

P. 481

Z DZIEDZINY

STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ.

NAPISAŁ

BOLESŁAW DANIELEWICZ,

MAGISTER NAUK MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH B. SZKOŁY GŁÓWNEJ WARSZAWSKIEJ.

WYDANIE Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH
NA POLU NAUKOWEM, IMIENIA D-RA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

WARSZAWA.

W Drukarni Noskowskiego.

—
1884.

Cena kop. 40.

B 15633

Z DZIEDZINY

STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ.

NAPISZE

BOLESŁAW DANIELEWICZ,

MAGISTER NAUK MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH B. SZKOŁY GŁÓWNEJ WARSZAWSKIEJ.

P. 481.

WYDANIE Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH
NA POLU NAUKOWEM, IMIENIA D-RA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.



WARSZAWA.

W Drukarni Noskowskiego.

1884.

Дозволено Цензурою.
Варшава, 12 Мая 1884 года.

B2 58431
640010 II

B 15633



205

Z DZIEDZINY STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ.

W S T Ę P.

Zadaniem *umiejętności* jest dochodzenie praw rządzących wszechświatem i wynajdywanie sposobów dochodzenia tych praw.

Wszelkie inne badanie naukowe, jest przedmiotem nauk konkretnych, mających za cel zastosowanie tylko rezultatów umiejętności do praktycznych zadań człowieka.

Pierwszą grupę nauk, traktujących o samych tylko niewątpliwie dowiedzionych prawdach, nazywamy — jakeśmy powiedzieli — umiejętnościami albo *naukami ścisłymi*, a każde naukowe badanie do tego dążyć powinno, aby rozpatrywany przedmiot wynieść do rzędu nauk ścisłych.

Przy naukowych badaniach dwojakim postępujemy sposobem, albo przyjmujemy z góry pewną zasadę i drogą rozumowania wyprowadzamy z niej wnioski w formie twierdzeń, faktów i t. p.; albo też naodwrot, wpieryw obserwujemy, zestawiamy i porównujemy fakty, a następnie dopiero, na zasadzie dokonanych spostrzeżeń, dochodzimy praw rządzących temi faktami i przyczyn powodujących te prawa.

Pierwszą z tych metod posługują się przeważnie umiejętności abstrakcyjne, jak np. matematyka; druga znajduje większe zastosowanie w umiejętnościach doświadczalnych i obserwacyjnych jak w fizyce, astronomii i t. p.

Gdy jednak za pomocą obserwacji odkryjemy już pewne prawa rządzące zjawiskami, odnajdziemy przyczyny tych praw, naówczas nauka doświadczalna przybiera charakter umiejętności abstrakcyjnej i za pośrednictwem metody właściwej tym ostatnim, możemy przewidywać zjawiska, których na mocy samej tylko obserwacji nigdy może nie bylibyśmy w stanie dostrzedz.

Do uwydatnienia naszej myśli, mogą nam posłużyć najlepiej: matematyka i astronomia.

Matematyka, umiejętność czysto abstrakcyjna, ma za podstawę kilka zaledwie prostych prawd zasadniczych — pewników, które jakkolwiek w gruncie rzeczy są również rezultatem obserwacji, jednakże dla swęj oczywistości mogą być wprost przez umysł ludzki przyjęte i za prawdy uznane.

To też i nieznający wcale przyrody matematyk, postawiwszy sobie pewne z góry zasady, może na ich podstawie rozwijać dalej wiedzę i dochodzić dalszych prawd, idąc jedynie za logicznym wywodem własnego rozumo-

wania, nie troszcząc się bynajmniej o to, czy wywody te mają być realny, czy są tylko rezultatem jego umysłu. Temu też głównie przypisać należy ciągły, szybki i najwcześniejszy rozwój matematyki, ciągle powstawanie nowych gałęzi tej wiedzy, ulepszanie dawnych metod postępowania i t. d. Każde nowe pojęcie, każdy nawet zręcznie obmyślony symbol może tutaj łatwo stać się źródłem odkrycia różnych, dawniej nieznanych, prawd abstrakcyjnych.

Każdemu wyżej wykształconemu wiadomo, jak wiele zawdzięcza matematyka wprowadzeniu, mających tylko umówione znaczenie, wykładników ujemnych, ułamkowych, ilości urojonych i t. p. Jak olbrzymi krok uczyniła przez wprowadzenie oderwanego pojęcia o granicy stosunku dwóch współcześnie i nieograniczenie malejących ilości, czego rezultatem był rachunek różniczkowy, a w następstwie całkowity.

Wprost przeciwną drogą postępowała, a inaczej postępować nie mogła—astronomija.

Do czasów Kopernika był to tylko zbiór obserwacji i nietrafnie na nich opartych hipotez — Kopernik kombinując w części ten surowy jeszcze i bez przewodniej myśli zbierany materiał z własnymi obserwacjami, w części zaś, może największej, przez genialną trafność swego pomysłu, wytknął w najogólniejszym zarysie kształt dróg planetarnych i wskazał tem samem następcom swoim kierunek, w jakim spostrzeżenia czynić należy. — Najpoważniejszy z początku przeciwnik, a później stronnik Kopernika — sławny duński astronom Tycho-Brahe, idąc w ślad za wskazanym przez Kopernika kierunkiem, zdeterminował następnie, na zasadzie swych własnych spostrzeżeń, bieg Marsa.

Kepler poddając dalej różnym porównawczym rachunkom otrzymane przez poprzedników rezultaty, wykreślił dokładnie już kształt odbywaną przez Marsa drogi i doszedł praw, które pod jego imieniem dziś już prawie każdemu są znane.

Newton wreszcie, odkryciem przyczyn praw dowiedzionych przez Keplera, zamknął cykl tych znamienitych uczonych, którym astronomija, postępująca szczebel po szczeblu, po drabinie obserwacji i domysłów, zawdzięcza, że stała się dzisiaj niemal abstrakcyjną umiejętnością i może już, bez pomocy nawet obserwacji, rozwiązywać zadania, o jakich nikt dawniej i marzyć nie mógł. Dowiódł tego wymownie niezbyt dawno zmarły Leverrier, b. dyrektor obserwatorium paryzkiego; odkrył on bowiem, wyłącznie już drogą rachunku planetę Neptuna, o którego istnieniu długo jeszcze zapewne niktby nie wiedział, gdyby astronomija, tak jak uprzednio, opierała się wyłącznie tylko na obserwacji.

Otóż od czasów Achenwall'a (urodzony 1719 r. w Elblągu, umarł 1772 r.), materiał zebrany za pośrednictwem szeregu obserwacji odnoszących się przeważnie do rzeczy ludzkich, przybrał miano materiału statystycznego i zgodnie z tem określeniem, za przedmiot dzisiejszej statystyki, uważamy zestawienie tego wszystkiego, co w danem społeczeństwie lub ludzkości jest godnem uwagi, a co zarazem daje się przedstawić za pomocą liczb.

Statystyka taka, jakkolwiek bez kwestyi, oddaje już dzisiaj znakomite gospodarstwu społecznemu usługi, nie jest jednakże jeszcze niczem więcej, jak tylko surowym materyjałem, z którego dopiero w przyszłości, podobnie jak w astronomii, wysnuć albo raczej utworzyć będzie można umiejętność w jej ścisłem znaczeniu t. j. odkryć zbiór praw rządzących społeczeństwami, oraz sposoby dochodzenia tych praw. Ta *nauka przyszłości* dla odróżnienia od tego, co dziś się przez statystykę rozumie, przybierze prawdopodobnie miano *statystyki matematycznej* lub *analitycznej*, zachodzić tu bowiem będzie nieco podobny stosunek jak np. pomiędzy fizyką doświadczalną a matematyczną.

Objasnia to znaczenie, może nie dla wszystkich od razu zrozumiałego, tytułu niniejszej pracy.

Ażebym jednak statystyka mogła się wynieść na takie stanowisko, obserwacja społecznych objawów, winna być prowadzoną zupełnie inaczej, niż dotąd.

Obecnie wielu zajmuje się zbieraniem statystycznych danych, lecz zbiera je bez żadnej niemal metody, bez *stale* wytkniętego kierunku. Każdy zbiera te wiadomości jak mu najdogodniej, jak mu się wreszcie zdaje, że będzie najlepiej. Uwzględnia jedne okoliczności, a pomija inne; tu powie wyraźnie, co uwzględnił, tam zaniecha tego uczynić i wkońcu ogłasza zbiór spostrzeżeń, o których nie wiadomo co sądzić. Trudno dociec, do jakiego stopnia są one godne wiary—ile w nich prawdy lub fałszu.

Następstwem tego, że z tych prawdziwie problematycznych danych, różni różne wyprowadzają wnioski, a najczęściej dowodzą tego, co z góry dowieść sobie zamierzali. — Inteligentniejsza część ogółu, nieraz ze zdziwieniem czyta, niby z danych statystycznych wyprowadzone wnioski, które przeczą zdrowemu rozsądkowi. Są to skutki tego co Francuzi dowcipnie nazywają „umiejętnością grupowania cyfr.”

W takim stanie rzeczy, o statystyce, jako o umiejętności, dziś i mowy być nie może, a nawet i w przyszłości trudnoby jej było kiedykolwiek wybić się na to szczytne stanowisko, gdyby i nadal dotychczasowa metoda miała ją prowadzić t. j. gdyby nieodnaleziono właściwej metody, gdyby kierunek zbierania statystycznych danych, nie został dokładnie określony.

Naszem zdaniem, w każdej gałęzi statystyki trzeba przedewszystkiem wyraźnie i ściśle określić cel do którego się dąży. Spostrzeżenia zaś powinny być prowadzone w ten sposób, aby z nich można było dojść nietylko określonych pojęciem tego celu wielkości, ale i granic w jakich się zawiera rzetelność znalezionych cyfr.

Dzisiaj nie mamy tego jeszcze, albo jeżeli mamy, to niedość ściśle. I tak np. najbardziej stosunkowo rozwiniętą gałęzią statystyki jest bezwątpienia statystyka śmiertelności, a jednak i tu jeszcze zasadnicze pojęcia nie są stanowczo ustalone i tu jeszcze w różny sposób zbierają się dane i nikt nie oznacza granic w jakich prawdopodobne błędy rezultatów się zawierają.

Przy tak różnych sposobach zbierania danych statystycznych, nie ma oczywiście możliwości porównawczego badania objawów społecznych t. j. takiego badania, które jedynie tylko doprowadzić może do pożądanego celu.

Należy zatem, jakeśmy to już nadmienili, koniecznie i przedewszystkiem ustalić pojęcia zasadnicze. Następnie, posiłkując się analizą matematyczną, wskazać kierunek w jakim obserwacyje czynione być powinny, a dopiero tą drogą otrzymane dane między sobą porównywać. — W ten jedynie sposób będzie można dojść do odkrycia praw ogólnych rządzących społeczeństwami oraz przyczyn tych praw.

Nie ulega wątpliwości, że świat uczonych dokładnie to już zrozumiał i usiłuje też za pośrednictwem kongresów wprowadzić statystykę na odpowiedniejszą dla niej drogę — stara się ujednolicić sposoby zbierania danych statystycznych; ale cóż po tem, kiedy brak zasadniczych podstaw, brak matematycznych badań na polu statystyki udaremnia wszystko i powoduje, że statystyka nie zajmuje obecnie wyższego stanowiska, jak astronomia przed Kopernikiem. Jest ona dotąd tylko zbiorem różnych danych, w rozmaity sposób i z różną ścisłością gromadzonych, które jakkolwiek mogą być dla nauk społecznych dosyć pożyteczne, nie tworzą jednak dotąd oddzielną naukę mającą pewien charakter ścisłości.

Żeby dzisiejszej statystyce nadać kierunek bardziej naukowy, trzeba na to genijusza, któryby zrobił dla niej to, co Kopernik uczynił dla astronomii, któryby postawiwszy pewne ścisłe i stałe pojęcia — wytknął kierunek, w jakim spostrzeżenia statystyczne nadal czynione być powinny.

