Dr Adam Sojda
Wyższa Szkoła Zarządzania i Marketingu w Sosnowcu
Instytut Informatyki i Matematyki

Zastosowanie metody Monte Carlo w sieciach PERT

Wstęp

Do najpopularniejszych metod sieciowych stochastycznych należy metoda PERT (*Program Evaluation and Review Technique*). Zakłada się, że czasy trwania czynności można określić z pewnym prawdopodobieństwem, a struktura sieci jest zdeterminowana. Prawdopodobieństwo występowania różnych czasów trwania odpowiada rozkładowi beta, w szczególności rozkładowi normalnego. Dla każdej czynności określone są oszacowania czasów jej trwania:

- **czas optymistyczny** – a – realizacji czynności w okolicznościach najbardziej sprzyjających
- **czas najbardziej prawdopodobny** – m – realizacji w warunkach normalnych
- **czas pesymistyczny** – b – realizacji czynności w warunkach niesprzyjających.

Na podstawie znajomości tych czasów wyznacza się oczekiwany czas realizacji czynności:

$$t_e = \frac{a+4m+b}{6} \quad \text{bądź} \quad t_e = \frac{a+4m+2b}{7}$$

oraz wariancję czasu oczekiwanego:

$$\sigma^2_{i-j} = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

Na podstawie oczekiwanego czasu trwania czynności wyznacza się ścieżkę krytyczną i oczekiwany termin wykonania, jako sumę czasów oczekiwanych znajdujących się na ścieżce krytycznej. Wariancja terminu wykonania σ^2_{TW} jest sumą wariancji czynności krytycznych. Na podstawie znajomości wielkości t_{Tw} i σ^2_{TW} można wyznaczyć prawdopodobieństwo wykonania w czasie danego przedsięwzięcia. W tym celu korzysta się ze statystyki:

$$x = \frac{t - t_W}{\sigma_{TW}}$$

Przy założeniu pewnego czasu dyrektywnego zakończenia przedsięwzięcia t_d prawdopodobieństwo skończenia przed czasem dyrektywnym wyraża się wzorem:

$$P(t \leq t_d) = F\left(\frac{t_d - t_w}{\sigma_{TW}}\right),$$

gdzie $F(x)$ dystrybuanta rozkładu normalnego.

Wartości prawdopodobieństwa dotrzymania terminu planowanego powinny znajdować się w granicach od 0.25 do 0.6.

- Jeśli $F(x) \leq 0.25$, to istnieje znikoma szansa dotrzymania terminu dyrektywnego.
- Jeśli $F(x) \geq 0.6$, to istnieją niewykorzystane moce produkcyjne do wykonania przedsięwzięcia w terminie dyrektywnym.

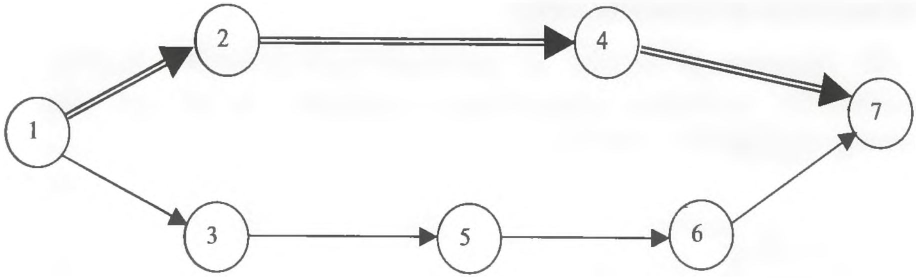
Studium przypadku

Załóżmy, że dana jest sieć czynności, czas wykonywania każdej z czynności ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną równą t_e oraz wariancją σ_{i-j}^2, czas trwania każdej z czynności jest niezależny (tabela 1.).

Tabela 1. Przykładowa sieć czynności. Opracowanie własne.

