

Bogdan Gicala

MODELOWANIE NUMERYCZNE PRZEPŁYWÓW WIELOFAZOWYCH Z FAZĄ DYSERSYJNĄ

PODSTAWY TEORETYCZNE I ZASTOSOWANIE

MONOGRAFIA - NR 9

**SERIA: INNOWACYJNE TECHNIKI
I TECHNOLOGIE MECHANIZACYJNE**



Gliwice 2011

Bogdan GICALA

**MODELOWANIE NUMERYCZNE
PRZEPŁYWÓW WIELOFAZOWYCH
Z FAZĄ DYSERSYJNĄ**

**PODSTAWY TEORETYCZNE
I ZASTOSOWANIE**

Autorzy:

Bogdan Gicala – Instytut Techniki Górniczej KOMAG

Recenzent:

prof. zw. dr hab. inż. Dr H.C. Józef Wojnarowski – Politechnika Śląska

Komitety redakcyjny:

prof. dr hab. inż. Adam Klich

prof. dr hab. inż. Zdzisław Kłeczek

prof. dr inż. Włodzimierz Sikora

Sekretarz redakcji:

mgr inż. Romana Zajac

Copyright by

Instytut Techniki Górniczej KOMAG, Gliwice

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę.

ISBN 978-83-60708-48-4

Wydawca:

***Instytut Techniki Górniczej KOMAG
ul. Pszczyńska 37, 44-101 Gliwice***

Spis treści

	str.
SPIS WAŻNIEJSZYCH SYMBOLI	1
OPERATORY MATEMATYCZNE	4
1. WSTĘP	5
2. EULEROWSKI MODEL PRZEPŁYWU WIELOFAZOWEGO	6
2.1. Ogólne równania zachowania dla mieszaniny wielofazowej	6
2.1.1. Równanie bilansu masy	7
2.1.2. Równanie bilansu pędu	7
2.1.2.1. Równanie bilansu pędu dla przepływów typu płyn-płyn	9
2.1.2.2. Równanie bilansu pędu dla przepływów uziarnionych	10
2.1.3. Równanie bilansu energii	17
2.2. Model turbulencji dla przepływu wielofazowego	18
2.3. Modelowanie turbulentnej warstwy przyściennej	26
3. UPROSZCZONY EULEROWSKI MODEL PRZEPŁYWU WIELOFAZOWEGO	29
3.1. Równanie ciągłości w modelu „mixture”	29
3.2. Równanie zachowania pędu w modelu „mixture”	30
3.3. Równanie zachowania energii w modelu „mixture”	31
3.4. Równania dla udziału objętościowego faz rozproszonych	32
4. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA MODELOWANIA NUMERYCZNEGO	33
4.1. Dyspersja powietrza w komorze flotownika pneumomechanicznego-model MIXTURE	33
4.1.1. Model obliczeniowy	35
4.1.2. Warunki brzegowe i początkowe	38
4.1.3. Metody rozwiązania modelu dyskretnego	40
4.1.4. Wyniki obliczeń	40
4.1.5. Wnioski	42

4.2. Analiza procesu mieszania zawiesiny o niskim udziale objętościowym cząstek stałych - EULERIAN GRANULAR MODEL	43
4.2.1. Parametry geometryczne zbiornika i właściwości fizykochemiczne mieszanych mediów	43
4.2.2. Model obliczeniowy	44
4.2.3. Warunki brzegowe i początkowe	45
4.2.4. Metody rozwiązywania modelu dyskretnego	47
4.2.5. Wyniki obliczeń	47
4.2.6. Wnioski	54
4.3. Analiza procesu mieszania zawiesiny o wysokiej koncentracji cząstek stałych - EULERIAN GRANULAR MODEL	54
4.3.1. Parametry geometryczne zbiornika i właściwości fizykochemiczne mediów	55
4.3.2. Model obliczeniowy	59
4.3.3. Warunki brzegowe i początkowe	60
4.3.4. Metody rozwiązywania modelu dyskretnego	61
4.3.5. Wyniki obliczeń	61
4.3.6. Wnioski	67

5. ZAKOŃCZENIE	68
----------------------	----

LITERATURA	69
------------------	----

Spis ważniejszych symboli

$\bar{a}$	– przyspieszenie cząstki, m/s^2
c_p, c_v	– ciepło właściwe płynu przy stałym ciśnieniu, objętości, J/kgK
C_D	– współczynnik oporu hydrodynamicznego, (bezwymiarowy)
d	– względne odchylenie od wartości średniej, (bezwymiarowe)
d_p	– średnica cząstki, m
e_{ss}	– współczynnik odbicia, (bezwymiarowy)
E	– Energia całkowita, J
f	– funkcja oporu hydrodynamicznego, (bezwymiarowa)
$\bar{F}_q$	– zewnętrzne siły masowe działające na fazę q , N
$\bar{F}_{\text{lift},q}$	– siła nośna działająca na fazę q , N
$\bar{F}_{\text{vm},q}$	– siła związana z masą pozorną fazy q , N
$\bar{g}$	– przyspieszenie grawitacyjne, m/s^2
g_{0ss}	– funkcja rozkładu radialnego, (bezwymiarowa)
h	– entalpia właściwa fazy q , J/m^3
h_{pq}	– entalpia międzyfazowa, J/m^3
$\bar{\mathbf{j}}$	– tensor jednostkowy
I_2	– drugi niezmiennik tensora naprężeń, Pa
k	– energia kinetyczna turbulencji, m^2/s^2
k_{eff}	– efektywny współczynnik przewodzenia ciepła dla mieszaniny, W/mK
K_{pq}	– współczynnik międzyfazowej wymiany pędu, (bezwymiarowy)
l	– skala liniowa przepływu, m
L_t	– skala długości wirów turbulentnych, m
$\dot{m}_{pq}$	– natężenie przepływu masy pomiędzy fazą p i q , kg/s
$\dot{m}_{qp}$	– natężenie przepływu masy pomiędzy fazą q i p , kg/s
n	– liczba faz, (bezwymiarowa)
p	– ciśnienie, Pa
p_s	– „ciśnienie ziarniste”, Pa
Pr	– liczba Prandtla, (bezwymiarowa)
Pr_t	– turbulentna liczba Prandtla, (bezwymiarowa)

Re	– liczba Reynoldsa, (bezwymiarowa)
$\bar{R}_{pq}$	– siły oddziaływań międzyfazowych, N
St	– liczba Stokesa, (bezwymiarowa)
T_P	– temperatura w pierwszym węźle przyściennym P , K
T_w	– temperatura ścianki, K
U_P^*	– średnia prędkość bezwymiarowa w węźle P
U_P	– średnia prędkość w węźle P , m/s
U_C	– średnia prędkość płynu dla $y^* = y_T^*$, m/s
Q	– ciepło, J
$\bar{q}$	– gęstość strumienia ciepła, W/m ²
$\bar{V}_q$	– prędkość średnia fazy ciągłej wyrażona udziałem objętościowym, m/s
$\bar{V}_{dr}$	– prędkość unoszenia, m/s
v'_i, v'_j	– składowe fluktuacyjne wektora prędkości, m/s
$\bar{V}_{pq}$	– prędkość międzyfazowa (względna), m/s
V_s	– współczynnik zmienności dla stężenia objętościowego, (bezwymiarowy)
We	– liczba Webera, (bezwymiarowa)
y^*	– bezwymiarowa odległość od ścianki
y_P	– odległość od ścianki węzła P , m
k_P	– energia kinetyczna turbulencji w pierwszym węźle przyściennym P ,
y_T^*	– bezwymiarowa grubość termicznej warstwy przyściennej

Symbole greckie

α_q	– udział objętościowy fazy q
δ_{ij}	– delta Kornecera, (bezwymiarowa)
ε	– szybkość dyssypacji jednostkowej energii kinetycznej turbulencji, m ² /s ³
Θ	– „temperatura ziarnista”, m ² /s ²
λ_q	– współczynnik lepkości wolumetrycznej fazy q , kg/ms
μ	– dynamiczny współczynnik lepkości, kg/ms
μ_t	– współczynnik lepkości turbulentnej, kg/ms

- $\mu_{s,col}$ – składnik kolizyjny dynamicznego współczynnika lepkości dla fazy uziarnionej, kg/ms
- $\mu_{s,f}$ – składnik tarciový współczynnika lepkości dynamicznej dla fazy uziarnionej, kg/ms
- $\mu_{s,kin}$ – składnik kinetyczny współczynnika lepkości fazy uziarnionej, kg/ms
- ρ – gęstość, kg/m³
- σ – napięcie powierzchniowe, odchylenie standardowe, J/m²
- σ_t – turbulentna liczba Prandtla, (bezwymiarowa)
- τ – czas relaksacji, skala czasowa, s
- $\bar{\tau}_q$ – tensor naprężeń dla fazy q , Pa
- $\bar{\tau}_t$ – tensor naprężeń Reynoldsa, Pa
- τ_t – skala czasowa wirów turbulentnych, s
- Φ – kąt tarcia wewnętrznego, deg
- φ_{ls} – energia wymieniana przez l -tą fazę stałą lub ciekłą z s -tą fazą stałą, J
- Ω – całkowita objętość domeny obliczeniowej, m³
- ω_i – objętość i -tego elementu modelu, m³

Operatory matematyczne

$\vec{X}f = \vec{Y}$	$y_i = fx_i$	– iloczyn wektora i wielkości skalarnej
$\vec{X} \cdot \vec{Y} = x_i y_i$		– iloczyn skalarny
$\vec{X} \times \vec{Y} = \vec{Z}$		– iloczyn wektorowy
$\vec{X}\vec{Y} = \vec{\vec{A}}$	$a_{ij} = x_i y_j$	– iloczyn diadyczny wektorów
$\vec{\vec{A}} : \vec{\vec{B}} = a_{ij} b_{ji}$		– podwójny iloczyn skalarny
$\vec{\vec{A}} \cdot \vec{X} = \vec{Y}$	$y_i = a_{ik} x_k$	– iloczyn skalarny tensora przez wektor
$\vec{\vec{A}} \cdot \vec{\vec{B}} = \vec{\vec{C}}$	$c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$	– iloczyn skalarny tensorów
$\text{grad } f = \nabla f$		– gradient pola skalarnego
$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$		– dywergencja pola wektorowego
$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$		– rotacja pola wektorowego

1. Wstęp

Przepływ wielofazowy jest jednym z najbardziej rozpowszechnionych w przyrodzie. W niniejszej monografii termin ten odnosi się to przepływu płynu wielofazowego rozumianego, jako układ zawierający różne lub tę samą substancję w stanie gazowym, ciekłym lub stałym, stanowiące współistniejące ze sobą fazy. Fazę termodynamiczną definiuje się, jako jednolitą część układu fizycznego, oddzieloną od innych powierzchniami międzyfazowymi, zwanymi granicami faz, na których zachodzi skokowa zmiana własności fizycznych lub chemicznych. Dla potrzeb numerycznej mechaniki płynów (Computational Fluid Dynamics – CFD) należy jednak rozszerzyć pojęcie fazy o stwierdzenie, iż jest to także część materii charakteryzująca się pewną „odповідzią dynamiczną” na otaczające pole przepływu/pole potencjalne, co oznacza, że w analizie CFD odrębne „fazy” mogą stanowić cząstki tej samej substancji w tym samym stanie skupienia, ale np. o różnych rozmiarach lub kształcie.

W procesach przemysłowych przepływy wielofazowe mogą przyjmować różne formy. Ze względu na stan skupienia poszczególnych faz płynu wielofazowego rozróżniamy przepływy typu: gaz-ciecz, ciecz-ciecz, gaz-cząstki stałe, ciecz-cząstki stałe oraz gaz-ciecz-cząstki stałe. Przepływy te mogą mieć postać przepływów z makroskopową powierzchnią rozdziału faz (dwa lub więcej strumieni ciągłych różnych płynów rozdzielonych powierzchnią podziału) lub przepływu z fazą dyspersyjną (cząstki stałe, krople cieczy lub pęcherzyki gazu rozproszone w fazie ciągłej). Przykładem przepływów wielofazowych z fazą rozproszoną może być przepływ zawieszin, emulsji, napowietrzanie.

Ostatnie osiągnięcia numerycznej mechaniki płynów i postęp w dziedzinie systemów komputerowych umożliwiają coraz głębsze poznanie i zrozumienie natury przepływów wielofazowych. Efektywne modele obliczeniowe możliwe do zastosowania w praktyce inżynierskiej bazują na dwóch różnych podejściach: podejściu Eulera-Lagrange’a, które sprowadza się do śledzenia trajektorii pojedynczych cząstek (lub grup cząstek) poruszających się w polu prędkości fazy ciągłej oraz podejściu eulerowskim, w którym wszystkie fazy traktowane są, jako wzajemnie przenikające się kontinua. W niniejszej monografii zawarto jedynie krótki przegląd wybranych eulerowskich metod modelowania zaimplementowanych w pakiecie oprogramowania ANSYS FLUENT [19] oraz przykłady ich praktycznego zastosowania do symulacji procesów przemysłu wydobywczego. Bardziej wyczerpujące omówienie metod modelowania przepływów wielofazowych znajdzie czytelnik np. w pracach [6, 28]. Natomiast w pracy [72] zawarto krótki przegląd modeli fizycznych stosowanych w obliczeniach symulacyjnych przepływów wielofazowych.

2. Eulerowski model przepływu wielofazowego

Eulerowski model przepływu wielofazowego stosuje się do układów, w których poszczególne fazy mogą występować w dowolnym stanie skupienia: stałym, ciekłym lub gazowym. Model obowiązuje dla całego zakresu stężeń składników mieszaniny.

W układzie wielofazowym jedna z faz stanowi fazę ciągłą (nośną), natomiast pozostałe stanowią fazy dyspersyjne (rozproszone). W podejściu eulerowskim wszystkie fazy układu wielofazowego traktowane są jak płyny, z matematycznego punktu widzenia stanowiące wzajemnie przenikające się kontinua. Dla każdej z faz można sformułować oddzielny układ równań opisujących zasady zachowania masy, pędu i energii. Międzyfazowa wymiana pędu jest uwzględniona poprzez wprowadzenie dodatkowego członu wymiany w równaniu pędu. Jeżeli następuje jednocześnie międzyfazowa wymiana ciepła i masy również do równania zachowania energii i równania ciągłości są wprowadzane człony wymiany. Oddziaływania międzyfazowe są modelowane w różny sposób w zależności od rodzaju faz wchodzących w skład mieszaniny.

Stężenia objętościowe poszczególnych faz stanowiące funkcje ciągłe położenia i czasu określa się z warunku, że ich suma po wszystkich objętościach kontrolnych zawsze jest równa jedności.

Dla przepływów turbulentnych wprowadza się kolejne równania stosownie do przyjętego modelu turbulencji. Przepływ turbulentny układów wielofazowych jest w dalszym ciągu przedmiotem intensywnych badań.

2.1. Ogólne równania zachowania dla mieszaniny wielofazowej

Do opisu jednofazowego modelu przepływu turbulentnego, wystarcza siedem równań transportu wyrażających zasady zachowania masy, pędu i opcjonalnie energii oraz równania domykające wyrażające transport energii kinetycznej turbulencji k i szybkości dyssypacji energii kinetycznej turbulencji ϵ .

Wprowadzenie do eulerowskiego modelu przepływu wielofazowego podobnego układu równań dla każdej z n faz wiąże się jednocześnie z ich modyfikacją. Modyfikacja ta polega na wprowadzeniu do równań fazowych udziałów objętościowych $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ oraz członów opisujących międzyfazową wymianę masy, pędu i ciepła. Poniżej omówiono ogólne równania opisujące przepływ mieszaniny wielofazowej.

2.1.1. Równanie bilansu masy

Jeżeli mieszanina składa się z n faz równanie ciągłości dla fazy q przyjmuje postać [14, 47]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q) + \nabla(\alpha_q \rho_q \vec{v}_q) = \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) + S_q \quad (1)$$

gdzie:-

- α_q - udział objętościowy fazy q ,
- $\vec{v}_q$ - prędkość fazy q ,
- ρ_q - gęstość fazy q ,
- $\dot{m}_{pq}$ - natężenie przepływu masy pomiędzy fazą p i q , $p=1, 2, 3, \dots, n$,
- $\dot{m}_{qp}$ - natężenie przepływu masy pomiędzy fazą q i p ,
- S_q - dodatkowe źródło masy dla fazy q , zmienne lub stałe.

Objętość fazy q jest zdefiniowana następująco:

$$V_q = \int \alpha_q dV \quad (2)$$

przy czym

$$\sum_{q=1}^n \alpha_q = 1 \quad (3)$$

Wówczas można określić efektywną gęstość fazy q jako:

$$\hat{\rho}_q = \alpha_q \rho_q \quad (4)$$

2.1.2. Równanie bilansu pędu

Zasadę zachowania pędu dla fazy q można zapisać w postaci równania [14, 47]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q \vec{v}_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \vec{v}_q \vec{v}_q) = & -\alpha_q \nabla p + \nabla \cdot \vec{\bar{\tau}}_q + \alpha_q \rho_q \vec{g} + \\ & + \sum_{p=1}^n (\vec{R}_{pq} + \dot{m}_{pq} \vec{v}_{pq} - \dot{m}_{qp} \vec{v}_{qp}) + (\vec{F}_q + \vec{F}_{lft,q} + \vec{F}_{vm,q}), \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

- p – ciśnienie,
- $\vec{\bar{\tau}}_q$ – tensor naprężeń dla fazy q ,
- $\vec{g}$ – przyspieszenie grawitacyjne,
- $\vec{R}_{pq}$ – siły oddziaływań międzyfazowych,

- $\vec{v}_{pq}$ – prędkość międzyfazowa,
 $\vec{F}_q$ – zewnętrzne siły masowe działające na fazę q ,
 $\vec{F}_{lift,q}$ – siła nośna działająca na fazę q ,
 $\vec{F}_{vm,q}$ – siła związana z masą pozorną fazy q ,
 $\dot{m}_{pq}$ – strumień masy z fazy p do fazy q ,
 $\dot{m}_{qp}$ – strumień masy z fazy q do fazy p ,
 n – liczba wszystkich faz układu.

Część składową tensora naprężeń dla fazy q zależną od lepkości można wyrazić równaniem [14, 47]:

$$\vec{\tau}_q = \alpha_q \mu_q (\nabla \vec{v}_q + \nabla \vec{v}_q^T) + \alpha_q \left(\lambda_q - \frac{2}{3} \mu_q \right) \nabla \cdot \vec{v}_q \vec{I} \quad (6)$$

gdzie:

μ_q – oznacza dynamiczny współczynnik lepkości q , a λ_q – współczynnik lepkości wolumetrycznej fazy q . Dla płynów nieściśliwych dywergencja wektora prędkości wynosi 0 i wówczas człon zawierający lepkość wolumetryczną zanika. W równaniu (6) $\vec{I}$ oznacza tensor jednostkowy.

Prędkość międzyfazowa $\vec{v}_{pq}$ zdefiniowana jest w taki sposób, że jeżeli strumień masy z fazy p do fazy q $\dot{m}_{pq} > 0$ to $\vec{v}_{pq} = \vec{v}_p$, jeżeli następuje przepływ masy z fazy q do p tj. $\dot{m}_{pq} < 0$ to $\vec{v}_{pq} = \vec{v}_q$; podobnie, jeżeli strumień masy $\dot{m}_{qp} > 0$ to $\vec{v}_{qp} = \vec{v}_q$, a jeżeli $\dot{m}_{qp} < 0$ to $\vec{v}_{qp} = \vec{v}_p$.

Równanie pędu (5) jest domknięte poprzez wprowadzenie sił oddziaływania międzyfazowego $\vec{R}_{pq}$. Siła oddziaływania pomiędzy fazami p i q jest proporcjonalna do prędkości względnej faz [15, 45, 71]:

$$\sum_{p=1}^n \vec{R}_{pq} = \sum_{p=1}^n K_{pq} (\vec{v}_p - \vec{v}_q) \quad (7)$$

Ponadto $\vec{R}_{pq} = -\vec{R}_{qp}$ oraz $\vec{R}_{qq} = 0$.

Wyrażenia opisujące współczynnik oddziaływania międzyfazowego omówiono bardziej szczegółowo w dalszej części rozdziału.

Na cząstkę fazy dyspersyjnej poruszającą się w polu prędkości fazy ciągłej działa siła nośna $\vec{F}_{lift,q}$ prostopadła do kierunku prędkości względnej faz. Siłę nośną dla cząstki sferycznej można obliczyć z wyrażenia Drew i Lahey'a [14]:

$$\vec{F}_{lift,q} = -0.5 \alpha_p \rho_q (\vec{v}_q - \vec{v}_p) \times (\nabla \times \vec{v}_p) \quad (8)$$

Ponieważ siła nośna jest znacznie mniejsza od siły oporu hydrodynamicznego, w praktyce rzadko jest uwzględniana w obliczeniach.

Jeżeli cząstki fazy dyspersyjnej o znacznie mniejszej gęstości niż faza ciągła przyspieszają względem fazy ciągłej, to wówczas powstaje efekt masy pozornej. Faza ciągła na skutek bezwładności wywiera siłę na przyspieszające cząstki fazy dyspersyjnej. Siłę można obliczyć na podstawie wyrażenia [14]:

$$\vec{F}_{vmq} = 0.5\alpha_p\rho_q\left(\frac{D\vec{v}_q}{Dt} - \frac{D\vec{v}_p}{Dt}\right) \quad (9)$$

Operator D/Dt w wyrażeniu (9) oznacza pochodną substancjalną.

2.1.2.1. Równanie bilansu pędu dla przepływów typu płyn-płyn

Dla przepływów wielofazowych typu płyn-płyn przyjmuje się zwykle, że faza rozproszona ma postać pęcherzyków gazu lub kropeł cieczy.

Dla tego typu przepływów równanie bilansu pędu przyjmuje postać (5), przy czym współczynnik międzyfazowej wymiany pędu K_{pq} we wzorze (7) – wyraża się ogólnym równaniem:

$$K_{pq} = \frac{\alpha_q\alpha_p\rho_p f}{\tau_p} \quad (10)$$

W równaniu (10) α_q , α_n oznaczają udziały objętościowe odpowiednio dla fazy ciągłej i fazy dyspersyjnej w postaci pęcherzyków powietrza lub kropeł. ρ_n oznacza gęstość fazy ciągłej, a f funkcję oporu hydrodynamicznego. Występujący w mianowniku wyrażenia (10) czas relaksacji dla cząstki dyspersyjnej τ_p zależy od średnicy cząstki d_p jej gęstości ρ_p oraz dynamicznego współczynnika lepkości fazy ciągłej μ_l :

$$\tau_p = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu_q} \quad (11)$$

Schiller i Nauman w pracy [56] oraz Morsi i Aleksander w pracy [46] zaproponowali model oddziaływań międzyfazowych, w którym funkcja oporu hydrodynamicznego zależy od współczynnika oporu hydrodynamicznego C_D i względnej liczby Reynoldsa Re_r :

$$f = \frac{C_D Re_r}{24} \quad (12)$$

Względna liczba Reynoldsa dla faz nośnej i rozproszonej wynosi:

$$Re_r = \frac{\rho_q |\vec{v}_p - \vec{v}_q| d_p}{\mu_q} \quad (13)$$

a dla pary faz rozproszonych r i p :

$$Re_r = \frac{\rho_p |\vec{v}_r - \vec{v}_p| d_p}{\mu_p} \quad (14)$$

gdzie: wielkości z indeksem rp oznaczają ich średnie ważone udziałem objętościowym faz r i q .