Gdy zebrane w takim kierunku spostrzeżenia statystyczne zostaną nagromadzone w dostatecznej liczbie, naówczas zjawi się prawdopodobnie jakiś genialny statystyk, który na wzór Keplera, rozpatrzywszy porównawczo te dane, wywiedzie z nich prawa rządzące społeczeństwami.

W następstwie, znajdzie się niewątpliwie drugi Newton, który odsłoni przyczyny tych praw, dając tem samem możność rozwiązywania zagadnień, o jakich w obecnym stanie nauki najmniejszego nawet pojęcia mieć nie możemy.

Wówczas to dopiero statystyka będzie mogła być zaliczoną do rzędu nauk ścisłych, — stanie się *umiejętnością!*

Takie mniej więcej myśli wygłosił w 1865 r. Dr. Teodor Wittstein w mowie mianej na posiedzeniu sekcji matematyczno-fizycznej, podczas 40-go zjazdu naturalistów niemieckich w Hanowerze.

Niespodziewał się zapewne mówca, że pierwsza część jego przewidywań spełni się, przynajmniej w zakresie działu statystyki śmiertelności, już w 1868 roku, w którym to czasie pojawiło się doniosłego znaczenia dziełko D-ra G. F. Knapp'a pod tytułem: *Über die Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungs-Statistik* (wydane w Lipsku).

W rok później t. j. w 1869 r. Dr. Gustaw Zeuner w dziełku: *Abhandlungen aus der Mathematischen Statistik* (Lipsk), podnosi ten sam przedmiot w formie o wiele przystępniejszej i zaznaczywszy wielkie Knapp'a w tym przedmiocie zasługi, dochodzi do podobnych co i ten ostatni rezultatów.

Z otrzymanymi przez pomienionych uczonych rezultatami, pragnę zaznajomić tych, którzy się z niemi dotąd jeszcze nie spotkali, — przedmiot

to bowiem nowy i mało u nas znany, pewne więc zaznajomienie się z nim, może pobudzić kogo do dalszej na tem polu pracy.

Przy przedstawieniu w ogólnych zarysach głównych punktów przedmiotu, trzymać się będę drogi obranej przez Zeanera, gdyż droga ta — powtarzam — jest prostszą i jaśniejszą, a jak słusznie autor zauważył, przedmiot zrozumieć powinni statystycy z powołania, którzy po największej części nie są zarazem i matematykami.

I. ZASADNICZE POJĘCIE ŚMIERTELNOŚCI.

Wyobraźmy sobie naczynie z nieograniczenie wielką liczbą białych i czarnych gałek i przypuśćmy, że wyjąwszy z naczynia a razy po gałkę — przy czem każdą gałkę, po zaznaczeniu jej koloru, nazad do naczynia wrzucamy — wyciągnęliśmy a_1 białych, zaś $a - a_1$ czarnych gałek.

Pytanie zachodzi, jakie jest największe prawdopodobieństwo wyjęcia białej gałki z naczynia?

Jeżeli prawdopodobieństwo tego zdarzenia oznaczmy przez x — wtedy oczywiście x przybierać może wszelkie wartości od 0 do 1; a gdy prawdopodobieństwo, z jakim każdą z tych wartości x przybierać może, oznaczmy przez h , to z teorii rachunku prawdopodobieństwa wiadomo, że:

$$h = \frac{x^{a_1} (1 - x)^{a - a_1} dx}{\int_0^1 x^{a_1} (1 - x)^{a - a_1} dx}$$

Mianownik powyższego wyrażenia jest stały, gdy a i a_1 za stałe uważamy, z kąd się pokazuje, że h zależy od samego tylko licznika. Ponieważ zaś licznik przybiera największą wartość, gdy

$$x^{a_1} (1 - x)^{a - a_1} = \text{maximum}, \text{ czyli gdy } x = \frac{a_1}{a}$$

zatem powyższy stosunek jest najprawdopodobniejszą wartością niewiadomiej x , czyli prawdopodobieństwa z jakim białą gałkę z naczynia można wyciągnąć.

Zaznaczamy, że nie jest to wartość zupełnie ścisła, tylko najprawdopodobniejsza i będzie tem bliższą prawdy, im a większe, ale nigdy zupełnie równą prawdziwej.

Nic się w rezultacie nie zmieni, gdy w miejsce a wyciągniętych gałek, podstawimy a osób w jednakim wieku m ; w miejsce a_1 białych gałek — tyleż osób, które z pośród a żyjących, dosięgły $m + t$ lat. Dla osoby zatem m lat liczącej, najbliższém prawdopodobieństwem dożycia $m + t$ lat jest $\frac{a_1}{a}$

t. j. stosunek liczby osób, jaka dożyła $m + t$ lat z pośród mających m lat, do liczby tych ostatnich.

Stosunek ten, czyli owo *prawdopodobieństwo dożycia* pewnej liczby lat, oznaczmy przez p .

Skoro p oznacza *prawdopodobieństwo* z jakim m -letnia osoba dożyje $m + t$ lat, to oczywiście $1 - p$ będzie *prawdopodobieństwem*, z jakim ta sama osoba umrze przed dojściem do $m + t$ lat; suma bowiem $p + (1 - p) = 1$ stanowi pewność, że m -letnia osoba albo dożyje $m + t$ lat, albo wcześniej umrze, a takie tylko dwa przypadki mogą się tutaj przytrafić.

Widocznie gdy znamy p , znamy i $1 - p$, wskutek czego dość jest szukać wartości dla jednego z tych dwu *prawdopodobieństw*.

Gdy teraz założymy: $t = 1$, zaś m kolejno równe: 0, 1, 2, 3, 4 i t. d., aż do granicy życia ludzkiego, wtedy odpowiednie wartości na p przybierają znaczenie *rocznych prawdopodobieństw dożycia* i mogą być oznaczone przez: p_1, p_2, p_3, p_4 i t. d.; ich zbiór zaś da nam poniższej formy tablicę I:

T A B L I C A I.

1	2	3	4
wiek w latach	p r a w d o p o d o b i e ń s t w o		
	dożycia koń- ca następne- go roku	zejścia w cią- gu następne- go roku	z jakim nowonarodzony dożyje odpowiedniego wieku
0	p_1	$1 - p_1$	—
1	p_2	$1 - p_2$	p_1
2	p_3	$1 - p_3$	$p_1 \cdot p_2$
3	p_4	$1 - p_4$	$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$
4	p_5	$1 - p_5$	$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$
5	p_6	$1 - p_6$	$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5$
i t. d.	i t. d.	i t. d.	i t. d.

Znając podane w powyższej tablicy wielkości, gdy liczbę nowonarodzonych oznaczmy np. przez 10000 i następnie tę ostatnią liczbę pomnożymy przez p_1 , stąd otrzymany iloczyn — przez p_2 i t. d.; albo prościej, jeśli kolejno podane w kolumnie 4 ilości, pomnożymy przez 10000, to otrzymamy tablicę wskazującą nam, ile osób z pośród 10000 nowonarodzonych dożyje 1-go roku, 2-ch, 3 ch lat i t. d.

Będzie to tak zwana *tablica śmiertelności* w dotychczas używanej formie, którą dotąd niewłaściwie wprost z obserwacyj starano się obrachować — jest ona, jak teraz widzimy, tylko rezultatem dającym się łatwo otrzymać, gdy znamy roczne *prawdopodobieństwa dożycia* dla każdego wieku, które też wskutek tego przyjąć należy za *zasadnicze pojęcie śmiertelności* i przedewszystkiem starać się, o wyszukanie sposobu na ich oznaczenie.

Gdybyśmy mieli pewną liczbę osób jednego wieku np. mających po m lat skończonych i wiedzieli, ile z pośród nich dożyło $m + 1$ lat, wtedy stosunek liczby ostatnich do liczby pierwszych, byłby poszukiwanem prawdopodobieństwem przeżycia roku dla m -letniej osoby.

Zadanie więc nasze wydaje się bardzo prostem, dość bowiem obliczyć, ile w pewnem społeczeństwie np. d. 1 stycznia jest 20-o letnich, następnego 1 stycznia — ilu jest 21-o letnich i wziąć stosunek ostatniej liczby do pierwszej, aby mieć dla 20-o letniego prawdopodobieństwo dożycia 21 lat.

Podobnie postępowaćby trzeba dla każdego innego wieku.

Gdyby ludzie rodzili się tylko np. d. 1 stycznia, gdyby więc—co za tem idzie—w dniu tym wszyscy kończyli całkowitą liczbę lat, wówczas istotnie zadanie nasze byłoby bardzo łatwe do rozwiązania. Ale ponieważ dzieje się przeciwnie, ponieważ ludzie rodzą się nie naraz, lecz w różnych dniach roku; zatem w pewnej chwili np. d. 1. stycznia wszyscy ludzie są w różnym wieku i ta właśnie okoliczność wikła zadanie, czyniąc z bardzo łatwego w zasadzie—niezmiernie trudne w praktyce tak, że dopiero pierwszemu Knapp'owi udało się je, z pomocą analizy, szczęśliwie i zupełnie ściśle rozwiązać.

Przedstawić pomienione rozwiązanie w formie jakiej użył Zeuner, ma być przedmiotem dalszego ciągu niniejszej pracy.

Wszakże zwracamy uwagę, że najprawdopodobniejsza wartość ilości p , powinna być koniecznie jeszcze dopełnioną wskazaniem ścisłości otrzymanych rezultatów, czyli oznaczeniem granic w jakich prawdziwa wartość ilości p się zawiera.

To jednak nie leży już w zakresie naszej pracy, bo z pomocą zasad jakie rachunek prawdopodobieństwa podaje, łatwo się pomienione granice oznaczają. Tu nadmienimy tylko ogólnie, że ścisłość rezultatów jest tem większa, im większą liczbę osób pod uwagę bierzemy.

II. DWA OBRAZY RUCHU LUDNOŚCI.

Zmiany jakim ludność, na pewnej przestrzeni zamieszkała, co do swęj liczby i wieku podlega, zowią się *ruchem ludności*.

Dana przestrzeń zapełnia się ludźmi dwu tylko sposobami, przez urodzenia i przez napływ z innych przestrzeni.

Tyluż sposobami dana przestrzeń pozbawia się ludzi, mianowicie przez śmierć i wychodźstwo poza jej granice.

Pomijając napływ z sąsiednich przestrzeni i wychodźstwo, ruch ludności uważanego społeczeństwa, przedstawia nam tablica śmiertelności, która — jak to już wiemy — podaje, ile osób, z pośród pewnej liczby urodzonych, dochodzi 1-go, 2-ch, 3-ch lat i t. d.

Wyobraźmy sobie układ dwóch wzajem do siebie prostopadłych osi współrzędnych OX i OZ (fig. 1), w którym kierunek OX niech nam wyobraża wiek, zaś kierunek OZ — liczbę żyjących, w odpowiednim wieku, osób.

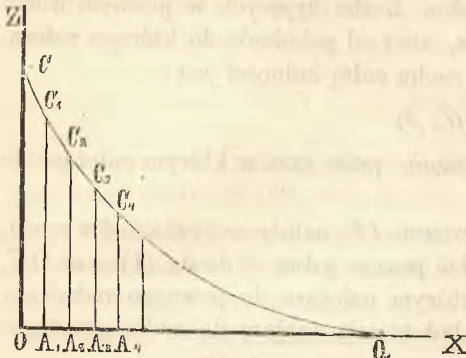


Fig. 1.

Liczba urodzonych w ciągu pewnego czasu, zowie się *pokoleniem*.

Przypuśćmy, że wszyscy ludzie należący do tego samego pokolenia, rodzą się współcześnie, w jednej chwili i że dla takiego pokolenia mamy ułożoną tablicę śmiertelności t. j. wiemy, ile osób

z pośród niego dożyło *jednego roku, 2-eh, 3-eh lat* i t. d.

Na osi rzędnych OZ , poczynawszy od punktu O , odetnijmy długość OC , proporcjonalną do liczby urodzonych w pewnej chwili, czyli do liczby osób objętych pewnem pokoleniem.