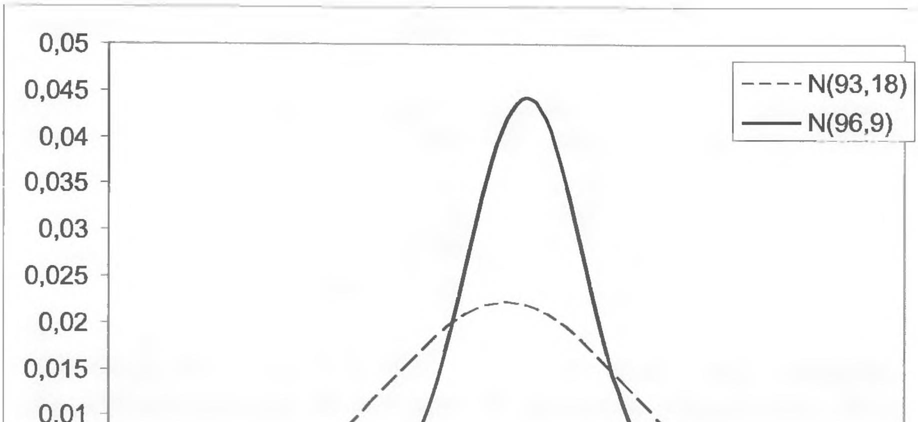
Czynność $i-j$	a	m	b	Czas oczekiwany t_e	Wariancja czasu oczekiwanego σ_{i-j}^2
1 – 2	25	34	49	**35**	16
1 – 3	15	21	69	*28*	81
2 – 4	20	35	62	**37**	49
3 – 5	5	17	59	*22*	81
5 – 6	10	13	64	*21*	81
4 – 7	10	25	34	**24**	16
5 – 7	5	17	59	*22*	81

Po narysowaniu wykresu sieciowego otrzymujemy, że istnieją tylko dwie ścieżki, wyznaczenie ścieżki krytycznej jest więc bardzo proste – wystarczy porównać te ścieżki.



Rys. 1. Sieć czynności wyznaczona na podstawie tabeli 1. Opracowanie własne.

Wyznaczając czasy oczekiwane zakończenia czynności otrzymujemy, że na ścieżce 1-2-4-7 wynosi on 96 (suma wartości oczekiwanych poszczególnych czasów). Wariancja równa jest sumie poszczególnych wariancji i wynosi 81. Natomiast na drugiej ścieżce oczekiwany czas wynosi 93 przy wariancji 324. Zgodnie z twierdzeniem o sumie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym otrzymujemy, że czas trwania wszystkich czynności na każdej ze ścieżek ma rozkład normalny dla ścieżki 1-2-4-7 możemy go określić jako $N(96,9)$ natomiast dla ścieżki 1-3-5-6-7 $N(93,18)$. Należy oczekiwać, że czas realizacji całego przedsięwzięcia będzie miał rozkład $N(96,9)$.



Rys. 2. Rozkład czasów trwania czynności dla ścieżek. Opracowanie własne.

Symulacja działania sieci

Do generowania czasów na poszczególnych ścieżkach wykorzystano następującą procedurę generowania rozkładu normalnego zmiennej losowej o rozkładzie : $N(m,\sigma)$

$$x = \sigma\left(\sum_{i=1}^{12} R_{ui} - 6\right) + m$$

R_{ui} – zmienna losowa o rozkładzie równomiernym z przedziału (0,1)
σ – odchylenie standardowe
m – wartość oczekiwana, średnia.

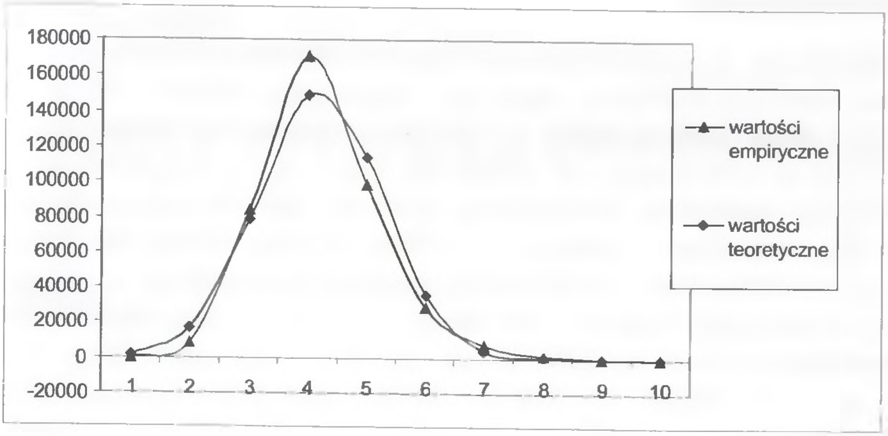
Wygenerowano 400 000 przypadków otrzymując następujące wyniki:

Tabela 2. Wyniki czasów realizacji przedsięwzięcia dla 400 000 symulacji. Opracowanie własne.

x_i		n_i
60,0	71,5	114
71,5	83,0	8 703
83,0	94,5	84 033
94,5	106,0	170 807
106,0	117,5	98 486
117,5	129,0	28 890
129,0	140,5	7 551
140,5	152,0	1 293
152,0	163,5	118
163,5	175,0	5
	Suma	400 000

Ścieżka 1-2-4-7 była wybierana 176 816 razy natomiast ścieżka 1-3-5-6-7 była ścieżką krytyczną 223 184 razy. Średni czas realizacji przedsięwzięcia wyniósł 102,6363, a odchylenie standardowe wyniosło 11,1334. Otrzymany rozkład czasu realizacji projektu nie ma rozkładu normalnego (hipoteza odrzucona przez test (χ^2).

