

Śląska Biblioteka Publiczna

56628

II

III.

2084/147
27

MIECZYSLAW BIZOŃ
INŻYNIER MECHANIK I ELEKTRYK

GENEZA LOGIKI

DLA INŻYNIERÓW, TECHNIKÓW
I INNYCH ZAWODÓW W 10-CIU
LEKCJACH ODBYTYCH Z PROF.
JANEM ŁUKASIEWICZEM
W WARSZAWIE W CZASIE
OD 1. DO 20. LIPCA 1942 ROKU

MOTTO: Pauca sed matura.

KATOWICE 1947

18

NAKŁADEM BIURA HANDLOWO-MONTAŻOWEGO INŻ. M. BIZOŃ
KATOWICE, MŁYŃSKA 22 - TEL. 300-40

GENEZA LOGIKI

INŻ. MIECZYSLAW BIZOŃ

18

1084/44

56628

II

Jacek Hajer. Urząd kontroli

Wszelkie prawa zastrzeżone.

Format papieru wg. PN/0—501 A5 148×210 mm.

X 156 923
56 628 <u>II</u>



51

MIECZYSLAW BIZOŃ
INŻYNIER MECHANIK I ELEKTRYK

GENEZA LOGIKI

**DLA INŻYNIERÓW, TECHNIKÓW
I INNYCH ZAWODÓW W 10-CIU
LEKCJACH ODBYTYCH Z PROF.
JANEM ŁUKASIEWICZEM
W WARSZAWIE W CZASIE
OD 1. DO 20. LIPCA 1942 ROKU**

MOTTO: Pauca sed matura.

KATOWICE 1946

**NAKŁADEM BIURA HANDLOWO-MONTAŻOWEGO INŻ. M. BIZOŃ
KATOWICE, MŁYŃSKA 22 - TEL. 300-40**

Przed przystąpieniem do czytania należy przemyśleć:
Wstęp do popularnego zarysu logiki teoretycznej, jako studium przygotowawcze do logiki — czynu rzemieślniczo-przemysłowego. Rozdział pierwszy. M. Bizoń. Katowice 1945 r. Nakład I. R. P. Do nabycia w każdej księgarni.

WSTĘP

DO GENEZY LOGIKI.

OKRES OD 1916 DO 1946.

Autor nauczał na kursach monterskich Kola Elektrotechników przy Stowarzyszeniu Techników w Sosnowcu w latach 1916—1919 następujących przedmiotów: Silniki i silnice elektryczne, akumulatory, pomiary elektryczne; w 1922 r. w Państwowej Szkole Średniej Techniczno-Kolejowej w Sosnowcu a następnie w Wojewódzkiej Szkole Mechanicznej w Królewskiej Hucie w latach 1927 i 1928 nauczał elektrotechniki ogólnej; od r. 1928 do 1934 w Śląskim Instytucie Rzemieślniczo-Przemysłowym prowadził różne kursa zawodowe; w Śląskich Technicznych Zakładach Naukowych w Katowicach od 1934 r. do r. 1936 wykładał fizykę, elektrotechnikę ogólną i maszyny elektryczne; w Szkole Budownictwa Związku Samodzielnych Polskich Budowniczych na Śląsku podjął się w roku 1926 do 1928 r. wykładów arytmetyki, a ostatnio na kursie przygotowawczym do egzaminów mistrzowskich, urządzonym przez Instytut Rzemiosł i Przemysłu w Katowicach w roku 1945, tytułem próby, przystąpił do nauczania rachunków, opartych na wyraźnych podstawach logicznych.

Rozdział drugi.

GENEZA LOGIKI W 10-CIU LEKCJACH.

I przyszedł czas w którym role się zmieniły. Ja uczę. Jestem tym, który wie, a moi uczniowie są tymi, którzy mają się dowiedzieć. Zaczynam spostrzegać, że stosunki nauczyciela do ucznia, wiedzącego do dowiadującego się są stosunkami różnymi. Uczeń często zmuszony okolicznościami bierze rutynę nauczyciela za jego wiedzę, nauczyciel z podobnych względów pokrywa rutyną braki wiedzy a czynnik trzeci, któremu podlega uczeń, podlega nauczyciel, podlega uczeń i nauczyciel, wystawia świadectwa, opatruje je pieczęcią, umieszcza podpisy wiedzących i wydaje tak spreparowane świadectwa dowiadującym się.

Szkoła pracuje!

Jak długo uczyłem elektrotechniki ogólnej, budowy maszyn elektrycznych, tak długo było wszystko w porządku, zdawało mi się, że wiem więcej aniżeli wiedzą moi uczniowie a ucząc, zależało mi tylko na metodzie podejścia do ucznia, aby w jak najprzystępniejszy sposób przyswoić mu wiadomości. Pierwsze lekcje fizyki zniewoliły mnie do powściągliwszego mówienia a w kilka lat później lekcje arytmetyki w Szkole Budownictwa w Katowicach mowę mi odebrały. Zaczęła się poważna praca nad samym sobą. Poprzez najpoważniejsze dzieła matematyczne, które oprócz zmęczenia nie dały mi najmniejszej satysfakcji, wysuwając coraz to nowe nie załatwione problemy, przeniosłem się z kolei na teren logiki, który w rozmaitych grubszych i cieńszych podręcznikach przedstawiał się jako trzęsawisko logiki arystotelesowskiej.

W początkach roku 1938 udało mi się wydobyć za pośrednictwem Komisji Wydawniczej Koła Matematyczno-Fizycznego Słuchaczy Uniwersytetu Warszawskiego „Elementy Logiki Matematycznej” profesora Uniwersytetu Warszawskiego Dr. Jana Łukasiewicza.

Zacząłem czytanie Elementów. Tuż przed wojną miałem już zapisane foljały papieru, podobnie jak to miało miejsce swego czasu na politechnice podczas studium matematyki wyższej, która tak była mi potrzebna w późniejszym praktycznym życiu, jak nauka języka greckiego przebyta w gimnazjum. Tak greka jak matematyka wyższa, obciążały programy, nie dając w praktyce nic coby pozostawało w jakimś możliwym do przyjęcia stosunku do nakładu pracy włożnej w studia odnośnie.

Wojna wybuchła. Trzeciego września 1939 r. opuściłem Katowice, pozostawiając notatki. Żał mi było Elementów, które ładnie oprawione w skórę, pozostawiłem otwarte na biurku, licząc się z tym, że niedługo wrócę. Nie zamknąłem skryptów, aby po powrocie nie potrzeba czasu tracić na wyszukanie miejsca w którym czytanie przerwałem. Widocznie orjentowałem się w sytuacji politycznej tak dobrze jak nasz rząd ówczesny.

We Lwowie po wkroczeniu wojsk sowieckich otwarto uniwersytet. Skontaktowałem z prof. Leonem Chwistkiem, który dowiedziawszy się o moich zamiarach, ułatwił mi korzystanie z otwartej i ogrzewanej podówczas biblioteki uniwersyteckiej. Wertowałem, szukałem i studiowałem od rana do wieczora a materiał był olbrzymi. Dziś wyjaśnione sprawy, stawały się jutro źródłem nowych wątpliwości. Wykłady prof. K. Ajdukiewicza pobudzały moją ciekawość, nie dały mi jednak tych twardych bezapelacyjnych podstaw na których mogłaby wesprzeć się pewnie i spokojnie myśl. Prof. Ingarden omawiał poglądy Husserl’a.

czystem sumieniem posługiwać się niemi przy zastosowaniach. Profesor Łukasiewicz w nadzwyczaj miłej i uprzejmej formie przyjął moją propozycję i już na drugi dzień t. j. 1. lipca 1942 r. rozpoczęliśmy o godzinie piątej popołudniu przy ul. Brzozowej w mieszkaniu profesora, lekcje logiki, które pozostaną w życiu mojem jednym z najmilszych wspomnień. Lekcje te po części notowałem, uzupełniając w domu zauważone braki. To więc co podaję jest wprawdzie zanotowane na podstawie tego co słyszałem od profesora Łukasiewicza i co zdołałem zanotować, ale za ewentualne błędy czy niedokładności ponoszę wyłącznie ja winę i nie mogą one w najmniejszym stopniu być przypisane profesorowi Łukasiewiczowi. **Warto nadmienić, że profesor Łukasiewicz zaznaczył, że gdyby dzisiaj pisał skrypta Logiki Teoretycznej, to napisałby je inaczej czyli, że to co mi zostanie podane jest niejako ostatniem słowem w zakresie podstaw logiki teoretycznej.** Skryptami Elementów podczas lekcji zupełnie się profesor Łukasiewicz nie posługiwał a powracaliśmy do nich tylko na skutek moich zapytań.

Na tle współczesnego rachunku zdań, który poznamy w następnych rozdziałach, sylogistyka Arystotelesa nabiera właściwego wyrazu. Arystoteles bowiem posługuje się intuicyjnie w dowodach trybów sylogistycznych tezami rachunku zdań.

Główne zadanie logiki polega na ustaleniu sposobów prawidłowego wnioskowania i dowodzenia. —

Logika ma dostarczyć każdej nauce, jaknajdoskonalszych narzędzi, usprawniających w zakresie każdej nauki pracę myślową, a w konsekwencji umożliwić równoległe rozumne działanie w każdej dziedzinie.

Ścisłość.

Logika dąży do jak największej ścisłości, a ścisłość tę może osiągnąć przez zbudowanie możliwie precyzyjnego języka. Własna myśl nasza, nie ujęta w słowa, dla nas sa-

mych jest nieuchwytna, a myśl cudza, nie przybrana w jakieś szaty zmysłowe, dostępna być może chyba jasnowidzom. Każda myśl jeśli ma się stać prawdą naukową, którą każdy człowiek mógłby poznać i sprawdzić, musi być ujęta w jakąś formę choćby tylko językową.

Niezbędnym chociaż bynajmniej nie wystarczającym warunkiem, by stwierdzić tożsamość dwóch myśli, jest równokształtność form wyrażających te myśli. Dwa kształty wyrażenia myśli, jeżeli są podobne, to podobieństwo ich kształtów jest ową wspólną cechą, stanowiącą element konotacji, którą nazywamy tożsamością myśli.

Równokształtność.

Tożsamość myśli.

Oba podobne kształty wyrażen są desygnatami konotacji tożsamości myśli.

Przykład:

- 1 Jeśli każdy człowiek jest omylny,
to każdy logik jest omylny.
- 2 Wszelki człowiek jest omylny.

Musimy, aby móc wywnioskować z obu powyższych zdań o podanych kształtach, zdanie trzecie kształtu, „każdy logik jest omylny“, stwierdzić na mocy definicji, że wyraz

wszelki = każdy

a potem, w uznanym zdaniu numer 2 zastąpić na mocy reguły zastępowania definicyjnego wyraz „wszelki“ wyrazem „każdy“, albo odpowiedni wyraz „każdy“ w uznanym zdaniu numer 1 zastąpić wyrazem „wszelki“ i dopiero wtedy, mając uznane zdanie kształtu „każdy człowiek jest omylny“ równokształtne z poprzednikiem okresu warunkowego, można wyprowadzić wniosek „każdy logik jest omylny“ albo, mając uznane zdanie kształtu „jeśli wszelki człowiek jest omylny, to każdy logik jest omylny“, którego poprzednik jest równokształtny z uznanem zdaniem numer 2, wyprowadzić wniosek „każdy logik jest omylny“.

Powiedział E. T. Bell:

Myśl ludzka spoczywa na czterech kolumnach:

Pierwsza kolumna, to kultura egipska;

Druga, to kultura grecka;

Trzecia, to nieeuklidesowa geometria, Łobaczewskiego;

Czwarta wreszcie, to dwuwartościowa logika Łukasiewicza"; — a Jan Łukasiewicz w swych Elementach logiki matematycznej pisze:

Jedną z największych zdobyczy logiki teoretycznej jest stworzenie nowej miary ścisłości naukowej, niedoścignionej dotąd naogół przez matematykę, a tembardziej przez inne nauki.

W ujęciu prof. E. T. Bell'a dwie na cztery kolumny, należą do Polaków. Tak jak w 1939 r. wstydziliśmy się z powodu zachowania się starszyny legionej, tak usprawiedliwioną dumą musi nas napęłniać ten stan rzeczy, który w koncercie myśli logicznej, na skalę światową, naszym rodakom każe grać pierwsze skrzypce.

Rozdział trzeci.

Treść: *Negacja. Połączenie zdań. Funkcja propozycjonalna. Funktory zdaniotwórcze. Przynależność zdań do logiki. Zdania sprzeczne. Wywartościowanie zdania. Funkcja. Matryca negacji. Przeciwiństwo. Kontradiktoryczne przeciwiństwo. Prawda. Fałsz. Błąd. Wartość wyróżniona.*

Negacja. Jeżeli wyrażenie zdaniowe logiczne, wypowiedź, albo zdanie może posiadać jedną z dwóch wartości t. j. 0 albo $N0 = 1$, to należy ono do logiki dwuwartościowej w tym rozumieniu, że wartości jego stanowią przedmiot logiki, przy czym $0 = N1$; $1 = N0$, co czytamy: zero to to samo co nieprawda, że 1; jeden to to samo, co nieprawda, że zero.

„Słońce świeci“ jest zdaniem.

„Słońce świeci“ jest wyrażeniem zdaniowym logicznym, bo o zdaniu tym możemy twierdzić, że posiada wartość 1 albo 0, co rozumiemy tak, że przedstawia ono prawdę albo fałsz. Każde zdanie będące wyrażeniem zdaniowym logicznym możemy przedstawić przy pomocy dowolnej zmiennej zdaniowej p, q, r , i t. d. Każda zmienna zdaniowa reprezentuje każde zdanie logiczne.

Z każdego zdania „ p “ możemy utworzyć jego negację „ Np “, która, będąc każdym zdaniem „ q “ jest zaprzeczeniem każdego zdania pierwotnego „ p “, $Np = q$.

W początkach logiki zdań, nie zwracamy uwagi na związek podmiotu z orzeczeniem ani na stosunek podmiotu do orzeczenia. Traktujemy zdanie jako całość, którą łączyć

możemy z innym zdaniem jako całością w nową całość zdaniową, nie bacząc ani na związek podmiotu z orzeczeniem ani na stosunek podmiotu do orzeczenia.

Przy pomocy logicznych połączeń wyrażeń zdaniowych logicznych powstają nowe wyrażenia logiczne zdaniowe czyli zdania prawdziwe albo fałszywe.

Rozróżniamy kilka następujących logicznych połączeń wyrażeń zdaniowych logicznych:

Funkcje propo- cjonalne:	Wypowiedzi:	Nazwy:	<i>Funkcje propozycyj- ne.</i>
$C\ p\ q$	„Jeżeli p , to q “	Implikacja.	
$K\ p\ q$	„ p i q “	Konjunktja.	
$A\ p\ q$	„ p lub q “	Alternatywa.	
$D\ p\ q$	„ p albo q “	Dysjunktja.	
$E\ p\ q$	„ p wtedy i tylko wtedy, gdy q “	Ekwiwalencja.	

Każde zdanie o którym możemy twierdzić, że posiada wartość 1 albo 0, i tylko takie zdanie, wolno nam przedstawić przy pomocy dowolnej zmiennej zdaniowej p , q , r , lub przy pomocy połączeń zmiennych zdaniowych, dokonanych za pośrednictwem funktorów zdaniotwórczych: C , K , A , D , E .

Do logiki dwuwartościowej nie należy np. wyrażenie zdaniowe „słońce świeci“, lecz należy ta okoliczność, że wyrażenie to ma wartość zero lub jeden, które to wartości są przedmiotem logiki. — Przedmiot będący wyrażeniem zdaniowym typu „ p “, nazywamy zmienną zdaniową. Za zmienną zdaniową możemy podstawiać każde wyrażenie myśli będące zdaniem, posiadającym jedną z dwóch wartości „ $w/0$ “, „ $w/1$ “, przy czym kreska ukośna znaczy, że za „ w “ podstawiamy wartość 0 albo wartość 1.

Pisząc $p=0$ albo $p=1$ mamy na uwadze powyższe okoliczności, przy czym zero znaczy fałsz, jedynka znaczy

prawdę, co jednak, zbliżając nas do żargonu mowy potocznej sprawę bałamuci. Lepiej jest powiedzieć w tym stanie rzeczy gdy słońce świeci, że wartością wyrażenia zdaniowego „słońce świeci“ jest jedynka t. j. $p = 1$, przy czym za „p“ podstawiamy wyrażenie zdaniowe „słońce świeci“, — aniżeli, pisząc jak wyżej, mówić „prawdą jest, że słońce świeci“. Tę ostatnią wypowiedź rozumiemy w logice wyłącznie tak, że wartością wyrażenia zdaniowego „słońce świeci“ jest jedynka czyli, że wyrażenie to, w rozważanym wypadku posiada wartość 1 i nic ponad to.

Ujmując sprawy ogólniej możemy za wyrażenie zdaniowe „słońce świeci“ podstawić wyraz ogólny zdania, przedstawiając je np. literą grecką „ α “ i napisać $\alpha = 1$. „p“ jako zmienna zdaniowa, może mieć jedną z dwóch wartości, w tym rozumieniu, że podstawiając za nią dowolne wyrażenie zdaniowe „ α “, które ma jedną z dwóch wartości, nadajemy jej właśnie tę wartość, którą posiada „ α “ t. j. w rozważanym wypadku wartość 1. Pisząc $p = 1$ wiemy, że za „p“ podstawiliśmy jakieś wyrażenie zdaniowe „ α “, które posiada wartość 1. Jeżeli za „p“ podstawiamy zdanie szczegółowe „słońce świeci“ lub ogólne „ α “ i jeżeli zdanie to posiada wartość jedynkową lub w ogóle wartość „w“, to pisząc $p = 1$ lub $p = w$ powiadamy, że zmienna zdaniowa posiada wartość 1 lub wartość „w“, a więc nie o zdaniu, „słońce świeci“ względnie o zdaniu „ α “ mówimy, lecz o jego wartości logicznej, co wyraża zdanie:

$$p = w$$

będące konotacją desygnatów p, w, albo w wypadku szczegółowym zdanie:

$$p = 1,$$

będące konotacją każdego zdania prawdziwego.

Podstawiając za zmienną zdaniową „p“, zdanie, myślimy i mówimy o jego wartości logicznej.

Ogólnie: p/α
 $\alpha/$ „słońce świeci”
 „słońce świeci”/w
 $p = w$

Szczegółowo:
 p/α
 $\alpha/$ „słońce świeci”
 „słońce świeci”/0
 $p = 0$

albo:
 p/α
 $\alpha/$ „słońce świeci”
 „słońce świeci”/1
 $p = 1$.

Jeżeli za zmienną zdaniową „p” mogę podstawić tylko zdanie np. zdanie „słońce świeci”, którego tylko logiczna wartość należy do logiki, to wtedy „p” to to samo, co logiczna wartość zdania.

Zmienna zdaniowa znaczy tyle co każda, ale tylko jedna, wartość logiczna zdania.

Pisząc $p = 0$, wiemy, że za „p” podstawiliśmy jakieś wyrażenie zdaniowe „ α ”, które posiada wartość 0, przy czym

$$N\alpha = \beta; N0 = 1; 1 = \beta.$$

α , $N\alpha$ nazywamy zdaniami sprzecznymi.

Dane: $p \alpha, w, 1, 0$.

Przesłanki: $Cp/\alpha(p = \alpha)$
 p/α

Przesłanki numerowane:

$$1 \quad Cp/\alpha(p = \alpha)$$

$$2 \quad p/\alpha$$

1 * C 2 — 3 Wiersz dowodowy
 dla twierdzenia 3.

$$3 \quad p = \alpha \quad \text{Wniosek.}$$

I. Przesłanki numerowane:

- 1 $C \ p/\alpha \ p = w$
 $\alpha/\text{słońce świeci}$
 $\text{słońce świeci} / w$
- 2 p/α
 $\alpha/\text{słońce świeci}$
 $\text{słońce świeci} / w$

Rozumowanie:

- 1 * C 2 — 3
- 3 $p = w$

II. Przesłanki numerowane:

- 1' $C \ p/\alpha \ p = 1$
 $\alpha/\text{słońce świeci}$
 $\text{słońce świeci} / 1$
- 2' p/α
 $\alpha/\text{słońce świeci}$
 $\text{słońce świeci} / 1$

Rozumowanie:

- 1' * C 2' — 3'
- 3' $p = 1$

III. Przesłanki numerowane:

- 1" $C \ p/\alpha \ p = 0$
 $\alpha/\text{słońce świeci}$
 $\text{słońce świeci} / 0$
- 2" p/α
 $\alpha/\text{słońce świeci}$
 $\text{słońce świeci} / 0$

Rozumowanie:

- 1" * C 2" — 3"
- 3" $p = 0$

W każdym z powyższych rozumowań udowodniłszy zdanie „q” w oparciu o tezę $CCpqCpq$, i tak w rozumowaniu pierwszym opartym o przesłanki o numerach 1, 2 udowadniamy

zdanie $p \equiv w$, w rozumowaniu drugim opieramy się o przesłanki o numerach 1', 2' udowadniając zdanie $p = 1$, wreszcie w rozumowaniu trzecim w oparciu o przesłanki o numerach 1'', 2'' udowadniamy zdanie $p = 0$.

Za zdanie „słońce świeci“ podstawiamy „w“. Podstawienie może nastąpić dopiero po wywartościowaniu zdania „słońce świeci“. Po wywartościowaniu zdania „słońce świeci“ możemy za zdanie „słońce świeci“ podstawić jego wartość 1 lub 0.

Wywartościowanie zdania.

Wywartościowywanie zdania, nie należy do logiki. Wywartościowawszy zdanie otrzymujemy wartość zdania, którą podstawiamy za zmienną zdaniową.

W logice rachujemy wartościami wywartościowanych zdań, które to wartości podstawiamy za zmienne zdaniowe. Wywartościowanie zdań języka potocznego jest trudne, gdyż w każdym wypadku nasuwać się mogą wątpliwości, bo zdania potoczne nie są zawsze jasno określone. Przyjrzyjmy się wywartościowaniu np. zdania „dwa anioły, to tyle co dwa stoły“.

Zdanie to wywartościowane przez arytmetykę otrzyma wartość 1, bo tak nazwa „dwa anioły“, jak nazwa „dwa stoły“ posiada konotację wspólną każdej dwójce. Każda dwójka jest identyczna każdej innej dwójce ze względu na wspólną konotację, a to właśnie wyraża powyższe zdanie i z tego właśnie tytułu arytmetyka uważa je za zdanie prawdziwe. Pozatem możnaby zdanie powyższe uważać za prawdziwe z tego tytułu, że posiada formę definicji, a każda definicja dotyczy się okoliczności, która wraz z nią powstaje i w niej się zawiera a więc każda definicja posiada wartość 1; byłoby to wywartościowanie zdania z tytułu przyjęcia pewnego stanowiska. We fizyce zdanie powyższe prawdopodobnie nie posiadałoby żadnej wartości a tem samem nie da się ono w logice zużytkować. Mowa potoczna może zda-

niu powyższemu przyznać wartość zero, i t. p. Dla dwuwartościowej logiki zdanie powyższe musi posiadać jedną z dwóch wartości. Którą z obu wartości posiada? Tem pytaniem logika się nie zajmuje, bo z wywartościowaniem zdań nie ma ona nic wspólnego.

Łatwiej wywartościowywać zdania arytmetyczne aniżeli fizyczne!

Wreszcie definicja zdania prawdziwego posiadać musi wartość 1, bo jest prawdziwa sama przez się. Wyraz „sama przez się” wyraża, że zdanie w formie definicyjnej z tego tytułu posiada wartość 1, że posiada formę definicyjną a ponieważ każda definicja, będąca zdaniem, posiada wartość 1, więc jest prawie że bezsporne, że zdanie posiadające formę definicyjną posiada wartość 1, a powtórę prawdziwość jej nie opiera się na prawdziwości innego zdania tylko na jej własnej prawdziwości.

Jeżeli ktoś mówi: Przez „zdanie prawdziwe” należy rozumieć zdanie, które wyraża tę okoliczność o której można wypowiedzieć zdanie egzystencjalne, będące prawdą Nr. 1., lub prawdą z innego tytułu, to ów ktoś wygłaszając definicję powinien jakoś rozumieć wyrażenie „zdanie prawdziwe”. Wygłaszając definicję wyrażenia „zdanie prawdziwe” stwierdzamy jej podaniem, takie właśnie rozumienie definjowanego wyrażenia. Taka definicja jest prawdziwa na mocy określenia prawdziwości, które się w niej zawiera. Jest to jedyny wypadek, w którym jakieś zdanie może być ściśle i dosłownie wyrażeniem prawdziwym. Wydawać by się mogło, że tylko formalnie moglibyśmy orzekać o wartościach zdań. Gdyby tak było, to rozbieżność między formalnem wywartościowywaniem zdań a ich wywartościowywaniem przez zdrowy rozsądek mogłaby być niepokojąco duża. Poznamy w dalszym ciągu funkcje propozycjonalne, które po wstawieniu w nich

za zmienne zdaniowe ich wartości, przechodzą na podstawie odnośnych matryc zawsze w zdania prawdziwe albo fałszywe, tak, że z ich wywartościowywaniem kłopotu nie mamy o ile posiadamy wartości zmiennych i matrycę funkcji propozycjonalnej. Nie mniej jednak wywartościowywanie zdań mowy potocznej jakoteż wywartościowywanie zdań poszczególnych nauk pozostaje zagadnieniem trudnem.

Jak może odbywać się wywartościowywanie zdania w mowie potocznej?

Za zdanie „ α ” podstawiamy zdanie „słońce świeci”.

Jeżeli zdanie „słońce świeci” jest wyrażeniem zdaniowem odnoszonego w pewnych okolicznościach wrażenia, to odnoszone wrażenie odnosi się do pewnych okoliczności i stanowi z nimi pewną całość, którą skłonni jesteśmy nazywać jedną z nazw jakie posiadają wartości jej wyrażenia zdaniowego. Zdanie „słońce świeci” ma dwie wartości 1 albo 0. Jedyneką albo zerem możemy nazywać ową wspomnianą całość. Zwykle nazywamy ową całość prawdą lub fałszem. Jeżeli słońce świeci, to prawdą jest zdanie, że słońce świeci. Moje wrażenie wraz z okolicznościami wywołującemi je jestem skłonny nazywać tą samą nazwą jaką nazywam jedną z wartości wyrażenia zdaniowego.

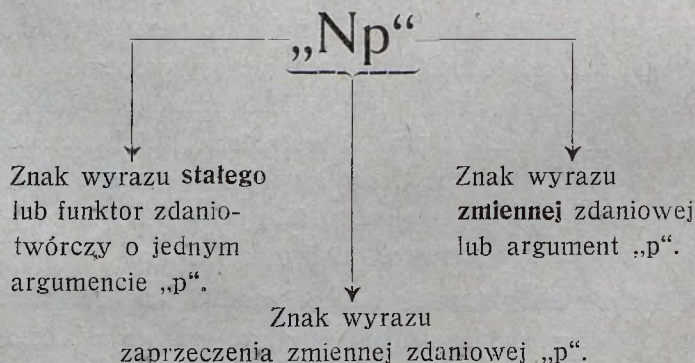
Zdaniowe wyrażenie wrażenia posiada wartość „prawda Nr. 1.”. Zdaniowe wyrażenie wrażenia posiada w każdym wypadku jedną z dwóch wartości 1 albo 0. Ale którą? Dla logicznego zużytkowania wartości zdania jest obojętnem, którą z obu wartości zdanie posiada. Istotnem jest, że jedną posiada. Eksperyment może w odniesieniu do prawdy Nr. 1. rozstrzygać, którą z wartości należy zdaniu „słońce świeci” przypisać.