Gdy następnie na OX odcinać będziemy równe części: $OA_1, A_1 A_2, A_2 A_3$ i t. d., oznaczające lata życia i gdy na równoległych, poprowadzonych do osi OZ z punktów: A_1, A_2, A_3 i t. d. odcinać będziemy długości: $A_1 C_1, A_2 C_2, A_3 C_3$ i t. d., proporcjonalne do liczby osób dosięgających: *jednego roku, 2-eh, 3-eh lat* i t. d. z pośród uważanego pokolenia, aż do granicy ludzkiego życia; wtedy krzywa CQ , powstała z połączenia punktów: C, C_1, C_2, C_3 i t. d., da nam *graficzny obraz* ruchu ludności stanowiącej uważane pokolenie, czyli tak zwaną *krzywą śmiertelności* tego pokolenia.

Widocznie ubytek ludności zależy od wieku osób — tem mniej żyje osób z pewnego pokolenia, im późniejszy ich wiek, czyli wyrażając się matematycznie, liczba żyjących osób pewnego pokolenia jest funkcją ich wieku.

Gdy więc wiek osób oznaczymy przez x , a liczbę żyjących osób w tym wieku — przez z , to *analitycznym obrazem* ruchu ludności, czyli równaniem krzywej śmiertelności jest

$$(1) \quad z = f(x)$$

Kształt funkcji $f(x)$ nie jest nam dotąd bliżej znany, — wiemy tylko, że:

1-o przy $x = 0$, $z = f(0)$ równa się liczbie urodzonych,

2-o przy $x = \omega$, gdzie ω niech nam oznacza granicę życia ludzkiego, $z = f(\omega) = 0$, gdyż na granicy ludzkiego życia, nikt już z uważanego pokolenia nie żyje.

3-o funkcja $z = f(x)$, od $x = 0$ do $x = \omega$ stale maleje, wskutek czego pochodna $f'(x)$ stale zachowuje znak ujemny.

Oba te jednak obrazy przedstawiają nam tylko ruch jednego pokolenia. Ponieważ zaś pokolenia następują po sobie i osoby należące do nich mieszają się z sobą, dając na wypadkową ludność pewnej przestrzeni, każde

zaś pokolenie, jak tego spodziewać się należy, posiada różną liczbę członków, umierających najprawdopodobniej nie według zupełnie identycznego prawa; zatem pomienione obrazy są niezupełne, liczba żyjących w pewnym wieku osób nie zależy od samego tylko wieku, ale i od pokolenia do którego należą, czyli zupełnym obrazem analitycznym ruchu całej ludności jest:

$$(2) \quad z = f(x, t)$$

gdzie t wyobraża nam pokolenie, wyrażone przez czas w którym należące do niego osoby się urodziły.

Dla dania graficznego obrazu równania (2), należy oczywiście dla czasu, w którym pokolenia się pojawiają, dodać jeszcze jedną oś do fig. (1) — oś OY, na której odcinać będziemy czas, w którym należące do pewnego pokolenia osoby się rodzą t. j. będziemy mieli układ trzech wzajem do siebie prostopadłych osi: OX, OY, OZ (fig. 2)

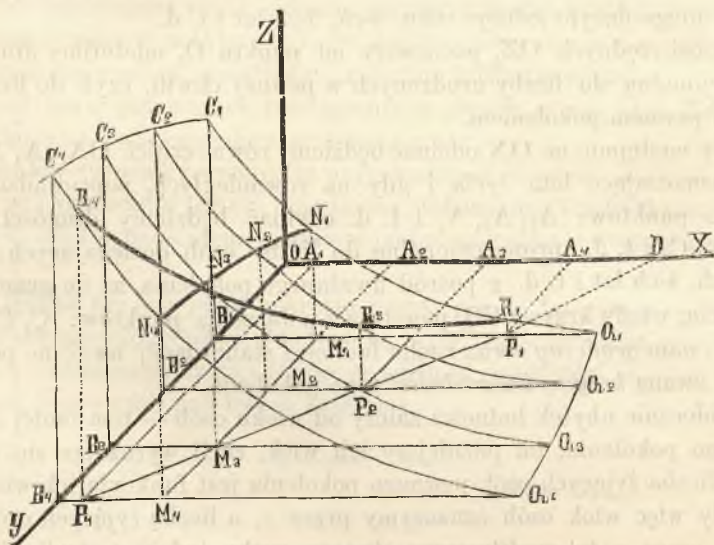


Fig. 2.

Niech punkt O wyobraża nam pewną stałą chwilę, np. erę chrześcijańską.

Na osi OY odetnijmy długość OB_1 proporcjonalną do czasu t_1 , w którym osoby należące do pewnego pokolenia się urodziły. Prosta $B_1 C_1$, niech oznacza długość proporcjonalną do liczby urodzonych, a krzywa $C_1 Q_1$ — obraz śmiertelności pokolenia t_1 . — Wtedy oczywiście krzywa $C_2 Q_2$ będzie obrazem śmiertelności dla pokolenia $OB_2 = t_2$; krzywa $C_3 Q_3$ — dla pokolenia $OB_3 = t_3$ i t. d.

Tak byłoby, gdyby członkowie tego samego pokolenia rodzili się w jednej chwili. Ponieważ zaś dzieje się przeciwnie, mianowicie osoby rodzą się w różnych chwilach czasu określającego pewne pokolenie, zatem jeżeli nakoniec okresy pokoleniowe podzielimy na bardzo małe, na nieograniczenie małe cząsteczki, tak że dotąd znacznie od siebie oddalone punkty B_1, B_2, B_3 i t. d.

będą nieskończenie blisko siebie położone, a proste $B_1 C_1, B_2 C_2, B_3 C_3$ i t. d. — linijami proporcjonalnymi do nieograniczenie małej liczby urodzonych w ciągu nieskończenie krótkiego czasu, — wtedy krzywe $C_1 Q_1, C_2 Q_2, C_3 Q_3$ i t. d. utworzą jedną powierzchnię $C_1 C_4 Q_4 Q_1$, której równaniem jest:

$$z = f(x, t)$$

i która daje nam graficzny obraz ruchu ludności, należącej do pokolenia urodzonych w czasie od $OB_1 = t_1$ do $OB_4 = t_4$.

Wprawdzie, rozważać nieograniczenie małą liczbę osób urodzonych w ciągu nieograniczenie krótkiego czasu, a tem bardziej — chcieć badać prawo ich śmiertelności, w obec praktyki, wydaje się czemś niedorzecznem. Lecz ponieważ z jednej strony, ciągłość w ruchu ludności jest oczywistą, a tem samem uczynione przez nas założenie jest w zasadzie prawdziwe i my chcemy nadać badaniu tego ruchu podstawy teoretyczne, które dopiero w swych ostatecznych rezultatach do praktyki zamierzamy stosować; zatem ta pozorna niewłaściwość nie nas tu nie potrzebuje obchodzić i dla tego też, zaznaczywszy ją teraz, w dalszym ciągu zwracać na nią uwagi nie będziemy.

Równanie $z = f(x, t)$ i za niem idąca powierzchnia $C_1 C_4 Q_4 Q_1$ są ideałem, do którego badanie ludzkiej śmiertelności dążyć powinno; znalazłszy bowiem kształt funkcji $z = f(x, t)$, bylibyśmy w stanie rozwiązać wszelkie zadania, jakie ludzka śmiertelność nastręczyć może.

Gdyby nam chodziło np. o roczne prawdopodobieństwo dożycia x_1 lat liczącej osoby i należącej do urodzonych w chwili t_1 , dość byłoby w (2) podstawić: $t = t_1$, raz $x = x_1$, drugi raz $x = x_1 + 1$, a iloraz:

$$p = \frac{f(x_1 + 1, t_1)}{f(x_1, t_1)}$$

dałby nam poszukiwane prawdopodobieństwo.

Chcąc dać przykład użycia powierzchni $C_1 C_4 Q_4 Q_1$, przypuścimy, że nam chodzi o liczbę żyjących w wieku x_2 , z pośród urodzonych w chwili t_3 .

Na osi OX odetnijmy długość $OA_2 = x_2$ i przez punkt A_2 przeprowadźmy płaszczyznę równoległą od YOZ. Na osi OY odetnijmy długość $OB_3 = t_3$ i przez punkt B_3 przeprowadźmy płaszczyznę równoległą od XOZ. Obie te płaszczyzny przetną się według prostej, której długość $M_3 N_3$ przedstawia nam liczbę żyjących w wieku x_2 , z pośród urodzonych w chwili $OB_3 = t_3$.

Gdy dla każdej chwili t oznaczymy punkt podobny do N_3 , to pokaże się, że krzywa $N_1 N_2 N_3 N_4$ przecięcia powierzchni $C_1 C_4 Q_4 Q_1$ przez płaszczyznę równoległą od YOZ, określa nam żyjących w wieku x_2 z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_4 . Przecięcie równoległe od płaszczyzny YOZ, nazywać będziemy: *przecięciem pierwszego rodzaju* albo *przecięciem równienników*.

Przez punkt M_3 przeprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny XOY i przecinającą płaszczyzny XOZ i YOZ pod kątem 45° .

Przecięcie tej płaszczyzny z płaszczyzną $C_3 B_3 Q_3$ daje również prostą $M_3 N_3$, której długość przedstawia obecnie liczbę żyjących w chwili $OB_3 + B_3 M_3 = t_3 + x_2$, z pośród urodzonych w czasie t_3 .

Podobnie długość $P_2 R_2$ reprezentuje liczbę żyjących w chwili $OB_2 + B_2 P_2 = t_2 + OA_3 = t_2 + x_3$, z pośród urodzonych w czasie t_2 .

Ponieważ zaś widocznie:

$$\begin{aligned} OB_3 + B_3 M_3 &= OB_2 + B_2 P_2 = OD \\ \text{t. j.} \quad t_3 + x_2 &= t_2 + x_3 = OD \end{aligned}$$

zatem długości: $M_3 N_3$ i $P_2 R_2$ oznaczają *współcześnie* żyjących w chwili OD, z pośród urodzonych w czasie t_3 i t_2 .

Gdy w podobny sposób dalej rozumować będziemy, to pokaże się, że przecięcie $R_1 R_2 N_3 R_4$ powierzchni śmiertelności, przez płaszczyznę prostopadłą do XOY i pochyloną do płaszczyzn XOZ i YOZ pod kątem 45° , jest krzywą określającą *współcześnie*, mianowicie w chwili OD żyjących, z pośród osób urodzonych w czasie od $OB_1 = t_1$ do $OB_4 = t_4$. Przecięcie to nazywać będziemy *przecięciem drugiego rodzaju*, albo *przecięciem współczesnych*.

Oba te rodzaje przecięć, odgrywać będą w następstwie bardzo ważną rolę, a obecnie już dają nam związek zachodzący pomiędzy chwilą urodzenia, wiekiem osoby i chwilą dojścia do tego wieku.

Jeżeli np. raz na zawsze, chwilę urodzenia oznaczmy przez t , wiek przez x , a chwilę dojścia do wieku x —przez T , to:

$$(3) \quad T = t + x$$

Z równości tej:

1-o znając chwilę urodzenia t i wiek osoby x , znajdziemy chwilę T , w której ta osoba dosięga x lat.

2-o znając wiek x i chwilę T , w której osoba dosięga x lat, znajdziemy chwilę urodzenia się tej osoby, bo z (3):

$$(3') \quad t = T - x$$

3-o wreszcie, znając chwilę urodzenia t i chwilę T , w której pewna osoba dosięga niewiadomego wieku x , znajdziemy ten wiek, gdyż z (3):

$$(3'') \quad x = T - t$$

III. OGÓŁY ŻYJĄCYCH.

Niech będzie prostokątny układ osi współrzędnych: $OXYZ$ (fig 3) i powierzchnia śmiertelności $C_1 C_2 Q_1 Q_2$ pokolenia urodzonych w czasie od

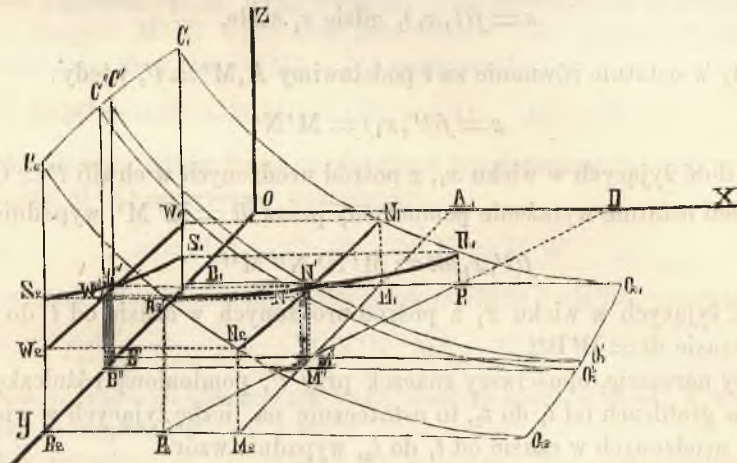


Fig. 3.

