine, wie wir glauben, nicht unwesentliche Verbesserung nach der historischen Seite möge hingewiesen werden: bei den Zitaten der einzelnen Arbeiten haben die Verfasser die Zahl des betreffenden Erscheinungsjahres hinzugefügt, so daß hierdurch auch eine Übersicht der historischen Entwicklung der Physik gegeben ist.

## Ein unentbehrlicher Ratgeber

**für Mathematiker, Physiker, Astronomen usw.:**

# Taschenbuch für Mathematiker und Physiker.

Herausgegeben von Felix Auerbach.

- I. Jahrgang 1909/10. Mit einem Bildnis Lord Kelvins. [XLIV u. 450 S.]  
8. 1909. In Leinwand geb. n.  $\mathcal{M}$  6.—

Das Erscheinen dieses Taschenbuches bedarf nach Lage der Verhältnisse kaum einer Rechtfertigung, denn während es beispielsweise Taschenbücher für Chemiker und Astronomen, Techniker und Geographen gibt, die sich großer Verbreitung und Beliebtheit bei den betreffenden Berufsgenossen erfreuen, fehlte es bisher an einem entsprechenden Hilfsmittel zum täglichen Gebrauch der Mathematiker und Physiker, so daß diese genötigt waren, sich an das zu halten, was etwa in den genannten fremden Taschenbüchern für ihre Zwecke zu finden war. Durch das nun begonnene Unternehmen wird somit eine allgemein empfundene Lücke ausgefüllt. Ebenso kurz läßt sich die Frage erledigen, warum in dem vorliegenden Taschenbuche zwei Wissenschaften miteinander kombiniert erscheinen. Handelt es sich doch um zwei Disziplinen, die in durchgängigem theoretischem und praktischem Konnex miteinander stehen, die von den Studierenden fast allgemein gemeinschaftlich bearbeitet und von den Lehrern fast allgemein gemeinschaftlich unterrichtet werden. Ein Taschenbuch für Mathematiker würde daher mit einem Taschenbuch für Physiker einen großen Teil des Inhalts gemein haben; eine Wiederholung, die hier von vornherein durch die Zusammenfassung in ein einziges Taschenbuch vermieden worden ist.

Bei den innigen Beziehungen der Naturwissenschaften untereinander erschien es erforderlich, auch die Nachbargebiete einigermaßen zu berücksichtigen, und so werden denn für diesmal wenigstens einige wichtige Angaben aus der Astronomie und der allgemeinen Chemie gebracht. Neben den wissenschaftlichen Nachweisen erschien es angezeigt, auch eine Reihe von anderen Angaben zu bringen. So enthält denn der vorliegende Jahrgang ein Verzeichnis der mathematischen und physikalischen Zeitschriften und Gesellschaftsschriften, Bezugsquellen für mathematische und physikalische Apparate, ein Verzeichnis neu erschienener mathematischer und physikalischer Bücher sowie eine Liste der Hoch- und Mittelschullehrer, letztere in dem durch den verfügbaren Raum gebotenen Umfang. Ferner ist auf die Zehlfenntafeln hinzuweisen, die ihrer handlichen Form wegen vielen Benutzern bequem sein werden, auf den Kalender usw. Endlich findet man eine Totenliste, und dem größten unter diesen Toten, dem Lord Kelvin, dessen Porträt unsern Band schmückt, ist ein etwas eingehenderer Nachruf gewidmet.

Leider hat sich für diesmal die Herausgabe des Taschenbuches infolge mannigfacher Schwierigkeiten bei der Vorbereitung ein wenig verzögert; es besteht die bestimmte Aussicht, daß die späteren Jahrgänge gleich zu Anfang des betreffenden Jahres erscheinen können.



## Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

---

**Physik.** Unter Mitwirkung von M. Abraham, L. Boltzmann, G. H. Bryan, P. Debye, H. Diesselhorst, H. Dubois, Fr. Emde, S. Finsterwalder, R. Gans, F. W. Hinrichsen, E. W. Hobson, J. H. van t' Hoff, H. Kamerlingh-Onnes, M. Laue, Th. Liebisch, H. A. Lorentz, L. Mamlock, G. Mie, H. Minkowski, O. Mügge, J. Nabl, F. Pockels, L. Prandtl, R. Reiff, K. Runge, A. Schoenflies, M. Schröter, E. Study, A. Wangerin, W. Wien, J. Zenneck, redigiert von A. Sommerfeld. A. u. d. T.: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Band V. In 3 Teilen.

Bisher erschienen:

- I. Teil. 1. Heft. 1903. n.  $\mathcal{M}$  4.80. 2. Heft. 1905. n.  $\mathcal{M}$  4.80. 3. Heft. 1906. n.  $\mathcal{M}$  5.20. 4. Heft. 1907. n.  $\mathcal{M}$  3.60.  
II. — 1. Heft. 1904. n.  $\mathcal{M}$  8.—. 2. Heft. 1907. n.  $\mathcal{M}$  3.—  
III. — 1. Heft. 1909. n.  $\mathcal{M}$  6.—

Unter der Presse:

- I. Teil. 4. Heft. II. Teil. 3. Heft.

---

**Abraham, M.,** Theorie der Elektrizität. In 2 Bänden. gr. 8 Geb.

I. Band. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgößen in der Physik. Von A. Föppl. 3., vollständig umgearbeitete Auflage von M. Abraham. Mit 11 Figuren im Text. [XVIII u. 460 S.] 1907. n.  $\mathcal{M}$  12.—

II. — Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von M. Abraham. 2. Auflage. Mit 6 Figuren im Text. [XII u. 404 S.] 1908. n.  $\mathcal{M}$  10.—

**Bryan, G. H.,** Thermodynamics. An introductory Treatise dealing mainly with first Principles and their direct Applications. In englischer Sprache. [XIV u. 204 S.] gr. 8. 1907. Geb. n.  $\mathcal{M}$  7.—

**Bucherer, A. H.,** mathematische Einführung in die Elektronentheorie. Mit 14 Textfiguren. [II u. 148 S.] gr. 8. 1904. Geb. n.  $\mathcal{M}$  3.20.

**Burkhardt, H.,** Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. [XII, III u. 2698 S.] 1901/1908. In 2 Halbbänden. Geh. je n.  $\mathcal{M}$  30.—

**Ferraris, G.,** wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik, deutsch von L. Finzi. Nach den Vorlesungen über Elektrotechnik im R. Museo Industriale zu Turin. Mit 161 Textfiguren. [XII u. 358 S.] gr. 8. 1901. Geb. n.  $\mathcal{M}$  12.—

**Fleming, J. A.,** elektrische Wellen-Telegraphie. Vier Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von A. Aschkinäuf. Mit 53 Abbildungen. [IV u. 185 S.] gr. 8. 1906. Geh. n.  $\mathcal{M}$  4.20, geb. n.  $\mathcal{M}$  5.—

**Lorentz, H. A.,** Abhandlungen über theoretische Physik. In 2 Bänden  
I. Band. Mit 40 Textfiguren. [IV u. 489 S.] gr. 8. 1907. Geh. n.  $\mathcal{M}$  16.—, geb. n.  $\mathcal{M}$  17.—

II. — [In Vorbereitung.]

—— Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Unveränderter Abdruck der 1895 bei J. Brill in Leiden erschienenen 1. Auflage. [III u. 138 S.] gr. 8. 1906. Geb. n.  $\mathcal{M}$  3.20.