Negacja.

Nie ma takiej myśli, któraby zdania sprzeczne naraz wyrażać mogły. Za „p“ nie mogę podstawić naraz t. j. w tem samym miejscu i w tym samym czasie „ α “ i „N α “, bo jeżeli coś wyrażam zdaniem „słońce świeci“, to wyrażanie tego samego w tym samym miejscu i w tym samym czasie zdaniem „nieprawda, że słońce świeci“ byłoby może nie wskazane. Byłaby to sprzeczność, której w logice niedopuszczamy; wyrażenie typu $Np = 1$, będące wyrażeniem jej wykluczenia, jest wyrażeniem zasady wyłączonej sprzeczności. (Principle of excluded contradiction).

Wyrażenie „Np“ jest funkcją, bo każde wyrażenie w którym występuje zmienna nazywamy funkcją. Przytoczona funkcja składa się z dwóch wyrazów: Funktora „N“ i argumentu „p“.

„Nieprawda, że p“.



Jeżeli za p podstawiamy α , za α podstawiamy 0, to $p = 0$, $Np = N0 = 1$, jeżeli za p podstawiamy α , za α podstawiamy 1, to $p = 1$, $Np = N1 = 0$.

Zależności te możemy krótko uchwycić przy pomocy matrycy dla przeczenia (negacji).

Matryca negacji.

Funktor zdaniotwórczy N	
Wartości zmiennnej zdaniowej lub argumentu „p”	Wartość negacji „Np”.
N	
p = 0	Np = N0 = 1
p = 1	Np = N1 = 0
N	
0	1
1	0

Przy pomocy funktora zdaniotwórczego „N” odpowiadającego słówku „nie” mowy potocznej, tworzymy z dowolnego zdania jego negację czyli zaprzeczenie.

Funktor „N” umieszczamy przed zdaniem, natomiast w języku potocznym kładzie się słówko „nie” zazwyczaj przed orzeczeniem a w wypadkach, gdy umieszczamy to słówko na początku zdania, zastępujemy je zwrotem „nie jest prawdą, że”, lub „nieprawda, że”

Tak np. zaprzeczeniem zdania „słońce świeci”, będzie zdanie:

„słońce nie świeci” lub
 podmiot orzeczenie

„nie jest prawdą, że słońce świeci” lub
 „nieprawda, że słońce świeci”.

Wyrażenie, składające się z funktora „N” i z jednego argumentu, będącego zdaniem i znajdującego się na prawo od tego funktora, jest zdaniem; mówimy dlatego, że funktor „N” jest funktorem zdaniotwórczym o jednym argumencie zdaniowym.

Mając dane dwa zdania sprzeczne nie przesadzamy sprawy, które z nich posiada wartość 1 a które 0, dopiero po umotywowanem przyjęciu jednego z nich za zdanie o wartości 1 muszę wartość drugiego uważać za 0.

Streszczając się powiemy:

„Np” oznacza kontrydyktoryczne przeciwieństwo wypowiedzi „p”, które czytamy „nie p” lub „nieprawda, że p”.

Nie wolno nam podstawić za „Np” zdania, tylko przeciwnego zdaniu $\alpha/1$ t. j. zdania $\alpha/0$, gdyż uszczupilibyśmy znaczenie funktora zdaniotwórczego „N”.

Funktor zdaniotwórczy „N” z każdego zdania „ α ” tworzy nowe zdanie (sprzeczne), kontrydyktorycznie przeciwne zdaniu „ α ” t. j. zdanie wyczerpujące cały zakres wszelkiej treści poza treścią ujętą zdaniem „ α ”. Zdanie takie wyrażające wszystko, nic nie wyraża. W logice dwuwartościowej wyraża ono przeciwną wartość zdania, bo w logice dwuwartościowej mamy tylko dwie wartości. Jeżeli „N” wyraża wszystko poza jedną z wartości, to może tylko wyrażać drugą wartość, bo nic więcej nie ma.

Zdanie „słońce świeci” wtedy gdy ono świeci jest tyle warte ile warte jest zdanie „zab mię boli” wtedy gdy on mię boli.

Bo nie o zdania a o wartości zdań nam w logice chodzi, dlatego każde z powyższych zdań może być desygнатem konotacji o nazwie „prawda”.

I tak, zdania:

$\alpha/1$; $N(\alpha/1)$ są zdaniami kontrydyktorycznie przeciwnymi czyli sprzecznymi;

$\alpha/0$; $N(\alpha/0)$ są zdaniami kontradiktorycznie przeciwnymi czyli sprzecznymi;

$\alpha/1$; $\alpha/0$ są zdaniami przeciwnymi.

W logice dwuwartościowej już zdanie przeciwne danemu zdaniu wyczerpuje cały zakres treści poza treścią zdania danego, gdyż mamy tylko dwie wartości i nic więcej.

Ponieważ w logice dwuwartościowej zachodzą następujące związki:

$$N(\alpha/1) = (\alpha/0),$$

$$N(\alpha/0) = (\alpha/1),$$

więc $\alpha/1$; $\alpha/0$ lub

$\alpha/0$; $\alpha/1$, to znaczy zdania przeciwne są zarazem zdaniami kontradiktorycznie przeciwnymi czyli sprzecznymi.

W logice dwuwartościowej możemy zawsze napisać zamiast „Np“, znak wartości przeciwny wartości „p“, jak to wskazuje matryca negacji.

„Np“, oznaczając kontradiktoryczne przeciwieństwo wypowiedzi „p“, tworzy z tą ostatnią, połączone w całość przy pomocy słówka „i“, wyraz sprzeczności. „Np“ znaczy wypowiedź, która posiada wartość sprzeczną z wartością wypowiedzi „p“, to znaczy „Np“ jest wtedy 0 gdy „p = 1“ a wtedy 1 gdy „p = 0“.

Reasumując powiemy:

Wszystkie zdania prawdziwe są desygnatami konotacji *Prawda*. o nazwie „prawda“, lub nazwa „prawda“ nazywa konotację, której desygnatami są zdania prawdziwe.

Wszystkie zdania fałszywe są desygnatami konotacji *Falsz*. o nazwie „fałsz“, lub nazwa „fałsz“ nazywa konotację, której desygnatami są zdania fałszywe.

Wartość logiczna jest nazwą konotacji, której desygnatami są zdania logiczne.

Błąd. Jakkolwiek chcę uznawać jedną z wartości a odrzucać drugą, to jednak może się zdarzyć, że wskutek nieświadomości lub nieuwagi uznam tę wartość, którą chciałem odrzucić a odrzuczę tę, którą chciałem uznać. Wtedy popełniam błąd.

Jeżeli chcę uznawać fałsz a odrzucać prawdę a uznam prawdę i odrzuczę fałsz, to popełniam błąd

Byłoby to, ogólnie rzecz biorąc, w porządku, gdyby zdania nie wyrażały także rzeczywistości.

Skoro jednak zdania rzeczywistość jakoś wyrażają i skoro wyrażanie wyrażamy zdaniem, którego wartość nazywamy prawdą Nr. 1., to lepiej jest uznawać prawdę a odrzucać fałsz i błędem nazywać uznanie fałszu a odrzucenie prawdy.

Błąd jest czymś różnem od fałszu.

Błąd jest nazwą konotacji, której desygnatami są niechcące zmiany stanowisk wyżej wymienionych.

*Wartość
wyróżniona.*

Istotnem jednak jest to, że ze wszystkich wartości tylko jedna nas lepiej obsługuje aniżeli pozostałe. Tę wartość wyróżnioną nazywamy prawdą. Jedna z wartości jest lepsza aniżeli druga. Tę chcemy uważać za lepszą, którą przypisujemy zdaniu wyrażającemu odnośne wrażenie.

Jeślibyśmy przypisali zdaniu „słońce świeci“ w tych okolicznościach w których przypisujemy mu wartość „prawda Nr. 1“, „fałsz Nr. 1“, to wartość 0 z tych samych względów z których wartość 1 uważamy za lepszą, byłaby lepszą i tę wartość wyróżnialibyśmy. Nie jest to jednak istotne a istotnem jest, że jedna wartość zdania jest lepsza aniżeli druga.

Do oceny, która z dwóch wartości jest lepsza, służy ta okoliczność, która każe nam odnoszone wrażenie i jego wyrażanie uważać za coś bardziej rzeczywistego aniżeli inne okoliczności. Niemniej jednak inne okoliczności również mogą służyć do oceny wartości „wartości“.

Która z tych ocen będzie nas lepiej obsługiwała, będzie dla nas korzystniejsza i będzie pozwalała głębiej naszą myśl ufundować, tej się chwycimy. Z wymienionych powodów staję na stanowisku prawdziwościowem, które oznaczam jedynką w kółku ①. Tę ważną okoliczność zaznaczyłem na prawym górnym rogu okładki mego wstępu do popularnego zarysu logiki teoretycznej jako studium przygotowawczego do logiki czynu rzemieślniczo-przemysłowego.

*Stanowisko
prawdzi-
wościowe.*

Rozdział czwarty.

LEKCJA I.

Treść: Najprostszy wywód. Najprostsze reguły wnioskowania. Uznanie zdania „ $a = a$ ”. Tożsamość. Zbiór. Pole, dziedzina, przeciwdziedzina, stosunku dwuczłonowego. Nazwy i zdania jako różne kategorie semantyczne. Uznanie sprzeczności. Uznawanie zasady wykluczonej sprzeczności. Uznawanie zdań z tytułu założenia, konwencjonalizm i banalność. Wartości desygnatów i wartość konotacji.

Rozdział czwarty.

LEKCJA I.

1 VII. 1942 r.

Lekcje nasze zaczniemy od najprostszych wywodów, posługując się najprostszymi regułami wnioskowania, mówił prof. Łukasiewicz.

Mamy dane dwie uznane przesłanki.

Przesłanka pierwsza „ $(a=a)$ “, przesłanka druga „jeżeli $(a=b)$, to nieprawda, że $(a < b)$ “, z których mamy wywieść twierdzenie, „nieprawda że $(a < a)$ “. a, b są liczbami.

W związku z pierwszą przesłanką, która jest dana i uznana nasunęły mi się następujące wątpliwości, które nie pozwalały mi jej uznać.

Jakżeż to „ a “ bez jakichś dalszych zastrzeżeń może być równe „ a “? Przecież jedno „ a “ stoi po lewej stronie znaku równości, drugie „ a “ po jego prawej stronie a więc nie są sobie pod tym względem równe. Jeżeli tak „ a “ po prawej jak „ a “ po lewej stronie znaku równości oznaczają jedną i tę samą liczbę, to jakżeż można do jednej i tej samej liczby stosować znak równości, wymagający dwóch liczb?

Wyłoniła się sprawa identyczności (tożsamości), której nie rozumiałem. Dzisiaj t. j. prawie pięć lat później identyczność rozumiem tak: $a=a$ znaczy, że każda cecha desygnatu „ a “ jest cechą desygnatu „ a “, że te wspólne cechy desygnatów są elementami konotacji, którą oznaczam oznaczeniem „ A “. Oznaczenie „ A “ konotacji oznacza każdy desygnat, co wyrażamy następującymi wyrażeniami:

$$a = A$$

$$a = A$$

Jeżeli $a = A$ i $a = A$, to $a = a$.

Mówimy, że „ a ” jest identyczne z „ a ” ze względu na „ A ”, co wyrażamy wyrażeniem równości $a = a$ lub $a = a$, lub $a = a$ lub $a = a$ desygnatów desygnujących A .

Nie chodzi tu o to, że znaki „ a ”, lub „ a ” są różne co do kształtu, położenia i innych okoliczności lecz chodzi o to, że znaki „ a ” tak jak znaki „ a ” są desygnatami konotacji litery „ A ” a więc mają cechy wspólne i tylko odnośnie tych cech wspólnych są identyczne. Piszac „ a ” lub „ a ” piszę to samo, gdyż myślę tylko o wspólnej im konotacji, którą oznaczam oznaczeniem A . Jeżeli jest tak, to chętnie uznaję przesłankę $a = a$.

Przy tem wskazanem jest pamiętać, że każda **nazwa** spełnia dwie role i dlatego względem **każdej nazwy** należy zająć jedno z dwóch stanowisk, a mianowicie:

1. stanowisko, gdy mówimy **nazwą**
 - o **tej nazwie**,
 - o tym desygnacie desygnującym **również** konotację „**nazwa**”.
2. stanowisko, gdy mówimy nazwą
 - o **każdej nazwie** jako desygnacie desygnującym nazwę „**nazwa**”,
 - o „nazwie” jako konotacji konotującej każdy desygnat,
 - o wszystkich desygnatach nazwy desygnujących konotację „nazwa”,
 - o konotacji nazwy konotującej każdy desygnat.

W wypadku pierwszym nazwą posługujemy się ontologicznie; w wypadku drugim nazwą posługujemy się logicznie. Zajęcie obu stanowisk naraz jest nie wskazane, bo wtedy wzajemne, jednoznaczne porozumienie się jest niemożliwe.

Mówiąc o nazwie, będziemy nazwę o której mówimy brali w cudzysłów, jako zaznaczenie tej okoliczności, że nie będzie to konotacja nazwy w naszych rozważaniach lecz desygnat, konotacji „nazwa“.

Przykład, który nie jest przykładem:

Mówiąc o stole, będziemy stół o którym mówimy brali w cudzysłów, jako znak tej okoliczności, że nie będzie to konotacja stołów lecz desygnat, konotacji „stół“.

Biorąc stół w cudzysłów stajemy na stanowisku 1., ontologicznym tak samo jak wtedy gdy nazwę bierzemy w cudzysłów.

1. stanowisko, gdy mówimy **stołem**
 - o tym stole,
 - o tym desygnacie desygnującym również konotację „stół“.
2. stanowisko, gdy mówimy **stołem**
 - o każdym stole jako desygnacie desygnującym stół „stół“,
 - o „stole“ jako konotacji konotującej każdy desygnat,
 - o wszystkich desygnatach stołu desygnujących konotację „stół“,
 - o konotacji stołu konotującej każdy desygnat.

Jeżeli ten desygnat **desygnuje również konotację „stół“** i jeżeli ten desygnat **desygnuje również konotację „nazwa“**, to oba te desygnaty mają tę cechę wspólną, że każdy z nich desygnuje również konotację odnośną; oba te desygnaty są te same ze względu na ich wspólną cechę, która tworzy ich konotację:

Stół = nazwa.

Nazwa = stół.

Są to identyczności.

Przesłanka $a = a$, która dała powód do powyższych uwag związanych z jej wywartościowaniem jest zdaniem, którym wyrażamy identyczność dwóch różnych desygnatów tej samej klasy ze względu na ich wspólną konotację.

Jako zdanie wyrażające definicyjnie powyższą okoliczność musi wymieniona przesłanka mieć wartość uznaną. Przesłankę $a = a$ uznajemy.

Cechy wspólne stanowiące podstawę wyabstrachowania elementów konotacji są podstawą tożsamości desygnatów ze względu na konotację.

Po wszystkim com przemyślał w roku 1942 a propos identyczności, więcej dla świętego spokoju, a może lepiej dlatego, aby ruszyć z miejsca i doczekać się zapowiedzianego najprostszego wywodu uznałem przesłankę $a = a$; również wydało mi się jasnym zdanie „ $a = b$ “, występujące w drugiej przesłance, ale zdanie „nieprawda, że $a < b$ “ występujące również w tej przesłance wywołało konieczność bliższego omówienia tego stanu rzeczy, który oznaczamy symbolem „ $a < b$ “.

Odnosnie tych wyjaśnień zanotowałem co następuje:

Zbiór przedmiotów w obrębie których rozpatruję stosunek „R“ nazywam polem tego stosunku.

Jeżeli w obrębie zbioru przedmiotów

„a, b, c, d“

rozpatrujemy stosunek „R“, to zbiór ten nazywamy polem tego stosunku.

Przez dziedzinę dwuczłonowego stosunku „R“ rozumiemy klasę tych przedmiotów, należących do pola stosunku, które w tym stosunku „R“ pozostają do jakichś przedmiotów pola.

Przez przeciwdziedzinę dwuczłonowego stosunku „R” rozumiemy klasę tych przedmiotów należących do pola stosunku *do których* pewne przedmioty pola pozostają w stosunku „R”.

Przykład: Do dziedziny stosunku $R = „<”$ t. j. „mniejszy od” w obrębie pola 1, 2, 3, 4, należą przedmioty 1, 2, 3, a do przeciwdziedziny należą przedmioty 2, 3, 4, a to dlatego, że zdania $\underline{1} < 2$, $\underline{2} < 3$, $\underline{3} < 4$ posiadają wartość 1 t. j. są to zdania prawdziwe a do przeciwdziedziny 2, 3, 4 dlatego, że zdania $1 < \underline{2}$, $2 < \underline{3}$, $3 < \underline{4}$ posiadają wartość 1, czyli są zdaniami prawdziwymi.

Matryca stosunku dwuczłonowego.

Stosunek dwuczłonowy.	Drugi człon stosunku dwuczłonowego.
Pierwszy człon stosunku dwuczłonowego.	Wartości stosunku dwuczłonowego, przyczem zakładamy, że wartości mogą być tylko dwie a to: 0 lub 1 t. j. fałsz albo prawda.

Niech stosunkiem będzie stosunek dwuczłonowy „mniejszy od” „<”, członami niech będą liczby porządkowe naturalnego szeregu liczb

1, 2, 3, 4, . . .

Zbadajmy wartości tego stosunku dla pierwszych czterech członów wymienionego szeregu, oznaczając te miejsca w matrycy dla których stosunek zachodzi znakiem „+”, te dla których nie zachodzi znakiem „—”, wreszcie te dla

których trzeba się będzie zastanowić czy zachodzi czy nie, znakiem „.”.

$<$	1	2	3	4
1	.	+	+	+
2	—	.	+	+
3	—	—	.	+
4	—	—	—	.

Czy stosunkowi „ $<$ ” podlegają przedmioty 1,1; 2,2; 3,3; 4,4? Przedmioty 1,1 stosunkowi „ $<$ ” nie podlegają, bo zdanie „ $1 < 1$ ” posiada wartość 0 czyli jest fałszem, podobnie fałszami są zdania $2 < 2$; $3 < 3$; $4 < 4$. W odpowiednich miejscach matrycy musimy postawić znak „—”.

Otrzymamy matrycę:

$<$	1	2	3	4
1	—	+	+	+
2	—	—	+	+
3	—	—	—	+
4	—	—	—	—

albo stosując znaki zdań prawdziwych i fałszywych otrzymamy matrycę:

$<$	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	0	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0

Zdania fałszywe.

$$1 < 1 = 0$$

$$2 < 1 = 0$$

$$2 < 2 = 0$$

$$3 < 1 = 0$$

$$3 < 2 = 0$$

$$3 < 3 = 0$$

$$4 < 1 = 0$$

$$4 < 2 = 0$$

$$4 < 3 = 0$$

$$4 < 4 = 0$$

Zdania prawdziwe.

$$1 < 2 = 1$$

$$1 < 3 = 1$$

$$1 < 4 = 1$$

$$2 < 3 = 1$$

$$2 < 4 = 1$$

$$3 < 4 = 1$$

1 pozostaje do 2 w stosunku „<“ ale 2 nie pozostaje do 1 w stosunku „<“, natomiast 2 jest tym przedmiotem pola do którego przedmiot pola 1 pozostaje w stosunku „<“.

	1 < 2	
Dziedzina	2 < 3	Przeciwdziedzina
	3 < 4	

1, 2, 3, jest to dziedzina pola 1, 2, 3, 4 dla stosunku „<“. 2, 3, 4 jest to przeciwdziedzina pola 1, 2, 3, 4 dla stosunku „<“.

Jeżeli przedmioty a, b, c, pola a, b, c, d, pozostają do przedmiotów b, c, d pola a, b, c, d w zadanym stosunku „R“, to przedmioty b, c, d, pola a, b, c, d są przedmiotami pola *do których* przedmioty a, b, c, pola a, b, c, d pozostają w stosunku „R“.

Pole: a, b, c, d.

Stosunek: R.

Dziedzina a, b, c, pola a, b, c, d dla stosunku R.

Przeciwdziedzina b, c, d, pola a, b, c, d dla stosunku R.

Do dziedziny stosunku „<” w obrębie pola 1, 2, 3, 4 należą przedmioty 1, 2, 3 dlatego, bo istnieją takie przedmioty pola do których te przedmioty 1, 2, 3 pozostają w stosunku „<”. Do przeciwdziedziny stosunku „<” w obrębie pola 1, 2, 3, 4 należą przedmioty 2, 3, 4, dlatego bo istnieją takie przedmioty pola które do tych przedmiotów pola pozostają w stosunku „<”.

Przeciwdziedzina: 2, 3, 4, tu nie należy 1, bo w polu nie ma takiego przedmiotu, któryby pozostawał do jedynki w stosunku „<”.

Powracając do początku naszych uwag o stosunku dwuczłonowym widzimy, że zdanie „ $a < b$ ” wyraża myśl, że przedmiot „b” jest przeciwdziedzina stosunku „<”, co matricowo możemy uchwycić jak następuje:

$<$	a	b
a	0	1
b	0	0

Następujące zdania posiadają wartości prawdziwe względnie fałszywe:

$$\begin{array}{ll} a < b = 1 & a < a = 0 \\ & b < a = 0 \\ & b < b = 0 \end{array}$$

$1 < 2 = 1$, $N2 < 1 = 1$. To, że zdanie $N2 < 1$ jest prawdą, to znaczy, że 2 nie podlega stosunkowi „<” względem 1, to

nie znaczy, aby 2 nie mogło należeć z jakiegoś innego powodu do pola 1, 2, stosunku „ $<$ “.

2 należy do wspomnianego pola dlatego, że do 2, jeden jako przedmiot tego pola, pozostaje w zadanym stosunku a więc dwa musi być przedmiotem pola 1, 2, a będąc jego przedmiotem stanowi element klasy zwanej przeciwdziedzina: pola 1, 2, dla stosunku „ $<$ “.

Prawdą jest, że „ $N 2 < 1$ “ t. j. „ $N 2 < 1 = 1$ “, a więc 2 nie należy do pola 1, 2, z tytułu stosunku „ $<$ “, ale należy do tego pola z tytułu tego, że są przedmioty pola 1, 2, do których 2 pozostaje w stosunku „ $<$ “, bo „ $1 < 2$ “ jest prawdą, to znaczy, że tak przedmiot 1 jak 2 są przedmiotami pola z tytułu stosunku „ $<$ “, bo „ $1 < 2$ “ jest prawdą, to znaczy, że tak przedmiot 1 jak 2 są przedmiotami pola z tytułu stosunku „ $<$ “, tylko należą do innych klas.

Prócz stosunków dwuczłonowych mamy stosunki wieloczłonowe np. „między“ jako stosunek, jest stosunkiem trójczłonowym:

a, b, c pole;

b leży między a, c.

Nazwy i zdania są to dwie różne kategorie semantyczne.

Różność ich można poznać potem, że nie można z sensem zastąpić nazwy przez zdanie i naodwrot.

Nie można powiedzieć z sensem np. „stół stoi stoi“ chyba, że „stół stoi“ byłoby jakąś nowo ukutą nazwą.

Wyliczając np. przedmioty w moim pokoju powiem: posiadam kałamarz, pióro i t. d., ale nie mogę powiedzieć z sensem, że mam przedmiot „kałamarz stoi“, bo jest to zdanie a nie nazwa.

Zdania w znaczeniu logicznym są bądź prawdziwe bądź fałszywe i to jest cechą charakterystyczną zdania logicznego;

o nazwach tego powiedzieć nie można gdyż one nazywają przedmioty. Np. „stół“ jest to nazwa konotacji tego przedmiotu. Przedmiot ten, który nazwa „stół“ nazywa jest dezygnatem tej nazwy.

Zdawało mi się, że zdanie „ $a = b$ “ można równie dobrze wypowiedzieć przy pomocy zdania:

„ $(a < b)$ i $N(a < b)$ “ jednak powstałe ostatecznie zdanie jest zdaniem typu „ α i $N\alpha$ “, które jako sprzeczność usunęliśmy z logiki. Przypuszczałem, że można tak sprawę ująć, że skoro „ $(a < b)$ “ a zarazem „nieprawdą jest, że $(a < b)$ “ t. j. skoro „ $(a < b) = 1$ “, a zarazem „ $N(a < b) = 1$ “, to znaczy skoro (naraż „ a jest mniejsze od b “ i „nie mniejsze od b “), to ponieważ w arytmetyce zachodzi możliwość jeszcze równości, to powinna by ona być właśnie ową sprzecznością zdefiniowana, jako, że zdanie „ $N(a < b)$ “ zawiera w sobie potencjalnie także zdania „ $a = b$ “ lub „ $a > b$ “, wyczerpując, jako negacja kontradiktoryczna cały arytmetycznie możliwy zakres zdań o dwóch liczbach szeregu naturalnego odnośnie stosunków dwuczłonowych „ $<$ “, „ $=$ “, „ $>$ “ poza zdaniem „ $(a < b)$ “.

Podobnie możnaby wypowiedzieć zdania i o innych odnośnych stosunkach t. j. definiować, posługując się wartością zdania sprzecznego jako wartością uznaną i tak:

$$\alpha \text{ i } N\alpha$$

$$(a = b) \stackrel{\text{df}}{=} [(a < b) \text{ i } N(a < b)] \\ a > b$$

$$(a = b) \stackrel{\text{df}}{=} [(a > b) \text{ i } N(a > b)] \\ a < b$$

Mamy udowodnić twierdzenie $N(a < a)$ na podstawie dwóch przesłanek:

„ $(a = b)$ “ i „jeżeli $(a = b)$, to $N(a < b)$ “

a mnie się wydaje, że pierwsza część drugiej przesłanki t. j. zdanie „ $a = b$ “, które możemy zdefiniować jak powyżej zawiera sprzeczność. Otóż, jeżeli staniamy na stanowisku zasady wyłączonej sprzeczności, to znaczy, że zdanie „ $N[(a < b) \text{ i } N(a > b)]$ “ jest prawdą a zdanie „ $[(a < b) \text{ i } N(a > b)]$ “ jest nieprawdą, to zdania ostatniego nie możemy użyć jako naszej przesłanki. Gdybyśmy chcieli zdanie „ $(a = b)$ “ jak powyżej zdefiniować, to musielibyśmy porzucić zasadę wyłączonej sprzeczności a wtedy musielibyśmy się przenieść z naszymi rozumowaniami na jakiś teren opracowywany przez inny rodzaj logiki.

Jeżelibyśmy jednak wkręcili na teren logiki dopuszczającej sprzeczność i uważali zdanie „ $[(a < b) \text{ i } N(a < b)]$ “ za prawdę pewnego rodzaju, to zdanie to wyrażałoby tak dobrze zdanie „ $(a = b)$ “, jak to w logice respektującej zasadę wyłączonej sprzeczności, mogłoby wyrażać z pewnymi zastrzeżeniami zdanie,

$$[N(a < b) \text{ i } N(a > b)],$$

wyrażające to samo co wyraża zdanie „ $a = b$ “, bo jeżeli „ a “ nie mniejsze od „ b “, to znaczy „ a “ może być równe „ b “ lub większe od „ b “ i jeżeli „ a “ nie większe od „ b “, to znaczy „ a “ może być równe „ b “ lub mniejsze od „ b “, to przedstawiając to zdanie w formie „ $[(a > b) \text{ i } (a < b)]$ “ widzimy, że $a > b$ i $a < b$ naraz zachodzić nie mogą więc oba wypadki naraz znaczą to samo co $(a = b)$.