$OB_1 = t_1$ do $OB_2 = t_2$, której równaniem jest:

$$z = f(t, x)$$

Gdy założymy $x = 0$, równanie powyższe zamienia się na

$$z = f(t)$$

i przedstawia równanie krzywej urodzeń $C_1 C_2$.

Jeżeli w ostatnie równanie podstawimy za t wartość $OB' = t'$, wtedy na z otrzymamy wartość:

$$B'C' = z' = f(t')$$

która nam przedstawia liczbę urodzonych w chwili t' .

Jeżeli dalej chcemy otrzymać liczbę urodzonych w czasie od t' do $t' + dt$ równym $B'B''$, to należy długość $B'C'$ pomnożyć przez $B'B''$, zkad się pokazuje, że iloczyn $f(t')dt = B'C'B''$, albo opuszczając znaczek przy t' — w ogóle iloczyn $f(t)dt$, oznacza liczbę urodzonych w ciągu nieograniczenie krótkiego czasu dt .

Całkując nareszcie różniczkę $f(t)dt$ w granicach od t_1 do t_2 i oznaczając liczbę urodzonych w czasie od t_1 do t_2 przez $Z(0)$ (od wyrazów *żyjący* w wieku lat *zero*), otrzymamy wzór:

$$(4) \quad Z(0) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

przedstawiający nam *ogół urodzonych* w okresie od t_1 do t_2 , którego graficznym obrazem jest powierzchnia $B_1 C_1 C_2 B_2$.

Na osi OX odetnijmy długość OA_1 proporcjonalną do wieku x_1 i przez punkt A_1 przeprowadźmy przecięcie pierwszego rodzaju. Krzywa $N_1 N_2$ jest krzywą żyjących w wieku x_1 , z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 . — Jęj równaniem:

$$z = f(t, x_1), \text{ gdzie } x_1 \text{ stałe.}$$

Gdy w ostatnie równanie za t podstawimy $A_1 M' = t'$, wtedy:

$$z = f(t', x_1) = M' N'$$

oznacza ilość żyjących w wieku x_1 , z pośród urodzonych w chwili $t' = OB'$.

Jeżeli ostatnie wyrażenie pomnożymy przez $dt = M' M''$ wypadnie:

$$f(t', x_1) dt = M' N' N'' M''$$

t. j. ilość żyjących w wieku x_1 z pośród urodzonych w czasie od t' do $t' + dt$ czyli w czasie $dt = B' B''$.

Gdy nareszcie, opuściwszy znaczek przy t' , pomienioną różniczkę zcałkujemy w granicach od t_1 do t_2 , to ostatecznie na liczbę żyjących w wieku x_1 , z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 , wypadnie wzór:

$$(5) \quad Z(x_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x_1) dt, \text{ gdzie } x_1 \text{ stałe}$$

którego obrazem graficznym jest powierzchnia $M_1 N_1 N_2 M_2$ albo, co na jedno wychodzi, jęj rzut na płaszczyznę YOZ t. j. powierzchnia $B_1 W_1 W_2 B_2$.

Jest to *ogół żyjących pierwszego rodzaju*, czyli *ogół żyjących równienników* w wieku x_1 lat.

Oczywiście, osoby należące do tego ogółu nie wchodzą współcześnie w wiek x_1 , wcześnięj bowiem urodzeni — wcześnięj, a późnięj urodzeni — późnięj kończą x_1 lat. Z łatwością wszakże można oznaczyć granice czasu, w którym to następuje, gdyż widocznie urodzeni w chwili $OB_1 = t_1$, dosięgają x_1 lat w chwili $T_1 = OB_1 + B_1 M_1 = t_1 + x_1$; urodzeni zaś w chwili $OB_2 = t_2$, dosięgają x_1 lat w chwili $T_2 = OB_2 + B_2 M_2 = t_2 + x_1$, czyli urodzeni w czasie od t_1 do t_2 , kończą x_1 lat w czasie od $T_1 = t_1 + x_1$ do $T_2 = t_2 + x_1$, wskutek czego w tym tylko okresie czasu poszukiwać ich należy.

Np. — gdyby nam chodziło o liczbę tych, którzy dożyli 15-u lat z pośród urodzonych w ciągu 1865-go roku t. j. od 1 stycznia 1865 r. do 1 stycznia 1866 r., to ponieważ tutaj: $t_1 = 1865$, $t_2 = 1866$, $x_1 = 15$, — przeto należałoby ich szukać w czasie:

$$\text{od } T_1 = t_1 + x_1 = 1865 + 15 = 1880 \text{ (1 styczeń)}$$

$$\text{do } T_2 = t_2 + x_1 = 1866 + 15 = 1881 \text{ (1 styczeń)}$$

co znaczy, że wszyscy urodzeni w ciągu 1865-go roku, kończą 15 lat w ciągu 1880-go roku.

Odetnijmy teraz na osi OX (fig. 3) długość OD, proporcjonalną do czasu T i przez punkt D przeprowadźmy przecięcie drugiego rodzaju. Otrzymana na przecięciu krzywa $R_1 N' R_2$ daje nam obraz żyjących współcześnie w chwili T, z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 .

Jeżeli z punktu np. M' wyprowadzimy linię prostopadłą do płaszczyzny XOY, to długość M'N' wyobrażać nam będzie ilość żyjących w chwili T, z pośród urodzonych w chwili $OB' = t'$ i mających lat:

$$B'M' = (OB' + B'M') - OB' = OD - OB' = T - t'$$

Wskutek tego, gdy w funkcję $f(x, t)$ za x podstawimy $T - t'$, za $t - t'$, to na długość M'N' otrzymamy wyrażenie:

$$z = f\{(T - t'), t'\} = M'N' = B'W'$$

Gdy ostatnie wyrażenie pomnożymy przez $dt = M'M'' = B'B''$, wtedy iloczyn:

$$(a) \quad f\{(T - t'), t'\} dt = M'N'N''M'' = B'W'W''B''$$

przedstawia, w rzucie na płaszczyznę YOZ, ilość żyjących w chwili T, z pośród urodzonych w czasie od t' do $t' + dt$.

Jeżeli to samo, co dla punktu M', uczynimy dla wszystkich punktów prostej $P_1 P_2$ i rezultaty podobne do (a) dodamy do siebie, wówczas na sumę otrzymamy całkę:

$$(6) \quad S(T) = \int_{t_1}^{t_2} f\{(T - t), t\} dt, \text{ gdzie } T \text{ stałe —}$$

dającą nam ogół żyjących w chwili T z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 . Jego graficznym obrazem jest powierzchnia $B_1 S_1 S_2 B_2$, będąca rzutem przecięcia $P_1 R_1 R_2 P_2$ na płaszczyznę YOZ ($P_1 R_1 R_2 P_2 = B_1 S_1 S_2 B_2 \times \sqrt{2}$).

Tak wyrażoną liczbę żyjących, nazwiemy: *ogółem żyjących drugiego rodzaju*, albo *ogółem współczesnych*.

W praktyce pozwala nam go obliczyć spis ludności i dla tego też za jego symbol przyjęliśmy literę S, od wyrazu *spis*.

Osoby należące do tego rodzaju ogółu są naturalnie w różnym wieku, wcześniej bowiem urodzeni są starsi, a później urodzeni — młodszy. Nie trudno jednak oznaczyć granice wieku tych ludzi. Z figury 3-iej widać, że wiek ich zawiera się pomiędzy:

$$x_1 = B_2 P_2 = (OB_2 + B_2 P_2) - OB_2 = OD - OB_2 = T - t_2, \text{ a}$$

$$x_2 = B_1 P_1 = (OB_1 + B_1 P_1) - OB_1 = OD - OB_1 = T - t_1$$

Np. — wiek urodzonych w 1865-m roku, t. j. od 1 stycznia 1865 r. do 1 stycznia 1866 r., w d. 1 stycznia 1883 r. zawiera się pomiędzy 17-m i 18-m rokiem; bo tu: $t_1 = 1865$, $t_2 = 1866$, $T = 1883$, a więc:

$$x_1 = T - t_2 = 1883 - 1866 = 17$$

$$x_2 = T - t_1 = 1883 - 1865 = 18.$$

Streszczając powiedziane w niniejszym rozdziale, widzimy, że ogół żyjących w dwojaki sposób traktować można — albo jako zbiór osób pewnego pokolenia, mających pewien ściśle określony wiek; albo jako zbiór osób pewnego pokolenia, żyjących w pewnej oznaczonej chwili współcześnie.

Rozróżnienie to, będzie nam w następstwie nadzwyczaj przydatne.

IV. OGÓŁY ZMARŁYCH.

Liczbę zmarłych w trojaki sposób oznaczać można:

1-o albo, z pośród urodzonych w pewnym okresie czasu, można szukać liczby zmarłych w wieku zawartym w pewnych granicach lat;

2-o albo, szukać można liczby zmarłych w czasie zawartym pomiędzy dwu pewnemi chwilami, również z pośród urodzonych w danym okresie czasu;

3-o albo wreszcie, można szukać liczby zmarłych w wieku zawartym w pewnych granicach lat i w czasie zawartym pomiędzy dwu pewnemi chwilami.

Oznaczeniem każdego z tych trzech ogółów zmarłych, oddzielnie się zajmujemy.

1-o *Ogół zmarłych pierwszego rodzaju*. Chodzi nam o liczbę zmarłych w wieku od x_1 do x_2 lat, z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 .

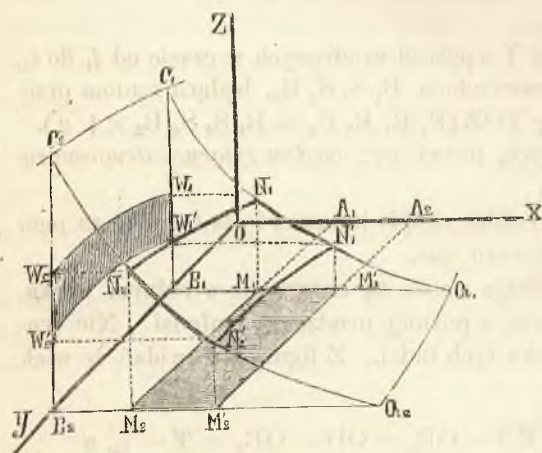


Fig 4.

Niech będzie układ trzech osi współrzędnych i powierzchnia śmiertelności $C_1 C_2 Q_2 Q_1$, urodzonych w czasie od $OB_1 = t_1$ do $OB_2 = t_2$ (fig. 4).

Na osi OX odetnijmy długość $OA_1 = x_1$ i przez punkt A_1 przeprowadźmy przecięcie pierwszego rodzaju. Wtedy otrzymamy powierzchnię płaską $M_1 N_1 N_2 M_2$ równą swemu rzutowi $B_1 W_1 W_2 B_2$, który — jak nam wiadomo — oznacza

ogół żyjących w wieku lat x_1 z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 .

Odetnijmy następnie na osi OX długość $OA_2 = x_2$ i przez punkt A_2 przeprowadźmy również przecięcie pierwszego rodzaju. Wtedy znów, otrzyma-

my powierzchnię płaską $M'_1 N'_1 N'_2 M'_2$ równą swemu rzutowi $B_1 W'_1 W'_2 B_2$, który oznacza liczbę żyjących w wieku x_2 .