W modelu Schillera-Naumana współczynnik oporu hydrodynamicznego oblicza się ze wzoru:

$$C_D = \begin{cases} \frac{24(1 + 0.15 Re_r^{0.687})}{Re_r} & Re_r \leq 1000 \\ 0.44 & Re_r > 1000 \end{cases} \quad (15)$$

W modelu Morsi-Aleksandra uszczegółowiono model Schillera-Naumana i określono wartość współczynnika oporu hydrodynamicznego dla ośmiu zakresów liczb Reynoldsa, dla których:

$$C_D = a_1 + \frac{a_2}{Re_r} + \frac{a_3}{Re_r^2} \quad (16)$$

Wartości współczynników a_1 , a_2 i a_3 wynoszą [56]:

$$a_1, a_2, a_3 = \begin{cases} 0 & 24 & 0 & , & 0 < Re_r < 0.1 \\ 3.690 & 22.73 & 0.0903 & , & 0.1 < Re_r < 1 \\ 1.222 & 29.1667 & -3.8889 & , & 1 < Re_r < 10 \\ 0.6767 & 46.50 & -116.67 & , & 10 < Re_r < 100 \\ 0.3644 & 98.33 & -2778 & , & 100 < Re_r < 1000 \\ 0.357 & 148.62 & -47500 & , & 1000 < Re_r < 5000 \\ 0.46 & -490.546 & 578700 & , & 5000 < Re_r < 10000 \\ 0.5191 & -1662.5 & 5416700 & , & Re_r > 10000 \end{cases} \quad (17)$$

Inne sformułowania funkcji oporu hydrodynamicznego zawarto w pracach [52, 27, 63, 34].

2.1.2.2. Równanie bilansu pędu dla przepływów uziarnionych

W przypadku, gdy fazę nośną stanowi ciecz lub gaz, a fazę rozproszoną ziarna ciała stałego o stałej lub zmiennej wielkości ziarna, ruch cząstek stałych w polu prędkości płynu odbywa się dzięki ich kinetycznemu oddziaływaniu z otaczającym płynem, a także poprzez zderzenia niesprężyste z innymi cząstkami stałymi. Eulerowski model przenikają-

cych się kontynuów wymaga uzupełnienia pozwalającego na uwzględnienie „dyskretnego” charakteru cząstek. W pracach [12, 20, 37, 42, 48, 60] do opisu ruchu cząstek fazy stałej wykorzystano teorię bazującą na kinetycznej teorii gazów gęstych Chapmana-Enskoga [8]. Analogicznie jak w kinetycznej teorii gazów cząstki fazy stałej poruszają się swobodnie w fazie ciągłej i mogą się zderzać z innymi cząstkami stałymi. Ponadto prędkość cząstki można wyrazić jako sumę jej prędkości średniej i fluktuacji prędkości wokół wartości średniej wynikającej z ruchu drgającego cząstki. Wielkość tych fluktuacji determinuje naprężenia, lepkość i ciśnienie rozproszonej fazy stałej. Miara energii kinetycznej ruchu drgającego cząstek jest odpowiednik temperatury termodynamicznej w kinetycznej teorii gazów, tzw. temperatura ziarnista Θ . Jako definicję temperatury ziarnistej Gidaspow w pracy [21] podaje:

$$\Theta = \frac{\bar{v}'^2}{3} \quad (18)$$

gdzie: $\bar{v}'$ oznacza fluktuację prędkości cząstki stałej.

W klasycznym modelu typu Euler-Euler pole ciśnień jest takie samo dla każdej z faz modelowanego układu. W przypadku występowania faz ziarnistych wszystkie fazy znajdują się w jednakowym polu ciśnienia płynu. Ponadto strumień cząstek każdej z faz rozproszonych wytwarza indywidualne pole ciśnienia określanego mianem ciśnienia ziarnistego p_s . Równanie pędu dla fazy ziarnistej przyjmuje wówczas postać np. [61, 60]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_s \rho_s \bar{v}_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \rho_s \bar{v}_s \bar{v}_s) = & -\alpha_s \nabla p - \nabla p_s + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}_s + \alpha_s \rho_s \bar{g} + \\ & + \sum_{l=1}^N (K_{ls} (v_l - v_s) + \dot{m}_{ls} \bar{v}_{ls} - \dot{m}_{sl} \bar{v}_{sl}) + (\bar{F}_q + \bar{F}_{lift,q} + \bar{F}_{vm,q}) \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie:

- α_s – udział objętościowy fazy ziarnistej,
- ρ_s – gęstość fazy ziarnistej,
- $\bar{v}_s$ – prędkość fazy ziarnistej,
- p – ciśnienie wywierane na wszystkie fazy układu,
- p_s – ciśnienie ziarniste,
- $\bar{\bar{\tau}}_s$ – tensor naprężeń dla fazy ziarnistej,
- $\bar{g}$ – przyspieszenie grawitacyjne,
- $K_{ls} = K_{sl}$ – współczynnik międzyfazowej wymiany pędu pomiędzy fazą płynną lub stałą l i fazą stałą s,

- $\vec{v}_{ls}$ – prędkość międzyfazowa,
 $\vec{F}_{lift,s}$ – siła nośna działająca na fazę q ,
 $\vec{F}_{vm,s}$ – siła związana z masą pozorną fazy q ,
 $\dot{m}_{ls}$ – strumień masy z fazy l do fazy s ,
 $\dot{m}_{ls}$ – strumień masy z fazy s do fazy l ,
 N – liczba wszystkich faz układu.

Ciśnienie cząstek stałych p_s w równaniu (19) wyraża siły normalne wynikające z oddziaływań pomiędzy cząstkami stałymi. Ciśnienie to jest funkcją temperatury ziarnistej, udziału objętościowego fazy rozproszonej, funkcji rozkładu radialnego oraz współczynnika uwzględniającego niesprężystość wzajemnych zderzeń cząstek stałych [42, 21]:

$$p_s = \alpha_s \rho_s \Theta + 2\rho_s (1 + e_{ss}) \alpha_s^2 g_{oss} \Theta, \quad (20)$$

gdzie:

- Θ – temperatura ziarnista,
 e_{ss} – współczynnik odbicia,
 g_{oss} – funkcja rozkładu radialnego.

Pierwszy składnik w równaniu (20) wyraża oddziaływanie cząstki z otaczającym płynem (składnik kinetyczny), a drugi składnik uwzględnia wzajemne zderzenia niesprężyste cząstek. Wartość współczynnika e_{ss} najczęściej przyjmuje się równą 0,9. Funkcja rozkładu radialnego w równaniu (20) jest miarą prawdopodobieństwa zderzenia cząstek. Dla przypadku jednej fazy ziarnistej w pracy [48] Unemura i Ogawa wykorzystali zależność określającą funkcję rozkładu radialnego w postaci wzoru empirycznego Bagnolda [4]:

$$g_{oss} = \left[1 - \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_{s,max}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{-1} \quad (21)$$

gdzie $\alpha_{s,max} = 0,63$ dla cząstek sferycznych.

Funkcja ta umożliwia modelowanie przejścia fazy rozproszonej od stanu „ściśliwego” ($\alpha_s < \alpha_{s,max}$), tzn. stanu, w którym odległości pomiędzy cząstkami mogą się zmniejszać, do stanu „nieściśliwego” ($\alpha_s = \alpha_{s,max}$), tzn. gdy cząstki fazy stałej osiągnęły stan maksymalnego upakowania.

Syamlal w pracy [60] podaje uproszczone, pomijające składnik kinetyczny, wyrażenie na ciśnienie ziarniste w postaci:

$$p_s = 2\rho_s (1 + e_{ss}) \alpha_s^2 g_{oss} \Theta \quad (22)$$

z funkcją rozkładu radialnego niezależną od $\alpha_{s\max}$:

$$g_{0ss} = \frac{1}{1 - \alpha_s} + \frac{3\alpha_s}{2(1 - \alpha_s)^2} \quad (23)$$

Przedstawione powyżej wyrażenia określające ciśnienie ziarniste i funkcję rozkładu radialnego nie mogą być stosowane w przypadku występowania więcej niż jednej fazy uziarnionej. Wyrażenia uogólnione na N faz można znaleźć w pracach [20, 21, 43, 26].

Tensor naprężeń $\vec{\tau}_s$ w równaniu (19) przyjmuje postać:

$$\vec{\tau}_s = \alpha_s \mu_s (\nabla \vec{v}_s + \nabla \vec{v}_s^T) + \alpha_s \left(\lambda_s - \frac{2}{3} \mu_s \right) \nabla \cdot \vec{v}_s \vec{I} \quad (24)$$

Lepkość strumienia cząstek stałych jest związana z ruchem translacyjnym cząstek (składnik kinetyczny), wzajemnym oddziaływaniem cząstek (składnik kolizyjny) i tarciami cząstek o siebie, gdy udział objętościowy cząstek stałych jest bliski udziałowi dla maksymalnego upakowania cząstek (składnik tarciový). Dynamiczny współczynnik lepkości strumienia cząstek μ_s wyraża się wzorem:

$$\mu_s = \mu_{s,kin} + \mu_{s,col} + \mu_{s,f} \quad (25)$$

Wyrażenie na składnik kinetyczny współczynnika lepkości $\mu_{s,kin}$ podaje Gidaspow w pracy [20]:

$$\mu_{s,kin} = \frac{10\rho_s d_s \sqrt{\Theta_s \pi}}{96\alpha_s (1 + e_{ss}) g_{0,ss}} \left[1 + \frac{4}{5} g_{0,ss} \alpha_s (1 + e_{ss}) \right]^2 \alpha_s \quad (26)$$

Inne wyrażenie można znaleźć w pracy Syamlal'a [60]:

$$\mu_{s,kin} = \frac{\alpha_s \rho_s d_s \sqrt{\Theta_s \pi}}{6(3 - e_{ss})} \left[1 + \frac{2}{5} (1 + e_{ss}) (3e_{ss} - 1) \alpha_s g_{0,ss} \right] \quad (27)$$

Wyrażenie na składnik kolizyjny $\mu_{s,col}$ przyjmuje postać [20, 60]:

$$\mu_{s,col} = \frac{4}{5} \alpha_s \rho_s d_s (1 + \alpha_s) \left(\frac{\Theta_s}{\pi} \right)^{1/2} \quad (28)$$

W przypadku, gdy stężenie objętościowe cząstek stałych zbliża się do stężenia maksymalnego (gęstość upakowania) cząstki stykają się ze sobą i wymiana pędu następuje głównie poprzez tarcie cząstek. Przepływ strumienia cząstek staje się nieściśliwy. Wówczas składnik tarciový odgrywa istotną rolę. Często stosowanym wyrażeniem na współczynnik lepkości tarciový $\mu_{s,f}$ jest formuła Schaeffer'a [55]:

$$\mu_{s,fr} = \frac{p_s \sin \phi}{2\sqrt{I_2}} \quad (29)$$

gdzie:

p_s – ciśnienie cząstek stałych,

ϕ – kąt tarcia wewnętrznego (kąt naturalnego zsyłu dla materiału ziarnistego),

I_2 – drugi niezmiennik tensora naprężeń $\bar{\bar{\tau}}_s$.

Inne wyrażenia podają Johnson i Jackson w pracy [30] lub Syamlal w pracy [60].

Ponieważ poniżej granicy maksymalnego upakowania fazę uziarnioną traktuje się jako ściśliwą wyrażenie opisujące tensor naprężeń fazy ziarnistej zawiera również lepkość wolumetryczną ze współczynnikiem lepkości wolumetrycznej λ_s . Lun w pracy [42] oblicza jego wartość na podstawie wyrażenia:

$$\lambda_s = \frac{4}{3} \alpha_s \rho_s d_s g_{0,ss} \left(1 + e_{ss}\right) \left(\frac{\Theta_s}{\pi}\right)^{1/2} \quad (30)$$

Lepkość strumienia cząstek zależy od ich udziału objętościowego, współczynnika uwzględniającego niesprężyste zderzenia cząstek funkcji rozkładu radialnego oraz od temperatury ziarnistej.

Jak wspomniano wcześniej temperatura ziarnista jest proporcjonalna do energii kinetycznej ruchu drgającego cząstek stałych. Temperaturę ziarnistą można obliczyć na podstawie równania algebraicznego Syamlala-O'Briana [60] lub równania transportu w postaci [12]:

$$\frac{3}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s \alpha_s \Theta_s) + \nabla \cdot (\rho_s \alpha_s \vec{v}_s \Theta_s) \right] = \left(-\rho_s \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}_s \right) : \nabla \vec{v}_s + \nabla \cdot (k_{\Theta s} \nabla \Theta_s) - \gamma_{\Theta s} + \varphi_{ls} \quad (31)$$

gdzie:

$\left(-\rho_s \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}_s \right) : \nabla \vec{v}_s$ – wyraża generację energii przez tensor naprężeń w fazie uziarnionej,

$\nabla \cdot (k_{\Theta s} \nabla \Theta_s)$ – dyfuzję energii ($k_{\Theta s}$ jest współczynnikiem dyfuzji),

$\gamma_{\Theta s}$ – rozpraszanie energii poprzez zderzenia cząstek,

φ_{ls} – wymianę energii l -tej fazy stałej lub ciekłej z s -tą fazą stałą.

Wyrażenia określające współczynnik dyfuzji podaje Syamlal w pracy [60] oraz Gigaspow w pracy [20].

Najczęściej stosowanym wyrażeniem opisującym rozpraszanie energii poprzez zderzenia pomiędzy cząstkami jest wyrażenie zaproponowane przez Lun'a w pracy [42]:

$$\gamma_{\Theta s} = \frac{12(1 - e_{ss}^2)g_{0,ss}}{d_s \sqrt{\pi}} \rho_s \alpha_s^2 \Theta_s^{3/2} \quad (32)$$

Kolejny składnik w równaniu bilansu pędu dla fazy ziarnistej (19) stanowi człon opisujący międzyfazową wymianę pędu. Współczynnik międzyfazowej wymiany pędu pomiędzy fazą płynną lub stałą l i fazą stałą s wyraża się wzorem:

$$K_{ls} = \frac{\alpha_s \rho_s f}{\tau_s} \quad (33)$$

gdzie: α_s , ρ_s oznaczają odpowiednio udział objętościowy i gęstość fazy dyspersyjnej, f funkcję oporu hydrodynamicznego, a τ_s czas relaksacji dla cząstek stałych. Dla cząstek o stałej średnicy d_s i gęstości ρ_s poruszających się w płynie o współczynniku lepkości dynamicznej μ_l czas relaksacji wynosi:

$$\tau_s = \frac{\rho_s d_s^2}{18 \mu_l} \quad (34)$$

W większości modele wymiany pędu pomiędzy fazą nośną a fazą dyspersyjną zostały sformułowane w oparciu o pomiary eksperymentalne prędkości krytycznych w złożach fluidalnych (prędkości, przy których cząstki fazy rozproszonej znajdują się w stanie „zawieszenia”). Syamlal i O'Brien w pracy [60] zaproponowali wyrażenie określające współczynnik międzyfazowej wymiany pędu w postaci:

$$K_{ls} = \frac{3\alpha_s \alpha_l \rho_l}{4v_{r,s}^2 d_s} C_D \left(\frac{Re_r}{v_{r,s}} \right) |\vec{v}_s - \vec{v}_l| \quad (35)$$

gdzie: Re_r jest względną liczbą Reynoldsa obliczaną ze wzoru:

$$Re_r = \frac{\rho_l d_s |\vec{v}_s - \vec{v}_l|}{\mu_l} \quad (36)$$

Prędkość krytyczna $v_{r,s}$ dla cząstek fazy stałej jest obliczana na podstawie wzoru empirycznego:

$$v_{r,s} = 0.5 \left(A - 0.06 Re_r + \sqrt{(0.06 Re_r)^2 + 0.12 Re_r (2B - A) + A^2} \right) \quad (37)$$

Wartości współczynników A i B zależą od udziału objętościowego fazy stałej i wynoszą:

$$\begin{aligned} A &= \alpha_i^{4,14} \\ B &= 0,8\alpha_i^{1,28} \end{aligned} \quad (38)$$

dla $\alpha_i \leq 0,85$ oraz

$$B = 0,8\alpha_i^{2,65} \quad (39)$$

dla $\alpha_i > 0,85$.

W modelu Syamlala-O'Briena zastosowano współczynnik oporu hydrodynamicznego C_D wg formuły Dalla Valle'a [11]:

$$C_D = \left(0,63 + \frac{4,8}{\sqrt{\text{Re}_r / \nu_{r,s}}} \right)^2 \quad (40)$$

Wen i Yu w pracy [67] dla rozcieńczonych układów gaz-cząstki fazy stałej ($\alpha_i > 0,8$) zaproponowali współczynnik międzyfazowej wymiany pędu w postaci:

$$K_{ls} = \frac{3}{4} C_D \frac{\alpha_s \rho_l |\vec{v}_s - \vec{v}_l|}{d_s} \alpha_i^{-1,65} \quad (41)$$

ze współczynnikiem oporu hydrodynamicznego:

$$C_D = \frac{24}{\alpha_i \text{Re}_r} \left[1 + 0,15(\alpha_i \text{Re}_r)^{0,687} \right] \quad (42)$$

Dla układów o dużym udziale objętościowym cząstek stałych $\alpha_i < 0,8$ Ergun w pracy [18] zaproponował współczynnik wymiany pędu w postaci:

$$K_{sl} = 150 \frac{\alpha_s (1 - \alpha_i) \mu_l}{\alpha_i d_s^2} + 1,75 \frac{\alpha_s \rho_l |\vec{v}_l - \vec{v}_s|}{d_s} \quad (43)$$

Gidaspow w pracy [20] połączył modele Wen-Yu i Erguna tworząc model bardziej uniwersalny. Model ten charakteryzował się nieciągłością w punkcie $\alpha_i = 0,8$. W kolejnych pracach (Gidaspow [21], Lu i inni [41] oraz Lu i Gidaspow [40]) udoskonalono połączone modele Wen-Yu i Erguna poprzez wprowadzenie funkcji zapewniającej ciągłe przejście pomiędzy wartością dla układu „gęstego” i „rozcieńczonego”.

Arastoopour w pracy [3] sformułował wyrażenie określające współczynnik wymiany pędu dla układów gaz-cząstki stałe obowiązujące dla całego zakresu udziału objętościowego fazy stałej w postaci:

$$K_{sl} = \left[\frac{17.3}{\text{Re}_r} + 0.336 \right] \frac{\rho_l}{d_s} |\vec{v}_s - \vec{v}_l| \alpha_s \alpha_l^{-2.8} \quad (44)$$

W przepływach typu płyn-cząstki stałe, cząstki stałe wymieniają pęd również pomiędzy sobą. Współczynnik międzyfazowej wymiany pędu pomiędzy cząstkami stałymi faz l i s Syamlal i inni w pracy [60] podają w postaci:

$$K_{ls} = \frac{3(1 + e_{ls}) \left(\frac{\pi}{2} + C_{fr,ls} \frac{\pi^2}{8} \right) \alpha_s \rho_s \alpha_l \rho_l (d_l + d_s)^2 g_{0,ls}}{2\pi(\rho_l d_l^3 + \rho_s d_s^3)} |\vec{v}_l - \vec{v}_s| \quad (45)$$

gdzie:

e_{ls} - współczynnik odbicia,

$C_{fr,ls}$ - współczynnik tarcia pomiędzy cząstkami faz stałych l i s ,

d_l - średnica cząstek fazy stałej l ,

$g_{0,ls}$ - funkcja rozkładu radialnego.

Przekazywanie energii kinetycznej drgań przez cząstkę fazy rozproszonej s do fazy ciekłej lub stałej l opisuje równanie [20]:

$$\varphi_{ls} = 3K_{ls}\Theta_s \quad (46)$$

gdzie: K_{ls} jest współczynnikiem oddziaływań międzyfazowych według równania (33).

2.1.3. Równanie bilansu energii

Zasada zachowania energii w przepływach wielofazowych wyraża się równaniami bilansu entalpii właściwej h_q dla każdej z faz mieszaniny wielofazowej. Bilans entalpii dla fazy q opisuje równanie [14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_q \rho_q h_q) + \nabla (\alpha_q \rho_q \vec{v}_q h_q) = -\alpha_q \frac{\partial p_q}{\partial t} + \vec{\tau}_q : \nabla \vec{v}_q - \nabla \vec{q}_q + S_q \\ + \sum_{p=1}^n (Q_{pq} + \dot{m}_{pq} h_{pq} - \dot{m}_{qp} h_{qp}) \end{aligned} \quad (47)$$

gdzie:

$\vec{\tau}_q : \nabla \vec{v}_q$ - człon uwzględniający pracę sił lepkości,

$\nabla \vec{q}_q$ - człon uwzględniający przewodzenie ciepła,

S_q - człon źródłowy uwzględniający dodatkowe źródła ciepła np. reakcje chemiczne,

$\sum_{k=1}^p Q_{pq} + m_{pq} h_{pq} - m_{qp} h_{qp}$ - człon opisujący międzyfazową wymianę ciepła,
przy czym $Q_{pq} = -Q_{qp}$ oraz $Q_{qq} = 0$.

2.2. Model turbulencji dla przepływu wielofazowego

Istnieje wiele koncepcji modelowania przepływów turbulentnych. Klasycznym najczęściej implementowanym w komercyjnych kodach numerycznych modelem turbulencji jest model Harlowa-Nakayamy znany jako model $k-\varepsilon$ [22]. Jest to model półempiryczny. Równania modelu zostały sformułowane na drodze rozważań fenomenologicznych i badań eksperymentalnych. Model ten opiera się na trzech podstawowych koncepcjach. Pierwszą z nich jest koncepcja Reynoldsa [17, 25] zgodnie z którą, każdą wielkość opisującą przepływ turbulentny można traktować jako sumę wielkości uśrednionej w czasie oraz składowej fluktuacyjnej będącej losową funkcją czasu i przestrzeni. Zastosowanie tej koncepcji do równania pędu Naviera-Stokesa przekształca je w tzw. uśrednione równanie Naviera-Stokesa zwane równaniem Reynoldsa, które zawiera dodatkowy człon - tensor naprężeń Reynoldsa $\bar{\bar{\tau}}_t$:

$$\bar{\bar{\tau}}_t = -\rho \overline{v'_i v'_j} \quad (48)$$

gdzie: v'_i, v'_j oznaczają składowe fluktuacyjne wektora prędkości.

Drugą fundamentalną koncepcję stanowi hipoteza Boussinesq'a, zakładająca, że tensor naprężeń Reynoldsa można wyrazić poprzez gradient prędkości średniej [17, 25]:

$$\bar{\bar{\tau}}_t = -\rho \overline{v'_i v'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\rho k + \mu_t \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right) \delta_{i,j} \quad (49)$$

gdzie:

v'_i, v'_j – składowe fluktuacyjne wektora prędkości,

ρ – gęstość,

k – energia kinetyczna turbulencji,

δ_{ij} – delta Kornecera,

μ_t – dynamiczny współczynnik lepkości turbulentnej,

V_i, V_j – składowe wektora prędkości średniej.

Ponadto hipoteza ta wprowadza dwa pojęcia: pojęcie lepkości turbulentnej (burzliwej), będącej odpowiednikiem lepkości molekularnej płynu oraz pojęcie energii kinetycznej turbulencji zdefiniowanej następująco:

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{v_1'^2} + \overline{v_2'^2} + \overline{v_3'^2} \right) \quad (50)$$

Trzecią hipotezę stanowi prawo dyssypacji energii Kołmogorowa wiążące makroskopową strukturę przepływu, wyrażaną przez skalę liniową przepływu l z dyssypacją energii charakteryzującą najdrobniejsze skale wirowe. Na bazie tej hipotezy w modelu k - ε oszacowano prędkość dyssypacji energii kinetycznej turbulencji ε [17]:

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{l} \quad (51)$$

Wprowadzenie dodatkowego członu w postaci tensora naprężeń Reynoldsa do równań Naviera-Stokesa sprawia, że układ przestaje być domknięty. W standardowym modelu k - ε domknięcie równań jest realizowane poprzez wprowadzenie dwóch dodatkowych równań różniczkowych transportu: dla energii kinetycznej turbulencji k i prędkości dyssypacji energii kinetycznej turbulencji ε . Dla przepływu jednofazowego równania te przyjmują postać [35]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho k + \nabla \cdot (\rho \vec{V} k) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + G_k + \rho \varepsilon \quad (52)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \varepsilon + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \varepsilon) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{1\varepsilon} G_k + C_{2\varepsilon} \rho \varepsilon) \quad (53)$$

W równaniach (52), (53) G_k jest członem produkcji energii kinetycznej turbulencji zależnym od gradientu prędkości średniej i lepkości turbulentnej [35]:

$$G_k = \mu_t \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \quad (54)$$

Wielkości $C_{1\varepsilon} = 1,44$ i $C_{2\varepsilon} = 1,92$ [35] są stałymi eksperymentalnymi. Wartości turbulentnej liczby Prandtla również zostały określone eksperymentalnie i wynoszą $\sigma_k = 1$ i $\sigma_\varepsilon = 1,3$ odpowiednio dla k i ε [35].