Ten stan rzeczy, który tutaj skreśliłem rzuca światło na naturę przesłanek, których nie uznajemy z tytułu założenia ich prawdziwości t. j. ich wartości jedynekowej a uznając je z głębszych powodów chcemy te powody uznawania tak umotywować, abyśmy uznaniu niczego zarzucić nie mogli.

Gdybyśmy stanęli na stanowisku uznawania z tytułu założenia, to sprawa cała nabrałaby charakteru nie tylko konwencjonalnego, ale stałaby się wręcz banalną, bo każdą wypowiedź z tytułu założenia moglibyśmy uznać.

Pamiętajmy o tem, że obie przesłanki „ $(a = a)$ ” i „jeżeli $(a = b)$, to $N(a < b)$ ” jakoteż wniosek „ $N(a < a)$ ”, który mamy udowodnić są to zdania o liczbach szeregu naturalnego a więc zdania z arytmetyki. Każda zaś liczba szeregu naturalnego prócz początkowej a więc prócz liczby jeden, musi być od innej liczby tego szeregu mniejsza albo większa i tak:

„ $2 < 3$ ”, „ $2 > 1$ ” są to zdania o wartości jedynekowej, bo wypowiadają w wypadkach szczegółowych, wymienioną powyżej, ogólną cechę szeregu liczb naturalnych. Z tego samego powodu zdanie „ $1 < 2$ ” jest zdaniem prawdziwym czyli posiadającym wartość jedynekową, zdanie „ $2 < 1$ ” jest zdaniem posiadającym wartość zerową czyli jest zdaniem fałszywym.

Żadna liczba szeregu naturalnego nie może być równa innej liczbie tegoż szeregu, to znaczy zdania „ $2 = 3$ ” albo „ $3 = 2$ ”, i t.d. są zdaniami fałszywymi.

Jeżelibyśmy wypowiedzieli zdanie np. „ $2 = 2$ ”, to zdanie to, jeżeli ma być prawda, nie może odnosić się do liczb, lecz może się odnosić i odnosi się wyłącznie, do desygnatów liczby dwa.

Jeżeli zdanie „ $2 = 2$ ”, odnoszące się do desygnatów liczby dwa jest zdaniem prawdziwym, to znaczy posiada wartość 1, to zdanie „ $2 = 2$ ”, które miałoby się odnosić do jej konotacji t.j. do konotacji liczby dwa, jest zdaniem fałszywym t.j. zdaniem posiadającym wartość zerową, — bo konotacja liczby dwa, tak zresztą jak konotacja każdej nazwy jest jedna a więc nie może podlegać żadnemu stosunkowi dwuczłonowemu.

Powyższe uwagi odnoszą się do każdej nazwy a tym samym do nazwy każdej liczby.

Uwzględniając powyższe uwagi musimy wartości poniższych zdań podać jak następuje:

$(2 = 2) = 1$, jeżeli zdanie to odnosi się do desygnatów liczby 2.

$(2 = 2) = 0$, jeżeli zdanie to odnosi się do konotacji liczby 2.

$(1 = 1) = 1$, jeżeli 1,1 są desygnatami liczby 1.

$(1 = 1) = 0$, jeżeli zdanie to odnosi się do konotacji liczby 1.

Odczytajmy powyższe zdania uwzględniając znaczenie tych samych znaków, inne w arytmetyce a inne w logice: Liczba dwa równa się liczbie dwa to to samo co prawda, jeżeli zdanie „liczba dwa równa się liczbie dwa“ odnosi się do desygnatów liczby dwa.

Liczba dwa równa się liczbie dwa to to samo co fałsz, jeżeli zdanie „liczba dwa równa się liczbie dwa“ miałoby odnosić się do konotacji liczby dwa.

Wartość każdej liczby szeregu naturalnego prócz liczby początkowej może być „<“, lub „>“ wartości jakiejś innej liczby tego szeregu.

Kiedy odnośne zdania, wypowiadające tę okoliczność posiadają wartość zero a kiedy jedynkę, to widoczne jest z powyższych uwag odnośnie wartości, które zależą od tego czy rozważamy stosunki wśród desygnatów czy konotacji.

W praktyce życia codziennego, pisząc $1 = 1$ i mówiąc że jest to prawda powinniśmy, czego nie robimy, pomyśleć, że do desygnatów liczby jeden odnosi się powyższe zdanie prawdziwe.

Powyższa niedomyślana nieścisłość nie wywołuje wprawdzie w praktyce życia codziennego, żadnych trudności, powoduje jednak, pewną niepewność w ustosunkowaniu się do nazwy „liczba“. Zdań fałszywych nie używamy i dla-

tego przechodzimy stale do porządku dziennego nad wartościami zdań $(1 = 1) = 0$ dla konotacji.

W każdym wypadku są prawdziwe zdania:

$$1 < 2, 3 > 2, \text{ i t. d.}$$

$$2 < 3, 2 < 4, \text{ i t. d.}$$

$$\text{i t. d.}$$

$$2 > 1, 1 < 3, \text{ i t. d.}$$

to znaczy są one prawdziwe tak dla desygnatów jak dla konotacji; te właśnie zdania zupełnie wyraźne, jednoznaczne co do swej wartości są stale używane w mowie potocznej, jednak dobrze jest pamiętać i wiedzieć, że nie w każdym wypadku stosunki tak po prostu się układają.

Odczytajmy zdanie „ $1 < 2$ “, które w każdym wypadku posiada wartość 1. Każdy desygnat konotacji liczby jeden mniejszy od każdego desygnatu konotacji liczby dwa albo liczba jeden mniejsza od liczby dwa.

Konotacja liczby jeden jest taką samą konotacją jak konotacja liczby dwa. Obie te konotacje różnią się tylko nazwą. Ich wyabstrachowywanie z odnośnych desygnatów jest takim samym sposobem postępowania.

Rozdział piąty.

LEKCJA II.

3. VII. 42.

Dowód sformalizowany.

Treść: Wywód albo dowód sformalizowany. Twierdzenie do wywiedzenia albo do udowodnienia. Przesłanki. Wybór przesłanek. Przekształcenie przesłanek. Dowód. Reguła podstawiania r. p. Reguła odrywania r. o. Uznawanie. Implikacja. Funktory zdaniotwórcze. Funktory nazwo-twórcze. Wiersz dowodowy. Przesłanki numerowane. Kreska odrywaniowa. Symboliczna forma dowodu. Dwie uwagi w sprawie następnika.

Rozdział piąty.

LEKCJA II.

3. VII. 1942 r.

Wywód sformalizowany.

Przesłanki. Mamy wywieść twierdzenie N ($a < a$) z dwóch przesłanek, które są uznane w matematyce i które są niewątpliwie prawdziwe t. j. posiadają wartość jedynkową, przy zastosowaniu do oceny ich wartości, kryteriów o których tutaj nie więcej nie będziemy mówili, aby sprawy przystąpienia do wywodu nie przeciągać, godząc się na to, że takie kryteria istnieją i są bezsporne.

1. przesłanka: $a = a$.
2. przesłanka: Jeżeli $a = b$, to nie prawda, że $a < b$.

Twierdzenie. Twierdzenie: Nieprawda, że $a < a$.

Dowód. Dowód: W dowodzie opierać się będziemy na przekształceniach przesłanek dokonanych na mocy uznanych reguł wnioskowania.

Reguły wnioskowania. Takich reguł mamy dwie:

- 1) Reguła podstawiania.
- 2) Reguła odrywania.

Reguła podstawiania. Regułę podstawiania zastosujemy do przesłanki drugiej. Przesłanka 2. ważna jest dla jakichkolwiek liczb „a”, „b”, więc pozostanie ona ważną i wtedy gdy liczby „a”, „b” utożsamimy czyli gdy w naszym przypadku za liczbę „b” podstawimy liczbę „a”.

Podstawiając za liczbę „b” liczbę „a” otrzymamy następujące twierdzenie 3..

3. Jeżeli $a = a$, to nieprawda, że $a < a$.

Teraz zastosujemy regułę odrywania, która brzmi:

*Reguła
odrywania.*

Jeżeli uznany jest okres warunkowy kształtu „jeżeli α , to β ” i uznany jest poprzednik tego okresu warunkowego „ α ”, to wolno nam uznać następnik okresu „ β ”.

Przykład:

Przypuśćmy, że uznane są dwa takie zdania:

- 1.) „Jeżeli dziś jest piątek, to jutro jest sobota”,
- 2.) „dziś jest piątek”,
to uznane jest wtedy zdanie
- 3.) „jutro jest sobota”.

Poprzednikiem okresu warunkowego jest zdanie zaczynające się po słówku „jeżeli” i kończące się przed słówkiem „to”, następnikiem jest reszta okresu warunkowego, zaczynająca się po słówku „to”, aż do końca okresu.

Okres warunkowy nazywamy też implikacją.

Implikacja.

„Jeżeli” jest istotne, to znaczy, jest istotną częścią implikacji, „to” można ewentualnie opuścić.

Implikacja jest pewnego rodzaju funkcją logiczną składającą się z funktora „jeżeli” lub „jeżeli... to”, dwóch argumentów zdaniowych, to znaczy będących zdaniami, z których pierwszy jest poprzednikiem a drugi następnikiem.

Reguła powyższa nazywa się regułą odrywania, bo uprawnia nas do oderwania następnika prawdziwego, uznanego okresu warunkowego, o ile poprzednik tego okresu jest także prawdziwy (uznany).

W prawdziwym okresie warunkowym nie stwierdzamy ani prawdziwości poprzednika ani prawdziwości następnika, tylko stwierdzamy prawdziwość związku poprzednika z następnikiem t. j. prawdziwość okresu warunkowego.

Zastosujmy regułę odrywania do naszego przykładu.

Spójrzmy na twierdzenie

3. „jeżeli $a = a$, to nieprawda, że $a < a$ ”

i na przesłankę

1. „ $a = a$ “.

Widzimy, że przesłanka 1. jest poprzednikiem okresu warunkowego, będącego twierdzeniem 3.. Na mocy reguły odrywania możemy oderwać następnik twierdzenia 3. i otrzymać zdanie,

„nieprawda, że $a < a$ “.

Dowód. Powyższy dowód przedstawimy symbolicznie.

Przesłanki Najpierw przedstawimy przesłanki symbolicznie.

numerowane. 1 ($a = a$), opuszczamy kropkę po jedynce, której poprzednio używaliśmy dla zaznaczenia porządkowego charakteru cyfry jeden. W dalszym ciągu stale będziemy opuszczali kropkę o wymienionym charakterze porządkowym.

Ujmujemy przesłankę w nawiasy dla zaznaczenia, że symbol $a = a$ stanowi całość (jedno zdanie).

2 $C(a = b) N(a < b)$, odnośnie kropki po dwójce i nawiasów uwagi jak wyżej. Funktor „jeżeli... to“ oznaczamy literą wielkie „C“ alfabetu łacińskiego, pisząc go po lewej stronie obu złączonych nim zdań.

Funktor „nieprawda, że“ oznaczamy literą wielkie „N“ alfabetu łacińskiego, pisząc go po lewej stronie jego argumentu t. j. zdania, które ma być zaprzeczone.

Funktory zdaniotwórcze. Funktorem „C“ łączymy zdania „ $(a = b)$ “, „ $N(a < b)$ “, funktorem „N“ zaprzeczamy zdaniu „ $(a < b)$ “. „C“ jest funktorem zdaniotwórczym od dwóch argumentów zdaniowych dlatego, że „C“ postawione przed dwoma po sobie bezpośrednio następującymi zdaniami tworzy nowe zdanie. „N“ jest funktorem zdaniotwórczym od jednego argumentu zdaniowego dlatego, że „N“ postawione przed jednym zdaniem (jakimkolwiek) tworzy nowe zdanie, mianowicie zaprzeczenie owego pierwszego zdania.

Dla uogólnienia dodajemy, że np. „równość (=)“, i „mniejszość (<)“ są także funktorami zdaniotwórczymi,

ale nie od dwóch argumentów zdaniowych, lecz od dwóch argumentów liczbowych, dlatego, że jeżeli „a“, „b“ są liczbami, to „a=b“ lub „= a b“ jest zdaniem.

Jeżeli „a“ jest liczbą, jeżeli „b“ jest liczbą, to znak „+“ jest znakiem funktora liczbotwórczego, gdyż „a + b“ jest liczbą a nie zdaniem. *Funktory nazwotwórcze.*

Po tych wyjaśnieniach przechodzimy w dalszym ciągu do przedstawienia dowodu symbolicznie. Piszac wiersz dowodowy dla twierdzenia 3 *Wiersz dowodowy.*

„2 b/a * 3“

oznaczamy, że w drugim twierdzeniu t. j. w drugiej przesłance za „b“ podstawiamy „a“, co zaznaczamy znakiem „b/a“, otrzymawszy w ten sposób zaznaczoną formę nowego twierdzenia oddzielamy ją od jego numerowego zaznaczenia następnym numerem, znakiem przestankowym „*“, działającym podobnie jak przecinek w piśmie potocznym. *Podstawianie. Znak przestankowy.*

Cyfra 3 po prawej stronie znaku przestankowego oznacza numerem 3, nowo powstałe twierdzenie, otrzymane na skutek podstawienia b/a w twierdzeniu opatrzonym numerem 2.

A teraz wypisujemy twierdzenie 3-cie, które wygląda tak jak przesłanka 2 z tym jednym wyjątkiem, że wszędzie tam gdzie w 2 znajduje się „b“ w 3 pisze się „a“.

3 C (a = a) N (a < a).

Piszac 3 * C 1 — 4 t. j. wiersz dowodowy dla twierdzenia 4-tego, w którym „3“ oznacza numer twierdzenia trzeciego, „*“ oznacza oddzielnik lub znak przestankowy, a to co po drugiej stronie gwiazdki znajduje się oznacza to samo co oznacza 3, tylko w inny sposób, mianowicie uwytkła budowę 3 t. j. twierdzenia trzeciego, oznaczając, że zaczyna się ono od litery „C“, poczem jako poprzednik następuje przesłanka 1 a z kolei widzimy kreskę odrywaniową „—“ t. j. znak odrywania, pozwalający oderwać twierdzenie *Kreska odrywaniowa.*

nie 4, będące następnikiem implikacji i napisać je osobno.

4 $N(a < a)$.

Reasumując, napiszemy powyższy dowód symbolicznie jak następuje:

Symboliczna 1 $(a = a)$

forma dowodu. 2 $C(a = b) N(a < b)$

2 $b/a * 3$

3 $C(a = a) N(a < a)$

3 * C 1 — 4

4 $N(a < a)$

Jest to sformalizowany wywód twierdzenia 4-tego, to znaczy „nieprawda, że $a < a$ “, wywiedziony na podstawie przesłanek 1, 2, jakoteż przy pomocy reguł podstawiania i odrywania.

Zastosowawszy do przesłanki 2 (drugiej) regułę podstawiania, co zrobić nam wolno, gdyż przesłanka 2 będąc prawdziwą dla jakichkolwiek liczb „a“, „b“, pozostanie prawdziwą także wtedy, gdy liczby „a“, „b“ utożsamimy, to znaczy uważać będziemy znaki „a“, „b“ jako desygnaty tej samej liczby, otrzymamy twierdzenie 3-cie, które w poprzedniku będzie miało przesłankę 1 (pierwszą), a w następniku, twierdzenie równokształtne z twierdzeniem, które mamy udowodnić. Ponieważ 3 jest twierdzeniem prawdziwym posiadającym poprzednik prawdziwy, więc na podstawie r. o. możemy oderwać od okresu warunkowego jego następnik jako twierdzenie 4-te, które będąc zdaniem prawdziwym, jako twierdzenie, które mamy udowodnić, spełnia dowód (wywód).

Uwagi w sprawie przesłanek.

Przesłankę $a = a$, jeżeli „a“ jest liczbą naturalną, odczytamy w zakresie liczb naturalnych jak następuje: Każdy desygnat każdej liczby naturalnej to to samo co każdy inny desygnat tej samej liczby naturalnej.

Nazwy: Zakres, zbiór, klasa, posiadają tę samą konotację; powinno wystarczyć używanie jednej z nich.

W zakresie liczb naturalnych, zdaniu $a = b$ o wartości 1, odpowiadają dwie prawdziwe implikacje a mianowicie:

$$C(a = b)N(a < b)$$

$$C(a = b)N(a > b),$$

które możemy przedstawić również nie przy pomocy liczb lecz przy pomocy odcinków, które nam przedstawiają to samo co przedstawiają liczby, ich związki i stosunki.

Z powyższych prawdziwych implikacji wybieramy jako przesłankę tę implikację, która nam jest potrzebna do dowodu. Jeżeli mamy udowodnić prawdziwość zdania $N(a < a)$, to wybieramy jako jedną z przesłanek implikację:

$C(a = b)N(a < b)$, w wypadku gdybyśmy mieli udowodnić zdanie $N(a > a)$ posłużyłaby nam implikacja $C(a = b)N(a > b)$ jako przesłanka.

Przesłanka $C(a = b)N(a < b)$ jest implikacją z założenia, zdania bowiem $(a = b)$, $N(a < b)$ w zakresie liczb naturalnych nie podlegają stosunkowi implikacji, bo $(a = b)$, gdy a , b są liczbami naturalnymi, nie pociąga implikacyjnie prawdziwości zdania $N(a < b)$, bo równie dobrze możnaby napisać $N(a > b)$. Oba zdania są w zakresie liczb naturalnych zarazem prawdziwe, jeżeli zdanie $(a = b)$ posiada wartość 1

Jednak, jeżeli mamy udowodnić zdanie $N(a < a)$, to odpowiednią implikację z założenia możemy użyć jako przesłanki o wartości 1, bo jeżeli każde ze zdań $N(a < a)$, $N(a > a)$ posiada wartość 1, to zdanie $N(a < a)$ potrzebne nam do dowodu będzie z pewnością posiadało wartość 1.

Założenie nasze odnośnie wyboru przesłanki motywujemy tem, że mamy udowodnić zdanie $N(a < a)$.

Gdybyśmy mieli w tych samych warunkach udowodnić zdanie $N(a > a)$, to przyjęlibyśmy za przesłankę prawdzi-

wość implikacji $C(a = b)N(a > b)$. Dowód przebiegałby jak poprzednio:

- 1 $(a = a)$
- 2 $C(a = b) N(a > b)$
- 2 $b/a * 3$
- 3 $C(a = a) N(a > a)$
- 3 * $C1 - 4$
- 4 $N(a > a)$

Przez odpowiednie podstawienia musimy sprowadzić przesłanki do formy okresu warunkowego z uznanym poprzednikiem, aby móc oderwać następnik.

Następnik.

W sprawie następnika mogą zachodzić dwa przypadki:

1) albo następnik odrywamy od uznanego okresu warunkowego z uznanym poprzednikiem jako nowe twierdzenie, które musimy uznać,

2) albo mając dane do udowodnienia twierdzenie musimy tak podstawić w uznanych twierdzeniach, aby nie tylko otrzymać okres warunkowy z uznanem poprzednikiem, ale aby zarazem otrzymać w okresie warunkowym następnik równokształtny z twierdzeniem, które mamy udowodnić. Mając tak, przy pomocy podstawiania spreparowany okres warunkowy możemy następnik oderwać a tym samym udowodnić zadane twierdzenie.

1. pytanie: Z zadanych twierdzeń, które przy pomocy reguł podstawiania i zastępowania definicyjnego sprowadzamy do formy implikacji, ile i jakich wniosków wyciągnąć możemy? To znaczy pytamy co z zadanych przesłanek przy pomocy danych reguł możemy wydedukować?

2. pytanie: Czy dane uznane twierdzenia, przez zastosowanie reguł podstawiania, zastępowania definicyjnego, możemy doprowadzić do implikacji takiego kształtu, aby móc oderwać twierdzenie, które mamy udowodnić i jak to się robi? To znaczy, czy dane przesłanki dadzą się przy po-

mocy reguł podstawiania, zastępowania definicyjnego doprowadzić do formy implikacji z uznanym poprzednikiem a następnikiem równokształtnym z dowodzonem twierdzeniem, które byśmy mogli oderwać od implikacji na podstawie reguły odrywania?

Rozdział szósty.

Matryce stosunków dwuczłonowych.

Treść: Zdanie gramatyczne jako wypowiedź myśli. Wypowiedź zdaniowa w logice. Myśl wyrażona połączeniem zdań. Wartość wyrażona połączeniem zdań. Matryce stosunków dwuczłonowych. Wymawianie funktorów zdaniotwórczych. Konjunkcja K. Funktor zdaniotwórczy G. Ekwiwalencja E. Alternatywa nie wyłączająca A. Implikacja C. Alternatywa wyłączająca lub dysjunkcja D. Pociąganie. Wynikanie. Pociąganie jednozwrotne. Pociąganie w obie strony lub dwuzwrotne.

Rozdział szósty.

Połączenia zmiennych zdaniowych.

To że zdanie gramatyczne składa się z podmiotu zdania (subjektum), orzeczenia (praedicatum) i łącznika (copula), to, że zdania mogą być pojedyncze albo złożone, że zbudowane mogą być tak czy inaczej, tego w rachunku zdań nie bierzemy pod uwagę.

Wypowiedź zdaniową traktujemy jako całość nie zwracając zupełnie uwagi na ich elementy składowe.

Zdaniami tak ujętymi będziemy się starali podobnie rachować jak rachujemy liczbami w arytmetyce.

W gramatyce zdaniem złożonym nazywamy pewną *Zdanie gramatyczne.* całość powstałą np. z dwóch zdań, jeżeli zamyka w sobie pewien choćby bogato rozwinięty, lecz jeden tylko pomysł. Owo zdanie złożone uważamy za jedno zdanie. W gramatyce łączymy zdania w rozmaity sposób przy pomocy części mowy zwanych spójnikami. Nowo powstałe zdania wypowiadają pewne myśli. Nie każde zdanie mogę połączyć z dowolnem innem zdaniem przy pomocy dowolnego łącznika, jeżeli nowo powstałe zdanie ma być wypowiedzią myśli.

Najpierw muszę coś pomyśleć a dopiero potem mogę postarać się owo coś pomyślane tak czy inaczej wypowiedzieć.

W logice inaczej, z dwóch różnych wypowiedzi zdaniowych „p“, „q“ z których każda posiada jedną z dwóch war-

tości „0“ lub „1“ przez ich połączenie powstaje zawsze nowa wypowiedź zdaniowa o wartości „0“ lub „1“ w zależności od tego jakiego użyjemy łącznika tworzącego nową logiczną całość i jakie wartości posiadają łączone wypowiedzi „p“, „q“.

Przy takim ograniczeniu zakresu w każdym wypadku możemy podać ile i jakich połączeń możemy otrzymać, które z nich możemy użyć, które odrzucić, wyczerpując cały możliwy zakres wszelkich ewentualności, przyczem rezultaty odnośnych rozważań możemy ująć w przejrzystą formę matrycową.

W logice nie zwracamy uwagi na całość złożoną z dwóch zdań wtedy gdy zamyka w sobie jakąś jedną myśl lecz wtedy, gdy zajmuje nas wartość powstałego połączenia.

*Wypowiedź
zdaniowa
w logice.*

Nie łączymy w logice dwóch zdań ze względu na ich wyrażane myśli lecz ze względu na ich wartości. Nie pytamy o myśl wyrażoną połączeniem lecz o jego wartość.

W gramatyce łącząc zdania przy pomocy najróżnorodniejszych łączników staramy się poprawnie oddać różnorodność naszych myśli. Wieloznaczności mamy tu bez liku.

Logika dwuwartościowa, przedewszystkiem zwraca uwagę na wartości zdań, których przyjmuje dwie „0“ i „1“. W ten sposób łącząc dwie wypowiedzi zdaniowe w nową złożoną wypowiedź zdaniową otrzymujemy cztery jej możliwe wartości. Ilość przestawień z czterech elementów wynosi 16 przestawień (permutacji).

Dla każdego przestawienia mamy jedną matrycę. Zaczynamy od matrycy, która w każdym wypadku posiada zerową wartość połączenia a kończymy na matrycy, która w każdym wypadku posiada jedynkową wartość połączenia. Posługujemy się następującym schematem matrycowym:

Znak funktora zdaniotwórczego H	q = 0,	q = 1
p = 0	H 00 = 0,	H 01 = 0
p = 1	H 10 = 0,	H 11 = 0

Oto szesnaście matryc dla odnośnych szesnastu przedstawień wartości złożonych wypowiedzi zdaniowych:

I	01
---	----

0	00
1	00

II	01	III	01	IV	01	V	01
----	----	-----	----	----	----	---	----

0	00	0	00	0	01	0	10
1	01	1	10	1	00	1	00

VI	01	VII	01	VIII	01	IX	01	X	01	XI	01
----	----	-----	----	------	----	----	----	---	----	----	----

0	00	0	01	0	01	0	10	0	10	0	11
1	11	1	01	1	10	1	01	1	10	1	00

XII	01	XIII	01	XIV	01	XV	01
-----	----	------	----	-----	----	----	----

0	01	0	10	0	11	0	11
1	11	1	11	1	01	1	10

XVI	01
-----	----

0	11
1	11

Zamiast: II, VII, IX, XII, XIV, XV

Piszemy: K, G, E, A, C, D.

W ten sposób odnośnie wartości, złożonej wypowiedzi zdaniowej, wyczerpujemy wszystkie wypadki. Po bliższym rozpatrzeniu powyższego materiału przekonamy się, że wiele z tych matryc jest zbędnych, że aby zadowolić wy-
mogi na ścisłość wyrażania myśli odnośnie zależności war-
tości wypowiedzi złożonej od wartości wypowiedzi składo-
wych w zakresie wszystkich gałęzi wiedzy wraz z mate-
matyką jako ich podbudową wystarczą tylko niektóre z nich.
Te oznaczamy wielkimi literami alfabetu łacińskiego, ozna-
czając tymi samymi literami odnośne funktory zdaniotwórcze.

Dla wygodniejszego wymawiania wymienionych funkt-
rów zdaniotwórczych nadajemy im wymawianie gramaty-
czne nie pozostawiając im jednak ich znaczenia gramaty-
cznego, ich nazwowości gramatycznej.

Konjunkcja.

I tak matrycę II oznaczamy literą „K“, czytamy jako „i“, nazywamy konjunkcją. Dwie wypowiedzi połączone przy pomocy funktora zdaniotwórczego „K“, tworzą wypowiedź złożoną (konjunkcję), której wartość zależy od wartości łączonych wypowiedzi według poniższej matrycy dla kon-
junkcji:

K	0	1
0	0	0
1	0	1

$K_{pq} = 1$ t. j. wypowiedź „p i q“ posiada wartość = 1 tyl-
ko wtedy, gdy tak $p = 1$ jak $q = 1$ t. j. gdy oba zdania
posiadają wartość = 1. W każdym innym wypadku konjun-
kcja dwóch zdań posiada wartość = 0. Pisząc znak fun-
ktora zdaniotwórczego przed obu łączonymi zdaniami uni-
kamy potrzeby używania nawiasów.

Matrycę VII oznaczamy np. litera G, nie czytamy jej *Matryca G*. przy pomocy jakiegoś słówka gramatycznego i nie dajemy jej żadnej nazwy. Dwie wypowiedzi „p“, „q“ połączone przy pomocy funktora zdaniotwórczego „G“, tworzą wypowiedź złożoną, której wartość zależy od wartości łączonych wypowiedzi według poniższej matrycy:

G	0	1
0	0	1
1	0	1

$Gpq = 1$ gdy $p = 0, q = 1$ lub gdy $p = 1, q = 1$ w każdym innym wypadku $Gpq = 0$.