Różnica obu pomienionych rzutów:

$$B_1 W_1 W_2 B_2 - B_1 W'_1 W'_2 B_2 = W'_1 W_1 W_2 W'_2$$

czyli rzut części powierzchni śmiertelności $N'_1 N_1 N_2 N'_2$ na płaszczyznę YOZ, wyobraża nam oczywiście liczbę zmarłych w wieku od x_1 do x_2 lat, z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 , t. j. ogół zmarłych pierwszego rodzaju, którego analitycznym obrazem jest wzór:

$$(7) \quad U_1 = \int_{t_1}^{t_2} f(x_1, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(x_2, t) dt$$

Zachodzi pytanie, w jakim czasie szukać należy tych zmarłych?—Widocznie w czasie zawartym pomiędzy chwilą, w której najwcześniej urodzeni dosięgają najniższego wieku x_1 , a chwilą, w której najpóźniej urodzeni dosięgają najpóźniejszego wieku x_2 .

Ze zaś najwcześniejszą tu uważaną datą urodzeń jest $OB_1 = t_1$, najpóźniejszą — chwila $OB_2 = t_2$, zatem należący do rozważanej liczby zmarłych umierają w czasie:

$$\text{od } T_1 = OB_1 + B_1 M_1 = t_1 + x_1$$

$$\text{do } T_2 = OB_2 + B_2 M'_2 = t_2 + x_2$$

t. j. powyżej znaleziony ogół zmarłych umiera w ciągu:

$$T_2 - T_1 = (t_2 + x_2) - (t_1 + x_1) = (t_2 - t_1) + (x_2 - x_1) \text{ lat.}$$

Np. — jeżeli nam chodzi o zmarłych w wieku od 12 do 13 lat, z pośród urodzonych w 1870-m roku, to ponieważ tu: $t_1 = 1870$, $t_2 = 1871$, $x_1 = 12$, $x_2 = 13$, zatem szukać ich należy w czasie od $T_1 = t_1 + x_1 = 1870 + 12 = 1882$ roku (1 stycznia) do $T_2 = t_2 + x_2 = 1871 + 13 = 1884$ roku (1 stycznia), t. j. urodzeni w ciągu *jednego* — 1870-go roku, w 13-m roku życia, umierają w ciągu: $T_2 - T_1 = 1884 - 1882 = \text{dwóch lat}$, mianowicie w ciągu 1882-go i 1883-go roku.

Pomimo to, dotąd takich zmarłych poszukiwali statystycy tylko w ciągu *jednego* roku i dla tego też wielką jest zasługą Knapp'a, że pierwszy matematycznie ten błąd statystykom wytknął.

Zbytecznem chyba dodawać, że powierzchnia $W_1 C_1 C_2 W_2$ oznacza liczbę zmarłych przed dojściem do lat x_1 , z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 ; a powierzchnia $B_1 W'_1 W'_2 B_2$ — liczbę zmarłych w wieku starszym od x_2 lat.

2-o *Ogół zmarłych drugiego rodzaju.* Chodzi nam teraz, o zmarłych w czasie od chwili T_1 do T_2 , z pośród urodzonych w czasie od $OB_1 = t_1$ do $OB_2 = t_2$ (fig 5).

Na osi OX odetnijmy długość $OD_1 = T_1$ i $OD_2 = T_2$. Przez punkt D_1 i D_2 przeprowadźmy przecięcia drugiego rodzaju. Rzut powierzchni $P_1 R_1 R_2 P_2$ na płaszczyznę YOZ , t. j. powierzchnia $B_1 S_1 S_2 B_2$, oznacza nam ogół żyjących w chwili T_1 ; rzut powierzchni $P'_1 R'_1 R'_2 P'_2$ na płaszczyznę YOZ , czyli powierzchnia $B_1 S'_1 S'_2 B_2$, oznacza ogół żyjących w chwili T_2 .

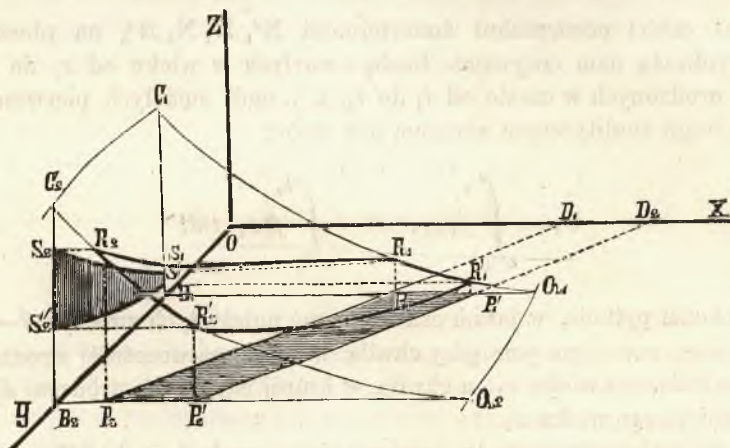


Fig. 5

Różnica obu pomienionych powierzchni:

$$B_1 S_1 S_2 B_2 - B_1 S'_1 S'_2 B_2 = S'_1 S_1 S_2 S'_2$$

czyli rzut części powierzchni śmiertelności $R'_1 R_1 R_2 R'_2$ na płaszczyznę YOZ , przedstawia szukany ogół zmarłych w czasie od T_1 do T_2 , z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 .

Osoby te umarły w wieku:

$$\text{od } x_1 = B_2 P_2 = (OB_2 + B_2 P_2) - OB_2 = OD_1 - OB_2 = T_1 - t_2$$

$$\text{do } x_2 = B_1 P'_1 = (OB_1 + B_1 P'_1) - OB_1 = OD_2 - OB_1 = T_2 - t_1$$

wskutek czego, analitycznym obrazem ogółu zmarłych drugiego rodzaju jest wzór:

$$(8) \quad U_2 = \int_{t_1}^{t_2} f_1(T_1 - t, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} f_1(T_2 - t, t) dt$$

a okres lat życia zmarłych wynosi: $x_2 - x_1 = (T_2 - t_1) - (T_1 - t_2) = (T_2 - T_1) + (t_2 - t_1)$.

Np. — zmarli w 1880-m roku, t. j. od 1 stycznia 1880 r. do 1 stycznia 1881 r., z pośród urodzonych od 1 stycznia 1870 r. do 1 stycznia 1871 r. — ponieważ $t_1 = 1870$, $t_2 = 1871$, $T_1 = 1880$, $T_2 = 1881$ — posiadają lat od $x_1 = T_1 - t_2 = 1880 - 1871 = 9$ do $x_2 = T_2 - t_1 = 1881 - 1870 = 11$, t. j. umierają w 10-ym i 11-ym roku życia i są objęci: $11 - 9 = 2$ -u letnim okresem życia.

3-o *Ogół zmarłych trzeciego rodzaju*. Chciejmy nareszcie oznaczyć liczbę zmarłych w czasie od T_1 do T_2 i w wieku od x_1 do x_2 lat życia.

W tym celu na osi OX (fig. 6) odetnijmy długość $OA_1 = x_1$ i $OA_2 = x_2$, oraz $OD_1 = T_1$ i $OD_2 = T_2$.

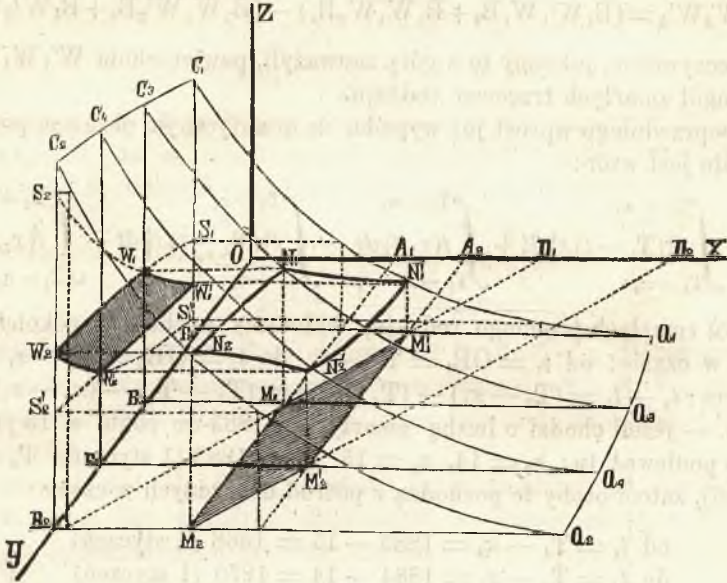


Fig. 6.

Przez punkty A_1 i A_2 przeprowadźmy przecięcia pierwszego rodzaju, przez punkty D_1 i D_2 — przecięcia drugiego rodzaju. Rzut wyciętej w ten sposób części powierzchni śmiertelności $N'_1 N_1 N'_2 N'_2$ na płaszczyznę YOZ , t. j. powierzchnia $W'_1 W_1 W_2 W'_2$, jest graficznym obrazem poszukiwanej liczby zmarłych w wieku od x_1 do x_2 lat i w czasie od T_1 do T_2 .

Istotnie —

- powierzchnia $B_1 W'_1 W_1 B_3$ oznacza liczbę żyjących w wieku od x_1 do x_2 lat, w chwili T_1 , z pośród urodzonych w czasie: od $t_1 = OB_1 = OD_1 - B_1 M'_1 = T_1 - x_2$ do $t_3 = OB_3 = OD_1 - B_3 M_1 = T_1 - x_1$;
 - powierzchnia $B_3 W_1 W_2 B_2$ oznacza liczbę tych, którzy od chwili T_1 do T_2 dosięgają x_1 lat, z pośród urodzonych w czasie: od $t_3 = OB_3 = OD_1 - B_3 M_1 = T_1 - x_1$ do $t_2 = OB_2 = OD_2 - B_2 M_2 = T_2 - x_1$;
 - powierzchnia $B_4 W'_2 W_2 B_2$ oznacza liczbę żyjących w wieku od x_1 do x_2 , w chwili T_2 , z pośród urodzonych w czasie: od $t_4 = OB_4 = OD_2 - B_4 M'_2 = T_2 - x_2$ do $t_2 = OB_2 = OD_2 - B_2 M_2 = T_2 - x_1$;
 - nareszcie powierzchnia $B_1 W'_1 W'_2 B_4$ oznacza liczbę tych, którzy w czasie od T_1 do T_2 dosięgają x_2 lat, z pośród urodzonych w czasie: od $t_1 = OB_1 = OD_1 - B_1 M'_1 = T_1 - x_2$ do $t_4 = OB_4 = OD_2 - B_4 M'_2 = T_2 - x_2$. —
- A ponieważ z jednej strony, różnica — pomiędzy sumą tych, którzy w chwili T_1 mieli lat od x_1 do x_2 i tych, którzy w czasie od T_1 do T_2 ukończyli x_1 lat, a sumą tych, którzy w chwili T_2 mają lat od x_1 do x_2 i tych, którzy

w czasie od T_1 do T_2 ukończyli x_2 lat — stanowi liczbę zmarłych w wieku od x_1 do x_2 lat i w czasie od T_1 do T_2 ; z drugiej zaś strony, właśnie powierzchnia:

$$W'_1 W_1 W_2 W'_2 = (B_1 W'_1 W_1 B_3 + B_3 W_1 W_2 B_2) - (B_2 W_2 W'_2 B_4 + B_4 W'_2 W_1 B_1)$$

zatem rzeczywiście, jakeśmy to z góry zauważyli, powierzchnia $W'_1 W_1 W_2 W'_2$ stanowi ogół zmarłych trzeciego rodzaju.

Z poprzedniego wprost już wypada, że analitycznym obrazem pomienionego ogółu jest wzór:

$$(9) \quad U_3 = \int_{T_1 - x_1}^{T_1 - x_1} f\{(T_1 - t), t\} dt + \int_{T_1 - x_1}^{T_2 - x_1} f(x_1, t) dt - \int_{T_2 - x_2}^{T_2 - x_1} f\{(T_2 - t), t\} dt - \int_{T_1 - x_2}^{T_2 - x_2} f(x_2, t) dt$$

Ogół zmarłych trzeciego rodzaju, widocznie pochodzi z pokolenia urodzonych w czasie: od $t_1 = OB_1 = T_1 - x_2$ do $t_2 = OB_2 = T_2 - x_1$ i obejmuje okres: $t_2 - t_1 = (T_2 - x_1) - (T_1 - x_2) = (T_2 - T_1) - (x_2 - x_1)$ lat.