## **Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin**

---

- Lorentz, H. A.**, the Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat. Vorlesungen, gehalten an der Columbia-Universität zu New York. [IV u. 332 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. *M* 8.—, geb. n. *M* 9.—
- Planck, M.**, das Prinzip der Erhaltung der Energie. 2. Auflage. [XVI u. 278 S.] 8. 1908. Geb. n. *M* 6.—
- Pockels, Fr.**, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Textfiguren und 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1906. Geb. n. *M* 16.—
- Richarz, F.**, neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität. In wissenschaftlich-gemeinverständlicher Weise dargestellt. 2. Auflage. Mit 97 Abbildungen. [VI u. 128 S.] gr. 8. 1902. Geb. n. *M* 1.50.
- Anfangsgründe der Maxwellschen Theorie verknüpft mit der Elektronentheorie. [IX u. 246 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. *M* 7.—, geb. n. *M* 8.—
- Rümelin, G.**, Theorie der Ionisation der Gase. 2 Bändchen [Jedes ca. 100 S.] gr. 8. 1909. Kart. u. geb. [In Vorbereitung.]
- Schaefer, C.**, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Mit Bildnis Maxwells und 32 Figuren. [VIII u. 174 S.] gr. 8. 1908. Kart. n. *M* 3.40, geb. n. *M* 3.80.
- Schuster, A.**, Einführung in die theoretische Optik. Autor. deutsche Ausgabe. Übersetzt von H. Konen. Mit 2 Tafeln und 185 Figuren im Text. [XIV u. 413 S.] gr. 8. 1907. Geh. n. *M* 12.—, geb. n. *M* 13.—
- Starke, H.**, experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse. Mit 275 Textabbildungen. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. Geb. n. *M* 6.—
- Thomson, J. J.**, Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autor. Ausgabe, unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von E. Marx. Mit 187 Textfiguren. [VII u. 587 S.] gr. 8. 1906. Geh. n. *M* 18.—, geb. n. *M* 19.—
- Voigt, W.**, Magneto- und Elektrooptik. Mit zahlreichen Textfiguren. [XIV u. 396 S.] gr. 8. 1908. Geb. n. *M* 14.—
- Volkmann, P.**, Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik. Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. [XVI u. 370 S.] gr. 8. 1900. Geh. n. *M* 9.—, geb. n. *M* 10.20.
- Vorlesungen über die Theorie des Lichtes. Unter Rücksicht auf die elastische und die elektromagnetische Anschauung. Mit Textfiguren. [XVI u. 432 S.] gr. 8. 1891. Geh. n. *M* 11.20.
- Weber, H. und J. Wellstein**, Enzyklopädie der Elementarmathematik. In 3 Bänden.  
III. Band. Angewandte Elementarmathematik, bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein u. R. H. Weber. Mit 358 Figuren im Text. [XIII u. 666 S.] gr. 8. 1907. Geb. n. *M* 14.—
- Wien, W.**, über Elektronen. Vortrag, gehalten auf der 77. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. [28 S.] gr. 8. 1905. Geh. n. *M* 1.— [2. Auflage erscheint im September 1909.]

# Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.

Herausgegeben im Auftrage der  
Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien,  
sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen.

In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. Geheftet und in Halbfranz geb.

Bisher erschienen:

- I. **Arithmetik und Algebra**, 2 Teile, red. von **W. Frz. Meyer**.  
I. Teil. [XXXVIII u. 554 S.] 1898—1901. Geh. *M.* 17.—, in Halbfrz. geb. *M.* 20.—  
II. Teil. [X u. S. 555—1197] 1900—1901. Geh. *M.* 19.—, in Halbfranz geb. *M.* 22.—
- II. **Analysis**, 2 Teile, red. von **H. Burkhardt** und **W. Wirtinger**.  
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1899. *M.* 4.80; 2/3. [240 S.] 1900. *M.* 7.50; 4. [160 S.] 1900. *M.* 4.80; 5. [199 S.] 1904. *M.* 6.—; 6. [57 S.] 1906. *M.* 1.60.  
II. Teil. Heft: 1. [175 S.] 1901. *M.* 5.20.
- III. **Geometrie**, 3 Teile, red. von **W. Frz. Meyer**.  
I. Teil. Heft: 1. [220 S.] 1907. *M.* 6.40.  
2. [163 S.] 1907. *M.* 5.—  
II. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. *M.* 4.80; 2. [96 S.] 1904. *M.* 2.80; 3. [199 S.] 1906. *M.* 5.60.  
III. Teil. Heft: 1. [183 S.] 1902. *M.* 5.40; 2/3. [256 S.] 1903. *M.* 6.80.
- IV. **Mechanik**, 4 Teilbände, red. von **F. Klein** und **C. H. Müller**.  
I. Teilband (IV, 1, 1) [XVI u. 691 S.] 1901—1908. Geh. *M.* 20.40, in Halbfranz geb. *M.* 24.—
- II. Teilband (IV, 1, 2) Heft: 1. [152 S.] 1904. *M.* 4.40
- III. Teilband (IV, 2, 1) [XI u. 493 S.] 1901—1908. Geh. *M.* 17.60, in Halbfranz geb. *M.* 20.60.
- IV. Teilband (III, 2, 2) Heft: 1. [124 S.] 1907. *M.* 3.60. 2. [186 S.] 1907. *M.* 5.20.
- V. **Physik**, 3 Teile, red. von **A. Sommerfeld**.  
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. *M.* 4.80; 2. [159 S.] 1905. *M.* 4.80; 3. [172 S.] 1906. *M.* 5.20; 4. [121 S.] 1907. *M.* 3.60.  
II. Teil. Heft: 1. [280 S.] 1904. *M.* 8.—; 2. [104 S.] 1907. *M.* 3.—
- VI. 1: **Geodäsie und Geophysik**, 2 Teilbände, red. von **Ph. Furtwängler** und **E. Wiechert**.  
Heft: 1. [116 S.] 1906. *M.* 3.40.  
2. [127 S.] 1907. *M.* 3.60.
- VI. 2: **Astronomie**, red. von **K. Schwarzschild**.  
Heft: 1. [193 S.] 1905. *M.* 5.80.  
2. [139 S.] 1908. *M.* 4.—  
In Vorbereitung:
- VII. **Geschichte, Philosophie, Didaktik**. [In Vorbereitung.]

## Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées.

Publiée sous les auspices des Académies des sciences  
de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne  
avec la collaboration de nombreux savants.

### Édition française,

rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de  
**Jules Molk**, professeur à l'université de Nancy.

En sept tomes. gr. 8. Geheftet.

Paru: Tome I: **vol. I, fasc. I.** [160 pag.] 1904. *M.* 4.— **fasc. II.** [167 pag.] 1907. *M.* 4.20. **fasc. III.** [158 S.] 1908. *M.* 5.— Tome I: **vol. II, fasc. I.** [237 pag.] 1907. *M.* 6.80. Tome I: **vol. III, fasc. I.** [96 pag.] 1906. *M.* 2.40. **fasc. II.** [96 pag.] 1908. *M.* 2.40. Tome I: **vol. IV, fasc. I.** [160 pag.] 1906. *M.* 4.—

Durch die günstige Aufnahme veranlaßt, welche die deutsche Ausgabe dieses monumentalen Werkes in Fachkreisen gefunden hat, und auf vielfache Anregungen hat sich die Verlagsbuchhandlung entschlossen, die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften in Gemeinschaft mit der Firma Gauthier-Villars in Paris auch in französischer Sprache erscheinen zu lassen. Das Werk wird, wie schon die erste Lieferung zeigt, seitens der deutschen Bearbeiter viele Änderungen und Zusätze erfahren, und auch die französischen Mitarbeiter, sämtlich Autoritäten auf ihren Gebieten, haben eine gründliche Umarbeitung vorgenommen. Zum ersten Male dürfte somit wohl hier der Fall eingetreten sein, daß sich bei einem so großen Werke die ersten deutschen und französischen Fachgelehrten zu gemeinsamer Arbeit verbunden haben.

**Repertorium der höheren Mathematik** (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literaturnachweise) von **Ernst Pascal**, ord. Professor an der Universität Pavia. Autorisierte deutsche Ausgabe von weil. A. Schepp in Wiesbaden. 2. neubearb. Auflage. In 2 Teilen. **Analysis und Geometrie.** I. Teil: Die Analysis. Herausgegeben von **P. Epstein**. [ca. 700 S.] gr. 8. 1909. In Lnwd. geb. ca. n. *M.* 12.— [Erscheint im Januar 1909.] II. Teil: Die Geometrie. Herausgegeben von **H. E. Timerding**. [ca. 800 S.] gr. 8. 1909. In Lnwd. geb. ca. n. *M.* 14.— [Erscheint Ostern 1909.]