Do równań (52) i (53) można wprowadzić dodatkowe człony źródłowe uwzględniające np. wpływ siły wyporu czy ściśliwości płynu [22].

Wartość dynamicznego współczynnika lepkości turbulentnej jest zależna od energii kinetycznej turbulencji i współczynnika dyssypacji energii i wyraża się wzorem [35]:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (55)$$

Stała $C_\mu=0,09$ w równaniu (55) została wyznaczona eksperymentalnie [35].

Odkąd poznano słabe strony i ograniczenia standardowego modelu k - ε wprowadzono dwie znaczące modyfikacje w postaci tzw. modelu RNG k - ε [70, 49] oraz modelu „realizable” k - ε [57]. W modelu RNG zostały wprowadzone modyfikacje w równaniu dyssypacji w oparciu o teorię grupy renormalizacji. W modelu tym rozwiązywane jest dodatkowe równanie różniczkowe dla lepkości turbulentnej. Turbulentne liczby Prandtla nie są wartościami stałymi wyznaczonymi eksperymentalnie, lecz obliczonymi na podstawie wzorów analitycznych. Uwzględniono także wpływ wirowości w przepływie makroskopowym. W efekcie model RNG k - ε jest modelem bardziej uniwersalnym zapewniającym poprawność wyników obliczeń dla całego zakresu liczb Reynoldsa. W wyniku modyfikacji równanie to lepiej opisuje przepływy w obszarach dużych odkształceń.

Jedną z wad standardowego modelu k - ε jest generowanie, powyżej pewnej wartości odkształceń, ujemnych wartości składowych normalnych tensora naprężeń Reynoldsa, które z definicji powinny przyjmować wartości dodatnie. Niedogodność tę wyeliminowano w modelu „realizable” k - ε poprzez wprowadzenie wartości współczynnika C_μ jako wartości zmiennej, zależnej od lokalnych odkształceń i rotacji elementu płynu. Ponadto w równaniu dyssypacji w inny sposób zostały sformułowane człony generacyjne i destrukcyjne [57].

Dla turbulentnych przepływów wielofazowych równania transportu dla k i ε powinny być sformułowane w odniesieniu do każdej z faz tworzących mieszaninę. Liczba modelowanych zmiennych w tym przypadku znacząco wzrasta, co sprawia, że tego rodzaju symulacje są kosztowne numerycznie. Dlatego w zależności od charakteru przepływu, jak i właściwości mieszaniny w modelowaniu turbulencji układu wielofazowego, w ramach modelu k - ε można się posłużyć trzema metodami o różnym stopniu uproszczenia:

- Dla przepływów uwarstwionych (ze stratyfikacją) lub, gdy gęstość fazy rozproszonej jest porównywalna z gęstością fazy ciągłej można sformułować pojedyncze równania transportu dla k i ε dla mieszaniny faz.

- Dla mieszanin wielofazowych o niewielkim stężeniu objętościowym faz rozproszonych, gdzie na przypadkowy ruch cząstek rozproszonych decydujący wpływ mają turbulencje fazy ciągłej, formułuje się równania transportu tylko dla fazy ciągłej uwzględniające jednak międzyfazową turbulentną wymianę pędu. Parametry charakteryzujące turbulencję faz rozproszonych określa się na bazie teorii rozpraszania cząstek dyskretnych przez turbulencję homogeniczną, sformułowanej przez Tchena [62] i opisaną w [25]. Wielkości te wyrowadzono na bazie parametrów dla przepływu uśrednionego dla fazy ciągłej oraz stosunku czasu relaksacji cząstek fazy rozproszonej do czasu charakterystycznego oddziaływania wir-cząstka [16].
- Dla przepływów wielofazowych w których wymiana turbulentna odgrywa decydującą rolę stosuje się model rozwiązujący układ równań transportu dla każdej z faz układu. Jest to metoda najbardziej kosztowna numerycznie.

Poniżej przedstawiono sposób sformułowania równań transportu dla k i ε dla każdej z wyżej wymienionych metod.

Pojedyncze równania transportu k - ε dla mieszaniny faz

W tym przypadku zakłada się, że do opisu przepływu turbulentnego wystarcza wprowadzić do równań transportu gęstości i prędkość jako wartości średnie ważone udziałem objętościowym faz stanowiących składniki mieszaniny. Wówczas równania te przyjmują postać [31, 44, 69]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_m k + \nabla \cdot (\rho_m \bar{V}_m k) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_{t,m}}{\sigma_k} \nabla k \right) + G_{k,m} + \rho_m \varepsilon \quad (56)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_m \varepsilon + \nabla \cdot (\rho_m \bar{V}_m \varepsilon) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_{t,m}}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{1\varepsilon} G_{k,m} + C_{2\varepsilon} \rho_m \varepsilon) \quad (57)$$

gdzie:

$$\bar{V}_m = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \bar{V}_k}{\rho_m} \quad (58)$$

$$\rho_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \quad (59)$$

$$\mu_{t,m} = \rho_m C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (60)$$

Człon produkcji $G_{k,m}$ dla energii kinetycznej turbulencji jest sformułowany następująco [31, 44, 69]:

$$G_{k,m} = \mu_{t,m} \left[\nabla \vec{V}_m + \left(\nabla \vec{V}_m \right)^T \right] : \nabla \vec{V}_m \quad (61)$$

Stałe w równaniach (56, 57, 60) mają ten sam wymiar jak w równaniach (52, 53, 55).

Równania transportu k - ε dla „rozcieńczonych” układów wielofazowych z fazami dyspersyjnymi

W tym przypadku turbulencje w fazie ciągłej opisuje się przy zastosowaniu modelu k - ε w którym równania transportu dla k i ε zmodyfikowano poprzez wprowadzenie dodatkowych członów uwzględniających międzyfazową turbulentną wymianę pędu.

Tensor naprężeń Reynoldsa dla fazy ciągłej przyjmuje postać [39]:

$$\bar{\tau}_q = \frac{2}{3} \left(\rho_q k_q + \mu_{t,q} \nabla \cdot \vec{V}_q \right) \bar{I} + \mu_{t,q} \left[\nabla \vec{V}_q + \left(\nabla \vec{V}_q \right)^T \right] \quad (62)$$

gdzie: $\bar{I}$ jest tensorem jednostkowym, $\vec{V}_q$ prędkością średnią fazy ciągłej ważoną udziałem objętościowym, $\mu_{t,q}$ dynamicznym współczynnikiem lepkości turbulentnej, ρ_q gęstością, a k_q , energią kinetyczną turbulencji dla fazy ciągłej. Dynamiczny współczynnik lepkości turbulentnej wyraża się wzorem [39]:

$$\mu_{t,q} = \rho_q C_\mu \frac{k_q^2}{\varepsilon_q} \quad (63)$$

Skalę czasową wirów turbulentnych $\tau_{t,q}$ określa wzór [39]:

$$\tau_{t,q} = \frac{3}{2} C_\mu \frac{k_q}{\varepsilon_q} \quad (64)$$

a skalę długości $L_{t,q}$ [39]:

$$L_{t,q} = \sqrt{\frac{3}{2}} C_\mu \frac{k_q^{3/2}}{\varepsilon_q} \quad (65)$$

Równania transportu dla k i ε można zapisać w postaci [39]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_q \rho_q k_q + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \vec{V}_q k_q) = \nabla \cdot \left(\alpha_q \frac{\mu_{t,q}}{\sigma_k} \nabla k_q \right) + \alpha_q G_{k,q} + \\ + \alpha_q \rho_q \varepsilon_q + \alpha_q \rho_q \Pi_{k,q} , \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_q \rho_q \varepsilon_q + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \bar{V}_q \varepsilon_q) = \nabla \cdot \left(\alpha_q \frac{\mu_{t,q}}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon_q \right) + \\ + \alpha_q \frac{\varepsilon_q}{k_q} (C_{1\varepsilon} G_{k,q} - C_{2\varepsilon} \rho_q \varepsilon_q) + \alpha_q \rho_q \Pi_{\varepsilon,q}. \end{aligned} \quad (67)$$

Występujące w równaniach wyrażenia $\Pi_{k,q}$ i $\Pi_{\varepsilon,q}$ opisują oddziaływanie fazy dyspersyjnej na fazę ciągłą. Człon produkcji energii kinetycznej turbulencji $G_{k,q}$ i pozostałe wielkości są zdefiniowane w ten sam sposób jak dla przepływów jednofazowych.

W pracy [16] Elgobashi i inni, człony oddziaływania pomiędzy fazą ciągłą a fazami dyspersyjnymi w równaniu transportu dla k (66) i ε (67) sformułowali odpowiednio według równań:

$$\Pi_{k,q} = \sum_{p=1}^M \frac{K_{pq}}{\alpha_q \rho_q} (k_{pq} - 2k_q + \bar{v}_{pq} \cdot \bar{v}_{dr}) \quad (68)$$

$$\Pi_{\varepsilon,q} = C_{3\varepsilon} \frac{\varepsilon_q}{k_q} \Pi_{k,q} \quad (69)$$

gdzie:

- K_{pq} – współczynnik turbulentnej wymiany pędu,
- k_{pq} – kowariancja prędkości fazy ciągłej q i fazy dyspersyjnej p ,
- k_q – energią kinetyczną turbulencji fazy ciągłej,
- $\bar{v}_{pq}$ – prędkość względna,
- $\bar{v}_{dr}$ – prędkość unoszenia,
- $C_{3\varepsilon}$ – stała eksperymentalna.

W równaniu (68) sumowanie odbywa się po wszystkich M fazach dyspersyjnych. Stała eksperymentalna $C_{3\varepsilon}$ w równaniu (69) wynosi 1,2 [16]. Równania (62) do (69) opisują turbulencje w fazie ciągłej. Parametry charakteryzujące turbulencje w fazie rozproszonej tj. energię kinetyczną turbulencji k_q , kowariancję prędkości k_{pq} turbulentne współczynniki dyfuzji D_p i D_q Simonin w pracy [58] wyraził poprzez charakterystyczne skale czasowe dla cząstki i skalę długości wirów turbulentnych w fazie ciągłej. Czas relaksacji dla cząstki związany z jej bezwładnością wynosi [58]:

$$\tau_{F,pq} = \alpha_p \rho_q K_{pq}^{-1} \left(\frac{\rho_p}{\rho_q} + C_V \right) \quad (70)$$

gdzie: stała $C_V=0,5$ [1]. Całkowa skala czasowa Lagrange'a dla cząstki, której trajektoria przecina trajektorię elementu fazy ciągłej wynosi [10]:

$$\tau_{t,pq} = \frac{\tau_{pq}}{\sqrt{(1 + C_\beta \xi^2)}} \quad (71)$$

gdzie:

$$\xi = \frac{|\vec{v}_{pq}| \tau_{t,q}}{L_{t,q}} \quad (72)$$

$$C_\beta = 1,8 - 1,35 \cos^2 \theta \quad (73)$$

θ jest kątem pomiędzy prędkością cząstki i prędkością względną.

Energię kinetyczną turbulencji dla fazy dyspersyjnej można wyrazić poprzez stosunek skali czasowej $\tau_{t,pq}$ i czasu relaksacji $\tau_{F,pq}$:

$$\eta_{pq} = \frac{\tau_{t,pq}}{\tau_{F,pq}} \quad (74)$$

Wówczas wielkości charakteryzujące równanie turbulencji w fazie rozproszonej można obliczyć ze wzorów (75) do (79):

$$k_p = k_q \left(\frac{b^2 + \eta_{pq}}{1 + \eta_{pq}} \right) \quad (75)$$

$$b = (1 + C_V) \left(\frac{\rho_p}{\rho_q} + C_V \right)^{-1} \quad (76)$$

$$k_{pq} = 2k_q \left(\frac{b + \eta_{pq}}{1 + \eta_{pq}} \right) \quad (77)$$

$$D_p = D_{t,pq} + \left(\frac{2}{3} k_p - b \frac{1}{3} k_{pq} \right) \tau_{F,pq} \quad (78)$$

$$D_{t,pq} = \frac{1}{3} k_{pq} \tau_{t,pq} \quad (79)$$

W równaniu pędu (5) człon międzyfazowej wymiany pędu po uwzględnieniu turbulencji przyjmuje postać [39]:

$$K_{pq}(\vec{v}_p - \vec{v}_q) = K_{pq}(\vec{V}_p - \vec{V}_q) - K_{pq} \vec{v}_{dr} \quad (80)$$

gdzie:

$$\vec{V}_{dr} = - \left(\frac{D_p}{\sigma_{pq} \alpha_p} \nabla \alpha_p - \frac{D_q}{\sigma_{pq} \alpha_q} \nabla \alpha_q \right) \quad (81)$$

jest prędkością unoszenia wynikającą z fluktuacji udziału objętościowego faz p i q . σ_{pq} w równaniu (81) jest turbulentną liczbą Prandtla dla fazy dyspersyjnej.

Równania transportu w modelu k - ε dla każdej z faz układu wielofazowego

Najbardziej ogólny model turbulencji dla układu wielofazowego formułuje równania transportu dla k i ε dla każdej z faz układu w postaci [39]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_q \rho_q k_q + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \vec{V}_q k_q) = & \nabla \cdot \left[\alpha_q \left(\mu_q + \frac{\mu_{t,q}}{\sigma_k} \right) \nabla k_q \right] + \alpha_q G_{k,q} + \\ & + \alpha_q \rho_q \varepsilon_q + \sum_{p=1}^M K_{p,q} (C_{p,q} k_p - C_{q,p} k_q) - \sum_{p=1}^M K_{p,q} (\vec{V}_p - \vec{V}_q) \cdot \frac{\mu_{t,p}}{\alpha_p \sigma_p} \nabla \alpha_p + \\ & + \sum_{p=1}^M K_{p,q} (\vec{V}_p - \vec{V}_q) \cdot \frac{\mu_{t,q}}{\alpha_q \sigma_q} \nabla \alpha_q, \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_q \rho_q \varepsilon_q + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \vec{V}_q \varepsilon_q) = & \nabla \cdot \left(\alpha_q \frac{\mu_{t,q}}{\sigma_k} \nabla k_q \right) + \frac{\varepsilon_q}{k_q} [C_{1\varepsilon} \alpha_q G_{k,q} + \\ & + C_{2\varepsilon} \alpha_q \rho_q \varepsilon_q + C_{3\varepsilon} \left(\sum_{p=1}^M K_{pq} (C_{p,q} k_p - C_{qp} k_q) - \right. \\ & \left. - \sum_{p=1}^M K_{pq} (\vec{V}_p - \vec{V}_q) \cdot \frac{\mu_{t,p}}{\alpha_p \sigma_p} \nabla \alpha_p + \sum_{p=1}^M K_{pq} (\vec{V}_p - \vec{V}_q) \cdot \frac{\mu_{t,q}}{\alpha_q \sigma_q} \nabla \alpha_q \right) \Big]. \end{aligned} \quad (83)$$

Postać tensora naprężeń Reynoldsa i wzoru na dynamiczny współczynnik lepkości turbulentnej wyrażają się cytowanymi wcześniej równaniami (62) i (63).

Stała $C_{pq}=2$, a C_{qp} jest zależna od wspomnianego wcześniej stosunku czasów relaksacji $\eta_{p,q}$ [39]:

$$C_{qp} = 2 \frac{\eta_{p,q}}{1 + \eta_{p,q}} \quad (84)$$

Człon turbulentnej międzyfazowej wymiany pędu w równaniu (9) przyjmuje postać:

$$\sum_{p=1}^M K_{pq} (\bar{v}_p - \bar{v}_q) = \sum_{p=1}^M K_{pq} (\bar{v}_p - \bar{v}_q) - \sum_{p=1}^M K_{pq} \bar{v}_{dr} \quad (85)$$

gdzie: sumowanie odbywa się po wszystkich M fazach dyspersyjnych.

2.3. Modelowanie turbulentnej warstwy przyściennej

Obszar przyścienny może być podzielony na trzy podwarstwy: podwarstwę laminarną, w której decydującą rolę w przekazywaniu pędu, ciepła i masy odgrywa lepkość płynu, rdzeń turbulentny, gdzie dominującą rolę odgrywają turbulencje oraz warstwę przejściową łączącą obie wymienione wcześniej warstwy, w której obydwa czynniki wywierają porównywalny wpływ.

Możliwe są dwa podejścia do modelowania przepływu w warstwie przyściennej. Pierwsze z nich opiera się na pół-empirycznych równaniach zwanych „funkcjami przyściennymi”, które łączą podwarstwę laminarną i rdzeń turbulentny. Drugie podejście polega na takiej modyfikacji modelu turbulencji, aby umożliwiał modelowanie przepływu turbulentnego w dowolnej odległości od ścianki tj. łącznie z podwarstwą laminarną. Pierwsze podejście jest stosowane najczęściej ze względu na niewielki koszt numeryczny i zadowalającą dokładność wyników. Dlatego też w niniejszym opracowaniu przedstawiono szerzej, zaliczany do tej grupy, model warstwy przyściennej oparty na pracy Laundera i Spaldinga [36].

W modelu tym zakłada się logarytmiczny rozkład średniej prędkości bezwymiarowej U^* w postaci:

$$U^* = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^*) \quad (86)$$

gdzie:

$$U^* \equiv \frac{\rho U_P C_\mu^{\frac{1}{4}} k_P^{\frac{1}{2}}}{\tau_w} \quad (87)$$

oraz bezwymiarowa odległość od ścianki:

$$y^* \equiv \frac{\rho C_\mu^{\frac{1}{4}} k_P^{\frac{1}{2}} y_P}{\mu} \quad (88)$$

W równaniach (86) do (88):

- $\kappa=0,4187$ - stała von Kármána,
- $E=9,793$ - stała doświadczalna,
- U_P - średnia prędkość płynu w węźle przyściennym P ,
- k_P - energia kinetyczna turbulencji w węźle przyściennym P ,

- y_P - odległość węzła P od ścianki,
 μ - współczynnik lepkości dynamicznej płynu.

Rozkład temperatury bezwymiarowej w warstwie przyścienniej określa się na podstawie zależności liniowej w warstwie laminarnej oraz zależności logarytmicznej w obszarze turbulentnej wymiany ciepła. Ponadto w pracy [66] uwzględniono wydzielanie ciepła na skutek tarcia wewnętrznego w płynie. Ostatecznie rozkład temperatury bezwymiarowej w warstwie przyścienniej przyjmuje postać:

$$T^* = \begin{cases} \Pr y^* + \frac{1}{2} \rho \Pr \frac{C_\mu^{\frac{1}{4}} k_P^{\frac{1}{2}}}{\dot{q}} U_P^2 & (y^* < y_T^*) \\ \Pr_t \left[\frac{1}{\kappa} \ln(E y^*) + P \right] + \frac{1}{2} \rho \frac{C_\mu^{\frac{1}{4}} k_P^{\frac{1}{2}}}{\dot{q}} + \\ + [\Pr_t U_P^2 + (\Pr - \Pr_t) U_C^2] & (y^* > y_T^*) \end{cases} \quad (89)$$

gdzie:

$$T^* \equiv \frac{(T_w - T_P) \rho c_P k_P^{\frac{1}{2}}}{\dot{q}} \quad (90)$$

oraz:

k_P - energia kinetyczna turbulencji w pierwszym węźle przyściennym P ,

ρ - gęstość płynu

c_P - ciepło właściwe płynu,

$\dot{q}$ - gęstość strumienia ciepła przez ściankę,

T_P - temperatura w pierwszym węźle przyściennym P ,

T_w - temperatura ścianki,

Pr - liczba Prandtla,

Pr_t - turbulentna liczba Prandtla,

U_C - średnia prędkość płynu dla $y^* = y_T^*$

y_T^* - bezwymiarowa grubość termicznej warstwy przyścienniej.

P w równaniu (89) oblicza się ze wzoru Jayatilleke [29]:

$$P = 9,24 \left[\left(\frac{\Pr}{\Pr_t} \right)^{\frac{3}{4}} - 1 \right] (1 + 0,28 e^{-0,007 \Pr / \Pr_t}) \quad (91)$$

W modelu $k-\varepsilon$ energia kinetyczna turbulencji jest obliczana w całym modelowanym obszarze włączając strefy przyścienne. Warunek brzegowy dla k na ścianie wynosi:

$$\frac{\partial k}{\partial \vec{n}} = 0 \quad (92)$$

gdzie: n oznacza współrzędną lokalną normalną do powierzchni ścianki.

Produkcja energii kinetycznej turbulencji stanowiąca człon źródłowy w równaniu transportu dla k jest obliczana ze wzoru:

$$G_k \approx \tau_w \frac{\partial U}{\partial y} = \tau_w \frac{\tau_w}{\kappa \rho k_P^{1/2} y_P} \quad (93)$$

W strefie przyściennej równanie transportu dla ε nie jest rozwiązywane. Współczynnik dyssypacji energii kinetycznej jest obliczany ze wzoru:

$$\varepsilon_P = \frac{C_\mu^{3/4} k_P^{3/2}}{\kappa y_P} \quad (94)$$

Standardowa funkcja przyścienna omówiona powyżej daje prawidłowe rozwiązania dla większości przypadków turbulentnych przepływów przyściennych dla których prawdziwe jest założenie o stałych naprężeniach ścinających i równowadze lokalnej. Dla warstwy przyściennej w obszarze której występują duże gradienty ciśnienia, warunki przepływu odbiegają od stanu równowagi. W tych przypadkach standardowa funkcja przyścienna nie daje prawidłowych wyników obliczeń. W pracy [32] Kim i Choudhury zmodyfikowali standardową funkcję przyścienną Laudera-Spaldinga poprzez uwzględnienie wpływu gradientu ciśnienia na logarytmiczną funkcję rozkładu prędkości średniej oraz zastosowanie koncepcji dwóch warstw w obliczeniach produkcji energii kinetycznej turbulencji w strefie przyściennej. Wymienione modyfikacje poszerzają zakres stosowalności standardowej funkcji przyściennej.

3. Uproszczony eulerowski model przepływu wielofazowego

Zasadniczą korzyścią modelu eulerowskiego jest uniwersalność, co daje możliwość zastosowania do symulacji przepływu dowolnego układu wielofazowego, niezależnie od liczby i rodzaju faz. Niedogodnością modelu jest złożoność układu równań przepływu i zależności domykających. W niektórych jednak przypadkach możliwe jest zastosowanie pewnych uproszczeń pełnego modelu eulerowskiego. Uproszczenie polega na tym, że pełny układ równań Naviera-Stokesa jest rozwiązywany tylko dla fazy ciągłej (nośnej). Dla fazy dyspersyjnej zamiast pełnego układu równań Naviera-Stokesa rozwiązuje się równanie dla prędkości względnej (poślizgu) oraz równanie ciągłości. Prędkość poślizgu jest sformułowana algebraicznie w oparciu o właściwości fazy dyspersyjnej i lokalne warunki przepływu. W literaturze anglojęzycznej model ten jest znany pod nazwą „algebraic slip model” (algebraiczny model poślizgu) lub „mixture”. Model ten może być zastosowany do homogenicznych mieszanin jednej lub wielu faz dyspersyjnych typu płyn-płyn lub gaz-płyn oraz płyn-cząstki stałe, przy założeniu, że udział objętościowy cząstek stałych jest niski, a ich gęstość jest dużo niższa niż gęstość fazy nośnej. Uproszczenie to pozwala znacząco zredukować koszt numeryczny rozwiązania. Poniżej przedstawiono sposób sformułowania równań zachowania i równań domykających model „mixture” przedstawiony przez Manninen i innych w pracy [44].