Np. — jeżeli chodzi o liczbę zmarłych w 1883-im roku, w 15-ym roku życia, to ponieważ tu: $x_1 = 14$, $x_2 = 15$, $T_1 = 1883$ (1 styczeń), $T_2 = 1884$ (1 styczeń), zatem osoby te pochodzą z pośród urodzonych w czasie:

$$\text{od } t_1 = T_1 - x_2 = 1883 - 15 = 1868 \text{ (1 styczeń)}$$

$$\text{do } t_2 = T_2 - x_1 = 1884 - 14 = 1870 \text{ (1 styczeń)}$$

t. j. z okresu urodzonych w przeciągu $1870 - 1868 =$ dwóch lat.

Osoby, które 1 stycznia 1883 r. są w 15-m roku życia, należą do urodzonych w czasie: od $T_1 - x_2 = 1883 - 15 = 1868$ (1 styczeń) do $T_1 - x_1 = 1883 - 14 = 1869$ (1 styczeń).

Osoby, które w czasie od 1 stycznia 1883 r. do 1 stycznia 1884 r. kończą 14 lat, należą do urodzonych w czasie: od $T_1 - x_1 = 1883 - 14 = 1869$ (1 styczeń) do $T_2 - x_1 = 1884 - 14 = 1870$ (1 styczeń).

Osoby, które dnia 1 stycznia 1884 roku mają 15-ty rok, należą do urodzonych w czasie: od $T_2 - x_2 = 1884 - 15 = 1869$ (1 stycznia) do $T_2 - x_1 = 1884 - 14 = 1870$ (1 stycznia).

Nareszcie osoby, które w czasie od 1 stycznia 1883 do 1 stycznia 1884 r. kończą 15 lat, należą do urodzonych w czasie: od $T_1 - x_2 = 1883 - 15 = 1868$ (1 styczeń) do $T_2 - x_2 = 1884 - 15 = 1869$ (1 styczeń).

Powiedzieliśmy, że ogół zmarłych w wieku od x_1 do x_2 lat i w czasie od T_1 do T_2 , należy do pokolenia urodzonych w czasie od $OB_1 = t_1$ do $OB_1 = t_2$ (fig. 6). Ogół ten jednak nie obejmuje, ani wszystkich zmarłych w wieku od x_1 do x_2 lat, z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 , ani tych wszystkich, którzy z pośród urodzonych w pomienionym okresie czasu, umierają w czasie od T_1 do T_2 .

Rzeczywiście — ogół zmarłych w wieku od x_1 do x_2 reprezentuje powierzchnia $W'_1 S_1 W_2 S'_2$, t. j. znana nam już powierzchnia $W'_1 W_1 W_2 W'_2$ plus dwie inne: $W'_1 S_1 W_1$ i $W'_2 W_2 S'_2$.

Pierwsza z nich, czyli $W'_1 S_1 W_1$, przedstawia liczbę zmarłych *przed* chwilą T_1 w wieku *późniejszym* od x_1 lat, z pośród urodzonych od $t_1 = T_1 - x_1$ do $t_2 = T_1 - x_1$, a więc analitycznie wyraża się wzorem:

$$\int_{T_1 - x_2}^{T_1 - x_1} f(x_1, t) dt - \int_{T_1 - x_2}^{T_1 - x_1} f_1(T_1 - t, t) dt$$

Druga, czyli $W'_2 W_2 S'_2$, przedstawia liczbę zmarłych *po* chwili T_2 *przed* dojściem do x_2 lat, z pośród urodzonych w czasie od $t_1 = T_2 - x_2$ do $t_2 = T_2 - x_1$, wskutek czego może być wyrażoną wzorem:

$$\int_{T_2 - x_2}^{T_2 - x_1} f_1(T_2 - t, t) dt - \int_{T_2 - x_2}^{T_2 - x_1} f(x_2, t) dt$$

Naodwrot, ogół zmarłych w czasie od T_1 do T_2 , z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 , przedstawia nam powierzchnia $S'_1 W'_1 S_2 W_2$, czyli znana nam już powierzchnia $W'_1 W_1 W_2 W'_2$ *plus* dwie inne, mianowicie: $W_1 S_2 W_2$ i $W'_2 S'_1 W'_1$.

Pierwsza, t. j. $W_1 S_2 W_2$, stanowi liczbę zmarłych *po* chwili T_1 *przed* dojściem do x_1 lat, z pośród urodzonych w czasie od $t_1 = T_1 - x_1$ do $t_2 = T_2 - x_1$, zatem przedstawia się wzorem:

$$\int_{T_1 - x_1}^{T_2 - x_1} f_1(T_1 - t, t) dt - \int_{T_1 - x_1}^{T_2 - x_1} f(x_1, t) dt$$

Druga, czyli $W'_2 S'_1 W'_1$, stanowi liczbę zmarłych *przed* czasem T_2 *po* skończeniu x_2 lat, z pośród urodzonych w czasie od $t_1 = T_1 - x_2$ do $t_2 = T_2 - x_2$, i przedstawia się wzorem:

$$\int_{T_1 - x_2}^{T_2 - x_2} f(x_2, t) dt - \int_{T_1 - x_2}^{T_2 - x_1} f_1(T_2 - t, t) dt$$

Wiadomo powszechnie, że dotąd zwykle wyciąga się, z ksiąg obejmujących akta zejść, właśnie liczby osób zmarłych w pewnym wieku i w ciągu pewnego czasu, t. j. to cośmy ogółem zmarłych trzeciego rodzaju nazwali. Z powyższego pokazuje się, jak złożone znaczenie mają tego rodzaju dane, a jednak dotychczas, t. j. do czasu Knapp'a i Zeuner'a, nie pojmowano wcale tego znaczenia i dla tego też, mimołożonych trudów, nie otrzymano jeszcze rezultatów o prawdziwie naukowej wartości.

V. KOMBINOWANE OGÓŁY ŻYJĄCYCH I ZMARŁYCH.

Oprócz opisanych powyżej ogółów żyjących i zmarłych, można pomyśleć jeszcze inne, które *kombinowanemi* nazwiemy dla tego, że ich granice brać będziemy z różnego rodzaju znanych nam już ogółów.

Tego rodzaju ogółów można natworzyć wiele, my jednak tutaj dla żyjących rozróżnimy, dla przykładu, dwa tylko następujące przypadki:

1-o Ogół żyjących, z pośród urodzonych *po* roku t_1 , którzy *przed* rokiem T_2 ukończyli x lat.

Skoro osoby te przed rokiem T_2 ukończyły x lat, zatem urodzić się musiały przed rokiem $t_2 = T_2 - x$, t. j. należą do pokolenia urodzonych w czasie od t_1 do $t_2 = T_2 - x$ i najwcześniej dosięgają x lat w roku $T_1 = t_1 + x$, dają się więc wyrazić wzorem:

$$\int_{t_1}^{t_2 = T_2 - x} f(x, t) dt, \text{ gdzie } x \text{ stałe.}$$

Np. — ogół żyjących, z pośród urodzonych po 1 styczniu 1870 r., którzy przed 1 stycznia 1880 r. ukończyli 8 lat, należy do pokolenia urodzonych w czasie od 1 stycznia 1870 r. do $t_2 = T_2 - x = 1880 - 8 = 1872$ r. (1 stycznia) i jednostki do niego należące dosięgają 8-u lat najwcześniej $t_1 + x = 1870 + 8 = 1878$ r. (1 stycznia).

2-o Ogół żyjących w chwili T , z pośród urodzonych *przed* rokiem t_2 i mających *co najwyżej* x_2 lat.

Osoby tego ogółu należą oczywiście do pokolenia urodzonych w czasie od $t_1 = T - x_2$ do t_2 i mają lat od $x_1 = T - t_2$ do x_2 , a wzór odpowiedni posiada kształt:

$$\int_{t_1 = T - x_2}^{t_2} f\{(T - t), t\} dt, \text{ gdzie } T \text{ stałe.}$$

Np. — ogół żyjących w d. 1 stycznia 1883 r., w którym najstarsi mają 20 lat i są urodzeni przed 1 stycznia 1868 r., należy do pokolenia urodzonych w czasie od $t_1 = T - x_2 = 1883 - 20 = 1863$ r. (1 styczeń) do 1 stycznia 1868 r., oraz obejmuje mających od $x_1 = T - t_2 = 1883 - 1868 = 15$ do 20 lat.

Równie łatwo można w rozmaity sposób kombinować ogóły zmarłych. — Tak np. przypuścimy, że nam chodzi:

1-o O liczbę zmarłych *po* chwili T_1 *przed* ukończeniem x_2 lat, z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 ,

Odcinawszy na osi OX (fig. 7) $OA_2 = x_2$ i $OD_1 = T_1$, przez punkt A_2 przeprowadźmy przecięcie pierwszego rodzaju, a przez punkt D_1 — przecięcie drugiego rodzaju.

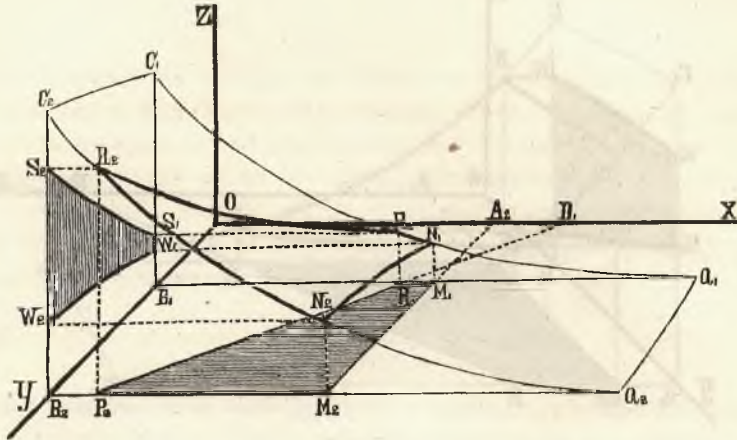


Fig. 7.

Wtedy, na powierzchni śmiertelności $C_1 C_2 Q_2 Q_1$, otrzymamy wycinek $N_1 R_1 R_2 N_2$, którego rzutem na płaszczyznę YOZ jest $W_1 S_1 S_2 W_2$.

Powierzchnia $B_1 S_1 S_2 B_2$ przedstawia liczbę żyjących w chwili T_1 , w wieku od $B_2 P_2 = OD_1 - OB_2 = T_1 - t_2$ do $B_1 P_1 = OD_1 - OB_1 = T_1 - t_1$.

Powierzchnia $B_1 W_1 W_2 B_2$ — liczbę tych, którzy ukończyli x_2 lat w czasie od $OB_1 + B_1 M_1 = t_1 + x_2$ do $OB_2 + B_2 M_2 = t_2 + x_2$.

Ponieważ zaś różnica pomiędzy liczbą żyjących w chwili T_1 , a liczbą tych, którzy ukończyli x_2 lat — daje liczbę zmarłych po roku T_1 przed ukończeniem x_2 lat, z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 ; zatem powierzchnia $W_1 S_1 S_2 W_2$, jako właśnie równa: $B_1 S_1 S_2 B_2 - B_1 W_1 W_2 B_2$, daje nam graficzny obraz szukanego ogółu, którego analitycznym obrazem, jak to łatwo zrozumieć, jest wzór:

$$\int_{t_1}^{t_2} f\{(T_1 - t), t\} dt - \int_{t_1}^{t_2} f(x_2, t) dt$$

Osoby te umierają w czasie od T_1 do $T_2 = OB_2 + B_2 M_2 = t_2 + x_2$ i mają lat od $x_1 = B_2 P_2 = OD_1 - OB_2 = T_1 - t_2$ do x_2 .

Np. — liczba zmarłych po 1 styczniu 1875 r., przed ukończeniem 30-u lat, z pośród urodzonych w czasie od 1 stycznia 1850 r. do 1 stycznia 1860 r., mieści się pomiędzy zmarłymi od 1 stycznia 1875 r. do $1860 + 30 = 1890$ r. (1 stycznia). Zmarli mają od $1875 - 1860 = 15$ do 30 lat.