Der Zweck des Buches ist, auf einem möglichst kleinen Raum die wichtigsten Theorien der neueren Mathematik zu vereinigen, von jeder Theorie nur so viel zu bringen, daß der Leser instande ist, sich in ihr zu orientieren, und auf die Bücher zu verweisen, in welchen er Ausführlicheres finden kann.

Für den Studierenden der Mathematik soll es ein „Vademekum“ sein, in dem er, kurz zusammengefaßt, alle mathematischen Begriffe und Resultate findet, die er während seiner Studien sich angeeignet hat oder noch aneignen will.

Die Anordnung der verschiedenen Teile ist bei jeder Theorie fast immer dieselbe: zuerst werden die Definitionen und Grundbegriffe der Theorie gegeben, alsdann die Theoreme und Formeln (ohne Beweis) aufgestellt, welche die Verbindung zwischen den durch die vorhergehenden Definitionen eingeführten Dingen oder Größen bilden, und schließlich ein kurzer Hinweis auf die Literatur über die betreffende Theorie gebracht.

**Vocabulaire Mathématique**, français-allemand et allemand-français. Mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch-französisch. Enthaltend die Kunstaussdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. Von Professor Dr. **Felix Müller**. [XV u. 316 S.] Lex.-8. 1900/1901. In Leinw. geb. n. *M.* 20.— Wurde in 2 Lieferungen ausgegeben: I. Lieferung. [IX u. 132 S.] 1900. Geh. n. *M.* 8.— II. Lieferung. [S. IX—XV u. 133—316.] 1901. Geh. n. *M.* 11.—

Das Vokabularium enthält in alphabetischer Folge mehr als 12000 Kunstaussdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik in französischer und deutscher Sprache und soll in erster Linie eine Ergänzung der gebrauchlichen Wörterbücher für die beiden genannten Sprachen sein. In dem zweiten deutsch-französischen, Teil sind, ebenso wie im ersten, die zu einem und demselben Hauptworte gehörigen zusammengesetzten Kunstaussdrücke unter diesem Hauptworte vereinigt. So sind unter dem Artikel „Kurve“ 449 Kunstaussdrücke zusammengestellt, in denen dieses Wort vorkommt. Jedem Adjektivum sind diejenigen Hauptwörter in Klammern beigelegt, die mit ihm zu einem Kunstaussdruck verbunden werden. Da das Vokabularium zugleich als Vorarbeit zu einem Mathematischen Wörterbuche dienen soll, so sind auch zahlreiche Nominalbezeichnungen aufgenommen, deren Anführung aus rein sprachlichem Interesse überflüssig erscheinen dürfte. Z. B. Gaußsche Abbildung (einer Fläche auf eine Kugel) (Gauß 1827) [inf. Geom.] representation de Gauss; Clairauts Satz (über die geodätischen Linien auf Umdrehungsflächen) (Clairaut 1733) [inf. Geom.] théorème de Clairaut. Aus den beigelegten Zusätzen ist zu ersehen, daß das Vokabularium mehr bietet, als der Titel erwarten läßt.

**Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.** Von **Moritz Cantor**.

In 4 Bänden. **I. Band.** Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. 3. Auflage. Mit 114 Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. [VI u. 941 S.] gr. 8. 1907. Geh. n. *M.* 24.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 26.— **II. Band.** Vom Jahre 1200 bis zum Jahre 1668. 2. verb. und verm. Auflage. Mit 190 Figuren im Text. [XII u. 943 S.] gr. 8. 1900. Geh. n. *M.* 26.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 28.— **III. Band.** Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. 2. verb. und verm. Auflage. In 3 Abteilungen. Mit 146 Figuren im Text. [X u. 923 S.] gr. 8. 1901. Geh. n. *M.* 25.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 27.— **IV. Band.** Vom Jahre 1759 bis zum Jahre 1799. Herausgegeben unter Mitwirkung der Herren **V. Bobynin**, **A. v. Braunmühl**, **F. Cajori**, **S. Günther**, **V. Kommerell**, **G. Loria**, **E. Netto**, **G. Vivanti** und **C. R. Wallner** von **M. Cantor**. Mit 100 Figuren im Text. [VI u. 1113 S.] gr. 8. 1908. Geh. n. *M.* 32.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 35.—

„Einen hervorragenden Platz unter den neueren Veröffentlichungen über die Geschichte der Mathematik nimmt die zusammenfassende Darstellung ein, die uns Moritz Cantor geschenkt hat.

Mit rastlosem Fleiß, mit nie ermüdender Geduld, mit der unverdrossenen Liebe des Sammlers, der auch das scheinbar Geringe nicht vernachlässigt, hat Moritz Cantor dies kolossale Material gesammelt, kritisch gesichtet, durch eigene Forschungen ergänzt, nach einheitlichen Grundsätzen und einheitlichem Plan zu einem Ganzen verschmolzen, und indem er in seltener Unparteilichkeit bei strittigen Fragen, deren die Geschichte der Mathematik so viele hat, auch die abweichenden Ansichten zu Wort kommen ließ, hat er ein Werk geschaffen, das die reichste Quelle der Belehrung, der Anregung für einen jeden ist, der sich über einen geschichtlichen Fragepunkt Rat holen, der an der Geschichte der Mathematik mitarbeiten will. . . .“

(Aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen.)

**Mathematische Unterhaltungen und Spiele.** Von Dr. **W. Ahrens** in Magdeburg. [X u. 428 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. n. *M.* 10.—

**Scherz und Ernst in der Mathematik.** Geflügelte und ungeflügelte Worte. Von Dr. **W. Ahrens** in Magdeburg. [X u. 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 8.—

„Der Verfasser der „Mathematischen Unterhaltungen“ hat uns mit einem neuen, überaus fesselnden und originellen Werke überrascht, welches man als einen mathematischen „Buchmaus“ bezeichnen könnte, wenn es nicht neben aphoristischen Bemerkungen auch längere Briefe und Auseinandersetzungen brächte. Beginnt man zu lesen, so möchte man das Buch nicht aus der Hand legen, bis man zum Ende gelangt ist, und dann werden viele wieder von vorn beginnen. Jedem wird es Neues bringen, möge er noch so belesen sein . . . gerade das vorliegende Buch gibt einen tiefen Einblick in das Ringen der Geister, und manchem wird durch manche kurze, treffende Bemerkung ein Licht über ganze Gebiete der Wissenschaft aufgehen. . . Ein alphabetisches Sach- und Namenregister erleichtert die Orientierung.“

(Prof. Dr. Holzmüller.)

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN.

# Encyklopädie der Elementar-Mathematik.

Ein Handbuch für Lehrer und Studierende von

**Dr. Heinrich Weber** und **Dr. Joseph Wellstein,**

Professoren an der Universität Straßburg i. E.

In drei Bänden. gr. 8. In Leinw. geb.

**I. Elementare Algebra und Analysis.** Bearbeitet von H. Weber. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. n. M. 9.60.

**II. Elemente der Geometrie.** Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Textfiguren. [XII u. 596 S.] 1907. n. M. 12.—

**III. Angewandte Elementar-Mathematik.** Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und R. H. Weber (Rostock). Mit 358 Textfiguren. [XIII u. 666 S.] 1907. n. M. 14.—

Das Werk verfolgt das Ziel, den künftigen Lehrer auf einen wissenschaftlichen Standpunkt zu stellen, von dem aus er imstande ist, das, was er später zu lehren hat, tiefer zu erkennen und zu erfassen und damit den Wert dieser Lehren für die allgemeine Geistesbildung zu erhöhen. — Das Ziel dieser Arbeit ist nicht in der Vergrößerung des Umfanges der Elementar-Mathematik zu ersehen oder in der Einkleidung höherer Probleme in ein elementares Gewand, sondern in einer strengen Begründung und leicht faßlichen Darlegung der Elemente. Das Werk ist nicht sowohl für den Schüler selbst als für den Lehrer und Studierenden bestimmt, die neben jenen fundamentalen Betrachtungen auch eine für den praktischen Gebrauch nützliche, wohlgeordnete Zusammenstellung der wichtigsten Algorithmen und Probleme darin finden werden.