Wartość $Gpq = 1$ nie zależy od wartości p, bo czy $p = 0$, czy $p = 1$, to $Gpq = 1$, jeżeli tylko $q = 1$, znaczy to, że wartość $Gpq =$ wartości q czyli $Gpq = q$.

Matrycę IX. oznaczamy literą E, czytamy „p wtedy i tylko wtedy, gdy q“, nazywamy ekwiwalencją. *Ekwiwalencja.*

Dwie wypowiedzi połączone przy pomocy funktora zdaniotwórczego E, tworzą wypowiedź złożoną ekwiwalencję, której wartość zależy od wartości łączonych wypowiedzi według poniższej matrycy dla ekwiwalencji:

E	0	1
0	1	0
1	0	1

$E pq = 1$ t. j. wypowiedź:

„p wtedy i tylko wtedy gdy q“ posiada wartość = 1 gdy $p = 1, q = 1$ lub $p = 0, q = 0$.

Wypowiedź $E pq = 1$ znaczy, że „p“, „q“ posiadają tę samą wartość, to jest wartość równą 1 albo wartość = 0.

Tylko dla wartości $p = 1, q = 1$, lub $p = 0, q = 0$, E_{pq} posiada wartość 1; we wszystkich innych wypadkach E_{pq} posiada wartość 0.

Alternatywa. Matrycę XII oznaczamy literą A, czytamy „lub“, nazywamy alternatywą nie wyłączającą.

Dwie wypowiedzi połączone przy pomocy funktora zdaniotwórczego A, tworzą wypowiedź złożoną (alternatywę nie wyłączającą), której wartość zależy od wartości łączonych wypowiedzi według poniższej matrycy dla alternatywy nie wyłączającej:

A	0	1
0	0	1
1	1	1

$A_{pq} = 1$ t. j. wypowiedź „p lub q“ posiada wartość = 1 wtedy, gdy przynajmniej jedna z wypowiedzi składowych wartości = 1. Jeżeli $A_{pq} = 1$ wtedy przynajmniej jedna z wypowiedzi składowych posiada wartość = 1, przyczem nie wyłączony jest ten przypadek, gdy obie składowe posiadają wartość równą 1, to znaczy, że także $A_{11} = 1$.

Funkcja $A_{pq} = 0$ tylko wtedy, gdy oba jej argumenty posiadają wartość równą 0, to znaczy, że $A_{pq} = 0$ gdy $p = 0, q = 0$.

Implikacja. Matrycę XIV. oznaczamy literą C, czytamy „jeżeli.... to...“, nazywamy implikacją.

Dwie wypowiedzi połączone przy pomocy funktora zdaniotwórczego C, tworzą wypowiedź złożoną (implikację, której wartość zależy od wartości łączonych wypowiedzi według poniższej matrycy dla implikacji:

C	0	1
0	1	1
1	0	1

$Cpq = 1$ t. j. wypowiedź „jeżeli p , to q “ posiada wartość $= 1$ w każdym z następujących wypadków: $C00=1$, $C01=1$, $C11=0$, w wypadku, gdy $p=1$, $q=0$, Cpq posiada wartość $= 0$.

Matrycę XV. oznaczamy literą D , której w języku polskim nie odpowiada żaden spójnik (możnaby użyć „albo“), nazywamy dysjunkcją albo alternatywą wyłączającą. *Dysjunkcja.*

Dwie wypowiedzi połączone przy pomocy funktora zdaniotwórczego D , tworzą wypowiedź złożoną (dysjunkcję t. j. alternatywę wyłączającą), której wartość zależy od wartości łączonych wypowiedzi według poniższej matrycy dla dysjunkcji:

D	0	1
0	1	1
1	1	0

$Dpq = 1$ t. j. wypowiedź „ p albo q “ posiada wartość $= 1$ w następujących wypadkach: $D00=1$, $D01=1$, $D10=1$ zaś w wypadku gdy $p=1$, $q=1$, $Dpq=0$. Funkcja Dpq posiada wartość $= 0$ tylko wtedy, gdy oba jej argumenty posiadają wartość $= 1$, pozatem wartość jej jest zawsze 1.

Jak widzimy istnieje w logice dwuwartościowej 16 funkcji prawdziwościowych od 2 argumentów zdaniowych. Tylko kilka z tych funkcji ma odpowiedniki w mowie potocznej („i“, „lub“, „jeżeli... to“) i tylko kilka jest używanych w logice zdań, jak konjunkcja, implikacja, alternatywa, ekwiwalencja. Te tylko funkcje mają w systemie implikacyjno-negacyjnym ustalone symbole (K , C , A , E), innych nie oznaczamy żadną literą, albo używamy dla nich przy okazji jakiegś litery nie mającej w systemie ustalonego znaczenia.

Jeżeli $\alpha = 1$ (*pociąga*) implikuje $\beta = 1$, *Pociąganie.*
tworząc połączenie zdań $X\alpha\beta$ o wartości 1, to takie połączenie zdań nazywamy implikacją i oznaczamy znakiem $C\alpha\beta$.

A jeżeli tak, to jeżeli mamy uznaną implikację „ $C\alpha\beta$ ” i jej poprzednik α , to z obu uznanych zdań

„ $C\alpha\beta$ ” i „ α ”

wynika

zdanie „ β ” o wartości 1.

Wynikanie.

Krótko w znakach:

$CC\alpha\beta C\alpha\beta$.

Tu zawsze możemy oderwać t. j. wywnioskować zdanie β z obu uznanych zdań „ $C\alpha\beta$ ” i „ α ”.

Jeżeli jeżeli $\alpha = 1$ pociąga $\beta = 1$, tworząc połączenie $X\alpha\beta = 1$, to połączenie zdań $X\alpha\beta$

nazywamy implikacją i oznaczamy $C\alpha\beta$,

to jeżeli $C\alpha\beta = 1$ i $\alpha = 1$ to wynika $\beta = 1$
przyczem

p/jeżeli $\alpha = 1$ pociąga $\beta = 1$, tworząc połączenie

$X\alpha\beta = 1$, to połączenie zdań $X\alpha\beta$ nazywamy implikacją i oznaczamy $C\alpha\beta$

q/jeżeli $C\alpha\beta = 1$ i $\alpha = 1$, to wynika $\beta = 1$

bo Cpq , to to samo co p pociąga q.

Ogólnie: $CCpqCpq$. Słowami: Jeżeli $p = 1$ pociąga $q = 1$, tworząc $Cpq = 1$, to z $Cpq = 1$ i $p = 1$ wynika $q = 1$.

Jeżeli p pociąga q, to jeżeli $p = 1$, to $q = 1$, to to samo co jeżeli p, to q.

Jeżeli α pociąga β , to jeżeli $\alpha = 1$, to $\beta = 1$, to to samo co $C\alpha\beta = C11 = 1$.

Wartość $\alpha = 0$ nie pociąga żadnej wartości β ; bo dla $\alpha = 0$ tak dobrze β może posiadać wartość 0 jak 1, to to samo co $C00 = 1$, $C01 = 1$.

Przy wartości $\alpha = 0$, wartość β nie jest jedno jednowartościowa lecz jest dwu jednowartościowa, to to samo co, ze-

rowej wartości α odpowiada zarazem jedna z dwóch wartości β jednak tak dobrze wartość zero jak wartość jeden co jest bez wartości. Z tych samych bowiem założeń przesłanek $\alpha = 0$, $C0\beta = 1$ wynika wszystko co wogóle wynikać może, a więc nie wynika nic jednowartościowego; β bowiem może mieć wartość tak dobrze 0 jak 1, wtedy gdy α posiada wartość 0.

Jeżeli $\alpha = 1$ pociąga $\beta = 1$, tworząc połączenie zdań $X\alpha\beta = 1$, to implikacja C z pewnością zachodzi, bo $\alpha = 0$, pociągając wszystko, nic nie pociąga; a, jeżeli $\alpha = 0$ nic nie pociąga, bo wszystko pociąga, to tak $X00 = 1$ jak $X01 = 1$, a właśnie takie zależności wartości zawiera matryca C. Czy nie zachodzi ekwiwalencja $E\alpha\beta$, konjunkcja $K\alpha\beta$ lub połączenie zdań $G\alpha\beta$, to dalsza sprawa.

Jeżeli spełnione są odpowiednie dalsze warunki, to każda z tych funkcji może zachodzić. Funkcja bowiem C jest najogólniejszym wypadkiem i zawiera w sobie każdy z wymienionych wypadków E, K, G.

Jeżeli α pociąga β , to z pewnością zachodzi implikacja C, bo przy implikacji, β nie pociąga α , nie ma pociągania w drugą stronę, wymaganego przez ekwiwalencję E.

Przy implikacji $\beta = 1$, pociąga tak dobrze $\alpha = 0$ jak $\alpha = 1$ a więc, pociągając wszystko, nic jednowartościowego, nie pociąga.

Dodatkowym warunkiem, aby zachodziła ekwiwalencja wtedy gdy zachodzi implikacyjne pociąganie t. j. pociąganie β przez α jest, aby zarazem α było pociągane przez β ; gdy o tem nie wiemy a gdy zachodzi pociąganie w stronę od α do β , to z pewnością mamy implikację; ekwiwalencję mielibyśmy tylko wtedy, gdybyśmy znali dodatkowy warunek a mianowicie gdybyśmy wiedzieli, że zarazem β pociąga α .

Warunek dodatkowy.

$$\begin{array}{c|c} & \beta \\ \hline C & 0 \quad 1 \\ \hline \alpha \quad 0 & 1 \quad 1 \\ 1 & 0 \quad 1 \end{array} \quad
 \begin{array}{c|c} & \alpha \\ \hline C & 0 \quad 1 \\ \hline \beta \quad 0 & 1 \quad 1 \\ 1 & 0 \quad 1 \end{array} =
 \begin{array}{c|c} & \beta \\ \hline XIII & 0 \quad 1 \\ \hline \alpha \quad 0 & 1 \quad 0 \\ 1 & 1 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \alpha \\ & \beta \\ \hline C \text{ i } XIII & 0 \quad 1 \\ \hline \beta \quad \alpha \quad 0 & 11 \quad 10 \\ 1 & 01 \quad 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \beta \\ \hline E & 0 \quad 1 \\ \hline \alpha \quad 0 & 1 \quad 0 \\ 1 & 0 \quad 1 \end{array} \quad
 \begin{array}{c|c} & \alpha \\ \hline E & 0 \quad 1 \\ \hline \beta \quad 0 & 1 \quad 0 \\ 1 & 0 \quad 1 \end{array}$$

$$E\alpha\beta = K \quad C\alpha\beta \quad C\beta\alpha$$

$$E\beta\alpha = K \quad C\beta\alpha \quad C\alpha\beta$$

Ponieważ $KC\alpha\beta C\beta\alpha = KC\beta\alpha C\alpha\beta$ t. j. obowiązuje prawo komutacji, więc

$$E \alpha \beta = E \beta \alpha.$$

Dane: Dwa zdania α, β .

Zakładam: Każde zdanie posiada jedną z dwóch wartości 0 lub 1.

Połączenie zdań może być zdaniem lub może nie być zdaniem. Nas zajmują tylko takie połączenia zdań α, β , które są zdaniami a jako takie muszą posiadać jedną z dwóch wartości.

$X\alpha\beta$ jest to połączenie zdań α, β , będące zdaniem, którego wartość zależy od wartości zdań składowych α, β według poniższej matrycy

X	0	1	X	0	1
0	?	?	0	a_1	a_2
1	?	?	1	a_3	a_4

Jeżeli wartości zdań α, β , tak zależą od siebie, że zero zdania α pociąga każdą wartość zdania β , to znaczy, że $X00 = 1, X01 = 1$, zaś jedynka zdania α pociąga tylko jedynkę zdania β , to znaczy, $X10 = 0, X11 = 1$, to odnośne wartości zdania będącego połączeniem zdań, otrzymamy z następującej matrycy

X	0	1
0	1	1
1	0	1

którą nazywamy matrycą „C”, a wyrażoną zdaniem $C\alpha\beta$ zależność wartości zdań α, β t. j. wartość ich połączenia w każdym wypadku, nazywamy implikacją czyli pociąganiem w jedną stronę.

Wartość zdania α pociąga według matrycy X, wartość zdania β , co wyznacza wartość zdania $C\alpha\beta$ według matrycy

	C	β	
		0	1
α	0	1	1
	1	0	1

Matryca pociągania w obie strony t. j. matryca ekwiwalencji zdań α, β musi uwzględnić tę okoliczność, że jeżeli zdania α, β są zdaniami ekwiwalentnymi, to każda wartość zdania α tak musi pociągać wartość zdania β jak każda wartość zdania β pociąga wartość zdania α , przyczem zarazem muszą być respektowane założenia matrycy C , które nam mówią jak każda wartość zdania α pociąga wartość zdania β , wyrażając powyższą okoliczność wartościami połączenia zdań α, β .

Matrycę ekwiwalencji czyli pociągania w obie strony nazywamy E . Respektuje ona założenia matrycy C , uwzględniając je w obie strony, jest to obuzwrotna implikacja.

*Dwuzwrotne
pociąganie.*

Jeżeli na matrycę C położymy matrycę $XIII$, to w miejscach a_1, a_2, a_3, a_4 , otrzymujemy podwójne wartości zdania powstałego z połączenia zdań α, β i tak, w miejscu a_1 wartość $E00 = 1$, bo tak wartość $C00$ jak wartość $XIII00$ są wartościami jedynkowemi, w obie więc strony zachodzi pociąganie; w miejscu a_2 mamy jednak dwie wartości 1, 0, które naraz występują i tak ze stanowiska matrycy C mamy w tym miejscu wartość $C01 = 1$, zaś ze stanowiska matrycy $XIII$ mamy w tym miejscu wartość $XIII01 = 0$, ponieważ $E\alpha\beta = E\beta\alpha$ więc w miejscu a_2 powinno tak $E\alpha\beta$ jak $E\beta\alpha$ mieć wartość tak 1 jak 0 i rzeczywiście ma. W tym miejscu od $\alpha = 0$ do $\beta = 1$ zachodzi pociąganie, gdy tymczasem od $\beta = 1$ do $\alpha = 0$ nie zachodzi pociąganie a więc w tym miejscu wartość $E\alpha\beta = 0$, bo $E\alpha\beta$ jest dwustronnem pociąganiem.

Ponieważ w stronę od $\alpha = 0$ do $\beta = 1$ pociąganie implikacyjnie zachodzi, bo zero w matrycy C pociąga wszystko a wszystko, to tyle co, 0 lub 1, w stronę zaś przeciwną od $\beta = 1$ do $\alpha = 0$ pociąganie nie zachodzi, względnie zachodzi implikacyjnie, bo w matrycy C prawda fałszu nie pociąga, więc w miejscu a_2 matrycy dla ekwiwalencji nie

ma dwuzwrotnego pociągania wymaganego przez ekwiwalencję a więc w tym miejscu wartość połączenia $E\alpha\beta$ posiada wartość zero jest to zdanie fałszywe: $E01 = E10 = 0$.

Jeżeli w jedną stronę w miejscu a_2 zachodzi pociąganie a w drugą stronę pociąganie nie zachodzi z punktu widzenia matrycy C, to ponieważ ekwiwalencja, to tyle co dwuzwrotne pociąganie więc w miejscu a_2 warunki dla E nie są spełnione; wartość E w tym miejscu matrycy = 0, ekwiwalencja jest fałszem.

Ze stanowiska matrycy C powiemy, że dla miejsca a_2 matrycy pociąganie zachodzi, wartość 0 pociąga wartość 1, bo $C01 = 1$. Jeżeli zmienimy porządek członów, to dla miejsca a_2 otrzymamy wartość połączenia z matrycy C taką jaką odpowiada połączeniu w miejscu a_3 t. j. $C10 = 0$. *Następstwo pierwszego i drugiego członu.*

Zmieniając następstwo członów połączenia przenosimy w tym wypadku wartość połączenia na inne miejsce matrycy C, zawsze bowiem wartość połączenia $C10 = 0$ niezależnie od tego którego członu wartość stoi na pierwszym miejscu a którego na drugim.

Przykład: „Jeżeli dziś jest piątek, to jutro jest sobota“. Myśl zawarta w przytoczonym okresie warunkowym zupełnie nas w logice nie interesuje, nie jest ona istotna, istotnem jest, jakie wartości posiadają zdania składające się na powyższy okres warunkowy i jaką wartość posiada sam okres warunkowy.

Jeżeli zastosujemy do podanego okresu warunkowego matrycę implikacji, to wartości zdań okresu warunkowego i wartość okresu warunkowego będą zależały od siebie implikacyjnie, to tyle co, będą zależały od siebie według poniższej matrycy:

		β	
		C	
α		0	1
	0	1	1
	1	0	1

przyczem, za α / dziś jest piątek, za β / jutro jest sobota.

Jeżeli zastosujemy inną matrycę, to zależność wartości zdań danego okresu warunkowego będzie inna.

Tu widzimy, że gramatyczne „jeżeli... to“ nie ma nic wspólnego z logicznym „jeżeli... to“, które w logice znaczymy znakiem „C“ a nazywamy nazwą „implikacja“.

Gramatycznie: Mamy dane dwa zdania α , β .

Dana, kalendarzową zależność myśli obu zdań, wyrażamy zdaniem gramatycznym w formie okresu warunkowego:

Jeżeli dziś jest piątek, to jutro jest sobota.

Logicznie: Mamy dane dwa zdania α , β .

Dana jest matrycowa zależność wartości obu zdań n. p.

implikacyjna:

		β	
		C	
α		0	1
	0	1	1
	1	0	1

, którą czytamy „jeżeli α , to β “,

albo konjunkcyjna:

		β	
		K	
α		0	1
	0	0	0
	1	0	1

, którą czytamy „ α i β “.

Dopiero po wywartościowaniu obu zdań możemy w logice zrobić użytek z odnośnych matryc, ujmujących zależności wartości zdań, jakoteż ich połączenia, według odnośnej matrycy.

Przy implikacyjnej zależności wartości zdań dla wartości $\alpha = 0$, $\beta = 0$ otrzymamy wartość połączenia $C\alpha\beta = C00 = 1$,

przy konjunktynnej zależności wartości zdań dla wartości $\alpha = 0$, $\beta = 0$ otrzymamy wartość połączenia $K\alpha\beta = K00 = 0$.

Podstawiając za α / dzisiaj jest piątek,
za β / jutro jest sobota,
otrzymamy w pierwszym wypadku zdanie prawdziwe
w drugim fałszywe, bo $C00 = 1$, $K00 = 0$.

Z powyższego widocznem jest, że trzeba się zdecydować na jedno z wielu możliwych logicznie stanowisk, przyczem należy odróżniać pociąganie ontologiczne (kalendarzowe) od logicznego (matrycowego).

Rozdział siódmy.

Treść: Zasada wyłączonej sprzeczności. Zasada wyłącznego środka.

Rozdział siódmy.

W sprawie zasady wyłączonej (lub wykluczonej) sprzeczności.

Zasada wyłączonej sprzeczności. (Principle of excluded contradiction).

„Dwa zdania sprzeczne α , $N\alpha$ nie mogą być oba zarazem prawdziwe“.

α , $N\alpha$,

są to dwa zdania sprzeczne.

Oдноśnie obu zdań sprzecznych możemy zajmować jedno z dwóch stanowisk:

- 1) Stanowisko zasady wykluczonej sprzeczności.
- 2) Stanowisko zasady nie wykluczonej (uznanej) sprzeczności.

Stając na jednym z dwóch powyższych stanowisk nie powinniśmy móc zarazem zająć stanowiska drugiego. Jeżeli staniemy na stanowisku 1.), to znaczy na stanowisku nie dopuszczania sprzeczności, to zajęcie stanowiska drugiego jest niemożliwe, bo wykluczamy możliwość prawdziwości zarazowej (równoczesnej) obu zdań α , $N\alpha$, a właśnie oba stanowiska dają się podciągnąć pod tę kategorię zdań. Inaczej, jeżeli zajmujemy stanowisko drugie t. j. uznamy sprzeczność, wtedy zajęcie obu stanowisk naraz jest możliwe i wtedy wszystko jest dopuszczalne. A ponieważ „wszystko“ i „nic“ są nazwami zamazanymi, które lepiej nie posługiwać się, więc pozostaniemy na stanowisku 1.) t. j. stanowisku uznawania zasady wykluczonej sprzeczności, czyli wykluczania sprzeczności.

Nie chciałbym przez to powiedzieć, że stanowisko uznawania sprzeczności jest stanowiskiem błędnem albo fałszywem, wydaje mi się ono równie poprawne jak stanowisko 1.), ale trudniejsze do rozumowego traktowania.

Zato intuicjoniści i ludzie wierzący, mogą nawet, zajmując to właśnie stanowisko, czuć się lepiej i prędzej dochodzić do praktycznych rezultatów życiowych, przeskakując w razie potrzeby na stanowisko pierwsze, aniżeli czują się ostrożnie i mozolnie myślący logicy, zajmujący stale i pedantycznie stanowisko 1.), badając jedynie rozumowi rozumnie dostępne. Ale czy tylko rozum w życiu i o powodzeniu życiowym decyduje?

Stojąc na stanowisku 1.) odnośnie dwóch zdań sprzecznych α , $N\alpha$ ujmujemy wartości zdań w związki następujące:

α , $N\alpha$

0, N0

1, N1

Jeżeli staniemy na stanowisku, że dwa zdania sprzeczne α , $N\alpha$ nie mogą być zarazem prawdziwe, to jeżeli każde z nich jest fałszywe, to wymogowi powyższemu, według którego dwa zdania sprzeczne nie mogą być zarazem prawdziwe, czynią one zadość, bo jeżeli każde z nich jest fałszywe, to pewnością oba zarazem z osobna nie będą mogły być prawdziwe. Fałszywość zarazowa (równoczesna) dwóch zdań sprzecznych nie przeczy zasadzie wykluczonej sprzeczności, której przeczy ich zarazowa prawdziwość. Zasada wyłączonej sprzeczności odnosi się do (jednoczesnej) zarazowej wartości dwóch zdań sprzecznych, powiada ona, że wartości 0, 1, dwóch zdań sprzecznych, α , $N\alpha$, nie mogą naraz być wartościami jedynkowymi. Tyle, i nic więcej, wypowiada zasada wyłączonej sprzeczności. Odnosi się ona tylko do wartości dwóch zdań sprzecznych, wypowiadając jedynie tę

okoliczność, że dwa zdania sprzeczne nie mogą naraz (jednocześnie) być dwoma zdaniami prawdziwymi, żadne zdanie z dwóch zdań sprzecznych, nie może być zarazem prawdziwe i fałszywe. Zdanie łączące wartości dwóch zdań sprzecznych z których każde $= 1$ musi w myśl zasady wyłączonej sprzeczności posiadać wartość 0.

W miejscu a_1 każdej matrycy, wartość połączenia zdań sprzecznych jest niemożliwa, bo wartości $\alpha = 0$ odpowiada drugi człon połączenia $N\alpha$ o wartości 1 a nie jak w matrycy o wartości 0. Ze względu na matrycę N połączenie takie, jakiego żąda matryca K w miejscu a_1 jest niemożliwe i nie może ono matrycowo posiadać w tym miejscu żadnej wartości. Miejsce a_1 jest nie obsadzone wartością połączenia, bo matryca N obsadę tę uniemożliwia. W miejscu a_2 wartość połączenia K odpowiada wartościom $\alpha = 0$, $N\alpha = 1$. Połączenie w miejscu a_2 ma wartość matrycową 0, bo $K01 = 0$, w tym miejscu połączenie wartości obu zdań sprzecznych w nowe zdanie $K\alpha N\alpha = K01$ o wartości 0 jest możliwe, tak ze względu na matrycę N jakoteż ze względu na matrycę K . W miejscu a_2 mamy dla wartości $\alpha = 0$ zgodność wartości $N\alpha = N0 = 1$ i wartości drugiego członu matrycy K , który tu posiada wartość 1.

Każda z matryc będzie posiadała dla zdań sprzecznych tylko dwie wartości jedynie w miejscach a_2 , a_3 . Każda więc matryca jest szczuplejsza dla zdań sprzecznych. Wartości 00, 11 są dla zdań sprzecznych niemożliwe.

Logicznie: α , $N\alpha$ może być tylko 01, 10, posiadając w obu wypadkach wartość odpowiednią połączeniu według matrycy; **praktycznie** jednak wypadek $\alpha = 0$, $N\alpha = 0$ nie sprzeciwia się zasadzie wyłączonej sprzeczności, która powiada, że dwa zdania sprzeczne α , $N\alpha$ nie mogą być oba zarazem prawdziwe, może on zachodzić jak również może zachodzić

wypadek $\alpha = 1$, $N\alpha = 1$, sprzeciwiający się zasadzie wyłączonej sprzeczności.

Przykład:

		β				$N\alpha$	
A		0	1	A		0	1
α	0	0	1	α	0	?	1
	1	1	1		1	1	?

Matryca A dla dwóch zdań sprzecznych α , $N\alpha$ nie jest matrycą zupełną, zawiera ona tylko dwie wartości alternatywy a mianowicie: $A01 = 1$, $A10 = 1$. Wartości $A00$ jak $A11$ są nie możliwe. Logicznie $A\alpha N\alpha$ może być tylko: $A01$, $A10$, posiadając w obu wypadkach wartość 1; praktycznie jednak wypadek $\alpha = 0$, $N\alpha = 0$, nie sprzeciwia się zasadzie wyłączonej sprzeczności, może on praktycznie tak dobrze zachodzić jak może praktycznie zachodzić wypadek $\alpha = 1$, $N\alpha = 1$ sprzeciwiający się zasadzie wyłączonej sprzeczności.

Sprzeczność, której unikamy w logice nabiera praktycznie pewnej pociągającej wartości; trudno się jej oprzeć i chętnie by się jej nadało wartość wyrażającą pewno wy wartościowanie zdań sprzecznych. Tu skłaniam się, tak mi się przynajmniej zdaje w stronę prof. Łukasiewicza nie podzielając poglądu prof. Chwistka a jednak go uznając.

Wtedy gdy w niedzielę popołudniu wolny od wszelkich obowiązków zarobkowania, mogę się spokojnie zagłębić w rozważania logiczne stykam się na terenie sprzeczności ze zrozumieniem tego co należałoby odrzucić. Pokusa jest duża i wydaje się zupełnie umotywowana. Tu zaczyna się wspomniane na str. 9-tej mego wstępu do popularnego zarysu logiki teoretycznej, pod nagłówkiem „szczebiotanie“, rozsadzające mózg myślenie. Po kilku godzinach wyteżonej pracy myślo-

wej, wyczuwam w okolicach mózdzku zmęczenie, objawiające się wręcz bólem fizycznym. Trzeba przerwać myślenie, aby uniknąć katastrofy. Na to jednak trzeba sporo czasu, zanim codzienna, potoczna, spokojna i płytka myśl ośladnie rozhuśtane partie mózgu.

Tu byłby potrzebny i przydatny może systematycznie! prowadzony trening.