3.1. Równanie ciągłości w modelu „mixture”

Równanie ciągłości dla mieszaniny faz można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_m + \nabla \cdot (\rho_m \bar{\mathbf{v}}_m) = 0 \quad (95)$$

W równaniu tym prędkość $\bar{\mathbf{v}}_m$ jest prędkością średnią ważoną udziałem masowym poszczególnych n faz:

$$\bar{\mathbf{v}}_m = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \bar{\mathbf{v}}_k}{\rho_m} \quad (96)$$

gdzie: gęstość ρ_m jest gęstością średnią mieszaniny otrzymaną ze wzoru:

$$\rho_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \quad (97)$$

3.2. Równanie zachowania pędu w modelu „mixture”

Równanie pędu dla mieszaniny stanowi sumę równań dla poszczególnych n faz i wyraża się wzorem:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \bar{v}_m) + \nabla \cdot (\rho_m \bar{v}_m \bar{v}_m) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu_m (\nabla \bar{v}_m + \nabla \bar{v}_m^T)] + \rho_m \bar{g} + \bar{F} + \nabla \cdot \left(\sum_{p=1}^n \alpha_p \rho_p \bar{v}_{dr,p} \bar{v}_{dr,p} \right) \quad (98)$$

Lepkość mieszaniny stanowi średnią ważoną udziałem objętościowym lepkości faz składowych i wyraża się wzorem:

$$\mu_m = \sum_{p=1}^n \alpha_p \mu_p \quad (99)$$

Dla każdej z faz dyspersyjnych można określić na podstawie poniższego wzoru prędkość unoszenia, jako różnicę pomiędzy prędkością fazy p i prędkością mieszaniny:

$$\bar{v}_{dr,p} = \bar{v}_p - \bar{v}_m \quad (100)$$

Dla każdej fazy dyspersyjnej można określić prędkość względną (poślizgu) $\bar{v}_{pq}$ względem fazy ciągłej, jako różnicę pomiędzy prędkością fazy dyspersyjnej $\bar{v}_p$ i prędkością fazy nośnej (ciągłej) $\bar{v}_q$:

$$\bar{v}_{pq} = \bar{v}_p - \bar{v}_q \quad (101)$$

Pomiędzy prędkością unoszenia i prędkością poślizgu istnieje związek w postaci:

$$\bar{v}_{dr,p} = \bar{v}_{pq} - \sum_{k=1}^n c_k \bar{v}_{qk} \quad (102)$$

gdzie: udział masowy c_k fazy k wynosi:

$$c_k = \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho_m} \quad (103)$$

Model poślizgu algebraicznego opiera się na założeniu, że poruszające się fazy lokalnie są w stanie równowagi, co oznacza, że cząstki fazy dyspersyjnej ściśle podążają za polem przepływu fazy ciągłej. Wówczas prędkość poślizgu można wyrazić za pomocą poniższego równania algebraicznego:

$$\bar{v}_{pq} = \frac{\tau_p}{f} \frac{(\rho_p - \rho_q)}{\rho_m} \bar{a} \quad (104)$$

gdzie: τ_p jest czasem relaksacji cząstki fazy dyspersyjnej określony według równania (10) lub (11). Postać funkcji oporu hydrodynamicznego f zależy od rodzaju przepływu wielofazowego, kształtu cząstek fazy dyspersyjnej itp. Przyspieszenie $\bar{a}$ cząstki fazy dyspersyjnej wyraża się wzorem:

$$\bar{a} = \bar{g} - (\vec{V}_m \cdot \nabla) \vec{V}_m - \frac{\partial \vec{V}_m}{\partial t} \quad (105)$$

Dla przepływów turbulentnych w równaniu na prędkość poślizgu należy uwzględnić człon dyfuzyjny. Wówczas równanie (105) przyjmie następującą postać:

$$\vec{v}_{pq} = \frac{(\rho_p - \rho_q) d_p^2}{18 \mu_q f} \bar{a} - \frac{\eta_t}{\sigma_t} \left(\frac{\nabla \alpha_p}{\alpha_p} - \frac{\nabla \alpha_q}{\alpha_q} \right) \quad (106)$$

gdzie: σ_t jest turbulentną liczbą Prandtla, η_t jest turbulentnym współczynnikiem dyfuzji:

$$\eta_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\gamma_\gamma}{1 + \gamma_\gamma} \right) (1 + C_\beta \zeta_\gamma^2)^{-1/2} \quad (107)$$

gdzie:

$$\zeta_\gamma = \frac{|\vec{v}_{pq}|}{\sqrt{\frac{2}{3}} k} \quad (108)$$

$$C_\beta = 1,8 - 1,35 \cos^2 \theta \quad (109)$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{v}_{pq} \cdot \vec{v}_p}{|\vec{v}_{pq}| |\vec{v}_p|} \quad (110)$$

W równaniu (107) γ_γ jest stosunkiem skali czasu relaksacji dla wirów turbulentnych i czasu relaksacji dla cząstki. $C_\mu = 0,09$. θ w równaniu (110) to kąt pomiędzy wektorem prędkości poślizgu i wektorem prędkości cząstki fazy dyspersyjnej.

3.3. Równanie zachowania energii w modelu „mixture”

W modelu „mixture” równanie zachowania energii przyjmuje postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^n (\alpha_k \rho_k E_k) + \nabla \cdot \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{v}_k [(\rho_k E_k + p)] = \nabla \cdot (k_{eff} \nabla T) + S_E \quad (111)$$

Efektywny współczynnik przewodzenia ciepła k_{eff} dla mieszaniny jest średnią ważoną udziałem objętościowym sumy przewodnictwa cieplnego danej fazy k_k i turbulentnego współczynnika przewodzenia ciepła k_t :

$$k_{eff} = \sum_{k=1}^n \alpha_k (k_k + k_t) \quad (112)$$

Turbulentny współczynnik przewodzenia ciepła jest zdefiniowany w formie zależnej od rodzaju zastosowanego modelu turbulencji. Prawa strona równania (111) jest sumą energii wymienianej na drodze przewodzenia oraz ciepła emitowanego przez inne źródła objętościowe S_E . W równaniu (111) dla fazy nieściśliwej $E_k = h_k$ (gdzie h_k jest entalpią fazy k), natomiast dla fazy ściśliwej przyjmuje wartość:

$$E_k = h_k + \frac{p}{\rho_k} + \frac{v_k^2}{2} \quad (113)$$

3.4. Równania dla udziału objętościowego faz rozproszonych

Udziały objętościowe każdej z faz rozproszonych oblicza się z równania w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_b \rho_b + \nabla \cdot (\alpha_b \rho_b \vec{V}_m) = -\nabla \cdot (\alpha_b \rho_b \vec{V}_{dr,p}) + \sum_{q=1}^n (\dot{m}_{qp} - \dot{m}_{pq}) \quad (114)$$

4. Przykłady zastosowania modelowania numerycznego

Przedstawione poniżej obliczenia symulacyjne przeprowadzono za pomocą komercyjnego kodu obliczeniowego Ansys Fluent w wersji 6.3.26. W kodzie tym opis matematyczny przepływu wielofazowego przedstawiony w rozdziale 2 został zaimplementowany w postaci modeli obliczeniowych pod nazwą Eulerian oraz Eulerian Granular Model. Uproszczoną wersję eulerowskiego modelu wielofazowego zaimplementowano pod nazwą Mixture [19].

Modele geometryczne oraz siatki obliczeniowe opracowano za pomocą preprocesora Gambit w wersji 2.4.6.

4.1. Dyspersja powietrza w komorze flotownika pneumomechanicznego – model MIXTURE

Flotacja pianowa jest ważnym procesem w przemyśle wydobywczym. Polega na transporcie ziaren koncentratowych z wnętrza zawiesiny na jej powierzchnię za pomocą pęcherzyków powietrza. Podczas separacji zachodzą złożone zjawiska chemiczne i fizyczne związane ze wzajemnym oddziaływaniem fazy stałej, ciekłej i gazowej. Najczęściej proces flotacji pianowej jest prowadzony w komorach o pojemności do 150 m³ [33], w których wtłoczone do zawiesiny powietrze jest dyspergowane sposobem mechanicznym w układzie wirnik-stator (maszyny mechaniczne lub pneumomechaniczne). Odpowiednio dobrane warunki hydrodynamiczne flotacji stanowią gwarancję mineralizacji pęcherzyka gazu. W tym celu, wymagane jest zapewnienie pęcherzykom powietrza i ziarnom odpowiedniej energii kolizji. Warunki te może zapewnić ruch zawiesiny flotacyjnej, wymuszony obrotami wirnika maszyny flotacyjnej. Optymalne zaprojektowanie układu wirnik-stator oraz kształtu komory ma więc istotny wpływ na efektywność działania maszyny flotacyjnej. Zastosowanie metody CFD pozwala na prognozowanie warunków hydraulicznych w komorze flotownika, tzn. rozkładu prędkości, ciśnienia, naprężeń ścinających oraz udziału objętościowego faz. Pozwala także na określenie charakterystycznych parametrów pracy flotownika takich jak moc mieszania, czas mieszania, czas zatrzymania powietrza w komorze flotacyjnej, co stanowi podstawę do optymalizacji konstrukcji urządzeń flotacyjnych.

Poniżej przedstawiono wyniki symulacji numerycznej procesu mieszania i napowietrzania zawiesiny w komorze flotownika typu IZ-12 [5, 7]

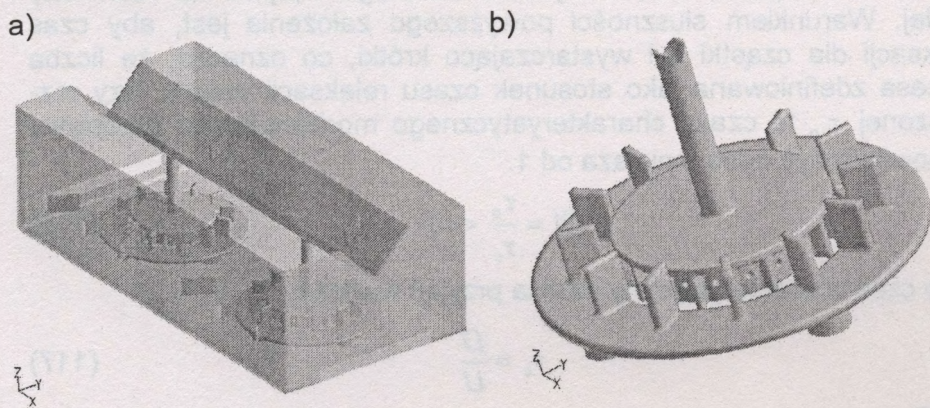
dla określonego składu granulometrycznego i petrograficznego mułu węglowego. Maszyny te buduje się w zespołach dwuwirnikowych typu korytowego z dwustronnym odbiorem zmineralizowanej piany flotacyjnej. W przedziale roboczym, na pionowym wewnątrz wydrążonym wale, osadzony jest pracujący wewnątrz statora wirnik. Łopatki statora umocowane są do poziomej płyty ustawionej powyżej dna przedziału roboczego. Tarcza statora wyposażona jest w centralnie umieszczony otwór, przez który wirnik zasysa zawieszinę flotacyjną. Do ściany przedniej i tylnej przedziału roboczego przytwierdzone są płaskie łopatki rozmieszczone promieniowo w stosunku do osi wału napędowego. Służą one do uspokojenia ruchu wirowego zawiesziny flotacyjnej. Powietrze sprężone dostarczane jest do kolektora powietrznego, z którego przewodami doprowadzane jest przez tuleje łożyskowe do wnętrza wydrążonych wałów napędowych. Zawieszinę flotacyjną doprowadza się do skrzynki nadawczej, z której przepływa ona dolną szczeliną przepływową do przedziału roboczego. W górnej części obu przedziałów roboczych zabudowane są (w ich podłużnej osi) nachylone ścianki służące do kierowania zmineralizowanej piany flotacyjnej w kierunku progów wyładowczych. W tabeli 1 podano parametry techniczne flotownika.

Tabela 1

Dane techniczne flotownika IZ – 12

Parametr	j.m.	Wartość
Dopuszczalna liczba zespołów na jednym poziomie	-	2
Minimalna różnica poziomów pomiędzy zespołami	[mm]	400
Pojemność jednej komory roboczej	[m ³]	13
Masa zespołu dwukomorowego	[kg]	9500
Długość zespołu dwukomorowego	[mm]	5400
Szerokość zespołu dwukomorowego	[mm]	2700
Szerokość zespołu na wysokości progów odbiorczych	[mm]	3200
Wysokość zespołu do progów odbiorczych	[mm]	1900
Nominalne natężenie dopływu zawiesziny	[m ³ /min]	do 15,0
Nominalne natężenie dopływu powietrza z dmuchawy do jednego wirnika	[m ³ /min]	do 8,0
Ciśnienie powietrza sprężonego w kolektorze	[at]	0,3
Średnica wirnika	[mm]	1000
Prędkość obrotowa wirnika	[obr/min]	140
Moc silnika napędzającego wirnik	[kW]	22
Gęstość zawiesziny	[kg/m ³]	1016,8

Na rysunku 1 przedstawiono model geometryczny komory flotownika. Domenę obliczeniową stanowi wnętrze komory do wysokości progów odbiorczych.



Rys. 1. a) Model geometryczny wnętrza komory flotownika IZ-12, b) zespół wirnika i statora

4.1.1. Model obliczeniowy

Proces flotacji można potraktować jako przepływ turbulentny mieszanki dwóch faz: zawiesiny cząstek stałych w wodzie (stanowiącej fazę ciągłą) oraz pęcherzyków powietrza podawanego przez układ napowietrzający (stanowiących fazę rozproszoną). Określenie warunków hydraulicznych panujących w komorze flotownika wymaga zatem rozwiązania układu równań różniczkowych opisujących zasadę zachowania masy, pędu oraz wielkości charakteryzujących przepływ turbulentny dla mieszanki dwóch faz. Przy takim podejściu przybliżenie stanowi fakt, że nadawę traktuje się jako fazę ciągłą, mimo, iż w rzeczywistości jest to układ wielofazowy zawierający zawieszone w wodzie cząstki stałe o określonym rozkładzie wielkości ziarna. Przybliżenie to jest jednak dopuszczalne ze względu na mały udział objętościowy cząstek stałych (typowy udział masowy fazy stałej to 80 kg/m^3 , co przy średniej gęstości 1300 kg/m^3 daje udział objętościowy na poziomie 6,2%). Mały udział objętościowy fazy stałej umożliwia traktowanie nadawy jako cieczy w przybliżeniu newtonowskiej o lepkości dynamicznej określonej wzorem [1]:

$$\mu_q = \mu_L (1 + 4,5\alpha_s) \quad (115)$$

gdzie μ_L oznacza współczynnik lepkości dynamicznej wody, a α_s udział objętościowy cząstek stałych w zawiesinie.

W modelu obliczeniowym założono tzw. sprzężenie jednokierunkowe pomiędzy fazą ciągłą i rozproszoną tzn. faza ciągła oddziałuje na fazę rozproszoną poprzez turbulencje i opór hydrodynamiczny, natomiast faza rozproszona nie wywiera istotnego wpływu na ruch fazy ciągłej. Warunkiem słuszności powyższego założenia jest, aby czas relaksacji dla cząstki był wystarczająco krótki, co oznacza, że liczba Stokesa zdefiniowana jako stosunek czasu relaksacji cząstki fazy rozproszonej τ_p to czasu charakterystycznego modelowanego przepływu τ_c powinna być dużo mniejsza od 1.

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_c} \ll 1 \quad (116)$$

Jako czas charakterystyczny można przyjąć wartość:

$$\tau_c = \frac{D}{U} \quad (117)$$

gdzie:

D – wymiar charakterystyczny dla modelowanego procesu (długość flowtownika 5,4 m),

U – prędkość charakterystyczna dla procesu (prędkość styczna dla wirnika mieszadła).

Oceny czasu relaksacji pęcherzyka powietrza można dokonać na podstawie wzoru (11) podstawiając za średnicę cząstki dyspersyjnej d_b tzw. średnicą równowagową dla pęcherzyka powietrza obliczoną na podstawie wyrażenia [68]:

$$d_b = \left(\frac{\sigma We_{kryt}}{\rho_b \varepsilon^{2/3}} \right)^{3/5} \quad (118)$$

gdzie:

ε – współczynnik dyssypacji energii kinetycznej turbulencji,

σ – napięcie powierzchniowe,

We_{kryt} – wartość krytyczna liczby Webera,

ρ_b – gęstość powietrza.

Wartość krytyczna liczby Webera We_{kryt} dla pęcherzyka powietrza w wodzie wynosi 2,3 [53]. Wartość współczynnika dyssypacji energii we wzorze (82) wyznacza się jako wartość uśrednioną po objętości domeny obliczeniowej na podstawie wstępnych obliczeń symulacyjnych przepływu turbulentnego dla czystej wody. Obliczona według równania (118) równowagowa średnica pęcherzyka powietrza w omawianym przypadku jest równa 2 mm. Obliczony według powyższej procedury czas relaksacji

wynoszący około 0,0003 s i liczba Stokesa równa w przybliżeniu 0,0004 wskazują, że pęcherzyki powietrza podążają za polem prędkości zawiesiny, zatem symulację warunków hydraulicznych w komorze flotownika można przeprowadzić stosując uproszczony model eulerowski przepływu wielofazowego szczegółowo omówiony w rozdziale 3. Jak wspomniano wcześniej, założenie jednokierunkowego sprzężenia w oddziaływaniach pomiędzy pęcherzykami powietrza i nadawą oznacza to, że nadawa oddziałuje na pęcherzyki powietrza przez opór hydrodynamiczny i turbulencje.

Uśrednione równania bilansu masy i pędu przyjmują postać:

Równanie bilansu masy

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_m + \nabla \cdot (\rho_m \vec{V}_m) = 0 \quad (119)$$

$$\vec{V}_m = \frac{\alpha_l \rho_l \vec{V}_l + \alpha_b \rho_b \vec{V}_b}{\rho_m} \quad (120)$$

$$\rho_m = \alpha_l \rho_l + \alpha_b \rho_b \quad (121)$$

gdzie:

α_l - udział objętościowy zawiesiny flotacyjnej,

α_b - udział objętościowy powietrza,

ρ_l - gęstość zawiesiny flotacyjnej,

ρ_b - gęstość powietrza,

$\vec{V}_m$ - prędkość średnia mieszaniny,

$\vec{V}_l$ - prędkość średnia fazy ciągłej,

$\vec{V}_b$ - prędkość średnia fazy rozproszonej.

Równanie bilansu pędu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \vec{V}_m) + \nabla \cdot (\rho_m \vec{V}_m \vec{V}_m) = & -\nabla p + \nabla \cdot [(\mu_m - \mu_{t,m})(\nabla \vec{V}_m + \nabla \vec{V}_m^T)] + \\ & + \rho_m \vec{g} + \nabla \cdot \left[\alpha_b \rho_b \left(1 - \frac{\alpha_b \rho_b}{\rho_m} \right) \vec{v}_{bl} \vec{v}_{bl} \right] \end{aligned} \quad (122)$$

gdzie: prędkość poślizgu $\vec{v}_{bl}$ obliczono według równania (106) w rozdziale 3.2. W równaniu tym uwzględniono oddziaływanie fazy ciągłej (zawiesiny flotacyjnej) na pęcherzyki powietrza poprzez funkcję oporu hydrodynamicznego Schillera-Naumanna [56].

$$f = \begin{cases} 1 + 0,15 \operatorname{Re}_r^{0,687} & \text{dla } \operatorname{Re} < 1000 \\ 0,0183 \operatorname{Re}_r & \text{dla } \operatorname{Re} > 1000 \end{cases} \quad (123)$$

Model turbulencji

Zastosowano dwurównaniowy model turbulencji „realizable” k - ε . Równania transportu dla k i ε mają postać (56) (57). Współczynnik lepkości turbulentnej $\mu_{t,m}$ mieszanki przyjmuje postać równania (60) przy czym wartość współczynnika C_μ nie jest równa 0,09 jak w standardowym modelu k - ε lecz zależy od tensora szybkości odkształcenia oraz tensora rotacji elementu płynu. Pozostałe parametry modelu przyjęto zgodnie z zaleceniem zawartym w [19] tj.: $\sigma_k=1$, $\sigma_\varepsilon=1,2$, $C_{1\varepsilon}=1,44$, $C_{2\varepsilon}=1,9$. Model „realizable” k - ε omówiono szerzej w pracy [57].

Równanie transportu dla udziału objętościowego

Ponieważ w tym przypadku nie występuje międzyfazowa wymiana masy, równanie transportu dla udziału objętościowego upraszcza się do postaci:

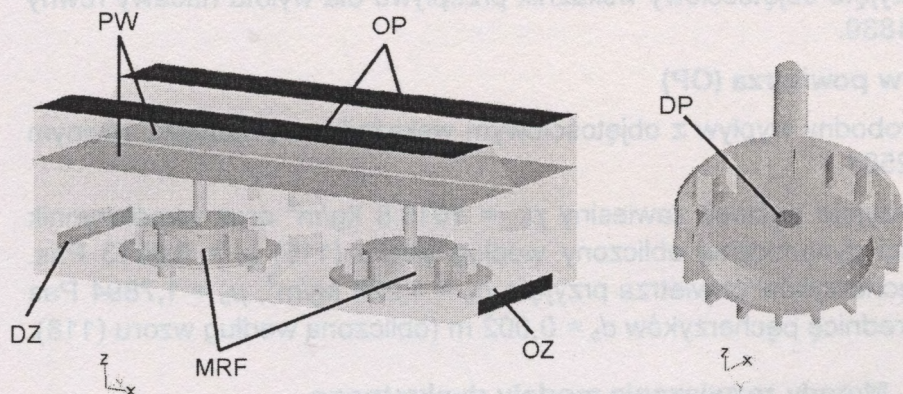
$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_b \rho_b + \nabla \cdot (\alpha_b \rho_b \vec{V}_m) = -\nabla (\alpha_b \rho_b \vec{v}_{dr,b}) \quad (124)$$

gdzie: prędkość unoszenia $\vec{v}_{dr,b}$ obliczono według równania (102).

4.1.2. Warunki brzegowe i początkowe

Symulację ruchu obrotowego mieszadeł przeprowadzono w oparciu o metodę Multiple Reference Frame. W metodzie tej domena obliczeniowa podzielona jest na strefę nieruchomą (nieruchomy układ odniesienia) i strefy ruchome (ruchomy układ odniesienia). Strefy ruchomego układu odniesienia (oznaczone na rysunku 2 skrótem MRF) zostały utworzone wokół wirników mieszadeł. Dla stref MRF układ odniesienia wiruje wokół osi mieszadła z prędkością równą jego prędkości obrotowej $n=140$ obr/min. Szczegółowe omówienie metody MRF można znaleźć w [19]. Powyżej poziomu wypełnienia do wysokości progów odbiorczych utworzono strefę wypełnioną powietrzem. Dla tej strefy przyjęto warunki początkowe $\|\vec{V}_m\| = 0$, $\alpha_b=1$ oraz $\alpha_l=0$. Warunki początkowe dla strefy poniżej poziomu wypełnienia to: $\|\vec{V}_m\| = 0$, $\alpha_b=0$ oraz $\alpha_l=1$.