Łatwo sobie wyjaśnić znaczenie zagadnienia, w szczególnym przypadku, gdy $x_2 = T_1 - t_1$ t. j. $B_1 M_1 = B_1 P_1$, lub gdy $x_2 < T_1 - t_1$ t. j. $B_1 M_1 < B_1 P_1$.

VI. RACYJONALNY SPOSÓB PROWADZENIA SPISÓW LUDNOŚCI I KSIĄG ZMARŁYCH.

Powiedzieliśmy na wstępie, że zadaniem statystyki matematycznej jest podanie sposobu, w jaki statystyka praktyczna ma zbierać dane, aby te mogły służyć do celu, ku jakiemu badania naukowe dążyć powinny.

Najpierwszym zaś celem dla statystyki ruchu ludności jest — jakieśmy widzieli — otrzymanie danych tablicą I objętych, czyli prawdopodobieństw przeżycia roku przez osoby każdego wieku, t. j. — zatrzymując przyjętą przez nas symbolikę — ilości: p_1, p_2, p_3 i t. d., z których w ogóle:

$$(10) \quad p = \frac{Z(x_2)}{Z(x_1)}$$

gdzie $Z(x_1)$ oznacza liczbę osób żyjących w wieku x_1 , z pośród należących do pewnego pokolenia; $Z(x_2)$ — liczbę osób żyjących w wieku x_2 , z pośród należących do tego samego pokolenia.

Dążąc do takiego celu na podstawie dotąd przeprowadzonych rozumowań, wyobraźmy sobie (fig. 9) powierzchnię śmiertelności $C_1 C_2 Q_2 Q_1$ pokolenia

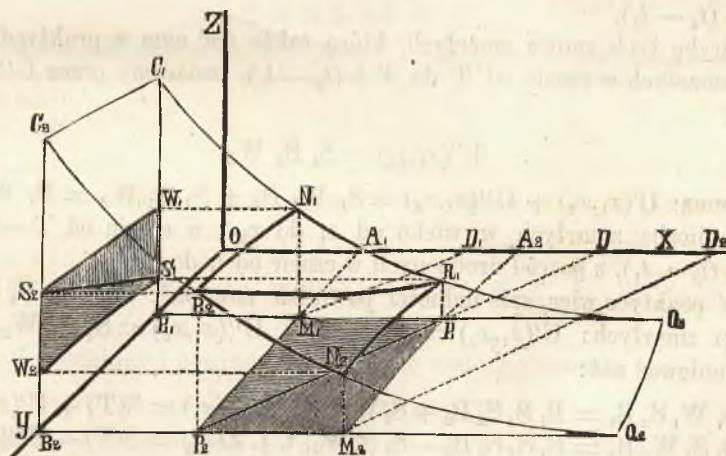


Fig. 9.

urodzonych w czasie od $OB_1 = t_1$ do $OB_2 = t_2$ i odcinawszy na osi OX długość $OD = T$, przez punkt D przeprowadźmy przecięcie drugiego rodzaju.

Rzut powierzchni $P_1 R_1 R_2 P_2$ na płaszczyznę YOZ daje powierzchnię $B_1 S_1 S_2 B_2 = S(T)$, która wyobraża liczbę żyjących w chwili T, z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 .

Ten ogół żyjących, w praktyce, otrzymać powinniśmy ze spisu ludności, odbytego w chwili T.

Osoby należące do pomienionego ogółu, posiadają od $x_1 = B_2 P_2 = OD - OB_2 = T - t_2$ do $x_2 = B_1 P_1 = OD - OB_1 = T - t_1$ lat.

Przez punkty P_1 i P_2 przeprowadźmy przecięcia pierwszego rodzaju. Wtedy powierzchnia $M_1 N_1 R_2 P_2$, równa swemu rzutowi $B_1 W_1 S_2 B_2 = Z(x_1)$, oznacza liczbę żyjących w wieku x_1 , a powierzchnia $P_1 R_1 N_2 M_2$, równa swemu rzutowi $B_1 S_1 W_2 B_2 = Z(x_2)$ — liczbę żyjących w wieku x_2 , z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 .

Pytanie zachodzi, jak w praktyce $Z(x_1)$ i $Z(x_2)$ odszukać można? —

Na zasadzie przeprowadzonych w poprzednich rozdziałach wywodów, łatwo zrozumieć, że powierzchnia $S_1 W_1 S_2$ oznacza liczbę zmarłych *przed* chwilą T w wieku od x_1 do x_2 , z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 , mianowicie zmarłych w czasie: od $T_1 = OB_1 + B_1 M_1 = t_1 + x_1 = OD_1 = OD - D_1 D = OD - M_1 P_2 = T - (t_2 - t_1)$ do T .

Liczbę tych zmarłych, którą w praktyce dać nam powinny odpowiednio prowadzone księgi zmarłych w czasie od $T - (t_2 - t_1)$ do T , oznaczmy przez $U'(x_1, x_2)$ — tak, że:

$$U'(x_1, x_2) = S_1 W_1 S_2$$

Powierzchnia $S_1 S_2 W_2$ oznacza liczbę zmarłych *po* chwili T również w wieku od x_1 do x_2 i z tegoż pokolenia, mianowicie zmarłych w czasie: od T do $T_2 = OB_2 + B_2 M_2 = t_2 + x_2 = OD_2 = OD + DD_2 = OD + P_1 M_2 = T + (t_2 - t_1)$.

Liczbę tych znowu zmarłych, którą także dać nam w praktyce powinny księgi zmarłych w czasie od T do $T + (t_2 - t_1)$, oznaczmy przez $U''(x_1, x_2)$ — tak, że:

$$U''(x_1, x_2) = S_1 S_2 W_2$$

Suma: $U'(x_1, x_2) + U''(x_1, x_2) = S_1 W_1 S_2 + S_1 S_2 W_2 = S_1 W_1 S_2 W_2$ oznacza liczbę zmarłych w wieku od x_1 do x_2 i w czasie od $T - (t_2 - t_1)$ do $T + (t_2 - t_1)$, z pośród urodzonych w czasie od t_1 do t_2 .

W praktyce więc, spis ludności powinien nam dać: $S(T) = B_1 S_1 S_2 B_2$, a księgi zmarłych: $U'(x_1, x_2) = S_1 W_1 S_2$ i $U''(x_1, x_2) = S_1 S_2 W_2$.

Ponieważ zaś:

$$B_1 W_1 S_2 B_2 = B_1 S_1 S_2 B_2 + S_1 W_1 S_2, \text{ t. j. } Z(x_1) = S(T) + U'(x_1, x_2), \text{ a}$$

$$B_1 S_1 W_2 B_2 = B_1 S_1 S_2 B_2 - S_1 S_2 W_2, \text{ t. j. } Z(x_2) = S(T) - U''(x_1, x_2)$$

zatem jeden spis ludności i odpowiednio prowadzone księgi zmarłych, dać nam powinny i mogą wszystko, co do zupełnie ścisłego oznaczenia prawdopodobieństwa

$$p = \frac{Z(x_2)}{Z(x_1)}$$

jest potrzebne.

Przypuśćmy np., że w d. 1 stycznia 1880 r. odbył się spis ludności, t. j. $T = 1880$ (1 styczeń), i że bierzemy pod uwagę pokolenie urodzonych w 1860-m roku, t. j. $t_1 = 1860$ (1 styczeń), $t_2 = 1861$ (1 styczeń).

Wtedy:

$$x_1 = T - t_2 = 1880 - 1861 = 19 \text{ lat,}$$

$$x_2 = T - t_1 = 1880 - 1860 = 20 \text{ lat;}$$

$U'(19,20)$ oznacza liczbę zmarłych w 20-ym roku życia, w czasie od $T - (t_2 - t_1) = 1880 - (1861 - 1860) = 1880 - 1 = 1879$ (1 styczeń) do $T = 1880$ (1 styczeń), t. j. w ciągu 1879-go r., czyli *w ciągu roku bezpośrednio poprzedzającego spis*, z pośród urodzonych w 1860-ym roku;

$U''(19,20)$ oznacza liczbę zmarłych również w 20-ym roku życia, w czasie od $T = 1880$ (1 styczeń) do $T + (t_2 - t_1) = 1880 + (1861 - 1860) = 1880 + 1 = 1881$ (1 styczeń), t. j. w ciągu 1880-go roku, czyli *w ciągu roku bezpośrednio następującego po spisie*, także z pośród urodzonych w 1860-ym roku.

To cośmy dopiero powiedzieli o żyjących i zmarłych w 20-ym roku życia, stosuje się i do każdego innego wieku, czyli: *do obrachowania rocznych prawdopodobieństw dożycia dla członków pewnego społeczeństwa, spis ludności powinien nam dać liczbę żyjących każdego wieku w chwili spisu, z rozdzieleniem ich na daty urodzenia; a księgi zmarłych powinny dać, w każdym wieku również z podzieleniem na lata urodzenia, liczbę zmarłych w ciągu roku bezpośrednio poprzedzającego spis i bezpośrednio następującego po spisie.*

Pokazuje się ztąd, że spis ludności powinien być przeprowadzony według szematu:

T A B L I C A II.

Szemat dla danych, otrzymanych ze spisu ludności, odbytego w d. 1 stycznia 1880 r.

w wieku od lat do lat:	0 — 1	1 — 2	2 — 3	3 — 4	i t. d.
czyli z pośród urodzonych w ciągu roku:	1879	1878	1877	1876	i t. d.
znaleziono przy życiu d. 1 stycznia 1880 r.:	$S_0'(1880)$	$S_1'(1880)$	$S_2'(1880)$	$S_3'(1880)$	i t. d.

Zaś dane śmiertelności powinny być ułożone według szematów:

T A B L I C A III.

Szemat dla danych, wyciągniętych z ksiąg zmarłych w ciągu 1879-go r., t. j. w roku bezpośrednio poprzedzającym spis ludności, odbyty d. 1 stycznia 1880 r.

w wieku od lat do lat:	0 — 1		1 — 2		2 — 3		3 — 4		i t. d.
z pośród urodzonych w roku:	1879	1878	1878	1877	1877	1876	1876	1875	i t. d.
zmarło w ciągu 1879 r.:	$U'(0,1)$		$U'(1,2)$		$U'(2,3)$		$U'(3,4)$		i t. d.



T A B L I C A IV.

Szemat dla danych, wyciągniętych z ksiąg zmarłych w ciągu 1880-go r., t. j. w roku bezpośrednio następującym po spisie ludności, odbytym d. 1 stycznia 1880 r.

w wieku od lat do lat:	0 — 1		1 — 2		2 — 3		3 — 4		i t. d.
z pośród urodzo- nych w roku:	1880	1879	1879	1878	1878	1877	1877	1876	i t. d.
zmarło w cią- gu 1880 r.:	U''(0,1)		U''(1,2)		U''(2,3)		U''(3,4)		i t. d.

Mając takie dane, znajdziemy z nich:

$$\begin{aligned} Z(0) &= S_0^1(1880) + U'(0,1), & Z(1) &= S_1^1(1880) - U''(0,1) \\ Z(1) &= S_1^2(1880) + U'(1,2), & Z(2) &= S_2^1(1880) - U''(1,2) \\ Z(2) &= S_2^2(1880) + U'(2,3), & Z(3) &= S_3^1(1880) - U''(2,3) \\ &\text{i t. d.} & &\text{i t. d.,} \end{aligned}$$

a ztąd znów — podane w tablicy I prawdopodobieństwa:

$$p_1 = \frac{Z(1)}{Z(0)}, p_2 = \frac{Z(2)}{Z(1)}, p_3 = \frac{Z(3)}{Z(2)} \text{ i t. d.,}$$

które, jak wiemy, mogą posłużyć do ułożenia odpowiedniej tablicy śmiertelności.

Opisany sposób — każdy to chyba przyzna — jest bardzo prosty, zupełnie ścisły i nadzwyczaj jasny, przytem posiada tę wielką zaletę praktyczną, że wymaga każdorazowo tylko dwuletniej obserwacji, która nawet, dla bardzo licznego społeczeństwa, pozwala otrzymać, już w ciągu tak krótkiego czasu, racjonalnie ułożoną tablicę śmiertelności o poważnem znaczeniu naukowem (*).