Zestawienie wymogu zasady wyłączonej sprzeczności z wymogami matrycowymi, wskazuje, że zasada wyłączonej sprzeczności pokrywa logikę bez reszty pomimo, że zestawienia odnoszą się do dwóch różnych rzeczy. Zasada wyłączonej sprzeczności nie jest bowiem natury logicznej lecz praktycznej, zaś matryce i zdania sprzeczne α , $N\alpha$ posiadają charakter wyłącznie logiczny. Uszczuplenie zakresu matrycy tylko do dwóch miejsc a_2 , a_3 obsadzonych wartościami połączenia matrycowego dla dwóch zdań sprzecznych wyraźnie zaznacza fakt, że zasada wyłączonej sprzeczności pokrywa całą logikę.



W sprawie zasady **wykluczonego** (lub wyłączzonego) środka.

Zasada **wyłączzonego** środka. (Principle of excluded middle).

„Z dwóch zdań sprzecznych α , $N\alpha$ jedno musi być prawdziwe“.

Miedzy obu wartościami „0“, „1“ zdania „ α “ nie ma innych wartości w dwu-wartościowej logice. Obu wartościami 0, 1 jest zakres wartości dwuwartościowej logiki wyczerpany.

Miedzy wartościami „0“, „N0“ obu zdań sprzecznych „ α “, „ $N\alpha$ “ nie ma innej wartości, nie tylko w logice dwuwartościowej w której „N0 = 1“, ale w każdej logice o dowolnej ilości wartości. Pośrednie jakieś wartości pomiędzy wartościami „0“, „N0“ są wykluczone.

Obie wartości „0“, „N0“ wyczerpują cały zakres nie tylko wartości zdań „ α “, „ $N\alpha$ “, ale wogóle wszystkiego, jeżeli już tak ktoś chce.

Kontradyktoryczne „N“ znaczy nie tylko każdą inną wartość zdania, ale wszystko co istnieje poza ową inną wartością zdania. Obu wartościami „0“, „N0“ jest zakres wszystkiego co o zdaniach sprzecznych możemy pomyśleć, jakoteż tego co zdaniami temi możemy wyrazić wyczerpany, czegoś pośredniego pomyśleć sobie nie możemy.

Podobnie sprawa się przedstawia z każdą inną wartością dwóch zdań sprzecznych a więc np.

α , $N\alpha$

1, N1 Miedzy wartościami „1“, „N1“ obu zdań sprzecznych „ α “, „ $N\alpha$ “, cały zakres wszystkiego co o zdaniach

sprzecznych możemy powiedzieć, jakoteż tego co zdaniem sprzecznymi możemy wyrazić jest zupełnie wyczerpane, nie tylko w logice dwuwartościowej w której „ $N1=0$ “, ale w każdej logice o dowolnej ilości wartości.

Jeżeli staniemy na stanowisku, że jedno z dwóch zdań sprzecznych „ α “, „ $N\alpha$ “ musi być prawdziwe, to jeżeli żadne nie jest prawdziwe, to sprzeciwia się to wymogowi powyższemu według którego jedno musi być prawdziwe.

Praktyczne wartości dwóch zdań sprzecznych:

- 1) 0,0 nie sprzeciwia się zasadzie wyłączonej sprzeczności, według której dwa zdania sprzeczne nie mogą być oba zarazem prawdziwe.
- 2) 0,0 sprzeciwia się zasadzie wyłączonego środka według której jedno z dwóch zdań sprzecznych musi być prawdziwe.
- 3) 1,1 sprzeciwia się zasadzie wyłączonej sprzeczności według której dwa zdania sprzeczne nie mogą być oba zarazem prawdziwe.
- 4) 1,1 nie sprzeciwia się zasadzie wyłączonego środka według której jedno z dwóch zdań sprzecznych musi być prawdziwe.

Jeżeli konjunkcja jest nie prawdą i zachodzi alternatywa, to prawdą jest, że istnieje sprzeczność.

		$N\alpha$				$N\alpha$	
		K				A	
		0	1			0	1
α	0		0	α	0		1
	1	0			1	1	

Jeżeli $K\alpha\beta = 0$ i $A\alpha\beta = 1$, to zachodzi sprzeczność.

Rozdział ósmy.

LEKCJA III-cia.

Treść: Wiersz dowodowy. Drugi wywód sformalizowany. Intuicyjne objaśnienie tezy $C(a < a) \supset N(a < a)$. Zdania sprzeczne. Przykład. Nie można wyrazić zasady wyłączonej sprzeczności przez zasadę wyłączonego środka. Luźne uwagi odnośnie sylogistyki i studjum zawodów praktycznych.

Rozdział ósmy.

LEKCJA III-cia.

Uzupełnienia do lekcji II-giej:

Wiersz dowodowy dla twierdzenia czwartego:

3 * C1— 4

mówi mi, że jeżeli 1, to mogę oderwać od twierdzenia 3 następnik 4 jako nowe udowodnione twierdzenie.

W wierszu dowodowym mamy dwa zdania osobne oddzielone znakiem przestankowym, których łączyć nie można.
„ — “ oznacza, że mam prawo oderwać 4.

Przejdziemy teraz do drugiego podobnego wywodu, który tym różni się od poprzedniego, że wśród przesłanek występuje także twierdzenie logiczne.

Przedtem mieliśmy twierdzenia arytmetyczne o liczbach jako przesłanki a teraz będziemy mieli prócz twierdzenia arytmetycznego jedno twierdzenie logiczne, które potrzebne będzie jako twierdzenie pomocnicze do wywodu.

1 przesłanka: $C(a < b)$ $N(b < a)$.

Z tej jednej przesłanki arytmetycznej mamy wyprowadzić wniosek: $N(a < a)$.

1 b/a * 2

2 $C(a < a)$ $N(a < a)$.

Tu dodajemy tezę logiczną, którą postaramy się chociażby intuicyjnie objaśnić.

W twierdzeniu 2 występują dwa zdania sprzeczne.

Zdań sprzecznych kształtu „ α ” i „ $N\alpha$ ” dotyczą dwie zasady.

Zasada wyłączonej sprzeczności, która orzeka, że dwa zdania sprzeczne nie są razem (naraż) prawdziwe i zasada wyłączonego środka, która orzeka, że dwa zdania sprzeczne nie są razem (naraż) fałszywe.

Przykład:

Słońce świeci. Nieprawda, że słońce świeci.

Powyższe dwa zdania sprzeczne, naraż prawdziwe nie są. Dodać określony czas i miejsce (spółrzędne czasowe i przestrzenne).

Słońce tu teraz świeci. Nieprawda, że słońce tu teraz świeci. Wypełnijmy „tu”, „teraz” przez wyczerpujące podanie tych znaczeń i tak: „tu” = „Warszawa, Brzozowa 12 m. 17, „teraz” = 6. VII. 1942 godz. 18.05.

Słońce Warszawa Brzozowa 12. m. 17. 6. VII. 1942, 18.05 świeci. Nieprawda, że słońce Warszawa, Brzozowa 12. m. 17. 6. VII. 1942, 18.05 świeci.

Są to dwa zdania sprzeczne α , $N\alpha$.

Nie mogę utrzymywać, że „ α ” i „ $N\alpha$ ” są prawdziwe,
że $K\alpha N\alpha = 1$.

Nie mogę utrzymywać, że „ α ” jest prawdziwe i „ $N\alpha$ ” jest prawdziwe. (Byłoby to wbrew zasadzie wyłączonej sprzeczności).

Również nie mogą utrzymywać, że „ α ” jest fałszywe i „ $N\alpha$ ” jest fałszywe. (Byłoby to wbrew zasadzie wyłączonego środka).

Byłaby sprzeczność gdyby „ α ” było prawdziwe i „ $N\alpha$ ” było prawdziwe.

Jeżeli ktoś twierdzi, że coś jest białe, a ktoś inny powiada, że to coś nie jest białe, to jeden z nich mówi prawdę, bo niczego trzeciego (pośredniego) nie ma.

Nie mogę wyrazić zasady wyłączonej sprzeczności przez zasadę wyłączonego środka i naodwrot t. j. nie mogę uważać za wypowiedź zasady wyłączonej sprzeczności zdania, że („ α ” jest fałszywe i „ $N\alpha$ ” jest fałszywe), bo zdanie to nie przeczy zasadzie wyłączonej sprzeczności.

Przykład:

Zasada wyłączonej sprzeczności:

Nieprawda, że „Lwów leży nad Wisłą” i
„Lwów nie leży nad Wisłą”.

Zasada wyłączonego środka:

Prawda, że „Lwów leży nad Wisłą” lub
„Lwów nie leży nad Wisłą”.

Że dwa zdania sprzeczne nie mogą być *oba* prawdziwe, to głosi zasada wyłączonej sprzeczności a, że *jedno* z nich musi być prawdziwe, to głosi zasada wyłączonego środka.

Mógłby ktoś powiedzieć, że oba zdania sprzeczne są prawdziwe, to nie przeczy zasadzie wyłączonego środka, bo jeżeli oba są prawdziwe, to jedno z nich musi być prawdziwe, ale to sprzeciwia się zasadzie wyłączonej sprzeczności.

Gdyby ktoś powiedział, że *żadne* ze zdań sprzecznych nie jest prawdziwe, to takie powiedzenie byłoby zgodne z zasadą wyłączonej sprzeczności, ale sprzeciwiałoby się zasadzie wyłączonego środka, bo jedno musi być prawdziwe.

Przechodzimy do twierdzenia:

2 $C(a < a)$ $N(a < a)$.

Coby było gdybyśmy przyjęli za prawdę, że $(a < a)$? Wtedy na mocy reguły odrywania musielibyśmy uznać zdanie $N(a < a)$ i wtedy byłyby uznane dwa zdania sprzeczne a mianowicie „ $(a < a)$ ” i „ $N(a < a)$ ”.

Otóż dwa zdania sprzeczne nie mogą być zarazem prawdziwe zgodnie z zasadą wyłączonej sprzeczności. Skutkiem

tego „ $(a < a)$ “ nie może być prawdziwe a więc musi być fałszywe, bo każde zdanie jest prawdziwe albo fałszywe; tu jest coś innego aniżeli zasada wyłączonego środka, bo tu nie chodzi o zdania sprzeczne, tylko o każde zdanie z osobna. Każde bowiem zdanie z osobna jest prawdziwe albo fałszywe, to znaczy, że zdanie $(a < a)$ jest zdaniem fałszywym a zatem zgodnie z zasadą wyłączonego środka, według której jedno ze zdań sprzecznych musi być prawdziwe, zaprzeczenie jego $N(a < a)$ nie może być fałszywe czyli musi być prawdziwe.

Z tego intuicyjnego wyводу okazuje się, że o ile prawdziwa jest implikacja kształtu $C \supset N\alpha$, to prawdziwe jest zdanie $N\alpha$.

		$N\alpha$	
	C	0	1
α	0	1	<u>1</u>
	1	<u>0</u>	1

Jeszcze chodzi o sformułowanie powyższej tezy logicznej, którą napiszemy, przechodząc od zdań do zmiennych zdaniowych, jak następuje:

Jeżeli $CpNp$, to Np .

Zastąpmy w tym okresie warunkowych „jeżeli... , to“ przez „ C “ a otrzymamy implikację kształtu

$CCpNpNp$,

przyczem „ p “ oznaczając zmienną zdaniową oznacza dowolne zdanie.

Implikację tę czytamy jak następuje:

Jeżeli (jeżeli p , to nie p), to nie p .

Przebieg wyvodu sformalizowanego przy pomocy którego udowodnić mamy twierdzenie $N(a < a)$ będzie następujący:

- 1 $C(a < b) N(b < a)$
- 2 $CCpNpNp$
1 $b/a * 3$
- 3 $C(a < a) N(a < a)$
2 $p/(a < a) * 4$
- 4 $CC(a < a) N(a < a) N(a < a)$
4 * C 3 — 5
- 5 $N(a < a)$

Doprowadziliśmy tutaj pierwszą przesłankę, przy pomocy wprowadzonego prawa logicznego $CCpNpNp$ do formy okresu warunkowego, posiadającego uznany poprzednik, następnik więc możemy oderwać.

- 1 jest przesłanką arytmetyczną.
- 2 jest przesłanką logiczną, jest to prawo z logiki zdań.

Tak jak 1 jest prawem dotyczącym w arytmetyce wszelkich liczb, tak 2 jest prawem dotyczącym w logice wszelkich zdań.

5 jest twierdzeniem arytmetycznym, które dowodzimy. Tu z pewnych zdań uznanych za prawdziwe dochodzimy do innych zdań, które musimy uznać za prawdziwe.

Luźne uwagi poza lekcją III-cią.

Sylogistyka, to tyle co teoria sylogizmu Arystotelesowego, przyczem teoria to tyle co system — całokształt. (Nie tylko logika nazw, ale i logika zdań).

Chcąc studiować zawody praktyczne przy należytem opanowaniu podstaw, należałoby studującemu dać możliwość gruntownego zaznajomienia się, w poniżej podanym porządku, z następującymi przedmiotami:

- 1.) Logika zdań (rachunek zdań).
- 2.) Rachunek predykatów t. j. taki pewien sposób przedstawienia logiki nazw; łącznie zawierałby rachunek relacji czyli logikę stosunków.
- 3.) Teoria mnogości.
- 4.) Arytmetyka.
- 5.) Geometria.
- 6.) Mechanika teoretyczna.
- 7.) Fizyka teoretyczna.
- 8.) Mechanika techniczna.
- 9.) Teoria maszyn np. cieplnych.
- 10.) Elementy maszyn.
- 11.) Budowa maszyn np. cieplnych.

Podstawy wymienionych przedmiotów należałoby zebrać w grubej książce, która mogłaby być wstępem do głębszego studjum poszczególnych jej działów.

Matematyka jako podbudowa technicznych przedmiotów zawodowych nie oparta na logice zdań, rachunku predykatów i teorii mnogości nie może być ostrym narzędziem przy opracowywaniu materiału mechaniki i fizyki teoretycznej, bez których nie ma mowy o rozumnym traktowaniu dziedziny przedmiotów praktycznych.

Taki podręcznik czeka autora.

Rozdział dziewiąty

LEKCJA IV-ta.

Treść: Analiza wzoru $CCpNpNp$. Logika zdań jako podstawowy system logiczny. Metoda zerojedynkowa sprawdzania prawdziwości praw logiki zdań. Prawo dwuwartościowości. Matryca negacji. Matryca dla implikacji. Sprawdzanie tezy $CCpNpNp$. Stopnie możliwości bytu. Budowa pierwszego aksjomatu $CCpqCCqrCpr$ i sens drugiego aksjomatu $CCNppp$. Budowa i sens trzeciego aksjomatu $CpCNpq$. Reguła podstawiania.

Rozdział dziewiąty

LEKCJA IV-ta.

Poznany w poprzedniej lekcji wzór CCpNpNp analizujemy, to znaczy, aby móc sprawdzić jego wartość zastanowimy się co do czego należy.

Zaczynamy w tym wypadku od najprostszych części składowych tego wzoru i szukamy co do czego należy i tak wiemy, że „N” jest funktorem od jednego argumentu zdaniowego a za tem do „N” należy zdanie bezpośrednio po nim następujące i tworzące wraz z nim negację a więc nowe zdanie.

Obwiedźmy ramkami to, co należy traktować jako jedno zdanie.

$$C \quad C \quad p \quad \boxed{Np} \quad \boxed{Np}$$

$$C \quad \boxed{C \quad p \quad \boxed{Np}} \quad \boxed{Np}$$

$$C \quad \boxed{C \quad p \quad Np} \quad \boxed{Np} \quad , \text{ bo „C” jest funktorem}$$

stosunku dwuczłonowego od dwóch argumentów zdaniowych.

Podstawmy: $p/(a < a)$ to otrzymamy

$$C \quad \underbrace{C(a < a) \quad N(a < a)}_{\text{Poprzednik}} \quad \underbrace{N(a < a)}_{\text{Następnik}}$$

Poprzednik

Następnik

Poprzednik jest równoznaczny z naszym poprzednio uznanym twierdzeniem.

Odrywając, w myśl reguły odrywania, następnik „N(a < a)” udowadniamy, to co było do udowodnienia t. j. „N(a < a)”.

Powyżej zanalizowaliśmy dwa proste przykłady dowodów dedukcyjnych i poznaliśmy z jednej strony reguły postępowania, które pozwalają nam przekształcać jedne wyrażenia w drugie wyrażenia oraz poznaliśmy jedno prawo logiczne należące do *logiki zdań*, która jest podstawowym systemem logicznym.

Tym systemem logicznym teraz się zajmiemy.

Do zadania tego możemy podejść, albo zaczynając od 1.) albo od 2.) albo od 3.):

1.) Trzeba poznać z kilkadziesiąt twierdzeń z logiki zdań, które są najważniejszymi prawami rozumowania np.

CCpNpNp

NKpNp

ApNp itd.

Byłaby to droga najbardziej intuicyjna.

2.) Te prawa można z aksjomatyzować, to znaczy wywieść je można wszystkie z małej liczby aksjomatów (1, 2, 3, 4 i więcej może być aksjomatów) przy pomocy reguły podstawiania i odrywania. (Przykład później).

3.) Prawa te można niezależnie od jakiejkolwiek aksjomatyki sprawdzać metodą zerojedynkową, posługując się macierzami funktorów.

Zacznijmy od 3. (mechanicznie).

Metoda sprawdzania zerojedynkowego opiera się na tym, że *prawdziwość praw logiki zdań* nie zależy od treści zdań, tylko zależy od ich wartości logicznych, to znaczy od ich prawdy i fałszu.

Prawo dwuwartościowości orzeka, że każde zdanie przybiera tylko jedną z dwóch wartości logicznych t. j. prawdę lub fałsz. Jest to coś innego niż zasada wyłączonego środka,

która dotyczy zdań sprzecznych, my tu nie mówimy o zdaniach typów „p” i „Np” a więc o zdaniach sprzecznych lecz wypowiadamy tu myśl odnoszącą się do każdego jednego zdania a mianowicie tę myśl, że owo zdanie może być prawdziwe lub fałszywe.

Prawdę oznaczamy przez 1, fałsz przez 0.

Matrycę negacji otrzymamy, jeżeli będziemy wiedzieć czemu się równa „N0” i „N1”, to znaczy jaką wartość logiczną ma zaprzeczenie fałszu a jaką zaprzeczenie prawdy.

Piszemy symboliczne równości.

$$N0 = 1$$

$$N1 = 0$$

Jest to matryca dla negacji t. j. dla „N”. Zaprzeczenie *fałszu* jest prawdą, zaprzeczenie prawdy jest *fałszem*.

Matryca dla implikacji t. j. dla okresu warunkowego.

Tu musimy rozpatrzyć 4-ry przypadki, bo „C” jest funktorem zdaniotwórczym od 2-ch argumentów.

$$C 0 0 = 1$$

$$C 0 1 = 1$$

$$C 1 0 = 0$$

$$C 1 1 = 1$$

Przypisujemy wartości logiczne każdej kombinacji, przyjmując je na razie na wiarę (nie intuicyjnie).

Układamy wspólną matrycę dla „C” i „N” jak następuje:

		q			
		C	0	1	N
p	0	1	1	1	
	1	0	1	0	

p = pierwszy argument.

q = drugi argument.

Teraz już możemy przystąpić do sprawdzania tezy „CCpNpNp” i jakiegokolwiek innej, która zawiera funktory „C” i „N”.

Ta teza będzie prawdziwa wtedy i tylko wtedy gdy przechodzi na mocy matrycy w „1” przy wszelkich podstawieniach zer i jedynek za występujące w niej zmienne zdaniowe.

W powyższej tezie występuje tylko jedna zmienna zdaniowa „p”, więc mamy tylko dwa przypadki do sprawdzenia a mianowicie dla „p = 0” i dla „p = 1”.

p = 0, CC0N0N0 = CC011 = C11 = 1

p = 1, CC1N1N1 = CC100 = C00 = 1

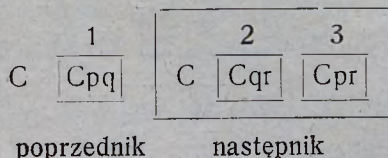
Powiemy więc, że twierdzenie „CCpNpNp” jest *sprawdzone* t. z. jest prawdą dla „p=0” i dla „p=1”, a więc jest wogóle prawdą, to znaczy jest prawdą dla każdego zdania typu p.

Uwaga: Stopnie możliwości bytu mogłyby być jakimiś wartościami logicznymi różnymi od prawdy i fałszu, albo moglibyśmy mówić o różnych rodzajach prawdy i fałszu. Może być ewentualnie prawda mocniejsza lub słabsza i t. p.

Zobaczmy z kolei jaka jest budowa pierwszego aksjomatu.

Napiszmy go:

CCpqCCqrCpr, teraz zobaczmy co należy do każdego „C”.



Jeżeli 1, to jeżeli 2, to 3.

Z czego się składa następnik?

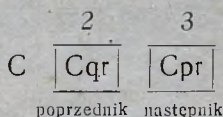
Jak widzimy, poprzednik jest prostym okresem warunkowym a następnik jest złożonym okresem warunkowym.

Jeżeli w prawdziwym okresie warunkowym poprzednik jest prawdziwy, to następnik także jest prawdziwy.

Założmy, że prawdziwym jest okres warunkowy „CCpqCCqrCpr” i, że prawdziwym jest poprzednik tego okresu warunkowego „Cpq”, to według matrycy dla „C” prawdziwym będzie jego następnik

„CCqr Cpr”.

Założmy powtórę, że w ostatnim okresie warunkowym



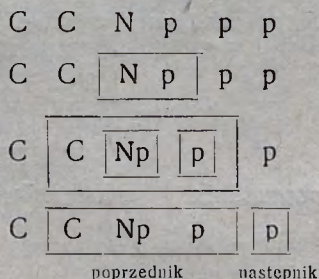
prawdziwy jest poprzednik „Cqr”, to wtedy musi być według matrycy dla „C” prawdziwy następnik „Cpr”.

Jeżeli jest prawdziwy okres warunkowy „Cpq”, to jeżeli jeszcze nadto jest prawdziwy okres warunkowy „Cqr”, to prawdziwy będzie okres warunkowy „Cpr”.

To jest sens twierdzenia „CCpqCCqrCpr”.

Jest to prawo sylogizmu warunkowego czyli prawo sylogizmu z logiki zdań.

Zobaczmy jaka jest budowa i jaki jest sens drugiego aksjomatu t. j.



Poprzednikiem jest tutaj zdanie „jeżeli nie p, to p”; to zdanie składa się z dwóch zdań sprzecznych.

Jeżeli prawdziwym jest to zdanie „CNpp“, to nie może być prawdziwe zdanie „Np“, bo wtedy byłoby także i „p“ prawdziwe i powstałaby sprzeczność.

Jeśli zatem prawdziwe jest „CNpp“, to musi być prawdziwe „p“.

I to jest sens tego drugiego aksjomatu „CCNppp“.

Zajmijmy się trzecim aksjomatem.

$$\text{CpCNpq}$$

$$\text{C} \quad \boxed{\text{p}} \quad \boxed{\text{C} \quad \boxed{\text{Np}} \quad \text{q}}$$

A jaki sens ma to zdanie?

Załóżmy, że byłoby prawdziwe zdanie „p“, to wtedy moglibyśmy na podstawie tego aksjomatu wyprowadzić zdanie „CNpq“, gdyby nadto „Np“ było także prawdziwe, to byłoby prawdziwe zdanie „q“.

„q“ oznacza dowolne zdanie.

Sens tego twierdzenia jest taki, że gdyby były prawdziwe „p“ i „Np“ t. j. dwa zdania sprzeczne, to byłoby prawdziwe dowolne zdanie „q“.

Reguła podstawiania polega na tem, że za zmienne „p“, „q“, „r“ wolno nam podstawić wyrażenia zdaniowe, to znaczy bądź inne zmienne np. za „p“ „q“ bądź negacje np. „Np“, bądź okresy warunkowe np. „Cpq“, byle to zdania były.

Przy pomocy powyższych trzech aksjomatów i dwóch reguł podstawiania i odrywania możemy wyprowadzić wszystkie tezy logiki zdań.

Rozdział dziesiąty.

9. VII. 42. wieczór.

Zapytania na lekcję piątą.

„Wtedy i tylko wtedy, gdy“ co to znaczy?

Co znaczy, że prawdziwość praw logiki zdań zależy od prawdy i fałszu zdań a nie zależy od ich treści?

Może by można powiedzieć, że prawdziwość zdań zależy od ich prawdy lub fałszu t. j. od ich wartości logicznej a nie zależy od ich treści, albo może lepiej: Prawdziwość też, logiki zdań zależy od ich wartości logicznej a nie zależy od ich treści.

10. VII. 42. rano.

Np. „Słońce świeci“, to nie jest zdanie logiczne w powyższym znaczeniu, (pewnie że nie, bo nie jest tezą z logiki zdań w znaczeniu zdania należącego do logiki). Jest to zdanie grammatyczne. Symbolem tego zdania może być np. litera „ α “. *Litera „ p “ będziemy oznaczali tylko te zdania, których wartość zależy od ich wartości logicznej.*

Można mówić o prawdziwości treści zdania, ale jest to prawdziwość innego rodzaju aniżeli prawdziwość, czyli prawda logiczna.

Np. „CCpNpNp“ jest to prawdziwe zdanie logiczne bez treści. Prawdziwość logiczna tego wyrażenia logicznego zależy od wartości logicznej zdania logicznego „ p “.

W naszym przykładzie, ponieważ dla każdej wartości zdania logicznego „p” t. j. dla obu jego wartości „0” lub „1”, wartość logiczna wyrażenia „CCpNpNp” = 1, więc wyrażenie to, jak każde w logice, spełniające ten warunek, nazywamy *tezą logiczną*.

Jeżeli słońce świeci i ja wyrażam ten stan rzeczy wyrażeniem „słońce świeci”, to to wyrażenie wyraża prawdę. Prawda ta jest stwierdzeniem wyrażeniowym, przy pomocy zdania gramatycznego pewnego „faktycznego” stanu rzeczy.

Nie ma tu, w tym akcie, logika nic do powiedzenia. Jeżeli „słońce świeci”, to „jutro jest piątek”, jest to zdanie logiczne, składa się ono z dwóch wyrażen zdaniowych:

Słońce świeci = α ,

jutro jest piątek = β ,

połączonych okresem warunkowym „C” symbolicznie

$p = C\alpha\beta$.

Czy zdanie „ $C\alpha\beta$ ” jest zdaniem prawdziwym t. j. logicznie prawdziwym?

Ponieważ ani „ α ” ani „ β ” nie są zdaniami logicznymi a dopiero ich pewne połączenie daje zdanie logiczne, — to jak przy pomocy metody zerojedynkowej przekonać się o prawdziwości czy fałszywości tego zdania?

Czy może dlatego, że zdanie to nie jest prawem logiki, metoda powyższa do niego nie może być stosowana?

Skąd wziąć i jak ustalić kryterium prawdziwości zdania logicznego?

Raz chcemy zdanie „ α / słońce świeci” uważać za zdanie logicznie prawdziwe, jeżeli je wypowiadamy wtedy gdy słońce świeci, — innym razem powiadamy, że prawdziwość zdania „ α ” zależy od jego wartości logicznej t. j. od jego prawdy lub fałszu ta zaś nie zależy od treści zdania, przyczem nie rozumiem cobym mógł uważać, lub coby należało nazywać treścią zdania?