Dla ścianek komory, statora, łamaczy fal, oraz mieszadeł założono brak poślizgu tzn. $\|\vec{V}_m\|_{\text{wall}} = 0$. Turbulentną warstwę przyścienną modelowano poprzez standardową funkcję przyścienną opisaną w rozdziale 2.3.



Rys.2. Podział domeny obliczeniowej

PW-poziom wypełnienia, DZ-dopływ zawiesiny, DP-dopływ powietrza, OZ-odpływ zawiesiny, OP-odpływ powietrza, MRF-Multiple Reference Frame

Pozostałe warunki brzegowe sformułowano następująco:

Dopływ zawiesiny (DZ)

- stała prędkość mieszanki na wlocie $V_m = 0,8418$ m/s,
- udział objętościowy fazy rozproszonej (powietrza) $\alpha_b = 0$,
- udział objętościowy fazy nośnej (zawiesiny) $\alpha_l = 1$,
- średnica hydrauliczna $d_H = 0,32$ m,
- współczynnik intensywności turbulencji $I = 3\%$ obliczony według wzoru [39]:

$$I = 0,16 Re_{d_H}^{-1/8} \quad (125)$$

gdzie: Re_{d_H} to liczba Reynoldsa dla przepływu w przewodzie o średnicy hydraulicznej d_H .

Dopływy powietrza (DP)

- stała prędkość powietrza na wlocie $V_m = 11,52$ m/s,
- udział objętościowy fazy rozproszonej (powietrza) $\alpha_b = 1$,
- udział objętościowy fazy nośnej (zawiesiny) $\alpha_l = 0$,
- średnica hydrauliczna $d_H = 0,121$ m,
- współczynnik intensywności turbulencji $I = 4\%$.

Odpływ zawiesiny (OZ)

- swobodny wypływ; wymaga podania jednego parametru tj. wskaźnika przepływu definiującego stosunek objętościowy przepływającego przez wylot płynu w stosunku do sumy wszystkich wypływów.

Przyjęto objętościowy wskaźnik przepływu dla wylotu nadawy równy 0,4839.

Odptyw powietrza (OP)

- swobodny wypływ z objętościowym wskaźnikiem przepływu równym 0,2581.

Przyjęto gęstość zawiesiny $\rho_l = 1016,8 \text{ kg/m}^3$ oraz współczynnik lepkości dynamicznej obliczony według wzoru (115) $\mu_l = 0,0013 \text{ Pas}$. Dla pęcherzyków powietrza przyjęto $\rho_b = 1,225 \text{ kg/m}^3$, $\mu_b = 1,7894 \text{ Pas}$ oraz średnicę pęcherzyków $d_b = 0,002 \text{ m}$ (obliczoną według wzoru (118)).

4.1.3. Metody rozwiązania modelu dyskretnego

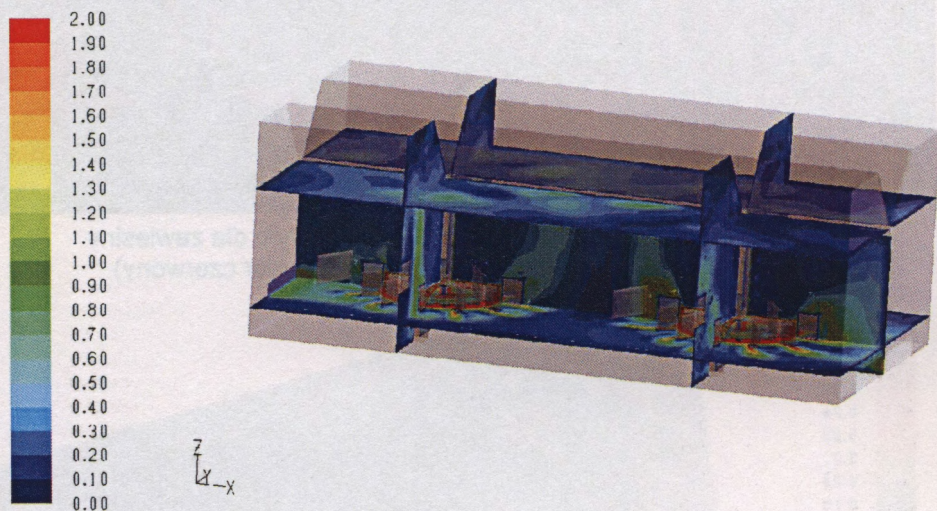
Obliczenia wykonano na siatce niestrukturalnej złożonej z 1161111 elementów czworościennych o skośności nie przekraczającej 0,71. Obliczenia przeprowadzono dla stanu nieustalonego przy użyciu solvera typu „pressure based” [9]. Sprężenie ciśnienie-prędkość realizowano według algorytmu SIMPLE [51]. Dyskretyzację członów konwekcyjnych i dyfuzyjnych przeprowadzono według schematu QUICK [38]. Dyskretyzację równania korekcji dla ciśnienia przeprowadzono według schematu PRESTO [38]. Dyskretyzację czasu przeprowadzono według schematu niejawnego pierwszego rzędu (First Order Implicit). Zastosowano krok czasowy $\Delta t = 0,01 \text{ s}$. Na każdym kroku czasowym wykonywano 20 iteracji. Obliczenia zakończono po wykonaniu 3600 kroków czasowych dla $t = 36 \text{ s}$. Kryterium zbieżności stanowiły bezwzględne wartości residualne dla równania ciągłości, składowych prędkości, energii kinetycznej turbulencji, szybkości dyssypacji energii kinetycznej turbulencji oraz udziału objętościowego fazy rozproszonej. Dla wszystkich wymienionych wartości residualnych przyjęto kryterium na poziomie 10^{-3} .

4.1.4. Wyniki obliczeń

Charakterystykę pola prędkości przedstawiono na wykresach konturowych (izolinie szybkości wyrażonej w m/s) i wektorowych, w wybranych płaszczyznach przekroju domeny obliczeniowej. Na rysunku 3 przedstawiono pole prędkości dla fazy ciągłej (zawiesiny), natomiast na rysunku 4 pole prędkości dla fazy dyspersyjnej (pęcherzyków powietrza). Różnice wskazują na występowanie pola prędkości poślizgu pomiędzy fazą ciągłą i rozproszoną. Różnice te są również widoczne na wykresach wektorowych przedstawionych na rysunku 5.

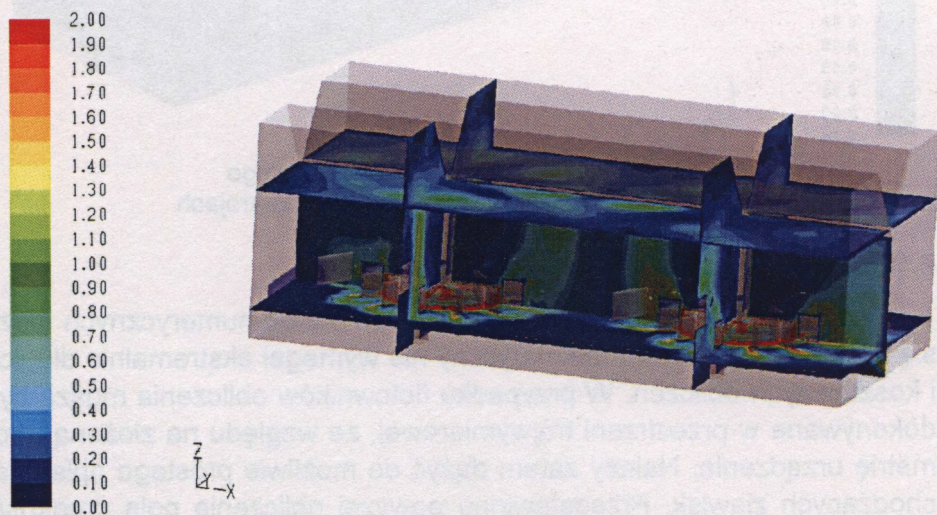
Rozkład udziału objętościowego fazy dyspersyjnej przedstawiono na wykresie konturowym (rys. 6). Na wykresie widoczna jest poduszka

powietrzna formująca się pod wirnikami. Dyspersja powietrza następuje głównie przez otwory w wirnikach. Nasycenie powietrzem w strefach bezpośrednio nad wirnikami jest stosunkowo słabe. Sprzyjają temu małe prędkości przepływu w górnej strefie flotownika.



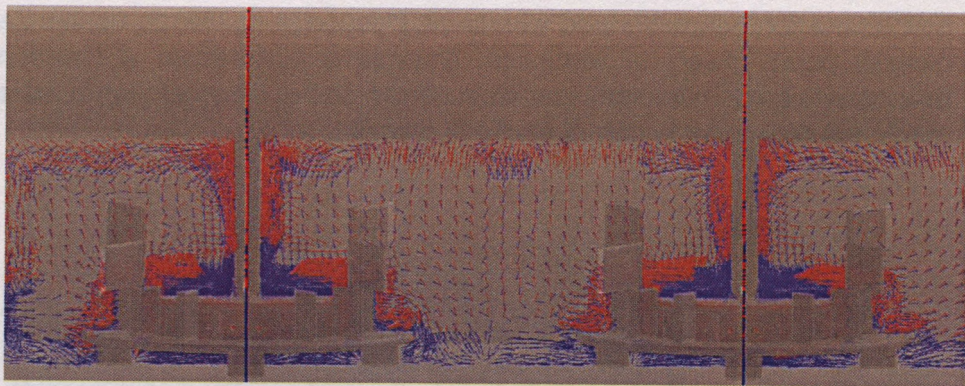
Rys.3. Rozkład szybkości przepływu

$\|\vec{V}_l\|$ w m/s dla zawiesiny w wybranych przekrojach zbiornika

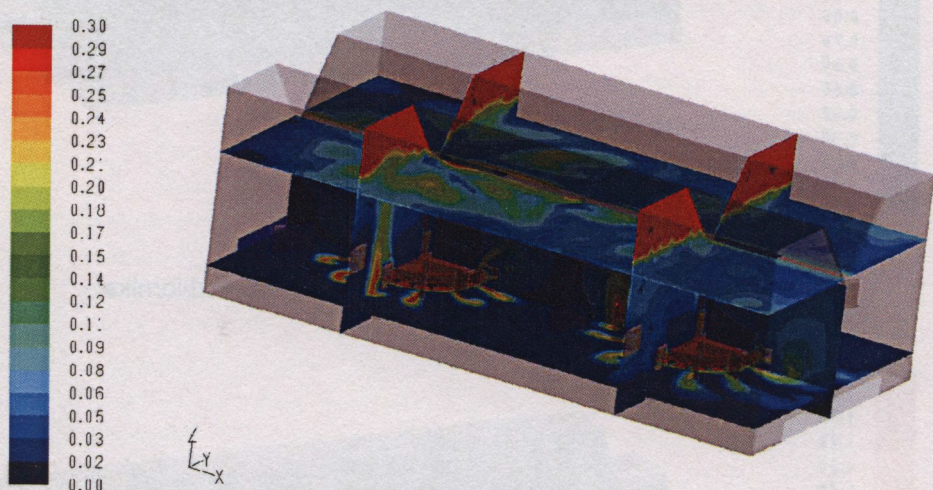


Rys.4. Rozkład szybkości $\|\vec{V}_p\|$ w m/s dla fazy rozproszonej

(pęcherzyków powietrza) w wybranych przekrojach zbiornika



Rys.5. Wektory prędkości w przekroju pionowym dla zawiesiny (kolor niebieski) i pęcherzyków powietrza (kolor czerwony)



Rys.6. Rozkład udziału objętościowego powietrza w zbiorniku w wybranych przekrojach

4.1.5. Wnioski

W przypadku praktycznych zastosowań metod numerycznych dąży się do tego, aby model matematyczny nie wymagał ekstremalnie długich i kosztownych obliczeń. W przypadku flotowników obliczenia muszą być dokonywane w przestrzeni trójwymiarowej, ze względu na złożoną geometrię urządzenia. Należy zatem dążyć do możliwie prostego opisu zachodzących zjawisk. Przedstawione powyżej obliczenia pola prędkości i udziału objętościowego powietrza w komorze maszyny flotacyjnej stanowią próbę zastosowania uproszczonego modelu eulerowskiego turbulentnego przepływu wielofazowego (modelu poślizgu algebraicznego). Uproszczenia modelu obliczeniowego powodują, że otrzymane wyniki

mają charakter jakościowy nie mniej jednak pozwalają na ocenę skuteczności układu napowietrzania komory flotacyjnej. Otrzymane wyniki wskazują, że w komorze flotownika występują obszary słabo napowietrzane, co wpływa ujemnie na skuteczność procesu flotacji. Metody numerycznej mechaniki płynów mogą stanowić skuteczne narzędzie wspomagające proces projektowania układów napowietrzających pneumomechanicznych maszyn flotacyjnych.

4.2. Analiza procesu mieszania zawiesiny o niskim udziale objętościowym cząstek stałych – EULERIAN GRANULAR MODEL

Kolejnym przykładem zastosowania eulerowskiego modelu wielofazowego jest symulacja ponownego formowania się zawiesiny cząstek stałych zalegających na dnie reaktora pracującego w trybie ciągłym po awaryjnym zatrzymaniu procesu. Zasadniczym celem obliczeń była ocena skuteczności działania umieszczonego w reaktorze mieszadła turbinowego, którego zadaniem jest uniesienie osadu z dna zbiornika i ponowne wytworzenie homogenicznej zawiesiny w określonym czasie.

4.2.1. Parametry geometryczne zbiornika i właściwości fizykochemiczne mieszanych mediów

Symulacje przeprowadzono dla zbiornika o średnicy wewnętrznej $D = 3,22$ m i wysokości $H = 4,4$ m. Zbiornik nie posiada łamaczy fal. Poziom wypełnienia wynosi 70%. Dno zbiornika ma kształt elipsoidalny o krótszej osi elipsoidy 1,8 m. Fazę ciekłą stanowi ciecz palna (dwusiarczek węgla) o lepkości 0,006 Pas i gęstości 1330 kg/m^3 . W zbiorniku umieszczono mieszadło turbinowe z łopatkami pochylonymi. Wirnik mieszadła o średnicy 0,6 m umieszczony w odległości 0,95 m od dna zbiornika posiada cztery łopaty płaskie pochylone pod kątem 45° o kierunku pompowania z dołu do góry. Mieszadło jest umieszczone w zbiorniku niecentrycznie. Oś mieszadła jest przesunięta w stosunku do osi zbiornika o 0,95 m. Taka lokalizacja mieszadła została wymuszona przez zabudowę na kopule zbiornika systemu przeciwpożarowego. Fazę rozproszoną stanowią cząstki stałe (nierozpuszczalne kryształy siarki) o gęstości 1800 kg/m^3 , średnicy Sautera $12,5 \mu\text{m}$ i udziale objętościowym 3,7%. Celem przeprowadzonych obliczeń była ocena skuteczności działania mieszadła w sytuacji, gdy na skutek awaryjnego zatrzymania ciągu technologicznego nastąpi sedimentacja zgromadzonej w zbiorniku zawiesiny.

4.2.2. Model obliczeniowy

Symulację przeprowadzono przy zastosowaniu pełnego modelu Eulera opisanego w rozdziale 2. Ponieważ w modelowanym procesie nie występuje wymiana masy pomiędzy fazą ciągłą i dyspersyjną równania zachowania masy (1) upraszczają się do postaci:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l) + \nabla(\alpha_l \rho_l \vec{V}_l) = 0 \quad (126)$$

dla fazy ciągłej:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s) + \nabla(\alpha_s \rho_s \vec{V}_s) = 0 \quad (127)$$

dla fazy dyspersyjnej.

W omawianym przypadku równanie zachowania pędu dla fazy ciągłej ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l \vec{V}_l) + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l \vec{V}_l \vec{V}_l) = & -\alpha_l \nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau}_l + \\ & + \alpha_l \rho_l \vec{g} + K_{ls}(\vec{V}_l - \vec{V}_s), \end{aligned} \quad (128)$$

a dla fazy dyspersyjnej:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s \vec{V}_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \rho_s \vec{V}_s \vec{V}_s) = & -\alpha_s \nabla p - \nabla p_s + \nabla \cdot \vec{\tau}_s + \\ & + \alpha_s \rho_s \vec{g} + K_{ls}(\vec{V}_l - \vec{V}_s), \end{aligned} \quad (129)$$

Oddziaływanie pomiędzy fazą ciekłą i cząstkami stałymi uwzględniono wykorzystując model Gidaspow'a [20]. W modelu tym współczynnik oddziaływania międzyfazowego w równaniach pędu (128) i (129) oblicza się z zależności:

$$K_{sl} = K_{ls} = \frac{3}{4} C_D \frac{\alpha_s \alpha_l \rho_l |\vec{V}_s - \vec{V}_l|}{d_s} \alpha_l^{-2.65} \quad (130)$$

gdzie:

- α_s - udział objętościowy cząstek stałych,
- α_l - udział objętościowy fazy ciekłej,
- d_s - średnica cząstki,
- $\vec{V}_s, \vec{V}_l$ - średnia prędkość odpowiednio cząstki stałej i fazy ciekłej,
- C_D - współczynnik oporu hydrodynamicznego.

W równaniu (130) zastosowano współczynnik oporu hydrodynamicznego w postaci wyrażenia [20]:

$$C_D = \frac{24}{\alpha_l Re_s} \left[1 + 0,15(\alpha_l Re_s)^{-0,687} \right] \quad (131)$$

gdzie: Re_s jest względną liczbą Reynoldsa równą [54]:

$$Re_s = \frac{\rho_l d_s |\vec{V}_s - \vec{V}_l|}{\mu_l} \quad (132)$$

Równanie (86) jest słuszne dla stężenia fazy dyspersyjnej przy $\alpha_s > 0,8$. Dla $\alpha_s \leq 0,8$ współczynnik ten wynosi:

$$K_{sl} = 150 \frac{\alpha_s(1-\alpha_l)\mu_l}{\alpha_l d_s^2} + 1,75 \frac{\rho_l \alpha_s |\vec{V}_s - \vec{V}_l|}{d_s} \quad (133)$$

Jako średnicę cząstek stałych przyjęto średnicę Sautera $d_s = 12,5 \mu m$.

Składową kinetyczną i zderzeniową lepkości dla fazy uziarnionej obliczano według zależności Gidaspow'a (równanie (26) i (28)). W równaniach tych przyjęto współczynnik odbicia $e_{ss} = 0,9$ oraz zastosowano funkcję rozkładu radialnego $g_{0,ss}$ według Lun'a [42]:

$$g_{0,ss} = \left[1 - \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_{s,max}} \right)^{-2,5\alpha_{s,max}} \right]^{-1} \quad (134)$$

gdzie: $\alpha_{s,max} = 0,63$.

Ciśnienie cząstek stałych p_s oraz lepkość wolumetryczną λ_s również modelowano według równań zawartych w pracy [42].

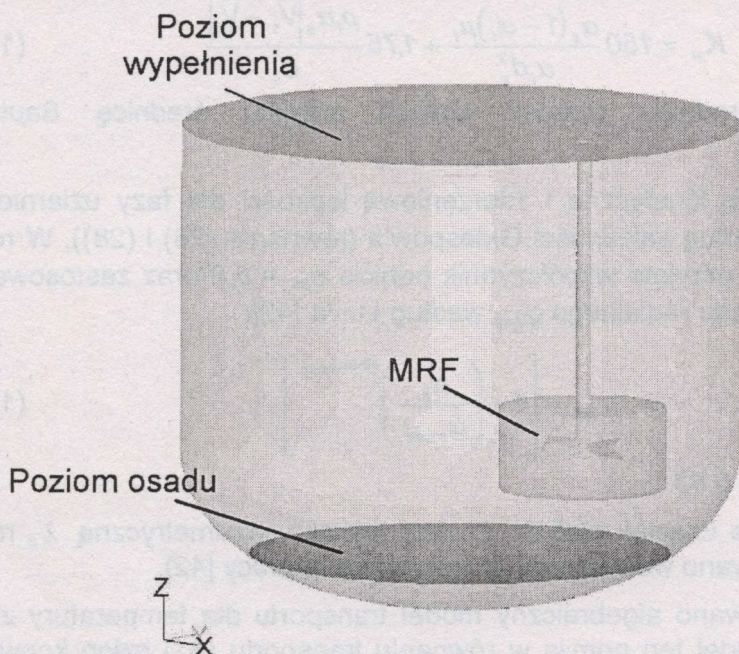
Zastosowano algebraiczny model transportu dla temperatury ziarnistej [1]. Model ten pomija w równaniu transportu (31) człon konwekcyjny i dyfuzyjny.

Podobnie jak w przykładzie 4.1 zastosowano model turbulencji „realizable” $k-\varepsilon$. Uwzględniono wpływ fazy rozproszonej na turbulencje w fazie ciągłej. Równania transportu dla k i ε mają postać (66) (67). Dynamiczny współczynnik lepkości turbulentnej $\mu_{t,q}$ fazy ciągłej przyjmuje postać równania (60). Przyjęto następujące wartości parametrów modelu turbulencji [19]: $\sigma_k = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1,2$, $C_{1\varepsilon} = 1,44$, $C_{2\varepsilon} = 1,92$, $\sigma_{3\varepsilon} = 1,3$ oraz $\sigma_{kp} = 0,75$.

4.2.3. Warunki brzegowe i początkowe

Trójwymiarowy model geometryczny reaktora przedstawiono na rysunku 7. Zastosowano niestrukturalną siatkę objętości skończonych zło-

zoną z elementów czworościennych i sześciennych. Siatka składa się z 508341 elementów o skośności nie przekraczającej 0,7. Symulację ruchu obrotowego mieszadła przeprowadzono w oparciu o metodę Multiple Reference Frame. Strefa ruchomego układu odniesienia (rys. 7) została utworzona wokół wirnika mieszadła. Dla strefy MRF układ odniesienia wiruje wokół osi mieszadła z prędkością równą prędkości obrotowej mieszadła $n = 168 \text{ obr/min}$. Pozostałą część domeny obliczeniowej podzielono na dwie strefy stacjonarne. Granicę podziału stanowi poziom wypełnienia zbiornika fazą dyspersyjną po całkowitej sedymentacji.



Rys.7. Model geometryczny zbiornika
na rysunku zaznaczono strefę ruchomego układu odniesienia (MRF),
poziom wypełnienia oraz poziom osadu w chwili $t_0 = 0 \text{ s}$.

Przyjęto następujące warunki początkowe:

- $\|\vec{V}_l\| = 0, \|\vec{V}_s\| = 0, \alpha_s = \alpha_{smax} = 0,63$ poniżej poziomu osadu,
- $\|\vec{V}_l\| = 0, \|\vec{V}_s\| = 0, \alpha_s = 0, \alpha_l = 1$ powyżej poziomu osadu oraz w strefie ruchomego układu odniesienia.