Aby jednak można go było użyć, potrzeba ulepszyć dotychczasowy system gromadzenia danych śmiertelności, t. j. nie poprzestawać, jak dotąd, na noto-

(*) Ścisłość takiej tablicy wzrastać oczywiście będzie w miarę używania większej liczby spisów ludności, czyli — co na jedno wychodzi — większej liczby lat przez które gromadzimy materyjały.

Przy stosunkowo niewielkiej liczbie obserwowanych ludzi, tablica śmiertelności, otrzymana na podstawie jednego spisu, będzie naturalnie bardzo niedokładną. Niedostatek ten więc potrzeba wynagrodzić zbieraniem danych przez odpowiednio wielką liczbę lat, jak to powinno mieć miejsce dla pewnych ograniczonych grup osób, np.: dla ubezpieczających swe życie w odpowiednich instytucjach, dla mieszkańców jednego tylko miasta, dla oddających się pewnemu specjalnemu zawodowi i t. p.

waniu samego tylko wieku zmarłych, bez dat urodzenia, ale zastąpić wskazanym przez szematy podane w tablicy III i IV. Do tego znów niezbędnem, dla ścisłości, jest żądanie świadectw urodzenia, czyli tak zwanych metryk, przy spisywaniu aktów zejść i dopełnianiu spisu ludności, aby dokładnie można było odnotować daty urodzenia.

Przedstawia to wprawdzie dziś wiele trudności, przy dobrych jednak chęciach statystyków z powołania, trudności te, przynajmniej z czasem, usunąćby można. Korzyści zaś byłyby ogromne, gdyby bowiem—jak powiada Zeuner—w jakim większem społeczeństwie, księgi śmiertelności były corocznie prowadzone w powyżej podany sposób; wtedy każdy nowy spis ludności dostarczyłby nam nowego materyjału, z którego otrzymalibyśmy z czasem obraz ruchu ludności, zostawiający poza sobą, pod względem ścisłości matematycznej, wszystko, co dotąd statystyka w tym kierunku uczyniła.

Opisana metoda służy do ułożenia tablicy śmiertelności *współczesnych*, tak nazwanej dla tego, że się opiera na danych zebranych z obserwacji czynionych nad współcześnie żyjącymi. Uwydatnia ona prawo śmiertelności ludzi żyjących w jednej i téj samej epoce i dla tego może mieć bardzo ważne zastosowanie w praktyce, np. przy ubezpieczeniach życiowych i t. p., gdzie właśnie przedewszystkiem chodzi o prawo śmiertelności ludzi w obecnych warunkach bytu żyjących, a nie w takich, jakie przed wielu latami miały miejsce.

Od tablicy śmiertelności *współczesnych* odróżnić należy tablicę śmiertelności *rówienników*, dla ułożenia której obserwować trzeba pewien dostatecznie wielki zbiór ludzi, od chwili ich urodzenia do czasu ich śmierci. Tablicę taką można także, i to łatwiej, otrzymać przez porównanie liczby żyjących każdego wieku w pewnej chwili, np. w chwili spisu ludności, z ogólną liczbą wszystkich jednocześnie z nimi urodzonych (*).

Ponieważ jednak za granicę ludzkiego życia, w obecnych warunkach, można przyjąć sto lat; zatem, dla ułożenia tablicy śmiertelności *rówienników*, potrzeba posiadać albo stuletnią obserwację pewnej grupy jednocześnie urodzonych, albo liczbę corocznie, przez sto lat, rodzących się ludzi w uważanem społeczeństwie. Stanowi to niższość tablicy *rówienników* od tablicy *współczesnych*, potrzebującej każdorazowo tylko dwuletniej obserwacji.

Oprócz tego, tablica *współczesnych* posiada jeszcze tę wyższość, że przy jej układaniu mniejszy na nią wpływ wywiera wychództwo i napływ obcej ludności i wpływ ten łatwiej uwzględnić badaniem jego skutków w ciągu dwóch lat, aniżeli w ciągu lat stu, co jednak czyniłyby wypadało, gdybyśmy mieli na celu tablicę śmiertelności *rówienników*.

(*) Przy układaniu tablicy śmiertelności *współczesnych*, oblicza się z danych statystycznych ilości podane w kolumnie 2 tablicy I (str. 7); przy układaniu zaś tablicy śmiertelności *rówienników* — wprost ilości podane w kolumnie 4 tejże tablicy.

Knapp, w powołanem na wstępie dziełku, miał głównie na oku tablicę rówienników, Zeuner — tablicę współczesnych i ta różnica pomiędzy badaniem jednego i drugiego stała się jednym więcej powodem, dla którego, za podstawę do napisania niniejszej pracy, przyjęliśmy użytą przez Zeunera drogę. — Zresztą i metodą Zeunera łatwo dojść można do sposobu zbierania danych statystycznych, potrzebnych do ułożenia ścisłej tablicy śmiertelności rówienników.

K O N I E C.



Z ZAPOMÓG, UDZIELONYCH PRZEZ
KASĘ POMOCY
DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWEM,

do dnia 15-go marca r. 1884-go,

WYDANE ZOSTAŁY DZIEŁA NASTĘPUJĄCE:

BIBLIJOTEKI MATEMATYCZNO-FIZYCZNEJ, wydawanej pod redakcją *M. A. Baranieckiego*, następujące tomy:

Seryi I tom I: POCZĄTKI ARYTMETYKI *M. Berkmana*. Warszawa, 1884, w 12-ce, str. X, 266, z drzew. w tekście. Cena w oprawie kop. 65.

Seryi I tom II i III: WIADOMOŚCI POCZĄTKOWE Z FIZYKI *S. Kramsztyka*, Warsz., 1883, w 12-ce. — Książeczka I str. X, 77, drzew. 47. Cena w oprawie kop. 30. — Książeczka II str. VIII, 132, drzew. 56. Cena w oprawie kop. 45.

Seryi III tom I: ARYTMETYKA, kurs teoretyczny *M. A. Baranieckiego*, Wars., 1884, w 8-ce, str. LVIII, 375, z drzew. w tekście. Cena rub. 1 kop. 70.

Seryi IV tom IV: GEOMETRYJA ANALITYCZNA *W. Zajączkowskiego*. Warsz., 1884, w 8-ce Lex., str. XL, 511, drzew. 85. Cena rub. 3.

W druku znajdują się:

Seryi I tom IV: WIADOMOŚCI POCZĄTKOWE Z GEOGRAFII FIZYCZNEJ I METEOROLOGII *A. W. Witkowskiego*.

Seryi IV tom II: ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ LICZEBNYCH *J. Sochockiego*.

KRZYSZTOFA WARSZEWICKIEGO niewydane pisma, listy do znakomitych ludzi, tudzież inne dokumenty, odnoszące się do jego życia i działalności, wraz ze spisem dzieł tegoż autora, dotąd drukiem ogłoszonych, zebrał i wydał *Teodor Wierzbowski*. Warszawa, 1883, w 8-ce, str. VII, VII, 276. Cena rs. 2.

T. H. HUXLEY. Wykład biologii praktycznej. Za upoważnieniem autora przełożył z angielskiego *August Wrześniowski*, Prof. Uniwersytetu. Warszawa, 1883, w 8-ce, str. X, 271. Cena rs. 1.

SPRAWOZDANIA z piśmiennictwa naukowego polskiego w dziedzinie nauk matematycznych i przyrodniczych. Rok I. 1882. Warszawa, 1883, w 8-ce, str. VIII, 187. Cena rs. 1.

WYBÓR GRECKICH I ŁACIŃSKICH AUTORÓW pod redakcją *K. Kaszewskiego* i *A. Mierzyńskiego*. KORNELIUSA NEPOSA Żywoty znakomitych mężów, przekładał i objaśnienia historyczne dodał *A. Mierzyński*. Warszawa, 1883, w 8-ce, str. 361. Cena kop. 80.

J. SZASTECKI. Gramatyka czeska, wydana nakładem *Kazimierza Kaszewskiego*. Warszawa, 1884, w 8-ce, str. VIII, 205. Cena rs. 1 kop. 20.

ROCZNIK PEDAGOGICZNY. Przegląd postępów w dziedzinie wychowania i nauczania, wydawany staraniem i pod redakcją *S. Dicksteina*, przy współudziale wielu pedagogów. Tom II. 1882—1883. Warszawa, 1884, w 8-ce, str. IX, 470. Cena rs. 2.

~~~~~  
Na rzecz Kasy Pomocy Naukowej sprzedają się:

*Boberski W.* POWSTAWANIE GÓR I ŁĄDÓW. Warszawa, 1883, w 8-ce, str. 160. Cena kop. 25.

*Wierzbowski Teodor.* JAKÓB SOBIESKI KRÓLEWICZ. Dyaryusz wyprawy wiedeńskiej w 1683 r., w 200 jej rocznicę wydał w przekładzie i objaśnił. Warszawa, 1883, w 8-ce, str. VIII, 22. Cena kop. 50.

*Zieliński Dominik*, były obrońca przy senacie. O WEKSLACH (FRAGMENT). Wydanie pośmiertne. Warszawa, 1884, w 8-ce, str. IV, 410. Cena rs. 2 kop. 50.

~~~~~  
Skład główny powyższych dzieł w księgarni E. Wendego i sp.

Wyciąg z Ustawy Kasy pomocy dla osób, pracujących na polu naukowym, imienia Józefa Mianowskiego.

§ 1. Kasa pomocy Józefa Mianowskiego ma na celu udzielanie zapomóg pieniężnych, jednorazowych lub peryjodycznych, oraz pożyczek osobom pracującym na polu naukowym lub też osobom, które już poprzednio w tej dziedzinie dały się poznać ze swoich prac naukowych. Zadaniem Kasy może być również udzielanie takim osobom środków lub też pożyczek na cele naukowe.

§ 3. Fundusze Kasy stanowią: a) wkłady założycieli, b) jednorazowe i coroczne wnioski członków Kasy, c) dobrowolne ofiary na zasilenie Kasy, d) wpływy z publicznych prelekcji, koncertów i widowisk, urządzanych w celu powiększenia funduszy Kasy.

§ 7. Członkowie Kasy dzielą się na honorowych i rzeczywistych. Za honorowych członków uważają się ci, którzy ofiarują jednorazowo dla Kasy przynajmniej sto rubli. Do rzeczywistych zaś członków zaliczają się osoby, wnoszące corocznie do Kasy przynajmniej pięć rubli.

§ 9. Członkami Komitetu mogą być tylko osoby posiadające stopień naukowy.

§ 10. Komitet składa się z 12-u członków i wybiera ze swego łona większością głosów na lat dwa swego Prezesa i Vice-Prezesa.

§ 18. Komitet drukuje corocznie sprawozdanie z czynności Kasy...

§ 19. Kapitał obrotowy Kasy, przeznaczony na zapomogi jednorazowe i peryjodyczne oraz na pożyczki, składa się: a) z wniosków rzeczywistych członków Kasy, b) z połowy jednorazowych ofiar członków honorowych Kasy i jej założycieli, c) z procentów od wszystkich kapitałów Kasy i d) z wpływów z prelekcji publicznych, koncertów i widowisk.

§ 21. Sumy, wskazane w punkcie c § 3, zaliczają się do kapitału obrotowego lub zapasowego, zgodnie z życzeniem ofiarodawców.

§ 22. Wysokość zapomogi, jednorazowo lub też peryjodycznie w ciągu roku do jednych rąk z kapitału obrotowego wydawaną, nie może przenieść $\frac{1}{5}$ części kapitału obrotowego z poprzedniego roku.

Kasa mieści się w biurze Vice-Prezesa Kasy, St. Kronenberga (Mazowiecka, 18). Wszyscy Członkowie Komitetu przyjmują wkłady od Członków Kasy i ofiary jednorazowe, jak również podania o pożyczki i zapomogi. Przesyłki pieniężne przyjmuje Członek Komitetu, Kasyjer instytucji, Karol Deike (ul. hr. Berga, 3). W tenże sam sposób każdy otrzymać może USTAWĘ KASY i SPRAWOZDANIA Z CZYNNOŚCI.