Zdanie „słońce świeci“, jeżeli je wypowiadamy wtedy gdy słońce świeci jest wyrażeniem odnoszonego (teraz) wrażenia, — jeżeli je wypowiadamy wtedy gdy słońce nie świeci, to może być wyrażeniem powstającego pamięciowego stanu i będzie to pewien fałsz, ale nie fałsz o charakterze logicznym. Powyższe wyrażenia przy pomocy wyrażań jak wyżej mogą mieć z logiką o tyle tylko coś wspólnego, o ile ich pewne połączenia mogą być zdaniami logicznymi takiego czy innego kształtu. Które z tych zdań możnaby poddać sprawdzeniu logicznemu przy pomocy metody zerojedynkowej?

Zdaje mi się, że zdanie logiczne $C\alpha\beta$ nie nadaje się do badania przy pomocy wspomnianej metody; co należałoby zrobić, poza ewentualnie intuicyjnym podejściem, aby mechanicznie zbadać zdanie to na jego prawdę lub fałsz? Wyrażenia zdaniowe mogą być i są po większej części elementami zdań logicznych. Wyrażanie zdaniowe czy nie zdaniowe może być tylko prawdziwe, — o fałszu tu nie można mówić. W pierwszym wypadku gdy wyrażam, że „słońce świeci“ wtedy gdy ono świeci, mówię prawdę odnoszącą się do związku łączącego to co spostrzegam z wyrażaniem tego co spostrzegam; w wypadku drugim, gdy wyrażam, że „słońce świeci“ wtedy gdy ono nie świeci, mówię prawdę odnoszącą się do związku łączącego wyobrażenie tego co było spostrzegane z wyrażaniem tego co było spostrzegane. W pierwszym wypadku znakiem prawdy nie logicznej niech będzie znak „ α_1 “, „prawda Nr. 1“, w drugim wypadku znak „ α_2 “.

W obu wypadkach mamy związek między czemś istniejącym a wyrażaniem owego czegoś, — tylko w pierwszym wypadku wyrażamy wyrażeniem „ α_1 “ wrażenie, w drugim wypadku wyrażamy wyrażeniem „ α_2 “ wyobrażenie.

W obu wypadkach mamy do czynienia z ontologiczną prawdą, jednak w żadnym z nich nie mamy do czynienia z prawdą logiczną.

W każdym razie stosunek między „ α_1 ” i „ α_2 ” jest stosunkiem „C” w jednym z czterech możliwych wypadków a mianowicie w tym wypadku w którym stosunek „C” jest zgodny ze stosunkiem któremu podlega przyczyna i skutek. Jest to stosunek, który wyrażamy okresem warunkowym cechującym również pewne następstwo (porządek tu także się wplata) a nie implikację pozbawioną wspomnianego następstwa — tak mi się przynajmniej wydaje.

Rozdział jedynasty.

LEKCJA V.

Treść: Tezy, aksjomaty, twierdzenia. Zdanie logiczne t. j. wyrażenie należące do logiki. Sprawdzanie tez logicznych metodą zerojedynkową. Logika nie robi różnicy między prawdziwością zdań elementarnych a prawdziwością zdań funktorowych. Realny układ aksjomatów. Oczwistość. Terminy pierwotne. Przykład sprawdzenia aksjomatu trzeciego przy pomocy metody zerojedynkowej.

Rozdział jedynasty.

LEKCJA V-ta.

Tezy t. j. zdania logiczne prawdziwe dzielimy na aksjomaty t. j. zdania logiczne przyjęte za prawdziwe bez dowodu i na twierdzenia t. j. zdania logiczne, których prawdziwość trzeba udowodnić.

Teza, aksjomat, twierdzenie, są to zdania logiki zdań t. j. zdania rachunku zdań albo są to wyrażenia zdaniowe należące do logiki zdań.

Zdanie logiczne nie posiada ani podmiotu ani orzeczenia.

Za zmienne zdaniowe można tylko zdania podstawiać.

Prawdziwość tez z logiki zdań nie zależy od treści tych argumentów zdaniowych, które występują w tych tezach, tylko zależy od ich wartości logicznej.

„Słońce świeci“ jako zdanie nie należy do logiki, ale można do niego stosować logikę. Charakterystyką zdań należących do logiki zdań t. j. do rachunku zdań, jest to, że w zdaniach tych występują zmienne zdaniowe „p“, „q“, „r“, i t. d. i funktory zdaniotwórcze od argumentów zdaniowych jak „C“, „N“, „K“, „A“, i t. p., to znaczy, że za zmienną „p“ i t. d. możemy podstawiać tylko zdania posiadające wartości logiczne. Za „p“ można podstawić każde zdanie posiadające wartość logiczną a więc i „słońce świeci“, bo posiada ono wartość logiczną, może ono bowiem być fałszem 0 lub prawdą 1, a więc prawdą jest, że zdanie „słońce świeci“ może być za „p“ podstawione.

Zdania logiczne t. j. zdania należące do logiki zdań albo lepiej, wyrażenia należące do logiki zdań składają się ze zmiennych zdaniowych i z funktorów zdaniotwórczych. Te i tylko te chcemy i możemy sprawdzić metodą zerojedynkową. Możemy stosować zmienne „p“, „q“, „r“ do zdań takich jednostkowych jak np. „słońce świeci“, w jaki jednak sposób sprawdzamy prawdziwość takich zdań, to już nie należy do logiki. Możemy w logice zdań sprawdzić metodą zerojedynkową wyrażenia, w których obok zmiennych „p“, „q“, „r“, występują funktory jak „N“ lub „C“, bo definiujemy te funktory w ten sposób, iż utworzone przy ich pomocy funkcje zależą wyłącznie od wartości logicznej swych argumentów, to znaczy tych liter „p“, „q“, „r“.

Prawdziwość jakiejś tezy logicznej utworzonej, z funktorów i zmiennych np. „Cpp“ możemy sprawdzić metodą zerojedynkową.

Dla $p = 0$, $C_{pp} = C_{00} = 1$

Dla $p = 1$, $C_{pp} = C_{11} = 1$

Są to w tym wypadku wszystkie możliwe podstawienia. Jeżeli „Cpp“ jest wyrażeniem logiki zdań i dla każdych wartości „p“ wyrażenie „Cpp“ przechodzi w 1, to znaczy jest prawdą, to „Cpp“ jest tezą logiki zdań, ale prawdziwość ta ma inny charakter aniżeli prawdziwość zdania „słońce świeci“. Nie możemy tej prawdziwości porównać tak z rzeczywistością jak to jest możliwe w wypadku „słońce świeci“ lub „deszcz pada“. *Te ostatnie dwa zdania mają podmiot i orzeczenie, podmioty tych zdań desygnują jakieś przedmioty istniejące, których własności możemy spotrzeć i wobec tego zdania, które tym podmiotom przypisują pewne własności możemy porównać z tym co spostrzegamy, natomiast zdanie „Cpp“ a nawet jego podstawienie „jeżeli deszcz pada, to deszcz pada“ nie ma ani*

podmiotu ani orzeczenia a więc nic o niczem w tym zdaniu nie orzekamy.

To jednak jest już filozofia!!

Wprawdzie pytania są bliskie poruszonym zagadnieniom w logice, jednak do niej nie należą.

Logika nie robi różnicy między prawdziwością zdań elementarnych t. j. takich zdań, które mają jednostkowy podmiot, t. j. posiadają realny desygnat a prawdziwością zdań funktorowych t. j. takich w których występują funktory a które nie mają ani podmiotu ani orzeczenia.

Przy omawianiu systemu logicznego zaczęliśmy od punktu 3.), przejdziemy teraz do punktu 2.) t. j. do aksjomatyki.

Poznamy realny układ aksjomatów. Będzie to układ trzech aksjomatów przyczem przez aksjomat rozumiemy tezę, którą przyjmujemy w systemie bez dowodu. Zwykle żąda się, by aksjomat był oczywisty — dziś tego się nie żąda a to dlatego, że sama oczywistość straciła dużo na znaczeniu a w wyborze aksjomatów kierujemy się więcej względami natury praktycznej aniżeli ich oczywistością.

Oto trzy aksjomaty.

1 CCpqCCqrCpr

2 CCNppp

3 CpCNpq

Jest to aksjomatyka oparta na terminach pierwotnych „C“, „N“, to znaczy na terminach nie zdefiniowanych,

Do systemu należą dwie reguły wnioskowania t. j. reguła podstawiania i reguła odrywania.

Do systemu można dołączyć definicje: Konjunkcji „K“, alternatywy „A“, ekwiwalencji „E“.

Powstaje zadanie: Zapoznać się z tymi aksjomatami, to znaczy dowiedzieć się co one znaczą.

Prawdziwość ich możemy stwierdzić metodą zero-jedynkową. Każdy z czytelników powinien samodzielnie sprawdzenie to wykonać i przekonać się o tem, że każdy z aksjomatów posiada wartość = 1 niezależnie od wartości „p” i „q”, to znaczy, że dla każdej wartości „p” i „q” aksjomaty posiadają wartość = 1 i tak:

Aksjomat trzeci $CpCNpq$

Dla $p = 0, q = 0$

$$C0CN00 = C0C10 = C00 = 1$$

Dla $p = 0, q = 1$

$$C0CN01 = C0C11 = C01 = 1$$

Dla $p = 1, q = 0$

$$C1CN10 = C1C00 = C11 = 1$$

Dla $p = 1, q = 1$

$$C1CN11 = C1C01 = C11 = 1$$

Dodatkowe uwagi jakie mogą się nasuwać w związku z treścią lekcji piątej.

Tezy (1)

Aksjomaty	Twierdzenia
(1) bez dowodu	(1) z dowodem

Jeżeli prawdziwość tezy z logiki zdań nie zależy od treści tych argumentów zdaniowych, które występują w tych tezach, tylko zależy od ich wartości logicznej i jeżeli są takie tezy, których prawdziwość także nie zależy od wartości logicznej argumentów zdaniowych występujących w tych tezach, to prawdziwość takich tez chętnie byśmy nazwali „absolutną”, ale lepiej nazwiemy ją wartością wyróżnioną.

Pod „niezależnością” w tym ostatnim znaczeniu rozumiemy tę okoliczność, że wartość twierdzenia logicznego posiada dla *każdej* wartości argumentów w nim występujących wartość równą 1. Niezależność taką możnaby nazwać zależnością obojętną.

Aksjomaty jako właśnie tego rodzaju tezy posiadają prawdziwość wyróżnioną, to znaczy wartość ich równa się „z domu” wartości 1, będąc nie zależną od treści a zależną tylko obojętnie, od wartości argumentów zdaniowych w nich występujących.

„Z domu” znaczy w przyjętym systemie dedukcyjnym a więc przy pewnych matrycach w naszym przypadku w systemie implikacyjno-negacyjnym przy matrycach „C” i „N”.

Niezależność występuje tu w podwójnym znaczeniu a mianowicie:

- 1) Prawdziwość nie zależy od treści w tym znaczeniu, że treści „p”, „q”, i t. d. są czymś stojącym poza tem co by mogło wpływać na prawdziwość twierdzeń logicznych.
- 2) Prawdziwość nie zależy od wartości „p”, „q” i t. d. w tym znaczeniu, że przy każdej wartości jaką argumenty „p”, „q” i t. d. mogą posiadać, wartość twierdzenia jest stała, równa się 1, to znaczy jest to twierdzenie, niezależnie od wartości „p”, „q”, stale prawdziwe. Te twierdzenia, które posiadają stale wartość 1 i zależą tylko obojętnie od wartości argumentów nazywamy tezami, gdy tymczasem inne twierdzenia, których wartość zależy od wartości argumentów będziemy nazywali udowodnionymi twierdzeniami o ile będą prawdziwe t. j. o ile potrafimy udowodnić, że posiadają one wartość = 1.

Rozdział dwunasty.

LEKCJA VI.

Treść: Zbiór. W sprawie poprzednika drugiego aksjomatu.
Wyrażenia sensowne. Wyprowadzenie prawa tożsamości
„Cpp“ z trzech aksjomatów. Obliczenie matrycy alternatywy na podstawie definicji.

Rozdział dwunasty.

LEKCJA VI.

13. VII. 42.

Zapytanie przed lekcją.

Czy należy mówić: „Zbiór przedmiotów w obrębie *których* rozpatruję stosunek „R” nazywam polem tego stosunku” czy też „zbiór przedmiotów w obrębie, *którego* rozpatruję stosunek „R”, któremu podlegają przedmioty zbioru, nazywam polem tego stosunku”?

Odpowiedź: To jest to samo, bo rozpatrując przedmioty zbioru rozpatrujemy zbiór. (Ostrożnie!)

Jeżeli jednak „zbiór” jest nazwą konotacji, której desygnatami są „zbiory” a konotacją jest „zbiór”, to może lepiej by było powiedzieć, unikając nazwy „przedmiot”, tak:

To jest to samo, bo rozpatrując konotację zbiorów t. j. zbiór zbiorów, rozpatrujemy zbiór.

W sprawie poprzednika drugiego aksjomatu t. j. w sprawie wyrażenia „CNpp” należy pamiętać, że jeżeli prawdziwym jest zdanie „CNpp”, to nie może być prawdziwe zdanie „Np”, bo wtedy byłoby na podstawie reguły odrywania także i zdanie „p” prawdziwe i powstałaby sprzeczność.

Idziemy dalej:

„p” jest zdaniem, jest to wyrażenie zdaniowe lub sensowne, bo wszystkie wyrażenia zdaniowe nazywamy w logice zdań

sensownymi, zaś wyrażenia, które nie są zdaniami nazywamy bezsensownymi.

„pp” nie jest zdaniem nie jest wyrażeniem sensownym. Tak samo nie są wyrażeniami sensownymi takie wyrażenia jak: „C”, „N”, „Cp”, „qN”, ale sensownym jest wyrażenie „Nq”.

Ogólna charakterystyka wyrażen sensownych czyli zdaniowych jest następująca:

Do wyrażen sensownych należą: po

- 1.) wszystkie małe litery łacińskie jak p, q, r, . . . po
- 2.) jeżeli „ α ” jest sensowne, to „N α ” jest sensowne i po
- 3.) jeżeli „ α ” jest sensowne i „ β ” jest sensowne, to „C $\alpha\beta$ ” jest sensowne.

Porządek t. j. następstwo liter odgrywa podstawową rolę.

Wyprowadzenie prawa tożsamości Cpp z trzech aksjomatów rachunku zdań:

- 1 CCpqCCqrCpr
- 2 CCNppp
- 3 CpCNpq

Najpierw wykonamy podstawienia w aksjomacie 1 takie, aby poprzednik tego aksjomatu Cpq był prawdziwy a to dlatego by móc oderwać następnik.

Rozporządzamy trzema zdaniami prawdziwymi i musimy coś takiego podstawić w aksjomacie 1, aby poprzednik tego aksjomatu Cpq stał się jednym z tych trzech zdań prawdziwych. Wtedy będziemy mieli poprzednik prawdziwy i będziemy mogli następnik oderwać.

Wykonamy takie podstawienia, aby nasz poprzednik stał się 3-cim zdaniem. (Że tak należy podstawić, to dochodzimy do tego przez próbowanie, trochę intuicji, trochę wprawy i t. d.).

Cpq poprzednik aksjomatu 1
 CpCNpq trzecie zdanie prawdziwe

- 1 p/p, q/CNpq * 4
 4 C $\underbrace{\text{CpCNpq}}_3 \underbrace{\text{CCCNpqrCpr}}_5$
 4 * C 3—5
 5 $\underbrace{\text{CCCNpqrCpr}}$
 poprzednik

Zastanówmy się gdzie twierdzenie 5 posiada, i jak w tym twierdzeniu wygląda, poprzednik i następnik. Możemy następnik oderwać, jeżeli poprzednik jest prawdziwy. Jak mamy się przekonać, że poprzednik jest prawdziwy? Musi on być jedną z tych 5-ciu tez t. j. z trzech aksjomatów i dwóch wyprowadzonych twierdzeń.

Jeżeli porównamy nasz poprzednik CCNpqr z powyższymi pięciu tezami, to przekonamy się, że jest on różny od każdej z nich.

Zastanówmy się nad pytaniem czy możnaby przez jakies podstawienie, poprzednik CCNpqr doprowadzić do widocznej równokształtności z jedną z naszych tez.

Jeśli podstawimy:

- 5 q/p, r/p * 6
 6 C $\underbrace{\text{CCNppp}}_2 \underbrace{\text{Cpp}}_7$
 6 * C 2—7
 7 Cpp

Quod erat demonstrandum.

Wszystkie inne twierdzenia można taką drogą wyprowadzić z aksjomatów.

Ze względu na ważność postępowania zbieramy wszystkie kroki dedukcji przy udowadnianiu prawa tożsamości w bezpośrednie ich następstwo.

Oto dowód prawa tożsamości „Cpp“:

$$1 \quad CCpqCCqrCpr$$

$$2 \quad CCNppp$$

$$3 \quad CpCNpq$$

$$1 \quad q/CNpq * 4$$

$$4 \quad C \underbrace{CpCNpq}_3 \underbrace{CCCNpqrCpr}_5$$

$$4 * C 3 - 5$$

$$5 \quad CCCNpqrCpr$$

$$5 \quad q/p, r/p * 6$$

$$C \underbrace{CCNppp}_2 \underbrace{Cpp}_7$$

$$6 * C 2 - 7$$

$$7 \quad Cpp.$$

Co było do udowodnienia.

Jako część dalszą do rozbudowy systemu aksjomatycznego poznamy definicje najczęściej używanych funkcji logicznych t. j. alternatywy, konjunktji i ekwiwalencji.

Definicja alternatywy.

$$Apq = CNpq$$

Znak „=“ między obu wyrażeniami czytamy „to to samo co“.

Definicję powyższą odczytamy:

„p lub q“ to to samo co „jeżeli nie p, to q“.

Jest to dosyć intuicyjna definicja i przykład poniższy jest intuicyjny:

„Uderzyć kogoś kijem lub uderzyć pałką“, to to samo co „jeżeli nie kijem, to pałką“.

Zróbmy (t. j. wypiszmy albo ułożmy) macierz alternatywy, to znaczy macierz dla A.

Jeżeli $Apq = CNpq$, to matryca definiensu implikacyjnego będzie matrycą alternatywy.

Matryca implikacji:

		q	
		C	
		0	1
p	0	1	1
	1	0	1

Matryca negacji:

		N	
		0	1
p	0	1	
	1	0	

Matryca definiensu implikacyjnego:

		q	
		C	
		0	1
Np	1	0	1
	0	1	1

Matryca alternatywy:

		q	
		A	
		0	1
p	0	0	1
	1	1	1

Możemy jednak do wartości alternatywy „ Apq ” dojść, obliczając ją według podanej definicji jak następuje:

$$Apq = CNpq$$

$$p = 0, q = 0, A 0 0 = C N 0 0 = C 1 0 = 0$$

$$p = 0, q = 1, A 0 1 = C N 0 1 = C 1 1 = 1$$

$$p = 1, q = 0, A 1 0 = C N 1 0 = C 0 0 = 1$$

$$p = 1, q = 1, A 1 1 = C N 1 1 = C 0 1 = 1$$

Matryca alternatywy przedstawia się jak następuje:

		q	
		A	
p	0	0	1
	1	1	1

Alternatywa jest matrycowo określona.

Z tego okazuje się, że alternatywa jest tylko w jednym przypadku fałszywa, a mianowicie wtedy, gdy oba jej argumenty są fałszywe a w pozostałych wypadkach jest prawdziwa.

Przykład: Paweł lub Piotr są o godzinie jedynastej w biurze, to to samo co Paweł jest w biurze lub Piotr jest w biurze. Gdy zajdę a nie będzie o 11-tej w biurze ani Pawła ani Piotra, powiem informacja była fałszywa, we wszystkich innych przypadkach jest informacja poprawna.

Rozdział trzynasty.

Zapytania na lekcję VII.

Czy można tak powiedzieć?

Zmienna zdaniowa „p” ma dwie wartości logiczne a mianowicie:

Zmienna „p” może być 1 (prawdą) lub 0 (fałszem)?

Ależ zmienna zdaniowa „p” nie jest zdaniem lecz jest zmienną zdaniową, za którą można podstawić dowolne zdanie o którego prawdziwości względnie fałszywości rozstrzygamy według kryteriów poza logicznych.

„p jest prawdą”, „p jest fałszem” lub „p jest prawdą”, „Np jest prawdą”, są to dwa zdania sprzeczne „ α ”, „N α ”, wobec których obowiązuje prawo wykluczonej sprzeczności i prawo wykluczonego środka.

Podstawiając za zmienną zdaniową zdanie, którego wartość znamy, to znaczy wiemy, że wartość zdania tego jest jedną z wartości 0;1, przenosimy na zmienną zdaniową jedną z jego wartości. Jeżeli podstawimy zdanie prawdziwe, to zmienna zdaniowa przyjmie wartość 1 t. j. $p = 1$, jeżeli fałszywe, to $p = 0$.

„p” nie jest ani prawdą ani fałszem, ale „p” może przyjmować każdą z osobna z obu wymienionych wartości. W tem ujęciu „p” to to samo co 1; „p” to to samo co 0.

Przykład:

$p/\alpha_1, \alpha_1/\text{Lwów leży nad Pełtwią} = 1$

$p/\alpha_2, \alpha_2/\text{Lwów leży nad Wisłą} = 0$

$p/\alpha_3, \alpha_3/\text{Lwów jest kulisty} = ?$

Są to wyrażenia zdaniowe, może lepiej, są to zdania, bo np. „Lwów jest kulisty“ niczego nie wyraża.

Jeżeli zgodzimy się uważać w logice zdań każdy znak znaczący zdanie, za sensowny, zaś znak, który nie jest zdaniem za bezsensowny, to powyższe znaki, będące zdaniami są znakami sensownymi. Pierwsze dwa są wyrażeniami sensownymi, bo są zdaniami, trzeci nie jest wyrażeniem pomimo, tego, że jest zdaniem, bo nic nie wyraża, jest jednak znakiem sensownym.

Wyrażenia zdaniowe:

Sensowne:

„p“

„Np“

„Cpq“

Znaki sensownych
wyrażeń zdaniowych.

Bezsensowne:

„pp“

„pN“

„pCq“

Znaki bezsensownych
wyrażeń zdaniowych.

Jeśli „ α “ jest zdaniem, to „N α “ jest zdaniem, to znaczy:

Jeśli „p“ jest wyrażeniem zdaniowym sensownym, to „Np“ jest wyrażeniem zdaniowym sensownym.

Jeśli „ α “ jest zdaniem i „ β “ jest zdaniem, to „C $\alpha\beta$ “ jest zdaniem.

Jeśli „p“ jest wyrażeniem zdaniowym sensownym i „q“ jest wyrażeniem zdaniowym sensownym, to „Cpq“ jest wyrażeniem zdaniowym sensownym.

Rozdział czternasty.

LEKCJA VII.

Treść: Zdania sprzeczne. Zdania niezgodne. Wyrażenie. Prawo tożsamości jako słabo dedukcyjne nie nadaje się do dowodzenia. Reguła zastępowania definicyjnego. Definicja konjunkcji. Ułożenie matrycy dla konjunkcji. Poza lekcją. Podanie definicji alternatywy na podstawie matryc alternatywy, konjunkcji i negacji. Definicja równoważności (ekwiwalencji). Matryca ekwiwalencji. Słowo „wtedy, gdy”. Słowo „tylko wtedy, gdy”. Warunek wystarczający. Warunek konieczny. Dwa przykłady.



Rozdział czternasty.

LEKCJA VII.

„p = prawda“; „Np = prawda“.

„p = fałsz“; „Np = fałsz“.

Są to zdania sprzeczne.

„p = prawda“; „p = fałsz“,

to są zdania niezgodne, to znaczy nie są zarazem prawdziwe.

Wyrażenie może wyrażać jakąś niedorzeczność, — może nic nie wyrażać, — są to twory językowe, — wyrażenia językowe; — nie brać tego psychologicznie.

My celowo nie używamy prawa tożsamości „Cpp“ do dowodzenia, gdyż zdania proste np. prawo tożsamości, są bardzo słabe dedukcyjnie, to znaczy nie wiele z nich można wyprowadzić, poza ich własnymi podstawieniami a te są szczegółowymi wypadkami.

Z prawa tożsamości nie można nic wyprowadzić, dlatego ono jako aksjomat nie nadaje się.

Od Kartezjusza pokutuje myśl od prostszego t. j. od prostszych założeń, przesłanek, poruszać się myślowo do bardziej złożonych:

Cpp

p/Np

CNpNp

albo za p/Cpq

CCpqCpq

i t. d.

Są to szczegółowe przypadki prawa tożsamości.

Z tych szczegółowych przypadków wynika jeszcze mniej aniżeli z samego prawa tożsamości.

Na przykład:

Z „CCpqCpq“ nie mogę przejść ani do „CNpNp“ ani do „Cpp“, gdyż podstawiać wolno tylko za zmienne.

Gdybym w wyrażeniu „CCpqCpq“ próbował przez podstawienie jakiegoś wyrażenia za „p“, to nie usunę poprzednich początkowych dwóch „C“ a więc nigdy nie mogę dojść do wyrażenia. „Cpp“.

W związku z definicją alternatywy poznamy **regułę zastępowania definicyjnego**, będzie to trzecia reguła obok podstawiania i odrywania, którą możemy stosować.

Reguła zastępowania definicyjnego.

Ta reguła zastępowania definicyjnego jednakowa dla alternatywy, konjunkcji, ekwiwalencji i wszelkich innych definicji opiewa:

Wolno nam w każdym wyrażeniu prawą stronę definicji zastąpić przez lewą i na odwrót, — oraz każde podstawienie jednej strony definicji wolno nam zastąpić przez takie samo (analogiczne) podstawienie drugiej strony definicji.

Jest to rzecz intuicyjna.

Przykład:

3 aksjomat CpCNpq.

Porównajmy ten trzeci aksjomat z definicją alternatywy t. j.

$Apq = CNpq.$

Na podstawie powyższej reguły zastępowania definicyjnego otrzymam

CpApq.

Wiemy o alternatywie z matrycy, że jest prawdziwa gdy przynajmniej jeden z jej członów jest prawdziwy, jeśli

więc założymy, że „p” jest prawdziwe, to musi być prawdziwe „Apq”.

Jeśli Piotr jest w biurze, to Piotr jest w biurze lub Paweł jest w biurze (to jeden z nich jest w biurze).

Jest to w tym przypadku, przykład użycia reguły zastępowania definicyjnego. Wygląda to na jakąś rzecz nową a nie jest nią. Odczuwamy mimo wszystkiego jako coś nowego pomimo, że wyrażenia są różne.

Jest to pewnego rodzaju wzbogacenie naszego języka symbolicznego, bez którego to wzbogacenia możnaby się obyć.

Definicja konjunkcji.

Postąpmy intuicyjnie. Zaczniemy od alternatywy.

Jakbyśmy wyrazili znakami np. następujące zdanie:

„Piotr nie jest w biurze lub Paweł nie jest w biurze”?

Podstawmy:

p/Piotr jest w biurze.

q/Paweł jest w biurze.

Np/Nieprawda, że Piotr jest w biurze = Piotr nie jest w biurze = Piotra nie ma w biurze.

Nq/Nieprawda, że Paweł jest w biurze = Paweł nie jest w biurze = Pawła nie ma w biurze.

ANpNq wyraża powyższe zdanie znakami.