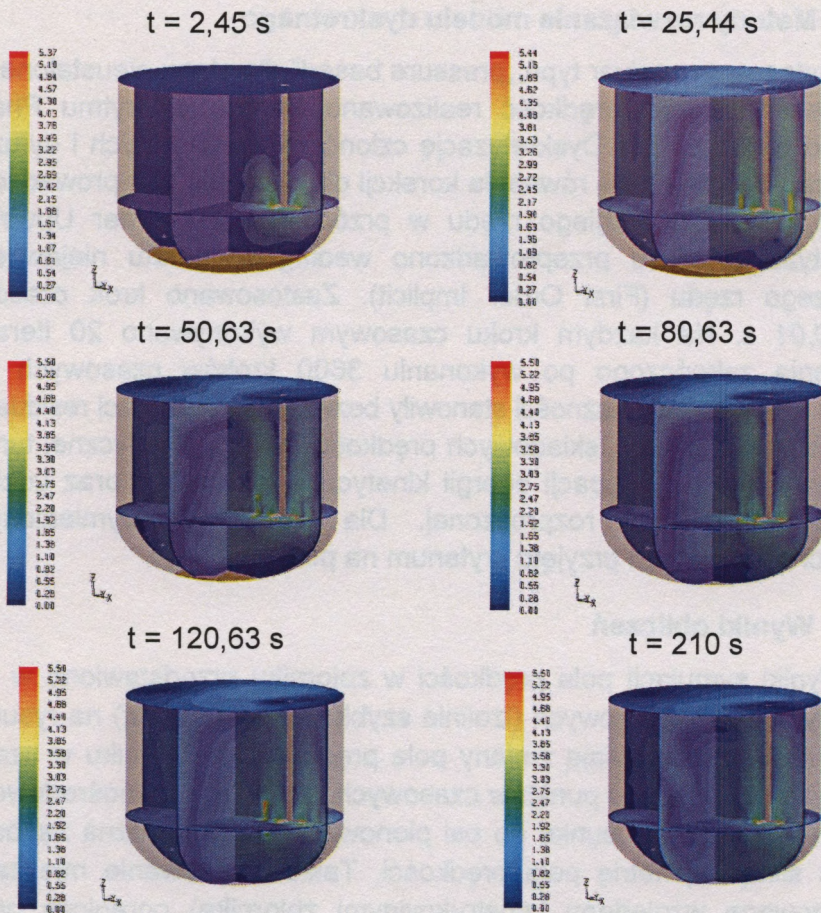
Założono brak poślizgu na ściankach zbiornika i powierzchni mieszadła. Turbulencje w strefie przyściennej modelowano za pomocą standardowej funkcji przyściennej.

4.2.4. Metody rozwiązania modelu dyskretnego

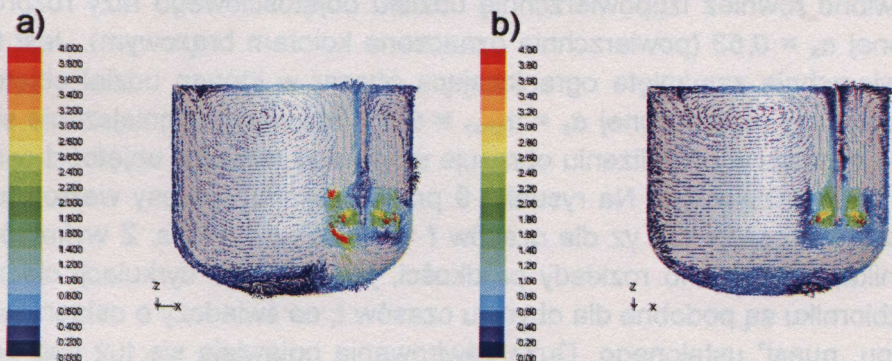
Zastosowano solver typu „pressure based” dla stanu nieustalonego. Sprężenie ciśnienie-prędkość realizowano według algorytmu Phase Coupled SIMPLE [66]. Dyskretyzację członów konwekcyjnych i dyfuzyjnych oraz dyskretyzację równania korekcji dla ciśnienia przeprowadzono według schematu drugiego rzędu w przód (Second Order Upwind). Dyskretyzację czasu przeprowadzono według schematu niejawnego pierwszego rzędu (First Order Implicit). Zastosowano krok czasowy $\Delta t = 0,01$ s. Na każdym kroku czasowym wykonywano 20 iteracji. Obliczenia zakończono po wykonaniu 3600 kroków czasowych dla $t = 210$ s. Kryterium zbieżności stanowiły bezwzględne wartości residualne dla równania ciągłości, składowych prędkości, energii kinetycznej turbulencji, szybkości dyssypacji energii kinetycznej turbulencji oraz udziału objętościowego fazy rozproszonej. Dla wszystkich wymienionych wartości residualnych przyjęto kryterium na poziomie 10^{-3} .

4.2.5. Wyniki obliczeń

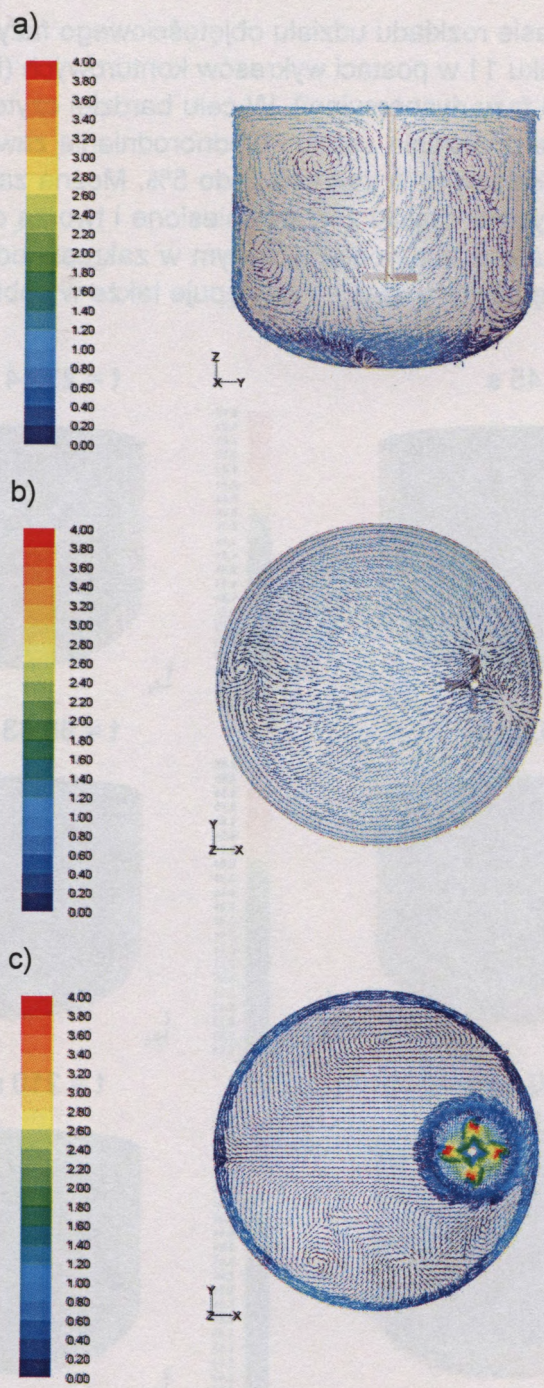
Wyniki symulacji pola prędkości w zbiorniku przedstawiono w postaci wykresów konturowych (izolinie szybkości fazy ciągłej) na rysunku 8. Wykresy przedstawiają zmiany pola prędkości w zbiorniku w czasie na przykładzie siedmiu punktów czasowych. Na skutek mimośrodowości wału mieszadła w stosunku do osi pionowej zbiornika można zaobserwować silną asymetrię pola prędkości. Takie usytuowanie mieszadła (podyktowane względami konstrukcyjnymi zbiornika) ogranicza prędkości styczne w zbiorniku i przeciwdziała powstawaniu wiru centralnego przy jednoczesnym zwiększeniu mocy mieszania. Na rysunku 8 przedstawiono również izopowierzchnię udziału objętościowego fazy rozproszonej $\alpha_s = 0,63$ (powierzchnia oznaczona kolorem brązowym). Jest to powierzchnia zamknięta ograniczająca obszar w którym udział objętościowy fazy rozproszonej $\alpha_s = \alpha_{smax} = 0,63$. Stopniowe zmniejszanie się tego obszaru w przybliżeniu obrazuje stopniową redukcję objętości osadu na dnie zbiornika. Na rysunku 9 przedstawiono wykresy wektorowe w płaszczyznach xz i yz dla czasów $t = 100$ s i $t = 210$ s. Z wykresów wynika, że zarówno rozkłady prędkości, jak i sposób cyrkulacji cieczy w zbiorniku są podobne dla obydwu czasów t , co świadczy o osiągnięciu stanu „quasi” ustalonego. Duże zawirowania pojawiają się tuż pod powierzchnią swobodną cieczy i na wysokości umieszczenia wirnika mieszadła (rys. 9, 10).



Rys.8. Rozkład szybkości fazy ciągłej w zbiorniku dla czasu t kolorem brązowym oznaczono izopowierzchnię $\alpha_s = 0,63$ siarki nierozpuszczalnej w zbiorniku

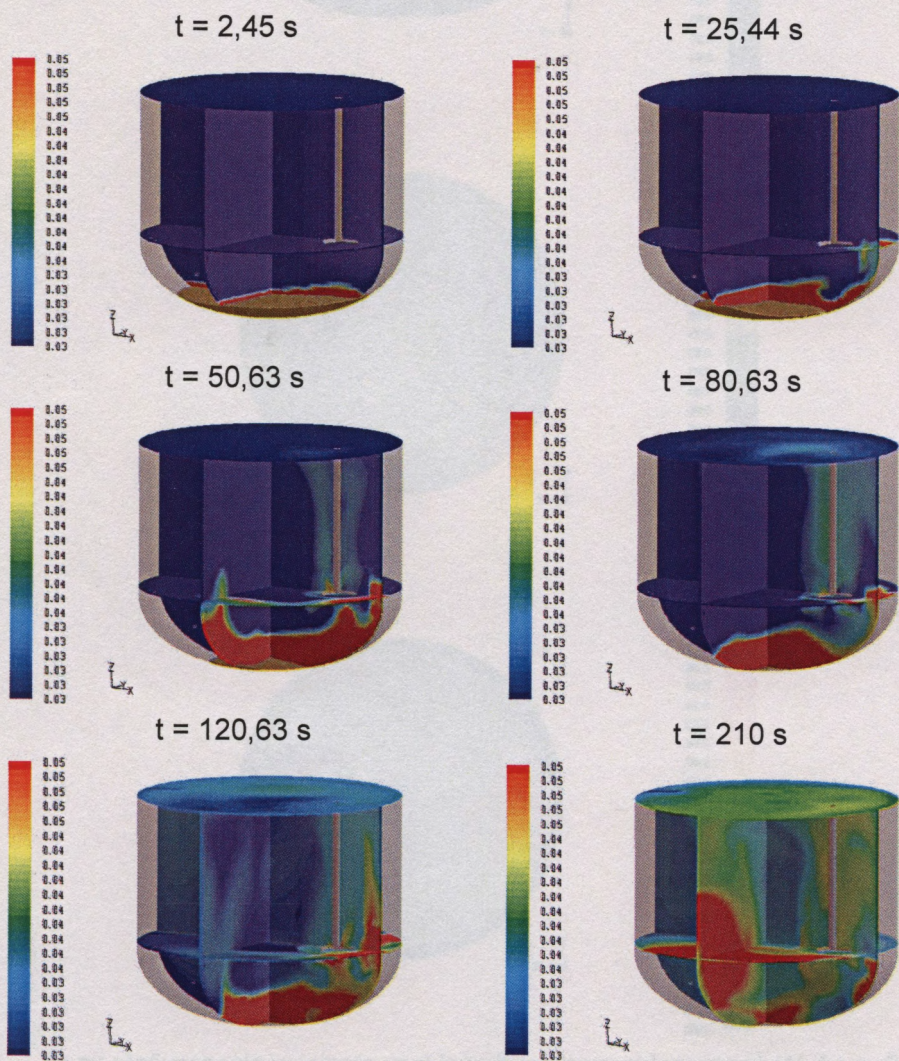


Rys.9. Wykresy wektorowe prędkości fazy ciągłej dla $t = 100$ s a) i $t = 210$ s b) skala prędkości w m/s



Rys.10. Wykresy wektorowe prędkości fazy ciągłej w płaszczyźnie yz a), na powierzchni swobodnej b), 1 m od dna zbiornika c) dla czasu $t = 210$ s

Zmiany w czasie rozkładu udziału objętościowego fazy stałej przedstawiono na rysunku 11 w postaci wykresów konturowych (izolinie udziału objętościowego fazy dyspersyjnej). W celu bardziej czytelnego przedstawienia zjawiska unoszenia osadu i ujednorodniania zawartości zbiornika wykresy wyskalowano w zakresie 3 do 5%. Można zaobserwować, że dla $t = 80$ wszystkie cząstki zostały uniesione i tworzą chmurę w pobliżu dna zbiornika o udziale objętościowym w zakresie od 0,1 do 0,59. Wysoki udział objętościowy cząstek występuje także w pobliżu wału mieszadła.



Rys.11. Rozkład udziału objętościowego fazy stałej w zbiorniku dla czasu t kolorem brązowym oznaczono izopowierzchnię $\alpha_s = 0,63$

Jako statystyczną miarę stopnia homogenizacji zawiesiny przyjęto współczynnik zmienności V_s dla udziału objętościowego fazy rozproszonej zdefiniowany jako odchylenie standardowe udziału objętościowego fazy rozproszonej odniesione do wartości średniej:

$$V_s = \frac{\sigma_s}{\bar{\alpha}_s} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\Omega} \sum_{i=1}^n (\alpha_{si} - \bar{\alpha}_s)^2 \omega_i}}{\bar{\alpha}_s} \quad (135)$$

gdzie:

Ω – całkowita objętość domeny obliczeniowej,

ω_i – objętość i-tego elementu objętościowego modelu,

α_i – udział objętościowy fazy rozproszonej dla i-tego elementu objętościowego modelu,

σ_s – odchylenie standardowe udziału objętościowego fazy rozproszonej,

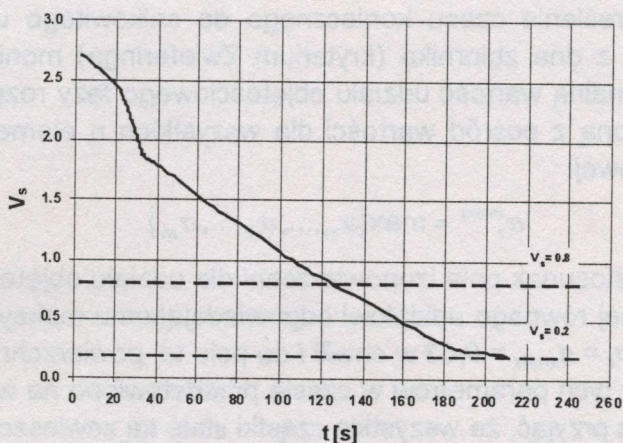
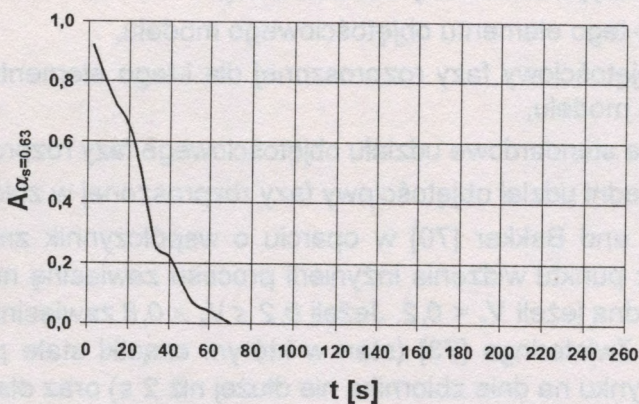
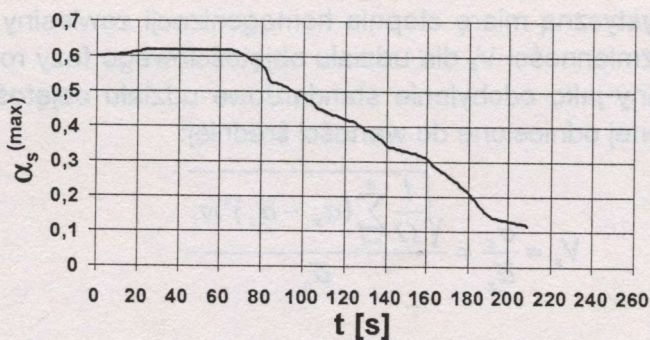
$\bar{\alpha}_s = 0,037$ – średni udział objętościowy fazy rozproszonej w zbiorniku.

Oshinowo and Bakker [70] w oparciu o współczynnik zmienności przyjmują, że z punktu widzenia inżynierii procesu zawiesinę należy uznać za jednorodną jeżeli $V_s < 0,2$. Jeżeli $0,2 \leq V_s \leq 0,8$ zawiesina spełnia tzw. kryterium Zwieteringa [73] (stan w którym cząstki stałe pozostają w stanie spoczynku na dnie zbiornika nie dłużej niż 2 s) oraz dla $V_s > 0,8$ stan niecałkowitego zmieszania.

W celu określenia czasu koniecznego do całkowitego uniesienia cząstek stałych z dna zbiornika (kryterium Zwieteringa) monitorowano również maksymalną wartość udziału objętościowego fazy rozproszonej $\alpha_s^{(max)}$ wyznaczoną z pośród wartości dla wszystkich n elementów domeny obliczeniowej:

$$\alpha_s^{(max)} = \max\{\alpha_{s1}, \dots, \alpha_{sj}, \dots, \alpha_{sn}\} \quad (136)$$

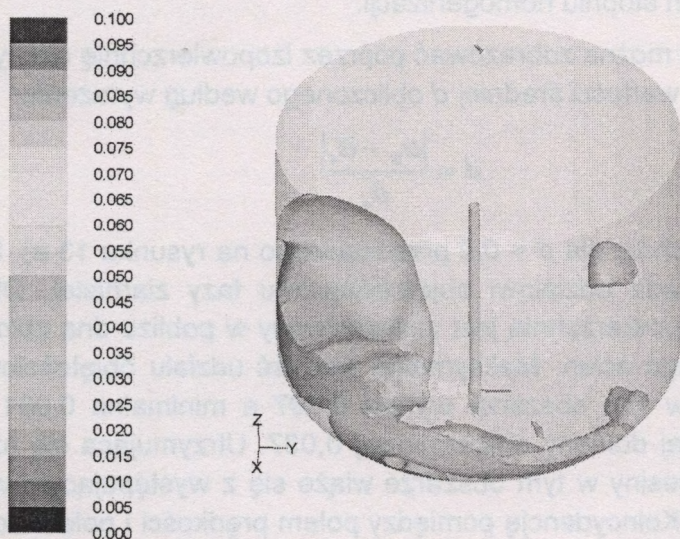
oraz $A_{as} = 0,63$ – stosunek pola izopowierzchni dla udziału objętościowego fazy rozproszonej równego udziałowi odpowiadającemu maksymalnemu upakowaniu tj. $\alpha_s = \alpha_{smax} = 0,63$ w chwili t do pola tej powierzchni w chwili $t_0 = 0$ s. Zmiany tych parametrów w czasie przedstawiono na wykresach (rys. 12). Można przyjąć, że wszystkie cząstki stałe są zawieszone w cieczy od chwili, gdy wartość maksymalna udziału objętościowego zacznie spadać poniżej wartości 0,63 lub, gdy $A_{as} = 0,63$ będzie równa 0. Na podstawie wykresów na rysunku 12 a i b można oszacować czas po jakim spełnione będzie kryterium Zwieteringa. W omawianym przypadku jest to około 70 s.



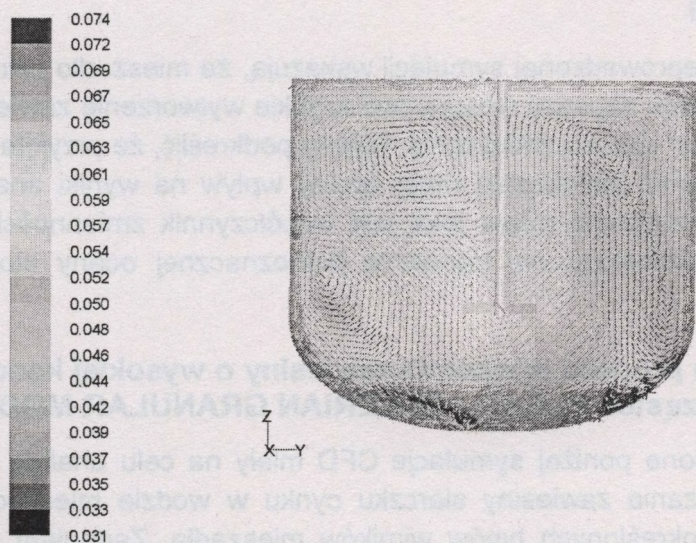
Rys.12. a) Maksymalna wartość udziału objętościowego cząstek stałych w zbiorniku w chwili t , b) stosunek pola izopowierzchni $A_{\alpha_s = 0,63}$ w chwili t odniesione do wartości pola izopowierzchni $A_{\alpha_s=0,63}$ dla $t = 0$, c) współczynnik zmienności V_s w funkcji czasu

Obliczenia kontynuowano do chwili kiedy współczynnik zmienności osiągnął wartość mniejszą niż 0,2 tj. do chwili $t = 210$ s (rys. 12 c). Zgodnie z kryterium Oshinowo i Bakker [70] po tym czasie można uznać, że zawiesina jest homogeniczna.

a)



b)



Rys.13. Udział objętościowy cząstek stałych w $[m^3/m^3]$ na izopowierzchni $d = 0,2$ a) i w płaszczyźnie yz na tle wektorów prędkości obrazujących cyrkulację cieczy w zbiorniku, b) $t = 210$ s

Dla $t = 160$ s współczynnik zmienności V_s zawiera się w granicach od 0,2 do 0,8; co oznacza niski stopień zmieszania. Obszar wysokiego stężenia rozciąga się do wysokości 1 m od dna zbiornika w pobliżu ścian zbiornika. W rozkładzie stężenia dla $t = 210$ s mimo iż współczynnik zmienności osiągnął wartość poniżej 0,2 nadal można zaobserwować obszary o niskim stopniu homogenizacji.

Obszar ten można zobrazować poprzez izopowierzchnię odchylenia względnego od wartości średniej d obliczonego według wyrażenia:

$$d = \frac{|\alpha_{si} - \bar{\alpha}_s|}{\bar{\alpha}_s} \quad (137)$$

Izopowierzchnię dla $d = 0,2$ przedstawiono na rysunku 13 a). Skala barwna odpowiada udziałowi objętościowemu fazy ziarnistej. Obszar ograniczony tą powierzchnią jest zlokalizowany w pobliżu dna zbiornika i przylega do jego ścian. Maksymalna wartość udziału objętościowego fazy ziarnistej w tym obszarze wynosi 0,097 a minimalna 0,031 przy średniej dla całej domeny obliczeniowej 0,037. Utrzymująca się niejednorodność zawiesiny w tym obszarze wiąże się z występującym w tym miejscu wirami. Koincydencję pomiędzy polem prędkości i polem udziału objętościowego przedstawiono na rysunku 13 b).

4.2.6. Wnioski

Wyniki przeprowadzonej symulacji wskazują, że mieszadło zainstalowane w zbiorniku zapewni stosunkowo szybkie wytworzenie zawiesiny o wystarczającym stopniu zmieszania. Należy podkreślić, że przyjęte kryteria oceny stopnia zmieszania mają istotny wpływ na wyniki analizy. Powszechnie stosowana miara jaką jest współczynnik zmienności dla stężenia objętościowego nie zapewnia jednoznacznej oceny stopnia zmieszania.

4.3. Analiza procesu mieszania zawiesiny o wysokiej koncentracji cząstek stałych – EULERIAN GRANULAR MODEL

Przedstawione poniżej symulacje CFD miały na celu analizę skuteczności mieszania zawiesiny siarczku cynku w wodzie mieszadłem pionowym dla określonych typów wirników mieszadła. Zadaniem mieszadła jest zapobieganie osiadaniu fazy stałej na dnie, ścianach zbiornika i wirniku przy jak najmniejszym zużyciu energii.

4.3.1. Parametry geometryczne zbiornika i właściwości fizykochemiczne mediów

Zbiornik będący przedmiotem analizy jest tzw. zbiornikiem przejściowym, w którym gromadzona jest zhomogenizowana wodna zawiesina siarczku cynku wraz z dodatkami. Ze zbiornika za pomocą pomp zawiesina jest podawana do pieców hutniczych. Poziom zawieszyny w zbiorniku jest okresowo uzupełniany. Parametry geometryczne zbiornika zebrano w tabeli 2.