Przedstawiony przykład pozwala na stwierdzenie, że nie tylko wartość oczekiwana czasu realizacji czynności w metodzie PERT jest ważna, ale znaczącą rolę odgrywa również i drugi parametr rozkładu normalnego, jakim jest odchylenie standardowe.



Rys. 3. Wykres porównujący teoretyczne liczebności dla rozkładu normalnego z otrzymanymi liczebnościami. Opracowanie własne.

Przeprowadzono dodatkowe symulacje mające stwierdzić, dla jakich wartości odchyleń standardowych ich wpływ na wyniki jest istotny. Na podstawie reguły trzech sigm można przewidzieć, że jeśli rozkłady nie będą na siebie zachodziły, czyli różnica pomiędzy wartościami oczekiwanymi czasów trwania czynności na ścieżkach będzie większa niż potrojona suma odchyleń standardowych, odchylenie standardowe nie będzie miało większego znaczenia. Przeprowadzono symulację czasów trwania na ścieżkach w tabelach podano ile razy ścieżka 1-3-5-6-7 okazała się krytyczną.

Tabela 3. Wyniki symulacji pokazujące ile razy ścieżka 1-3-5-6-7 jest ścieżką krytyczną na 10 000 symulacji przy różnych wartościach odchylenia standardowego σ.

σ		Ścieżka 1-3-5-6-7 z rozkładem czasu N(93,σ)										
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Ścieżka 1-2-4-7 z rozkładem czasu N(96,σ)	0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	15	29
	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	3	17	39
	0,3	0	0	0	0	0	0	1	0	9	19	30
	0,4	0	0	0	0	0	1	0	3	12	22	44
	0,5	0	0	0	0	0	0	4	5	15	31	67
	0,6	0	0	0	0	0	0	2	16	32	45	86
	0,7	0	0	0	0	5	6	16	21	49	87	111
	0,8	1	1	2	1	5	14	24	41	57	86	131
	0,9	2	4	6	17	9	25	36	54	93	119	155
	1,0	14	16	14	30	45	53	82	99	131	157	216
	1,1	27	36	38	47	57	73	108	142	185	227	238
	1,2	60	68	71	75	106	117	129	191	220	269	316
	1,3	107	108	115	130	137	175	217	238	268	379	336
	1,4	160	151	176	206	242	232	282	329	387	380	474

Podsumowanie

Wartość $3(\sigma_1 + \sigma_2)$ zgodnie z oczekiwaniami okazała się dla tego eksperymentu wartością krytyczną, zatem przy stosowaniu metody PERT w przypadkach, kiedy istnieją ścieżki o zbliżonym oczekiwanym czasie realizacji czynności na nich leżących do ścieżki krytycznej należy dodatkowo jeszcze uwzględnić odchylenie standardowe. Jeżeli nie jest zachowana odległość pomiędzy wartościami oczekiwanymi należy stosować metodę Monte Carlo w celu określenia czasu oczekiwanego realizacji przedsięwzięcia oraz oszacowania prawdopodobieństw ukończenia realizacji przedsięwzięcia w określonym czasie.

Literatura:

1) D. Kopańska-Dródka, *Wprowadzenie do badań operacyjnych*, Wydawnictwo AE w Katowicach, Katowice 1998.
2) K. Kukuła, Z. Jędrzejczyk, J. Skrzypek, A. Walkosz, *Badania Operacyjne w przykładach i zadaniach*, PWN, Warszawa 1999.
3) E. Nowak, *Elementy badań operacyjnych*, Wydawnictwo UMCS, Lublin 1997.
4) S. Ostasiewicz, Z. Rusnak, U. Siedlecka, *Statystyka elementy teorii i zadania*, Wydawnictwo AE we Wrocławiu, Wrocław 1997.
5) W. Radzikowski, *Badania operacyjne w zarządzaniu przedsiębiorstwem*, Wydawnictwo Toruńskiej Wyższej Szkoły Zarządzania, Toruń 1997.
6) M. Sobczyk, *Statystyka. Podstawy teoretyczne przykłady – zadania*, Wydawnictwo UMCS, Lublin 1998.
7) T. Trzaskalik (red.), *Badania operacyjne z komputerem*, Absolwent, Łódź 1997.
8) T. Trzaskalik, *Modelowanie optymalizacyjne*, Absolwent, Łódź 1998.
9) H. M. Wagner, *Badania operacyjne*, PWE, Warszawa 1980.
10) R. Zieliński, *Generatory liczb losowych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.