Wyrażenie „NANpNq”, które czytamy: „Nieprawda, że Piotr nie jest w biurze lub Paweł nie jest w biurze” = „Nieprawda, że Piotra nie ma w biurze lub Pawła nie ma w biurze”, jako poprzednik okresu warunkowego implikuje zdanie „Piotr jest w biurze i Paweł jest w biurze”, bo wyrażenie $NANpNq = Kpq$, bo jeżeli nieprawda, że Piotra nie ma w biurze lub Pawła nie ma w biurze, to znaczy, jeżeli nieprawda, że zachodzi alternatywa (Piotr nie jest w biurze lub Paweł nie jest w biurze), to (obaj są w biurze), to zna-

czy Piotr jest w biurze i Paweł jest w biurze, co znakami przedstawimy jak następuje:

$$\text{NANpNq} = \text{Kpq}.$$

Definicja konjunkcji:

$$\text{Kpq} = \text{NANpNq}$$

p i q to to samo co nieprawda, że Np lub Nq .

Aby intuicyjnie wejść w sens definicji konjunkcji, dobrze jest rozpatrzyć prawą stronę definicji bez początkowego „N” a więc

$$\text{ANpNq}$$

to znaczy:

Nieprawda, że Piotr jest w biurze lub nieprawda, że Paweł jest w biurze = Tak Piotr, jak Paweł nie są w biurze = Obaj nie są w biurze = Nieprawda, że obaj są w biurze = α .

Jeżeli „ α ” znaczy, że nieprawda, że obaj są w biurze, to „ $\text{N}\alpha$ ” *znaczy, że* „nieprawda, że nieprawda, że obaj są w biurze”, to znaczy, że „obaj są w biurze”

$$\alpha = \text{ANpNq} = \text{nie są obaj w biurze},$$

$$\text{N}\alpha = \text{NANpNq} = \text{obaj są w biurze} = \text{Kpq}.$$

Konjunkcja „ Kpq ” jest równoważna negacji alternatywy, której oba człony są negacjami członów konjunkcji i na odwrót alternatywa jest równoważna negacji konjunkcji, której członów są negacjami członów alternatywy:

$$\text{Kpq} = \text{NANpNq}.$$

$$\text{Apq} = \text{NKNpNq}.$$

Moglibyśmy byli alternatywę zdefiniować przy pomocy konjunkcji, nie uczyniliśmy tego bośmy jeszcze konjunkcji nie mieli.

Teraz ułożmy matrycę dla konjunkcji „ K ”:

	A	0	1
Matryca alternatywy:	0	0	1
	1	1	1

	N	
Matryca negacji:	0	1
	1	0

Def. Konjunkcji: $Kpq = NpNq$

Dla $p = 0, q = 0$

$$K00 = NpNq = N0N0 = N1 = 0$$

Dla $p = 0, q = 1$

$$K01 = NpNq = N0N1 = N1 = 0$$

Dla $p = 1, q = 0$

$$K10 = NpNq = N1N0 = N1 = 0$$

Dla $p = 1, q = 1$

$$K11 = NpNq = N1N1 = N0 = 1$$

	K	q = 0	q = 1
p = 0		0	0
p = 1		0	1

Konjunkcja jest prawdziwa, jeżeli jej oba człony są prawdziwe, we wszystkich innych wypadkach jest fałszywa.

Pod tym względem w pewnym, znaczeniu konjunkcja jest odwrotnością alternatywy:

A	0	1	K	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

Poza lekcją.

Powtórzmy powyższą definicję alternatywy jeszcze inaczej, korzystając z matrycy dla alternatywy i konjunktji:

Z matrycy dla alternatywy

		q	
A		0	1
p	0	0	1
	1	1	1

i z matrycy dla konjunktji

		q	
K		0	1
p	0	0	0
	1	0	1

widzimy, że wartości alternatywy tylko w wypadkach pierwszym i czwartym t. j. w miejscach matrycy a_1, a_4 są równoważne wartościom konjunktji, przyczem w wypadku czwartym dla wartości argumentów $p = 1, q = 1$ tak wartość alternatywy jak wartość konjunktji $= 1$; w dwóch pozostałych wypadkach wartości alternatywy i konjunktji są różne. $A_{pq} = K_{pq} = 1$ tylko dla $p = 1, q = 1$.

Jeżeli mamy wyrazić równoważność alternatywy i konjunktji dla wszystkich czterech przypadków, to każdy z nich musimy sprowadzić przy pomocy negacji „N” do przypadku czwartego albo przypadek czwarty musimy podciągnąć pod każdy z pozostałych przypadków.

Przypadek 1.)

$$p = 0, q = 0, A_{pq} = A_{00} = 0; K_{pq} = K_{00} = 0$$

Przypadek 2.)

$$p = 0, q = 1, A_{pq} = A_{01} = 1; K_{pq} = K_{01} = 0$$

Przypadek 3.)

$$p = 1, q = 0, Apq = A10 = 1; Kpq = K10 = 0$$

Przypadek 4.)

$$p = 1, q = 1, Apq = A11 = 1; Kpq = K11 = 1$$

Spróbujmy sprowadzić przy pomocy negacji „N” każdy z przypadków do przypadku czwartego:

1.) $p/Np, q/Nq$ * 4.), bo $Np = 1, Nq = 1$

2.) $p/Np, —$ * 4.), bo $Np = 1, q = 1$

3.) $—, q/Nq$ * 4.), bo $p = 1, Nq = 1$

4.) $—, —$ * 4.), bo $p = 1, q = 1$

Podciągamy przypadek czwarty pod każdy z pozostałych przypadków:

4.) $p/Np, q/Nq$ * 1.), bo $Np = 0, Nq = 0$

4.) $p/Np, —$ * 2.), bo $Np = 0, q = 1$

4.) $—, q/Nq$ * 3.), bo $p = 1, Nq = 0$

4.) $—, —$ * 4.), bo $p = 1, q = 1$

Podstawiając w przypadku czwartym za p/Np , za q/Nq otrzymamy przypadek pierwszy, bo $Np = 0, Nq = 0$

$$ANpNq = A00 = 0; KNpNq = K00 = 0$$

Sprowadzając przypadek pierwszy do wartości 1 otrzymamy:

$$ANpNq = A11 = 1$$

$$KNpNq = K11 = 1$$

Ponieważ wyrażenia

$NANpNq, Kpq$, jakoteż wyrażenia

$NKNpNq, Apq$ są sobie równoważne ze względu na ich wartości, więc

$$Kpq = NANpNq$$

$$0 \quad 0$$

$$0 \quad 0$$

$$0 \quad 0$$

$$1 \quad 1$$

Definicja konjunktji przy
pomocy alternatywy i negacji.

$$Apq = NKNpNq$$

0	0	Definicja alternatywy przy pomocy konjunktji i negacji.
1	1	
1	1	
1	1	

dla każdego przypadku.

Sprawdźmy dla przykładu np. definicję alternatywy przy pomocy konjunktji i negacji dla każdego przypadku:

$$Apq = NKNpNq$$

Apq

$NKNpNq$

1.) $p = 0, q = 0; A00 = 0; NKN0N0 = NK11 = N1 = 0$

2.) $p = 0, q = 1; A01 = 1; NKN0N1 = NK10 = N0 = 1$

3.) $p = 1, q = 0; A10 = 1; NKN1N0 = NK01 = N0 = 1$

4.) $p = 1, q = 1; A11 = 1; NKN1N1 = NK00 = N0 = 1$

Widzimy, że dla każdego przypadku mamy zgodność wartości po lewej i prawej stronie znaku równoważności.

Podstawiając za p/α , za q/β otrzymamy

$$A\alpha\beta = NKN\alpha N\beta$$

przyczem α, β , są dowolnymi zdaniami.

Definicja ekwiwalencji.

Synonimy: Równoważność, równoznaczność, ekwiwalencja, E.

$$Epq = KCpqCqp.$$

Tu także możemy zastępować jedną stronę definicji przez drugą.

„ Cpq ” i „ Cqp ” są to implikacje o przeciwnych sobie zwrotach.

Jeśli prawdziwe są dwa zdania:

„jeśli p , to q ” i „jeśli q , to p ”, to wtedy „ p ” jest ekwiwalentne „ q ”.

Ułożmy matrycę tej ekwiwalencji. Ponieważ mamy tutaj implikację i konjunkcję odpiszmy sobie dla wygody ich matryce:

C	0	1
0	1	1
1	0	1

K	0	1
0	0	0
1	0	1

$$Epq = KCpqCqp$$

$$\text{Dla } p = 0, q = 0$$

$$E00 = KC00C00 = K11 = 1$$

$$\text{Dla } p = 0, q = 1$$

$$E01 = KC01C10 = K10 = 0$$

$$\text{Dla } p = 1, q = 0$$

$$E10 = KC10C01 = K01 = 0$$

$$\text{Dla } p = 1, q = 1$$

$$E11 = KC11C11 = K11 = 1$$

Zapiszmy matrycę dla E:

		q	
E		0	1
p	0	1	0
	1	0	1

Z tej matrycy wynika, że zdania „p” i „q” są ekwiwalentne wtedy i tylko wtedy, gdy oba są prawdziwe lub oba fałszywe.

Wyrażenie „Epq” czytamy „p wtedy i tylko wtedy, gdy q”. Widzimy, że używamy tego wyrażenia „wtedy i tylko wtedy gdy” na oznaczenie ekwiwalencji czyli na oznaczenie konjunkcji dwóch implikacji o przeciwnych zwrotach.

Co w definicji odpowiada słówku „wtedy, gdy“, a co słówku „tylko wtedy, gdy“?

„p wtedy, gdy q“, to znaczy, „jeśli q, to p“;

„p tylko wtedy, gdy q“, to znaczy, gdy „q nie ma, to nie ma p“, czyli, że gdy „p, to q“, czyli „jeśli p, to q“.

Przykład 1.:

p/α , α /dziś jest wtorek.

q/β , β /jutro jest środa.

(Dziś jest wtorek) **wtedy, gdy** (jutro jest środa), tu mówimy, że to, że jutro jest środa jest **warunkiem wystarczającym**, aby dziś był wtorek.

(Dziś jest wtorek) **tylko wtedy, gdy**, (jutro jest środa), tu mówimy, że to, że jutro jest środa jest **warunkiem koniecznym**.

Warunkiem koniecznym do tego, aby dziś był wtorek jest, aby jutro była środa.

Przykład 2.:

W prawdziwej implikacji prawdziwość poprzednika jest wystarczającym warunkiem prawdziwości następnika a prawdziwość następnika jest warunkiem koniecznym prawdziwości poprzednika.

		q	
	C	0	1
p	0	1	1
	1	0	1

Jeśli mam prawdziwą implikację

$$Cpq = 1,$$

to na to, aby był prawdziwy następnik jej „q“ **wystarcza** by prawdziwy był jej poprzednik „p“, wystarcza, ale nie jest **warunkiem koniecznym**, gdyż może się zdarzyć, że jest prawdziwa implikacja „ Cpq “ i prawdziwy jej następnik „q“, ale poprzednik jej „p“ jest fałszywy, bo $C01 = 1$.

Na to ażeby w prawdziwej implikacji „ Cpq ” był prawdziwy poprzednik „ p ” **koniecznym** jest, by prawdziwym był następnik „ q ”, bo jeśli następnik „ q ” jest fałszywy, to poprzednik „ p ” w prawdziwej implikacji nie może być prawdziwy.

Jest to charakterystyka warunku wystarczającego i warunku koniecznego.

Warunek konieczny nie musi być wystarczający a warunek wystarczający nie musi być konieczny. Dopiero gdy zachodzi jedno i drugie mamy **warunek konieczny i wystarczający**.

Jeśli $Cpq = 1$, to $p = 1$ jest **warunkiem wystarczającym**, aby $q = 1$, bo przy $Cpq = 1$ i przy $p = 0$ również $q = 1$, nie koniecznie więc musi się równać 1 może się ono równać 0, wystarcza bez konieczności, jeżeli $p = 1$, aby przy $Cpq = 1$ $q = 1$.

Jeżeli $Cpq = 1$, to $q = 1$ jest **warunkiem koniecznym** aby $p = 1$, bo przy $Cpq = 1$ i przy $q = 0$ $p = 0$, koniecznie więc q musi = 1 i nie wystarcza, jeżeli $q = 1$, ono koniecznie musi się równać 1.

„wtedy”.

Warunek wystarczający, $p = 1$.

Cpq	$q = 0$	$q = 1$
$p = 0$	1	1
$p = 1$	0	1

Matryca I.

Cpq	$q = 0$	$q = 1$
$p = 0$	1	1
$p = 1$	0	1

Matryca II.

Warunkiem wystarczającym na to, aby przy $C_{pq} = 1$, $q = 1$ jest $p = 1$. (Matryca I.)

Wprawdzie przy $C_{pq} = 1$, q również może się równać 1 dla $p = 0$, ale w tym wypadku może q mieć także wartość 0, tak że wartość q nie jest przy $C_{pq} = 1$ i przy $p = 0$ jednoznacznie wyznaczona. $p = 0$ nie jest warunkiem wystarczającym na to, aby przy $C_{pq} = 1$, $q = 1$. Aby ten fakt miał jednoznacznie miejsce musiałby być spełniony jeszcze dodatkowy warunek np. C_{pq} musiałoby posiadać wartość równą 1 na miejscu a_2 matrycy, bowiem gdy $C_{pq} = 1$ na miejscu matrycy a_1 , to wartości 0 dla p odpowiada wartość 0, a nie wartość 1, dla q . (Matryca II.)

Oznaczenie miejsc w matrycach

	c_1	c_2
b_1	a_1	a_2
b_2	a_3	a_4

„tylko wtedy“.

Warunek konieczny, $q = 1$.

C_{pq}	$q = 0$	$q = 1$
$p = 0$	1	1
$p = 1$	0	1

Matryca III.

C_{pq}	$q = 0$	$q = 1$
$p = 0$	1	1
$p = 1$	0	1

Matryca IV.

Warunkiem koniecznym na to, aby przy $Cpq = 1$, $p=1$ jest $q = 1$. (Matryca III.)

Koniecznie q musi się równać 1, jeżeli przy $Cpq = 1$ ma być $p = 1$; gdyby $q = 0$, to przy $Cpq = 1$, p nie będzie się równało 1 lecz 0 a więc, aby przy $Cpq=1$, $p=1$, to q **musi** się = 1. (Matryca IV.)

Rozdział piętnasty.

Treść: Funktor zdaniotwórczy od dwóch argumentów nazwowych. Znak implikacji. Symbolika beznawiasowa. Arytmetyczne prawo łączności dla dodawania. Prawo monotonii.

Rozdział piętnasty.

Zapytania w związku z lekcją II-gą.

Jeżeli „a” jest odcinkiem i jeżeli „b” jest odcinkiem, to znak równości „=” może być funktorem zdaniotwórczym, ale nie od dwóch argumentów zdaniowych lecz od dwóch argumentów nazwowych, dlatego, że jeżeli „a” i „b” są odcinkami, to „=ab” lub „a=b” jest zdaniem o odcinkach, przyczem „a” i „b” są nazwami odcinków. Zdanie „a jest odcinkiem” znaczy „a jest nazwą odcinka”. Jakiś odcinek nazywa się odcinkiem „a”; jakiś odcinek nazywa się odcinkiem „b”. Jednak „a=b” nie jest odcinkiem tak jak „a=b” nie jest liczbą. Jest to zdanie o odcinkach względnie zdanie o liczbach w zależności od tego czego nazwami są nazwy „a” i „b”.

Funktory zdaniotwórcze:

„C” od dwóch argumentów zdaniowych,
„N” od jednego argumentu zdaniowego,
„=” od dwóch argumentów nazwowych,
„<” od dwóch argumentów nazwowych,*

są funktorami zdaniotwórczymi, bo

„C” tworzy nowe zdanie z dwóch argumentów zdaniowych
„P”, „Q”,
„N” tworzy nowe zdanie z jednego argumentu zdaniowego
„P”,

„=” tworzy nowe zdanie z dwóch argumentów nazwowych.
 „<” tworzy nowe zdanie z dwóch argumentów nazwowych.
 „+” jest funktorem nazwotwórczym, bo „+” tworzy nową
 nazwę z dwóch argumentów nazwowych; $a + b$ lub
 $+ ab$ jest nazwą a nie zdaniem.

Stosunek dwóch nazw, które w niniejszym wypadku nazywają dwa **różne równe** odcinki, wyraża wspólną cechę obu odcinków o nazwach „a”, „b” a mianowicie tę ich wspólną cechę, że są one co do długości równe. „ $a=b$ ” znaczy, że długość odcinka „a” jest tą samą długością co długość odcinka „b”,

$$a = b \quad \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

„a”, „b” są identyczne co do długości, jeżeli długość jest tą ich cechą co do której są one sobie równe czyli co do której są identyczne. Jak widzimy stosunek „=” od dwóch argumentów nazwowych tworzy zdanie a więc funktor „=” jest funktorem zdaniotwórczym od dwóch argumentów nazwowych. Zdanie powstało przy pomocy funktora zdaniotwórczego „=”. Zdanie powyższe czytamy: „a to to samo co b”.

Podmiotem jest tu nazwa „a”, a orzeczeniem jest tu nazwa „b”, zaś łącznikiem (copula) jest tu funktor zdaniotwórczy „to to samo co”.

Funktor nazwotwórczy (liczbotwórczy) tworzy nazwę (liczbę) a nazwa (liczba) nie jest zdaniem.

Znak implikacji.

Peano jak i Russell oznaczali implikację znakiem „ $\supset$ ”. Prof. Łukasiewicz, odwracając to odwrócone wielkie ce,

uczynił wygodniejszym pisanie tego znaku na maszynie do pisania. Implikacje oznaczamy znakiem „C“.

Symbolika beznawiasowa.

Pisząc funktory przed argumentami unikamy nawiasów. Arytmetyczne prawo łączności dla dodawania jako przykład:

$(a + b) + c = a + (b + c)$ wyraża, że jest wszystko jedno czy do „ $(a + b)$ “ dodam „ c “ czy też do „ a “ dodam „ $(b + c)$ “.

Tych dwóch wyrażeń nazwowych po obu stronach znaku równości w zwyczajnej arytmetyce bez nawiasów napisać nie mogę, — mogę je tylko odróżnić nawiasami.

Jeżeli funktory napiszę przed argumentami, to $(a + b) + c$ będzie wyglądało: $+ (a + b) c = ++ abc$, zaś drugie wyrażenie po prawej stronie równości $a + (b + c)$ przedstawia się jak następuje: $+ a (b + c) = + a + bc$.

Jeszcze raz zestawiając powyższe otrzymamy:

- 1) $(a + b) + c = + (a + b) c = ++ abc$,
- 2) $a + (b + c) = + a (b + c) = + a + bc$.

Gdybym napisał drugie wyrażenie błędnie tak: $++ abc$, a to miałyby znaczyć $+(a + b)c$, to zaznaczając tę całość tak jak ją zaznaczyć można $(a + b) + c$, otrzymalibyśmy to pierwsze 1) wyrażenie, ale nie to drugie 2).

W symbolice beznawiasowej prawo łączności dla dodawania będące jednym z aksjomatów arytmetyki, przedstawi się następująco:

$$++abc = +a+bc.$$

Opuszczając nawiasy, tak jak się to praktykuje przy dodawaniu w arytmetyce moglibyśmy napisać:

$$a+b+c=a+b+c,$$

ale to nie byłoby już prawem łączności, mogłoby to uchodzić za jakiś przypadek tożsamości $a = a$. Tu powstaje

watpliwość co znaczy wyrażenie „ $a+b+c$ “, to znaczy, nie jest jasne czy mamy do „ $a+b$ “ dodać „ c “ czy do „ a “ mamy dodać „ $b+c$ “, lecz na mocy prawa łączności w obu wypadkach otrzymujemy tą samą liczbę dlatego ta wieloznaczność nie prowadzi do błędu, — każdy może sobie to interpretować jak chce (ilościowo) a będzie dobrze.

Prawo monotonii.

Oto ono:

Jeżeli $a < b$, to $a + c < b + c$,

jeżeli $a > b$, to $a + c > b + c$.

Monotonja odnosi się do znaków, to znaczy, że mając stosunek np. „ $<$ “ mam go w dalszym ciągu. To znaczy, mając stosunek „ $<$ “ w poprzedniku okresu warunkowego mam go i w następniku. Znak monotonicznie powtarza się. Również dla stosunku „ $>$ “ znak występujący w poprzedniku monotonicznie powtarza się w następniku okresu warunkowego. (Monotonja = stałość znaku).

Rozdział szesnasty

LEKCJA VIII-ma

Treść: Cztery funkcje od jednego argumentu: Falsum „F”, Asercja „S”, Negacja „N”, Verrum „V”. Funkcje od dwóch argumentów. Cechy układu aksjomatów: niesprzeczność, niezależność, zupełność. Dowód niesprzeczności aksjomatów. Jedyńkowość. Dziedziczność własności „ φ ” ze względu na reguły wnioskowania. Przykłady.

Rozdział szesnasty.

LEKCJA VIII.

Poznaliśmy cztery funkcje od dwóch argumentów, (funktor wraz z argumentami tworzy funkcję) a mianowicie:

Cpq, Apq, Kpq, Epq .

Każda z tych funkcji ma inną matrycę. Poznaliśmy jedną funkcję od jednego argumentu a mianowicie: Np .

Ile jest możliwych funkcji od dwóch argumentów i od jednego argumentu?

Jeżeli chodzi o funkcje od jednego argumentu, to możliwych ich jest cztery.

Dlaczego? Dlatego, bo dla dwóch wartości argumentu możliwe są cztery grupy wartości funkcji i tak:

	I	II	III	IV
	Fp	Sp	Np	Vp
$p = 0$	0	0	1	1
$p = 1$	0	1	0	1

Otóż ta funkcja od jednego argumentu, która stale przybiera wartość 0 tak dla $p = 0$ jak dla $p = 1$ nazywa się **falsum**. Oznaczamy ją literą „F“.

Dla $p = 0, Fp = F0 = 0$

dla $p = 1, Fp = F1 = 0$

$Fp = NCpp = 0$

Druga funkcja, która przybiera wartości równe argumentom nazywa się zwykle **asercją**, możnaby ją oznaczyć literą „S“.

Dla $p = 0, Sp = S0 = 0$

dla $p = 1, Sp = S1 = 1$

Nie używa się tej funkcji, gdyż można za nią samą, wprost napisać jej argument „p” gdyż

$$Sp = p$$

Trzecią z tych funkcji jest **negacja** „N”.

$$\text{Dla } p = 0, Np = N0 = 1$$

$$\text{dla } p = 1, Np = N1 = 0$$

Niema wzoru ogólnego dla „Np”, bo to fakt, który znamy. „N” wprowadzamy do systemu bez definicji, bo to wyraz pierwotny. Podobnie z „F”; „F” możemy zdefiniować za pomocą zera, ale nie za pomocą małych i jakichś dużych liter łacińskich.

Czwarta funkcja, która przybiera stałe wartość jeden, nazywa się **verrum** od „p” i oznacza się „V”.

$$\text{Dla } p = 0, Vp = V0 = 1$$

$$\text{dla } p = 1, Vp = V1 = 1$$

Tu możnaby napisać $Vp = Cpp$, ponieważ tak „Vp”, jak „Cpp” stale posiadają wartość jeden.

Powyższe funkcje tak są zdefiniowane i tak je rozumiemy.

Najważniejszą funkcją z czterech podanych ostatnio, jest negacja „N”, innymi się nie posługujemy.

Jeżeli przejdziemy do funkcji od dwóch argumentów, to można kombinatorycznie wykazać, że wszystkich możliwych takich funkcji jest $2^4 = 16$

	0	1
0	.	.
1	.	.

Tych 16 funkcji za wyjątkiem „C”, które jest pierwotne możemy zdefiniować przy pomocy „C” i „N”.

Wszystkie funkcje od 3-ch i więcej argumentów można sprowadzić do funkcji od dwóch argumentów. I funkcje od jednego argumentu możemy wyrazić przez funkcję od dwóch argumentów.

Tak więc mając funkcje od dwóch argumentów możemy wszystkie funkcje zdefiniować.

Jest możliwa i taka funkcja:

	0	1
0	0	0
1	1	0

Można ją jakoś wyrazić za pomocą „N” i „C”. Jest to jedna z tych 16-tu funkcji poza temi, któreśmy poznali.

	G	q = 0	q = 1
Przypuśćmy „Gpq”, p = 0	0	0	
p = 1	1	0	

$$p = 0, q = 0, G \ 0 \ 0 = 0$$

$$p = 0, q = 1, G \ 0 \ 1 = 0$$

$$p = 1, q = 0, G \ 1 \ 0 = 1$$

$$p = 1, q = 1, G \ 1 \ 1 = 0$$

Jak ją wyrazić za pomocą „N” i „C”? Tu możemy napisać:

$$G \ p \ q = N \ C \ p \ q .$$

Jeżelibym chciał, to mogę wykombinować jak wszystkie funkcje można zdefiniować przy pomocy „N” i „C”.

Układ aksjomatów.

Układ aksjomatów powinien być:

- 1.) Niesprzeczny.
- 2.) Niezależny.
- 3.) Zupełny.

Ad 1.) Układ aksjomatów jest niesprzeczny, jeżeli nie można z tego układu przy przyjętych w systemie regułach wnioskowania wyprowadzić dwóch zdań sprzecznych kształtu „ α “, „ $N\alpha$ “.

Ad 2.) Układ aksjomatów jest niezależny, jeżeli żaden aksjomat nie wynika z pozostałych przy pomocy przyjętych w systemie reguł wnioskowania.

Ad 3.) Układ aksjomatów jest zupełny, jeżeli obejmuje wszystkie twierdzenia prawdziwe należące do systemu.

Dowód taki jest i jest możliwy, ale skomplikowany. Można prościej udowodnić tak jak w skrypcie „Elementy logiki Matematycznej“.

Jeżeli chodzi o niesprzeczność, to rzecz prosta. Można dowieść niesprzeczności układu aksjomatów, jeżeli się wykaze, że istnieje pewna własność „ φ “ spełniająca następujące trzy warunki:

1.) Własność tę posiada każdy aksjomat układu.

Układ albo klasa	Aksjomaty:
Własność „ φ “ (Cecha)	$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right.$
„ φ “ jest elementem konotacji.	Aksjomaty są desygnatami.

2.) Własność „ φ “ jest własnością dziedziczną ze względu na reguły wnioskowania.

3.) Własność „ φ “ nie przysługuje zarazem zdaniom „ α “, „ $N\alpha$ “.

Dlaczego to wystarcza?

Ad 1.) Jako własność „ φ “ wybieramy sobie tak zwaną jedyn-

kowość t. j. własność „ φ_1 ” na podstawie normalnej matrycy dla „C” i „N”.

Co to znaczy?

To znaczy własność taką, że dany aksjomat (teza) przechodzi w 1 na podstawie matrycy przy dowolnych podstawieniach (kombinacjach) zer i jedynek za zmienne. Tę własność jedynkowości posiadają aksjomaty 1 — 3.

Punkt pierwszy jest spełniony.

Ad 2.) Chodzi o to, aby wykazać, że ta własność „ φ_1 ” jest dziedziczna ze względu na reguły podstawiania i odrywania.

Dziedziczność ze względu na regułę podstawiania.

Rozpatrzmy na przykładzie dziedziczność ze względu na regułę podstawiania.

1. aksjomat. $CCpqCCqrCpr$

Stwierdziliśmy uprzednio, że w jakikolwiek sposób podstawimy 0, 1 za „p”, „q”, „r”, to otrzymamy wartość aksjomatu pierwszego równą jeden.

Przypuśćmy, że podstawiliśmy w tym aksjomacie za
 p/Cst

Czy to podstawienie:

$CCCstqCCqrCCstr$

będzie miało tę własność, że przy wszelkich kombinacjach zer i jedynek podstawionych za zmienne przejdzie w jedynkę? Jeżeli tak, to mamy dziedziczność. Oczywiście, że tak. Dlaczego?