Parametry geometryczne zbiornika

Tabela 2

Parametr	Jednostka	Wartość
Średnica zbiornika	[m]	3,7
Wysokość zbiornika	[m]	2,7
Maksymalny poziom wypełnienia	[m]	2,5
Minimalny poziom wypełnienia	[m]	1,5
Rodzaj pokrywy górnej	–	Otwarty
Rodzaj dna	–	Płaskie
Łamacze fal	–	Brak

Opracowano modele geometryczne dla czterech wersji konstrukcyjnych wirników mieszadła pionowego tj:

- model mieszadła z pojedynczym czterołopatowym wirnikiem turbinowym z łopatkami pochyłymi,
- model mieszadła z pojedynczym w trójęłopatowym wirnikiem interferencyjnym,
- model mieszadła z dwoma wirnikami: górnym dwułopatowym interferencyjnym i dolnym dwułopatowym turbinowym z łopatkami pochyłymi,
- model mieszadła z wirnikiem trójęłopatowym z łopatkami o profilu kołowym.

Parametry geometryczne wirników mieszadeł zamieszczono w tabelach 3 – 6. Modele geometryczne zbiornika i mieszadła z różnymi wariantami wirników przedstawiono na rysunku 14.

Udział masowy fazy stałej w zawieszynie wynosi 77%, co odpowiada udziałowi objętościowemu 44%. Tak wysoki udział objętościowy cząstek stałych powoduje, że zawiesina jest cieczą nienewtonowską. Współczynnik lepkości zawieszyny można oszacować na podstawie wzoru empirycznego Hatschek'a [24, 59]:

$$\mu_z = \frac{\mu_l}{1 - \alpha_s^{1/3}} \quad (138)$$

gdzie:

μ_z – dynamiczny współczynnik lepkości zawiesiny,

μ_l – dynamiczny współczynnik lepkości cieczy,

α_s – udział objętościowy cząstek stałych.

W tabeli 3 zebrano właściwości fizyczne zawiesiny i jej składników.

Właściwości fizykochemiczne mediów

Tabela 3

Parametr	Blenda cynkowa	Woda	Zawiesina
Gęstość [kg/m ³]	4200	998,2	2419,4
Udział masowy w zawieszynie [%]	77	23	-
Udział objętościowy w zawieszynie [%]	44	66	-
Dynamiczny współczynnik lepkości [Pas]	-	0,001	0,004
Średnica medialna cząstek [mm]	0,05	-	-

Parametry geometryczne mieszadła w wersji 1

Tabela 4

Parametr	Jednostka miary	Wartość
Liczba wirników na wale	-	1
Średnica wału	mm	168
Prędkość obrotowa	1/min	46,6
Oznaczenie wirnika		PBT1920/280/45/800
Rodzaj wirnika		turbinowe z łopatkami pochyłymi
Średnica mieszadła	mm	1920
Odległość od dna zbiornika	mm	800
Kierunek pompowania	-	w dół
Przesunięcie kątowe	deg	0
Liczba łopat	-	4
Kąt pochylenia łopat	deg	45
Szerokość łopaty	mm	280
Grubość łopaty	mm	10
Średnica piasty	mm	250
Wysokość piasty	mm	250

Parametry geometryczne mieszadła w wersji 2

Tabela 5

Parametr	Jednostka miary	Wartość
Liczba wirników na wale	-	1
Średnica wału	mm	168
Prędkość obrotowa	1/min	46,6
Wirnik	-	Dolny
Oznaczenie wirnika	-	PBT1400/280/35°/800↓ PBT2000/210/- 30°/800↑
Rodzaj wirnika	-	Interferencyjny
Średnica mieszadła	mm	2000
Odległość od dna zbiornika	mm	800
Kierunek pompowania	-	Część zewnętrzna: w górę Część wewnętrzna: w dół
Przesunięcie kątowe	deg	0
Liczba łopat	-	4
Kąt pochylenia łopat – część zewnętrzna	deg	35°
Kąt pochylenia łopat – część wewnętrzna	deg	-30°
Szerokość łopaty – część zewnętrzna	mm	210
Szerokość łopaty – część wewnętrzna	mm	280
Grubość łopaty	mm	10
Średnica piasty	mm	290
Wysokość piasty	mm	290

Parametry geometryczne mieszadła w wersji 2B

Tabela 6

Parametr	Jednostka miary	Wartość	
Liczba wirników na wale	-	1	
Średnica wału	mm	168	
Prędkość obrotowa	1/min	39	
Wirnik	-	Górny	Dolny
Oznaczenie wirnika		PBT2000/250/-25°/800↓ PBT3100/200/20°/800↑	PBT1500/85°/200/↑
Rodzaj wirnika		Interferencyjny	turbinowe z łopatkami pochylonymi
Średnica mieszadła	mm	3100	1500
Odległość od dna zbiornika	mm	800	200
Kierunek pompowania	-	Część zewnętrzna: w górę Część wewnętrzna: w dół	w górę
Przesunięcie kątowe	deg	0	90
Liczba łopat	-	2	2
Kąt pochylenia łopat – część zewnętrzna	deg	20°	85°
Kąt pochylenia łopat – część wewnętrzna	deg	-25°	
Szerokość łopaty – część zewnętrzna	mm	200	200
Szerokość łopaty – część wewnętrzna	mm	250	
Grubość łopaty	mm	10	10
Średnica piasty (m)	mm	296	300
Wysokość piasty	mm	296	160

Parametry geometryczne mieszadła w wersji 3

Tabela 7

Parametr	Jednostka miary	Wartość
Liczba wirników na wale	-	1
Średnica wału	mm	168
Prędkość obrotowa	1/min	46,6
Oznaczenie wirnika		K-400/2000/265/30°/800
Rodzaj wirnika		Śmigłowe o profilu łukowym
Średnica mieszadła	mm	2000
Odległość od dna zbiornika	mm	800
Kierunek pompowania	-	w dół
Przesunięcie kątowe	deg	0
Liczba łopat	-	3
Kąt pochylenia łopat	deg	30°
Cięciwa profilu przy piąście	mm	265
Cięciwa profilu na końcu	mm	133
Promień profilu kołowego	mm	400
Grubość łopaty	mm	10
Średnica piasty (m)	mm	264
Wysokość piasty	mm	264

4.3.2. Model obliczeniowy

Zastosowano dwufazowy model eulerowski opisany w rozdziale 2.

Oddziaływanie pomiędzy fazą ciekłą i cząstkami stałymi uwzględniono wykorzystując model Gidaspow'a, podobnie jak w przypadku opisanym w rozdziale 4.2. Zastosowano te same równania do obliczenia współczynnika oddziaływań międzyfazowych K_{sl} , funkcji rozkładu radialnego $g_{0,ss}$, ciśnienia cząstek stałych p_s , lepkości wolumetrycznej λ_s oraz przyjęto ten sam współczynnik odbicia e_{ss} .

Składową kinetyczną i zderzeniową lepkości dla fazy uziarnionej obliczano według zależności Gidaspow'a.

Ponieważ stężenie cząstek stałych jest wysokie część kinetyczna i kolizyjna lepkości odgrywa mniejszą rolę, a zaczyna dominować tarcie wewnętrzne. Składowa tarciowa jest dodawana do składowych wynikających z teorii kinetycznej po przekroczeniu pewnej krytycznej wartości

udziału objętościowego cząstek stałych. Przyjmuje się, że dla fazy uziarnionej o maksymalnej gęstości upakowania 0,63 wartość ta wynosi 0,5. Składową tarciovą lepkości obliczano według formuły Schaeffer'a (równanie (29) rozdział 2.1.2.2). W wyrażeniu tym występuje kąt tarcia wewnętrzznego φ dla fazy uziarnionej. Można przyjąć, że kąt ten jest w przybliżeniu równy naturalnemu kątowi zsypania i zawiera się w granicach od 30 do 40° [59]. W omawianym przypadku przyjęto wartość 30°.

Zastosowano pełny model transportu dla temperatury ziarnistej opisany w rozdziale 2.2. Występujący w równaniu transportu dla temperatury ziarnistej współczynnik dyfuzji k_{es} obliczono według formuły Gidaspowa [20]:

$$k_{es} = \frac{15d_s \rho_s \alpha_s \sqrt{\Theta_s \pi}}{4(41 - 33\eta)} \left[1 + \frac{12}{5} \eta^2 (4\eta - 3) \alpha_s g_{0,ss} + \frac{16}{15\pi} (41 - 33\eta) \eta \alpha_s g_{0,ss} \right] \quad (139)$$

gdzie:

$$\eta = \frac{1}{2} (1 + e_{ss}) \quad (140)$$

Turbulencje w fazie ciekłej modelowano przy zastosowaniu modelu „realizable” $k-\varepsilon$ z uwzględnieniem wpływu fazy uziarnionej, z parametrami jak w przykładzie opisanym w rozdziale 4.2.

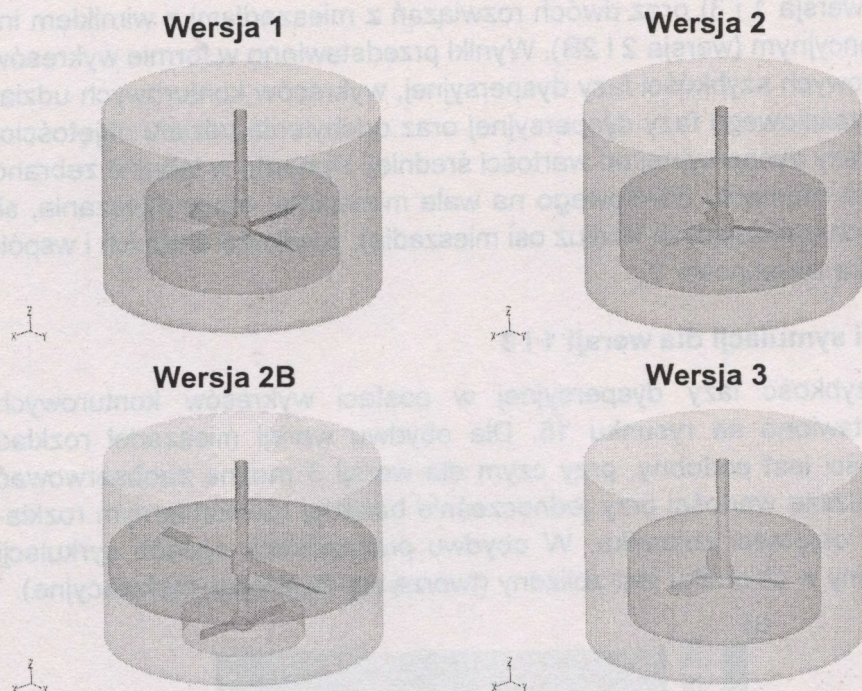
4.3.3. Warunki brzegowe i początkowe

Trójwymiarowy model geometryczny reaktora przedstawiono na rysunku 7. Zastosowano niestrukturalną siatkę objętości skończonych złożoną z elementów czworościennych. Siatka składa się z 195819 elementów dla wersji 1, 72911 elementów dla wersji 2, 260527 elementów dla wersji 2B i 275050 elementów dla wersji 3. W wszystkich przypadkach skośność elementów siatki nie przekraczała 0,7.

Symulację ruchu obrotowego mieszadeł przeprowadzono w oparciu o metodę Multiple Reference Frame. Strefa ruchomego układu odniesienia (rys. 7) została utworzona wokół wirnika mieszadła. Dla strefy MRF układ odniesienia wiruje wokół osi mieszadła z prędkością równą prędkości obrotowej mieszadła według danych w tabelach 4 do 7.

Przyjęto następujące warunki początkowe $\|\vec{V}_i\| = \|\vec{V}_s\| = 0$, $\alpha_s = 0,44$

w całej domenie obliczeniowej oraz założono brak poślizgu na ściankach zbiornika i powierzchni mieszadła. Turbulencje w strefie przyściennej modelowano za pomocą standardowej funkcji przyściennej.



Rys.14. Modele geometryczne zbiornika i mieszadeł, strefy ruchomego układu odniesienia (MRF) oznaczono kolorem zielonym

4.3.4. Metody rozwiązania modelu dyskretnego

Zastosowano solver typu „pressure based” dla stanu ustalonego. Sprężenie ciśnienie-prędkość realizowano według algorytmu Phase Coupled SIMPLE. Dyskretyzację członów konwekcyjnych i dyfuzyjnych przeprowadzono według schematu Second Order Upwind. Dyskretyzację równania korekcji dla ciśnienia przeprowadzono według schematu Second Order Upwind. Kryterium zbieżności stanowiły bezwzględne wartości residualne dla równania ciągłości, składowych prędkości, energii kinetycznej turbulencji, szybkości dyssypacji energii kinetycznej turbulencji oraz udziału objętościowego fazy rozproszonej. Dla wszystkich wymienionych wartości residualnych przyjęto kryterium na poziomie 10^{-3} .

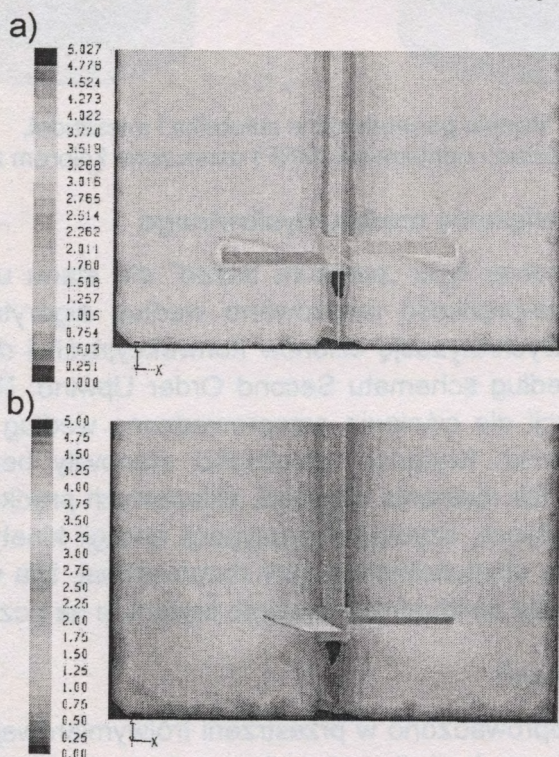
4.3.5. Wyniki obliczeń

Obliczenia przeprowadzono w przestrzeni trójwymiarowej dla stanu ustalonego. Wyniki symulacji dla czterech wyżej wymienionych wariantów mieszadła przedstawiono w formie bezpośredniego porównania podobnych wariantów konstrukcyjnych tzn. wersji z mieszadłem turbiny z łopatkami pochylonymi i z mieszadłem śmigłowym o profilu koło-

wym (wersja 1 i 3) oraz dwóch rozwiązań z mieszadłami z wirnikiem interferencyjnym (wersja 2 i 2B). Wyniki przedstawiono w formie wykresów konturowych szybkości fazy dyspersyjnej, wykresów konturowych udziału objętościowego fazy dyspersyjnej oraz odchylenia udziału objętościowego fazy dyspersyjnej od wartości średniej. Ponadto w tabeli 8 zebrano wartości momentu obrotowego na wale mieszadła, mocy mieszania, sił osiowych (działających wzdłuż osi mieszadła), prędkości średnich i współczynnika zmienności V_s .

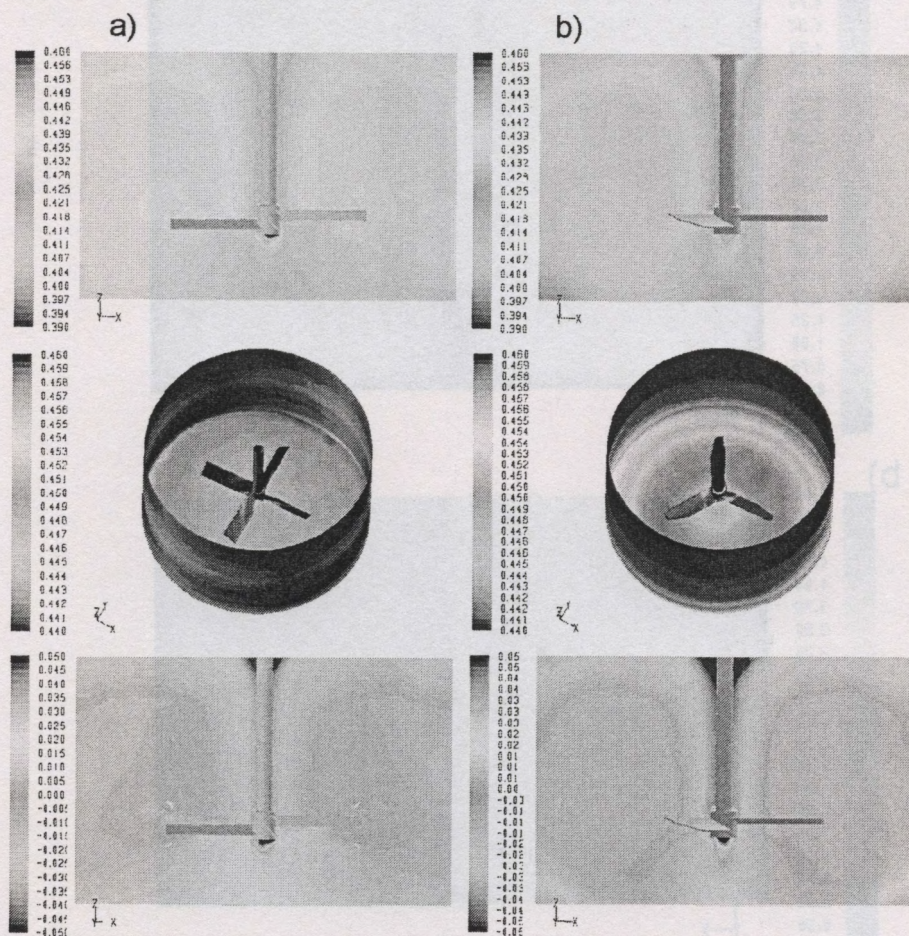
Wyniki symulacji dla wersji 1 i 3

Szybkość fazy dyspersyjnej w postaci wykresów konturowych przedstawiono na rysunku 15. Dla obydwu wersji mieszadeł rozkład szybkości jest podobny, przy czym dla wersji 3 można zaobserwować nieco niższe wartości przy jednocześnie bardziej równomiernym rozkładzie w objętości zbiornika. W obydwu przypadkach sposób cyrkulacji zawiesziny w zbiorniku jest zbliżony (tworzą się dwie pętle cyrkulacyjne).



Rys.15. Rozkład szybkości fazy ciekłej w zbiorniku w płaszczyźnie przekroju xz dla wersji 1 a) i 3 b)

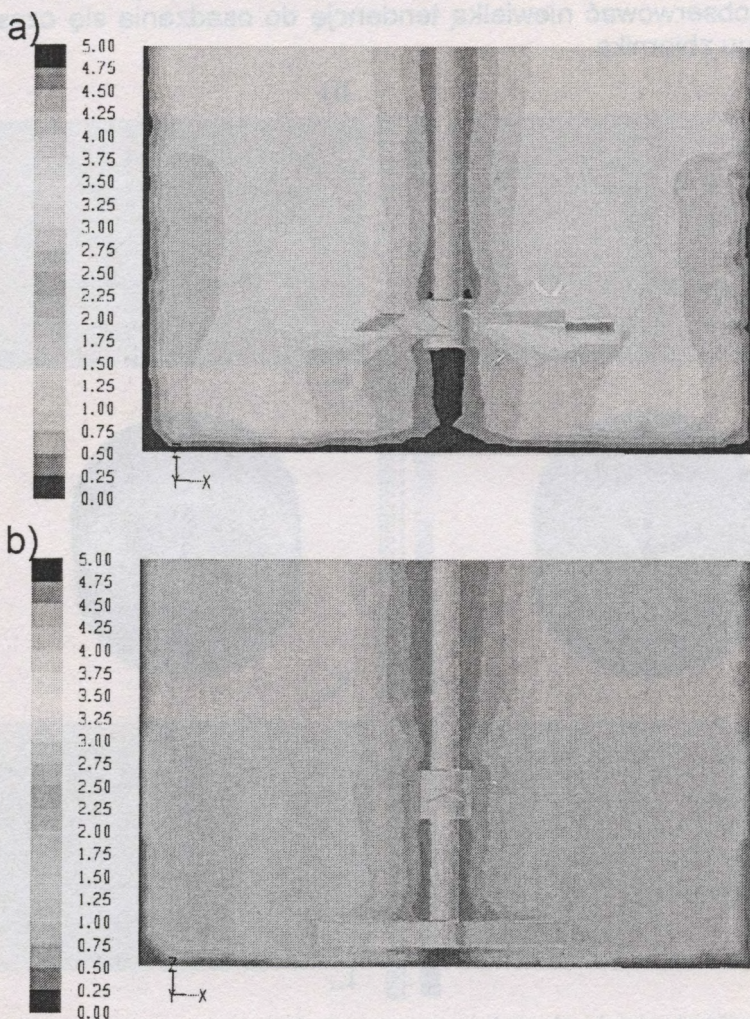
Na rysunku 16 przedstawiono rozkład udziału objętościowego cząstek stałych w płaszczyźnie xz i na ściankach zbiornika oraz rozkład odchylenia udziału objętościowego od wartości średniej obliczonego według wzoru (137). W obliczeniach przyjęto, że do zbiornika jest dostarczana okresowo w pełni zhomogenizowania zawiesina siarczku cynku. W ustalonym polu prędkości rozkład udziału objętościowego również osiąga stan ustalony. W wyniku działania sił odśrodkowych w pobliżu osi zbiornika w obydwu przypadkach udział objętościowy cząstek stałych znacznie odbiega od wartości średniej. Dla wersji 1 w pozostałej części zbiornika udział ten jest bardziej równomierny niż dla wersji 3. Dla wersji 3 można zaobserwować niewielką tendencję do osadzania się cząstek stałych w rogu zbiornika.



Rys.16. Rozkład udziału objętościowego cząstek stałych w płaszczyźnie przekroju XZ , na ściankach zbiornika i mieszadeł oraz wykres konturowy odchyleń udziału objętościowego od wartości średniej dla wersji 1 a) i wersji 3 b)

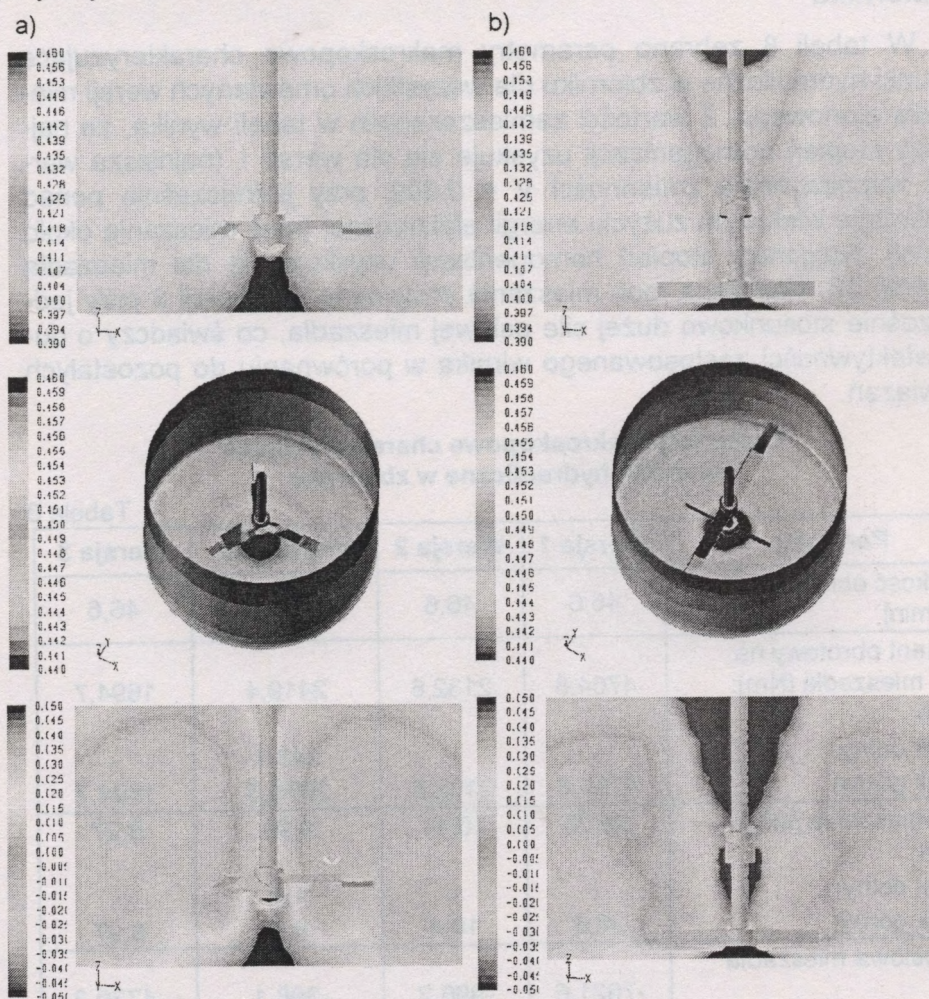
Wyniki symulacji dla wersji 2 i 2B

Rozkład szybkości fazy dyspersyjnej w postaci wykresów konturowych przedstawiono na rysunku 17. Dla wersji 2 można zaobserwować większe gradienty prędkości przy jednocześnie niższej wartości średniej prędkości (przeważająca część zawartości zbiornika ma prędkość z przedziału 0,75 – 1,25 m/s podczas gdy dla wersji 2B z przedziału 1,75 do 2,25 m/s. Charakter cyrkulacji zarówno dla wersji 2 jak i 2B jest niekorzystny. Zwłaszcza przy dnie w osi zbiornika nie ma wyraźnie zaznaczonego kierunku ruchu cieczy.