„... Zwei Momente müssen hervorgehoben werden, die dem Buche das Gepräge verleihen. Das eine liegt darin, daß die grundlegenden Fragen der Geometrie eine eingehende Behandlung erfahren, in einem Umfange, wie er in zusammenfassenden Werken sonst nicht anzutreffen ist. ... Das zweite Moment ist in dem Umstände zu erblicken, daß die Verfasser es nicht darauf angelegt haben, eine pragmatische Vorführung des üblichen Vorrats an geometrischen Sätzen, Konstruktionen und Rechnungen zu geben, sondern daß es ihnen mehr darum zu tun war, an ausgewähltem Material die wissenschaftlichen Methoden der Geometrie zur Geltung zu bringen und überall auf die Grundfragen einzugehen. Ist so die theoretische Seite, namentlich in einigen Abschnitten, stark zum Ausdruck gekommen, so ist doch auch auf die praktischen Bedürfnisse Rücksicht genommen, die freilich erst mit dem dritten Bande ihre endgültige Befriedigung finden sollen; doch ist dafür an verschiedenen Stellen, so in der Trigonometrie und in der analytischen Geometrie schon vorgearbeitet worden. ... So darf der Inhalt des zweiten Bandes der „Encyklopädie der Elementar-Mathematik“ als ein sehr reichhaltiger bezeichnet werden, der über die Grenzen dessen, was an der Schule geboten werden kann, erheblich hinausführt, der aber auch — und das ist noch wichtiger und offenkundig der Hauptzweck des Werkes — eine Vertiefung des geometrischen Wissens vermittelt. Jüngere Lehrer der Mathematik werden das Buch gewiß oft und mit Nutzen zu Rate ziehen, namentlich wenn sie im Unterrichte zu prinzipiell wichtigen Fragen kommen, um sich über die leitenden Gedanken zu orientieren.“

Eines verdient noch besonders hervorgehoben zu werden: das ist die reiche Ausstattung mit schönen, sehr instruktiv gezeichneten Figuren. Der schwierigen Vorstellung der verschiedenen Formen sphärischer Dreiecke kommen die stereographischen Bilder der Eulerschen, Möbius'schen und Study'schen Dreiecke sehr zu statuten.“  
(Zeitschrift für das Realstudium.)

„... Daß ein Hochschullehrer von der Bedeutung des Verfassers die Elementar-Mathematik von höherer Warte aus behandelte und mustergültig darstellte, ist selbstverständlich. Jeder Lehrer, jeder Studierende muß das Werk, welches nicht nur in methodischer, sondern auch in systematischer Hinsicht von Bedeutung und daher eine wichtige Erscheinung der elementaren mathematischen Literatur ist, besitzen und studieren.“  
(Zeitschrift für lateinlose höhere Schulen.)

„... Die Encyklopädie will kein Schulbuch im gewöhnlichen Sinne des Wortes sein, ist aber zur Vorbereitung auf den Unterricht, namentlich in den oberen Klassen, den Lehrern der Mathematik dringend zu empfehlen, welche die bezüglichen Originalarbeiten nicht alle selbst studiert haben, sich aber doch orientieren wollen, wie vom Standpunkte der modernen Wissenschaft die Begriffsbildungen, Methoden und Entwicklungen der Elementar-Mathematik zu gestalten sind.“  
(C. Färher im Archiv der Mathematik und Physik.)

nr inw.: BG - 6946



BG W 6946