Dlatego, że wyrażenie podstawione „Cst” może przejść tylko w zero lub w jedynkę a już wykazaliśmy, że jeżeli przechodzi w 0 lub 1, to wszystko przechodzi w 1. Wydedukowane twierdzenie $CCCstqCCqrCCstr$ posiada własność dziedziczenia własności „ φ_1 ” w naszym przypadku jedynkowości, ze względu na regułę podstawiania.

Powyższe przerabiamy przykładowo:

Dla wartości $s = 0, t = 0$ otrzymamy

$$C_{st} = C_{00} = 1$$

Dla wartości $s = 0, t = 1$ otrzymamy

$$C_{st} = C_{01} = 1$$

Dla wartości $s = 1, t = 0$ otrzymamy

$$C_{st} = C_{10} = 0$$

Dla wartości $s = 1, t = 1$ otrzymamy

$$C_{st} = C_{11} = 1$$

Dla wartości $C_{st}=0, q=0, r=0$ otrzymamy

$$CC00CC00C00 = C1C11 = C11 = 1 \text{ i t. d. a więc podstawienie}$$

$$CCC_{st}qCCq_rCC_{str}$$

dziedziczy własność „ φ_1 “, t. j. własność jedynkowości, bo w każdym możliwym wypadku posiada wartość równą jeden.

Dziedziczność ze względu na regułę odgrywania.

Rozpatrzmy regułę odgrywania na dziedziczność. Reguła odgrywania brzmi:

Jeśli $C\alpha\beta = 1$ i $\alpha = 1$, to β musi być $= 1$.

Dlaczego?

Dlatego, że tak matryca jest budowana, że $C1\beta = 1$ tylko w tym przypadku, gdy $\beta = 1$.

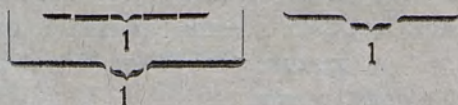
Jeżeli „ $C\alpha\beta = 1$ “ i „ $\alpha = 1$ “, to znaczy jeśli „ $C1\beta = 1$ “, to „ $\beta = 1$ “, gdyż matryca implikacji C | $\beta = 0$ $\beta = 1$ tak jest

$\alpha = 0$	1	1
$\alpha = 1$	0	1

budowana, że „ $C1\beta = 1$ “ tylko w tym wypadku gdy $\beta = 1$.

$$\alpha = CCp_q \ CCq_r \ Cpr = 1$$

Jeżeli $C \ CCp_qCCq_rCpr$ β i CCp_qCCq_rCpr , to β



Jeżeli $C\alpha\beta$ i α , to β

Jeżeli $C\alpha\beta = 1$ i $\alpha = 1$, to $C1\beta = 1$

Jeżeli $C1\beta = 1$, to $\beta = 1$

To znaczy, wydedukowane nowe twierdzenie „ β ” posiada własność „ φ_1 ” t. j. w naszym wypadku własność jedynkowości t. j. „ β ” posiada wartość „1”, czyli „ $\beta = 1$ ”.

Rozpatrzywszy regułę odrywania na dziedziczność przekonaaliśmy się, że wydedukowane przy jej pomocy nowe twierdzenie „ β ” dziedziczy po twierdzeniach „ $C\alpha\beta$ ” i „ α ” ich własność „ φ_1 ” t. j. w naszym wypadku ich jedynkowość.

Ad 3.) „ α ”, „ $N\alpha$ ” nie mogą być zarazem jedynkowe t. j. nie mogą posiadać zarazem własności „ φ_1 ”, gdyż, jeżeli „ $\alpha = 1$ ”, to „ $N\alpha = 0$ ” a, jeżeli „ $N\alpha = 1$ ”, to „ $\alpha = 0$ ”. A więc warunek trzeci jest spełniony w tym znaczeniu, że jeżeli „ α ” dziedziczy własność „ φ_1 ”, to „ $N\alpha$ ” jej nie dziedziczy, i odwrotnie, jeżeli „ $N\alpha$ ” ją dziedziczy, to „ α ” jej nie dziedziczy.

Dlaczego?

Dlatego, bo matryca negacji

	$N\alpha$		α
$\alpha = 0$	1	$N\alpha = 0$	1
$\alpha = 1$	0	$N\alpha = 1$	0

jest tak budowana, że nie tylko własności „ φ_1 ” lecz w ogóle jakiejkolwiek własności „ φ ”: „ α ”, „ $N\alpha$ ” zarazem posiadać nie mogą.

Rozdział siedemnasty.

LEKCJA IX.

Treść: Niezależność układu aksjomatów.

Rozdział siedemnasty.

LEKCJA IX

18. VII. 1942.

Kwestia niezależności układu aksjomatów. Metoda przy pomocy której możnaby wykazać niezależność jakiejś tezy od innych tez.

Ogólna myśl jest następująca:

Aby stwierdzić niezależność tezy „T” od tez „A₁, A₂, ... A_n” wystarczy znaleźć własność „W” spełniającą następujące warunki:

Po pierwsze: Każda z tych tez „A₁, A₂, ... A_n” posiada własność „W”.

Po wtóre: Własność „W” jest dziedziczna ze względu na przyjęte w systemie reguły wnioskowania.

Po trzecie: Teza „T” nie posiada własności „W”. Przykład własności „W” dziedzicznej ze względu na regułę podstawiania i odrywania a więc mogącej służyć dla udowodnienia niezależności jednej tezy od drugiej.

Prawo sylogizmu warunkowego CCpq CCqr Cpr, ma tę własność „W”, że każda zmienna występuje w nim parzystą ilość razy a mianowicie dwa razy; dwa razy występuje „p”, dwa razy „q” i dwa razy „r”.

Tę własność posiada także prawo tożsamości „Cpp” i wiele innych tez. Ta własność „W” jest dziedziczna ze względu na podstawianie i odrywanie.

1.) Jest dziedziczna ze względu na podstawianie dlatego, że cokolwiek za jakąś zmienną podstawiam muszę podstawić

to coś parzystą ilość razy, więc ilość każdej zmiennej po podstawieniu musi być także parzysta.

2.) Jest dziedziczna ze względu na odrywanie, bo jeśli w wyrażeniu „ $C\alpha\beta$ ” każda zmienna występuje parzystą ilość razy i w „ α ” każda zmienna występuje parzystą ilość razy, to i w „ β ” każda zmienna musi występować parzystą ilość razy.

Wobec tego z żadnego z powyższych praw t. j. z prawa sylogizmu warunkowego jakoteż z prawa tożsamości nie można wyprowadzić np. takiej tezy

$$CpCqp$$

Teza ta nie posiada własności „W” a więc jest niezależna od poprzednich dwóch tez.

To tak gdyby ktoś chciał otrzymać np. siarkę z substancji nie zawierającej jej, posługując się zwyczajnymi metodami chemicznymi.

Najłatwiej otrzymać można te własności „W” na podstawie których stwierdzić możemy niezależność tezy „T” od tez „ $A_1, A_2, \dots, A_n$ ” przy pomocy specjalnie skonstruowanych matryc. Najpierw wykażemy niezależność aksjomatu trzeciego (teza „T”) od dwóch pierwszych aksjomatów (tezy „ A_1, A_2 ”)

$$1 \quad CCpq \ CCqr \ Cpr$$

$$2 \quad CCNppp$$

$$3 \quad CpCNpq$$

Matrycę dla „C” pozostawiamy nie zmienną zaś dla „N” przyjmujemy matrycę

	N,
0	1
1	1

Pierwszy aksjomat przechodzi stale w 1 dla wszelkich podstawień zer i jedynek za zmienne.

Drugi trzeba sprawdzić osobno, bo jest tu podana nowa matryca dla „N”.

Dla $p = 0$, $CCN_{ppp} = CCN_{000} = CC1_{00} = C_{00} = 1$.

Dla $p = 1$, $CCN_{ppp} = CCN_{111} = CC1_{11} = C_{11} = 1$.

Własność „W” t. j. jedynkowość, posiadają oba pierwsze aksjomaty.

W trzecim aksjomacie podstawiamy za:

$p = 0, q = 0, C_p C_N p q = C_0 C_N 00$

$= C_0 C_{10} = C_{00} = 1$.

$p = 0, q = 1, C_p C_N p q = C_0 C_N 01$

$= C_0 C_{11} = C_{01} = 1$

$p = 1, q = 0, C_p C_N p q = C_1 C_N 10$

$= C_1 C_{10} = C_{10} = 0$

Widzimy, że trzeci aksjomat nie posiada własności „W” a więc trzeci aksjomat jest niezależny od dwóch pierwszych.

T R E Ś Ć.

Wstęp do genezy logiki str. 5

Rozdział drugi str. 7

Geneza logiki w 10-ciu lekcjach str. 7

Rozdział trzeci str. 14

Treść: Negacja. Połączenie zdań. Funkcja propozycjonalna. Funktory zdaniotwórcze. Przynależność zdań do logiki. Zdania sprzeczne. Wywartościowanie zdania. Funkcja. Matryca negacji. Przeciwnieństwo. Kontradyktoryczne przeciwieństwo. Prawda. Fałsz. Błąd. Wartość wyróżniona. Stanowisko prawdziwościowe.

Rozdział czwarty str. 28

LEKCJA I. str. 28

Treść: Najprostszy wywód. Najprostsze reguły wnioskowania. Uznanie zdania „ $a = a$ ”. Tożsamość. Zbiór. Pole, dziedziną, przeciwdziedzina — stosunku dwuczłonowego. Nazwy, zdania, jako różne kategorie semantyczne. Uznanie sprzeczności. Uznanie zasady wykluczonej sprzeczności. Uznawanie zdań z tytułu założenia; konwencjonalizm i banalność. Wartości desygnatów. Wartości konotacji.

Rozdział piąty str. 43

LEKCJA II. str. 43

Treść: Wywód albo dowód sformalizowany. Twierdzenie do wywiedzenia albo do udowodnienia. Przesłanki. Wybór przesłanek. Przekształcenia przesłanek. Dowód. Reguła podstawiania r. p. Reguła odrywania r. o. Uznawanie. Implikacja. Funktory zdaniotwórcze. Funktory nazwotwórcze. Wiersz dowodowy. Znak przestankowy. Podstawianie. Znak podstawiania. Przesłanki numerowane. Kreska odrywaniowa. Symboliczna forma dowodu. Dwie uwagi w sprawie następnika.

Rozdział szósty str. 52, 53

Treść: Zdanie gramatyczne jako wypowiedź myśli. Wypowiedź zdania w logice. Myśl wyrażona połączeniem zdań.

Wartość wyrażona połączeniem zdań. Matryce stosunków dwuczłonowych. Wymawianie funktorów zdaniotwórczych. Konjunkcja K. Funktor zdaniotwórczy G. Ekwiwalencja E. Alternatywa nie wyłączająca A. Implikacja C. Alternatywa wyłączająca lub dysjunkcja D. Pociąganie. Wynikanie. Pociąganie jednoznaczne. Pociąganie w obie strony lub dwuzwrotne.

Rozdział siódmy str. 68, 69

Treść: Zasada wyłączonej sprzeczności. Zasada wyłączonego środka.

Rozdział ósmy str. 76, 77

LEKCJA III. str. 77

Treść: Wiersz dowodowy. Drugi wywód sformalizowany. Intuicyjne objaśnienie tezy $C(a < a) N(a < a)$. Zdania sprzeczne. Przykład. Nie można wyrazić zasady wyłączonej sprzeczności przez zasadę wyłączonego środka. Luźne uwagi odnośnie sylogistyki i studium zawodów praktycznych.

Rozdział dziewiąty str. 83, 84

LEKCJA IV. str. 84

Treść: Analiza wzoru CCpNpNp. Logika zdań jako podstawowy system logiczny. Metoda zerojedynkowa sprawdzania prawdziwości praw logiki zdań. Prawo dwuwartościowości. Matryca negacji. Matryca dla implikacji. Sprawdzanie tezy CCpNpNp. Stopnie możliwości bytu. Budowa pierwszego aksjomatu CCpqCCqrCpr i sens drugiego aksjomatu CCNppp. Budowa i sens trzeciego aksjomatu CpCNpq. Reguła podstawiania.

Rozdział dziesiąty str. 90

9. VII. 42. wieczór.

Zapytania na lekcję piątą.

Rozdział jedynasty str. 94, 95

LEKCJA V. str. 94

Treść: Tezy, aksjomaty, twierdzenia. Zdanie logiczne t. j. wyrażenie należące do logiki. Sprawdzanie tez logicznych metodą zerojedynkową. Logika nie robi różnicy między prawdziwością zdań elementarnych a prawdziwością zdań funkcyjnych. Realny układ aksjomatów. Oczywiście. Terminy pierwotne. Przykład sprawdzania aksjomatu trzeciego przy pomocy metody zerojedynkowej.

<i>Rozdział dwunasty</i>	str. 100, 101
LEKCJA VI.	str. 101
Treść: Zbiór. W sprawie poprzednika drugiego aksjomatu. Wyrażenie sensowne. Wyprowadzenie prawa tożsamości „Cpp” z trzech aksjomatów. Obliczenie matrycy alternatywy na podstawie definicji.	
<i>Rozdział trzynasty</i>	str. 107
Zapytania na lekcję VII.	
<i>Rozdział czternasty</i>	str. 109, 110
LEKCJA VII.	str. 110
Treść: Zdania sprzeczne. Zdania niezgodne. Wyrażenie. Prawo tożsamości jako słabo dedukcyjne nie nadaje się do dowodzenia. Reguła zastępowania definicyjnego. Definicja konjunkcji. Ułożenie matrycy dla konjunkcji. Poza lekcją. Podanie definicji alternatywy na podstawie matrycy alternatywy i konjunkcji. Definicja równoważności (ekwiwalencji). Matryca ekwiwalencji. Słowo „wtedy, gdy”. Słowo „tylko wtedy, gdy”. Warunek wystarczający. Warunek konieczny. Dwa przykłady.	
<i>Rozdział piętnasty</i>	str. 123, 124
Treść: Funktor zdaniotwórczy od dwóch argumentów nazwowych. Znak implikacji. Symbolika beznawiasowa. Arytmetyczne prawo łączności dla dodawania. Prawo monotonii.	
<i>Rozdział szesnasty</i>	str. 128, 129
LEKCJA VIII.	str. 129
Treść: Cztery funkcje od jednego argumentu: Falsum „F”, Asercja „S”, Negacja „N”, Verrum „V”. Funkcje od dwóch argumentów. Cechy układu aksjomatów. niesprzeczność, niezależność, zupełność. Dowód niesprzeczności aksjomatów. Jedynkowość. Dziedziczność własności „ φ ” ze względu na reguły wnioskowania. Przykłady.	
<i>Rozdział siedemnasty</i>	str. 136, 137
LEKCJA IX.	str. 137
Treść: Niezależność układów aksjomatów.	



Alfabetyczny spis rzeczy.

- Absolutna prawdziwość — 98
- Aksjomaty — 94, 98
- Alternatywa nie wyłączająca A. — 52, 58
- Alternatywa wyłączająca lub dysjunkcja D. — 52
- Analiza wzoru CCpNpNp — 83
- Argument zdaniowy — 25, 98
- Arytmetyczne prawo łączności dla dodawania — 123
- Asercja „S” — 128
- Banalność — 28, 40
- Błąd — 14, 26
- Budowa pierwszego aksjomatu CCprCCqrCpr i sens drugiego aksjomatu CCNppp — 83, 87, 88
- Budowa i sens trzeciego aksjomatu CpCNpq — 83, 89
- Cechy układu aksjomatów — 128
- C matryca — 58
- Cztery kolumny — 13
- Cztery funkcje o jednym argumencie — 128
- Definicja alternatywy — 104
- Definicja konjunktii — 109, 112
- Definicja równoważności (ekwiwalencji) — 109, 117
- Dowód — 43, 44, 45
- Dowód niesprzeczności aksjomatów — 128
- Drugi wywód sformalizowany — 76, 81
- Dysjunkcja lub alternatywa wyłączająca D — 52, 59
- Dwie uwagi w sprawie następnika — 43
- Dziedziczność własności „ φ ” ze względu na reguły wnioskowania — 128
- Dziedzina stosunku dwuczłonowego — 28, 35
- Dziedziczność ze względu na regułę podstawiania — 133
- Dziedziczność ze względu na regułę odrywania — 134
- Ekwiwalencja E — 52, 57
- Falsum „F” — 128
- Falsz — 14
- Falszywość zarazowa (równoczesna) — 70

Funkcja — 14
 Funkcja propozycjonalna — 14, 15
 Funkcje od dwóch argumentów — 128
 Funktory zdaniotwórcze — 14, 43, 46, 124
 Funktory nazwotwórcze — 43, 47
 Funktor zdaniotwórczy G — 52
 Funktor zdaniotwórczy od dwóch argumentów nazwowych — 123
 G-matryca — 57
 Identyczność (tożsamość) — 29
 Implikacja — 43, 45, 52, 80
 Intuicjoniści — 70
 Intuicyjne objaśnienie tezy $C(a < a) \supset N(a < a)$ — 76
 Jedynkowość — 128
 Konjunkcja K — 52, 56
 Kontradiktoryczne przeciwieństwo — 14
 Konwencjonalizm — 28, 40
 Konotacja liczby 1 jest taka sama, jak konotacja liczby 2 — 42
 Kreska odrywaniowa — 43, 47
 Kryterium prawdziwości zdania — 91
 Logika nie robi różnicy między prawdziwością zdań elementarnych
 a prawdziwością zdań funktorowych — 94
 Logika zdań jako podstawowy system logiczny — 83
 Ludzie wierzący — 70
 Łącznik (copula) — 53
 Matryca negacji — 14, 83
 Matryca stosunku dwuczłonowego — 33
 Matryce stosunków dwuczłonowych — 52, 54, 55
 Matryca dla implikacji — 83
 Matryca ekwiwalencji — 109
 Metoda zerojedynkowa sprawdzania prawdziwości praw logiki zdań
 — 83
 Myśl wyrażona połączeniem zdań — 52
 Najprostszy wywód — 28
 Najprostsze reguły wnioskowania — 28
 Najważniejsze prawa rozumowania — 85
 Następstwo liter — 102
 Następstwo pierwszego i drugiego członu — 65
 Nazwy, zdania jako różne kategorie semantyczne — 28, 37
 Następnik — 50

Negacja „N” — 14, 22, 123
Nie można wyrazić zasady wyłączonej sprzeczności przez zasadę
wyłączonego środka — 76
Niesprzeczność — 128
Niezależność — 128
Niezależność układu aksjomatów — 136
Obliczenie macierzy alternatywy na podstawie definicji — 100
Oczywistość — 94
Ontologiczna prawda — 92
Orzeczenie zdania (Praedicatum) — 53
Pedagogiczny życiorys autora — 5
Poprawne wyrażenie myśli — 12
Połączenie zdań — 14
Pole stosunku dwuczłonowego — 28
Podstawianie — 47
Podstawianie definicyjne — 50
Pociąganie — 52, 59
Pociąganie jednozwrotne — 52
Pociąganie w jedną stronę — 63
Pociąganie w obie strony lub dwuzwrotne — 52, 64
Połączenia zmiennych zdaniowych — 53
Podmiot zdania (subjectum) — 53
Podstawowy system logiczny — 85
Porządek liter — 102
Poza lekcją — 109
Podanie definicji alternatywy na podstawie macierzy alternatywy, kon-
junkcji i negacji — 109
Praca szkoły — 7
Prawda — 14
Prawo dwuwartościowości — 83
Prawo komutacji — 62
Praktyczne rezultaty życiowe — 70
Prawdziwość zarazowa (jednoczesna) — 70
Prawo logiczne — 85
Prawo rozumowania — 85
Prawdziwość treści zdania — 90
Prawda logiczna — 90
Prawda ontologiczna — 92
Prawdziwość też logiki zdań — 95
Prawdziwość absolutna — 98

Prawo tożsamości jako słabo dekuzyjne nie nadaje się do dowo-
 dzenia — 109
 Prawo łączności dla dodawania — 123
 Prawo monotonii — 123
 Przynależność zdań do logiki — 14
 Przeciwięństwo — 14
 Przeciwdziedzina stosunku dwuczłonowego — 28, 35
 Przesłanki — 29, 43, 44
 Przekształcenie przesłanek — 43
 Przesłanki numerowane — 43, 46
 Przyczyna i skutek — 93
 Przykład sprawdzenia aksjomatu trzeciego przy pomocy metody
 zerojedynkowej — 94
 Reguła podstawiania r. p. 43, 44, 83, 89
 Reguła odrywania, r. o. — 43, 45
 Reguła zastępowania definicyjnego — 109, 111
 Reguły wnioskowania — 44
 Rozum — 70
 Równokształtność — 11
 Rutyna — 7
 Sprawdzanie tez logicznych metodą zerojedynkową — 94
 Stanowisko prawdziwościowe — 14, 27
 Stosunek przyczyny do skutku — 93
 Stosunek „R” — 32
 Stopnie możliwości bytu — 83, 87
 Stosunek nauczyciela do ucznia — 7
 Stosunek wiedzącego do dowiadującego się — 7
 Sprawdzenie tezy CCpNpNp — 83
 Symboliczna forma dowodu — 43, 48, 50
 Studium zawodów praktycznych — 76, 81
 Sprzeczność — 72
 System logiczny — 85
 Słowo „wtedy, gdy” — 109
 Słowo „tylko wtedy, gdy” — 109
 Symbolika beznawiasowa — 129
 Ścisłość — 10
 Terminy pierwotne —
 Tezy — 94, 98
 Teza logiczna — 91
 Tożsamość (identyczność) — 28, 29

Tożsamość myśli — 11
 Twierdzenie do wywiedzenia albo udowodnienia — 43, 44
 Twierdzenia — 94, 98
 Układ aksjomatów — 94, 131
 Ułożenie matrycy dla konjunkcji — 109
 Uwaga w sprawie czytania „Genezy” — 4
 Uznanie zdania „ $a = a$ ” — 28, 29
 Uznanie sprzeczności — 28, 39
 Uznanie zasady wyłączonej sprzeczności — 28
 Uznanie zdań z tytułu założenia — 28
 Uznawanie — 43
 Verrum „V” — 128
 Wartość wyróżniona — 14, 26, 98
 Wartość desygnatów — 28
 Wartość konotacji — 28
 Wartość wyrażona połączeniem zdań — 52
 Wartość logiczna — 90
 Wartość zdań sprzecznych — 70
 Warunek dodatkowy — 61
 Warunek wystarczający — 109, 119
 Warunek konieczny — 109, 119
 Warunek konieczny i wystarczający — 120
 Wiersz dowodowy — 43, 47, 76, 77
 Wnioskowanie — 11
 Wywartościowanie zdania — 14, 19
 Wywód albo dowód sformalizowany — 43, 76
 Wybór przesłanek — 43
 Wypowiedź zdaniowa w logice — 52, 53, 54
 Wymawianie funktorów zdaniotwórczych — 52, 56
 Wynikanie — 52, 60
 W sprawie poprzednika drugiego aksjomatu — 100
 Wyrażenie sensowne — 100, 108
 Wyprowadzenie prawa tożsamości „Cpp” z trzech aksjomatów — 100, 102
 Wyrażenie zdaniowe bezsensowne — 108
 Wyrażenia — 109
 Zastępowanie na mocy reguły zastępowania definicyjnego — 11
 Zastępowanie definicyjne — 50, 51
 Zasada wyłączonej sprzeczności — 68, 69, 76, 79
 Zasada wyłączonego środka — 68, 74, 76, 79

Zawody praktyczne — 81
Zaprzeczenie fałszu — 86
Zaprzeczenie prawdy — 86
Zależność obojętna — 98
Zdania ekwiwalentne — 118
Zdania niezgodne — 109, 110
Zdania logiczne t. j. wyrażenie należące do logiki — 94
Zdanie gramatyczne jako wypowiedź myśli — 52, 53
Zdanie sprzeczne — 14, 70, 76, 109
Zdobycz logiki teoretycznej — 13
Zbiór — 28, 32, 100
Znaczenie znaków — 41
Znak przestankowy — 47
Zmienne zdaniowe — 95
Zmienna zdaniowa „p” — 107
Znak implikacji — 123
Zupełność — 128

Ważniejsze błędy drukarskie.

Str.:	Wiersz:	Zamiast:	Powinno być:
17	9. od dołu	$p \alpha$	p, α
18	8. i 9. od dołu	p/α	p/α
		$\alpha/\text{słońce świeci}$ $\text{słońce świeci}/0$	$\alpha/\text{słońce świeci}$ $\text{słońce świeci}/0$
	18. i 19. od dołu	p/α	p/α
		$\alpha/\text{słońce świeci}$ $\text{słońce świeci}/1$	$\alpha/\text{słońce świeci}$ $\text{słońce świeci}/1$
	28. i 29. od dołu	p/α	p/α
		$\alpha/\text{słońce świeci}$ $\text{słońce świeci}/w$	$\alpha/\text{słońce świeci}$ $\text{słońce świeci}/w$
	Zbiór zdań „ p/α ”	$\alpha/\text{słońce świeci}$ słońce świeci w “ jest poprzednikiem implikacji o następniku „ $p = w$ ”.	
	Zbiór zdań „ p/α ”	$\alpha/\text{słońce świeci}$ $\text{słońce świeci}/w$ “ pociąga zdanie „ $p = w$ ”.	
	Pociąganie powyższe przy prawdziwości „ p/α ”		$\alpha/\text{słońce świeci}$ $\text{słońce świeci}/w$ ‘
	daje prawdziwość zdania „ $p = w$ ”.		
	Podobnie odnośnie wartości 0, 1.		
19	11. i 12. od góry	, którą przedstawiamy za zmienną zdaniową.	, która jest tym samym co zmienna zdaniowa.
21	1. od dołu	świeci	świeci
32	13. od dołu	oznaczamy	symbolizujemy
53	4. od góry	subjektum	subjectum
60	3. od góry	„ $C\alpha\beta$ ” i „ α ”	„ $C\alpha\beta$ ”, „ α ”
60	9. od góry	„ $C\alpha\beta$ ” i „ α ”,	„ $C\alpha\beta$ ”, „ α ”.
61	9., 10., 11. od góry	bo $\alpha = 0$, pociągając wszystko, nic nie pociąga; a, jeżeli $\alpha = 0$ nic nie pociąga, bo wszystko pociąga, to tak $X00 = 1$ jak $X01 = 1$.	bo $\alpha = 1$, pociągając $\beta = 1$ przy połączeniu $X\alpha\beta = X11 = 1$ nie pociąga $\beta = 0$, to znaczy $X\alpha\beta = X1\beta = X10 = 0$ posiada w tym wypadku właśnie takie za-

Str.	Wiersz:	Zamiast:	Powinno być:						
		ności zawiera matryca C.	leżności wartości jakie podaje matryca C.						
93	1. od góry	stosunek między „a1” i „a2”	stosunek „a1” do „a2”						
131	11. od dołu	$q = 0$	$q = 1$						
131	7. od góry	<table><tr><td>0</td></tr><tr><td>1</td></tr><tr><td>0</td></tr></table>	0	1	0	<table><tr><td>0</td></tr><tr><td>0</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	0	0	1
0									
1									
0									
0									
0									
1									

Katowice, 19. maja 1947 r.



DRUKARNIA PAŃSTWOWA NR 1, KATOWICE, UL. FRANCUSKA 33
R 14 323



K. SZOPA
INTERLIGACJA
KATOWICE



Biblioteka Śląska w Katowicach

Id: 0030000788688



II 56628