Rys.17. Rozkład szybkości fazy dyspersyjnej w zbiorniku w płaszczyźnie przekroju xz dla wersji 2 a) i dla wersji 2B b)

Na rysunku 18 przedstawiono w postaci wykresów konturowych rozkład udziału objętościowego cząstek stałych w płaszczyźnie xz i na ściankach zbiornika oraz rozkład odchylenia udziału objętościowego od wartości średniej. Podobnie jak dla wersji 1 i 3 w wyniku działania sił odśrodkowych w pobliżu osi zbiornika zarówno w wersji 2 jak i 2B udział objętościowy cząstek stałych znacznie odbiega od wartości średniej, przy czym efekt ten jest wyraźnie większy.



Rys.18. Rozkład udziału objętościowego cząstek stałych w płaszczyźnie przekroju XZ , na ściankach zbiornika i mieszadeł oraz wykres konturowy odchyłeń udziału objętościowego od wartości średniej dla wersji 2 a) i wersji 2B b)

W przypadku wersji 2B różnica pomiędzy maksymalną i minimalną wartością udziału objętościowego cząstek stałych jest rzędu 15% mimo

iz prędkość obrotowa jest niższa niż w pozostałych przypadkach tj. 39 obr/min. Powodem tego jest szybki ruch obwodowy cieczy wywołany przez dolne mieszadło turbinowe i powstający w wyniku tego wir centralny. Dla obydwu wersji można zaobserwować wyraźną tendencję do osadzania się cząstek stałych na dnie w osi zbiornika.

Parametry makroskopowe charakteryzujące warunki hydrauliczne w zbiorniku

W tabeli 8 zebrano parametry makroskopowe charakteryzujące warunki hydrauliczne w zbiorniku dla wszystkich omawianych wersji mieszadła pionowego. Z wartości zamieszczonych w tabeli wynika, że najlepszy stopień homogenizacji uzyskuje się dla wersji 1 (najniższa wartość współczynnika zmienności $V = 0,009$) przy jednocześnie ponad dwukrotnie większym zużyciu energii elektrycznej (moc mieszania około 23 kW). Najgorszy stopień homogenizacji uzyskuje się dla mieszadła w wersji 2B. Najniższą moc mieszania otrzymano dla wersji 3 przy jednocześnie stosunkowo dużej sile osiowej mieszadła, co świadczy o dużej efektywności zastosowanego wirnika w porównaniu do pozostałych rozwiązań.

Parametry makroskopowe charakteryzujące warunki hydrauliczne w zbiorniku

Tabela 8

Parametr	Wersja 1	Wersja 2	Wersja 2B	Wersja 3
Prędkość obrotowa [obr/min]	46,6	46,6	39	46,6
Moment obrotowy na wale mieszadła [Nm]: w tym:	4764,8	2132,6	2419,4	1694,7
Wirnik dolny:	-	-	343,1	-
Wirnik górny:	4764,8	2132,6	2076,3	1694,7
Moc mieszania [kW]: w tym:	23,26	10,41	9,90	8,27
Wirnik dolny:	-	-	1,4	-
Wirnik górny:	23,6	10,4	8,5	8,27
Siła osiowa mieszadła [N]: w tym:	-7621,6	-996,2	-398,1	-4730,2
Wirnik dolny:	-	-	802,2	-
Wirnik górny:	-7621,6	-996,2	-1200,5	-4730,2
Prędkość średnia [m/s]	1,6	1,05	1,67	0,93
Współczynnik zmienności V_s	0,009	0,013	0,022	0,013

4.3.6. Wnioski

Rozkład prędkości i postać cyrkulacji cieczy w mieszalniku dla wersji 1 jest najkorzystniejszy z punktu widzenia skuteczności mieszania. Dla tego wariantu uzyskano najwyższy stopień homogenizacji. Zasadniczą wadą tego rozwiązania jest ponad dwukrotnie większa moc mieszania.

Wersje 2 i 2B są nie do przyjęcia ze względu na najmniej korzystny rozkład udziału objętościowego cząstek stałych w zbiorniku. Ponadto w wersji 2B może zachodzić konieczność zastosowania dolnego łożyskowania wału mieszadła.

Optymalnym rozwiązaniem ze względu na moc mieszania i stopień homogenizacji jest mieszadło w wersji 3. Jednakże wadę tego rozwiązania może stanowić tendencja do osadzenia się cząstek stałych w rogu zbiornika. Rozwiązaniem może być niewielkie zmniejszenie odległości mieszadła od dna zbiornika przy jednoczesnym zwiększeniu prędkości obrotowej.

5. Zakończenie

Symulacje komputerowe przy użyciu metod numerycznej mechaniki płynów stanowią jeden z wielu etapów projektowania, którego zadaniem jest najczęściej optymalizacja procesu technologicznego oraz analiza zagadnień związanych z bezpieczeństwem i ochroną środowiska. Wymusza to odpowiedni poziom dokładności wyników obliczeń. Ograniczenie stanowią wymagane zasoby sprzętowe oraz czas przeprowadzenia obliczeń. Porównując stan wiedzy dotyczącej przepływów jednofazowych i wielofazowych, można stwierdzić, że metody symulacji przepływów wielofazowych w dalszym ciągu wymagają doskonalenia. Zasadniczym utrudnieniem jest tutaj mnogość i różnorodność zjawisk fizycznych obecnych w tego rodzaju przepływach, dająca w wielu przypadkach zaskakujące i istotne z praktycznego punktu widzenia efekty. Z tych też powodów stosuje się różne podejścia, stosownie do typu modelowanego przepływu i występujących zjawisk.

Ze względu na łatwość zastosowania do złożonych geometrii, szerokiego zakresu liczb Reynoldsa oraz dużej liczby modelowanych części, podejście typu Euler-Euler przedstawione w zarysie w niniejszym opracowaniu jest najpowszechniej stosowane w praktyce inżynierskiej do modelowania procesów przemysłowych. Struktura równań konstytutywnych oraz koszt numeryczny jest w tym przypadku porównywalny z metodą RANS dla przepływów jednofazowych. Alternatywna metoda Euler-Lagrange RANS jest jednak łatwiejsza w zastosowaniu w przypadkach wymagających sformułowania złożonych warunków brzegowych (np. ścianki o dużej chropowatości), w przepływach polidispersyjnych czy przepływach z koalescencją i rozpadem fazy rozproszonej.

Poza wyborem właściwego podejścia, kluczowym elementem mającym wpływ na dokładność otrzymanych wyników jest trafność przyjętych modeli matematycznych zachodzących zjawisk fizycznych. Główną słabością modelu Euler-Euler RANS jest w dalszym ciągu, mimo licznych badań, model oddziaływania wzajemnego turbulencji i cząstek, model oddziaływań pomiędzy cząstkami oraz model wielofazowej warstwy przyściennej. Metody dokładniejsze lecz znacznie bardziej kosztowne numerycznie jak DNS (Direct Numerical Simulation) i LES (Large Eddy Simulation), są praktycznie niemożliwe na dzień dzisiejszy do zastosowań inżynierskich, jednak ogrywają znaczącą rolę w doskonaleniu modeli matematycznych zjawisk wielofazowych. Obliczenia metodą DNS/LES wymagają weryfikacji eksperymentalnej, często trudnej do realizacji ze względu na konieczność wyizolowania tylko określonych zjawisk. Wydaje się więc, że metoda Euler-Euler RANS na długo pozostanie najszerzej stosowaną w praktyce inżynierskiej metodą symulacji przepływów wielofazowych.

Literatura

- [1] Alberts W.A.: Doctorate Thesis, Utrecht 1957.
- [2] Amsden A.A., Harlow F.H., A Simplified MAC Technique for Incompressible Fluid Flow Calculations, *Journal of Computational Physics* 6 (1970) 322-325.
- [3] Arastoopour H., Pakdel P., Adewumi M.: Hydrodynamic analysis of dilute gas-solids flow in a vertical pipe. *Powder Technology* 62, (1990), 163–170.
- [4] Bagnold R.A.: Experiments on a gravity-free dispersion of large solids spheres in a Newtonian fluid under shear, *Proc. Roy. Soc. A* 225, (1954), 49–63.
- [5] Blaschke S., Blaschke W.: *Maszyny i urządzenia do przeróbki kopaliny*. Kraków, AGH (1990).
- [6] Brennen Ch.E.: *Fundamentals of Multiphase Flow*, Cambridge University Press, (2005).
- [7] Brzezina R., Sablik J.: Zastosowanie maszyny flotacyjnej IZ – 12 do wzbogacania mułów węglowych. *Projekty – Problemy, Budownictwo Węglowe*, 3 (1978).
- [8] Chapman S., Cowling T.G.: *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 3rd edition, (1990).
- [9] Chorin A.J.: Numerical solution of navier-stokes equations. *Mathematics of Computation*, 22, (1968), 745–762.
- [10] Csanady G.T.: Turbulent Diffusion of Heavy Particles in the Atmosphere, *J. Atmos. Science*, 20, (1963), 201–208.
- [11] Dalla Valle J. M.: *Micromeritics*. Pitman, London, (1948).
- [12] Ding J., Gidaspow D.: A Bubbling Fluidization Model Using Kinetic Theory of Granular Flow. *AIChE J.*, 36 (4), (1990), 523–538.
- [13] Domagin J.F., Gardin P., Brunet M.: Experimental And Numerical Investigation Of Gas Stirred Ladles, Second International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries CSIRO, Melbourne, Australia, 6-8 December 1999.
- [14] Drew D., Lahey R.T.Jr.: Application of general constitutive principles to the derivation of multidimensional two phase flow equations, *Int. J. Multiphase Flow* 7, (1979), 243-264.
- [15] Drew D. A., Lahey R.T.: *Particulate Two-Phase Flow*, Butterworth-Heinemann, Boston, (1993), 509–566.

- [16] Elgobashi S.E., Abou-Arab T.W.: A Two-Equation Turbulence Model for Two-Phase Flows, *Phys. Fluids*, 26, (1983), 931-938.
- [17] Elsner J.W.: *Turbulencja przepływów*. Warszawa: PWN, (1987).
- [18] Ergun, S.: Fluid flow through packed columns. *Chemical Engineering Progress* 48 (2), (1952), 89-94.
- [19] FLUENT 12 Theory Guide, ANSYS Incorporated, (2009).
- [20] Gidaspow D., Bezburuah R., Ding J.: Hydrodynamics of Circulating Fluidized Beds, Kinetic Theory Approach. In *Fluidization VII, Proceedings of the 7th Engineering Foundation Conference on Fluidization*, (1992), 75-82.
- [21] Gidaspow D.: *Multiphase Flow and Fluidisation*, Academic Press, San Diego (1994).
- [22] Harlow F.H., Nakayama P.I.: Transport of turbulence energy decay rate. University of California (1968), Rep. LA-3854.
- [23] Harlow F.H., Welch J.E.: Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, *Physics and Fluids* 8, (1965), 2182-2189.
- [24] Hatschek E.: The general theory of viscosity of two-phase systems, *Transaction of the Faraday Society*, 9, 80 (1913).
- [25] Hinze J.O.: "Turbulence", McGraw-Hill Publishing Co., New York, (1975).
- [26] Ibdır H., Arastoopour H.: Modeling of multi-type particle flow using kinetic approach, *AIChE Journal*, May 2005.
- [27] Ishii M., Zuber N.: Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows. *AIChE J.* 25 (1979), 843-855.
- [28] Jakobsen H.A., *Chemical Reactor Modeling*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2008), rozdz.3 Multiphase Flow.
- [29] Jayatilaka C., The Influence of Prandtl Number and Surface Roughness on the Resistance of the Laminar Sublayer to Momentum and Heat Transfer, *Prog. Heat Mass Transfer*, 1, (1969), 193-321.
- [30] Johnson P.C., Jackson R.: Frictional-Collisional Constitutive Relations for Granular Materials, with Application to Plane Shearing. *J. Fluid Mech.*, 176, (1987), 67-93.
- [31] Kallio S., Manninen M., Taivassalo V.: Turbulence in mixture models. Report: 98-1, Åbo Akademi, Department of Chemical Engineering, Åbo, 1-31, (1998).
- [32] Kim S.E., Choudhury D.: A Near-Wall Treatment Using Wall Functions Sensitized to Pressure Gradient. In *ASME FED Vol. 217, Separated and Complex Flows* ASME, 1995.

- [33] Koh P.T.L., Schwarz M.P.T., Zhu Y., Bourke P., Peaker R., Franzidis J.P.: Development of CFD Models of Mineral Flotation Cells, Therd International Conference in the Minerals and Process Industries, CISRO, Melbourne, Australia 10-12 December 2003.
- [34] Kolev N.I.: Multiphase Flow Dynamics 2: Thermal and Mechanical Interactions, Springer, Berlin, Germany, 2nd edition edition, (2005).
- [35] Launder B. E., Spalding D. B.: Lectures in Mathematical Models of Turbulence. Academic Press, London, England, (1972).
- [36] Launder B.E., Spalding D.B.: The Numerical Computation of Turbulent Flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 3, (1974), 269–289.
- [37] Lebowitz J.L.: Exact Solution of Generalized Percus-Yevick Equation for a Mixture of Hard Spheres. The Phy. Rev., 133(4A), (1964), A895–A899.
- [38] Leonard B.P., Mokhtari S.: Ultra-Sharp Nonoscillatory Convection Schemes for High-Speed Steady Multidimensional Flow. NASA TM 1-2568 (ICOMP-90-12), NASA Lewis Research Center, (1990).
- [39] Lopes R.J.G., Quinta-Ferreira R.M.: Turbulence modelling of multiphase flow in high-pressure trickle-bed reactors, Chemical Engineering Science 64, (2009), 1806-1819.
- [40] Lu, H., Gidaspow, D.: Hydrodynamics of binary fluidization in a riser: CFD simulation using two granular temperatures. Chemical Engineering Science 58, (2003), 3777–3792.
- [41] Lu H., He Y., Gidaspow D., Yang L., Qin Y.: Size segregation of binary mixture of solids in bubbling fluidized beds. Powder Technology 134, (2003), 86–97.
- [42] Lun C.K.K., Savage S.B., Jeffrey D.J., Chepurniy N.: Kinetic Theories for Granular Flow: Inelastic Particles in Couette Flow and Slightly Inelastic Particles in a General Flow Field. J. Fluid Mech., 140, (1984), 223–256.
- [43] Ma D., Ahmadi G.: A Thermodynamical Formulation for Dispersed Multiphase Turbulent Flows. Int. J. Multiphase Flow, 16, (1990), 323–351.
- [44] Manninen M., Taivassalo V., and Kallio S.: On the mixture model for multiphase flow. VTT Publications 288, Technical Research Centre of Finland, Espoo, (1996), 1-67.
- [45] Mih W.C.: An empirical shear stress equation for general solid–fluid mixture flows, International Journal of Multiphase Flow 19, (1993), 683–690.

- [46] Morsi S.A., Alexander A.J.: An Investigation of Particle Trajectories in Two-Phase Flow Systems. *J. Fluid Mech.*, 55(2), (1972), 193-208.
- [47] Murthy B.N., Ghadge R.S., Joshi J.B.: CFD simulations of gas-liquid-solid stirred reactor: prediction of critical impeller speed for solid suspension. *Chemical Engineering Science* 62, (2007), 7184-7195.
- [48] Ogawa S., Umemura A., and Oshima N.: On the Equation of Fully Fluidized Granular Materials. *J. Appl. Math. Phys.*, 31, (1980), 483.
- [49] Orszag S.A., Yakhot V., Flannery W.S., Boysan F., Choudhury D., Maruzewski J., Patel B.: Renormalization Group Modeling and Turbulence Simulations, International Conference on Near-Wall Turbulent Flows, Tempe, Arizona, 1993.
- [50] Oshinowo L.M., Bakker A.: Symposium on Computational Modeling of Metals, Minerals and Materials, TMS Annual Meeting, February 17-21, 2002, Seattle, WA.
- [51] Patankar S.V.: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere, Washington DC, 1980.
- [52] Potter M.C., Wiggert D.C., Hondzo M.: Mechanics of Fluids, second ed., Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall (1997).
- [53] Prince M. J., Blanch H.W.: Bubble coalescence and break-up in air-sparged bubble columns. *AIChE Journal*, 36 (1990), 1485.
- [54] Richardson J.R., Zaki W.N.: Sedimentation and Fluidization: Part I. *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 32, (1954), 35-53.
- [55] Schaeffer D.G.: Instability in the Evolution Equations Describing Incompressible Granular Flow. *J. Diff. Eq.*, 66, (1987), 19-50.
- [56] Schiller L., Naumann Z.: A drag coefficient correlation, *Zeit Ver Deutsch Ing* 77, (1935), 318-325.
- [57] Shih T.H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., Zhu J.: A New $k-\epsilon$ Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows - Model Development and Validation. *Computers Fluids*, 24(3):227-238, 1995.
- [58] Simonin C., Viollet P.L.: Predictions of an Oxygen Droplet Pulverization in a Compressible Subsonic Coflowing Hydrogen Flow, *Numerical Methods for Multiphase Flows*, FED 91, (1990), 65-82.
- [59] Stręk F.: Mieszanie i mieszalniki, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa (1981).

- [60] Syamlal M., Rogers W., O'Brien T. J. MFIx Documentation: Volume 1, Theory Guide. National Technical Information Service, Springfield, VA, (1993). DOE/METC-9411004, NTIS/DE9400087.
- [61] Syamlal M., O'Brien T.J., Computer simulation of bubbles in a fluidized bed. AIChE Symposium Series 85, (1989), 22–31.
- [62] Tchen C.M.: Mean Value and Correlation Problems Connected with the Motion of Small Particles Suspended in a Turbulent Fluid, Martinus Nijhoff, The Hague, (1947).
- [63] Tomiyama A.: Struggle with computational bubble dynamics. Multi-phase Sci. Technol. 10, (1998), 369–405.
- [64] Vandoormaal J.P., Raithby G.D.: Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows. Numer. Heat Transfer, 7, (1984), 147–163.
- [65] Vasquez S.A., Ivanov V.A.: A Phase Coupled Method for Solving Multiphase Problems on Unstructured Meshes, ASME FEDSM'00: ASME 2000 Fluids Engineering Division Summer Meeting, (2000).
- [66] Viegas J.R., Rubesin M.W., Horstman C.C.: On the Use of Wall Functions as Boundary Conditions for Two-Dimensional Separated Compressible Flows, Technical Report AIAA-85-0180, AIAA 23rd Aerospace Sciences. Meeting, Reno, Nevada, 1985.
- [67] Wen C.Y., Yu Y.H.: Mechanics of fluidization. Chemical Engineering Progress Symposium Series 62 (2), (1966), 100–111.
- [68] Wu Q., Kim S., Ishii M., Beus S.G.: One-group interfacial area transport In vertical bubble flow, Int. J. Heat Mass Transfer 41, (1998), 1103–1112.
- [69] Xu J., Rouelle A., Smith K.M., Celik D., Hussaini M.Y., Van Sciver S.W.: Two-phase flow of solid hydrogen particles and liquid helium, Cryogenics 44 (2004) 459–466.
- [70] Yakhot V., Orszag S.A.: Renormalization Group Analysis of Turbulence: I. Basic Theory. Journal of Scientific Computing, 1(1), (1986), 1–51.
- [71] Yang Y.L., Jin Y., Yu Z.Q., Zhu J.X., Bi H.T.: Local slip behaviors in the circulating fluidized bed, AIChE Symposium Series 296, (1993), 81–90.
- [72] Zhou L.X.: Two-Fluid Models for Simulating Dispersed Multiphase Flows-A Review, Journal of Computational Multiphase Flows, 1, 1, (2009).
- [73] Zwietering T.N.: Chemical Engineering, 8 (1958), 244-253.

Modelowanie numeryczne przepływów wielofazowych z fazą dyspersyjną. Podstawy teoretyczne i zastosowanie

Streszczenie

W pracy przedstawiono kilka przykładów zastosowania numerycznej mechaniki płynów (Computational Fluid Dynamics – CFD) do symulacji turbulentnych przepływów wielofazowych w procesach przemysłu wydobywczego. W opracowaniu skoncentrowano się, ze względu na powszechność zastosowania w praktyce inżynierskiej, na metodzie typu Euler-Euler w której faza ciągła i fazy dyspersyjne traktowane są jako wzajemnie przenikające się kontinua. W metodzie tej rozwiązywany jest układ uśrednionych równań Naviera-Stokesa (Reynolds Averaged Navier-Stokes – RANS) oraz równań domykających opisujących turbulencje i oddziaływania międzyfazowe. Z pośród kilku metod modelowania turbulencji omówiono dwurównaniowy model $k-\varepsilon$ również ze względu na jego powszechność zastosowania. Zastosowanie tej metody symulacji do modelowania przepływu typu ciecz-pęcherzyki powietrza przedstawiono na przykładzie maszyny flotacyjnej, przepływu zawiesiny o małym udziale objętościowym cząstek stałych („rozrzedzonego” układu ciecz-cząstki stałe) – na przykładzie mieszania zawiesiny siarki nierozpuszczalnej w dwusiarczku węgla w zbiorniku magazynowym oraz przepływu zawiesiny o dużym udziale objętościowym cząstek stałych – na przykładzie mieszania w zbiorniku magazynowym zawiesiny siarczku cynku w wodzie.

Numerical modelling multiphase flow with dispersion phase. Theoretical grounds and application

Summary

The application of Computational Fluid Dynamics (CFD) for turbulent multiphase flow simulation in the Mining Industry area is presented in the monograph. The main attention is turned out on the RANS Euler-Euler simulation method, which is most commonly used for industrial flows. In this method both continuous and dispersed phases are treated as interpenetrating continua. For each phase Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equation and the set of closing equations are solved. From many different turbulence models available the two-equation $k-\varepsilon$ model is used, because of its robustness and reasonable accuracy. The example of application of Euler-Euler RANS method for simulation of bubble flow in the full scale flotation machine is presented. As an example of low loaded solid suspension flow the simulation of mixing of insoluble sulphur in sulphur dicarbonate suspension is presented. The simulation of mixing process of zinc sulphide in water suspension is an example of dense discrete phase flow.

ISBN: 978-83-60708-48-4